Lineare Algebra - Inleveropgave 1

Brechtje Poppen - Lotte Gritter - Boris van Boxtel

23 september 2022 - Week 38

(a). Stel $z^n = 1$ met $z \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan is z te schrijven als volgt: $z = re^{i\phi}$, dus $z^n = r^n e^{in\phi} = 1$.

Omdat $w_1 = w_2$ met $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \implies |w_1| = |w_2| \wedge \arg(w_1) = \arg(w_2)$, geldt:

$$\begin{aligned} |z^n| &= |1| \\ \arg(z) &= \arg(1) \end{aligned} \tag{1}$$

$|z^n| = r^n$ dus $r^n = 1$, en omdat $r \in \mathbb{R}$, $r = 1$. $\arg(z) = im\phi$ en $\arg(1) = 2k\pi$ met $k \in \mathbb{N}$, dus $n\phi = 2k\pi$. Dus $\phi = \frac{2k\pi}{n}$.

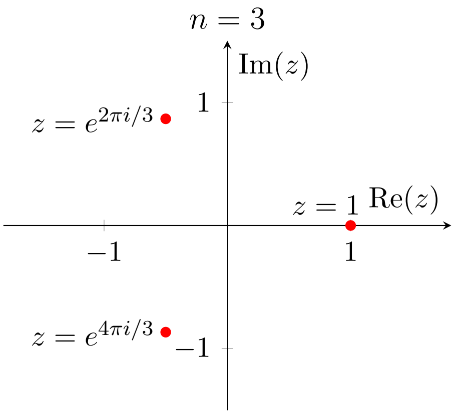
$r = 1$ en $\phi = \frac{2k\pi i}{n}$ geven $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ voor een gekozen $n \in \mathbb{N}$.

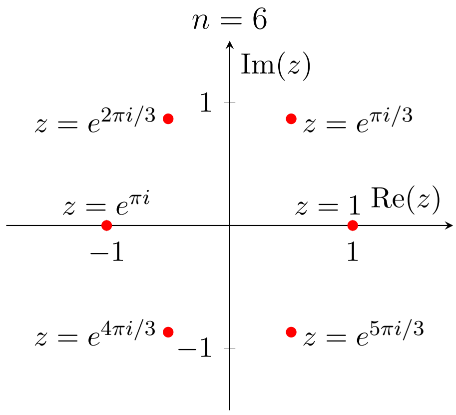
$n = 3$

k	z
0	1
1	$e^{2\pi i/3}$
2	$e^{4\pi i/3}$

$n = 6$

k	z
0	1
1	$e^{\pi i/3}$
2	$e^{2\pi i/3}$
3	$e^{\pi i}$
4	$e^{4\pi i/3}$
5	$e^{5\pi i/3}$

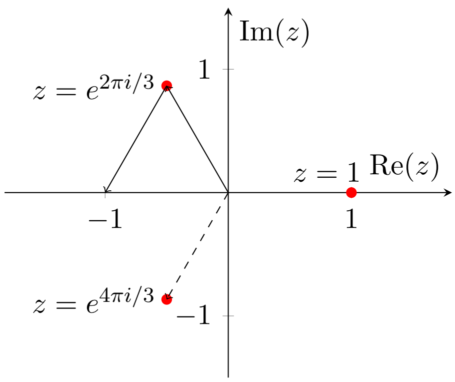




De som van de n eenheidswortels is 0, omdat alle vectoren opgetelt elkaar opheffen. Wanneer n even is, zoals bij $n = 6$, heffen alle getallen met een complex deel niet gelijk aan 0 elkaar op, en blijven alleen -1 en 1 over die elkaar vervolgens opheffen. Wanneer n oneven is, is de som van alle complexe getallen -1, wat vervolgens de overgebleven 1 opheft.

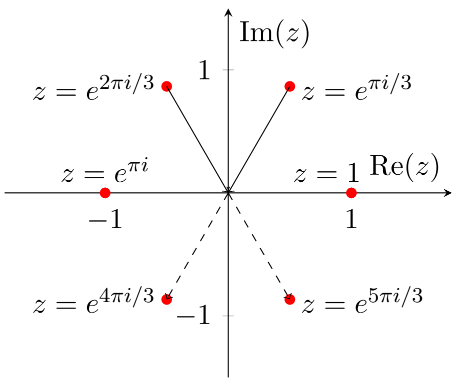
Voorbeelden:

$n = 3$



We zien hier dat de som van de twee complexe getallen behalve 1, samen opgetelt -1 zijn. Dit heft op met de overgebleven eenheidswortel 1, en houden we 0 over.

$n = 6$



We zien hier dat de som van de complexe getallen die niet op de reële as liggen 0 is, en vervolgens -1 en 1 overblijven. Deze twee heffen elkaar op, en houden we 0 over.

(b). De n-de eenheidswortels zijn $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ met $k \in \mathbb{N}$. Voor afleiding zie opdracht (a).

De n-de eenheidswortels zijn weer te geven in het complexe vlak als punten die gelijkmatig zijn verdeeld over de eenheidscirkel. Er zijn altijd n aantal eenheidswortels. De hoek tussen twee opeenvolgende eenheidswortels is altijd $\frac{2\pi}{n}$.

(c). Neem $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ de eenheidswortel met het kleinste positieve argument, dan zijn de overige eenheidswortels te schrijven als w^k voor een $k \in \mathbb{N}$, want $\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ is de algemene vorm van de eenheidswortels.

(d). Te bewijzen: $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

Bewijs.
Neem $S = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$.
Dan $S \cdot w = w + w^2 + \cdots + w^n = S - 1 + w^n$.
Dan kunnen we schrijven $S \cdot w - S = -1 + w^n$.
Omdat $w^n = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^n = e^{2\pi i} = 1$, $-1 + w^n = 0$.
Dus $s(w-1) = 0$ geeft $S = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$. $\square$

(e). Elke term in de som $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$ corrospondeerd exact met een eenheidswortel en alle eenheidswortels corrosponderen exact met een term in deze som. Bij (d). hebben we bewezen dat deze som gelijk is aan 0, dus de som van alle eenheidswortels is 0.