JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 00, Number 0, Pages 000–000
S 0000-0000(XX)0000-0

单摆的周期问题

BORIS JOBS

Résumé. 目标：求单摆周期．总体思路：1. 从能量的角度来得到每时每刻的速度值大小，通过速度值和每一时刻的时间与角度的微分关系得到微分方程式，进行积分，得到周期的公式；2. 从动力学角度来分析，通过微分方程解得角速度和时间的关系，进行积分，得到周期公式；3. 里面涉及的泰勒展开关系和级数一致收敛与可积性会进行深入讨论．

Table des matières

Key words and phrases. Pendulum, Series.

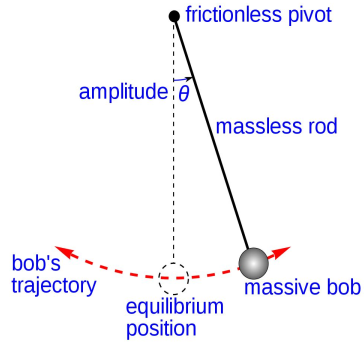

Figure 1. 单摆问题的物理模型，以轻绳的最顶端为原点，水平向右为 x 轴正方向建立坐标系，其中角度 θ 的取值范围定为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，而绳长设为 l.

Première partie 1. 能量定律角度

1. 动能定理

如图1，是单摆的物理模型：假设小球初始位置绳与竖直方向夹角为 θ_0 $(0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2})$，初速度为零无外力作用释放小球，末时刻轻绳与竖直方向夹角为 θ，从动能定理可以得到小球位于每个位置时的速率大小：

$$mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.1}$$

解得：

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{1.2}$$

对于给定时刻 t 的微小时刻 dt 内，满足关系式：

$$dt = -\frac{ld\theta}{v} \tag{1.3}$$

将速度 v 代入式(1.3) 得到：

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{1.4}$$

2. 第一类完全椭圆积分

我们从小球在初始位置到小球到绳子底部进行积分：

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

做变换，凑第一类完全椭圆积分：

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}}} \tag{2.2}$$

此处令：$\sin\alpha = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}$，那么：

$$\theta = 2\arcsin(\sin\alpha\sin\frac{\theta_0}{2}) \tag{2.3}$$

微分：

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\alpha\ d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\frac{\theta_0}{2}}} \tag{2.4}$$

代入上述推导中：

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{2.5}$$

3. $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开

其中：$k^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$，式(2.5) 中的积分即为第一类完全椭圆积分．将被积函数进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} &= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\alpha + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n k^{2n}\sin^{2n}\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}k^{2n}\sin^{2n}\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha\end{aligned} \tag{3.1}$$

将展开式代入积分之中，得到：

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha\right)d\alpha \tag{3.2}$$

4. 幂级数的一致收敛性质

令级数为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \tag{4.1}$$

其中 $x = k\sin\alpha = \sin\frac{\theta}{2}$，故 $|x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$，对于等式右边的级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n} \tag{4.2}$$

由 d' Alembert 判别法：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \tag{4.3}$$

故收敛半径 R=1. 当 x=1 时，由 Raabe 判别法：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1 \tag{4.4}$$

可知 $x=\pm 1$ 时幂级数发散，即其收敛域为 $(-1,1)$. 而：

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.5}$$

当 $|x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha$ 关于 α 在 $[-\theta_0,\theta_0]$ 一致收敛，由幂级数的逐项可积性可知级数的积分求和符号次序可交换：

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha\right)d\alpha \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha\ d\alpha\right) \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\alpha\ d\alpha\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

由 Wallis 公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \tag{4.7}$$

代入 T 的表达式中：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{4.8}$$

即：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\cdots\right] \tag{4.9}$$

Deuxième partie 2. 牛顿第二定律角度

5. 动力学分析

由牛顿第二定律：

$$mg\sin\theta = -ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{5.1}$$

令 $\omega=-\frac{d\theta}{dt}$，化简上式得：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{l}\sin\theta \tag{5.2}$$

将 dt 与 $d\theta$ 得关系代入：

$$d\omega = \frac{g}{l}\sin\theta\left(-\frac{d\theta}{\omega}\right) \tag{5.3}$$

即：

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l}\sin\theta d\theta \tag{5.4}$$

进行积分：

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + C \tag{5.5}$$

而在初始时刻 $\omega=0$，$\theta=\theta_0$，故得 $C=-\frac{g}{l}\cos\theta_0$，即：

$$\frac{\omega^2}{2}=\frac{g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0) \tag{5.6}$$

得到：

$$\frac{1}{\omega}=\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \tag{5.7}$$

由 $dt=-\frac{d\theta}{\omega}$ 得：

$$dt=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \tag{5.8}$$

此时讨论可以回到式(1.4) 进行讨论 .

Troisième partie 3. 近似公式与有问题的近似

6. 从椭圆积分上近似

由式(2.5) 可知：

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\alpha}} \tag{6.1}$$

当单摆初始角度很小时，可以有近似 $\theta_0\to 0$，此时 $\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\alpha}\to 0$，所以得到：

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6.2}$$

7. 从动力学分析上近似

在单摆初始角度很小的过程中，$\sin\theta\sim\theta$，故式(5.1) 可以简化为：

$$mg\theta=-ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.1}$$

即：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{7.2}$$

其通解为：

$$\begin{aligned}\theta(t)&=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\\&=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t-\arctan\frac{C_2}{C_1})\end{aligned} \tag{7.3}$$

其周期为：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.4}$$

Quatrième partie 4. 问题的关键

问题的关键在于用无论动能定理或是牛顿第二定律推导出 dt 和 $d\theta$ 之间的关系，然后代入 t 和 θ 的初值进行积分，从而得到 $T=f(\theta_0)$ 的完整表达式，即式(4.9).

Email address : 1322553126@qq.com