# 1 Kanonskogel

We beschouwen een kogel die onder een hoek $\theta$ uit een kanon wordt afgeschoten, zoals geillustreerd in de onderstaande figuur. Bij het verlaten van de loop heeft de kogel een snelheid $v_0$.


**a)** De beginsnelheid heeft een component in de $x$-richting (we noemen die $v_{x0}$) en een component in de $y$-richting (we noemen die $v_{y0}$). Wat zijn $v_{x0}$ en $v_{y0}$ als functie van $v_0$ en de hoek $\theta$?

**b)** Welke krachten werken er op de kogel nadat deze het kanon heeft verlaten? Teken deze krachten in de figuur.

**c)** Schrijf de differentiaal vergelijkingen op die de beweging van de kogel in de $x$- en de $y$-richting beschrijven. Verwaarloos hierbij de luchtwrijving.

**d)** Laat zien dat $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$ de oplossing is van de bewegingsvergelijking in de $y$-richting.

**e)** Los de bewegingsvergelijking in de $x$-richting op.

**f)** Bepaal de formule voor de maximale hoogte $h$ die de kogel bereikt.

**g)** Bepaal de formule voor de afstand $L$ die de kogel in de $x$-richting aflegt voordat hij de grond raakt?

**h)** Bereken onder welke hoek $\theta$ de afstand $L$ maximaal groot is. Je mag daarbij de begin hoogte $y_0 = 0$ kiezen om de berekening eenvoudiger te maken.

**i)** Als de kogel onder een hoek $\theta = 55°$ wordt afgeschoten met een snelheid van 500 m/s, wat zijn dan de maximale hoogte en de afstand $L$? En hoelang duurt de totale vlucht van de kogel?

## 2 Katapult

We schieten met een katapult een steentje met massa $m$ recht omhoog met een snelheid $v_0$. We nemen aan dat er op het steentje kwadratische luchtwrijving met coefficient $c_2$ werkt. We willen weten hoe lang het duurt totdat het steentje op zijn hoogste punt is.

**a)** Schrijf de bewegingsvergelijking op voor het steentje, hou er rekening mee dat de snelheid omhoog gericht is (in tegenstelling tot het voorbeeld uit het boek).

**b)** Veréénvoudig de bewegingsvergelijking door het invoeren van de eindsnelheid $v_e = \sqrt{mg/c_2}$.

**c)** Vorm de bewegingsvergelijking om tot een integraal vergelijking en reken de integraal uit. Je kunt daarbij gebruik maken van het feit dat

$$\frac{d}{d\alpha} \arctan \alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

**d)** Laat zien dat de snelheid gegeven wordt door

$$\frac{v(t)}{v_e} = \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_e}\right) - \frac{gt}{v_e}\right)$$

**e)** Op welk tijdstip bereikt het steentje het hoogste punt?

## 3 De baan van een kanonskogel met luchtwrijving

We beschouwen weer de baan van een kanonskogel, maar we nemen nu aan dat er luchtwrijving is. Voor deze som nemen we aan dat de luchtwrijvingskracht lineair gaat met de snelheid.

**a)** Schrijf de differentiaalvergelijkingen op voor de beweging van de kogel in de $x$ en $y$ richting.

**b)** Schrijf de vergelijking voor de $x$-richting op als een vergelijking voor de snelheid $v_x$ en los deze vergelijking op. Gebruik dezelfde beginvoorwaarden als vorige week.

**c)** Integreer de gevonden functie $v_x(t)$ om te laten zien dat de positie $x(t)$ gegeven wordt door

$$x(t) = \frac{mv_{x0}}{c}\left(1 - e^{-kt}\right),$$

waarbij $k = c/m$.

**d)** Laat zien dat de oplossing van de vergelijking in de $y$-richting wordt gegeven door

$$v_y(t) = \left(v_{y0} + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

**e)** Wat is volgens deze oplossing de vertical snelheid van de kogel na zeer lange tijd?

**f)** Maak een schets van de functie $v_y(t)$ als functie van de tijd.

**g)** Integreer de gevonden functie $v_y(t)$ om te laten zien dat de positie $y(t)$ gegeven wordt door

$$y(t) = y_0 - \frac{gt}{k} + \left(\frac{v_{y0}}{k} + \frac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Nu hebben we een probleem! Immers, als we willen weten hoever de kogel komt, moeten we eerst uit de bovenstaande vergelijking bepalen wanneer de kogel de grond raakt, dus voor welke $t_{\text{eind}}$ geldt dat $y(t_{\text{eind}}) = 0$. Net als bij opgave 1, mag je nu aannemen dat $y_0 = 0$. Dus we moeten de vergelijking

$$\frac{gt_{\text{eind}}}{k} = \left(\frac{v_{y0}}{k} + \frac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt_{\text{eind}}}\right),$$

oplossen. Maar voor deze vergelijking is geen analytische oplossing. We kunnen de oplossing wel vinden daar een grafiek te tekenen, of door de vergelijking in de computer op te lossen. Maar, we kunnen de vergelijking bij benadering we analytisch oplossen, als we aannemen dat de tijd $t_{\text{eind}} \gg 1/k$.

**h)** Hoe kunnen we de op te lossen vergelijking veréénvoudigen als $t_{\text{eind}} \gg 1/k$ en wat wordt in dat geval $t_{\text{eind}}$?

**i)** Hoe kunnen we de vergelijking voor $x(t)$ veréénvoudigen als $t_{\text{eind}} \gg 1/k$ en wat wordt in dat geval $x(t_{\text{eind}})$?

**j)** Als de kogel onder een hoek van 55° wordt afgeschoten met een snelheid van 500 m/s, met $k = 0.1\ \text{s}^{-1}$, hoelang duurt dat de totale vlucht van de kogel en hoever komt de kogel (in de bovenstaande benadering).