

# Bewijzen - Inleveropgave 1 - Poging 2

B.H.J. van Boxtel

5 Oktober 2022 - Week 40

(a.) Een voorbeeld van een geïndiceerde collectie  $I$  die voldoet aan de volgende vereisten:

- Alle  $A_n$  zijn verschillend.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [2, 6]$ .
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [3, 6]$ .

Is  $I = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , waar  $A_n = [3 - \frac{1}{n}, 6]$ .

(b.) **Theorem 1.** De verzamelingen  $A_n$  zijn paarsgewijs verschillend. In andere woorden  $n \neq m \implies A_n \neq A_m$ .

*Bewijs van Theorem 1.*

Neem  $n, m \in \mathbb{N}$  zodat  $n \neq m$ .

Dan is  $\frac{1}{n}$  niet gelijk aan  $\frac{1}{m}$ , dus  $3 - \frac{1}{n}$  is niet gelijk aan  $3 - \frac{1}{m}$ .

Omdat de linkergrenzen van de intervallen niet gelijk zijn, zijn de intervallen niet gelijk.

$$[3 - \frac{1}{n}, 6] = A_n \neq [3 - \frac{1}{m}, 6] = A_m.$$

Dus  $n \neq m \implies A_n \neq A_m$ .

□

(c.) **Theorem 2.** De vereniging van de collectie  $I$  is gelijk aan het interval  $[2, 6]$ . In andere woorden:  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [2, 6]$ .

Hiervoor is een kort subargument nodig.

**Lemma 2.1.** Voor een gegeven  $n$  en  $m$  zodat  $n < m$  geldt dat  $A_m \subseteq A_n$ .

*Bewijs van lemma 2.1.*

Neem  $n, m \in \mathbb{N}$  zodat  $n < m$ .

Dan geldt  $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ , en ook  $3 - \frac{1}{n} < 3 - \frac{1}{m}$ .

Vanuit de definitie van  $A_n$  zien we dat  $3 - \frac{1}{n}$  de linkergrens van  $A_n$  is en  $3 - \frac{1}{m}$  de linkergrens van  $A_m$ . Omdat de linkergrens van  $A_n$  nu kleiner is dan de linkergrens van  $A_m$  en de rechtergrens van beide hetzelfde is, is het interval  $A_m$  een deelverzameling van het interval  $A_n$ .

Dus  $n < m \implies A_m \subseteq A_n$ .

□

Nu kan **Theorem 2.** bewezen worden.

*Bewijs van Theorem 2.*

Omdat  $1 \leq n$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ , en als gevolg van **lemma 2.1** geldt  $A_n \subseteq A_1$  voor elke  $n$ .

$$A_1 = [2, 6], \text{ dus } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq A_1 \iff \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq [2, 6].$$

□

(d.) **Theorem 3.** Het interval  $[3, 6]$  is een deelverzameling van  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

*Bewijs van Theorem 3.*

Voor elke  $n \in \mathbb{N}$  geldt  $\frac{1}{n} > 0$ .

Dus  $-\frac{1}{n} < 0$ , dus  $3 - \frac{1}{n} < 3$ .

Dus er bestaat geen  $n \in \mathbb{N}$  zodat  $3 - \frac{1}{n} > 3$ .

Dus  $[3, 6] \subseteq A_n$  voor elke  $n$ .

Dus  $[3, 6] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

□

(e.) **Theorem 4.** De doorsnede van de collectie  $I$  is een deelverzameling van het interval  $[3, 6]$ . In andere woorden:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq [3, 6]$ .

Ook hier begin ik met het bewijzen van een subargument.

**Lemma 4.1.** Voor een gegeven  $n$  en  $m \in \mathbb{N}$  zodat  $n < m$ , geldt dat de doorsnede van  $A_n$  en  $A_m$  gelijk is aan  $A_m$ . In andere woorden:

$$n < m \implies A_n \cap A_m = A_m.$$

*Bewijs van lemma 4.1.* Neem  $n, m \in \mathbb{N}$  met  $n < m$ .

Dan geldt  $3 - \frac{1}{n} < 3 - \frac{1}{m}$ .

Dus  $[3 - \frac{1}{m}, 6] \subseteq [3 - \frac{1}{n}, 6]$  en  $[3 - \frac{1}{n}, 6] \not\subseteq [3 - \frac{1}{m}, 6]$ .

Dus  $A_m$  is een deelverzameling van  $A_n$ , en  $A_n$  is geen deelverzameling van  $A_m$ .

$$\text{Dus } A_n \cap A_m = A_m.$$

$$\text{Dus } n < m \implies A_n \cap A_m = A_m.$$

□

*Bewijs van Theorem 4.*

Omdat  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$  is 3 de bovengrens van de linkergrens van het interval. In andere woorden, de linkergrens van  $A_n$  kan niet groter worden dan 3.

Omdat ook elke  $A_n$  uniek is, betekent dit dat het interval  $[3, 6]$  het enige interval is dat een deelverzameling is van alle  $A_n$ .

$$\text{Dus } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [3, 6].$$

□