

单摆的周期问题

BORIS JOBS

RÉSUMÉ. 目标：求单摆周期。总体思路：1. 从能量的角度来得到每时每刻的速度值大小，通过速度值和每一时刻的时间与角度的微分关系得到微分方程式，进行积分，得到周期的公式；2. 从动力学角度来分析，通过微分方程解得角速度和时间的关系，进行积分，得到周期公式；3. 里面涉及的泰勒展开关系和级数一致收敛与可积性会进行深入讨论。

TABLE DES MATIÈRES

partie 1. 能量定律角度	2
1. 动能定理	2
2. 第一类完全椭圆积分	2
3. $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开	3
4. 幂级数的一致收敛性质	3
partie 2. 牛顿第二定律角度	4
5. 动力学分析	4
partie 3. 近似公式与有问题的近似	5
6. 从椭圆积分上近似	5
7. 从动力学分析上近似	5
partie 4. 问题的关键	5

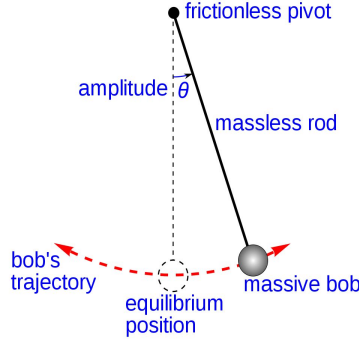


FIGURE 1. 单摆问题的物理模型，以轻绳的最顶端为原点，水平向右为 x 轴正方向建立坐标系，其中角度 θ 的取值范围定为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，而绳长设为 l 。

Première partie 1. 能量定律角度

1. 动能定理

如图1，是单摆的物理模型：假设小球初始位置绳与竖直方向夹角为 θ_0 ($0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$)，初速度为零无外力作用释放小球，末时刻轻绳与竖直方向夹角为 θ ，从动能定理可以得到小球位于每个位置时的速率大小：

$$(1.1) \quad mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2$$

解得：

$$(1.2) \quad v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

对于给定时刻 t 的微小时刻 dt 内，满足关系式：

$$(1.3) \quad dt = -\frac{l d\theta}{v}$$

将速度 v 代入式(1.3) 得到：

$$(1.4) \quad dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

2. 第一类完全椭圆积分

我们从小球在初始位置到小球到绳子底部进行积分：

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{T}{4} &= -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \end{aligned}$$

做变换，凑第一类完全椭圆积分：

$$(2.2) \quad \frac{T}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}}$$

此处令: $\sin \alpha = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}$, 那么:

$$(2.3) \quad \theta = 2 \arcsin(\sin \alpha \sin \frac{\theta_0}{2})$$

微分:

$$(2.4) \quad d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}$$

代入上述推导中:

$$(2.5) \quad \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

3. $(1+x)^\alpha$ 的 TAYLOR 展开

其中: $k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$, 式(2.5) 中的积分即为第一类完全椭圆积分. 将被积函数进行 Taylor 展开:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \alpha + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha \end{aligned}$$

将展开式代入积分之中, 得到:

$$(3.2) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha \right) d\alpha$$

4. 幂级数的一致收敛性质

令级数为:

$$(4.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

其中 $x = k \sin \alpha = \sin \frac{\theta}{2}$, 故 $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 对于等式右边的级数:

$$(4.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$

由 d' Alembert 判别法:

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

故收敛半径 $R=1$. 当 $x=1$ 时, 由 Raabe 判别法:

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{2} < 1$$

可知 $x = \pm 1$ 时幂级数发散, 即其收敛域为 $(-1, 1)$. 而:

$$(4.5) \quad \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

当 $|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha$ 关于 α 在 $[-\theta_0, \theta_0]$ 一致收敛, 由幂级数的逐项可积性可知级数的积分求和符号次序可交换:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha \right) d\alpha \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha d\alpha \right) \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha d\alpha \right) \end{aligned}$$

由 Wallis 公式:

$$(4.7) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

代入 T 的表达式中:

$$(4.8) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right)$$

即:

$$(4.9) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]$$

Deuxième partie 2. 牛顿第二定律角度

5. 动力学分析

由牛顿第二定律:

$$(5.1) \quad mg \sin \theta = -ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

令 $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$, 化简上式得:

$$(5.2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{l} \sin \theta$$

将 dt 与 $d\theta$ 得关系代入:

$$(5.3) \quad d\omega = \frac{g}{l} \sin \theta \left(-\frac{d\theta}{\omega} \right)$$

即:

$$(5.4) \quad \omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta$$

进行积分:

$$(5.5) \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \theta + C$$

而在初始时刻 $\omega = 0$, $\theta = \theta_0$, 故得 $C = -\frac{g}{l} \cos \theta_0$, 即:

$$(5.6) \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

得到:

$$(5.7) \quad \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

由 $dt = -\frac{d\theta}{\omega}$ 得:

$$(5.8) \quad dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

此时讨论可以回到式(1.4)进行讨论.

Troisième partie 3. 近似公式与有问题的近似

6. 从椭圆积分上近似

由式(2.5)可知:

$$(6.1) \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \alpha}}$$

当单摆初始角度很小时, 可以有近似 $\theta_0 \rightarrow 0$, 此时 $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \alpha} \rightarrow 1$, 所以得到:

$$(6.2) \quad T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

7. 从动力学分析上近似

在单摆初始角度很小的过程中, $\sin \theta \sim \theta$, 故式(5.1)可以简化为:

$$(7.1) \quad mg\theta = -ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

即:

$$(7.2) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

其通解为:

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \theta(t) &= C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t \\ &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \arctan \frac{C_2}{C_1}) \end{aligned}$$

其周期为:

$$(7.4) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Quatrième partie 4. 问题的关键

问题的关键在于用无论动能定理或是牛顿第二定律推导出 dt 和 $d\theta$ 之间的关系, 然后代入 t 和 θ 的初值进行积分, 从而得到 $T = f(\theta_0)$ 的完整表达式, 即式(4.9).