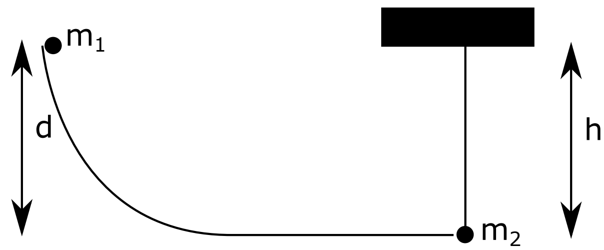
1 Botsing met een slinger



a) Deeltje 1 met massa m_1 wordt losgelaten van bovenaan een schans met hoogte d. Neem aan dat er geen enkele wrijving is. Zie de figuur hierboven. Met welke snelheid zal deeltje 1 op deeltje 2 botsen?

b) Wat is de totale impuls van deeltjes 1 en 2 vlak voor de botsing?

c) En de totale energie in het laboratoriumstelsel?

d) Wat zijn de massamiddelpunts-snelheid en de relatieve snelheid voor de botsing?

e) Wat is de massamiddelpunts-snelheid vlak na de botsing?

f) Als de aannemen dat de botsing tussen de deeltjes volledig inelastisch is (bijvoorbeeld doordat deeltje 2 een homp klei is), wat is dan de totale energie na de botsing?

g) Deeltje twee hangt aan een touw met lengte h, het is dus in feite een slinger. Wat is de maximale hoek tot waar deze slinger zal zwaaien door de botsing?

h) Nu nemen we aan dat de botsing volledig elastisch is. Wat is dan de massamiddelpunts-snelheid na de botsing?

i) En wat is in dat geval de totale energie na de botsing?

j) Stel een vergelijking op waar de relatieve snelheid na de botsing aan moet voldoen, aangenomen dat de botsing "head-on" is, dwz dat deeltje 1 en deeltje 2 elkaar precies in het midden raken.

k) Als we aannemen dat de botsing "head-on" is, dwz dat deeltje 1 en deeltje 2 elkaar precies in het midden raken, zal deeltje 2 *na* de botsing in dezelfde richting bewegen als deeltje 1 *voor* de botsing. Leg in twee zinnen uit waarom.

l) Wat zijn in dat geval de snelheden van de twee deeltjes na de botsing?

m) En wat is in dat geval de maximale hoek die de slinger zal maken?

n) Als je het meten van de maximale hoek wilt gebruiken om de snelheid van deeltje 1 te bepalen, kun je dan voor deeltje 2 beter een elastisch of een inelastisch material gebruiken? Leg in maximaal twee zinnen uit waarom.

o) Stel, de deeltjes botsen niet head on, welke informatie hebben we dan precies nog meer nodig om het probleem op te lossen?

2 Impulsmoment van twee deeltjes

Om te oefenen met het soort wiskundige manipulaties waar we in de natuurkunde zo effectief gebruik van kunnen maken, zullen we nu de afleidingen van Sectie 7.2 doen. Daarna kunnen jullie de voorbeelden van Sectie 7.2 zelfstandig bestuderen.

Je kunt laten zien dat $r^2\dot{\theta}$ constant is als op het object alleen krachten in de $\vec{e}_r$-richting werken. We zullen nu eerst laten zien dat deze grootheid te maken heeft met het impulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

a) We weten uit het hoorcollege gezien dat $\vec{r} = r\vec{e}_r$ en we weten dat impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ als de massa constant is. Schrijf voor dat geval de impuls in poolcoordinaten en bereken daarmee $\vec{L}$ in poolcoordinaten.

b) Bereken de lengte $L = \left|\vec{L}\right|$.

c) In welke richting staat de vector $\vec{L}$?

We zien dat de lengte van L dus inderdaad het ding is waarvan we in het hoorcollege hebben gezien dat het constant is. Omdat de vector $\vec{L}$ constant is, is het kennelijk een belangrijke waarde (net als energie en impuls, waarvan we al wisten dat ze behouden zijn). We noemen deze behouden grootheid het impulsmoment.

Nu gaan we de berekeningen op paginas 279 en 280 uitvoeren in het geval van 2 deeltjes. We hebben dus $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i\vec{v}_i)$, waar $i = 1, 2$, en $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$.

d) Vul de definities van $\vec{L}_i$ in in de definitie van $\vec{L}$ en bereken vervolgens $d\vec{L}/dt$. Druk je antwoord uit in de posities van de beide deeltjes en de krachten die op de beide deeltjes werken.

e) Neem nu aan dat er geen externe krachten op de deeltjes werken, maar alleen de onderlingen krachten tussen de deeltjes. Noem de kracht die deeltje 2 uitoefent op deeltje 1 $\vec{F}_{12}$ en vice versa. Maak vervolgens gebruik van de derde wet van Newton om het impulsmoment zo eenvoudig mogelijk op te schrijven.

f) Neem nu aan dat de richting van de onderlinge kracht evenwijdig is aan de verbindingslijn tussen de twee deeltjes. Wat is dan $d\vec{L}/dt$ en waarom?

We hebben nu bewezen dat in dit geval het impulsmoment inderdaad behouden is. We gaan het impulsmoment nu ontbinden in een massamiddelpunts bijdrage en een bijdrage in de relatieve coordinaat.

g) Schrijf $\vec{r}_i = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_i'$, waar $\vec{r}_{\rm cm}$ de massamiddelpuntscoordinaat is en $\vec{r}_i'$ dus de positie van deeltje i t.o.v. het massamiddelpunt. Laat zien dat dan ook geldt dat $\vec{v}_i = \vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_i'$.

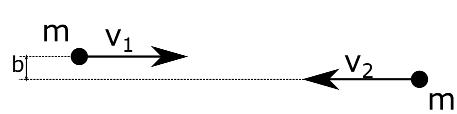
h) Vul de bovenstaande definities voor $\vec{r}_i$ en $\vec{v}_i$ in in de formule voor $\vec{L}$

i) We weten dat $m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0$. Gebruik dit om de formule de uitdrukking voor $\vec{L}$ te vereenvoudigen.

j) Laat zien dat $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0$ en gebruik dit resultaat om $\vec{L}$ verder te vereenvoudigen.

k) Laat zien dat je resultaat van **j)** overeenkomt met formule 7.2.14 uit het boek voor het geval van 2 deeltjes.

3 Impulsmoment tijdens een botsing



a) Wat is de massamiddelpunts-snelheid $\mathbf{v}_{\rm cm}$?

b) Kunnen we ons coordinatenstelsel zo kiezen dat $\mathbf{r}_{\rm cm}$ in de oorsprong ligt? Waarom (niet)?

c) Wat is in dit coordinatenstelsel het totale impulsmoment voor en na de botsing? Schrijf je antwoord in termen $v_1 = |\mathbf{v}_1|$, $v_2 = |\mathbf{v}_2|$ en de afstand van kleinste nadering b.

d) Leg in twee zinnen uit dat de beginvoorwaarden van iedere botsing van twee deeltjes zonder externe kracht volledig wordt beschreven door $v_1 = |\mathbf{v}_1|$, $v_2 = |\mathbf{v}_2|$, b en eventueel een hoek.

4 Cilinder op een helling

Een cilinder met massa m, traagheidsmoment I en straal r rolt van een helling met lengte l. De helling maakt een hoek α met de grond.

a) Maak een schets van de situatie. Teken de relevante krachten in de schets.

b) Op $t = 0$ is de cilinder in rust bovenaan de helling. Wat is de totale energie?

c) Wat is de totale energie onderaan de helling?

Neem nu aan dat de cilinder zonder slippen naar beneden rolt. Neem verder nu aan dat we de wrijving kunnen verwaarlozen tijdens de weg langs de helling.

d) Geef een relatie tussen de snelheid en de hoeksnelheid van de cilinder. Gebruik deze relatie om de uitdrukken voor de totale energie te veréénvoudigen.

e) Bepaal de snelheid van de cilinder onderaan de helling.

Als de cilinder massief is, is het traagheidsmoment $I = \frac{1}{2}mr^2$ en als de cilinder hol is (dwz alle massa zit aan de buitenkant) is het traagheidsmoment $I = mr^2$.

f) Geef de snelheden voor de holle en de massieve cilinder. Welke cilinder gaat onderaan de helling het snelst?

Stel je nu voor dat we twee verschillende hellingen hebben, met dezelfde lengte, maar een andere hoek. Van de ene helling laten we de holle cilinder rollen en van de andere de massieve. Noem de hoeken van deze hellingen respectievelijk α_h en α_m.

g) Aan welke relatie moeten α_h en α_m voldoen als we willen dat de cilinders onderaan de helling even snel gaan bewegen?

h) Als we nu aannemen dat op het vlakke stuk onderaan de hellingen (met de hoeken zoals boven gekozen) wel luchtwrijving is, dwz een kracht afhankelijk van de voorwaarste snelheid, welke cilinder komt dan het verst? Waarom?

5 De raketmotor

Een raketmotor werkt door verbrandingsgassen uit de uitlaat te werpen. Door de derde wet van Newton zorgt dat voor een kracht op de raket. We gaan nu uitrekenen hoe dat precies werkt. Neem aan dat de brandstof met een gemiddelde snelheid $-u$ t.o.v. de raket wordt uitgestoten en neem aan dat dat met een hoeveelheid $\frac{dM}{dt}$ gebeurd, dit is dus de hoeveelheid brandstof die per tijdseenheid wordt uitgestoten. Neem verder voor het gemak aan dat er geen externe krachten op de raket of de brandstof werken.

Gebruik bij het oplossen van de vraagstukken de volgende definities:

$-u$	snelheid van uitlaat t.o.v. de raket
v	snelheid van de raket in ons ruststelsel
u'	snelheid van uitlaat in ons ruststelsel
m	massa van de lege raket
M	massa van de brandstof in de raket
M_{tot}	totale massa van raket + brandstof

Als er geen externe kracht op het systeem werken, die de totale impuls constant, dus

$$\frac{dP_{\text{uitlaat}}}{dt} + \frac{dP_{\text{raket}}}{dt} = 0,$$

a) Bereken $\frac{dP_{\text{uitlaat}}}{dt}$ en $\frac{dP_{\text{raket}}}{dt}$ en vul deze in in de bovenstaande vergelijking.

b) Gebruik deze vergelijking om de versnelling $\frac{dv}{dt}$ van de raket uit te drukken in $\frac{dM_{\text{tot}}}{dt}$.

c) Integreer deze vergelijking links en rechts van het = van een tijd t_1 tot en tijd t_2.

d) Definieer $\Delta v = v_2 - v_1$. Schrijf Δv in termen van de massa aan brandstof op t_2 en t_1.

Dit begrip Δv zal volgende week heel belangrijk zijn!