1 Doppler effect

In de filmpjes (en in het dictaat) hebben we het Doppler effect voor geluid besproken. We hebben een aantal vergelijkingen afgeleid die de waargenomen frequentie f' uitdrukken in de frequentie f van de bron, de snelheid v van de bron (of waarnemer) en de geluidsnelheid v_s. (Let op, in het college dictaat worden de frequenties met het symbool ν aangeduid ipv met de letter f.) In het geval de bron met een snelheid v weg beweegt van de waarnemer en de waarnemer stil staat tov de lucht, vinden we

$$f' = \frac{f}{1 + v/v_s}$$

a) Hoe verandert deze vergelijking als de bron naar de waarnemer toe beweegt met snelheid v?

b) Wat gebeurt er in het geval van a) wanneer $v = v_s$?

Als de waarnemer weg beweegt met snelheid v en de bron stil staat tov van de lucht, vinden we dat

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$$

c) Wat gebeurt er in dit geval wanneer $v = v_s$?

d) Probeer nu een vergelijking te vinden die de waargenomen frequentie f' geeft in het geval dat zowel de bron als de waarnemer bewegen tov de lucht. Noem de snelheid van de bron tov de lucht v_1 en de snelheid van de waarnemer tov de lucht v_2.

e) Kies een aantal specifieke waardes voor v_1 en v_2 om te beargumenteren dat de vergelijking correct is. Leg ook uit waarom je deze waardes hebt gekozen.

2 Galilei transformaties: behouden grootheden

Bekijk een deeltje met massa m wat beweegt met een snelheid $\vec{u}$ tov de oorsprong $\mathcal{O}$. De kinetisch energie van dit deeltjes wordt in dit stelsel gegeven door

$$E = \frac{1}{2}mu^2 \ , \qquad u^2 \equiv \vec{u} \cdot \vec{u} \ . \tag{1}$$

a) We bekijken de energie nu in het stelsel $\mathcal{O}'$ wat beweegt met een snelheid $\vec{v}$ tov stelsel $\mathcal{O}$. Laat zien dat deze energie gegeven wordt door

$$E' = E - \vec{v} \cdot \vec{p} + \frac{1}{2}mv^2 \ , \tag{2}$$

waar $\vec{p} = m\vec{u}$ de impuls van het deeltje is (zoals gemeten in stelsel $\mathcal{O}$).

Nu bekijken we twee deeltjes met massas m_1 en m_2 en impulsen $\vec{p}_1$ en $\vec{p}_2$ (zoals gemeten in stelsel $\mathcal{O}$). Deze deeltjes botsen en produceren twee nieuwe deeltjes, met massas m_3 en m_4 en inpulsen $\vec{p}_3$ en $\vec{p}_4$ (weer zoals gemeten in stelsel $\mathcal{O}$). We nemen aan dat energie en impuls tijdens de botsing behouden zijn, dwz

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \ , \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \ . \tag{3}$$

b) Bereken de totale impuls $\vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ vóór de botsing, in het stelsel $\mathcal{O}'$ wat beweegt tov $\mathcal{O}$ met constante snelheid $\vec{v}$.

c) Bereken de totale impuls $\vec{p}_3' + \vec{p}_4'$ na de botsing, in datzelfde stelsel $\mathcal{O}'$.

d) Is de impuls ook behouden in stelsel $\mathcal{O}'$?

e) Bereken de totale energie $E_1' + E_2'$ vóór de botsing, in stelsel $\mathcal{O}'$.

f) Bereken de totale energie $E_3' + E_4'$ na de botsing, in stelsel $\mathcal{O}'$.

g) Is energie ook behouden in stelsel $\mathcal{O}'$?

3 De transversale lichtklok

In stelsel $\mathcal{O}$ liggen twee spiegels parallel aan elkaar, in het (x, y)-vlak op posities $y = 0$ en $y = l$. De spiegels staan stil tov $\mathcal{O}$. Een licht-signaal beweegt tussen de twee spiegel, open en neer langs de y-as.

a) Wat is de tijd Δt die het licht nodig heeft om één keer heen en weer te gaan tussen de spiegels, zoals gemeten door een waarnemer in $\mathcal{O}$.

We bekijken de situatie nu vanuit stelsel $\mathcal{O}'$, wat met een constante snelheid v in de x-richting beweegt tov $\mathcal{O}$. Neem aan dat de afstand tussen de spiegels in $\mathcal{O}'$ hetzelfde is als in $\mathcal{O}$.

b) Bereken, met behulp van de klassieke mechanica, de tijd $\Delta t'$ die het licht nodig heeft om één keer heen en weer te gaan tussen de spiegels, zoals gemeten door een waarnemer in $\mathcal{O}'$. Vergelijk deze tijd met de tijd die een waarnemer in $\mathcal{O}$ zou meten. Maak een schets om je argumentatie uit te leggen.

c) Bereken nu de tijd $\Delta t'$ met behulp van het licht postulaat. Maak ook weer een schets van de situatie. Geef een vergelijking die $\Delta t'$ uitdrukt in Δt. Hebben we deze vergelijking al eerder gezien?

4 De longitudinale lichtklok

We beschouwen een vergelijkbare situatie als in de vorige opgave, alleen nemen we aan dat de spiegels op posities $x = 0$ en $x = l$ liggen en dat het licht in de x-richting tussen de spiegels heen en weer beweegt.

a) Wat is de tijd Δt die het licht nodig heeft om één keer heen en weer te gaan tussen de spiegels, zoals gemeten door een waarnemer in $\mathcal{O}$.

We bekijken de situatie nu vanuit stelsel $\mathcal{O}'$, wat met een constante, negatieve, snelheid v in de x-richting beweegt tov $\mathcal{O}$. Let op, deze snelheid is, in tegenstelling tot in de vorige opgave, parallel aan het pad van het licht.

b) Bereken, met behulp van de klassieke mechanica, de tijd $\Delta t'$ die het licht nodig heeft om één keer heen en weer te gaan tussen de spiegels, zoals gemeten door een waarnemer in $\mathcal{O}'$. Vergelijk deze tijd met de tijd die een waarnemer in $\mathcal{O}$ zou meten. Maak een schets om je argumentatie uit te leggen. In de klassieke mechanica is de afstand tussen de spiegels natuurlijk gelijk in stelsels $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$.

c) Teken ruimte-tijd diagrammen van de situatie in het (x, ct)-vlak en in het (x', ct')-vlak. Geef in de diagrammen de relevante tijdsintervallen aan. Noem de tijd voor de heenweg Δt_1 en voor de terugweg Δt_2. Noem de afstand tussen de spiegels in het $\mathcal{O}'$ stelsel l'.

d) Laat zien dat

$$\Delta t_1' = \frac{l'}{c} \frac{1}{1 - v/c} \ . \tag{4}$$

e) Laat zien dat

$$\Delta t_2' = \frac{l'}{c} \frac{1}{1 + v/c} \ . \tag{5}$$

en laat zien dat hieruit volgt dat

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c}\gamma^2 \ , \qquad \gamma^2 \equiv \frac{1}{1 - v^2/c^2} \ . \tag{6}$$

f) Geef een vergelijking voor l'. Gebruik nu de uitdrukking van $\Delta t'$ uit de vorige opgave om een vergelijking te maken die de lengte l' uitdrukt in l.