Bewijzen - Inleveropgave 6

B.H.J. van Boxtel

25 Oktober 2022 - Week 43

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^5$. Een functie $g(x)$ is continu in a als $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Stelling 1. Zij $a \geq 0$ willekeurig maar vast, dan is f continu in a.

In andere woorden, er moet worden bewezen dat $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, oftewel $\lim_{x\to a} 3x^5 = 3a^5$.

Dit is te bewijzen doormiddel van een $\epsilon - \delta$-bewijs.

Bewijs.
Kies
$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3}\right\}$$

Neem nu aan:
$$|x - a| < \delta \tag{1}$$

We willen laten zien dat hieruit volgt dat:
$$|3x^5 - 3a^5| < \epsilon \tag{2}$$

Door onze keuze van δ, geldt het volgende:
$$\delta \leq 1 \tag{3}$$

En hierdoor geldt ook:
$$x \leq a + 1 \tag{4}$$

We zien dat we het linkerdeel van verg. (2) kunnen herschrijven als:
$$|3x^5 - 3a^5| = |x - a||3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \tag{5}$$

Door de driehoeks ongelijkheid kunnen we schrijven:
$$|3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \leq |3x^4| + |3x^3a| + |3x^2a^2| + |3xa^3| + |3a^4| \tag{6}$$

Door verg. (4) geldt het volgende:
$$\begin{aligned}&|3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \\ &\quad\leq |3(a+1)^4| + |3(a+1)^3a| + |3(a+1)^2a^2| + |3(a+1)a^3| + |3a^4|\end{aligned} \tag{7}$$

Gegeven is dat $a \geq 0$, dus we kunnen aan de rechterkant de absoluutstrepen weglaten, en vervolgens de hele vergelijking simplificeren tot:

$$|3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \leq 15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3 \tag{8}$$

Wanneer we dit samennemen met verg. (1) vinden we:

$$|x - a||3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \leq \delta(15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3) \tag{9}$$

Door verg. (5) kunnen we het linkerdeel van de ongelijheid als volgt schrijven:

$$|3x^5 - 3a^5| \leq \delta(15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3) \tag{10}$$

Door onze keuze van δ weten we dat:

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3} \tag{11}$$

Hierdoor kunnen we verg. (10) ook schrijven als:

$$|3x^5 - 3a^5| \leq \frac{\epsilon(15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3)}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3} \tag{12}$$

Dus:

$$|3x^5 - 3a^5| \leq \epsilon \tag{13}$$

$\square$