Inleveropgave 2 Linalg

Boris van Boxtel en Brechtje Poppen

27 Oktober 2022

(a.) Stelling:

Laat U en V twee lineaire deelruimten zijn van $\mathbf{R}^n$. Dan geldt dat $U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}$ ook een lineaire deelruimte is van $\mathbf{R}^n$.

Bewijs:

Er moeten drie eigenschappen bewezen worden, namelijk:

1. $\vec{0} \in U + V$
2. Als $\vec{x}, \vec{y} \in U + V$, dan geldt ook $\vec{x} + \vec{y} \in U + V$.
3. Als $\vec{x} \in U + V$ en $\lambda \in \mathbf{R}$ dan $\lambda \cdot \vec{x} \in U + V$.

Belangrijk om op te merken is dat voor $\vec{a} \in U$ en $\vec{b} \in V$ en $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ geldt dat $\vec{c} \in U + V$.

We bewijzen eerst de eerste eigenschap.

Gegeven was dat U en V beide deelruimtes zijn van $\mathbf{R}^n$. Uit de definitie van een deelruimte volgt dan dat $\vec{0} \in U$ en $\vec{0} \in V$. Er geldt dat $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$, dus als $\vec{0} \in U$ en $\vec{0} \in V$, dan geldt ook dat $\vec{0} \in U + V$.

Nu kijken we naar de tweede eigenschap.

Neem een $\vec{x} \in U + V$. Er geldt dan dat $\vec{x} = \vec{x_u} + \vec{x_v}$ met $\vec{x_u} \in U$ en $\vec{x_v} \in V$. Neem ook een $\vec{y} \in U + V$, waarvoor dan geldt dat $\vec{y} = \vec{y_u} + \vec{y_v}$ met $\vec{y_u} \in U$ en $\vec{y_v} \in V$. Additie van $\vec{x}$ en $\vec{y}$ geeft $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x_u} + \vec{x_v}) + (\vec{y_u} + \vec{y_v})$. Dit is ook te schrijven als $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x_u} + \vec{y_u}) + (\vec{u_v} + \vec{y_v})$. Hierbij geldt dat $\vec{x_u} \in U$ en $\vec{y_u} \in U$, en aangezien U een deelruimte van $\mathbf{R}^n$ is geldt $\vec{x_u} + \vec{y_u} \in U$. Een soortgelijk argument leidt tot $\vec{x_v} + \vec{y_v} \in V$. Uit $\vec{x_u} + \vec{y_u} \in U$ en $\vec{x_v} + \vec{y_v} \in V$ volgt dat $(\vec{x_u} + \vec{y_u}) + (\vec{u_v} + \vec{y_v}) \in U + V$, dus als $\vec{x}, \vec{y} \in U + V$, dan geldt ook $\vec{x} + \vec{y} \in U + V$.

Ten slotte bewijzen we nog dat de laatste eigenschap geldig is.

Neem een $\vec{x} \in U + V$ en een $\lambda \in \mathbf{R}$. Er geldt voor $\vec{x}$ dat $\vec{x} = \vec{x_u} + \vec{x_v}$ met $\vec{x_u} \in U$ en $\vec{x_v} \in V$. Als we bij de gelijkheid $\vec{x} = \vec{x_u} + \vec{x_v}$ een scalaire vermenigvuldiging met λ uitvoeren krijgen we $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\vec{x_u} + \vec{x_v})$. Dit is ook te schrijven als $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x_u} + \lambda \cdot \vec{x_v}$. Aangezien U een deelruimte is van $\mathbf{R}^n$ en er geldt dat $\vec{x_u} \in U$, geldt ook dat $\lambda \cdot \vec{x_u} \in U$. Hetzelfde argument leidt tot $\lambda \cdot \vec{x_v} \in V$. Uit $\lambda \cdot \vec{x_u} \in U$ en $\lambda \cdot \vec{x_v} \in V$ volgt dat $\lambda \cdot \vec{x} \in U + V$, dus als $\vec{x} \in U + V$ en $\lambda \in \mathbf{R}$ dan geldt ook dat $\lambda \cdot \vec{x} \in U + V$.

Er is nu dus bewezen dat elk van de drie eigenschappen geldt, dus is $U+V$ een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^n$. $\square$

(b.) Gegeven is de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Laat U de lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$ zijn opgespannen door de eerste drie kolommen van A. Dus het opspansel van U is gegeven door:

$$\text{Span}(U) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

De basis van een deelruimte wordt gegeven door de onafhankelijke vectoren in het opspansel. Om deze onafhankelijke vectoren te vinden, schrijven we deze vectoren als volgt in een matrix vergelijking:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 2 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 \end{array} \right) \tag{3}$$

Waar u_1, u_2 en u_3 de elementen zijn van een vector $\vec{u}$ uit U. We zien dat deze matrix al in rijgereduceerde vorm is, en twee pivot elementen in de eerste twee kolommen heeft. Dus we kunnen als basis voor U hetvolgende nemen:

$$\text{Basis}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{4}$$

We hebben twee vectoren in de basis van U, dus de dimensie is U.

(c.) Het opspansel van V wordt gegeven door:

$$\text{Span}(V) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

Dus we kunnen op dezelfde manier als bij (b.) de volgende matrixvergelijking opstellen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & v_1 \\ 0 & 4 & v_2 \\ 2 & 2 & v_3 \end{array} \right) \tag{6}$$

Waar v_1, v_2 en v_3 elementen van de vector $\vec{v}$ uit V. Deze matrix is nog niet in rij gereduceerde vorm, dus als we deze matrix vegen, vinden we het volgende:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & v_1 \\ 0 & 4 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 - v_1 - \frac{3}{4}v_2 \end{array} \right) \tag{7}$$

En zien we dat deze matrix twee pivot elementen in de eerste twee kolommen heeft, en dus de basis van V is:

$$\text{Basis}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{8}$$

(d.) De dimensie van $U \cap V$ kan niet groter zijn dan de dimensie van de deelverzameling met de laagste dimensie. V en U hebben allebei dimensie 2, dus de maximale dimensie van $U \cap V$ is 2.

(e.) Gevraagd is om de basis van $U \cap V$ te bepalen. Dit doen we door alle vectoren $\vec{x}$ waarvoor geldt $\vec{x} \in U \cap V$ te bepalen. Uit $\vec{x} \in U \cap V$ volgt dat $\vec{x}$ te schrijven is als een lineaire combinatie van de vectoren uit de basis van zowel U als V, dus er geldt:

$$\vec{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

met λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, en er geldt:

$$\vec{x} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

met μ_1, $\mu_2 \in \mathbf{R}$. Hieruit volgt het volgende:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dit stelsel vergelijkingen lossen we nu op voor de coëfficiënten. Dit wordt gedaan door een matrix B op te stellen met de volgende vectoren als kolommen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

En daarna lossen we het bijbehorende homogene stelsel vergelijkingen op door middel van rijreductie. We krijgen het volgende stelsel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \tag{13}$$

Een oplossing voor dit stelsel is $(5, -2, 1, -1)^t$, dus de basis van $U \cap V$ is:

$$\text{Basis}(U \cap V) = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

(f.) We weten vanuit **Stelling 4.4.1** van het dictaat dat geldt:

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \tag{15}$$

Dus als we dit invullen krijgen we:

$$\dim(U+V) = 2 + 2 - 1 = 3 \tag{16}$$

(g.) We weten dat we een vector in een deelruimte als een lineare combinatie van basisvectoren van deze deelruimte kunnen schrijven, en als we dit doen voor een $\vec{u} \in U$ en een $\vec{v} \in V$, krijgen we het volgende:

$$\vec{u} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\vec{v} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Als we deze vergelijkingen optellen, krijgen we:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} \tag{19}$$

Wat precies de definitie is voor een vector $\vec{x}$ uit de somruimte $U+V$. Dit kunnen we als volgt als matrixvergelijking schrijven:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & x_3 \end{array}\right) \tag{20}$$

Deze vergelijking is al in rij gereduceerde vorm, dus een basis is gegeven door de kolommen met de pivots:

$$\text{Basis}(U+V) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{21}$$

En ook het volgende is een basis voor $U+V$:

$$\text{Basis}(U+V) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{22}$$