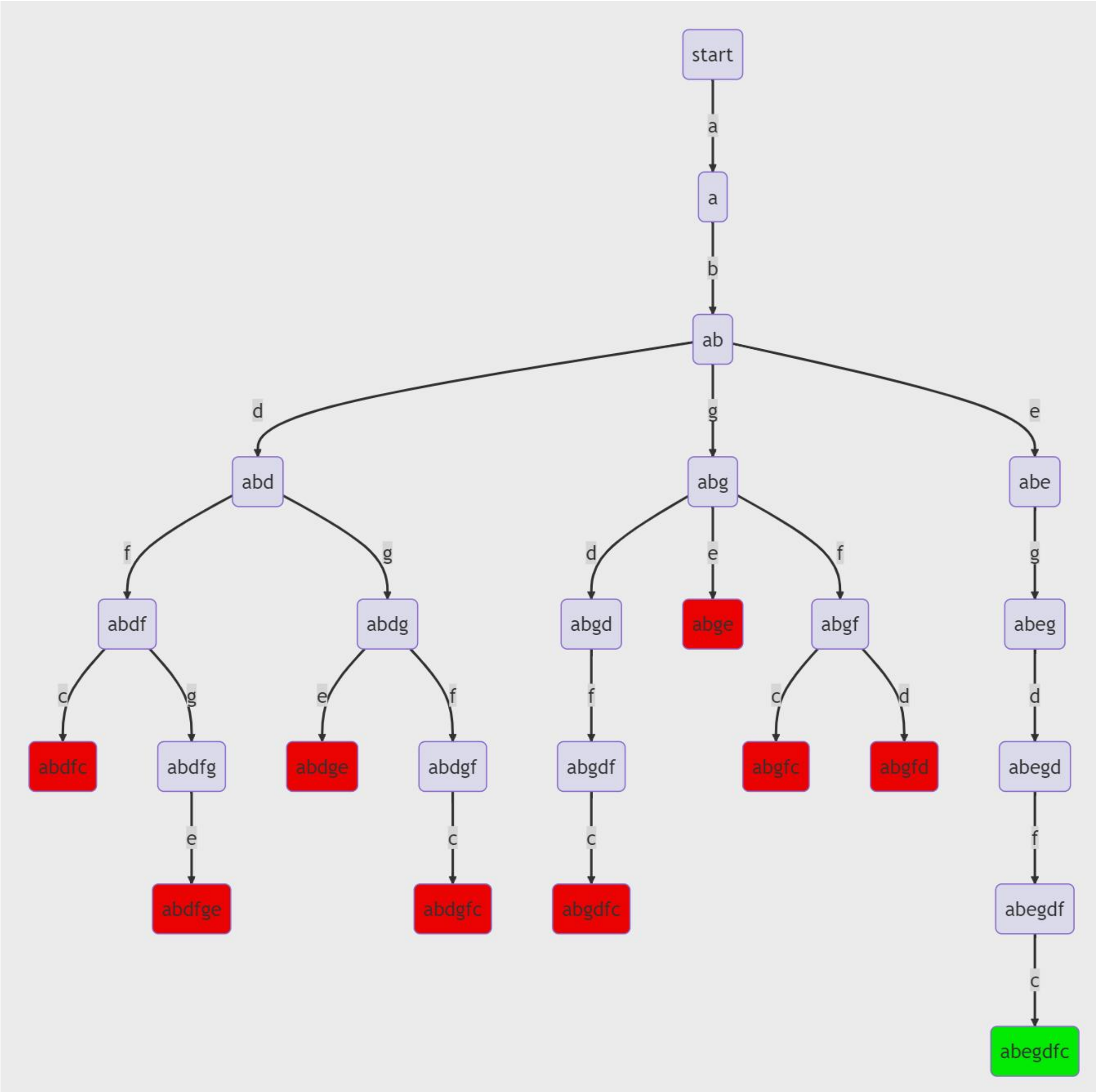
1.



解空间树：如上（仅画出了查找到第一条路径为止）。

搜索过程：从当前节点出发，遇到可以去到且当前路径上还未经过的节点，则将其作为解空间树中当前节点的子节点，同时添加到当前路径中。若无路可走，则删除当前路径上的当前节点，回溯到父节点再找一个合适的子节点继续搜索。

搜索结果：

①a-b-e-g-d-f-c-a

②......

2.

设需要找 m 元的零钱，最少硬币数为 n。

①对于一般的零钱总额，只需考虑 m-1 元、m-3 元、m-5 元的最少硬币数，因为 m 元的最少硬币数都是这三个总额+1，是增长硬币数最少的方式。因此 m 元的最少硬币数等于三者硬币数分别+1 的最小值。

②对于 3<m<5，不可能会用到 5 元找零，只需考虑 m-1、m-3 元

③对于 1<m<3，不可能会用到 3 元找零，只需考虑 m-1 元

④m=1、m=3、m=5 的最优解显然是 n=1，因此得到递推公式：

$$n(m)=\begin{cases}\min[n(m-1)+1],\ 1<m<3\\ \min[n(m-1)+1, n(m-3)+1],\ 3<m<5\\ \min[n(m-1)+1,\ n(m-3)+1,\ n(m-5)+1],\ m>5\end{cases}$$

其中 n(1) = n(3) = n(5) = 1

但由于最优解可能不止一种情况，状态表设置如下：它是一维的，记录了总额从 1-m 的最优组合。第 i 个位置记录的是找 i 元零钱硬币数最少的所有组合。

coin 是可使用硬币的所有面值集合，money 是找零总额。伪代码如下：

```
FindSolution(coin, money) {
    result = [] * (money + 1)   //建立长度为 result + 1 的数组，每个元素是空集合
                                //长度为 result + 1 是为了应对 m=0 的情况
    result[0].add([0, 0, 0])    //初始化：0 元

    for (c in coin) {   //初始化，与硬币本身面值相等的最优解就是只找一个该面值的硬币
        com ← []

        for (i=1 to coin.length())
            com.add(0)

        com[coin.index(c)] ← 1
        result[c].add(com)
    }

    for (i=2 to target) {   //从 2 元开始填状态表
        minSum ← INT_MAX   //记录 i 元时的最小硬币数，先赋一个很大的值

        //先计算 i 元时所需的最小硬币数
        for (c in coin) {
```

```
            if (c > i)   //硬币面值 c 比 i 还大，肯定不用 c 元硬币找零，不考虑
                pass
            else {
                for (com in result[i - c]) {
                    tempSum  ←  sum(com)
                    minSum  ←  min(tempSum, minSum)
                }
            }
        }

        //再计算满足最小硬币数的所有组合
        for (c in coin) {
            if (c > i)   //硬币面值 c 比 i 还大，肯定不用 c 元硬币找零，不考虑
                pass
            else {
                for (com in result[i - c]) {
                    if (sum(com) == minSum) {
                        combination  ←  com
                        combination[coin.index(c)]++
                        result[i].add(combination)
                    }
                }
            }
        }
    }

    return result[target]
}
```

求解本题时，coin = {1, 3, 5}，target = 9

状态表初始为：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]		[0, 1, 0]		[0, 0, 1]				

①2 元时，考虑 1 元的最少硬币数（1），因此硬币数最少只能为 2。且计算所有情况后，得出都是 2 个 1 元

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]		[0, 0, 1]				

②4 元时，考虑 1 元和 3 元的最少硬币数（1、1），因此硬币数最少只能为 2。且计算所有情况后，得出都是 1 个 1 元和 1 个 3 元

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]	[1, 1, 0]	[0, 0, 1]				

③6 元时，考虑 1、3、5 元的最少硬币数（1、1、1），因此硬币数最少只能为 2。且计算所有情况后，得出 1 个 1 元和 1 个 5 元、2 个 3 元

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]	[1, 1, 0]	[0, 0, 1]	[1, 0, 1] [0, 2, 0]			

④7 元时，考虑 2、4、6 元的最少硬币数（2、2、2），因此硬币数最少只能为 3。且计算所有情况后，得出 2 个 1 元和 1 个 5 元、1 个 1 元和 2 个 3 元

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]	[1, 1, 0]	[0, 0, 1]	[1, 0, 1] [0, 2, 0]	[2, 0, 1] [1, 2, 0]		

⑤8 元时，考虑 3、5、7 元的最少硬币数（1、1、3），因此硬币数最少为 2。且计算所有情况后，得出都是 1 个 3 元和 1 个 5 元

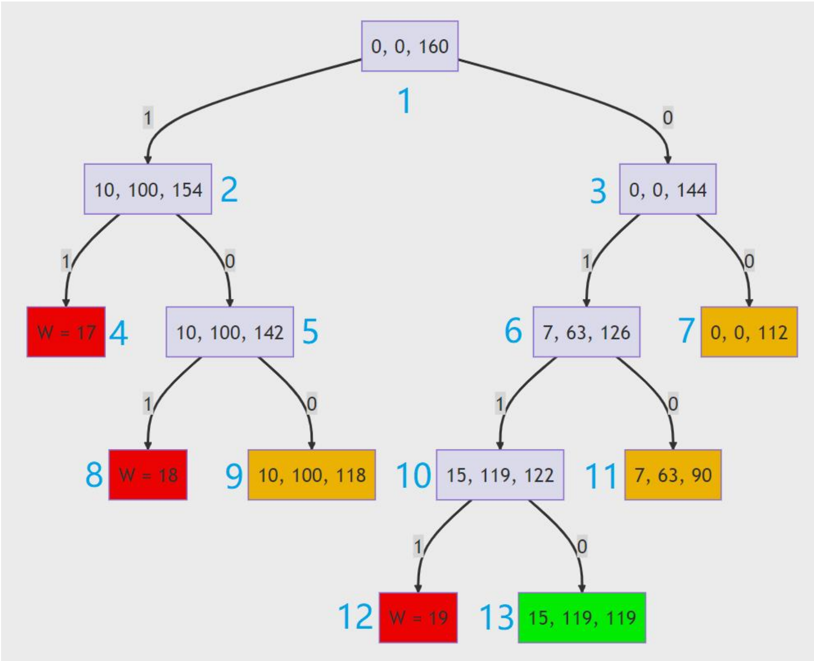
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]	[1, 1, 0]	[0, 0, 1]	[1, 0, 1] [0, 2, 0]	[2, 0, 1] [1, 2, 0]	[0, 1, 1]	

⑥9 元时，考虑 4、6、8 元的最少硬币数（2、2、2），因此硬币数最少只能为 3。且计算所有情况后，得出 1 个 1 元和 1 个 3 元和 1 个 5 元、3 个 3 元

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0, 0, 0]	[1, 0, 0]	[2, 0, 0]	[0, 1, 0]	[1, 1, 0]	[0, 0, 1]	[1, 0, 1] [0, 2, 0]	[2, 0, 1] [1, 2, 0]	[0, 1, 1]	[1, 1, 1] [0, 3, 0]

⑦得出结论：用 1、3、5 元硬币找 9 元的零钱，最少需要 3 个硬币，且所有组合为：[1, 1, 1]、[0, 3, 0]

3.



解空间树：如上

搜索过程：

0.价值上界计算方法（设当前包内总价值为 v，总重量为 w，剩余价值为 r）：

$$ub = v + r = v + (\max\left\{\frac{v_i}{w_i}\right\}_{\text{未放入}}) \times (16 - w)$$

1.从根节点出发，计算左右孩子的价值上界

Node1： w = 0, v = 0, d_{best} = 10, ub = 0 + 10 * 16 = 160

Node2： w = 10, v = 100, d_{best} = 9, ub = 100 + 9 * 6 = 154

Node3： w = 0, v = 0, d_{best} = 9, ub = 0 + 9 * 16 = 144

2.当前叶结点的 ub 中，结点 2（154）最大，从其开始计算

Node4： w = 17 > 16

Node5： w = 10, v = 100, d_{best} = 7, ub = 100 + 7 * 6 = 142

3.当前叶结点的 ub 中，结点 3（144）最大，从其开始计算

Node6： w = 7, v = 63, d_{best} = 7, ub = 63 + 7 * 9 = 126

Node7： w = 0, v = 0, d_{best} = 10, ub = 0 + 7 * 16 = 112

4.当前叶结点的 ub 中，结点 5（142）最大，从其开始计算

Node8：$w = 18 > 16$

Node9：$w = 10, v = 100, d_{best} = 3, ub = 100 + 3 * 6 = 118$

5.当前叶结点的 ub 中，结点 6（126）最大，从其开始计算

Node10：$w = 15, v = 119, d_{best} = 3, ub = 119 + 3 * 1 = 122$

Node11：$w = 7, v = 63, d_{best} = 3, ub = 63 + 3 * 9 = 90$

6.当前叶结点的 ub 中，结点 10（122）最大，从其开始计算

Node12：$w = 19 > 16$

Node13：$w = 15, v = 119, d_{best} = 0, ub = 119 + 0 * 1 = 119$

7.找到一种可能解，检查其他叶结点：

$ub_7 = 112 < 119$

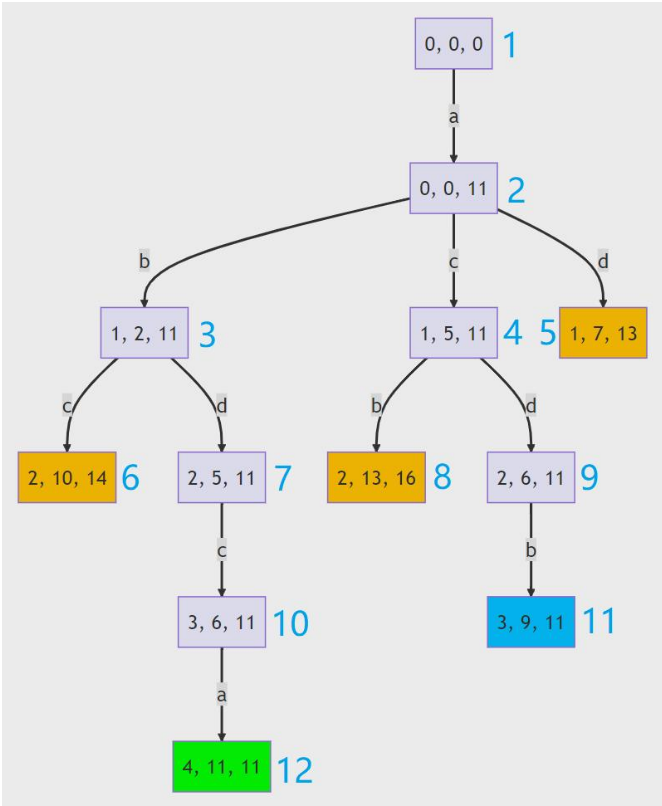
$ub_9 = 118 < 119$

$ub_{11} = 90 < 119$

其他叶结点的 ub 都比 119 小，故不用再搜索

搜索结果：最优解为装入物品 2 和 3

4.



解空间树：如上

搜索过程：

0.路径长度下界计算方法（设当前路径总长度为 l，总边数为 n，剩余路径长度为 r）：$lb = l + r = l + \sum_{i=1}^{4-n} \min\{l_{未放入}\}$

1.从根节点出发，计算所有孩子的路径长度下界

Node2：l = 0, n = 0, len_{best} = (1, 2, 3, 5), lb = 0 + (1 + 2 + 3 + 5) = 11

Node3：l = 2, n = 1, len_{best} = (1, 3, 5), lb = 2 + (1 + 3 + 5) = 11

Node4：l = 5, n = 1, len_{best} = (1, 2, 3), lb = 5 + (1 + 2 + 3) = 11

Node5：l = 7, n = 1, len_{best} = (1, 2, 3), lb = 7 + (1 + 2 + 3) = 13

2.当前叶结点的 lb 中，结点 3（11）最小（假设 lb 相等时，取结点编号最小的），从其开始计算

Node6：l = 10, n = 2, len_{best} = (1, 3), lb = 10 + (1 + 3) = 14

Node7：$l = 5, n = 2, len_{best} = (1, 5), lb = 5 + (1 + 5) = 11$

3.当前叶结点的 lb 中，结点 4（11）最小，从其开始计算

Node8：$l = 13, n = 2, len_{best} = (1, 2), lb = 13 + (1 + 2) = 16$

Node9：$l = 6, n = 2, len_{best} = (2, 3), lb = 6 + (2 + 3) = 11$

4.当前叶结点的 lb 中，结点 7（11）最小，从其开始计算

Node10：$l = 6, n = 3, len_{best} = (5), lb = 6 + (5) = 11$

5.当前叶结点的 lb 中，结点 9（11）最小，从其开始计算

Node11：$l = 9, n = 3, len_{best} = (2), lb = 9 + (2) = 11$

6.当前叶结点的 lb 中，结点 10（11）最小，从其开始计算

Node12：$l = 11, n = 4, len_{best} = (0), lb = 11 + (0) = 11$

7.找到一种可能解，检查其他叶结点：

$lb_5 = 13 > 11$

$lb_6 = 14 > 11$

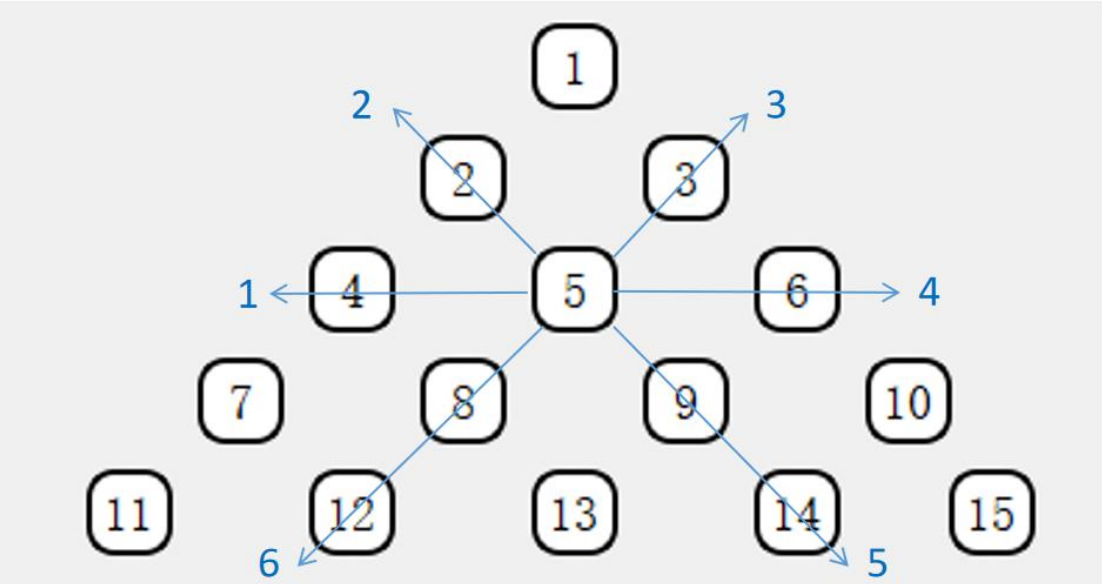
$lb_8 = 16 > 11$

$lb_{11} = 11 \geqslant 11$（lb 与可能解相等，也不需要再查找）

搜索结果：最优解为 a-b-d-c-a

5.

由题意，目标是要消去 13 个棒，而符合条件的移动每次可以消去一个棒，所以理论上最短步骤仅需 13 步就可达到目标。为求解该最短步骤，先做以下说明：



如图，每个插棒位置编号如下，每个空位可以接受来自这 6 个方向的跳跃（这六个方向均与图中最小等边三角形的边平行）。

例如：若 5 号为空，9、14 号有棒，根据规则 14 号上的棒可以越过其邻居 9 而落到 5 上，同时消去 9 上的棒，我们称这是 5 号位接受了方向 5 的跳跃。

因此，可以利用回溯法：

①用数组记录棋盘状态，栈记录移动步骤，集合记录当前棋盘上的空位置

②先遍历 13 号位的 6 个方向，若能接受某一方向的跳跃，则改变棋盘状态

③遍历跳跃过后棋盘中的每一个空位，对其进行递归查询

④为了不产生重复的解，②中一旦找到一个解，便停止循环

⑤若想找出最后棒回到原来位置的算法，则在找到一个解时判断最后接受跳跃的位置是否为原位即可

a.

①board 是一个结构体数组，记录棋盘每个位置的编号、是否为空等信息

②openlist 是一个集合，记录当前棋盘上的空位置

③solution 是一个栈，记录移动步骤

④Find 函数判断 num 号位能否接受 dir 方向的跳跃

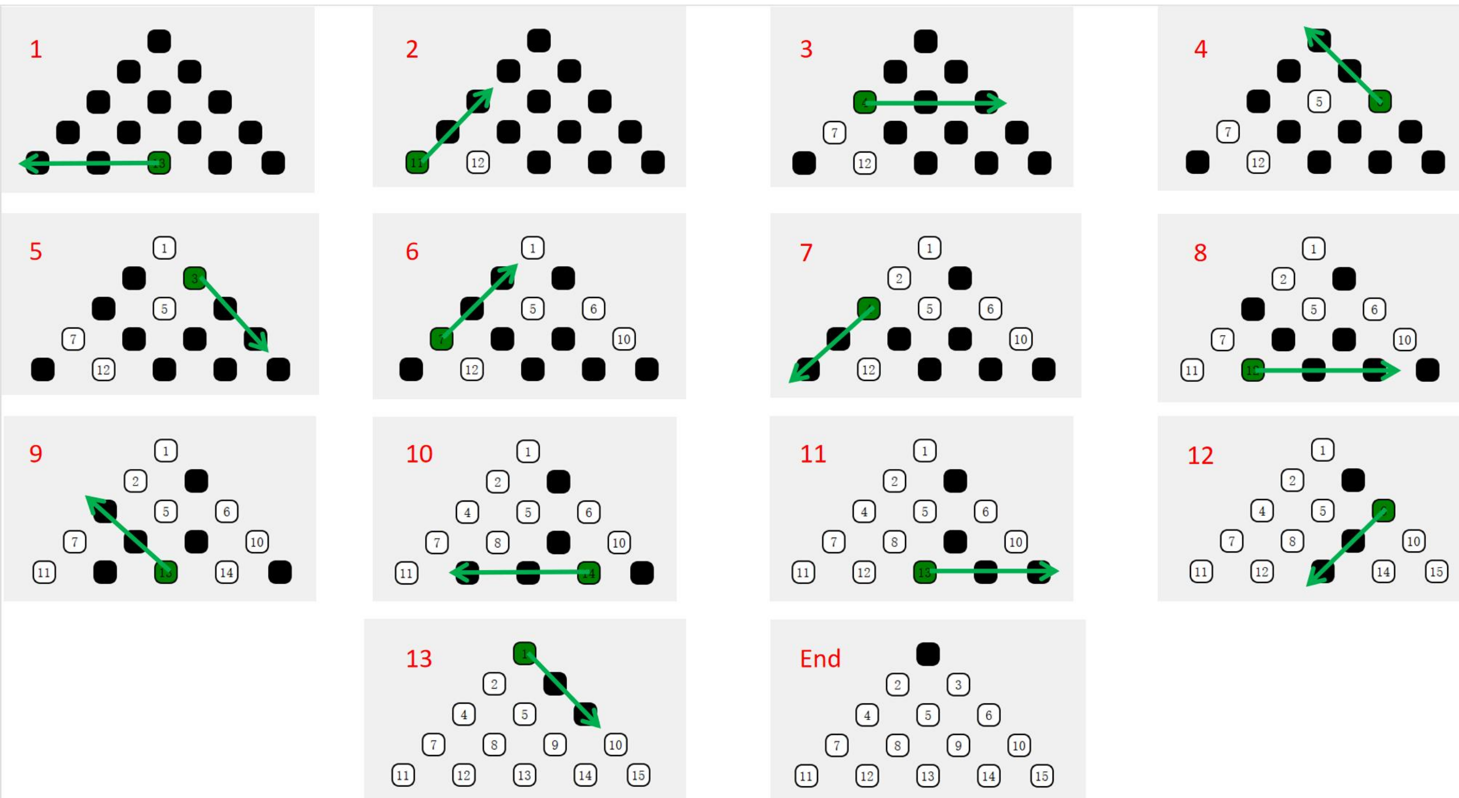
⑤Jump 函数通过改变 board 状态位、openlist 内容实现跳跃，同时将这一步记录在 solution 中

⑥Resume 函数实现某一次 Jump 操作的撤销

伪代码如下：

```
FindSolution(board, openlist, solution, num) {
    if (openlist.size == 14)
        print(solution)
        return true

    for (dir=0 to 5) {
        if (Find(board, num, dir) == true) {
            Jump(board, openlist, solution, num, dir)

            for (pos in openlist) {
                prime  ←  FindSolution(board, openlist, solution, pos)

                if (prime == true)
                    break
            }

            Resume(board, openlist, solution, num, dir)
        }
    }
}
```

求解时先对 board 进行初始化、将起点加入 openlist、把 solution 置为空，再调用 FindSolution(board, openlist, solution, 13)即可，其中一个解如下：

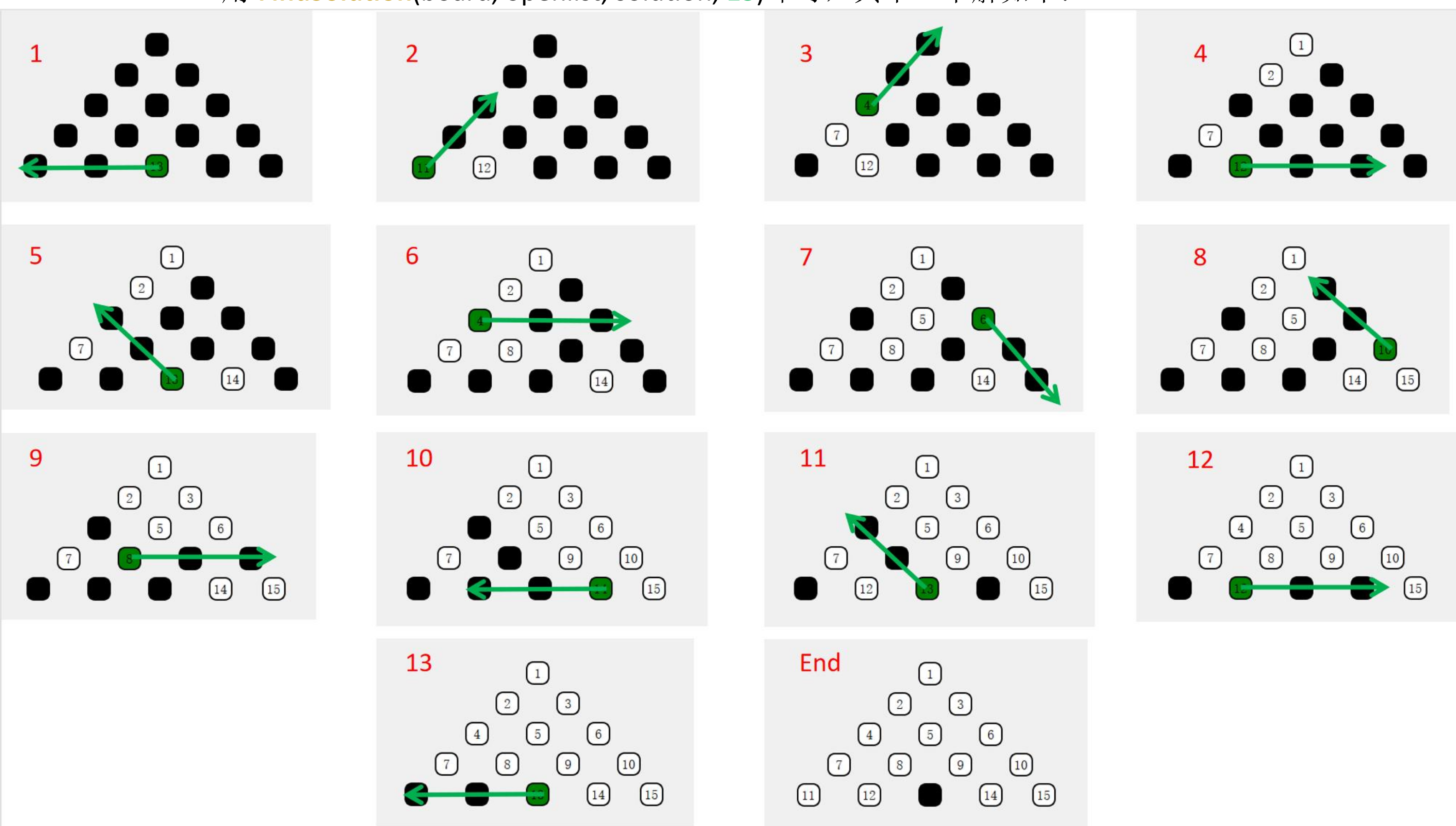


b.

只需在找到解的时候判断最后一步是否由起点位置接受跳跃即可，其余与 a 一致，伪代码如下：

```
FindSolution(board, openlist, solution, num) {
    if (openlist.size == 14 and solution.getTop().num == 13)    //最后一步回到起点
        print(solution)
        return true

    for (dir=0 to 5) {
        if (Find(board, num, dir) == true) {
            Jump(board, openlist, solution, num, dir)

            for (pos in openlist) {
                prime ← FindSolution(board, openlist, solution, pos)

                if (prime == true)
                    break
            }

            Resume(board, openlist, solution, num, dir)
        }
    }
}
```

求解时先对 board 进行初始化、将起点加入 openlist、把 solution 置为空，再调用 FindSolution(board, openlist, solution, 13)即可，其中一个解如下：



编程题：

由题意，需要找到一条路径使得黄金数量最大。对于某个特定的起点，寻找黄金数量最大的路线可采用回溯法查找。整个过程中有一个栈 currrent 记录当前路径、两个变量 currentValue 和 maxValue 记录当前黄金数量和当前最大黄金数量：

①统计当前位置上可行进的方向，若没有可行进方向，则看 currentValue 是否大于 maxValue，若是则更新 maxValue 的值

②若有可行进方向，则遍历每个可行进方向进行递归查询

③每一次递归查询完成后撤销当前这一步以完成回溯

这样可以通过回溯法，找到对于某个特定起点的最优解。然而起点并不是固定的，因此实际上需遍历 grid 中所有非 0 位置，进行①-③的过程，在得到的结果中取黄金数量最大的解，才能满足题目需要。

开销上，设 grid 大小为 m*n。由于要遍历所有非 0 位置（最多 mn 个），除了第一个位置外，其余位置都有三个可递归查询的方向（上下左右减去自己走过的方向），解空间可表示为三叉树，故**时间复杂度**为 $O(mn \cdot 3^{mn})$。空间上栈 current 最大只有 mn，而 grid、wayMark 固定为 mn，故**空间复杂度**为 $O(mn)$

代码如下（仅展示主体部分，其余函数的具体实现在 cpp 文件中）：

```
/**************************************************************************
  函数名称：getPointMaximumGold
  功    能：查找对于某一特定起点的最优解
  输入参数：vector<vector<maps>>& grid：表示金矿的网格
            vector<vector<bool>>& wayMark：标记当前路径走过的位置的二维数组
            stack<point>& current：记录当前路径的栈
            point& miner：矿工的当前位置
            int& currentValue：当前黄金数目
            int& maxValue：当前最优解黄金数目
  返 回 值：int：对于某一特定起点，最优解的黄金数目
  说    明：无
***************************************************************************/
int getPointMaximumGold(vector<vector<int>>& grid,
    vector<vector<bool>>& wayMark,
    stack<point>& current,
```

```
    point& miner,
    int& currentValue,
    int& maxValue)
{
    vector<point> next;  /*存放可行进位置的向量*/
    direction_count(grid, wayMark, next, miner);  /*统计可行进位置*/

    if (next.empty()) {  /*若无可行进位置，则找到一条路径，根据当前黄金数量更新最优解*/
        if (currentValue > maxValue)
            maxValue = currentValue;

        return maxValue;
    }

    for (auto iter = next.begin(); iter != next.end(); iter++)  /*若有可行进位置，则对每一个可行进方向进
行递归查询*/
    {
        walk(grid, wayMark, current, miner, *iter, currentValue);  /*前进*/

        getPointMaximumGold(grid, wayMark, current, miner, currentValue, maxValue);  /*递归查询*/

        back(grid, wayMark, current, miner, currentValue);  /*恢复*/
    }

    return maxValue;
}

/******************************************************************************
  函数名称：getMaximumGold
  功    能：查找黄金数量最大的路径
  输入参数：vector<vector<maps>>& grid：表示金矿的网格
  返 回 值：int：最优解的黄金数目
  说    明：无
******************************************************************************/
int getMaximumGold(vector<vector<int>>& grid)
{
    int maxValue = 0;  /*当前最大黄金数量*/
    stack<point> current;  /*当前路径*/
    vector<vector<bool>> wayMark(grid.size(), vector<bool>(grid[0].size(), false));  /*记录路径上经过位
置的二维数组*/

    for (int i = 0; i < grid.size(); i++)
    {
        for (int j = 0; j < grid[0].size(); j++)
```

```
        {
            if (grid[i][j]) {  /*遍历每个不为0的位置，让其作为起点*/
                point miner(i, j);              /*矿工在起点位置*/
                int currentValue = grid[i][j];  /*当前黄金数量，初始为起点的黄金数量*/
                wayMark[i][j] = true;  /*初始位置已走过，做上标记*/
                current.push(miner);   /*当前路径记录下起点*/

                getPointMaximumGold(grid, wayMark, current, miner, currentValue, maxValue);  /*找出这个起点的最优解*/

                wayMark[i][j] = false;  /*查找完成，标记取消*/
                current.pop();  /*查找完成，当前路径弹出起点*/
            }
        }
    }

    return maxValue;
}
```

运行结果：