Warshall算法

动态规划求传递闭包

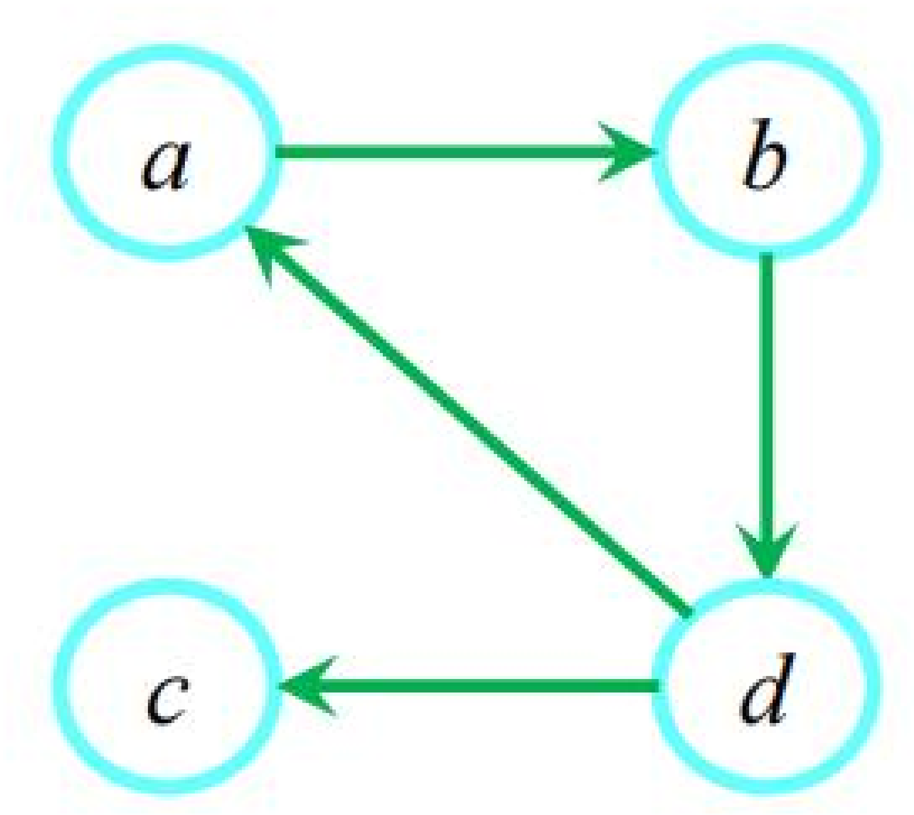
By Grant He

传递性连接

a -> **b** & **b** -> **d** & **d** -> **c**

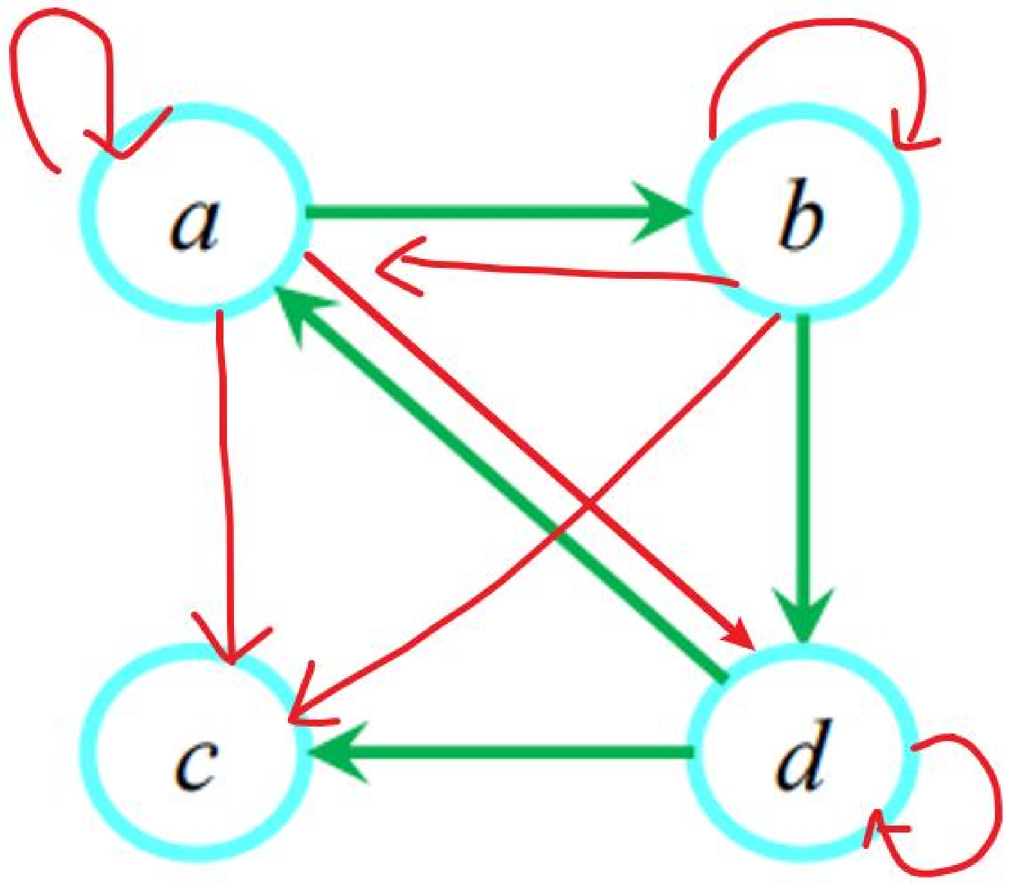
↓

a -> c



传递闭包

*每一个元素表示在有向图中，从一个顶点到另一个顶点是否存在一条路径



即求出所有的传递性连接

全部的传递性连接

第一种 定义法：例如 a -> b & b->c => a->c相当于做一次传递运算
例：a->b b->d d->e   -----> a->e 相当于两次运算

注意到，n个节点的邻接矩阵，如果两个点ij是有可达路径的，则i最多只需要经过n-1个节点便可以到j

所以，n个元素分别做1,2,..n-1次传递运算，然后求并集，便是所有可达通路的集合，也就是传递闭包

S = R ∪ R·R ∪ R·R·R ∪ ……. R·R·….·R

(0个中间点) (1个中间点) (1.2个中间点) (1. 2. 3. …n-1个中间点)

即

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

复杂度

- S = R ∪ R·R ∪ R·R·R ∪ .... R·R·....·R

并集运算： 每一个矩阵并都是n*n次比较，共比（n-1）*n*n次 -> $O(n^3)$

布尔矩阵乘法 $O(n^3)$ 共n-1个 ->$O(n^4)$

相加后，时间复杂度为 $O(n^4)$

动态规划法

- 定义法要不断显式地构建和更新传递闭包的矩阵
- 动态规划法在同一个矩阵上不停的运算，
  就不用计算矩阵乘法，或者n个矩阵再求并集了

动态规划思路

- 把求解问题分成多个阶段，按顺序求出子问题（最优化原理，最优子结构）

优化思路

$$S = R \cup R\cdot R \cup R\cdot R\cdot R \cup \ldots\ldots\ R\cdot R\cdot\ldots\cdot R$$

(0个中间点) (1个中间点) (2个中间点) (n-1个中间点)

即

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

1.先求出 只有一个中间点 只有两个及以下中间点 只有三个及以下中间点....有n-1个 中间点的可达路径的矩阵 最后n个矩阵求并

2. 先求出中间可以经过一个点的矩阵， 在这基础上求出 中间可以经过两个点的矩阵 在这基础上 求出中间可以经过三个点的矩阵....(都在同一个矩阵上)

优化思路

(R^k代表 一个有可以经过k及以下个中间点的可达路径 的矩阵)

1.最初状态，不加任何中间点 R^0（原本的邻接矩阵）

2.选择一个点作为中间点，计算R^1 （a->b b->c => a->c)

3.接着选第二个点（现在每条路径可以有两个及以下中间点）计算R^2

.... （a->b b->c c->d => a->d）$\in R^2$

n+1：计算出答案 R^n

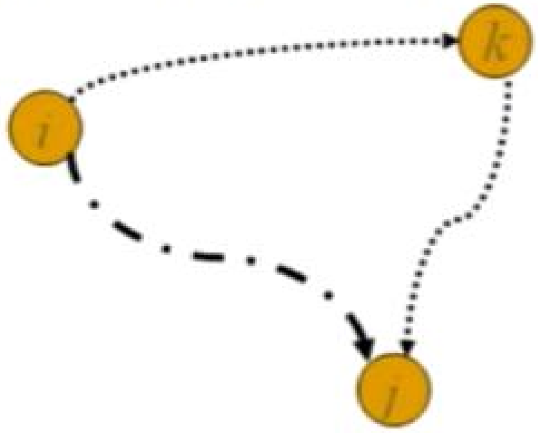
为了方便，选择点的时候可以按顺序选，这样R^k图中的任意一条由传递性而得来的路径中，不会有大于k的中间节点。

例如5->2 2->6，在 R^1中就不会推出5->6

怎样递推

如果在R^{k-1}存在一条从 i 到 j 的路径 那么R^k中也一定存在。（路径不会减少）

如果R^{k-1}中本身没有从 i 到 j 的路径，但在加入k时，发现存在i到k 和 k到j的两条路径，则i到j 就开辟了一条新路径



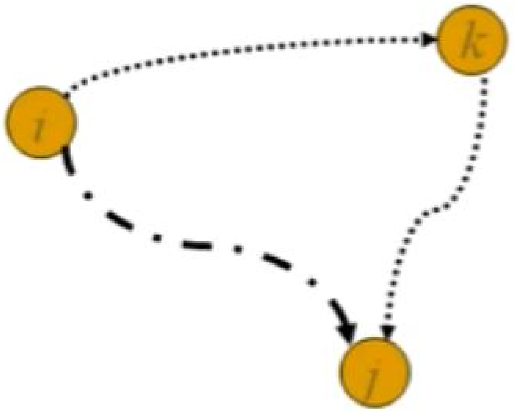
递推公式：

(i 代表起点，j代表终点)

$$R^k[i,j] = \begin{cases} R^{k-1}[i,j] \\ or \\ R^k[i,k] \text{ and } R^k[k,j] \end{cases}$$

(继承上一次的路径）

(开辟的新路径）



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以n = 4 为例

首先，开辟新路径的公式，i,j,k哪些可以变化

$R^k[i,k]$ and $R^k[k,j]$ ？？？

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以n = 4 为例

$R^k[i,k]$ and $R^k[k,j]$

选定k不变，

i与j分别取[1,2,3,4]

（对于每个起点，遍历每个终点，查看能否开辟新路径）

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R^k[i,k]$ and $R^k[k,j]$

k不变，i与j分别取[1,2,3,4]

例 k=1时

	$R^k[1,1]$	$R^k[1,2]$	$R^k[1,3]$	$R^k[1,4]$
$R^k[1,1]$				
$R^k[2,1]$				
$R^k[3,1]$				
$R^k[4,1]$				

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

·······

- 计算n次即可

每次计算ij n*n
计算n次
时间复杂度

$$O(n^3)$$

谢谢