1 Lorentz-transformatie van γ-factoren

In filmpje 7 van vorige week hebben we gezien hoe $\vec{u}_\perp$ transformeert onder de Lorentz-transformatie. Je gaat nu kijken hoe $\vec{u}_\parallel$ transformeert.

a) Gebruik de Lorentz transformatie om $\frac{d\vec{r}'_\parallel}{dt}$ uit te rekenen.

b) Gebruik de uitdrukking voor $\frac{dt'}{dt}$ uit het filmpje en je resultaat uit a) om $\frac{d\vec{r}'_\parallel}{dt'}$ uit te rekenen.

Bij de afleiding van de relativistisch impuls hebben we gebruik gemaakt een transformatie voor γ-factoren. Deze zal je nu gaan afleiden, wat er op neer komt dat je de afleiding op pagina 41 van het dictaat reproduceert.

c) Laat zien dat Vergelijking 10.13 uit het dictaat geldt. Gebruik hiervoor de uitdrukking voor $\vec{u}'_\perp$ en $\vec{u}'_\parallel$ uit filmpje 7 van vorige week.

d) Bewijs Vergelijking 10.15. Begin door Vergelijking 10.13 in te vullen aan de linkerkant van de vergelijking en het resultaat vervolgens onder één noemer te brengen. Hierna kun je de definitie van γ_v invullen en de hele zaak veréénvoudigen.

e) Bewijs nu Vergelijking 10.12 met behulp van Vergelijking 10.15

2 De Lorentz-transformatie

Beschouw de Lorentz-transformatie

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \; ; \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{1}$$

waarmee we een event (x, ct) in $\mathcal{O}$ naar het corresponderende even (x', ct') in $\mathcal{O}'$ kunnen transformeren. In deze opgave gaan we een transformatie zoeken die het omgekeerde doet, dwz die (x, ct) uitdrukt in termen van (x', ct').

a) Voorspel op basis van relativiteit hoe deze transformatie er uit zou moeten zien.

b) Bereken de transformatie nu expliciet door de Lorentz-transformatie te inverteren.

Beschouw nu drie inertiaalstelsels $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ and $\mathcal{O}_3$. De Lorentz-transformaties tussen deze stelsel kunnen we schrijven als

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma_{v_{21}}(x_1 - \beta_{21} ct_1) \; ; \qquad & ct_2 &= \gamma_{v_{21}}(ct_1 - \beta_{21} x_1) \; , \\ x_3 &= \gamma_{v_{32}}(x_2 - \beta_{32} ct_2) \; ; \qquad & ct_3 &= \gamma_{v_{32}}(ct_2 - \beta_{32} x_2) \; , \end{aligned} \tag{2}$$

waar v_{21} de snelheid is van $\mathcal{O}_2$ tov $\mathcal{O}_1$ en v_{32} de snelheid van $\mathcal{O}_3$ tov $\mathcal{O}_2$.

c) Leidt de relativistische wet voor het afleiding van snelheid af door $\Delta x_3/\Delta t_3$ te bepalen, waar Δx_3 een kleine variatie van de coordinaat x_3 is als functie van een kleine variatie Δt_3, volgens de klok van $\mathcal{O}_3$.

d) Bepaal met behulp van de bovenstaande Lorentz-transformaties de Lorentz-transformatie tussen $\mathcal{O}_3$ and $\mathcal{O}_1$. Je zult hierbij Eq. 10.12 uit het dictaat van de Wit goed kunnen gebruiken.

3 Botsingen in de Newtoniaanse mechanica

Beschouw een elastisch botsing (dwz een botsing zonder energieverlies) van twee deeltjes met massa m in een twee-dimensionaal vlak. We noemen de snelheid van de ingaande deeltjes $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ en van de uitgaande deeltjes $\vec{w}_1$ en $\vec{w}_2$

a) Schrijf de vergelijking op voor behoud van energie en impuls. Bewijs hieruit dat, in ieder inertiaalstelsel, geldt dat $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2$.

b) We kunnen ons stelsel $\mathcal{O}$ zo kiezen dat deeltje 2 voor de botsing stilstaat. Onder welke hoeken kunnen de deeltjes wegvliegen na de botsing? We kunnen de x-as kiezen langs de richting van het ingaande deeltje 1, zodat $\vec{v}_1 = (v, 0)$, met $v > 0$. Laat in dit geval zien dat de x-component van de snelheid na verstrooiing groter dan nul moet zijn, met andere woorden, dat terugverstrooiing onmogelijk is.

c) We bekijken de botsing nu vanuit het stelsel $\mathcal{O}'$ wat in het zogenaamde massamiddelpunt van de twee deeltjes zit, dwz de ruimtelijk oorspong van $\mathcal{O}'$ ligt op positie $\vec{X} = \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$.

   Laat zien dat de snelheid van het massamiddelpunt behouden is, dwz hetzelfde is voor en na de botsing. Maak een schets van de botsing in zowel het $\mathcal{O}$ stelsel als het $\mathcal{O}'$ stelsel.

4 Relativistische bostingen in één dimensie

Beschouw twee deeltjes met gelijke massa m, die langs een lijn bewegen. Net als in de vorige opgave bekijken we de botsing vanuit het stelsel waarin deeltje 2 stil staat. Deeltje 1 beweegt richting deeltje 2, zodat een botsing zal plaatsvinden. In deze opgave zullen we de snelheden van de beide deeltjes na de botsing uitrekenen.

a) Schrijf de vergelijkingen voor behoud van energie en impuls op. Schrijf deze vergelijkingen in een vorm waarin de snelheden alleen via de γ-factoren voorkomen. Hiervoor moet je eerst de relatie $u\gamma_u = c\sqrt{\gamma_u^2 - 1}$ bewijzen.

b) Elimineer de γ-factor van één van beide uitgaande deeltjes. Hiervoor kun je de vergelijking van energiebehoud gebruiken.

c) Vul het vorige resultaat in in de vergelijking voor impulsbehoud en los hieruit de γ-factoren op in termen van de γ-factor deeltje 1. Uit deze vergelijking los je vervolgens de snelheden op.

d) Om nu het geval te behandelen dat deeltje 2 niet stil staat voor de botsing, pas je de Lorentz-transformaties toe. Wat zijn de snelheden van de uitgaande deeltjes, wanneer die inkomende deeltjes snelheden u_1 en u_2 hebben?

5 Botsingen van elektronen en positronen

Een elektron, e^-, botst in het laboratoriumstelsel O met snelheid $u = 4c/5$ op een positron in rust t.o.v. $\mathcal{O}$. Een positron, e^+, is het anti-deeltje van het elektron, en heeft dezelfde massa maar tegengestelde elektrische lading.

a) Bereken de totale energie in het laboratoriumstelsel $\mathcal{O}$, uitgedrukt in de elektronmassa m_e en c.

Beschouw nu het massamiddelpuntstelsel, $\mathcal{O}'$, waarin de totale impuls - per definitie - gelijk is aan nul.

b) Toon aan dat de snelheid u' van het elektron in het stelsel $\mathcal{O}'$ gelijk is aan $u' = c/2$. Gebruik daarbij de transformatie van snelheden.

c) Bereken de totale energie in het zwaartepuntstelsel $\mathcal{O}'$, uitgedrukt in de elektronmassa m_e en c .

Bij de botsing van e^+ en e^- vernietigen zij elkaar en ontstaan er twee fotonen (lichtdeeltjes).

d) Toon aan dat in O' de frequenties van beide fotonen gelijk moeten zijn. Geef een uitdrukking voor de frequentie in termen van m_e, c, en de constante van Planck h.

e) Waarom moeten er in het algemeen minstens *twee* fotonen ontstaan?