Tarea 9

Boris Garcés

Tabla de Contenidos

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde el punto de vista geométrico.

a)

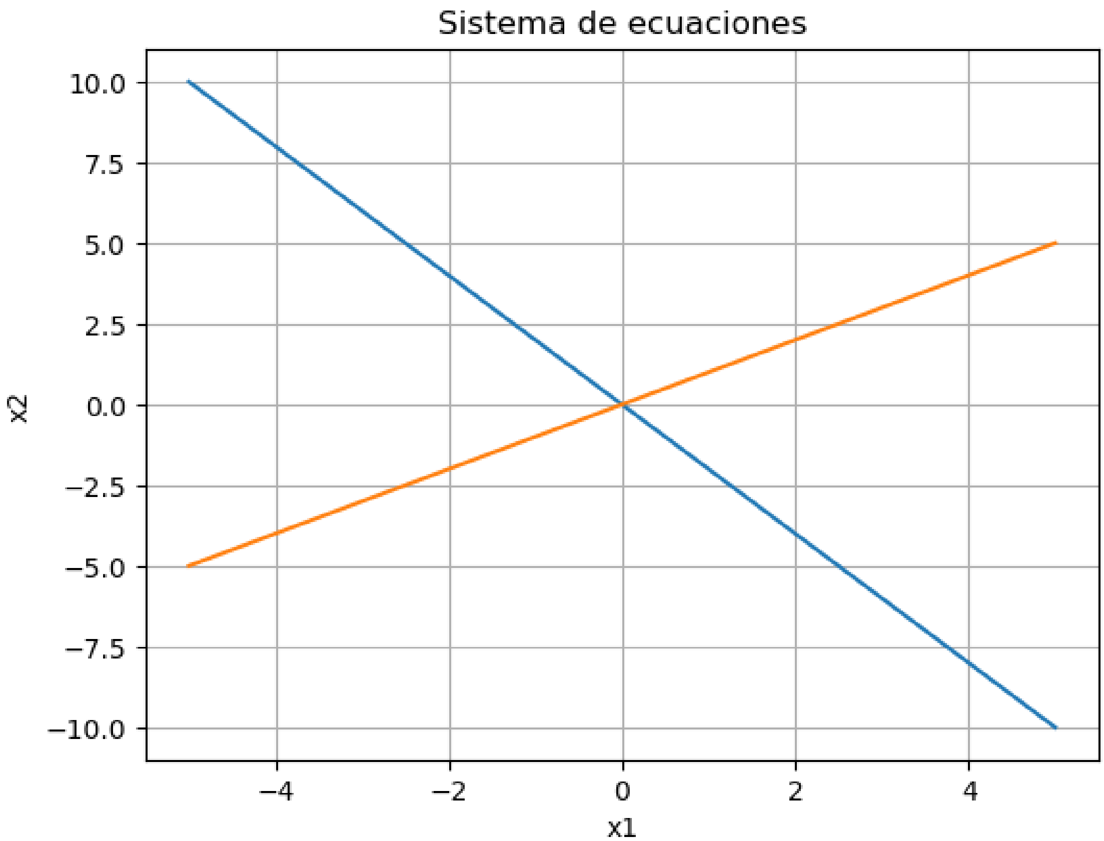
$x_1 + 2x_2 = 0$

$,x_1 - x_2 = 0$

Para resolver este ejercicio promero graficaremos las funciones correspondientes a cada ecuación.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x2 = np.linspace (-5, 5 , 100)
x1ec1= -2 * x2
x1ec2=x2
plt.plot(x2,x1ec1)
```

```
plt.plot(x2,x1ec2)
plt. title("Sistema de ecuaciones")
plt.grid(True)
plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.show()
```



El resultado del sistema de ecuaciones será la intersección de ambas funciones, en este caso el punto se encuentra en (0,0) por lo que el sistema tiene solución en $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, siendo esta una solución única debido a que solo existe un punto de intersección.

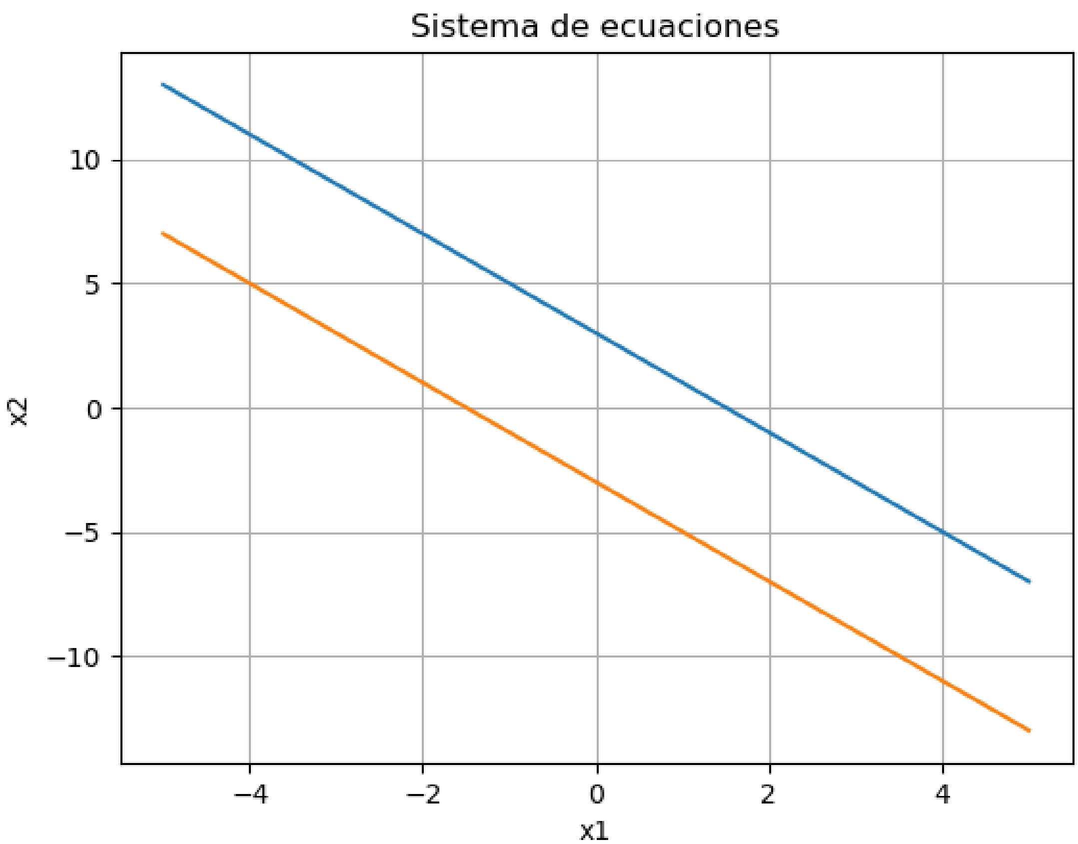
b)

$x_1 + 2x_2 = 3$

,$-2x_1 - 4x_2 = 6$

A continuación se graficarán las funciones correspondientes a cada ecuación:

```
x1ec1=3 - 2*x2
x1ec2=-3 -2*x2
plt.plot(x2, x1ec1)
plt.plot(x2,x1ec2)
plt. title("Sistema de ecuaciones")
plt.grid(True)
plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.show()
```



Este sistema de ecuaciones no tiene una solución debido a que las rectas resultantes de graficar las funciones correspondientes a las ecucaciones son paralelas, por loq eu nunca tendrán un punto de intersección, esto quiere decir que una de las ecucaiones lleva a una contradicción y por ende no es factible una solución.

C)

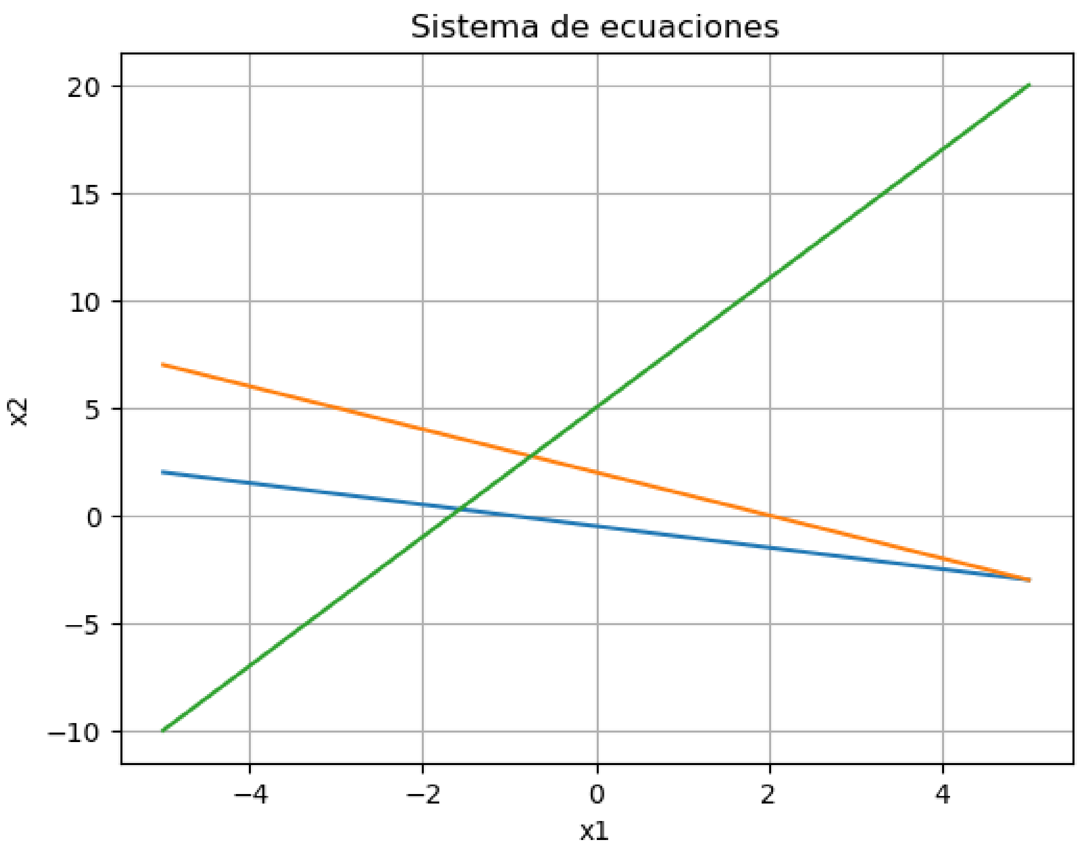
$2x_1 + x_2 = -1$

$,x_1 + x_2 = 2$

$,x_1 - 3x_2 = 5$

A continuación se graficarán las funciones correspondientes a las ecuaciones:

```
x1e_1=1/2 * (-1-x2)
x1ec2=2-x2
x1ec3=5+ 3*x2
plt.plot(x2, x1e_1)
plt.plot(x2,x1ec2)
plt.plot(x2,x1ec3)
plt. title("Sistema de ecuaciones")
plt.grid(True)
plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.show()
```



No existe un punto en el que las tres funciones itersecan por lo que el sistema no tiene solución, este sistema de ecuaciones tiene dos incógnitas, y se han proporcionado tres ecuaciones de comportamiento distinto, siendo esta la razón por la que el sistema no tendrá una solución.

d)

$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$,2x_1 + 4x_1 - x_3 = -1$

```
from ipywidgets import interact
x3_inicial = 0
p1 = [-10, (-1 + x3_inicial - 4 * -10) / 2]
p3 = [10, (-1 + x3_inicial - 4 * 10) / 2]

def update_plot(x3):
    p1[1] = (-1 + x3 - 4 * p1[0]) / 2
    p3[1] = (-1 + x3 - 4 * p3[0]) / 2
```

```python
    x_line = np.linspace(-10, 10, 500)
    y_line_eq1 = (1 - x3 - x_line) / 2
    y_line_eq2 = (-1 + x3 - 4 * x_line) / 2
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.plot(x_line, y_line_eq1, color="red", label="2x1 + x2 + x3 = 1")
    plt.plot(x_line, y_line_eq2, color="green", label="2x1 + 4x2 - x3 = -1")
    plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)
    plt.grid(color="gray", linestyle="--", linewidth=0.5)
    plt.xlabel("$x_1$")
    plt.ylabel("$x_2$")
    plt.title("Rectas y puntos en función de $x_3$")
    plt.legend()
    plt.show()

_ = interact(update_plot, x3=(-10.0, 10.0, 0.1))
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.0, description='x3', max=10.0, min=-10.0), Output()
```

Este sistema de ecuaciones consiste de tres incógnitas y dos ecuaciones, por lo que el resultado no está definido, este depende del valor que tome la tercera variable, de la cual no se puede obtener información, es por esta razón que este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones dado que la tercera variable puede adquirir infinitos valores.

2. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los soguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones.

a)

$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

$,\frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x3 = 1$

$,2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$

```python
%load_ext autoreload
```

```python
%autoreload 2
from src import eliminacion_gaussiana
Ab = [[-1,4,1,8],[5/3,2/3,2/3,1],[2,1,4,11]]
eliminacion_gaussiana(Ab)
```

```
[01-07 19:38:48][INFO] 2025-01-07 19:38:48.522906
[01-07 19:38:48][INFO]
[[-1.          4.          1.          8.        ]
 [ 0.          7.33333333  2.33333333 14.33333333]
 [ 0.          9.          6.         27.        ]]
[01-07 19:38:48][INFO]
[[-1.          4.          1.          8.        ]
 [ 0.          7.33333333  2.33333333 14.33333333]
 [ 0.          0.          3.13636364  9.40909091]]
```

```
array([-1.,  1.,  3.])
```

b)

$4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$

$,\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x3 = -1$

$,x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9$

```
Ab = [[4,2,-1,-5],[1/9,1/9,1/3,-1],[1,4,2,9]]

eliminacion_gaussiana(Ab)
```

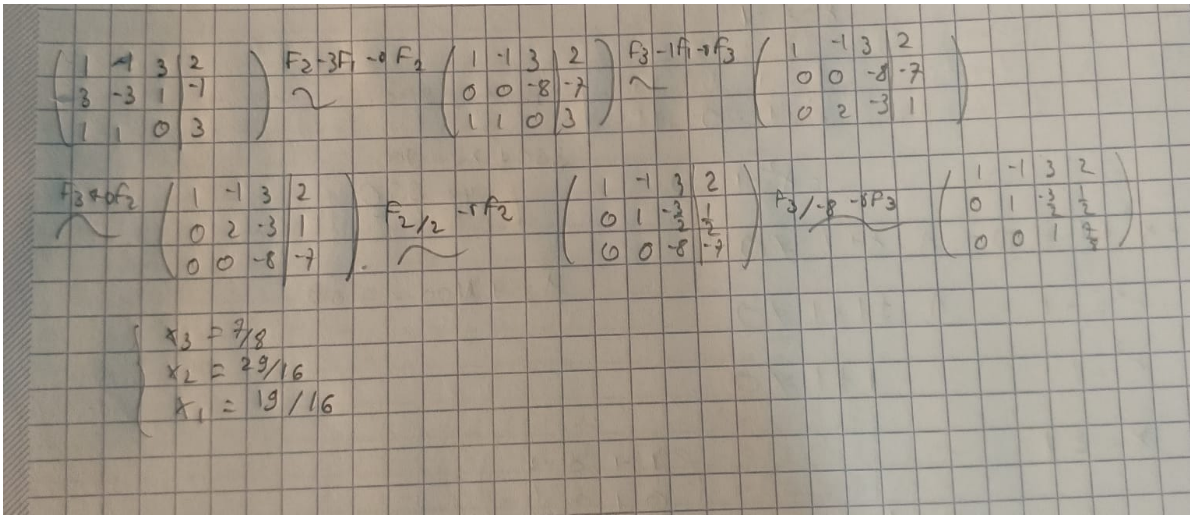
```
[01-07 19:38:58][INFO]
[[  0.11111111   0.11111111   0.33333333  -1.        ]
 [  0.          -2.         -13.          31.        ]
 [  0.           3.          -1.          18.        ]]
[01-07 19:38:58][INFO]
[[  0.11111111   0.11111111   0.33333333  -1.        ]
 [  0.          -2.         -13.          31.        ]
 [  0.           0.         -20.5         64.5       ]]
```

```
array([-4.51219512,  4.95121951, -3.14634146])
```

3. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila

a)

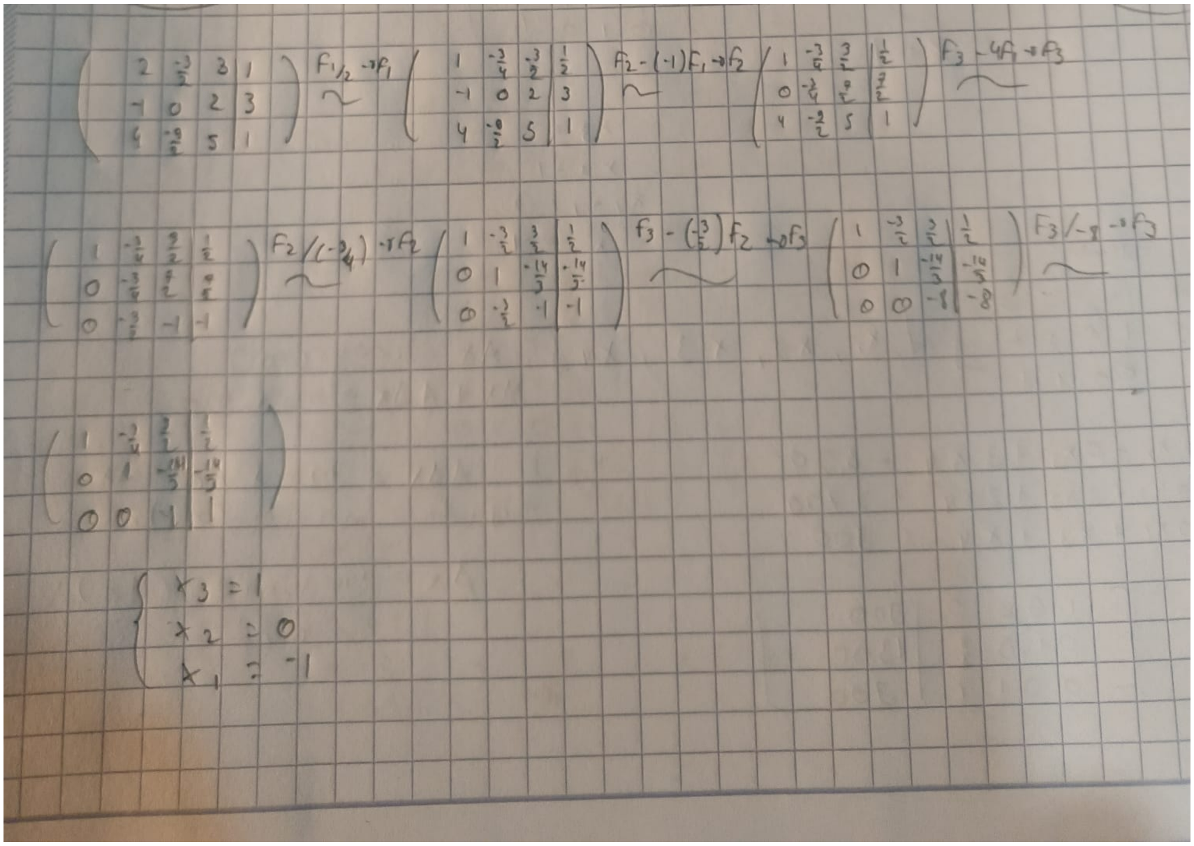
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 23x_1 - 3x_2 + x_3 = -1x_1 + x_2 = 3$$



Fue necesario el intercambio de filas.

b)

$$2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1 - x_1 + 2x_3 = 34x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1$$



c)

$$2x_1 = 3x_1 + 1.5x_2 = 4.5 - 3x_2 + 0.5x_3 = -6.62x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{33}{5} \\ 2 & -2 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1/2 \to F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{33}{5} \\ 2 & -2 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 - 1F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{33}{5} \\ 2 & -2 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_4 - 2F_1 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{33}{5} \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2/\tfrac{3}{2} \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{33}{5} \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3 - (-3)F_2 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_4 - (-2)F_2 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3/\tfrac{1}{2} \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_4 - 1F_3 \to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -6/5 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

d)

$2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5 = 7x_1+2x_3-x_4+x_5 = 2-2x_2-x_3+x_4-x_5 = -53x_1+x_2-4x_3+5x_5 = 6x_1-x_2-x_3-x_4+x_5 =$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1/2 \to F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_4 - 3F_1 \to F_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -3/2 & 19/2 & -9/2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_5 - 1F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -3/2 & 19/2 & -9/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 5/2 & -13/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2/(-\tfrac{1}{2}) \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -3/2 & 19/2 & -9/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 5/2 & -13/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3 - (-2)F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -3/2 & 19/2 & -9/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 5/2 & -13/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_4 - (-\tfrac{1}{2})F_2 \to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 5/2 & -13/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_5 - \left(\tfrac{-3}{2}\right)F_2 \to F_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3/-11 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_4 - (-5)F_3 \to F_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & -35/11 & 12 & -38/11 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_5 - (-8)F_3 \to F_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & -35/11 & 12 & -38/11 \\ 0 & 0 & 0 & -23/11 & 3 & -30/11 \end{array}\right) F_4/-\tfrac{35}{11} \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -132/35 & 38/35 \\ 0 & 0 & 0 & -23/11 & 3 & -30/11 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_5 - \left(\tfrac{-23}{11}\right)F_4 \to F_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -132/35 & 38/35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -171/35 & -16/35 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_5/-\tfrac{171}{35} \to F_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/11 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -132/35 & 38/35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16/171 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_5 = 16/171 \\ x_4 = 82/57 \\ x_3 = 125/171 \\ x_2 = 160/57 \\ x_1 = 322/171 \end{cases}$$

4) Use el algoritmo de eliminacion gaussiana y la aritmética computacional de precisión de 32 bits para resolver los siguientes sistemas lineales.

a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

```python
import numpy as np

def gaussian_elimination_32bit(A, b):
    A = np.array(A, dtype=np.float32)
    b = np.array(b, dtype=np.float32)
    n = len(b)
    Ab = np.hstack([A, b.reshape(-1, 1)])
    for i in range(n):
        max_row = np.argmax(np.abs(Ab[i:, i])) + i
        if i != max_row:
            Ab[[i, max_row]] = Ab[[max_row, i]]
        Ab[i] = Ab[i] / Ab[i, i]

        for j in range(i + 1, n):
            Ab[j] = Ab[j] - Ab[j, i] * Ab[i]

    x = np.zeros(n, dtype=np.float32)
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        x[i] = (Ab[i, -1] - np.dot(Ab[i, i + 1:n], x[i + 1:n])) / Ab[i, i]

    return x
A = [
    [1, -1, 3],
    [3, -3, 1],
    [1, 1, 0]
]
b = [2, -1, 3]
x = gaussian_elimination_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = 1.187500
x2 = 1.812500
x3 = 0.875000
```

b)

$$
\begin{aligned}
3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913,\\
2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544,\\
1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254.
\end{aligned}
$$

```
A = [
    [3.333, 15920, -10.333],
    [2.222, 16.71, 9.612],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852]
]
b = [15913, 28.544, 8.4254]
x = gaussian_elimination_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
x3 = 1.000106
```

c)

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{1}{6},\\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= \frac{1}{7},\\
\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 &= \frac{1}{8},\\
\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 &= \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

```
A = [
    [1, 1/2, 1/3,1/4],
    [1/2, 1/3, 1/4,1/5],
    [1/3,1/4,1/5,1/6],
    [1/4,1/5,1/6,1/7]
]
b = [1/6, 1/7, 1/8,1/9]
```

```
x = gaussian_elimination_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = -0.031747
x2 = 0.595250
x3 = -2.380982
x4 = 2.777797
```

d)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\
4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3.
\end{aligned}
$$

```
A = [
    [1, 1,0,1],
    [2,1,-1,1],
    [4,-1,-2,2],
    [3,-1,-1,2]
]
b = [2, 1,0 , -3]
x = gaussian_elimination_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = nan
x2 = nan
x3 = nan
x4 = nan
```

Este sistema de ecuaciones no tiene solución.

5. Dado el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\
-x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\
\alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2.
\end{aligned}
$$

a. Encientre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones

Para garantizar que el sistema de ecuaciones nno tenga soluciones primero realizaremos una reduccón del sistema de ecuaciones a través del método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv F1+F2->F2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv (-x-1)F2+F3->F3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+1 & \alpha+ \end{bmatrix}$$

ade este modo para que el sistema no tenga solución $-\alpha^2 + 1 = 0$ mientras que $\alpha + 1 \neq 0$, a continuación haremos cumplir dichas condiciones:

$$-\alpha^2 + 1 = 0 - \alpha^2 = -1\alpha^2 = 1\alpha = \pm 1$$

y

$$\alpha + 1 \neq 0\alpha \neq -1$$

por lo tanto

$$\alpha = 1$$

b. Encuentre el valo(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones

Utilizando la reducción mostrada anteriormente tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

Para cumplir con la condición debemos garantizar que $-\alpha^2 + 1 = 0$ y $\alpha + 1 = 0$ por ende

$\alpha = \pm 1 \wedge \alpha = -1 \therefore \alpha = -1$

c. Suponga que existe una única solución para una a determinada, encuentre la solución.

Para que el sistema tenga solución $\alpha \neq \pm 1$ por lo que escogeremos el valor de $\alpha = 0$. Al reemplazar el valor de α en la matriz resultante obtendremos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$x_3 = 1x_2 = 1x_1 - 1 = -2$$

reemplazando:

$$x_3 = 1x_2 = 1x_1 = -1$$

Ejercicios aplicados

Suponga que en un sistema biológico existen n especies de animales y m fuentes de alimento. Si x_j representa la población de las j-ésimas especies, para cada $j = 1, ...n; b_i$ representa el suministro diario disponible del i-ésimo aliment y a_{ij} representa la cantidad del i-ésimo alimento. Representa un equilibrio donde existe suministro diario de alimento para cumplir con presición con el promedio diario de consumo de cada especie.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

a. Si $x = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$ y $b = (b_i) = [3500, 2700, 900]$.¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

$$\begin{aligned}
x_1 - \ x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\
-x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\
\alpha x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 2.
\end{aligned}$$

para determinar cuanto consume cada una de las especies realizaremos la multiplicacón de Ax obteniendo el siguiente resultado:

$Ax = [3200, 2500, 750]$
. A continuación comparamos estos resultados con aquellos del vector $b = [3500, 2700, 900]$, en cualquiera de los casos el alimento necesario es menor al disponible, por lo que si existe alimento suficiente para satisfacer el consumo promedio diario.

¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?

Para resolver este problema, debemos considerar cuanto alimento extra se debe consumir, para lo cual realizaremos una resta.

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 3500 - 3200 \\ 2700 - 2500 \\ 900 - 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix}$$

El consumo individual de alimento por especie está dado por el elemento a_{ij} de la matriz por lo que debemos dividir el resultado de la resta por cuanto consume la especie de ese alimento, obteniendo los siguientes resultados: #### Especie 1

Alimento1:

$extra = 300/1 = 300$

Alimento2:

$extra = 200/1 = 200$

Alimento3:

la especie no consume este alimento

por lo tanto se pueden agregar como máximo 200 ejemplares de la especie 1.

Especie 2

Alimento1:

$extra = 300/2 = 150$

Alimento2:

la especie no consume este alimento

Alimento3:

la especie no consume este alimento

por lo tanto se pueden agregar como máximo 150 ejemplares de la especie 2.

Especie 3

Alimento1:

la especie no consume este alimento

Alimento2:

$extra = 200/2 = 100$

Alimento3:

$extra = 150/1 = 150$

por lo tanto se pueden agregar como máximo 100 ejemplares de la especie 3.

Especie 4

Alimento1:

$extra = 300/3 = 100$

Alimento2:

$extra = 200/2 = 100$

Alimento3:

$extra = 150/1 = 150$

por lo tanto se pueden agregar como máximo 100 ejemplares de la especie 4.

c. Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

Recalculando la cantidad de alimento disponible se obtiene: alimento disponible = [1300,1200,150], y realizaremos el mismo cálculo descrito anteriormente: #### Especie2

Alimento1:

$extra = 1300/2 = 650$

Alimento2:

la especie no consume este alimento

Alimento3:

la especie no consume este alimento

por lo tanto se puede incrementar 650 ejemplares de la especie 2.

Especie3

Alimento1:

la especie no consume este alimento

Alimento2:

$extra = 1200/2 = 600$

Alimento3:

$extra = 150/1 = 150$

por lo tanto se puede incrementar 150 ejemplares de la especie 3.

Especie4

Alimento1:

$extra = 1300/3 = 433.33$

Alimento2:

$extra = 1200/2 = 600$

Alimento3:

$extra = 150/1 = 150$

por lo tanto se puede incrementar 150 ejemplares de la especie 4.

d. Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

Recalculando los alimentos disponibles se obtiene: $alimento = [1300, 200, 150]$, a continuación se realizarán los mismos cálculos anteriormente descritos:

Especie1

Alimento1:

$extra = 1300/1 = 1300$

Alimento2:

$extra = 200/1 = 200$

Alimento3:

la especie no consume este alimento

por lo tanto se puede incrementar 200 ejemplares de la especie 1.

Especie3

Alimento1:

la especie no consume este alimento

Alimento2:

$extra = 200/2 = 100$

Alimento3:

$extra = 150/1 = 150$

por lo tanto se puede incrementar 100 ejemplares de la especie 3.

7. Repita el ejercicio 4 con el método Gauss-Jordan

a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

```python
import numpy as np

def gauss_jordan_32bit(A, b):
    A = np.array(A, dtype=np.float32)
    b = np.array(b, dtype=np.float32)
    n = len(b)
    Ab = np.hstack([A, b.reshape(-1, 1)])
    for i in range(n):
        max_row = np.argmax(np.abs(Ab[i:, i])) + i
        if i != max_row:
            Ab[[i, max_row]] = Ab[[max_row, i]]
        Ab[i] = Ab[i] / Ab[i, i]

        for j in range(n):
            if j != i:
                Ab[j] = Ab[j] - Ab[j, i] * Ab[i]

    x = Ab[:, -1]
    return x
A = [
    [1, -1, 3],
    [3, -3, 1],
    [1, 1, 0]
]
b = [2, -1, 3]
x = gauss_jordan_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = 1.187500
x2 = 1.812500
x3 = 0.875000
```

b)

$$
\begin{aligned}
3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913, \\
2.222x_1 + \ \ 16.71x_2 + \ \ 9.612x_3 &= 28.544, \\
1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254.
\end{aligned}
$$

```
A = [
    [3.333, 15920, -10.333],
    [2.222, 16.71, 9.612],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852]
]
b = [15913, 28.544, 8.4254]
x = gauss_jordan_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = 0.999887
x2 = 1.000000
x3 = 1.000106
```

c)

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{1}{6}, \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= \frac{1}{7}, \\
\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 &= \frac{1}{8}, \\
\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 &= \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

```
A = [
    [1, 1/2, 1/3,1/4],
    [1/2, 1/3, 1/4,1/5],
    [1/3,1/4,1/5,1/6],
    [1/4,1/5,1/6,1/7]
]
```

```python
b = [1/6, 1/7, 1/8,1/9]
x = gauss_jordan_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = -0.031747
x2 = 0.595250
x3 = -2.380982
x4 = 2.777797
```

d)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad\quad\; x_4 &= 2, \\
2x_1 + x_2 - \;\; x_3 + \; x_4 &= 1, \\
4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\
3x_1 - x_2 - \;\; x_3 + 2x_4 &= -3.
\end{aligned}
$$

```python
A = [
    [1, 1,0,1],
    [2,1,-1,1],
    [4,-1,-2,2],
    [3,-1,-1,2]
]
b = [2, 1,0 , -3]
x = gauss_jordan_32bit(A, b)
for i, val in enumerate(x):
    print(f"x{i+1} = {val:.6f}")
```

```
x1 = inf
x2 = nan
x3 = inf
x4 = -inf
```

Este sistema de ecuaciones no tiene solución.