Eerste inleveropgave Lineaire algebra 1 - deadline vrijdag 23 september 23:59. Inleveren via Blackboard.

De opdracht mag in een groep van maximaal drie personen gemaakt worden. Eén van de groepsleden levert het werk in via Blackboard. De namen van de groepsleden staan duidelijk vermeld op de uitwerking. Alle groepsleden zijn gezamenlijk verantwoordelijk voor de gehele uitwerking.

Opgave Laat n een natuurlijk getal zijn. Een complex getal z heet een n-de eenheidswortel (in het Engels: de n^{th} roots of unity) als z een nulpunt is van het polynoom $x^n - 1$, dus

$$z^n - 1 = 0.$$

In deze opgave berekenen we voor ieder natuurlijk getal n de n-de eenheidswortels en we onderzoeken de meetkunde van de eenheidswortels in het complexe vlak. Tenslotte laten we zien dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 2$ de som van de n-de eenheidswortels gelijk is aan 0.

We beginnen met de uitwerking van een paar concrete gevallen.

(a) (2 punten) Bereken eerst de n-de eenheidswortels voor $n = 3$ en $n = 6$. Geef je antwoorden in poolcoördinaten in de vorm $z = re^{i\phi}$ en geef de oplossingen weer in het complexe vlak (voor iedere n in een apart plaatje). Wat is de som van de n eenheidswortels? (Je mag het antwoord hierop beredeneren met behulp van het plaatje).

Opmerking: als je voor $n = 3$ met behulp van berekeningen laat zien hoe je aan de drie 3-de eenheidswortels komt, dan mag je voor $n = 6$ direct concluderen wat de betreffende eenheidswortels zijn (zonder berekening).

Laat in het vervolg van deze opgave n een willekeurig natuurlijk getal zijn.

(b) (2 punten) Bereken de n-de eenheidswortels. Geef je antwoorden weer in poolcoördinaten in de vorm $z = re^{i\phi}$ en beschrijf hoe je de eenheidswortels meetkundig weer kunt geven in het complexe vlak.

Veronderstel nu dat $n \geq 2$, en noem de eenheidswortel met het kleinste positieve argument ω.

(c) (2 punten) Hoe kun je de overige $n - 1$ eenheidswortels uitdrukken in ω?

(d) (2 punten) Bewijs dat

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

Hint: er zijn verschillende manieren waarop je dit kunt bewijzen. Ik geef voor twee bewijsmethoden een hint (je hoeft het uiteraard maar op één manier te bewijzen):

(1) Noem de som $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$ bijvoorbeeld S. Waar is ωS gelijk aan? Concludeer dat moet gelden $S = 0$.

(2) We weten dat 1 een nulpunt is van $x^n - 1$, dus je kunt $x^n - 1$ delen door $x - 1$ met behulp van een staartdeling. Je krijgt dan $x^n - 1 = (x - 1)p(x)$ waarbij $p(x)$ een

polynoom is van graad $n-1$. Bepaal $p(x)$, en beredeneer waarom je hieruit kunt concluderen dat $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$.

(e) (2 punten) Concludeer uit de vorige onderdelen dat de som van de n-de eenheidswortels gelijk is aan 0.

(f) Extra bonusopgave (hoef je niet te maken) Wat zijn de drie wortels van x^3+x^2+x+1? Geef ze weer in het complexe vlak.