Bewijzen - Inleveropgave 5

B.H.J. van Boxtel

19 Oktober 2022 - Week 42

We bekijken een spel dat wordt gespeeld door twee spelers, Alice en Bob. Zij kiezen een natuurlijk getal n en maken dan een stapel met n muntjes. Omstebeurt mogen ze 1, 2 of 3 muntjes van deze stapel pakken. Degene die het laatste muntje pakt verliest. Alice begint. Stel dat $n \equiv 1 \pmod 4$. We bewijzen dat Bob altijd kan winnen, wat Alice ook doet.

We weten dat $n \equiv 1 \pmod 4$, dus n is te schrijven als $n = 4k+1$ met $k \in \mathbb{N}$, waar we ook nemen dat $0 \in \mathbb{N}$. We bewijzen nu dat Alice verliest voor elke n van deze vorm, door met inductie te bewijzen dat Alice verliest voor elke k.

Bewijs.
Bij $k = 0$ is de stapel van de vorm $n = 1$. Dus haar enige optie is het laatste muntje pakken, en verliest ze.

Neem aan dat Alice verliest als zij en aan de beurt is, en de stapel van de vorm $n = 4k + 1$ is.

Beschouw nu het geval dat $n = 4(k+1)+1 = 4k+5$. Gegeven is dat Alice begint. We kunnen nu 3 gevallen onderscheiden, voor elke keuze die Alice kan maken.

Geval 1. Alice pakt 1 muntje van de stapel. De stapel is nu van de vorm $n = 4k+4$. Bob kan nu 3 muntjes van de stapel halen. De stapel is nu van de vorm $n = 4k+1$. Alice is nu aan de beurt, en de stapel is van de vorm $n = 4k+1$. Vanuit de aanname weten we dat ze nu verliest.

Geval 2. Alice pakt 2 muntjes van de stapel. De stapel is nu van de vorm $n = 4k + 3$. Bob kan nu 2 muntjes van de stapel halen. De stapel is nu van de vorm $n = 4k + 1$. Alice is nu aan de beurt, en de stapel is van de vorm $n = 4k + 1$. Vanuit de aanname weten we dat ze nu verliest.

Geval 3. Alice pakt 3 muntjes van de stapel. De stapel is nu van de vorm $n = 4k + 2$. Bob kan nu 1 muntje van de stapel halen. De stapel is nu van de vorm $n = 4k + 1$. Alice is nu aan de beurt, en de stapel is van de vorm $n = 4k + 1$. Vanuit de aanname weten we dat ze nu verliest.

Dus het feit dat Alice verliest als ze en aan de beurt is, en de stapel van de vorm $n = 4k + 1$ is, impliceert dat Alice ook verliest als ze en aan de beurt is, en de stapel van de vorm $n = 4k + 5$ is.

Samen met het feit dat Alice verliest in het geval dat ze en aan de beurt is, en $k = 0$, betekent dit dat Alice verliest voor alle k, en dus voor alle stapels waarvoor geldt $n \equiv 1 \pmod 4$.

$\square$