

# Bewijzen - Inleveropgave 2

B.H.J. van Boxtel

28 september 2022 - Week 39

**Theorem 1.**  $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \iff 3 \nmid n$  voor elke  $n \in \mathbb{Z}$ .

Om deze stelling te bewijzen moeten allebei de implicaties (van links naar rechts en van rechts naar links) worden bewezen. Deze zal ik apart als **lemma 1.1** en **lemma 1.2** bewijzen.

**Lemma 1.1.**  $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \implies 3 \nmid n$  voor elke  $n \in \mathbb{Z}$ .

Voor het bewijs van deze implicatie heb ik nog een supplementeel argument nodig, wat ik als eerst bewijs.

**Lemma 1.1.1.**  $3 \nmid n^2 \implies 3 \nmid n$ .

Dit ga ik bewijzen met behulp van contrapositie, in andere woorden ik ga bewijzen dat  $3 \mid n \implies 3 \mid n^2$ .

*Bewijs.*

Stel  $3 \mid n$  met  $n \in \mathbb{Z}$ .

Dan is  $n$  te schrijven als  $n = 3q$  met  $q \in \mathbb{Z}$ .

Als we links en rechts kwadrateren, vinden we  $n^2 = 9q^2$ .

Dit kunnen we ook schrijven als  $n^2 = 3 \cdot 3q^2$ .

Hieruit blijkt dat  $3 \mid n^2$ .

Dus  $3 \mid n \implies 3 \mid n^2$ .

Dus  $3 \nmid n^2 \implies 3 \nmid n$ . □

Met **lemma 1.1.1** bewezen, kan **lemma 1.1** worden bewezen.

*Bewijs.*

Stel  $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Dit betekent dat  $n^2$  gelijk is aan  $3k + 1$  met  $k \in \mathbb{Z}$ .

$3 \nmid 3k + 1$ , dus  $3 \nmid n^2$ .

Volgens **lemma 1.1** betekent dit dat  $3 \nmid n$ .

Dus  $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \implies 3 \nmid n$  voor elke  $n \in \mathbb{Z}$ . □

**Lemma 1.2.**  $3 \nmid n \implies n^2 \equiv 1 \pmod{3}$  voor elke  $n \in \mathbb{Z}$ .

Dit zal ik met behulp van gevallenonderzoek bewijzen. Als  $n$  niet deelt door 3, geeft dit twee gevallen, een waar  $n$  1 meer is dan een veelvoud van 3, en een waar  $n$  2 meer is dan een veelvoud van 3. Voor elk van deze gevallen bewijs ik dat hieruit volgt dat  $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

*Bewijs.*

**Geval 1.**  $n = 3k + 1$  met  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} n = 3k + 1 &\implies n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ &\implies n^2 \equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

**Geval 2.**  $n = 3k + 2$  met  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} n = 3k + 2 &\implies n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \\ &\implies n^2 \equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Dus  $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$  geldt voor elk geval.

Dus  $3 \nmid n^2 \implies n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ . □

Nu kan **Theorem 1** bewezen worden.

*Bewijs.*

Omdat alle twee de implicaties (**lemma 1.1** en **lemma 1.2**) nu zijn bewezen, betekent dit dat  $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \iff 3 \nmid n$  voor elke  $n \in \mathbb{Z}$ . □