Inlever 1 Lial 2

Boris van Boxtel en Lotte Gritter

November 2022

(a). Lemma 7.3.2. De kern van een lineaire afbeelding $A : V \to W$ is een lineaire deelruimte van V.
De kern van A is de verzameling van alle elementen in A waarvoor geldt dat $A(\mathbf{x}) = 0$. We gaan bewijzen dat $\ker(A)$ een lineaire deelruimte van V is door te laten zien dat $\ker(A)$ niet leeg is, en dat optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefiniëerd zijn.

Bewijs.

1. De kern van A bevat de nulvector.
2. Stel $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\ker(A)$. Dan geldt dat $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y}) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dus $x + y$ zit in $\ker(A)$.
3. Stel λ in $\mathbb{R}$ en $\mathbf{x}$ in $\ker(A)$. Vanwege lineairiteit geldt dat $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

□

(b). Lemma 7.3.5. Zij V, W een tweetal vectorruimten en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $A(V)$ een lineaire deelruimte van W.
Het bewijs hiervoor lijkt op het bewijs bij **??**

Bewijs.

1. $A(V)$ is niet leeg, want $\mathbf{0} = A(0) \in A(V)$.
2.

□

(c). Laat V een vectorruimte zijn van dimensie n en B een basis van V. (hier moet nog tekst).
We gaan bewijzen dat f_B een isomorfisme geeft tussen V en $\mathbb{R}_n$, in andere woorden dat f_B een bijectieve lineare functie is.

het bewijs hiervoor bestaat uit drie delen, het eerste dat de functie linear is, het tweede het bewijs dat f_B injectief is, en het derde dat f_B surjectief is.

Bewijs.

1. Neem aan:

$$f_B(\mathbf{x}) = f_B(\mathbf{y}) \tag{1}$$

   met $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Gegeven is dat B een basis is van V. Met de definitie van f_B gegeven in het dictaat, kunnen we dit ook schrijven als:

$\square$

(d). *Bewijs.* $\square$