

## 1.

由题意，可以将规则理解为车移动无阻。由于路径长度按走过的格子数计算，可以认为车每次向上下左右四个方向之一移动一个格子。设车初始在左上角，要去往右下角。

### a.

分析得出：

- ①走到右下角的路径最短，要求走到其他格子路径也要最短，满足最优子结构
- ②求到右下角的最短路径数，要反复求解到其他格子的最短路径数，满足重叠子问题
- ③存在一条贴着棋盘边界的最短路径
- ④车不会往上或往左这一步

因为一旦做了④，最终在回到右下角的情况下，需要用更多的步数抵消往上或往左的效果，而这显然会比③的路径长，定然不是最短路径。因此：

- ①车只会向右或向下，换句话说对于某一个车经过的格子 $(i, j)$ ，车会在某一步时，要么从左边 $(i, j-1)$ 过来，要么从上面 $(i-1, j)$ 过来，只有这两种情况。可以说，到达 $(i, j)$ 的路径数刚好等于到达 $(i-1, j)$ 的路径数加上 $(i, j-1)$ 的路径数。
- ②而到达 $(0, 0)$ 显然只有一种走法，到第一行或第一列的最短路径显然是从 $(0, 0)$ 走直线一种走法
- ③由于起点和终点在棋盘的对角线上，因此到每一个格子的最短路径数呈对角线对称，对角线元素有：

$$waycount[i][i] = waycount[i-1][i] \times 2$$

因此，用  $waycount[i][j]$  二维数组记录走到 $(i, j)$ 的最短路径数，有如下关系式：

$$waycount[i][j] = \begin{cases} 1, i = 0 \text{ or } j = 0 \\ waycount[i-1][j] \times 2, i = j \\ waycount[i-1, j] + waycount[i, j-1], \text{ else} \end{cases}$$

数组初始化为：

1	1	1	1	1	1	1	1
1							
1							
1							
1							
1							
1							
1							

由于填写的需要，按从左到右、从上到下填写，遇到对角线元素时取其正上方元素\*2，其余正常填写。填完上三角区域即可。得：

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1		6	10	15	21	28	36
1			20	35	56	84	120
1				70	126	210	330
1					252	462	792
1						924	1716
1							3432

因此有 3432 个最短路径

b.

由前面分析可知，车每一步只能向下或向右，使得  $i+1$  或  $j+1$ ，最终让  $i$  和  $j$  从 0 到 7。因此车在最短路径上移动的特征有：

①总共需要 14 步

②其中只有 7 步向下，7 步向右

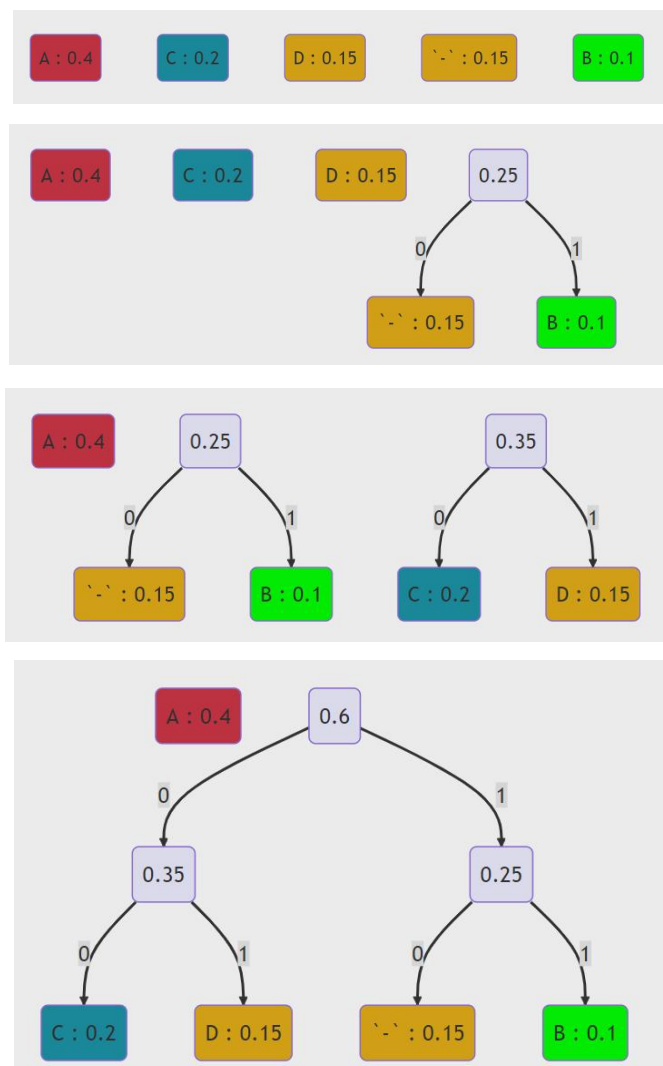
满足这两个条件一定能达成目标，因此求最短路径数时可以对移动的顺序进行排列组合：

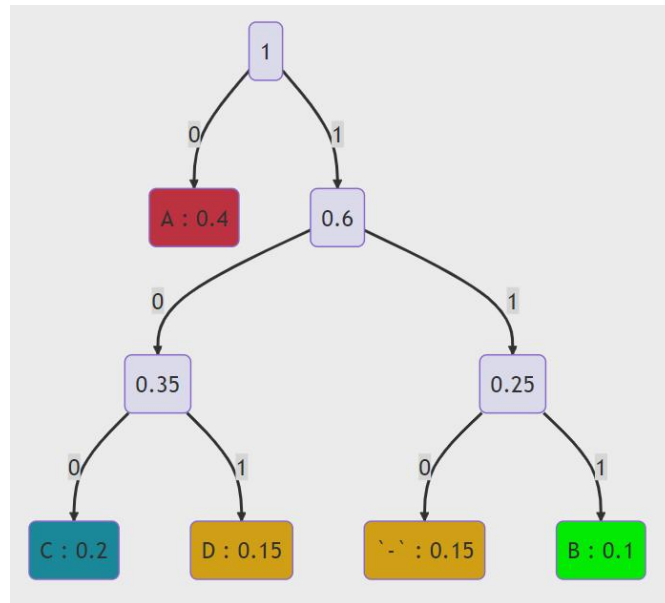
$$C_{14}^7 = 3432$$

因此有 3432 个最短路径

2.

a. 将各字符出现概率按从大到小排列，构造过程如下：





构造结果:

A: 0  
 B: 111  
 C: 100  
 D: 101  
 -: 110

**b.** ABACABAD 的编码是: 0 111 0 100 0 111 0 101

**c.** 编码分成: 100 0 101 110 0 101 0, 解码为: CAD-ADA