

Mechanica - Inleveropgave 1

Boris van Boxtel - Jean Croes - Mike van Eck - Lotte Gritter

28 september 2022 - Week 39

Gegeven zijn twee stelsels: \mathcal{O} en \mathcal{O}' , waarbij \mathcal{O}' met een snelheid v in y-richting beweegt. Afgesproken is dat op $t = 0$ de oorsprong van \mathcal{O}' in de oorsprong van \mathcal{O} ligt.

- (a). De tijd kan berekend worden door de afstand te delen door de tijd. De tijd is dus gelijk aan $\frac{h}{c}$. Hieruit volgt dat $ct = h$. De ruimtetijdcoördinaten van de events in stelsel \mathcal{O} zijn: $(x, y, ct) = (L, h, h)$ en $(x, y, ct) = (L, -h, h)$.
- (b). Het toepassen van een lorentztransformatie op de bij (a). gevonden ruimtetijd coördinaten, geeft als coördinaten in stelsel \mathcal{O}' : $(L, \gamma h(1 - \frac{v}{c}), \gamma h(1 - \frac{v}{c}))$ en $(L, -\gamma h(1 + \frac{v}{c}), \gamma h(1 + \frac{v}{c}))$. Omdat \mathcal{O}' uitsluitend in de y-richting beweegt, verandert alleen het y-coördinaat na het toepassen van de lorentztransformatie.
- (c). De tijd die het licht erover doet om van het lampje naar het papiertje te gaan is $\frac{h}{c}$. De afstand van het papiertje tot de oorsprong van \mathcal{O} is te berekenen met de stelling van Pythagoras. Dit geeft $\sqrt{L^2 + h^2}$. De tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong te gaan is dan $\frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c}$. Het tijdstip waarop de waarnemer in \mathcal{O} de lichtflits via het papiertje ziet wordt dus gegeven door:

$$t_{\mathcal{O}} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \quad (1)$$

Waar het subscript staat voor de oorsprong van het stelsel waar de lichtflits heen beweegt.

- (d). Doordat stelsel \mathcal{O}' in de y-richting beweegt, is $h' \neq h$, dus is de tijd die het licht erover doet om in de oorsprong van \mathcal{O}' te komen anders. Door een lorentztransformatie toe te passen vinden we:

$$h' = \gamma h (1 - \beta) \quad (2)$$

Waar $\beta = \frac{v}{c}$.

Nu kunnen we in (1) h vervangen door h' om de tijd gemeten door \mathcal{O}' te vinden. Hieruit volgt dat het tijdstip waarop de waarnemer in \mathcal{O} de lichtflits waarneemt volgens \mathcal{O}' gegeven wordt door:

$$t'_{\mathcal{O}} = \frac{\gamma h (1 - \frac{v}{c})}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (\gamma h (1 - \frac{v}{c}))^2}}{c} \quad (3)$$

- (e). Volgens de waarnemer in \mathcal{O} is de tijd die het licht erover doet om bij het papiertje aan te komen gelijk aan $\frac{h}{c}$. De snelheid van \mathcal{O}' ten opzichte van \mathcal{O} is v , dus $v\Delta t$ is de afgelegde afstand over een tijd Δt . Dus de tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong van \mathcal{O} te komen, is gelijk aan $\frac{\sqrt{L^2 + (v\Delta t \pm h)^2}}{c}$. Dus de tijd die het licht erover doet om in \mathcal{O}' aan te komen wordt gegeven door:

$$t_{\mathcal{O}'} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (v\Delta t \pm h)^2}}{c} \quad (4)$$

Omdat de tijd die het licht erover doet om in \mathcal{O}' aan te komen, en de tijd die \mathcal{O}' erover doet om in dat punt te komen gelijk zijn, geldt $t = \Delta t$. Dus de volgende vergelijking geldt:

$$t_{\mathcal{O}'} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (vt \pm h)^2}}{c} \quad (5)$$

Deze vergelijking resulteert in een kwadratische vergelijking in t , die kan worden opgelost om de volgende oplossingen te vinden:

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{O}',1} &= \frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \\ t_{\mathcal{O}',2} &= -\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Waar we de oplossingen die een negatieve waarden voor t aannemen buiten beschouwing hebben gelaten.

Dit is de tijd wanneer dat het licht in \mathcal{O}' aankomt volgens een waarnemer in \mathcal{O} . Dit moeten we dus nog vertalen naar een tijd in \mathcal{O}' . Omdat het event waar het licht en de oorsprong van \mathcal{O}' samenkomen per definitie in de oorsprong van \mathcal{O}' ligt, is de tijd waarop dit gebeurt volgens \mathcal{O}' de eigentijd van dit event. Dus geldt $\tau' = t/\gamma$ waar τ' de eigentijd van het event van de waarneming van het licht is in \mathcal{O}' , dus $\tau' = t'$.

Dus het tijdstip waarop de waarnemer in \mathcal{O}' de lichtflits via de papiertjes waarneemt, is gegeven door:

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{O}',1} &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \\ t'_{\mathcal{O}',2} &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

En dit kunnen we herschrijven tot het volgende:

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{O}',1} &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left(\frac{c-v}{c+v} \right)} \\ t'_{\mathcal{O}',2} &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left(\frac{c+v}{c-v} \right)} \end{aligned} \quad (8)$$

En dit is ook weer te herschrijven als:

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{O}',1} &= \frac{h}{c} k(-\beta) + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 k(-\beta)^2} \\ t'_{\mathcal{O}',2} &= \frac{h}{c} k(\beta) + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 k(\beta)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Waar $k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

Om te testen of we de goede formule hebben, kunnen we $v = 0$ in verg. (8) invullen, en dan zouden we dezelfde vergelijking moeten krijgen als verg. (1).

Als we $v = 0$ nemen geeft dit:

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{O}',1} &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c-0}{c+0}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left(\frac{c-0}{c+0}\right)} \\ t'_{\mathcal{O}',2} &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c+0}{c-0}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left(\frac{c+0}{c-0}\right)} \end{aligned} \quad (10)$$

Omdat t'_1 en t'_2 samenvallen, geven deze allebei:

$$t'_{\mathcal{O}'} = \frac{h}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \quad (11)$$

Wat hetzelfde is als verg. (1).

- (f). Bij (d). en (e). worden verschillende dingen beschreven. Bij (d). beschrijf je de tijd die het licht er, volgens de waarnemer in \mathcal{O}' , in \mathcal{O} over doet om de waarnemer in de oorsprong van \mathcal{O} te bereiken. Dit is korter dan de tijd die de waarnemer in \mathcal{O} waarneemt omdat de afstand h tot de papiertjes volgens de waarnemer in \mathcal{O}' korter is vanwege lengtecontractie.

Bij (e). wordt de tijd beschreven die het licht erover doet om via de papiertjes bij de waarnemer in de oorsprong van \mathcal{O}' te komen. Dit is iets heel anders en geeft dus ook een andere tijd.