Bewijzen - Inleveropgave 1 - Poging 2

B.H.J. van Boxtel

5 Oktober 2022 - Week 40

(a.) Een voorbeeld van een geïndiceerde collectie I die voldoet aan de volgende vereisten:

- Alle A_n zijn verschillend.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [2, 6]$.
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [3, 6]$.

Is $I = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, waar $A_n = [3 - \frac{1}{n}, 6]$.

(b.) **Theorem 1.** De verzamelingen A_n zijn paarsgewijs verschillend. In andere woorden $n \neq m \implies A_n \neq A_m$.

Bewijs van ***Theorem 1.***
Neem $n, m \in \mathbb{N}$ zodat $n \neq m$.
Dan is $\frac{1}{n}$ niet gelijk aan $\frac{1}{m}$, dus $3 - \frac{1}{n}$ is niet gelijk aan $3 - \frac{1}{m}$.

Omdat de linkergrenzen van de intervallen niet gelijk zijn, zijn de intervallen niet gelijk.

$[3 - \frac{1}{n}, 6] = A_n \neq [3 - \frac{1}{m}, 6] = A_m$.
Dus $n \neq m \implies A_n \neq A_m$.

□

(c.) **Theorem 2.** De vereniging van de collectie I is gelijk aan het interval $[2, 6]$. In andere woorden: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [2, 6]$.

Hiervoor is een kort subargument nodig.

Lemma 2.1. Voor een gegeven n en m zodat $n < m$ geldt dat $A_m \subseteq A_n$.

Bewijs van ***lemma 2.1****.*
Neem $n, m \in \mathbb{N}$ zodat $n < m$.
Dan geldt $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, en ook $3 - \frac{1}{n} < 3 - \frac{1}{m}$.

Vanuit de definitie van A_n zien we dat $3 - \frac{1}{n}$ de linkergrens van A_n is en $3 - \frac{1}{m}$ de linkergrens van A_m. Omdat de linkergrens van A_n nu kleiner is dan de linkergrens van A_m en de rechtergrens van beide hetzelfde is, is het interval A_m een deelverzameling van het interval A_n.

Dus $n < m \implies A_m \subseteq A_n$.

□

Nu kan **Theorem 2.** bewezen worden.

Bewijs van ***Theorem 2.***
Omdat $1 \leq n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, en als gevolg van **lemma 2.1** geldt $A_n \subseteq A_1$ voor elke n.

$A_1 = [2, 6]$, dus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_1 \iff \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq [2, 6]$.

$\square$

(d.) **Theorem 3.** Het interval $[3, 6]$ is een deelverzameling van $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Bewijs van ***Theorem 3.***
Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $\frac{1}{n} > 0$.
Dus $-\frac{1}{n} < 0$, dus $3 - \frac{1}{n} < 3$.

Dus er bestaat geen $n \in \mathbb{N}$ zodat $3 - \frac{1}{n} > 3$.
Dus $[3, 6] \subseteq A_n$ voor elke n.

Dus $[3, 6] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

$\square$

(e.) **Theorem 4.** De doorsnede van de collectie I is een deelverzameling van het interval $[3, 6]$. In andere woorden: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq [3, 6]$.

Ook hier begin ik met het bewijzen van een subargument.

Lemma 4.1. Voor een gegeven n en $m \in \mathbb{N}$ zodat $n < m$, geldt dat de doorsnede van A_n en A_m gelijk is aan A_m. In andere woorden:
$n < m \implies A_n \bigcap A_m = A_m$.

Bewijs van ***lemma 4.1.*** Neem $n, m \in \mathbb{N}$ met $n < m$.
Dan geldt $3 - \frac{1}{n} < 3 - \frac{1}{m}$.

Dus $[3 - \frac{1}{m}, 6] \subseteq [3 - \frac{1}{n}, 6]$ en $[3 - \frac{1}{n}, 6] \nsubseteq [3 - \frac{1}{m}, 6]$.

Dus A_m is een subset van A_n, en A_n is geen subset van A_m.
Dus $A_n \bigcap A_m = A_m$.

Dus $n < m \implies A_n \bigcap A_m = A_m$.

$\square$

Bewijs van ***Theorem 4.***
Omdat $\lim_{x\to\infty} 3 - \frac{1}{a} = 3$ is 3 de bovengrens van de linkergrens van het interval. In andere woorden, de linkergrens van A_n kan niet groter worden dan 3.

Omdat ook elke A_n uniek is, betekent dit dat het interval $[3, 6]$ het enige interval is dat een deelverzameling is van alle A_n.

Dus $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [3, 6]$.

$\square$