Inlever 1 Lial 2

Boris van Boxtel en Lotte Gritter

November 2022

(a). Lemma 7.3.2. De kern van een lineaire afbeelding $A : V \to W$ is een lineaire deelruimte van V.
De kern van A is de verzameling van alle elementen in A waarvoor geldt dat $A(x) = 0$. We gaan bewijzen dat $\ker(A)$ een lineaire deelruimte van V is door te laten zien dat de nulvector in de kern van A zit, en dat de kern van A gesloten is onder optelling en scalaire vermenigvuldiging.

Bewijs.

1. De kern van A bevat de nulvector omdat $A(\mathbf{0_v}) = \mathbf{0_v}$.
2. Stel dat x, y elementen zijn in $\ker(A)$. Dan geldt dat $A(x+y) = A(x) + A(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dus $x + y$ zit in $\ker(A)$.
3. Stel λ in $\mathbb{R}$ en x in $\ker(A)$. A is een lineaire afbeelding, dus vanwege lineairiteit geldt dat $A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

□

(b). Lemma 7.3.5. Zij V, W een tweetal vectorruimten en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $A(V)$ een lineaire deelruimte van W.
Het bewijs hiervoor lijkt op het bewijs bij (a).

Bewijs.

1. Stel $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ zijn elementen in V. Dan is $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ook een element in V. Dus $x + y = A(x) + A(y) = A(x + y)$, en $A(V)$ is dus gesloten onder optelling.
2. Stel λ is een reëel getal en $\mathbf{x}$ is een element in V. Dan is $\lambda\mathbf{x}$ ook een element in V. Er bestaat een element y waarvoor geldt dat $A(x) = y$. Hieruit volgt dat $\lambda\mathbf{y} = \lambda A(x) = A(\lambda x)$. De lineaire afbeelding is dus gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.
3. Stel $\mathbf{0_v}$ is de nulvector in V. We weten dat $\mathbf{0_v} + \mathbf{0_v} = \mathbf{0_v}$. Hieruit, en uit lineairiteit, volgt dat

$$A(\mathbf{0_v}) = A(\mathbf{0_v} + \mathbf{0_v}) = A(\mathbf{0_v}) + A(\mathbf{0_v}) \tag{1}$$

We trekken nu aan beide kanten van de vergelijking $A(\mathbf{0_v})$ af, dit geeft:

$$\mathbf{0_w} = A(\mathbf{0_v}) \tag{2}$$

Dus A(V) bevat de nulvector.

$\square$

(c). Laat V een vectorruimte zijn van dimensie n en B een basis van V. (hier moet nog tekst).
We gaan bewijzen dat f_B een isomorfisme geeft tussen V en $\mathbb{R}_n$, in andere woorden dat f_B een lineare en bijectieve functie is.

We bewijzen eerst dat de functie linear is.

Bewijs.

1. Bekijk $f_B(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ met $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Met de definitie van f_B uit het dictaat zien we dat dit het volgende geeft:

$$f_B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_1+y_1)\mathbf{b_1} + (x_2+y_2)\mathbf{b_2} + \ldots + (x_n+y_n)\mathbf{b_n}. \tag{3}$$

   Door distributiviteit van het scalair veelvoud over optelling in het lichaam kunnen we dit ook schrijven als:

$$\begin{aligned} f_B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= x_1\mathbf{b_1} + y_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + y_2\mathbf{b_2} + \ldots + x_n\mathbf{b_n} + y_n\mathbf{b_n} \\ &= x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + \ldots + x_n\mathbf{b_n} + y_1\mathbf{b_1} + y_2\mathbf{b_2} + \ldots + y_n\mathbf{b_n} \\ &= f_B(\mathbf{x}) + f_B(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

2. Bekijk nu $f_B(\lambda\mathbf{x})$ met $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Vanuit de definitie van f_B is dit te schrijven als:

$$f_B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda x_1\mathbf{b_1} + \lambda x_2\mathbf{b_2} + \ldots + \lambda x_n\mathbf{b_n} \tag{4}$$

   Door distributiviteit van het scalair veelvoud over vector optelling kunnen we dit ook schrijven als:

$$f_B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + \ldots + x_n\mathbf{b_n}) = \lambda f_B(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Uit deze twee punten concluderen we dat f_B een lineare functie is.

$\square$

Nu bewijzen we dat f_B een bijectie is.

Bewijs.

1. We beginnen met bewijzen dat f_B injectief is. Neem aan:

$$f_B(\mathbf{x}) = f_B(\mathbf{y}) \tag{6}$$

   met $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Vanuit de definitie van f_B is dit te schrijven als:

$$x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + \ldots + x_n\mathbf{b_n} = y_1\mathbf{b_1} + y_2\mathbf{b_2} + \ldots + y_n\mathbf{b_n} \tag{7}$$

   Door de rechterkant naar de linkerkant te halen, en door distributiviteit van het scalair veelvoud over optelling in het lichaam kunnen we dit ook schrijven als:

$$(x_1-y_1)\mathbf{b_1} + (x_2-y_2)\mathbf{b_2} + \ldots + (x_n-y_n)\mathbf{b_n} = 0 \tag{8}$$

Per definitie zijn $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ onafhankelijk, dus volgens Stelling 7.2.1 uit het dictaat is de enige oplossing van deze vergelijking de triviale oplossing. Dus er geldt:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n. \end{aligned}$$

Dus $f_B(\mathbf{x}) = f_B(\mathbf{y})$ impliceert $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, dus f_B is injectief.

2. We bewijzen nu dat f_B surjectief is. Dit betekent dat voor elke $\mathbf{x}_B \in W$ er een $\mathbf{x} \in V$ bestaat zodat $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B$. We willen dus een $\mathbf{x}$ vinden zodat $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B$. We bewijzen dat de volgende $\mathbf{x}$ hieraan voldoet:

$$\mathbf{x} = x_{B,1}\mathbf{b}_1 + x_{B,2}\mathbf{b}_2 + \ldots + x_{B,n}\mathbf{b}_n \tag{9}$$

waar $x_{B,k}$ staat voor het $k$de element van de coördinatenkolom $\mathbf{x}_B$. Bekijk $f_B(\mathbf{x})$. We zien uit de definitie van f_B dat:

$$f_B(\mathbf{x}) = (x_{B,1}, x_{B,2}, \ldots, x_{B,n})^t \tag{10}$$

De rechterzijde van de vergelijking is precies de vector $\mathbf{x}_B$, dus we zien dat:

$$f_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B \tag{11}$$

We kunnen dus voor elke $\mathbf{x}_B \in W$ een $\mathbf{x} \in V$ vinden zodat $f_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B$. Dus f_B is surjectief.

Deze twee punten maakt samen dat f_B bijectief is. □

Dit samen maakt dat f_B een lineare bijectieve functie is en dus een isomorfisme geeft tussen V en $\mathbb{R}^n$.

(d). Neem $V = \mathbb{R}[X]_3$ en gegeven is $B = \{1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3\}$ een basis van V. Neem ook $P_1(X) = 2 + 6X + 3X^2 + 4X^3$. We laten zien dat $f_B(P_1(X)) = (2, 4, -1, 5)^t$.

Bewijs. Gegeven is:

$$P_1(X) = 2 + 6X + 3X^2 + 4X^3. \tag{12}$$

We kunnen dit ook schrijven als:

$$P_1(X) = 2(1 + X) + 4(X + X^2) - 1(X^2 + X^3) + 5(X^3). \tag{13}$$

We hebben nu $P_1(X)$ geschreven als lineare combinatie van de gegeven basis B, dus we zien dat:

$$f_B(P_1(X)) = (2, 4, -1, 5)^t \tag{14}$$

□