LACHTAR Mohamed Aziz 11.00
J070 0279.tif CodEx = E014 Ins. = 13191/A 1AINF01

Feuille principale

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

1AINF01.E014.13

NOTE

11

11.00

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0,5
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	✓	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Ex1.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = A^T \Rightarrow$ A est symétrique

~~A~~ A est symétrique et les valeurs propres de A $\neq 0 \Rightarrow$ A inversible

~~* det~~

2) ~~det(A - λI)~~ Soit λ vp de A, $\lambda \in sp(A)$

$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] \cancel{+} \lambda - 3$

$= (3-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) + (\lambda - 3)$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7)$

donc $sp(A) = \{3, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}\}$ $\Rightarrow$ A est semi définie positive

cl: A est symétrique et définie positive alors A admet une factorisation de cholesky.

A

3) $A = BB^T$ tq B : matrice triangulaire inférieure

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

1ʳᵉ colonne de B:

$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$a_{11} = b_{11}^2 = 3 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{3}$

$a_{21} = b_{21} \cdot b_{11} = -1$

$\Rightarrow b_{21} = \frac{a_{21}}{b_{11}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$a_{31} = b_{31} \cdot b_{11} = 0 \Rightarrow b_{31} = 0$

2ᵉ colonne de B:

$a_{22} = b_{21}^2 + b_{22}^2 \Rightarrow b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}$
$= \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = b_{22}$

$a_{32} = b_{21} b_{31} + b_{32} b_{22} = -1$

$\Rightarrow b_{32} = \frac{a_{32} - b_{31} b_{21}}{b_{22}} = \frac{-1}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{4}$

A

3ᵉ colonne de B

$a_{33} = b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 3$

$\Rightarrow b_{33} = \sqrt{a_{33} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \frac{\sqrt{42}}{4}$

Donc $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix}$

4) $Ax = b \iff BB^T x = b$

$\cancel{BB^T b} \iff B^T B x = b$

$$Bx = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, x_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} x_2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} x_2 + \frac{\sqrt{42}}{4} x_3 \end{pmatrix} = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$B^T y = b$

$$B^T y \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\sqrt{6}/4 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\, y_1 - 1/\sqrt{3}\, y_2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} y_2 - \frac{\sqrt{6}}{4} y_3 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} y_3 \end{cases}$$

$$B^T y = b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\, y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 = 2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} y_2 - \frac{\sqrt{6}}{4} y_3 = 1 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = \frac{8}{\sqrt{42}} \\ y_2 = \frac{9\sqrt{42} + 7\sqrt{7}}{28} \\ y_1 = \left(\frac{7\sqrt{21} + 6\sqrt{54}}{84}\right)\sqrt{3} \end{cases}$$

$$Bx = b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\, x_1 = 0 \\ -1/\sqrt{3}\, x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} x_2 = 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} x_2 + \frac{\sqrt{42}}{4} x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{3\sqrt{6}}{9} \\ x_3 = \frac{9\sqrt{42}}{64} \end{cases}$$

5) $|a_{11}| = 3 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1$

$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| = 2$

$|a_{33}| = 3 > |a_{31}| + |a_{32}| = 2$

donc A est à diagonale strictement dominante donc A est inversible et les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent pour résoudre le système (S)

on a la relation $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2 = \cancel{8}$

$\Rightarrow \rho(J) > \sqrt{\rho(\mathcal{L}_1)}$

Ainsi la méthode de Gauss Siedel est plus rapide.

1

6) soit $w \in]0,2[$

A symétrique et définie positive de plus $w \in]0,2[$

Ainsi la méthode de relaxation converge pour résoudre (S) pour $w \in]0,2[$

1

7) a) on a :

$D\tilde{x}^{(k+1)} = (D-A)x^{(k)} + b$

$\Rightarrow \tilde{x}^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}b$

or $x^{(k+1)} = w\tilde{x}^{(k+1)} + (1-w)x^{(k)}$

$= w(D^{-1}(D-A))x^{(k)} + wD^{-1}b + (1-w)x^{(k)}$

$= (wD^{-1}(D-A) + (1-w)I_3)x^{(k)} + wD^{-1}b$

$\Rightarrow x^{(k+1)} = J_w x^{(k)} + b_w$

1

tq $J_w = wD^{-1}(D-A) + (1-w)I_3$

$b_w = wD^{-1}b$

de la forme : $\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ donnée} \\ x^{(k+1)} = J_w x^{(k)} + b_w \ \forall k \geq 0 \end{cases}$

b) pour $w = 1$

$J_1 = D^{-1}(D-A) \Rightarrow$ matrice d'itération de la méthode de Jacobi

$b_1 = D^{-1}B$

ccl : pour $w = 1 \Rightarrow$ elle correspond à la méthode de Jacobi

c) $J_w = w D^{-1}(D-A) + (1-w)I_3$

$\boxed{J_w = w J_1 + (1-w) I_3}$

d) ~~$J_w = D^{-1}$~~

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$(D-A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $D^{-1}(D-A) = J_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$w J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{w}{3} & 0 \\ \frac{w}{3} & 0 & \frac{w}{3} \\ 0 & \frac{w}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$(1-w) I_3 = \begin{pmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & 0 \\ 0 & 0 & 1-w \end{pmatrix}$

$J_w = \begin{pmatrix} 0 & w/3 & 0 \\ \frac{w}{3} & 0 & w/3 \\ 0 & w/3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & 0 \\ 0 & 0 & 1-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w & w/3 & 0 \\ \frac{w}{3} & 1-w & \frac{w}{3} \\ 0 & \frac{w}{3} & 1-w \end{pmatrix}$

~~$\det J_w = | 1-w$~~

$\det(J_w - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-w-\lambda & w/3 & 0 \\ \frac{w}{3} & 1-w-\lambda & w/3 \\ 0 & \frac{w}{3} & 1-w-\lambda \end{vmatrix}$

$-(1-w-\lambda) \begin{vmatrix} 1-w-\lambda & w/3 \\ \frac{w}{3} & 1-w-\lambda \end{vmatrix} - \frac{w}{3} \begin{vmatrix} w/3 & 0 \\ \frac{w}{3} & 1-w-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-w-\lambda) \left[(1-w-\lambda)^2 - \frac{w^2}{9} \right] - \frac{w}{3} \left(\frac{w}{3} (1-w-\lambda) \right)$

$= (1-w-\lambda) \left[(1-w-\lambda)^2 - \frac{2w^2}{9} \right]$

Ex 1 :

1) $|a_{11}| = 3 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1$

$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| = 2$

$|a_{33}| = 3 > |a_{31}| + |a_{32}| = 2$

donc A est à diagonale strictement dominante de plus A est symétrique $(A = A^T)$ donc A est inversible

LACHTAR Mohamed Aziz 11.00
J070 0282.tif CodEx = E014 Ins. = 13191/A 1AINFO1

Verso feuille suite

Ex2

1) • $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ 0,1

$\Rightarrow$ donc $A^T A$ est symétrique

• Soit λ une valeur propre de la matrice $A^T A$, $\lambda \in sp(A^T A)$

$\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $A^T A x = \lambda x$

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une b.o.n de $\mathbb{R}^n$

donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = (x_1, \dots, x_n)$

$A^T A x = \sum_{i=1}^{n} x_i A^T A f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda f_i = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$

donc $(A^T A x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow$ donc on aura $\lambda \geq 0$

donc $(A^T A x, x) \geq 0$ donc $A^T A$ est définie positive

CCL : A est symétrique définie positive

~~2) comme $\bar{x}$ sol du (S) : $Ax = b$~~

~~donc $\bar{x}$ solution~~ $\Rightarrow A^T A x = A^T b$ (~~car $A^T A$ est symétrique~~ définie positive) donc A

2) $A^T A$ est symétrique définie positive donc $A^T A$ est inversible

Comme $\bar{x}$ solution du (S) : $Ax = b$

Alors $\bar{x}$ solution du : $A^T A x = A^T b$ 1

3a) on sait que l'algorithme de la méthode du gradient α pas constant est

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ d^{(k)} = -\nabla J(x) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \alpha \end{cases}$$

or on sait que pour que cette méthode cv il faut que

$\alpha \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$

or puisque A est symétrique 1

donc $\|A\|_2 = \rho(A)$

Ainsi dans notre cas, la méthode (3) cv ssi $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|_2^2}$

II) Ex1

1) $Ax = b \iff BB^T x = b$

$\iff B^T B x = b$

$$Bx = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, x_1 \\ -1/\sqrt{3}\, x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} x_2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} x_2 + \frac{\sqrt{42}}{4} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y$$

$B^T y = b$

$$B^T y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} y_1 - 1/\sqrt{3}\, y_2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} y_2 - \frac{\sqrt{6}}{4} y_3 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} y_3 \end{pmatrix}$$

$$B^T y = b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 = 2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{4} y_3 = 1 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{8}{\sqrt{42}} \\ y_2 = \frac{2\sqrt{42}+7\sqrt{7}}{27} \\ y_3 = \left(\frac{7\sqrt{21}+6\sqrt{14}}{84}\right)\sqrt{3} \end{cases}$$

$$Bx = y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\, x_1 = \frac{8}{\sqrt{42}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} x_2 = \frac{2\sqrt{42}+7\sqrt{7}}{28} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} x_2 + \frac{\sqrt{42}}{4} x_3 = \left(\frac{7\sqrt{21}+6\sqrt{14}}{84}\right)\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4\sqrt{14}}{21} \\ x_2 = \frac{3}{2\sqrt{6}}\left(\frac{4\sqrt{42}}{63} + \frac{2\sqrt{42}+7\sqrt{7}}{28}\right) \\ x_3 = \left(\left(\frac{7\sqrt{21}+6\sqrt{14}}{84}\right)\sqrt{3} + \frac{1}{\cancel{4}2}\,\frac{3}{2}\left(\frac{4\sqrt{42}}{63} + \frac{2\sqrt{42}+7\sqrt{7}}{28}\right)\right)\times\frac{4}{\sqrt{42}} \end{cases}$$

$$Bx = b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\, x_1 = 2 \\ -1/\sqrt{3}\, x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} x_2 = 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} x_2 + \frac{\sqrt{42}}{4} x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/\sqrt{3} \\ x_2 = \frac{3\sqrt{6}}{7} \\ x_3 = \frac{9\sqrt{42}}{64} \end{cases}$$

Verso feuille suite