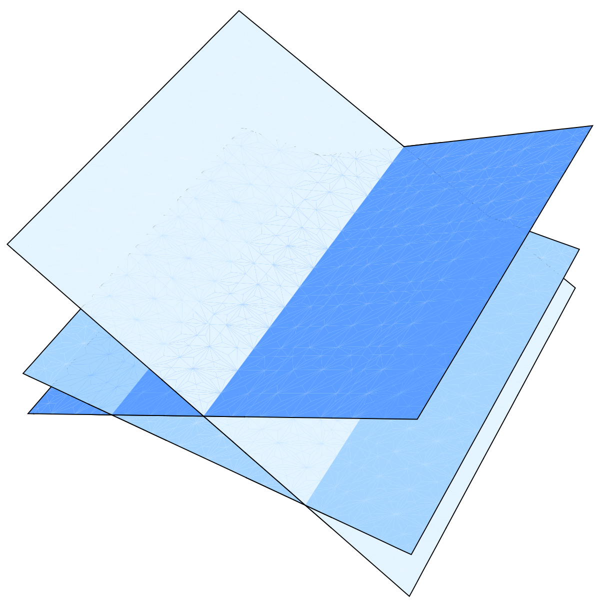
Lineaire Algebra



F.Beukers 2022

Departement Wiskunde UU

Inhoudsopgave

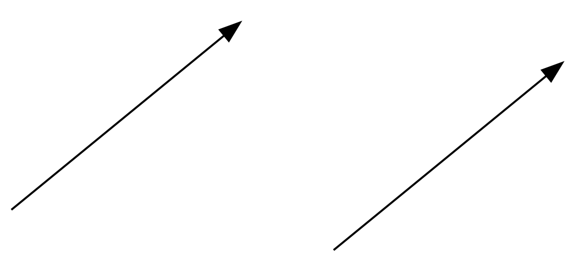
Hoofdstuk 1

Vectoren in de ruimte

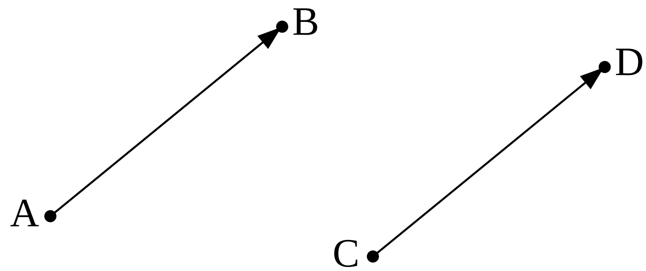
1.1 Het intuïtieve vectorbegrip

Het begrip vector komen we tegen in grote delen van de wiskunde en natuurkunde. Ook komen ze in heel veel verschillende gedaanten voor. Zo worden bijvoorbeeld krachten en snelheden in de natuurkunde voorgesteld door vectoren. In de wiskunde gebruiken we vectoren om punten in de ruimte weer te geven, maar later zal blijken dat ook oplossingen van lineaire (differentiaal)vergelijkingen gezien kunnen worden als vectoren. We zullen deze cursus beginnen met vectoren als meetkundige objecten, met een richting en een lengte, later zullen we ook met het abstractere vectorbegrip kennismaken.

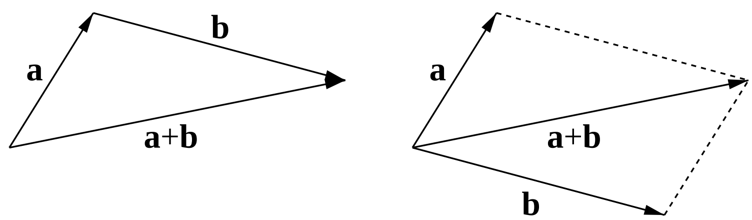
We introduceren het begrip *vector* als een translatie (= verschuiving) in de ruimte. Een dergelijke translatie kunnen we ons voorstellen door middel van een pijl, die aangeeft in welke richting de verschuiving moet plaatsvinden en over welke afstand de verschuiving plaatsvindt. Daarbij hebben we meerdere mogelijkheden om de pijl te tekenen. Het is hopelijk duidelijk dat onderstaande twee pijlen dezelfde translatie representeren (Ze zijn even lang, parallel, en wijzen in dezelfde richting).



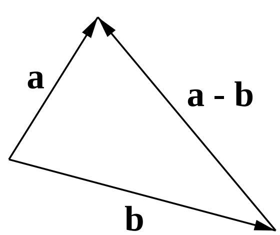
Kies een punt A en een vector $\mathbf{v}$. Dan zal $\mathbf{v}$ het punt A naar een ander punt B verschuiven. We zullen de vector $\mathbf{v}$ dan ook wel eens als $\overrightarrow{AB}$ aangeven. Dezelfde vector $\mathbf{v}$ kan ook een punt C naar een ander punt D verplaatsen. Dan kunnen we ook schrijven $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$. De notaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ stellen in dit geval dus dezelfde vector voor.



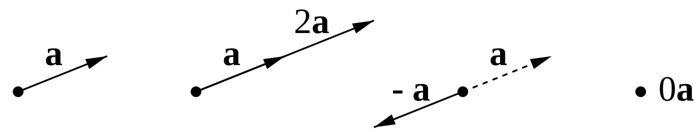
De verplaatsingsafstand van een vector zullen we de *lengte* van onze vector noemen. Er is één vector met lengte 0, en dat noemen we de *nulvector*. Notatie: $\mathbf{0}$. Deze correspondeert met geen translatie of, als je wilt, een translatie over afstand 0. Als $\mathbf{a}$ een vector is, dan noteren we zijn lengte met $|\mathbf{a}|$ (we geven al onze vectoren met vette letters aan).
Stel dat we twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ hebben. We kunnen nu de *somvector* definiëren als de translatie die ontstaat door eerst translatie $\mathbf{a}$ uit te voeren en vervolgens $\mathbf{b}$. Deze opeenvolging van translaties is uiteraard weer een translatie en we zullen die noteren met $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. In een plaatje,



In het rechterplaatje hebben we voor $\mathbf{b}$ een andere pijl gekozen die in hetzelfde punt begint als waar de pijl voor $\mathbf{a}$ begint. Hopelijk is het uit dit plaatje duidelijk waarom vectoroptelling volgens de zogenaamde *parallelogramwet* gaat.
Verder hebben we ook de *verschilvector* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dat is precies de vector die bij $\mathbf{b}$ opgeteld weer $\mathbf{a}$ geeft. In een plaatje,



Notatie: $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Naast optelling van vectoren is er ook *scalaire vermenigvuldiging*. Kies een vector $\mathbf{a}$ en een getal $\lambda \in \mathbb{R}$. Stel $\lambda > 0$. De vector die dezelfde richting als $\mathbf{a}$ heeft, maar waarvan de lengte λ maal zo groot is als die van $\mathbf{a}$ noemen we het scalaire product van $\mathbf{a}$ met λ. Als $\lambda < 0$, dan verstaan we onder het scalaire product van $\mathbf{a}$ met λ de vector met tegengestelde richting aan $\mathbf{a}$ en lengte gelijk aan $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$. Het scalaire product van $\mathbf{a}$ met λ noteren we als $\lambda\mathbf{a}$. Tenslotte nemen we altijd $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Hier is een illustratie,



De optelling en scalaire vermenigvuldiging voldoen aan een aantal min of meer voor de hand liggende regels, die we hier verder niet zullen afleiden, maar wel noemen. Voor elk drietal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en elk tweetal getallen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelden de volgende regels,

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (commutativiteit)
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (associativiteit)
3. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (distributiviteit)
4. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (distributiviteit)
5. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (associativiteit)

Onthoudt deze regels en gebruik ze. Later zullen we de boel op z'n kop zetten en vectoren definiëren als objecten die aan bovenstaande rekenregels voldoen en niets anders. Maar voorlopig is het nog niet zover en houden we aan ons meetkundige vectorbegrip vast.

1.2 Vlakke en ruimtelijke meetkunde

Kies een vast punt O in de ruimte die we de *oorsprong* noemen. Kies nu een willekeurig punt P in de ruimte. De vector die O naar P verplaatst geven we aan met $\overrightarrow{OP}$. Omgekeerd, gegeven een vector $\mathbf{p}$, dan zal deze het punt O naar een ander ruimtelijk punt verplaatsen. Als we dat weer met P aangeven, dan zien we dat $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$. Op deze manier zie je dat, door keuze van een punt O als oorsprong, aan elke vector een ruimtelijk punt kan worden toegekend en omgekeerd. Vaak zullen we stilzwijgend van de keuze van een oorspong uitgaan en de begrippen 'punt in de ruimte' en 'vector' door elkaar gebruiken. Dit geeft hopelijk geen verwarring.
Met de identificatie punten$\leftrightarrow$vectoren kunnen we bijvoorbeeld een rechte lijn door middel van een verzameling vectoren beschrijven.
Neem om te beginnen een punt $A \neq O$ en zij $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. Het zal duidelijk zijn dat de verzameling vectoren $m = \{\lambda\mathbf{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ precies de lijn door O en A voorstelt. Kies nu een punt P en zij $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$. Verschuif de lijn m over de vector $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ en noem de verschoven lijn l. Deze loopt evenwijdig aan m en gaat door het punt P. De punten van de lijn l worden gegeven door de verzameling $l = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. We noemen $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}$ een *parametervoorstelling* of *vectorvoorstelling* van de lijn l. De vector $\mathbf{p}$ heet een *steunvector* van de lijn

l en $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ een *richtingvector*. Een parametervoorstelling van de lijn die gaat door twee verschillende punten P en Q, gegeven door de vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, luidt $\mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p})$.
Hier is een ander voorbeeld van 'meetkunde door middel van vectoren'.

Lemma 1.2.1 *Kies een oorsprong O en zij P, Q een tweetal punten. Stel $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ en $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$. Dan wordt het punt precies in het midden van het lijnstuk PQ gegeven door $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$.*

Bewijs: Beschouw het parallellogram $OPQR$ waarin R het punt corresponderend met $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ is. De diagonalen van dit parallellogram snijden elkaar middendoor. Het snijpunt is dus precies het midden van de diagonaal PQ. Tevens is dat het midden van de diagonaal OR. En dat correspondeert met de vector $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$.

$\square$

Hier is een kleine meetkundestelling als toepassing.

Stelling 1.2.2 *De zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in precies één punt.*

Bewijs: Geef de hoekpunten van de driehoek aan met A, B, C. Kies ergens een punt O in het vlak en stel $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ en $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Merk nu op dat het punt Z gegeven door $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ op de zwaartelijn door B ligt. Immers,

$$\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \mathbf{b})$$

hetgeen laat zien dat Z ligt op de lijn door B en het midden van het lijnstuk AC. Op analoge manier zien we dat het punt Z ook op de zwaartelijnen door A en C ligt. Dus snijden de zwaartelijnen elkaar in het punt Z. We noemen dit punt het *zwaartepunt* van de driehoek.

$\square$

We kunnen ook parametervoorstellingen van vlakken geven. Een tweetal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ heet *onafhankelijk* als de één geen scalair veelvoud is van de ander. Anders gezegd, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zijn onafhankelijk als ze beide niet $\mathbf{0}$ zijn en ze wijzen in verschillende en niet-tegengestelde richtingen.
Stel dat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ onafhankelijk zijn en met de punten A resp. B corresponderen. Overtuig je er zelf van dat de verzameling $W = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ precies het vlak door O, A, B voorstelt. Zij nu P een willekeurig punt in de ruimte met bijbehorende vector $\mathbf{p}$. Geef het vlak door P, evenwijdig aan W, aan met V. Omdat we V ook kunnen krijgen door W over de vector $\mathbf{p}$ te transleren zien we dat V gegeven wordt door de vectoren $\{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. We noemen dit een *parametervoorstelling van het vlak V*. De vector $\mathbf{p}$ noemen we een *steunvector* van V en $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ richtingvectoren. Evenals bij de lijnen zijn deze vectoren niet uniek vastgelegd.
Stel we hebben drie punten A, B, C in de ruimte, aangegeven met een drietal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. We nemen aan dat de punten niet op één lijn liggen, met

andere woorden er gaat precies één vlak door deze punten. Een tweetal richtingsvectoren wordt bijvoorbeeld gegeven door $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ en $\mathbf{c} - \mathbf{a}$. Kiezen we $\mathbf{a}$ als steunvector dan wordt een parametervoorstelling van het vlak door A, B, C gegeven door $\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a})$.

1.3 Coördinaten

Om echt met vectoren te kunnen rekenen is het handig om met coördinaten van vectoren te werken. Dit idee is afkomstig van Descartes (1596-1650) en wordt sindsdien intensief gebruikt.
Kies een drietal onderling loodrechte vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ elk met lengte 1. Dan weten we dat we elke vector $\mathbf{a}$ kunnen schrijven in de vorm $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3$ voor geschikt gekozen getallen λ, μ, ν. Populair gezegd, de vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_3$ zouden we respectievelijk kunnen aangeven met '1 stap naar voren', '1 stap naar rechts' en '1 stap naar boven'. De vector $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3$ zou dan de instructie 'λ stappen naar voren, μ stappen naar rechts en ν stappen naar boven' betekenen. Het is duidelijk dat elke vector (= translatie) $\mathbf{a}$ met dergelijke instructies gevormd kan worden. De getallen λ, μ, ν noemen we de *coördinaten* of *kentallen* van de vector $\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
Zij nu $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ een tweetal vectoren met coördinaten respectievelijk x_1, x_2, x_3 en y_1, y_2, y_3. Dan geldt,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 + y_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Met andere woorden, de coördinaten van $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ zijn $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3$.
Evenzo geldt voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ dat

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{x} &= \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \\ &= \lambda x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2 + \lambda x_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

De coördinaten van $\lambda\mathbf{x}$ zijn dus $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3$.
De ruimte $\mathbb{R}^3$ is per definitie de ruimte van geordende drietallen reële getallen, die we de coördinaten van het drietal noemen. In $\mathbb{R}^3$ hebben we een coördinaatsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Door van elke vector zijn coördinaten te nemen, kunnen we de ruimte van vectoren identificeren met $\mathbb{R}^3$. Let op dat deze identificatie afhankelijk is van de keuze van de basisvectoren $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Het is een gebruik om de elementen van $\mathbb{R}^3$ te schrijven als een kolom van drie getallen met haakjes eromheen. Dus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dit is de kolomvector notatie. Omdat deze notatie binnen een tekst weer onhandig is, geven we de kolomvector met coördinaten x_1, x_2, x_3 binnen een tekst vaak aan met $(x_1, x_2, x_3)^t$ waarin t (voor transpositie) betekent, dat we van de rij een kolom maken.

1.4 Analytische meetkunde

Door de keuze van een vast punt O in de ruimte, die we de *oorsprong* zullen noemen, kunnen we een 1-1-duidig verband aanbrengen tussen de punten van de ruimte en vectoren. De vectoren staan weer in 1-1-verband met de punten van $\mathbb{R}^3$ en dit geeft de welbekende identificatie van de ruimte om ons heen met $\mathbb{R}^3$. We kunnen nu ruimtelijke meetkunde bedrijven door te rekenen met elementen uit $\mathbb{R}^3$. Vroeger noemde men dit wel de analytische meetkunde. Het gebruik van coördinaten voor punten in de ruimte zou je een algebraïsering van de meetkunde kunnen noemen, en dit was de grote bijdrage van Descartes.
In het verhaal dat nu volgt hebben we een oorsprong O gekozen en identificeren we vectoren met de punten van de ruimte. Verder zullen we impliciet een vastgekozen basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ voor onze coördinaten aannemen.
In een vorige paragraaf hebben we al gezien wat de parametervoorstelling van een lijn is, door gebruik van coördinaten kunnen we er ook heel expliciet mee rekenen.

Voorbeeld 1.4.1. De rechte lijn door de punten $(1, 2, -1)^t$ en $(2, 0, 1)^t$ wordt gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-\nu \\ 2\nu \\ 1-2\nu \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 1.4.2. Het vlak door de punten $(1, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t, (1, 1, 1)^t$ wordt gegegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda \\ 1-\mu \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 1.4.3. We kunnen het snijpunt van bovenstaand vlak en lijn bepalen door oplossing van λ, μ, ν uit de gelijkheid

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda \\ 1-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\nu \\ 2\nu \\ 1-2\nu \end{pmatrix}.$$

In feite staat hier het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 1 &= 2-\nu \\ 1-\lambda &= 2\nu \\ 1-\mu &= 1-2\nu \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $\nu = 1$. Na invullen van $\nu = 1$ volgt uit de tweede vergelijking $1 - \lambda = 2$ en dus $\lambda = -1$. Uit de derde vergelijking $1 - \mu = -1$ en dus $\mu = 2$. Het snijpunt wordt dus $(1, 2, -1)^t$.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 1.4.4. Gegeven zijn de lijnen met parametervoorstellingen

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hebben deze lijnen een snijpunt? Hiertoe moeten we λ, μ bepalen zó dat

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 2 \\ 0 + \lambda &= 3 - \mu \\ 1 - \lambda &= 4 + 2\mu \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $\lambda = 1$. Uit de tweede, $\mu = 3 - \lambda = 2$. Echter, $\lambda = 1, \mu = 2$ is geen oplossing van de derde vergelijking. De lijnen l, m snijden elkaar dus niet.
Verder zijn de richtingsvectoren $(1, 1, -1)^t$ en $(0, -1, 2)^t$ geen veelvoud van elkaar (ze zijn onafhankelijk). Dat betekent dat l, m niet evenwijdig zijn. We noemen een tweetal niet-evenwijdige lijnen dat elkaar niet snijdt, *kruisend*.

$\diamondsuit$

Behalve parametervoorstellingen van een vlak kunnen we een vlak ook karakteriseren door een *vergelijking van een vlak* . Bijvoorbeeld, beschouw het vlak bestaande uit de punten met coördinaten x_1, x_2, x_3 die gegeven wordt door de parametervoorstelling

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Uitgeschreven,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda - 2\mu \\ x_2 &= 3 - \lambda \\ x_3 &= 1 - \lambda - \mu \end{aligned}$$

We elimineren λ, μ uit deze vergelijkingen als volgt. Tel de tweede bij de eerste op en trek de tweede van de derde af,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 - 2\mu \\ x_2 &= 3 - \lambda \\ x_3 - x_2 &= -2 - \mu \end{aligned}$$

Trek nu twee maal de derde van de eerste af,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 8 \\ x_2 &= 3 - \lambda \\ x_3 - x_2 &= -2 - \mu \end{aligned}$$

De eerste vergelijking luidt $x_1+3x_2-2x_3=8$, waaruit λ,μ verdreven zijn. We noemen dit een vergelijking van het vlak.
Omgekeerd kunnen we uit een vergelijking van een vlak ook weer een parametervoorstelling afleiden. Dit kunnen we doen door twee geschikte coördinaten als parameter te kiezen. Bijvoorbeeld, voor het vlak $x_1+3x_2-2x_3=8$ kunnen we als parameters x_2,x_3 kiezen. We krijgen dan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en dit is een keurige parametervoorstelling met parameters x_2,x_3. Merk op dat deze parametervoorstelling verschilt van degene waarmee we gestart zijn. Parametervoorstellingen van lijnen en vlakken zijn niet uniek vastgelegd.

Voorbeeld 1.4.5. Met bovenstaande vaardigheden kunnen we ook lastiger problemen aanpakken. Bijvoorbeeld, gegeven het tweetal kruisende lijnen

$$l:\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m:\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en het punt P met coördinaten $(1,0,1)^t$. Bestaat er een lijn door P die l en m snijdt?
Voor de oplossing moet je je eerst een meetkundige voorstelling maken van het probleem door de twee lijnen en het punt in gedachten te nemen en vervolgens een strategie te bedenken. De gevraagde lijn moet natuurlijk liggen in het vlak V door P en l. Verder moet de gevraagde lijn m snijden. Dat betekent dat het snijpunt van m en V ook op de gevraagde lijn moet liggen. We bepalen dit snijpunt en noemen het Q. De lijn door P en Q ligt in V en moet dus ook l snijden (tenzij de lijn door P,Q en l evenwijdig zijn). Daarmee is de lijn door P,Q de gevraagde lijn.
Nadat we deze strategie hebben bedacht gaan we aan het rekenen. Eerst een parametervoorstelling van het vlak V. Kies als steunpunt $(2,1,0)$ en als richtingen dit steunpunt minus P, dus $(2,1,0)^t-(1,0,1)^t=(1,1,-1)^t$, en de richting van l: $(-1,1,0)^t$. Dus

$$V := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Snijden met de lijn m geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & + & \rho & - & \sigma & = & 3 & + & \mu \\ 1 & + & \rho & + & \sigma & = & & + & \mu \\ & - & \rho & & & = & -2 & + & \mu \end{array}$$

Trek de eerste van de tweede en derde af,

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & + & \rho & - & \sigma & = & 3 & + & \mu \\ -1 & & & + & 2\sigma & = & -3 & & \\ -2 & - & 2\rho & + & \sigma & = & -5 & & \end{array}.$$

Uit de tweede vergelijking lezen we af dat $2\sigma = -2$, dus $\sigma = -1$. Vul dit in de derde vergelijking in, dan krijgen we $\rho = 1$ en tenslotte, uit de eerste, $\mu = 1$. Het gevraagde punt Q wordt dus $(3, 0, -2)^t + (1, 1, 1)^t = (4, 1, -1)^t$. De parametervoorstelling van de gevraagde lijn met steunpunt P en richting $\overrightarrow{PQ}$ wordt

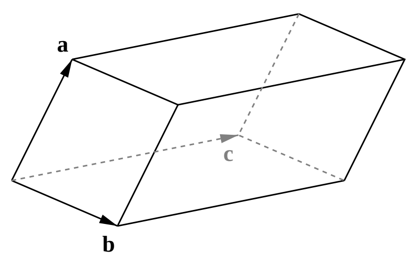
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

1.5 Opgaven

In alle opgaven denken we ons een vast gekozen oorsprong O en we identificeren vectoren en punten in de ruimte door middel van O. De vector die A naar het punt B transleert geven we kortheidshalve aan met $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 1.5.1 Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ een drietal vectoren. Neem de volgende schets over



Schets zelf in deze figuur de vectoren $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ en $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Concludeer dat $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (associativiteit van de vectoroptelling).

Opgave 1.5.2 Geef in elk van de volgende onderdelen een parametervoorstelling van de rechte door de gegeven punten.

1. $(1, 3, -5)^t$ en $(-2, -1, 0)^t$
2. $(1/2, 1/4, 1)^t$ en $(-1, 1, 1/3)^t$

Opgave 1.5.3 Bepaal de punten die het segment tussen de gegeven punten in drieën delen.

1. $(2, 4, 1)^t$ en $(-1, 1, 7)^t$.
2. $(-1, 1, 5)^t$ en $(4, 2, 1)^t$.
3. $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Opgave 1.5.4 Ga na of de volgende paren rechten elkaar snijden en zo ja, bepaal het snijpunt,

1.
$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Opgave 1.5.5 Drie punten heten *collineair* als ze allen op één rechte liggen. Geef een algemene methode om na te gaan of drie punten collineair zijn. Welk van de volgende drietallen zijn collineair?

1. $(2,1,1)^t,\ (1,2,3)^t,\ (4,-1,-3)^t$
2. $(2,-4,1)^t,\ (1,0,2)^t,\ (0,2,3)^t$
3. $(1,-3,1)^t,\ (0,1,2)^t,\ (-1,3,4)^t$

Opgave 1.5.6 Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen en vlakken.

1. $\mathbf{x}=(2,3,1)^t+\lambda(1,-2,-4)^t$ en $3x_1-2x_2+5x_3=11$
2. $\mathbf{x}=(1,1,2)^t+\lambda(1,-1,-2)^t$ en $2x_1+x_2-x_3=5$

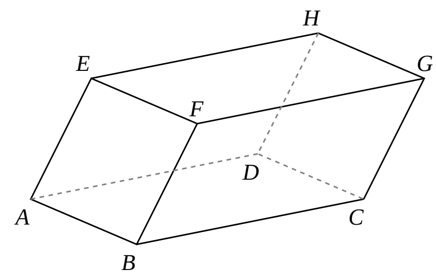
Opgave 1.5.7 Zij P,Q een tweetal verschillende punten in de ruimte. Kies een oorsprong O en noem de bijbehorende vectoren $\mathbf{p},\mathbf{q}$. Geef een parametervoorstelling van de lijn door P en Q in termen van $\mathbf{p},\mathbf{q}$.

Opgave 1.5.8 Zij P,Q,R een drietal punten in de ruimte dat niet op één lijn ligt. Kies een oorsprong O en noem de bijbehorende vectoren P,Q,R. Geef een parametervoorstelling van het vlak door P,Q en R in termen van $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$.

Opgave 1.5.9 In de tekst hebben we het gehad over het zwaartepunt van een driehoek. In deze opgaven laten we de ruimtelijke versie zien.
Stel dat de punten A,B,C,D in de ruimte niet in één vlak liggen en stel $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA},\mathbf{b}=\overrightarrow{OB},\mathbf{c}=\overrightarrow{OC},\mathbf{d}=\overrightarrow{OD}$. Deze punten vormen de hoekpunten van een viervlak. Als we het zwaartepunt van elk zijvlak verbinden met het overstaande hoekpunt, dan krijgen we vier lijnen. Bewijs dat deze lijnen door één punt gaan. Dit punt noemen we het *zwaartepunt* van het viervlak en we geven het aan met Z. Druk $\overrightarrow{OZ}$ uit in de vectoren $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$.

Opgave 1.5.10 We bekijken hetzelfde viervlak als in de voorgaande opgave. Bewijs dat de drie lijnen die de middens van de overstaande ribben van het viervlak met elkaar verbinden, elkaar in één punt P snijden. Druk $\overrightarrow{OP}$ uit in $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$.

Opgave 1.5.11 Beschouw het parallelle blok $\substack{EFGH \\ ABCD}$,



De lichaamsdiagonaal AG wordt doorsneden door de vlakken BDE en CFH in de punten S respectievelijk T. Stel $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{d} = \overrightarrow{AD}, \mathbf{e} = \overrightarrow{AE}$.

1. Druk $\overrightarrow{AS}$ en $\overrightarrow{AT}$ uit in $\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ en leidt hieruit af dat de lijnstukken AS, ST, TG even lang zijn.

2. Bepaal een parametervoorstelling van ieder der vlakken BDE en CFH en laat zien dat deze vlakken onderling evenwijdig zijn.

Opgave 1.5.12 Zij $A = (3,3,3)^t,\ B = (4,1,1)^t,\ C = (1,2,-1)^t$.

1. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l door A en B.

2. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn door A en B. Geef in het bijzonder de parameterwaarden behorend bij de punten tussen A en B.

3. Laat zien dat l niet door C gaat.

4. Bepaal een parametervoorstelling en een vergelijking van het vlak door A, B, C.

5. Bepaal de punten D zodanig dat A, B, C, D de hoekpunten van een parallelogram zijn.

Opgave 1.5.13 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn l en het vlak V gegeven door:

$$l: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.5.14 Hoeveel punten hebben de lijn l en het vlak V gemeen, waarin,

$$l: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V: \quad \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Opgave 1.5.15 Zij

$$l: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bereken de coördinaten van A op l en B op m zodanig dat AB evenwijdig is met n.

Opgave 1.5.16 Zij

$$l: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de vergelijkingen van twee vlakken die l als snijlijn hebben.

Opgave 1.5.17 Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn l van de vlakken $V : x_2 - 2x_3 + 1 = 0$ en $W : x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Opgave 1.5.18 Zij $V : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ en $W : x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 = 0$.

1. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l door het punt $O = (0, 0, 0)$ zodanig dat l evenwijdig is aan de snijlijn van V en W.

2. Bepaal de vergelijking van het vlak door l, evenwijdig aan W.

Opgave 1.5.19 Bereken α zodanig dat de lijn $l : \mathbf{x} = \lambda(-2, 3, 2)^t$ evenwijdig is met het vlak $V : x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$. Mag β iedere waarde aannemen?

Opgave 1.5.20 Zij

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$n : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Bewijs dat l en m elkaar kruisende lijnen zijn (dat wil zeggen, ze snijden elkaar niet en zijn ook niet evenwijdig).

2. Bewijs dat n en p elkaar snijdende lijnen zijn en bereken de coördinaten van hun snijpunt S.

3. Bepaal een vergelijking van het vlak door n en p.

4. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn door S die l en m snijdt.

Opgave 1.5.21 Van de vierzijdige pyramide $OABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een parallelogram. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in E. Op de lijn door O en A ligt een punt A_1 dat niet met O of A samenvalt. Op analoge wijze hebben we de punten B_1 (op OB), C_1 (op OC) en D_1 (op OD). Stel $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD_1} = \delta\overrightarrow{OD}$.

1. Stel dat de punten A_1, B_1, C_1, D_1 in één vlak liggen dat door E gaat. Bewijs dat $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\delta} = 2$.

2. Stel dat $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\delta} = 2$. Bewijs dat de punten A_1, B_1, C_1, D_1 in één vlak liggen dat door E gaat.

Opgave 1.5.22 Gegeven zijn de rechte lijnen,

$$a : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d : \begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -1 \end{array}$$

1. Bewijs dat a en d onderling evenwijdig zijn.

2. Toon aan dat a en b elkaar snijden. Bereken de coördinaten van het snijpunt S van a en b en bepaal de vergelijking van het vlak V door a en b.

3. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l die a, b, c en d snijdt.

Opgave 1.5.23 Gegeven zijn het punt P met coördinaten $(1, -2, 1)^t$ en de lijnen

$$l : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een parametervoorstelling van de lijn n door P die zowel l als m snijdt.

Hoofdstuk 2

Inwendige producten

2.1 Inproduct

Tot nog toe hebben we het bij de besprekening van vectoren nog niet gehad over het begrip hoek tussen twee vectoren en het begrip loodrechtheid. Om dit te kunnen doen voeren we het begrip *inwendig product* of, korter, *inproduct* in. Zij $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ een tweetal vectoren die we beiden $\neq \mathbf{0}$ veronderstellen. Zij ϕ de hoek tussen de richtingen van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. De hoek ϕ ligt dus tussen 0 en π radialen in (we meten onze hoeken in radialen). Het inwendig product van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is het getal $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\phi$. Notatie: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Deze laatste notatie zorgt ervoor dat we het inproduct ook wel een *dotproduct* noemen. In het bijzonder geldt dat als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht op elkaar staan, d.w.z. $\phi = \pi/2$, dan $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Omgekeerd, als $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, dan volgt uit $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ dat $\phi = \pi/2$. Als $\mathbf{a}$ of $\mathbf{b}$ de nulvector is, dan is het begrip hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ niet goed gedefinieerd. In dat geval spreken we af dat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

2.2 Inproducten en coördinaten

We voeren nu een coördinatenstelsel in dat gegeven wordt door drie onderling loodrechte vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Aan onze vectoren kunnen we nu coördinaten toekennen. Het is nu mogelijk om de lengte van een vector en het inproduct van twee vectoren uit te schrijven in termen van hun coördinaten. De lengte van $\mathbf{x}$ met kentallen x_1, x_2, x_3 wordt, via de Stelling van Pythagoras, gegeven door

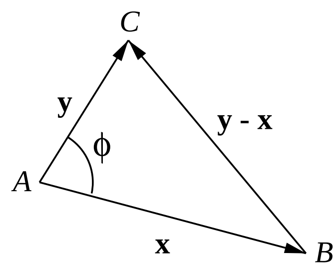
$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Om het inproduct in coördinaten uit te drukken, maken we gebruik van de *cosinusregel* voor driehoeken.

Stelling 2.2.1 (Cosinusregel) *Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B, C. Zij $\phi = \angle BAC$. Dan geldt,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\phi$$

Schets:



Met behulp van de cosinusregel kunnen we laten zien dat

Stelling 2.2.2 *Voor elk tweetal vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *met kentallen* (x_1, x_2, x_3) *en* (y_1, y_2, y_3) *geldt*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Bewijs: In het bovenstaande plaatje identificeren we $\mathbf{x}$ met $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbf{y}$ met $\overrightarrow{AC}$. Dan geldt $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \overrightarrow{BC}$. Uit de cosinus regel volgt dat

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \phi. \tag{2.1}$$

We schrijven nu $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2$ uit in coördinaten,

$$\begin{aligned} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \end{aligned}$$

Vergelijken we de laatste gelijkheid met de cosinusregel (2.1) dan concluderen we dat

$$2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \phi.$$

Omdat $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \phi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, volgt onze Stelling na deling aan beide zijden door 2.

□

In het bijzonder geldt voor de lengte van een vector $\mathbf{x}$ dat

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

De formule voor het inproduct stelt ons in staat om de hoek tussen twee vectoren $\neq \mathbf{0}$ uit te rekenen, gegeven de kentallen van beide vectoren,

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

In het bijzonder weten we dat de hoek tussen twee vectoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ gelijk is aan 90^o precies dan als hun inproduct nul is, m.a.w. $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

We zeggen dat twee vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ onderling *orthogonaal* zijn als $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Concreet bezien betekent dat ofwel minstens één van de vectoren de nulvector is, òf dat de vectoren niet nul zijn en loodrecht op elkaar staan.

Met de formule voor het inproduct kunnen we aantal nuttige eigenschappen van het inproduct aantonen.

Stelling 2.2.3 *Voor het inwendig product op $\mathbb{R}^3$ gelden de volgende eigenschappen.*

1. *Voor elk tweetal vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *geldt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
2. *Voor elk tweetal vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *en elke* $\lambda \in \mathbb{R}$ *geldt* $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.
3. *Voor elk drietal vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *geldt* $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.
4. *Voor elke vector* $\mathbf{x}$ *geldt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ *en* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bewijs: Het bewijs van deze stelling volgt door direct uitschrijven van de beweringen. Bijvoorbeeld, eigenschap (3). Er geldt, door haakjes wegwerken,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 \\
&= x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

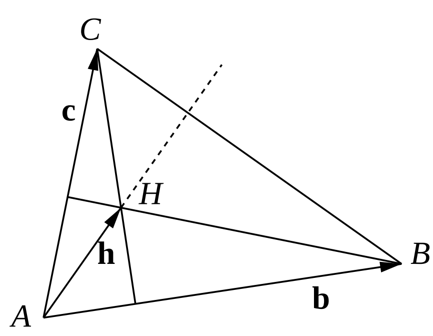
Eigenschap (4) volgt uit het feit dat $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ en het feit dat een som van drie kwadraten altijd ≥ 0 is. De som is gelijk aan nul precies dan als alle kwadraten nul zijn.
Geef zelf het bewijs van de overige twee eigenschappen.

$\square$

Hier is nog een meetkundestelling als toepassing.

Stelling 2.2.4 *De hoogtelijnen in een driehoek snijden elkaar in precies één punt.*

Schets:

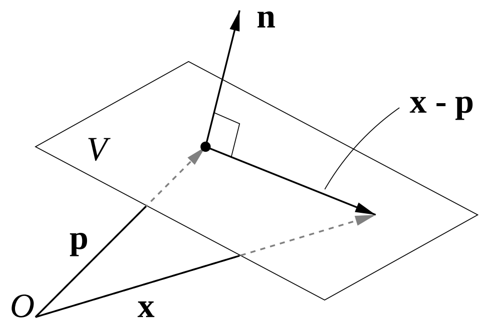


Bewijs: Stel $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ en $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$. Zij H het snijpunt van de hoogtelijnen door B en C en stel $\mathbf{h} = \overrightarrow{AH}$. Dan geldt dat $(\mathbf{h} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 0$ en $(\mathbf{h} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ (Ga na!). Na uitwerken, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$ en $\mathbf{h} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$. Trekken we deze ongelijkheden van elkaar af, dan houden we over dat $\mathbf{h} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$. Met andere woorden, ofwel $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, d.w.z. $H = A$, ofwel $\mathbf{h}$ staat loodrecht op $\mathbf{c} - \mathbf{b}$. In beide gevallen gaat de loodlijn vanuit A door het punt H.

$\square$

2.3 Vergelijking van een vlak

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat een vlak in de ruimte ook kan worden gegeven door een vergelijking. Met behulp van het inproduct krijgen we een elegante interpretatie van de coëfficienten van deze vergelijking. Bij elk vlak hoort een zogenaamde *normaalvector* welke loodrecht op het vlak staat. Deze is op een scalaire factor na vastgelegd. Kies een normaalvector $\mathbf{n}$ van V en stel $\mathbf{p} \in V$.



Dan zien we dat elk punt $\mathbf{x} \in V$ de eigenschap heeft dat $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. Ofwel, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$. In coördinaten uitgeschreven,

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$$

Hierin zijn n_1, n_2, n_3 en p_1, p_2, p_3 uiteraard de kentallen van $\mathbf{n}$ resp. $\mathbf{p}$. We noemen deze vergelijking voor x_1, x_2, x_3 een *vergelijking* voor het vlak V. Het is niet moeilijk om, gegeven een parametervoorstelling van een vlak, een vergelijking te bepalen.

Voorbeeld 2.3.1. Neem bijvoorbeeld het vlak met parametervoorstelling

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

We kunnen een vergelijking vinden door eliminatie van λ, μ uit

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda \\ x_2 &= -1 + \lambda + 2\mu \\ x_3 &= 3 - \lambda - \mu \end{aligned}$$

Doe dit en check dat we de vergelijking $x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$ krijgen.
Een iets andere manier is om eerst de normaalvector te bepalen, dat wil zeggen een vector $\mathbf{n}$ zó dat

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Uitgeschreven,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 - n_3 &= 0 \\ 2n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned}$$

We hoeven niet perse alle oplossingen te hebben, één is genoeg. Kies hiertoe $n_2 = 1$. Dan volgt uit de tweede vergelijking dat $n_3 = 2$ en daarna uit de eerste dat $n_1 = 1$. Dus $\mathbf{n} = (1, 1, 2)^t$ is een normaalvector en een vergelijking van het vlak wordt gegeven door $x_1 + x_2 + 2x_3 = (1, 1, 2)^t \cdot (2, -1, 3)^t = 7$.

$\diamondsuit$

2.4 Voorbeelden van rekenen met lijnen en vlakken

Door gebruik van coördinaten kunnen we expliciete berekeningen maken.

Voorbeeld 2.4.1. Hoek tussen de vectoren $\mathbf{a} = (1, 1, 2)^t$ en $\mathbf{b} = (1, -3, 1)^t$.
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 0$, dus $\mathbf{a}$ staat loodrecht op $\mathbf{b}$.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 2.4.2. Gegeven zijn de lijn l en het punt $\mathbf{p}$,

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal de (kortste) afstand van P tot de lijn l.
Oplossing: De kortste afstand van P tot l is precies de lengte van het lijnstukje dat begint bij $\mathbf{p}$ en loodrecht eindigt op l. Noem het voetpunt van de loodlijn $\mathbf{x}$. Dan geldt dat $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ loodrecht staat op de richting van l. Dus $(1, 1, -1)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$. Uitgeschreven, $x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Omdat $\mathbf{x}$ ook op l ligt moet gelden $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 1 - \lambda$. Invullen in de vergelijking van het vlak geeft $3\lambda = 1$. En dus $\lambda = 1/3$. Het punt $\mathbf{x}$ wordt hiermee $(4/3, 1/3, 2/3)$ en de afstand van $\mathbf{x}$ tot $\mathbf{p}$,

$$\sqrt{(-2 + 4/3)^2 + (1/3)^2 + (-1 + 2/3)^2} = \sqrt{2/3}.$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 2.4.3. Gegeven is het vlak $V : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$ en het punt $\mathbf{r} = (2, 2, 2)^t$. Bepaal de afstand van $\mathbf{r}$ tot V.
Oplossing: De afstand is precies de lengte van het lijnstuk beginnend in $\mathbf{r}$ en eindigend loodrecht op het vlak V. Zij $\mathbf{v}$ voetpunt van de loodlijn. Dan is $\mathbf{r} - \mathbf{v}$ een scalair veelvoud van de normaalvector $(1, -2, 3)^t$ van V. Dus $\mathbf{r} - \mathbf{v} = \lambda(1, -2, 3)^t$. Anders geschreven,

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ 2 - 3\lambda \end{pmatrix}$$

Omdat $\mathbf{v}$ ook in het vlak V ligt, kunnen we λ bepalen door de coördinaten van $\mathbf{v}$ (met λ en al) in de vergelijking in te vullen. We vinden, $2 - \lambda - 2(2 + 2\lambda) + 3(2 - 3\lambda) = 5$. Hieruit volgt, $4 - 14\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = -1/14$. De afstand is gelijk aan

$$|\mathbf{r} - \mathbf{v}| = |\lambda||(1, -2, 3)^t| = \frac{1}{14}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 2.4.4. Gegeven zijn de twee kruisende lijnen l, m uit Voorbeeld 1.4.4. Bepaal de afstand tussen deze lijnen, dat wil zeggen de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen l en m.
Oplossing: We bepalen punten P en Q op l respectievelijk m zó dat $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht op zowel l als m staat. De gevraagde afstand is dan gelijk aan $|\overrightarrow{PQ}|$. Stel dat P parameterwaarde λ heeft en Q parameterwaarde μ. Dan geldt

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\mu \\ -\lambda-2\mu \end{pmatrix}.$$

De eis dat deze vector loodrecht op l staat vertaalt zich in $\overrightarrow{PQ} \cdot (1, 1, -1)^t = 0$. Uitgeschreven, $-1 + 3\lambda + 3\mu = 0$. Evenzo volgt uit de orthogonaliteit van $\overrightarrow{PQ}$ en m dat $-3 - 3\lambda - 5\mu = 0$. Oplossing van λ, μ uit deze vergelijkingen geeft $\lambda = 7/3$ en $\mu = -2$. De punten worden gegeven door $P = (10/3, 7/3, -4/3)^t$ en $Q = (2, 5, 0)^t$. De afstand tussen deze punten is $\sqrt{32/3}$.

$\diamondsuit$

2.5 Hoger dimensionale vectorruimten

We hebben gezien hoe onze ruimte geïdentificeerd kan worden met de punten van $\mathbb{R}^3$. Op analoge manier kunnen we de punten binnen een plat vlak identificeren met $\mathbb{R}^2$, de geordende paren $(x_1, x_2)^t$ met $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
In de geschiedenis hebben veel filosofen, natuurkundigen en ook wiskundigen zich afgevraagd of er een vierde dimensie bestaat. Dat wil zeggen een richting die loodrecht op de richtingen 'naar voren', 'opzij' en 'omhoog' staat. Van alle antwoorden die op deze vraag gegeven zijn is het wiskundige antwoord nog het meest pragmatische. Of de vierde dimensie nu wel of niet in werkelijkheid bestaat, de wiskundige doet of hij bestaat en hij rekent erin door gewoon met geordende viertallen $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ te rekenen. De afstand tussen twee punten $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ en $(y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ wordt gegeven door

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}$$

Op deze manier krijgen we echte meetkunde in een ruimte met vier vrijheidsgraden, die we als vier dimensies kunnen opvatten.
Als we dan toch bezig zijn dan kunnen we net zo goed een voorschot nemen op onze generalisatie van het begrip vectorruimte en de ruimte $\mathbb{R}^n$ van geordende n-tallen reële getallen zien als een vectorruimte met n dimensies. De optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren in $\mathbb{R}^n$ gaan, net als bij $\mathbb{R}^3$, coördinaatsgewijs. Ook kunnen we op $\mathbb{R}^n$ het begrip *inwendig product* invoeren door voor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ en $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ te nemen,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

De *lengte* van de vector $\mathbf{x}$ wordt gegeven door

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

Je kunt zelf met niet al te veel moeite nagaan dat dit inproduct precies de eigenschappen uit Stelling 2.2.3 heeft (Doe dit!).
Het inproduct in $\mathbb{R}^n$ zou via de formule $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\phi$ het begrip hoek in $\mathbb{R}^n$ een betekenis kunnen geven. Maar dan willen we natuurlijk graag dat $|\cos\phi| \le 1$, met andere woorden $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$. Deze ongelijkheid blijkt inderdaad te gelden en staat bekend als de ongelijkheid van (Cauchy)-Schwarz.

Stelling 2.5.1 (Ongelijkheid van Schwarz) *Voor elk tweetal vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *geldt dat*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Hoewel de naam van de stelling verbonden is aan H.A.Schwarz (1843-1921), was hij al eerder bekend bij de Franse wiskundige Cauchy (1789-1857).

Bewijs: Dit is tamelijk verrassend, zoals je zult zien. Als $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan zijn zowel $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|$ als $|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ gelijk aan nul en is de stelling waar. Dat was makkelijk. Laten we nu aannemen dat $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$. Uit de elementaire eigenschappen van het inproduct weten we dat voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $0 \le (\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Uitwerking van het inproduct geeft dat voor elke λ geldt,

$$\begin{aligned} 0 &\le (\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \lambda^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \lambda\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &= \lambda^2|\mathbf{x}|^2 + 2\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking is een kwadratische functie in λ die ≥ 0 is voor elke keuze van λ. Dat betekent dat de discriminant van deze functie ≤ 0 is. Dus $4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - 4|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \le 0$ Hieruit volgt $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \le |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2$, waaruit na worteltrekken de ongelijkheid van Schwarz volgt.

$\square$

Het is illustratief om de ongelijkheid van Schwarz voluit te schrijven. Voor elke $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ geldt,

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n|^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

Dit ziet er geenszins triviaal uit! Ter illustratie kunnen we $y_1 = \cdots = y_n = 1$ nemen. We krijgen,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \le n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Delen we aan beide zijden door n^2,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

Met andere woorden, het kwadraat van het gemiddelde van n getallen is altijd kleiner of gelijk aan het gemiddelde van de kwadraten van die getallen. Probeer dit maar eens te bewijzen zonder gebruik van de ongelijkheid van Schwarz.
Een direct gevolg van de ongelijkheid van Schwarz is de zogenaamde *driehoeksongelijkheid*.

Stelling 2.5.2 *Stel* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*. Dan geldt*

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Deze ongelijkheid impliceert dat de lengte van de zijde van een driehoek altijd kleiner of gelijk is aan de som van de lengten van de overige zijden. Als driehoek kunnen we een driehoek nemen met hoekpunten A, B, C. Dan geldt $AC \le AB + BC$. Om dit te laten zien nemen we $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ en $\mathbf{y} = \overrightarrow{BC}$. Dan geldt $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \overrightarrow{AC}$. We moeten dus laten zien dat $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. Dit is de vectorversie van de driehoeksongelijkheid en hier is het bewijs.
Bewijs: Merk op dat

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \end{aligned}$$

Gebruiken we nu de ongelijkheid van Schwarz, die zegt dat $2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le 2\,|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, dan krijgen we,

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$$

Na worteltrekken volgt de gewenste ongelijkheid $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

□

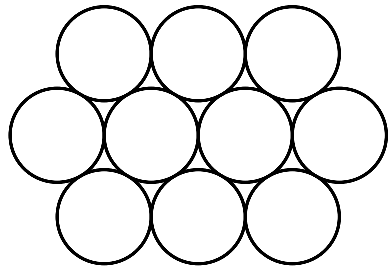
Nu we weten dat het hoekbegrip in $\mathbb{R}^n$ zinvol gedefinieerd kan worden, noemen we één hoek met name. Als $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ dan is die hoek $\pi/2$. We noemen twee vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ waarvan het inproduct nul is, *orthogonale vectoren.*

2.6 Meetkunde in dimensie n (optioneel)

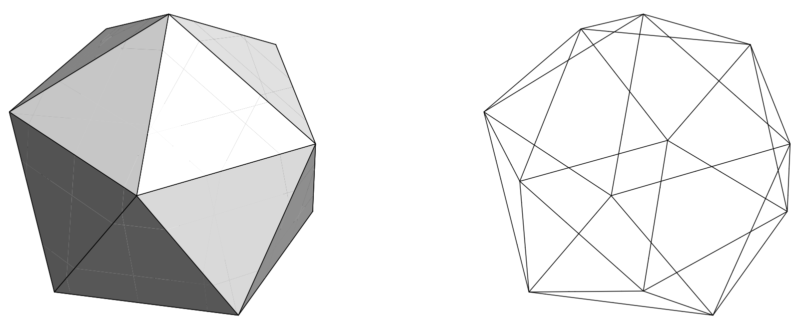
In de vorige paragrafen hebben we een afstand gedefinieerd tussen de punten van $\mathbb{R}^n$ die bovendien aan de driehoeksongelijkheid voldoet. Hiermee hebben we een meetkunde in $\mathbb{R}^n$ gevonden. Ter illustratie laten we hier een meetkundig probleem in $\mathbb{R}^n$ zien dat een verrassende oplossing heeft in $\mathbb{R}^8$ en $\mathbb{R}^{24}$.
Onder een bol in $\mathbb{R}^n$ met centrum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en straal R verstaan we de verzameling punten $\mathbf{x}$ gegeven door $|\mathbf{x}-\mathbf{a}| \le R$. We zeggen dat twee bollen elkaar *overlappen* als de afstand tussen de centra strikt kleiner is dan de som van de stralen van de bollen. We zeggen dat de bollen *raken* als de afstand tussen de centra precies gelijk is aan de som van de stralen. Het probleem luidt nu als volgt.

Probleem 2.6.1 *Gegeven een bol B in $\mathbb{R}^n$ met straal R. Wat is het maximale aantal niet overlappende bollen met straal R dat aan B kan raken?*

Laten we beginnen in dimensie 2. Bollen in $\mathbb{R}^2$ zijn in dit geval gewoon schijven. In het volgende plaatje zien we een schijf B met daaromheen 6 schijven van dezelfde straal die B raken. Ze overlappen elkaar niet.



Deze schijven vormen het begin van een honingraat, de dichtst mogelijke pakking van schijven in het vlak. Het is duidelijk dat het antwoord op onze vraag in $\mathbb{R}^2$ luidt: 6.
We gaan nu naar $\mathbb{R}^3$. Denk allereerst aan een stapel sinaasappels bij de groenteboer. Elke sinaasappel binnen in de stapel wordt omringd door 12 andere sinaasappels, 6 in één laag, 3 extra in de laag erboven, en nog eens drie in de laag eronder. Er zit echter wat bewegingsruimte tussen die 12 omringende sinaasappels, waarbij ze blijven raken aan de centrale sinaasappel. We kunnen de 12 sinaasappels zo manoevreren dat hun centra de hoekpunten vormen van een zogenaamde icosaeder, ofwel het regelmatige twintingvlak. Deze ziet er zo uit.



Er zijn 12 hoekpunten. De afstand tussen twee naburige hoekpunten is $2(1-1/\sqrt{5}) = 1.1055$ maal de afstand van een hoekpunt tot het centrum van de icosaeder. Dat houdt in dat we rond een gegeven bol B 12 bollen met dezelfde straal kunnen laten raken en waarbij de omringende bollen nog zo'n 10 procent extra ruimte hebben. Grote vraag is of we deze bollen niet zodanig kunnen manoevreren dat er nog een dertiende bij kan. Er is veel gediscussieerd over deze vraag, maar in 1953 werd aangetoond dat 12 toch echt het maximale aantal is.
Het getal waar we naar zoeken wordt ook wel 'kissing number' genoemd. Het 'kissing'-getal voor $n = 2$ bedraagt dus 6 en voor $n = 3$ is dat 12. Hopelijk is het duidelijk dat we onze vraag ook als vraag over de centra van de bollen kunnen formuleren, waarbij we aannemen dat de straal van elke bol precies $d/2$ is, en de binnenste bol het punt $\mathbf{0}$ als centrum heeft.

Probleem 2.6.2 *Stel we hebben in $\mathbb{R}^n$ een k-tal punten $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ zó dat $|\mathbf{v}_1| = \cdots = |\mathbf{v}_k| = d$ en $|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| \geq d$ voor elk tweetal i, j met $i \neq j$. Wat is de maximale waarde van k?*

In dimensie 4 hebben we geen meetkundige voorstelling meer, maar we kunnen wel met coördinaten werken. Beschouw alle punten van de vorm

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right).$$

We kiezen voor elke coördinaat dus een plus- of minteken. We hebben $2^4 = 16$ van deze punten en hun lengte is $d = 1$. Neem nu de 8 extra punten in $\mathbb{R}^4$ die we krijgen door alle coördinaten 0 te nemen, behalve op één plaats waar we 1 of -1 zetten. Deze vectoren hebben ook lengte 1. Het is nu een eenvoudige oefening om in te zien dat de afstand tussen elk tweetal van deze 24 punten ≥ 1 is. Daarmee is het 'kissing'-getal voor $n = 4$ minstens 24. Het heeft tot 2003 geduurd alvorens werd aangetoond dat dit ook het correcte 'kissing'-getal is.
Voor dimensies $n > 4$ is het 'kissing'-getal onbekend, met uitzondering van $n = 8, 24$ waar iets heel bijzonders gebeurt. In $n = 8$ bestaat het zogenaamde E_8-rooster, ontdekt in 1867. Het is de verzameling punten geven door

$$(x_1, x_2, \ldots, x_8), \quad x_1, \ldots, x_8 \in \mathbb{Z}$$

en

$$(x_1, x_2, \ldots, x_8), \quad x_1, \ldots, x_8 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z},$$

beiden met de extra eigenschap dat $\sum_i x_i$ een geheel even getal is. Dit is een verzameling punten met buitengewone symmetrie, waar we hier helaas niet op kunnen ingaan. De kleinste lengte van deze punten is $d = \sqrt{2}$. De punten met deze lengte zijn

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\ldots,\pm\frac{1}{2}\right)$$

waarbij het aantal mintekens even moet zijn, en de punten met alle coördinaten 0, behalve op twee plaatsen waar 1 of -1 staat. Van de eerste soort zijn er 128, van de tweede soort 112. De onderlinge afstand tussen deze 240 punten is $\geq \sqrt{2}$ en hiermee zien we dat het 'kissing'-getal minstens 240 is. Het is bekend dat dit ook de correcte waarde is.
Voor $n = 24$ bestaat er een nog wonderlijker rooster, het zogenaamde Leech-rooster, genoemd naar de ontdekker John Leech (1965). Deze is lastig te beschrijven, maar dank zij het bestaan van dit rooster weten we dat het 'kissing'-getal in dimensie 24 gelijk is aan 196560. Er is blijkbaar heel veel ruimte in de 24-dimensionale ruimte!

2.7 Opgaven

Opgave 2.7.1 Bereken de hoek tussen de lijnen

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 2.7.2 Bepaal de hoek tussen de volgende paren vectoren

1. $(2,1,4)^t$ en $(4,-2,1)^t$
2. $(1,-2,1)^t$ en $(3,1,0)^t$
3. $(5,1,1)^t$ en $(2,3,-2)^t$

Opgave 2.7.3 Bepaal de vergelijking van het vlak waarvan een punt $\mathbf{a}$ en de normaal $\mathbf{n}$ gegeven zijn.

1. $\mathbf{a} = (-1,2,-3)^t,\ \mathbf{n} = (2,4,-1)^t$
2. $\mathbf{a} = (2,5,4)^t,\ \mathbf{n} = (3,0,5)^t$
3. $\mathbf{a} = (1,-1,1),\ \mathbf{n} = (3,-1,1)^t$

Opgave 2.7.4 Gegeven zijn $V : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ en $W : x_1 - x_3 = 0$.

1. Bereken de hoek tussen V en W.
2. Bepaal, onafhankelijk van elkaar, de vergelijking en een parametervoorstelling van het vlak loodrecht op V en W dat door het punt $(1,2,2)$ gaat.

Opgave 2.7.5 Bereken de hoek tussen de lijn l en het vlak V, waarin

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad V :\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

Opgave 2.7.6 Gegeven is het vlak $V : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 9$ met $\mathbf{a} = (2,-3,6)^t$. Bereken de afstand van $O = (0,0,0)$ en $P = (1,-2,-1)$ tot V.

Opgave 2.7.7 Gegeven het vlak V met de vergelijking $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = b$, waarin $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ een normaalvector van V is. Zij $\mathbf{p}$ een punt in de ruimte. Bewijs dat de afstand van $\mathbf{p}$ tot V gegeven wordt door

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - b|}{|\mathbf{n}|}.$$

Opgave 2.7.8 Gegeven een tweetal lijnen l en m met parametervoorstellingen $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{a}$ respectievelijk $\mathbf{q} + \mu \mathbf{b}$. Stel dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ onafhankelijk zijn. Zij $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ een vector die loodrecht op zowel $\mathbf{a}$ als $\mathbf{b}$ staat. Bewijs dat de afstand tussen l en m gegeven wordt door

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Opgave 2.7.9 Bereken de afstand van $P = (3,-1,5)$ tot de lijn $\mathbf{x} = (0,-1,2)^t + \lambda(2,2,1)^t$.

Opgave 2.7.10 Bepaal de vergelijking van de bissectricevlakken van $V : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ en $W : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

Opgave 2.7.11 Bepaal een parametervoorstelling van de lijn die de rechten

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

loodrecht snijdt en bereken de afstand tussen l en m.

Opgave 2.7.12 Gegeven zijn

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad n : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de vergelijking van het vlak V door de rechte n, dat loodrecht staat op het vlak door l en m (verifieer eerst dat l en m elkaar inderdaad snijden).

Opgave 2.7.13 Gegeven zijn,

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een parametervoorstelling van elk der rechten die l onder een hoek $\pi/3$ en m onder een hoek $\pi/2$ snijden.

Opgave 2.7.14 De orthogonale projectie van de lijn

$$l : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

op het vlak $V : x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ is m. Bepaal twee vergelijkingen waar de coördinaten van de punten van m aan moeten voldoen.

Opgave 2.7.15 Schrijf de vector $(5, 2, -3)^t$ als som van twee vectoren, waarvan één vector loodrecht op het vlak $V : x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ staat, terwijl de andere parallel met V is.

Opgave 2.7.16 Ontbindt de vector $(6, -5, -1)^t$ in drie componenten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ die aan de volgende voorwaarden voldoen: $\mathbf{a}$ is afhankelijk van $(2, 0, 1)^t$, $\mathbf{b}$ is afhankelijk van $(1, 2, 0)^t$ en $\mathbf{c}$ is orthogonaal met $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Opgave 2.7.17 Bepaal de vergelijking van de bol met middelpunt $(-1, 2, 3)$ en straal 3. Schrijf deze vergelijking met behulp van een inproduct.

Opgave 2.7.18 Zij B de bol met middelpunt $(3, 2, 1)$ en straal 3.

1. Toon aan dat $P = (1, 0, 2)$ een punt van de bol is.

2. Bepaal de vergelijking aan het raakvlak in P aan de bol B.

3. Toon aan dat de lijn l gegeven door

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

geen snijpunt met B heeft.

4. Bepaal de vergelijking van elk der raakvlakken aan B die door l gaan (zie vorige onderdeel).

Opgave 2.7.19 De cirkel C wordt gegeven door het stelsel vergelijkingen $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = r^2$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha$, waarin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Bewijs dat C een niet-lege verzameling is precies dan als $|\alpha - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0| \leq r|\mathbf{n}|$.

Opgave 2.7.20 Zij $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ een tweetal vectoren zó dat $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ en $\mathbf{p} \neq -\mathbf{q}$.

1. Bewijs, zonder in coördinaten uit te schrijven, dat $(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2$

2. Bewijs, zonder in coördinaten uit te schrijven, dat $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| \iff \mathbf{p} - \mathbf{q}$ en $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ zijn orthogonaal.

3. Bewijs dat in een ruit (=parallelogram waarvan alle zijden dezelfde lengte hebben) de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Opgave 2.7.21 Gebruik de driehoeksongelijkheid $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ om aan te tonen dat

$$||\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|| \leq |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

voor alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ (Hint: gebruik $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}|$ voor geschikte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$).

Opgave 2.7.22 De lijn l is gegeven door de vergelijkingen $x_1 - x_2 = 2,\ x_2 - x_3 = 2$ en de lijn m door $x_1 - x_2 = 0,\ x_2 - x_3 + 1 = 0$.

1. Ga na of l en m elkaar snijden, kruisen, dan wel parallel zijn.

2. Bereken de afstand tussen l en m.

3. Bepaal de coördinaten van het punt P op de lijn $x_2 = x_3 = 0$ zo dat de afstand van P tot l minimaal is.

Opgave 2.7.23 Gegeven zijn de punten $A = (2, 0, 0),\ C = (0, 4, 0),\ D = (0, 0, 6)$. Het midden van OA is E, het midden van OC is F en het midden van OD is G.

1. Bereken de coördinaten van het middelpunt M van de bol B die door de punten O, E, F, G gaat. Bereken ook de straal van deze bol.

2. Het snijpunt van de loodlijn l, uit D neergelaten op de lijn m door A en C neergelaten, noemen we P. Bepaal een parametervoorstelling van l en toon aan dat P een punt op de bol B is.

3. Bepaal de vergelijking van het vlak V door A, C en D. Bereken de straal van de cirkel volgens welke de bol B het vlak V snijdt.

Opgave 2.7.24 Gegeven zijn het punt $P = (1, 1, -5)$ en het vlak $V : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

1. Bereken de coördinaten van de orthogonale projectie P_1 van P op V.
2. Bepaal de vergelijking van de bol B met PP_1 als middellijn. Laat zien dat $Q = (4, 1, -2)$ een punt van B is.
3. Leidt de vergelijking af van het raakvlak W in Q aan B en bewijs dat V en W een hoek $\pi/3$ met elkaar maken.
4. Leidt de vergelijkingen af van de raakvlakken aan de bol B evenwijdig met het vlak PP_1Q.

Opgave 2.7.25 Gegeven zijn de bol met straal 1 en middelpunt $O = (0, 0, 0)$. Stel $\alpha \in \mathbb{R}$ en beschouw de lijn

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

1. Stel $\alpha = -1/2$. Bepaal de raakvlakken door l aan B en bewijs dat deze raakvlakken loodrecht op elkaar staan.
2. Voor welke waarden van α is de doorsnede $B \cap l$ niet leeg?

Opgave 2.7.26 Gegeven zijn de bol B met middelpunt $(-1, 2, 1)$ en straal 5, het punt $P = (0, 4, 7)$ en het vlak

$$V : \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Bepaal een vergelijking van V.
2. Bewijs dat B en V elkaar snijden.
3. De snijcirkel van B en V noemen we C. Bereken de coördinaten van het middelpunt van C en ook de straal.
4. Laat zien dat P in V ligt en dat P buiten de cirkel ligt.
5. Bereken de hoek tussen de raaklijnen door P aan C.

Hoofdstuk 3

Matrices en lineaire vergelijkingen

3.1 Matrices

Een $m \times n$-*matrix* is een mn-tal getallen dat in een rechthoekig patroon van m rijen en n kolommen is gerangschikt. We omlijsten deze rechthoek meestal met een tweetal kromme haken. De getallen in de matrix noemen we de *matrixelementen*. Een $m \times n$-matrix ziet er als volgt uit,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

of in kortere notatie, $(a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$. De verzameling $m \times n$-matrices geven we aan met M_{mn}. Een speciaal element is de zogenaamde *nulmatrix* $O \in M_{mn}$ waarvan alle elementen nul zijn. Een andere speciale matrix is de $n \times n$ identiteitsmatrix waarvan alle elementen nul zijn, behalve de elementen op de diagonaal, die 1 zijn. Notatie: I_n.

In M_{mn} kunnen we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging definiëren. De som $A + B$ van twee matrices krijgen we door optelling van de overeenkomstige matrixelementen. Als de elementen van A, B gegeven worden door a_{ij} resp. b_{ij} met $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ dan worden de elementen van de som gegeven door $a_{ij} + b_{ij}$. Het scalaire product λA van een matrix A met een scalair $\lambda \in \mathbb{R}$ is de matrix die we krijgen door elk element van A te vermenigvuldigen met λ. Voor optelling en scalaire vermenigvuldiging gelden de volgende makkelijk te verifiëren eigenschappen. Voor elk drietal matrices A, B, C en elk tweetal $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

Merk op, dat deze eigenschappen volkomen analoog zijn aan de elementaire eigenschappen voor vectoren die in paragraaf 1.1 genoemd zijn. Om deze reden zullen we M_{mn} later ook gaan zien als een vectorruimte.
Een andere belangrijke operatie is die van *matrixvermenigvuldiging* . Gegeven een $m \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ en een $n \times p$-matrix $B = (b_{ij})$, dan definiëren we de $m \times p$ product matrix AB als de matrix met elementen

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, p.$$

Let op, *het product AB van twee matrices A en B kan alleen gedefinieerd worden als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B.*
Behalve dat vermenigvuldiging van matrices alleen mogelijk is als aantallen rijen en kolommen kloppen, zijn er meer eigenaardigheden die niet voorkomen bij vermenigvuldiging van getallen. Bijvoorbeeld niet-commutativiteit van vermenigvuldiging. Stel dat A, B een tweetal matrices is zodat m = aantal kolommen van A = aantal rijen van B en n = aantal rijen van A = aantal kolommen van B. Dan zijn AB en BA beiden goed gedefiniëerd, maar in het algemeen zal gelden dat $AB \neq BA$. In de eerste plaats is AB een $m \times m$-matrix en BA een $n \times n$-matrix. Dus als $m \neq n$, dan kunnen AB en BA nooit gelijk zijn. Hier is een voorbeeld met $m = 3, n = 1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 6 & 12 & 18 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Maar zelfs als $m = n$ dan hoeven A en B nog niet gelijk te zijn. Hier is een voorbeeld,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Indien voor twee $n \times n$-matrices geldt dat $AB = BA$ dan zeggen we dat A en B *commuteren*. Bijvoorbeeld, iedere $n \times n$-matrix commuteert met zichzelf en met de $n \times n$-identiteitsmatrix I_n (Controleer!).
Matrixvermenigvuldiging voldoet aan een aantal gemakkelijk te verifiëren eigenschappen. Voor elk drietal matrices A, B, C en elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt,

1. $A(BC) = (AB)C$ (associativiteit).
2. $A(B + C) = AB + AC$ en $(A + B)C = AC + BC$ (distributiviteit).
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
4. $IA = A = AI$

Uiteraard nemen we bij alle producten aan dat ze gedefinieerd zijn.
Bewijs: Het bewijs van bovenstaande eigenschappen is voornamelijk veel schrijfwerk. Ter illustratie laten we hier het bewijs van de regel $A(B + C) =$

$AB + AC$ zien. Geef de elementen van A, B, C aan met resp. a_{ij}, b_{ij} en c_{ij}. Dan wordt het matrixelement met indices i, k in $A(B + C)$ gegeven door

$$\sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

Het element met indices i, k in $AB + AC$ wordt gegeven door

$$\sum_j a_{ij}b_{jk} + \sum_j a_{ij}c_{jk}$$

Dat deze twee sommaties gelijk zijn volgt meteen door haakjes weg te werken uit de eerste.

□

Tenslotte hebben we nog het begrip *getransponeerde* van een $m \times n$-matrix A. Dat is de $n \times m$-matrix B die we uit A krijgen door $B_{ij} = A_{ji}$ te nemen voor alle mogelijke i, j. Notatie $B = A^t$. Bijvoorbeeld,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

of, een ander voorbeeld,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Een belangrijke eigenschap is de volgende.

Stelling 3.1.1 *Zij A, B een tweetal matrices zó dat AB gedefinieerd is. Dan geldt dat*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Bewijs: Opgave.

□

3.2 Lineaire vergelijkingen en Gauss eliminatie

Een stelsel lineaire vergelijkingen is een verzameling vergelijkingen van de vorm

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

in de onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. De getallen a_{ij}, b_k zijn gegeven. Met behulp van matrixvermenigvuldiging kunnen we dit stelsel iets anders schrijven als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Door $A = (a_{ij})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ en $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$ te nemen kunnen we het stelsel verkort noteren met

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in de onbekende $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. We noemen A de *coëfficientenmatrix* van het stelsel. De matrix $(A|\mathbf{b})$ die we krijgen door de kolom $\mathbf{b}$ aan A toe te voegen, noemen we de *uitgebreide coëfficientenmatrix* .

Dè manier om stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen is door zogenaamde *Gauss-eliminatie*. Dit is niets anders dan een systematische versie van de gewone eliminatie zoals je misschien al gewend bent en die je ook in de voorgaande hoofdstukken gebruikt hebt. Hier is een voorbeeld.

Voorbeeld 3.2.1. Stel we moeten het volgende drietal vergelijkingen in de onbekenden x_1, x_2, x_3 oplossen,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Zoals bekend doen we dit door eliminatie van variabelen. Tel 2 maal de eerste vergelijking bij de tweede op, en 3 maal de eerste bij de laatste. We vinden,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Merk op dat door de laatste twee vergelijkingen alleen nog maar de onbekenden x_2 en x_3 bevatten. De onbekende x_1 is uit deze vergelijkingen geëlimineerd. Trek nu 5 maal de tweede van de laatste af,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ -3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Uit de laatste vergelijking volgt, $x_3 = -3$. Uit de tweede volgt, $x_2 = -2 - x_3 = 1$ en uit de eerste, $x_1 = 1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 - 3 = -1$. De oplossing luidt dus, $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$. Controleer dat dit inderdaad een oplossing is.

$\diamondsuit$

Het kan zijn dat er oneindig veel oplossingen zijn, zoals uit het volgend voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 3.2.2. Het stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

We elimineren eerst x_1 uit de tweede en derde vergelijking. Hiertoe trekken we de eerste vergelijking 2 maal van de tweede af, en tellen hem één keer bij de derde op.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -5 \\ & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Uit de laatste twee vergelijkingen elimineren we x_2 door twee maal de tweede bij de derde op te tellen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -5 \\ & & & & & & 4x_4 & = & -8 \end{array}$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat $x_4 = -2$. De waarde van x_3 mogen we zelf kiezen, zeg $x_3 = t$. Dan volgt x_2 uit de tweede vergelijking, $x_2 = x_3 - 3x_4 - 5 = t + 1$. De waarde van x_1 volgt uit de eerste, $x_1 = 2x_2 + x_4 + 2 = 2t + 2$. De oplossing wordt dus gegeven door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De variabelen x_1, x_2, x_4 die we gebruikt hebben om eliminaties uit te voeren noemen we *pivot variabelen* (van het Engelse pivot, scharnier). De niet-pivot variabele x_3 kunnen we vrij kiezen.

$\diamondsuit$

Het is ook mogelijk om vergelijkingen aan te geven die helemaal geen oplossing hebben. Triviaal voorbeeld, $0 \cdot x_1 = 1$. Dit ziet er erg flauw uit, maar ook in algemenere stelsels zonder oplossing komen we na de eliminatie-procedure altijd uit op dit soort onmogelijke vergelijkingen. Stelsels lineaire vergelijkingen die geen oplossing hebben noemen we *strijdig*.

Bovenstaande aanpak om vergelijkingen op te lossen is nogal schrijf-intensief. Eigenlijk is het niet nodig om steeds weer $x_1, x_2, x_3, \ldots$ op te schrijven. We laten ze gewoon achterwege, evenals het '=' teken, en geven de eliminatie schematisch weer in de uitgebreide coëfficientenmatrix.

Voorbeeld 3.2.3. Noteer het stelsel vergelijkingen uit Voorbeeld 3.2.1 door de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

De eerste rij 2 maal bij de tweede en 3 maal bij de derde opgeteld,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

De tweede rij 5 maal van derde aftrekken,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

De laatste rij staat schematisch voor de vergelijking $-3x_3 = 9$ en we vinden hier weer $x_3 = -3$ uit. Door de vergelijkingen behorend bij tweede en eerste rij te bekijken vinden we ook weer $x_2 = -x_3 - 2 = 1$ en $-x_1 = -x_2 - x_3 - 1 = 1$, dus $x_1 = -1$.

$\diamondsuit$

Uit voorgaande voorbeelden is hopelijk duidelijk dat eliminatie van variabelen in lineaire vergelijkingen neerkomt op manipulaties van de rijen in de uitgebreide coëfficientenmatrix. De regels die we bij deze eliminatie hanteren zijn de volgende.

Stelling 3.2.4 *De oplossingsverzameling van een stelsel verandert niet als we*

1. *de volgorde van vergelijkingen verwisselen*
2. *een vergelijking met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen*
3. *een reëel veelvoud van een vergelijking bij een andere optellen.*

In termen van de uitgebreide coëfficientenmatrix betekent dit dat de oplossingsverzameling van een stelsel niet verandert als we

1. *twee rijen verwisselen*
2. *een rij met een getal $\neq 0$ scalair vermenigvuldigen*
3. *een reëel veelvoud van een rij bij een andere rij optellen*

Hier volgt een beschrijving van de algemene *Gauss-eliminatie* procedure.

Stel we hebben een stelsel (A) van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kies de kleinste index i_1 zó dat x_{i_1} met coëfficient $\neq 0$ in minstens één van de vergelijkingen voorkomt. Kies zo'n vergelijking en verwissel deze met de eerste vergelijking. Tel daarna veelvouden ervan bij de overige op, op zo'n manier dat in de overige vergelijkingen geen x_{i_1} meer voorkomt. De eerste vergelijking bevat dan nog x_{i_1}, de andere $m-1$ vergelijkingen niet meer. Geef het stelsel van deze $m-1$ vergelijkingen met (A') aan. Herhaal de procedure met het stelsel (A'). Dat wil zeggen, we kiezen vervolgens de kleinste index i_2 zó dat x_{i_2} met coëfficient $\neq 0$ in minstens één van de vergelijkingen uit (A') voorkomt. Kies wederom zo'n vergelijking en wissel deze met de eerste vergelijking van (A'). Tel veelvouden ervan bij de volgende overgebleven vergelijking

vergelijkingen op, zo dat ze geen x_{i_2} meer bevatten. We gaan zo door tot er geen vergelijkingen meer over zijn, of dat alle overgebleven vergelijkingen van de vorm $0 = b$ zijn. Als voor minstens één van deze vergelijkingen de rechterzijde b niet nul is, dan hebben we een *strijdig stelsel*. Geen enkele keuze van de x_i kan ervoor zorgen dat $0 = b$ wordt als $b \neq 0$. Er zijn dus geen oplossingen. Stel nu dat het stelsel niet strijdig is. Dan moeten alle overgebleven vergelijkingen van de vorm $0 = 0$ zijn. We kunnen deze triviale vergelijkingen net zo goed weglaten.
Nu kunnen we tot de oplossing overgaan. De variabelen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ (met $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$) die we gebruikt hebben bij de eliminatie noemen we *pivot variabelen*. In onze oplossing kunnen we de niet-pivot variabelen een willekeurige waarde geven. De laatste vergelijking stelt ons in staat om x_{i_r} uit te drukken in x_i met $i > i_r$. Op zijn beurt stelt de één na laatste vergelijking ons in staat om $x_{i_{r-1}}$ uit te drukken in x_i met $i > i_{r-1}$, etc., tot we de waarde van x_{i_1} hebben.
Als we Gauss-eliminatie in termen van de uitgebreide coëfficientenmatrix uitgevoerd hebben, dan staat deze matrix in zogenaamde *rijgereduceerde vorm* of *trapvorm* . We zeggen dat een matrix in rijgereduceerde vorm staat als voor elke rij, behalve de eerste, één van de volgende eigenschappen geldt,

1. de rij bevat uitsluitend nullen
2. het aantal leidende nullen is strikt groter dan het aantal leidende nullen in de voorgaande rij.

In een dergelijke matrix noemen we het eerste element $\neq 0$ in een rij het pivot-element van die rij. Het proces om een matrix in rijgereduceerde vorm te brengen noemen we *rijreductie* van de matrix. Merk op dat rijreductie geen uniek bepaald proces is. Bij elke stap kunnen we immers zelf de rij kiezen waarin het volgende pivot-element voorkomt.
We kunnen de rijreductie nog een stap verder doorvoeren met de Gauss-Jordan reductie. Het Jordan-gedeelte bestaat eruit dat we, na rijreductie, de pivot-elementen door vermenigvuldiging gelijk aan 1 maken en vervolgens met deze elementen de overige elementen in de kolom vegen. Hier is een voorbeeld, die voortzetting is van Voorbeeld 3.2.3.

Voorbeeld 3.2.5. We eindigden met

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right).$$

Vermenigvuldig de laatste rij met $-1/3$ en de eerste met -1,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Vegen met de 1 in de derde kolom levert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

vegen met de 1 in de tweede kolom geeft,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Merk op dat we meteen de oplossing van ons stelsel kunnen aflezen.

$\diamondsuit$

De uiteindelijke uitgebreide coëfficientenmatrix komt dan een vorm te staan die we *volledig rijgereduceerd* noemen. We zeggen dat een matrix volledig rijgereduceerd is als hij rijgereduceerd is, als elk pivot-element gelijk aan 1 is, en als elke kolom met een pivot-element verder alleen nullen bevat. Het proces om een matrix in volledig rijgereduceerde vorm te brengen noemen we *volledige rijreductie* of *Jordanreductie*.

3.3 n vergelijkingen in n onbekenden

Stelsels lineaire vergelijkingen waarin het aantal onbekenden even groot is als het aantal variabelen komen veelvuldig voor. Doorgaans hebben dergelijke stelsels precies één oplossing, maar dat hoeft niet altijd zo te zijn. In deze paragraaf zoeken we uit hoe dat zit.
Beschouw een stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

waarin $A \in M_{nn}$ en $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Voor het geval $n = 3$ kunnen we ons hier een meetkundige voorstelling van maken. De drie vergelijkingen kunnen we zien als de vergelijkingen van drie vlakken in $\mathbb{R}^3$. Meestal snijdt een drietal vlakken elkaar in één punt. In dat geval heeft het stelsel precies één oplossing. Maar dat hoeft niet. Als twee van de vlakken evenwijdig zijn en ongelijk aan elkaar, zullen er geen oplossingen zijn. Het stelsel vergelijkingen is dan strijdig. Maar we kunnen ook de situatie hebben waarin de drie vlakken elkaar in één lijn snijden of alledrie samenvallen. In dat geval hebben we oneindig veel oplossingen, die meetkundig gezien een lijn of vlak vormen.
Dergelijke mogelijkheden kunnen ook voor algemene n optreden.

Stelling 3.3.1 *Zij $A \in M_{nn}$ en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Stel dat A na een rijreductie r pivotelementen bevat. Dan geldt,*

1. *Als $r = n$ dan heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ precies één oplossing $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Als $r < n$ dan heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ofwel géén oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Omgekeerd, als er een $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ bestaat zó dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ exact één oplossing $\mathbf{x}$ heeft, dan geldt dat $r = n$.

Bewijs: Om deze stelling in te zien passen we Gauss-eliminatie toe op $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. We houden r vergelijkingen over waarin een pivot-variabele voorkomt, en $n - r$ vergelijkingen van de vorm $0 = b_i'$ ($i = r + 1, \ldots, n$).
Als $r = n$ dan ontbreken deze laatste vergelijkingen. Elke variabele is dan pivot-variabele en met onze oplossingsmethode van de vorige paragraaf zien we dat er precies één oplossing bestaat.
Als $r < n$ dan kan het zijn dat één van de vergelijkingen $0 = b_i'$ strijdig is doordat $b_i' \neq 0$. In dat geval zijn er geen oplossingen. Als echter $b_i' = 0$ voor $i = r+1, \ldots, n$ dan hebben we alleen te maken met de r vergelijkingen behorend bij elke pivot-variabele. In dat geval zijn er ook niet-pivot variabelen die we willekeurig kunnen kiezen. Dit levert ons oneindig veel oplossingen op.
De laatste uitspraak volgt onmiddelijk uit het feit dat als $r < n$ zou zijn, geen enkele vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ exact één oplossing heeft.

$\square$

Een belangrijk begrip bij de oplossing van $n \times n$-vergelijkingen is de inverse van een matrix. Ter illustratie lossen we weer vergelijking 3.2.1 op, maar nu met een rechterzijde die gelijk is aan een willekeurig gekozen $\mathbf{y}$.

Voorbeeld 3.3.2.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Tel 2 maal de eerste vergelijking bij de tweede op, en 3 maal de eerste bij de laatste. We vinden,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_2 + x_3 &= 2y_1 + y_2 \\ 5x_2 + 2x_3 &= 3y_1 + y_3 \end{aligned}$$

Trek nu 5 maal de tweede van de laatste af,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_2 + x_3 &= 2y_1 + y_2 \\ -3x_3 &= -7y_1 - 5y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Het stelsel is gereduceerd, we gaan nu volledige reductie uitvoeren. Vermenigvuldig de eerste vergelijking met -1 en de derde met $-1/3$,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -y_1 \\ x_2 + x_3 &= 2y_1 + y_2 \\ x_3 &= 7y_1/3 + 5y_2/3 - y_3/3 \end{aligned}$$

Elimineer x_3 uit de eerste en tweede vergelijking,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4y_1/3 + 5y_2/3 - y_3/3 \\ x_2 &= -y_1/3 - 2y_2/3 + y_3/3 \\ x_3 &= 7y_1/3 + 5y_2/3 - y_3/3 \end{aligned}$$

Elimineer nu x_2 uit de eerste,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 + y_2 \\ x_2 & = & -y_1/3 - 2y_2/3 + y_3/3 \\ x_3 & = & 7y_1/3 + 5y_2/3 - y_3/3 \end{array}$$

In matrixvermenigvuldigingsvorm,

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y}, \quad \text{met} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 7/3 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Met andere woorden, ons stelsel kan worden opgelost door gewoon de matrix B op $\mathbf{y}$ los te laten. We noemen B de *inverse matrix* van de coefficienten matrix van ons stelsel. Als we de 3×3-matrix van ons oorspronkelijke stelsel aangeven met A, dan blijft te gelden dat zowel $AB = I_3$ als $BA = I_3$. Controle,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 7/3 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix} = I_3$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 7/3 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$\diamondsuit$

In de volgende stelling tonen we het bestaan van de inverse matrix en zijn eigenschappen op iets formelere manier aan.

Stelling 3.3.3 *Zij $A \in M_{nn}$ en stel dat A na rijreductie precies n pivot elementen heeft. Dan is er een unieke $n \times n$-matrix B zodanig dat $AB = I_n$. Bovendien geldt dat $BA = I_n$.*

Bewijs: Uit Stelling 3.3.1 weten we dat voor willekeurige $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ precies één oplossing heeft. Zij voor $i = 1, 2, \ldots, n$ de vector $\mathbf{b}_i$ de (unieke) oplossing van $A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, waarin $\mathbf{e}_i$ de i-de standaard basisvector van $\mathbb{R}^n$ is. Zij B de $n \times n$-matrix met $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ als achtereenvolgende kolommen. Dan zien we dat AB de $n \times n$-matrix is met de vectoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ als kolommen. Met andere woorden, $AB = I_n$.
We gaan nu het stelsel $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oplossen. Laat aan beide zijden A los, en we vinden links $AB\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Rechts vinden we $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dus $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, met andere woorden: $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing. Dat wil zeggen, volgens Stelling 3.3.1, dat B na rijreductie ook precies n pivot-elementen heeft. Dus is er, net als bij A, een matrix C zó dat $BC = I_n$. Laat nu weer aan beide zijden A erop los. We vinden $ABC = A$, en omdat $AB = I_n$ houden we over, $C = A$. We concluderen dat $BA = BC = I_n$.
Tenslotte, B is uniek bepaald. Stel namelijk dat er nog een B' is met $AB' = I_n$. Laat B aan beide zijden van links los, $BAB' = B$. Omdat $BA = I_n$ volgt hieruit

dat $B' = B$.

$\square$

We noemen de matrix B zó dat $AB = I_n$ de *inverse matrix* van A. Notatie, A^{-1}. De oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mits uniek, kan nu ook gevonden worden door $A^{-1}\mathbf{b}$ uit te rekenen.
Om de inverse van een gegeven matrix A te bepalen moeten we de vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ oplossen voor $i = 1, \ldots, n$. Met een beetje handigheid kan dit in één keer gebeuren door meteen alle kolommen $\mathbf{e}_i$ in de uitgebreide matrix te schrijven. Hier is als voorbeeld de coëfficienten matrix van ons doorlopende voorbeeld 3.2.1.

Voorbeeld 3.3.4.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

De eerste rij 2 maal bij de tweede en 3 maal bij de derde opgeteld,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

De tweede rij 5 maal van derde aftrekken,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Eén derde maal de laatste rij bij de eerste en tweede optellen,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -4/3 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Tweede van de eerste aftrekken,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

De eerste rij met -1, de derde met $-1/3$ vermenigvuldigen,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & 5/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

De gewenste inverse matrix staat nu in de rechterhelft van de uitgebreide matrix.

$\diamondsuit$

3.4 Homogene en inhomogene stelsels

Zij $A \in M_{mn}$ en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in de onbekende $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Als $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, dan noemen we ons stelsel *homogeen*, als $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ dan noemen we het stelsel *inhomogeen*.
De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel vergelijkingen heeft de volgende gemakkelijk te verifiëren eigenschappen,

1. Als $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ oplossingen zijn, dan is $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ook een oplossing. Immers, $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2. Als $\mathbf{x}$ een oplossing is en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is $\lambda\mathbf{x}$ ook een oplossing. Immers, $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3. De nulvector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ is een oplossing. We noemen dit de *triviale* oplossing.

In heel veel situaties in de wiskunde zijn we geïnteresseerd in niet-triviale oplossingen van homogene vergelijkingen. De volgende stelling is hierbij van cruciaal belang,

Stelling 3.4.1 *Een homogeen stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden heeft minstens één niet-triviale oplossing als $n > m$.*

Bewijs: Het bewijs volgt uit een goed begrip van de Gauss-eliminatie. Omdat er m vergelijkingen zijn kunnen er na Gauss-eliminatie hooguit m pivot-variabelen zijn. Omdat het aantal variabelen gelijk is aan $n > m$, zijn er ook niet-pivot variabelen. Deze konden we voor de oplossing van ons stelsel willekeurig kiezen. Laten we de niet-pivot variabelen allemaal 1 kiezen. De waarden van de pivot-variabelen volgen hieruit. En dus hebben we een niet-triviale oplossing.

$\square$

Bovenstaande stelling geldt zeker niet voor inhomogene stelsels, getuige het flauwe stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

dat duidelijk strijdig is.
Over inhomogene stelsels kunnen we wel een andere algemene opmerking maken. Stel dat we een oplossing $\mathbf{x}_0$ van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hebben. We noemen dit een *particuliere oplossing* . Zij $\mathbf{x}$ een andere oplossing. Dan geldt, $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Met andere woorden, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ is een oplossing van het homogeen gemaakte stelsel $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Zij S_{hom} de oplossingsverzameling van het homogeen gemaakte stelsel en S_{inhom} de oplossingsverzameling van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Daarnet zagen we dat bij elke $\mathbf{x} \in S_{\text{inhom}}$ een $\mathbf{y} \in S_{\text{hom}}$ hoort zó dat $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Omgekeerd, voor elke $\mathbf{y} \in S_{\text{hom}}$ geldt dat $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in S_{\text{inhom}}$ (ga na!). Conclusie,

$$S_{\text{inhom}} = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in S_{\text{hom}}\}$$

of korter, $S_{\text{inhom}} = \mathbf{x}_0 + S_{\text{hom}}$.

3.5 Deelruimten en opspansels

Zoals we in de vorige paragraaf zagen, heeft de oplossingsverzameling W van een homogeen stelsel vergelijkingen de volgende eigenschappen:

1. Als $\mathbf{x} \in W$ en $\mathbf{y} \in W$, dan geldt $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$
2. Als $\mathbf{x} \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan geldt $\lambda\mathbf{x} \in W$.
3. De nulvector $\mathbf{0}$ is bevat in W.

Deelverzamelingen van vectorrruimten die aan deze eigenschappen voldoen noemen we *(lineaire) deelruimten*. Omdat we in deelruimten een optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren hebben, kunnen we ze zien als een nieuw voorbeeld van vectorruimten.
Een belangrijk voorbeeld van lineaire deelruimten zijn de zogenaamde *opspansels*. Deze worden als volgt gedefinieerd. Zij $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ een r-tal vectoren. Een lineaire combinatie van deze vectoren is een vector van de vorm $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r$ met $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Het *opspansel* van $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ is de verzameling lineaire combinaties van deze vectoren. Notatie: $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$. Dus

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Een ander belangrijk voorbeeld van een lineaire deelruimte is de nulruimte van een matrix. Zij A een $m \times n$-matrix. Dan is, zoals we boven zagen de verzameling vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ met $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een lineaire deelruimte. We noemen dit de *nulruimte* van de matrix A. Notatie: $\text{Nul}(A)$.

3.6 Scalairen (optioneel)

In de matrices en lineaire vergelijkingen die we tot nu toe bekeken hebben, werden reële getallen als coëfficienten gebruikt. Niets houdt ons tegen om ook matrices en lineaire vergelijkingen in andere getalsystemen te bekijken. Bijvoorbeeld de complexe getallen, die we met $\mathbb{C}$ aangeven. Alle stellingen en beschouwingen die we tot nu toe gedaan hebben gaan onverminderd op voor de complexe getallen. We kunnen in al onze stellingen $\mathbb{R}$ door $\mathbb{C}$ vervangen. Maar in plaats van $\mathbb{R}$ kunnen we ook $\mathbb{Q}$ nemen. Merk op dat alle tot nu toe behandelde voorbeelden zelfs voorbeelden met coëfficienten in $\mathbb{Q}$ zijn! De verzamelingen $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ hebben als gemeenschappelijk kenmerk dat het getalsystemen zijn waarin we kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (behalve door nul) met de gebruikelijke eigenschappen. Dergelijke getalsystemen heten

lichamen. In het tweede jaars college Algebra wordt dieper ingegaan op het wiskundige begrip lichaam. Hier volstaan we slechts met een aantal voorbeelden.
Er bestaan ook eindige lichamen. We noemen er één van, namelijk $\mathbb{F}_2$, het lichaam bestaande uit de elementen $0, 1$ en met de optel- en vermenigvuldigingsregels

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+1=0,\ 0\times 0=0,\ 1\times 0=0,\ 1\times 1=1.$$

Eigenlijk is rekenen in $\mathbb{F}_2$ hetzelfde als met de gehele getallen modulo 2 rekenen.
Ook in $\mathbb{F}_2$ kunnen we lineaire vergelijkingen oplossen. Hier is een voorbeeld.

Voorbeeld 3.6.1.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

De uitgebreide coëfficientenmatrix ziet er uit als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Standaard Gauss-eliminatie geeft

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

en de oplossing luidt

$$x_3=0,\ x_2=1,\ x_1=1-x_3-x_4=1-x_4=,\ x_4\in\mathbb{F}_2$$

en omdat $-1=1$ in $\mathbb{F}_2$,

$$x_3=0,\ x_2=1,\ x_1=1+x_4,\ x_4\in\mathbb{F}_2.$$

$\diamondsuit$

Merk op, dat $\mathbb{Z}$, de gehele getallen, geen lichaam vormen. Het quotient van twee gehele getallen hoeft namelijk niet geheel te zijn. Als gevolg daarvan gaan niet alle stellingen uit dit hoofdstuk voor $\mathbb{Z}$ op. Bijvoorbeeld, de vergelijking $3x=0$ heeft precies één gehele oplossing, namelijk 0. Maar $3x=1$ heeft geen oplossing in $\mathbb{Z}$. Daarom gaat Stelling 3.3.3 met $n=1$ niet op als we $\mathbb{R}$ door $\mathbb{Z}$ willen vervangen.
De verzamelingen $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$ zullen we in de lineaire algebra *lichamen van scalairen* noemen.

3.7 Coderingstheorie (optioneel)

Een toepassing van matrices met coëfficienten in $\mathbb{F}_2$ is de coderingstheorie. In de digitale wereld vindt communicatie plaats door uitwisseling van rijen nullen en enen. Bijvoorbeeld, muziek en films op onze computer worden vastgelegd door middel van muziek- en beeldfiles die uit niets anders dan bits (dat wil zeggen de symbolen 0,1) bestaan. Bij de communicatie van zulke data gaat het nog wel eens mis door storingen in het communicatiekanaal. Op een CD, die digitale informatie bevat, kunnen bijvoorbeeld krassen ontstaan. Tijdens de eerste reizen naar Mars door de Mariner's in de 70-er jaren was de kwaliteit van de foto's die over grote afstand tot ons kwamen, uiterst belabberd. In de begintijd van de computers waren storingen in de datatransmissie een grote bron van ergernis.
Om deze problemen tegemoet te komen, deelt men het signaal in blokken van een standaardlengte in, en voegt daar één of meer zogenaamde checksums aan toe. Bijvoorbeeld aan een rij bits in een geheugenchip van een computer voegt men een extra bit toe dat gelijk is aan 0 als het aantal geheugenbits even is, en 0 als het aantal bits oneven is. Dus bijvoorbeeld, aan de 8 bits 01100010 voegt men een 1 toe en slaat deze mee op. Mocht bij uitlezen van het geheugen de checksum niet meer kloppen, door een storing, dan wordt groot alarm geslagen in de computer door de waarschuwing 'check sum error'. Wat minder technisch, ISBN nummers van boeken worden zo gevormd dat 10 maal het eerste cijfer, 9 maal het tweede, etc een getal oplevert dat deelbaar is door 11. Bijvoorbeeld, ISBN 0-306-40615-2 is een geldig nummer omdat

$$10 \times 0 + 9 \times 3 + 8 \times 0 + 7 \times 6 + 6 \times 4 + 5 \times 0 + 4 \times 6 + 3 \times 1 + 2 \times 5 + 1 \times 2 = 132$$

deelbaar is door 11. Het laatste cijfer doet eigenlijk dienst als checksum.
Checksums zijn heel handig om fouten te constateren, maar ze geven geen aanwijzing over de plaats en de aard van de fout. Richard Hamming introduceerde in de 50-er jaren een methode die dat wel mogelijk maakte. In de begintijd van de computers traden veel fouten op bij bijvoorbeeld het lezen van ponskaarten. Gefrusteerd door de steeds terugkerende problemen bedacht Hamming het volgende. Signalen worden opgedeeld in blokjes van 4 bits. Hamming voegde daar zelf 3 checkbits aan toe op een ingenieuze manier. We kunnen deze het best beschrijven aan de hand van een stelsel lineaire vergelijkingen. Bekijk de matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

met elementen in $\mathbb{F}_2$. Merk op dat kolommen van deze matrix precies alle vectoren in $\mathbb{F}_2^3$ zijn, behalve de nulvector. Verder staan ze precies zo gerangschikt dat elke kolom de tweetallige cijfers van het volgnummer van de kolom bevatten. Ga maar na. De nulruimte van deze matrix heeft als basis

$$(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)^t$$
$$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^t$$

$$(0,0,1,0,1,1,0)^t$$
$$(0,0,0,1,1,1,1)^t$$

Verder vermelden we als bijzonderheid dat elke niet-triviale vector in de nulruimte minstens drie enen bevat. Dit kun je zelf nagan.
Stel dat in ons signaal het blok bits a, b, c, d voorkomt. Dan voegen we daar de drie bits gegeven door $b+c+d, a+c+d, a+b+d$ aan toe. Het zo ontstane blok van 7 bits geeft een vector in de nulruimte van H. We geven het aangevulde blok, dat we B noemen, in ons signaal door aan de ontvanger. Stel dat die het blok C ontvangt. Het kan zijn dat dit B is, in ongeschonden vorm, maar er kunnen ook fouten opgetreden zijn. Als dat zo is dan zal de verschilvector $\Delta = C - B$ niet nul zijn. De ontvanger bepaalt als test HC. Deze is gelijk aan $H\Delta$. Als $C = B$ dan geldt zeker $HC = H\Delta = 0$. Maar de ontvanger kent B niet en moet dus een oordeel vellen. Wat als $H\Delta = 0$ en $\Delta \neq \mathbf{0}$? Dan zit Δ in de nulruimte en moet minstens drie verschillende enen bevatten. Er zouden dus minstens drie fouten opgetreden moeten zijn. Op een kanaal waar de kans op fouten bijvoorbeeld 10% is, lijkt dit nogal onwaarschijnlijk en de ontvanger kiest ervoor te concluderen dat het signaal ongeschonden is doorgekomen. In 0.1% van de gevallen zal dit misschien een onjuiste aanname zijn, maar het is wel een flinke verbetering tav de oorspronkelijke 10% foutenkans.
Stel nu dat de ontvanger constateert dat $HC \neq \mathbf{0}$. In ieder geval is er een fout opgetreden. Laten we even aannemen dat er precies 1 fout is opgetreden. Zeg dat die op de vierde plaats staat. De ontvanger ziet dan dat $HC = H\Delta = (0,0,1)^t$. Met andere woorden, aangenomen dat er 1 fout is, dan moet het wel op plaats 4 zijn, want $(0,0,1)^t$ is de vierde kolom van H. Vervolgens kan de ontvanger het bericht corrigeren door op de vierde plaats het bit te veranderen. Om deze reden noemen Hamming's code een *foutencorrigerende code*. Preciezer, het is mogelijk 1 fout recht te zetten.
Er zijn ook foutencorrigerende codes die twee of meer fouten kunnen corrigeren. Bij de Mariner-9 expeditie werd een Hadamard code gebruikt die 7 fouten kan corrigeren.

3.8 Opgaven

Opgave 3.8.1 Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Bepaal, indien mogelijk, de volgende matrices:

$$-2A, \quad A - B, \quad BC, \quad CB, \quad 3C - D, \quad CE, \quad EC, \quad CD, \quad DC$$

2. Bepaal $A - I_3$ en $A - 3I_3$ waarin I_3 de 3×3-identiteitsmatrix is.

3. Laat zien dat $I_2B = B$ en dat $BI_3 = B$.

Opgave 3.8.2 Geef twee 2×2-matrices A, B, beiden niet de nulmatrix, zó dat $AB = O$ waarin O de 2×2-nulmatrix voorstelt.

Opgave 3.8.3 Zij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$$

Voor welke waarde(n) van k, indien ze bestaan, geldt $AB = BA$?

Opgave 3.8.4 Zij A, B een tweetal 2×2-matrices. Gaat de volgende gelijkheid altijd op: $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$?

Opgave 3.8.5 Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

1.
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & & + & 6x_3 & = 2 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & & + & 6x_3 & = 0 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & = 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = 0 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & & & = 0 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & = 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = 0 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & & & = 0 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 4x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 16x_3 & + & 3x_4 & = 0 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = 7 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = 7 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 11 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = 0 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = 3 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = 1 \end{array}$$

Opgave 3.8.6 Schrijf alle gereduceerde 2×2-matrices op door de nullen met 0 aan te geven, de pivotcoefficienten met p_i en de overige elementen met $\star$. Bijvoorbeeld,
$$\begin{pmatrix} p_1 & \star \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

Opgave 3.8.7 Zelfde vraag als de vorige, maar nu voor 3×3-matrices (Hint: er zijn 8 gevallen).

Opgave 3.8.8 Bepaal voor elk van de volgende stelsels de waarden van b_1, b_2, b_3, b_4 waarvoor het stelsel een oplossing heeft.

1.
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & = b_1 \\ -2x_1 & + & 3x_3 & - & x_3 & = b_2 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & & & = b_3 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrl} x_1 & - & 2x_2 & = b_1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = b_2 \\ -6x_1 & + & 12x_2 & = b_3 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = b_1 \\ -2x_2 & - & 4x_2 & + & 12x_3 & = b_2 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & = b_1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = b_2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & & & = b_3 \\ 2x_1 & & & - & 2x_3 & = b_4 \end{array}$$

Opgave 3.8.9 Laat zien dat het stelsel vergelijkingen
$$\begin{array}{rcl} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 5a \\ x_1 + 2x_2 + (2-a)x_3 & = & 5 \\ 3x_1 + (a+2)x_2 + 6x_3 & = & 15 \end{array}$$
voor iedere waarde van a oplosbaar is. Los het stelsel op voor die waarden van a waarvoor er meer dan één oplossing is. Geef in ieder van deze gevallen een meetkundige interpretatie van het stelsel vergelijkingen en zijn oplossingen.

Opgave 3.8.10 Bepaal de waarden van a waarvoor het stelsel vergelijkingen
$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 & = & -1 \end{array}$$

niet oplosbaar is. Geef voor die waarden van a een meetkundige interpretatie.

Opgave 3.8.11

1. Bepaal de waarde(n) van a waarvoor het stelsel
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -x_1 + ax_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + (a^2+4a+1)x_4 &= 0 \end{aligned}$$
meer dan één oplossing heeft.

2. Voor welke waarde van a is de oplossingsruimte 2-dimensionaal (dwz 2 parameters)? Bepaal in dit geval de oplossingsverzameling.

3. Bepaal de waarde van b waarvoor het stelsel
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$
oplosbaar is en bepaal de oplossingsverzameling.

Opgave 3.8.12 Gegeven zijn drie getallen b_1, b_2, b_3.

1. Bewijs dat er een unieke quadratische functie $p(x) = ax^2 + bx + c$ bestaat zó dat $p(1) = b_1,\ p(2) = b_2,\ p(3) = b_3$.

2. Bewijs dat er een unieke quadratische functie $p(x) = ax^2 + bx + c$ bestaat zó dat $p(1) = b_1,\ p'(1) = b_2,\ p''(1) = b_3$.

Opgave 3.8.13 Bepaal de inverse van elke van de volgende matrices:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Opgave 3.8.14 In deze opgave kijken we naar 3×3-matrices. In het bijzonder definieren we de *elementaire* 3×3*-matrices*

- $E_{ij}(\lambda)$ als de matrix die we uit I_3 krijgen door het element op plaats i, j te vervangen door λ.

- S_{ij} als de matrix die uit I_3 ontstaat door de i-de en j-de kolom te verwisselen.

Schrijf $E_{33}(\lambda)$, $E_{13}(\lambda)$, $E_{31}(\lambda)$ en S_{12} uit.
Zij M een willekeurige 3×3-matrix.

1. Geef een omschrijving van de volgende matrixproducten:
$$E_{33}(\lambda)M, \quad E_{13}(\lambda)M, \quad E_{31}(\lambda)M, \quad S_{12}M$$
2. Wat is de inverse van $E_{33}(\lambda)$, $E_{13}(\lambda)$, $E_{31}(\lambda)$ en S_{12}?
3. Zij M een matrix die door volledige rijreductie (Jordanreductie) tot de identiteitsmatrix gereduceerd kan worden. Laat zien dat M geschreven kan worden als matrixproduct van elementaire matrices.
4. Geef een omschrijving van de volgende matrixproducten:
$$ME_{33}(\lambda), \quad ME_{13}(\lambda), \quad ME_{31}(\lambda), \quad MS_{12}$$

Natuurlijk is in bovenstaande opgave de beperking tot 3×3-matrices niet nodig, een analoog verhaal geldt ook voor $n \times n$-matrices.

Opgave 3.8.15 Zij A een $m \times n$-matrix. Stel dat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat A de $m \times n$ nul-matrix is (dwz: alle elementen nul).

Opgave 3.8.16 Zij A, B een tweetal $m \times n$-matrices met matrixelementen a_{ij} respectievelijk b_{ij}. Hoe ziet het element op plaats i, j van $A+B$ er uit? En hoe ziet het element van A^t, B^t respectievelijk $(A+B)^t$ op plaats i, j er uit? Laat zien dat $(A+B)^t = A^t + B^t$. Met M^t geven we de getransponeerde aan van de matrix M.

Opgave 3.8.17 Zij A een $m \times p$-matrix en B een $p \times n$-matrix. De elementen van A, B respectievelijk AB geven we aan met a_{ij}, b_{jk} repectievelijk c_{ik} waarin $i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, n$. Met M^t geven we de getransponeerde aan van de matrix M.
Bewijs dat $(AB)^t = B^t A^t$ (Hint: gegeven dat een matrix M matrixelementen m_{ij} op plaats i, j heeft dan heeft M^t het matrixelement m_{ji} op plaats i, j? Gebruik ook de regel $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$).

Opgave 3.8.18 Een $n \times n$-matrix M heet *symmetrisch* als $M = M^t$. De matrix M heet *anti-symmetrisch* als $M^t = -M$.

1. Welk van de volgende matrices zijn symmetrisch, anti-symmetrisch, geen van beide?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -20 & 21 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Laat zien dat de diagonaalelementen van een anti-symmetrische matrix nul zijn.
3. Stel dat A, B symmetrische $n \times n$-matrices zijn. Bewijs dat AB symmetrisch is precies dan als $AB = BA$.

4. Zij A een willekeurige $n \times n$-matrix. Bewijs dat $A + A^t$ symmetrisch is en $A - A^t$ antisymmetrisch.

5. Bewijs dat elke $n \times n$-matrix geschreven kan worden als som van een symmetrische en een anti-symmetrische matrix. Illustreer dit aan de hand van de voorbeelden in onderdeel a).

Opgave 3.8.19 Ga na of het volgende stelsel lineaire vergelijkingen oplosbaar is. Zo ja, los het stelsel op.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 11x_2 - 16x_3 + 4x_4 &= 26 \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.20 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.21 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.22 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 10x_2 + 14x_3 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.23 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_5 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.24 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.25 Zelfde vraag als boven voor het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_3 &= -8 \\ 3x_1 + 6x_3 &= -12 \\ -2x_1 - 8x_2 + 4x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Opgave 3.8.26 Het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 11 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 12 \\ 5x_1 - 8x_2 + 11x_3 &= \alpha \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 &= 18 \end{aligned}$$

is oplosbaar. Bereken α en bepaal de oplossingsverzameling.

Opgave 3.8.27 Bepaal de waarden voor α waarvoor het stelsel

$$\begin{aligned} 7x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= \alpha x_1 \\ -3x_1 + 7x - 2 + x_3 - x_4 &= \alpha x_2 \\ -x_1 + x - 2 + 7x_3 - 3x_4 &= \alpha x_3 \\ x_1 - x_2 - 3x - 3 + 7x_4 &= \alpha x_4 \end{aligned}$$

een niet-triviale oplossing heeft. Los het stelsel voor deze waarden op.

Opgave 3.8.28 Bepaal de inverse van de volgend matrices, indien ze bestaan,

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3.8.29 Bepaal de inverse van de volgend matrices, indien ze bestaan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3.8.30 Bepaal de inverse van de volgend matrices, indien ze bestaan,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3.8.31 Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices zó dat $AB = I_n$. Laat zien dat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alleen de triviale oplossing heeft.

Opgave 3.8.32 Zij A, B een tweetal inverteerbare $n \times n$-matrices. Bewijs dat AB dan ook inverteerbaar is, en dat de inverse wordt gegeven door $B^{-1}A^{-1}$.

Opgave 3.8.33 Zij A een inverteerbare matrix. Bewijs dat A^t ook inverteerbaar is. Wat is zijn inverse?

Opgave 3.8.34 Een $n \times n$-matrix heet *nilpotent* als er een gehele r bestaat zó dat A^r de nulmatrix is.

1. Geef een voorbeeld van een niet-triviale, nilpotente 2×2-matrix.
2. Zij A een inverteerbare $n \times n$-matrix. Laat zien dat A niet nilpotent is.

Opgave 3.8.35 We vervolgen onze vragen over nilpotente matrices (zie voorgaande opgave).

1. Laat zien dat
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
nilpotent is.
2. Bovenstaande matrix is voorbeeld van een bovendriehoeksmatrix (alleen niet-triviale elementen in rechterbovendriehoek). Zo zijn er ook beneden driehoeksmatrices (alleen niet-triviale elementen in de linker- benedenhoek). Laat zien dat er nilpotente 4×4-matrices zijn, die noch benedennoch bovendriehoeksmatrix zijn.

Opgave 3.8.36 Zij $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathbb{R}^n$ een eindige verzameling vectoren. Laat zien dat het opspansel van S een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.
Stel dat $W \subset \mathbb{R}^n$ een deelruimte is, die S bevat. Laat zien dat W dan ook $\mathrm{Span}(S)$ bevat.

Opgave 3.8.37 Zij V, W een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$.

1. Bewijs dat de doorsnijding $V \cap W$ ook een deelruimte is.
2. Bewijs dat de vereniging $V \cup W$ is een deelruimte precies als $V \subset W$ of $W \subset V$.

Hoofdstuk 4

Onafhankelijkheid en rang

In dit hoofdstuk behandelen we een aantal begrippen die fundamenteel voor de lineaire algebra zijn. Bij de vectoren waarover we het in dit hoofdstuk hebben denken we in de eerste plaats aan vectoren in $\mathbb{R}^n$. Echter, de stellingen in dit hoofdstuk zijn zo geformuleerd, dat ze ook bruikbaar zijn in algemenere vectorruimten die we later in zullen voeren.
De afleiding van de hoofdresultaten in dit hoofdstuk berusten allen op Stelling 3.4.1 over homogene lineaire vergelijkingen, die hiermee centraal in de lineaire algebra komt te staan.

4.1 Afhankelijkheid

Zij $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ een r-tal vectoren. Een som van de vorm $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r$ noemen we een *lineaire combinatie* van $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$. We noemen een vector $\mathbf{w}$ *lineair afhankelijk* van $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ als hij geschreven kan worden als lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.
De vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ zelf noemen we een *(lineair) afhankelijk stelsel* als minstens één van de $\mathbf{v}_i$ een lineaire combinatie is van de overige. We noemen het stelsel $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *onafhankelijk* als géén van de $\mathbf{v}_i$ van de overige vectoren afhangt.
Het begrip lineaire onafhankelijkheid kunnen we iets eleganter formuleren in termen van *lineaire relaties*. We zeggen dat er tussen de vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ een lineaire relatie bestaat, als er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ zijn zó dat

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Dat zo'n relatie altijd bestaat zien we door alle λ_i nul te kiezen. We noemen dit de *triviale relatie* . Een relatie heet niet-triviaal als $\lambda_i \neq 0$ voor minstens één i. Er geldt,

Stelling 4.1.1 *Het stelsel* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ *is afhankelijk precies dan als er een niet-triviale relatie tussen* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *bestaat.*

Voorbeeld 4.1.2. Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ een drietal vectoren. Stel we weten dat $\mathbf{a} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$. Dan is $\mathbf{a}$ afhankelijk van $\mathbf{b}, \mathbf{c}$, met andere woorden, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ is een afhankelijk stelsel. Een niet-triviale relatie volgt onmiddelijk, $\mathbf{0} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

Stel omgekeerd dat er een niet-triviale relatie is, bijvoorbeeld $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+4\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Dan volgt hieruit dat $\mathbf{a}=3\mathbf{b}/2-2\mathbf{c}$, dus $\mathbf{a}$ is afhankelijk van $\mathbf{b},\mathbf{c}$.

$\diamondsuit$

Het algemene bewijs gaat helemaal analoog.

Bewijs: We moeten eerst laten zien dat uit afhankelijkheid het bestaan van een niet-triviale relatie volgt. Stel dat $\mathbf{v}_i$ afhankelijk is van de overige $\mathbf{v}_j,\ j\neq i$. Dus er zijn $\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_r$ zó dat

$$\mathbf{v}_i=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}+\lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+\lambda_r\mathbf{v}_r$$

Door nu $\mathbf{v}_i$ naar rechts te brengen zien we dat we een relatie krijgen met $\lambda_i=-1$. Hiermee hebben we een niet-triviale relatie gevonden.
Omgekeerd moeten we laten zien dat uit het bestaan van een niet-triviale relatie afhankelijkheid volgt. Stel dat $\mathbf{0}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{v}_r$ en stel dat $\lambda_i\neq 0$ voor zekere i. Door nu de term $\lambda_i\mathbf{v}_i$ naar links te brengen en aan beide zijden door $-\lambda_i$ te delen krijgen we $\mathbf{v}_i$ als lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_r$.

$\square$

Bovenstaande stelling kunnen we ook op een iets andere manier formuleren. Ga zelf na dat het volgende geldt.

Stelling 4.1.3 *Het stelsel $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ is onafhankelijk precies dan als tussen $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ alleen de triviale relatie bestaat.*

Deze laatste vorm gebruiken we veelal om (on)afhankelijkheid van vectoren aan te tonen.

Voorbeeld 4.1.4. Zijn de vectoren

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

afhankelijk? Om dit te beantwoorden lossen we het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&3&0\\-2&5&1&4&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right)$$

op. Na Gauss-eliminatie houden we het volgende stelsel over

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&3&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Dit stelsel heeft niet-triviale oplossingen en dus is ons stelsel van vier vectoren afhankelijk.
We zien nog meer in dit voorbeeld. De derde kolom in de laatste matrix is gelijk aan 2 maal de eerste plus 1 maal de tweede. Verder is de vierde kolom in

de laatste matrix gelijk aan 3 maal de eerste plus 2 maal de tweede. Diezelfde relaties gelden ook voor de kolommen in de oorspronkelijke matrix, dat wil zeggen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bovendien zijn de eerste twee vectoren onafhankelijk omdat er geen niet-triviale relaties met $x_3 = x_4 = 0$ zijn.

$\diamondsuit$

Hier is nog een stelling voor later gebruik.

Stelling 4.1.5 *Stel* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ *onafhankelijk en* $\mathbf{v}$ *is afhankelijk van de* $\mathbf{b}_i$*. Dan kan* $\mathbf{v}$ *precies op één manier geschreven worden als lineaire combinatie van* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$*.*

Bewijs: Stel dat $\mathbf{v}$ op twee manieren geschreven kan worden als lineaire combinatie van $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$. Zeg,

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{b}_r = \mu_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \mu_r\mathbf{b}_r.$$

Na aftrekken volgt, $(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\mathbf{b}_r = \mathbf{0}$. Omdat $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ onafhankelijk zijn concluderen we hieruit dat $\lambda_i - \mu_i = 0$ voor $i = 1, \dots, r$ en dus $\lambda_i = \mu_i$ voor alle i.

$\square$

4.2 Dimensie en rang

Definitie 4.2.1 *Zij* S *een niet lege verzameling vectoren. Het grootste getal* r*, zó dat* S *een* r*-tal onafhankelijke vectoren bevat, noemen we de* <u>*rang*</u> *van* S*. Notatie:* $\mathrm{rang}(S)$.
In het bijzonder, als $S = \{\mathbf{0}\}$*, dan zeggen we dat* $\mathrm{rang}(S) = 0$.
Als S *een deelruimte is dan noemen we de rang van* S *ook wel* <u>*dimensie*</u>*. Notatie:* $\dim(S)$.
Als r *niet bestaat, dan zeggen we dat de rang (of dimensie) van* S *oneindig is.*

We kunnen alleen $r = \infty$ hebben als S voor elke positief gehele r een r-tal onafhankelijke vectoren bevat. Zolang we met vectoren in $\mathbb{R}^n$ werken zal dit niet gebeuren. Later, vanaf Hoofdstuk 7, krijgen we wel te maken met oneindig dimensionale vectorruimten.
De volgende stelling kunnen we zien als de hoofdstelling van de lineaire algebra.

Stelling 4.2.2 (Hoofdstelling) *Zij* S *een verzameling vectoren en stel dat* S *bevat is in het opspansel van* n *vectoren* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$*. Dan geldt dat* $\mathrm{rang}(S) \le n$*.*

Een gevolg is dat bijvoorbeeld elke deelverzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ een rang $\leq n$ heeft, want $\mathbb{R}^n$ is het opspansel van de standaard basisvectoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bewijs: Het bewijs van de stelling krijgen we door aan te tonen dat ieder $n+1$-tal vectoren in S afhankelijk is. Daarmee bestaat elk onafhankelijk stelsel vectoren in S uit hooguit n vectoren. En dus $\text{rang}(S) \leq n$.
Kies $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{n+1} \in S$. Elk van de $\mathbf{s}_i$ is afhankelijk van $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Dat wil zeggen, er zijn a_{ij} zó dat

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{b}_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \mathbf{s}_{n+1} &= a_{n+1,1}\mathbf{b}_1 + a_{n+1,2}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{n+1,n}\mathbf{b}_n \end{aligned}$$

De rijen $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2 \ldots, n+1$ kunnen gezien worden als elementen van $\mathbb{R}^n$. Er zijn $n+1$ van deze rijen en dus bestaat er volgens Stelling 3.4.1 een niet-triviale oplossing $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ van het stelsel

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1,1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1,n} &= 0 \end{aligned}$$

Als gevolg hiervan geldt dat

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{s}_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\mathbf{s}_{n+1} &= (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1,1})\mathbf{b}_1 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1,n})\mathbf{b}_n \\ &= 0 \cdot \mathbf{b}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dus $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n+1}$ zijn lineair afhankelijk.

□

Om de rang van een verzameling te kunnen bepalen en ermee te rekenen voeren we het begrip basis in.

Definitie 4.2.3 *Zij S een verzameling vectoren. Een eindige deelverzameling $B \subset S$ heet een basis van S als*

1. *B onafhankelijk is, en*
2. *elke $\mathbf{v} \in S$ afhankelijk is van B.*

Het bekendste voorbeeld is natuurlijk de standaardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ van $\mathbb{R}^n$. Samen met Stelling 4.1.5 volgt dat als B een basis van S is en $\mathbf{v} \in S$, de vector $\mathbf{v}$ op precies één manier geschreven kan worden als lineaire combinatie van vectoren uit B.

Een ander voorbeeld,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

is een basis van de verzameling $S = \mathbb{R}^3$. Leg uit waarom dit zo is!
Het zal blijken dat een basis van $\mathbb{R}^3$ altijd uit drie vectoren bestaat. Hier volgt de karakterisatie van een basis.

Stelling 4.2.4 *Zij S een verzameling vectoren van rang n. Dan geldt:*

1. *Elke basis van S bestaat uit n vectoren.*
2. *Elk onafhankelijk stelsel vectoren uit S bestaande uit n vectoren is een basis van S.*

Bewijs: Stel we hebben een basis B met m elementen. Omdat $n = \text{rang}(S)$ het maximum van alle mogelijke aantallen onafhankelijke vectoren is, geldt $m \leq n$. Anderzijds, S is bevat in het opspansel van de vectoren uit B. Dus, volgens de eerste hoofdstelling, $n \leq m$. Conclusie: $m = n$.
Zij B een deelverzameling van S bestaande uit n onafhankelijke elementen. Stel $\mathbf{v} \in S$. Als $\mathbf{v}$ onafhankelijk van de vectoren B is, dan zouden we $n+1$ onafhankelijke vectoren in S hebben, in tegenspraak met $\text{rang}(S) = n$. We concluderen dat $\mathbf{v}$ afhankelijk van B is. Daarmee is B een basis van S.

□

Voorbeeld 4.2.5. We nemen nog even het stelsel S van vectoren uit Voorbeeld 4.1.4,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Om afhankelijkheid aan te tonen, losten we het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

op. Na Gauss-eliminatie hielden we het stelsel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

over. We zagen uit deze gereduceerde vorm dat de derde en vierde vector lineaire combinaties zijn van de eerste twee, en dat de eerste twee vectoren onafhankelijk zijn. We concluderen dat de eerste twee vectoren een basis van ons viertal vormen en dat de rang gelijk is aan 2.

♢

Dit voorbeeld illustreert de volgende handige regel.

Stelling 4.2.6 *Zij gegeven een n-tal kolomvectoren $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$. Zij B de $m \times n$-matrix met de vectoren $\mathbf{b}_i$ als kolommen. Zij $i_1, i_2, \ldots, i_r$ de verzameling kolomindices corresponderend met de pivot-elementen na een rijreductie van B. Dan is $\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}$ een basis van het stelsel $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. In het bijzonder is de rang van dit stelsel gelijk aan het aantal pivot-elementen.*

Stelling 4.2.7 *Zij $S, S' \subset \mathbb{R}^n$ een tweetal niet-lege verzamelingen vectoren met $S \subset S'$. Dan geldt,*

1. *Als $S \neq \{\mathbf{0}\}$ dan heeft S een basis.*
2. *Elke basis van S kan worden uitgebreid tot een basis van S'.*
3. $\mathrm{rang}(S) \leq \mathrm{rang}(S')$.

Bewijs:
Voor de eerste bewering voeren we de volgende procedure uit. Kies een vector $\mathbf{b}_1 \in S$ met $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$. Kies vervolgens $\mathbf{b}_2 \in S$ onafhankelijk van $\mathbf{b}_1$, kies dan $\mathbf{b}_3 \in S$ onafhankelijk van $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, etc. We gaan door totdat dit proces afbreekt. Dat wil zeggen we hebben $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in S$ gevonden, en elke vector in S is hier afhankelijk van. Dus we hebben een basis.
Voor de tweede bewering stellen we dat we een basis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ van S hebben. We kunnen dan een basis van S' construeren door een vector $\mathbf{b}_{s+1} \in S'$ te kiezen die onafhankelijk is van $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$, vervolgens $\mathbf{b}_{s+2}$ onafhankelijk van de voorgaande, etcetera. Dit proces breekt af omdat er niet meer dan n onafhankelijke vectoren in S' kunnen zitten. We houden een basis van S' over, die de basis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ van S bevat.
Het feit dat $\mathrm{rang}(S) \leq \mathrm{rang}(S')$ volgt uit de definitie van het rangbegrip.

$\square$

Tenslotte vermelden we een paar nuttige feiten. Geef zelf een bewijs hiervoor.

Stelling 4.2.8 *Zij S een verzameling vectoren. De rang van S verandert niet als*

1. *we een vector $\mathbf{v} \in S$ vervangen door $\lambda\mathbf{v}$, waarin $\lambda \neq 0$*
2. *we een vector $\mathbf{v} \in S$ vervangen door $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$, waarin $\mathbf{w} \in S$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ en λ een willekeurige scalair is.*

4.3 Rang van een matrix

Beschouw een $m \times n$-matrix A. We kunnen op twee manieren de matrix A een rang toekennen. Namelijk de rang van de rijvectoren van A en de rang van de kolomvectoren van A. We noemen dit *rijenrang* respectievelijk *kolommenrang* van A. We hebben de volgende verrassende stelling.

Stelling 4.3.1 *De rijenrang van een matrix is gelijk aan zijn kolommenrang.*

Bewijs: Noem de matrix A. Voer een rijreductie op A en noem de gereduceerde matrix $\tilde{A}$. Stel dat $\tilde{A}$ precies r pivotelementen bevat. Omdat bij rijreductie de relaties tussen de kolommen niet veranderen, geldt dat de kolommenrang van A en $\tilde{A}$ gelijk zijn aan r (zie ook Stelling 4.2.6).
Verder volgt uit Stelling 4.2.8 dat bij rijreductie de rijenrang van A en $\tilde{A}$ hetzelfde zijn. Omdat $\tilde{A}$ in de trapvorm staat zien we dat de rijen die een pivotelement bevatten een onafhankelijk stelsel vormen. De overige rijen bestaan

alleen uit nullen. De rijenrang van $\tilde{A}$ is dus r en dit is tevens gelijk aan de rijenrang van A.
We concluderen dat de rijenrang en kolommenrang van A beiden gelijk zijn aan r.

$\square$

In de vorige paragraaf, Stelling 4.2.6, zagen hoe we de rang van een stelsel kolomvectoren konden uitrekenen. Hiermee zien we dat de rang van een matrix gelijk is aan het aantal pivot-variabelen dat optreedt bij rijreductie van de matrix.
Ten slotte hebben we het begrip *nulruimte* van een matrix A. Dit is niets anders dan de oplossingsverzameling van het homogene stelsel lineaire vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Notatie: $\mathrm{Nul}(A)$.
Na al het voorgaande is het niet meer lastig om de volgende Stelling in te zien.

Stelling 4.3.2 *Zij A een $m \times n$-matrix. Dan is de dimensie (of rang) van $\mathrm{Nul}(A)$ gelijk aan $n - \mathrm{rang}A$.*

Bewijs: Bij oplossing van het stelsel door Gauss-eliminatie vinden we een gereduceerd stelsel vergelijkingen met r pivot-variabelen en $n - r$ niet-pivot variabelen. Uit de opmerking boven weten we dat $r = \mathrm{rang}A$. Verder krijgen we de volledige oplossingsverzameling door elk van de niet-pivot variabelen een willekeurige waarde te geven. Hierdoor krijgt de oplossingsverzameling rang (of dimensie, de oplossingsverzameling is een lineaire deelruimte) $n - r$. En dit is gelijk aan $n - \mathrm{rang}A$.

$\square$

Hier is een toepassing.

Stelling 4.3.3 *Bij elke lineaire deelruimte V van $\mathbb{R}^n$ bestaat een $m \times n$-matrix A zó dat V de nulruimte van A is. Bovendien kunnen we $m = n - \dim(V)$ kiezen.*

Bewijs: Kies een basis van V en schrijf de basisvectoren in rijvorm op als een $\dim(V) \times n$-matrix die we B noemen. Kies een basis van de nulruimte van B. Deze bestaat uit $n - \dim(V)$ elementen. Schrijf deze basisvectoren als kolommen in een matrix C. Dus $BC = 0$. Na transponeren, $C^t B^t = 0$. Stel nu $A = C^t$. We hebben de volgende feiten, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(C) = n - \dim(V)$ en V is bevat in de nulruimte van A wegens $AB^t = C^t B^t = 0$. Verder,

$$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = n - (n - \dim(V)) = \dim(V).$$

Hieruit volgt dat: $\mathrm{Nul}(A) = V$ (zie Opgave 4.5.10).

$\square$

Voorbeeld 4.3.4. Zij V de deelruimte in $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren $(2, 0, -3, 1)^t$ en $(3, 4, 2, 2)^t$. Zij B de matrix met deze vectoren als rijvectoren. Dus

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ga zelf na dat de nulruimte van deze matrix wordt opgespannen door $(0,-2,1,3)^t$ en $(4,1,0,-8)^t$. De deelruimte V is dus nulruimte van bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

4.4 Dimensies van lineaire deelruimten

Stel dat we een tweetal lineaire deelruimten $U, V \subset \mathbb{R}^n$ gegeven hebben. We kunnen nu de *somruimte* definieren als

$$U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{v} \in V\}.$$

Ga zelf na dat $U + V$ weer een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is. Het is niet altijd zo dat de dimensie van $U + V$ gelijk is aan de som van de dimensies van U en V. Als we bijvoorbeeld $U = V$ zouden nemen, dan geldt natuurlijk $U + V = U = V$ en we hebben een voorbeeld waarvoor geldt dat $\dim(U + V) = \dim(U) = \dim(V) \neq \dim(U) + \dim(V)$ (mits $\dim(U) > 0$). Ook als de som van de dimensies van U en V groter dan n is, kan de dimensie van $U + V$ (die altijd kleiner of gelijk n is) nooit gelijk zijn aan de som $\dim(U) + \dim(V)$ (die groter is dan n). We hebben wel de volgende stelling.

Stelling 4.4.1 *Met dezelfde notatie als hierboven geldt*

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Bewijs: Stel $p = \dim(U), q = \dim(V)$ en $r = \dim(U \cap V)$. We beginnen een basis $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ te kiezen voor $U \cap V$. Vul deze basis met $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$ aan tot een basis van U en met $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$ aan tot een basis van V. Elke vector uit $U + V$ kan nu geschreven worden als lineaire combinatie van $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$, $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$, $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$. Wij beweren dat deze vectoren onafhankelijk zijn en daarmee per definitie een basis van $U + V$ vormen. Stel dat we een relatie

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_r \mathbf{w}_r + \mu_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \mu_p \mathbf{u}_p + \nu_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \cdots + \nu_q \nu_q = \mathbf{0}$$

hebben. De som $\nu_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \cdots + \nu_q \mathbf{v}_q$ is nu bevat in zowel V als U via bovenstaande relatie. Dus is de vector bevat in $U \cap V$ en kan geschreven worden als lineaire combinatie van $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$. Dus zijn coefficienten $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ zó dat

$$\nu_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \cdots + \nu_q \mathbf{v}_q = \kappa_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \kappa_r \mathbf{w}_r.$$

We hebben nu een lineaire relatie tussen $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$ en aangezien deze vectoren onafhankelijk zijn (ze vormen een basis van V) moet gelden dat alle coefficienten nul zijn. In het bijzonder $\nu_{r+1} = \cdots = \nu_q = 0$. Van de relatie waarmee wij begonnen houden wij nu over dat

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_r \mathbf{w}_r + \mu_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \mu_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}.$$

Omdat de vectoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$ lineair onafhankelijk zijn (ze vormen een basis van U), concluderen we dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_p = 0$. We hebben nu een basis van $U + V$ gevonden en er geldt dat

$$\dim(U+V) = r+(p-r)+(q-r) = p+q-r = \dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V).$$

$\square$

In het bijzonder volgt uit deze Stelling en het feit $\dim(U + V) \leq n$, dat als de som $\dim(U) + \dim(V)$ groter dan n is, de doorsnijding $U \cap V$ niet triviaal is, dat wil zeggen, positieve dimensie moet hebben.

In de praktijk, als we een deelruimte U opgespannen door p vectoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p \in \mathbb{R}^n$ en een deelruimte V opgespannen door q vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \in \mathbb{R}^n$ hebben, dan kunnen we als volgt een basis van $U \cap V$ bepalen. Hiertoe bepalen we alle vectoren $\mathbf{x}$ die zowel in de vorm $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p$ als $\mathbf{x} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{v}_q$ geschreven kunnen worden. Met andere woorden, we moeten het stelsel vergelijkingen

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p = \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{v}_q$$

oplossen in $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$. Kies een basis van de oplossingen en bepaal voor elke oplossing uit deze basis $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p$ (of $\mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{v}_q$, wat op hetzelfde neerkomt). Oplossing van het stelsel vergelijkingen gebeurt door een $n \times (p+q)$-matrix op te stellen met de $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$ als kolommen en het bijbehorende homogene stelsel vergelijkingen op te lossen.

Voorbeeld 4.4.2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

De deelruimte opgespannen door de eerste twee kolommen van A geven we aan met U, de deelruimte opgespannen door de laatste drie kolommen van A geven we aan met V. Gevraagd wordt om een basis van $U \cap V$ te bepalen. We lossen het homogene stelsel met coefficientenmatrix A op. Gewone rijreductie van A levert ons het rijgereduceerde stelsel met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

op (Controleer dit!!). We zien dat er een 1-dimensionale oplossingsruimte is, dus heeft $U \cap V$ dimensie 1. Een basis voor de oplossingsruimte wordt gegeven door $(1/3, -1/3, 1, 1, 1)$ (controleer!). Hieruit volgt dat $U \cap V$ wordt opgespannen door

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tevens zien we uit bovenstaande berekening ook dat de pivotvariabelen van de reductie horen bij de eerste vier kolommen. De eerste vier kolommen vormen dus een basis van $U+V$, die in dit voorbeeld natuurlijk gelijk is aan $\mathbb{R}^4$.

$\diamondsuit$

Stel dat U, V een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ is en stel dat $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. In dat geval geldt $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V)$. Verder volgt uit Opgave 4.5.19 dat in dit geval iedere vector uit $U+V$ op precies één manier geschreven worden als lineaire combinatie van een element uit U en een element uit V. In dit geval geval zeggen we dat $U+V$ een *directe som* is van U en V en noteren de somruimte met $U \oplus V$.

4.5 Opgaven

Opgave 4.5.1 Bepaal voor de volgende matrices achtereenvolgens: a) de rang van de matrix, b) een basis van de rijen, c) een basis van de kolommen, d) een basis van de nulruimte.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4.5.2 Bepaal de rang en een basis van elk der volgende stelsels vectoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 4.5.3 Bepaal voor elke waarde van α de rang van het volgende stelsel vectoren,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ \alpha-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 4.5.4 Bewijs Stelling 4.2.8.

Opgave 4.5.5 Geef een tweetal 2×2-matrices A, B zó dat $\mathrm{rang}(AB) \neq \mathrm{rang}(BA)$.

Opgave 4.5.6 Zij A, C een tweetal matrices waarvan het product AC bestaat.

1. Laat zien dat $\text{rang}(AC) \leq \text{rang}(A)$.
2. Geef een voorbeeld waarin $\text{rang}(AC) < \text{rang}(A)$.
3. Geldt altijd $\text{rang}(AC) \leq \text{rang}(C)$? Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 4.5.7 (Lastig) Zij A een $n \times n$-matrix. Laat zien dat $\text{rang}(A^tA) = \text{rang}(A)$.

Opgave 4.5.8 Zij A een $n \times n$-matrix van rang 1. Laat zien dat er getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bestaan, zó dat voor elke i, j het matrixelement van A op plaats i, j gegeven wordt door $a_i b_j$.

Opgave 4.5.9 Zij S een verzameling vectoren. Laat zien dat de rang van S gelijk is aan de dimensie van $\text{Span}(S)$.

Opgave 4.5.10 Zij $S, S' \subset \mathbb{R}^n$ en stel dat $S \subset S'$. Bewijs:

$$\text{rang}(S) = \text{rang}(S') \iff \text{Span}(S) = \text{Span}(S').$$

Opgave 4.5.11 Zij V, W een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ en stel dat $W \subset V$. Bewijs dat $\dim(W) = \dim(V) \Rightarrow V = W$.

Opgave 4.5.12 Zij gegeven een drietal vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en dat het stelsel $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ onfhankelijk is en het stelsel $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ afhankelijk. Bewijs dat $\mathbf{w}$ is het opspansel van $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zit.

Opgave 4.5.13 Bepaal een matrix A zó dat de nulruimte van A gelijk is aan de ruimte opgespannen door de kolommen van

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 4.5.14 Bepaal een matrix A zó dat de nulruimte van A gelijk is aan de ruimte opgespannen door de rijen van

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 4.5.15 Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zij U de deelruimte opgespannen door de eerste 3 kolommen van A en V de deelruimte opgespannen door de laatste twee kolommen van A. Onder $U + V$ verstaan we de deelruimte $U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$.

Bepaal een basis voor $U, V, U + V$ en $U \cap V$.

Opgave 4.5.16 Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zij U de deelruimte opgespannen door de eerst drie kolommen van A en V de deelruimte opgespannen door de laatste drie kolommen van A. Bepaal een basis voor $U, V, U + V$ en $U \cap V$.

Opgave 4.5.17 Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zij U de deelruimte opgespannen door de eerste drie kolommen van A en V de deelruimte opgespannen door de laatste drie kolommen van A. Bepaal een basis voor $U, V, U + V$ en $U \cap V$.

Opgave 4.5.18 (opm: dit is Stelling 4.4.1) Zij U, V een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ en $U + V$ de somruimte $U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$. Bewijs dat

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Opgave 4.5.19 Zij U, V een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ en $U+V$ de somruimte (zien voorgaande opgave). Stel dat $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Bewijs dat iedere vector uit $U + V$ op precies één manier geschreven kan worden als som van een vector uit U en een vector uit V.

Opgave 4.5.20 (Lastig) Zij U, V, W een drietal deelruimten van $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat

$$\dim((U + V) \cap W) \geq \dim(U \cap W) + \dim(V \cap W) - \dim(U \cap V \cap W).$$

Bewijs met behulp van een voorbeeld dat de beide zijden van de ongelijkheid niet gelijk hoeven zijn. Bewijs vervolgens dat

$$\begin{aligned} \dim(U + V + W) \quad \leq \quad & \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) \\ & - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W). \end{aligned}$$

Opgave 4.5.21

1. Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices met de eigenschap dat $AB = O$. Bewijs dat $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \leq n$.

2. (Lastig) Stel dat A een nilpotente $n \times n$-matrix is. Dat wil zeggen: er bestaat een positief geheel getal r zó dat $A^r = O$. Laat zien dat we $r \leq n$ kunnen kiezen.

Opgave 4.5.22 Zij A, B een tweetal $m \times n$-matrices. Bewijs dat

$$\mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B).$$

Opgave 4.5.23 Zij A een $n \times n$-matrix met de eigenschap dat $A^2 = A$.
Bewijs dat $\mathrm{rang}(I_n - A) = n - \mathrm{rang}(A)$, waarin I_n de $n \times n$ identiteitsmatrix is.

Opgave 4.5.24 Zij $U \subset \mathbb{R}^5$ de deelruimte gegeven door de vergelijking $x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$ en V de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ opgespannen door de vectoren

$$(1, 2, 0, 1, -1)^t, (-1, 0, 3, 2, 0)^t, (1, 0, 0, 0, 1)^t, (0, 2, -3, -1, -3)^t$$

1. Bepaal de dimensie van U en van V.

2. Bepaal de dimensie en een basis van $U \cap V$.

3. Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ een willekeurig tweetal onafhankelijke vectoren en zij W de deelruimte opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Bewijs dat $U \cap W$ een niet-triviale vector bevat.

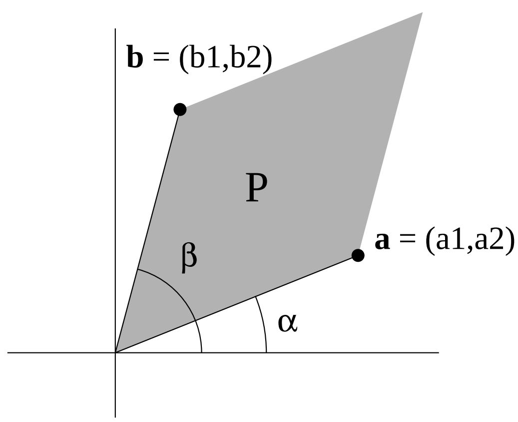
Hoofdstuk 5

Determinanten in dimensies 2,3

5.1 Geörienteerd volume in $\mathbb{R}^2$

Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ een tweetal vectoren in $\mathbb{R}^2$. Zij P het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Dat wil zeggen,

$$P = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}.$$



Gevraagd wordt het oppervlak van P te berekenen. Zij α, β de hoek die $\mathbf{a}$ respectievelijk $\mathbf{b}$ maken met de positieve x-as, tegen de klok in gemeten. Dan wordt het oppervlak van P gegeven door $||\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\beta - \alpha)|$. We willen dit oppervlak graag schrijven als functie van de coördinaten van $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Merk nu op dat $a_1 = |\mathbf{a}| \cos \alpha,\ a_2 = |\mathbf{a}| \sin \alpha$ en $b_1 = |\mathbf{b}| \cos \beta,\ b_2 = |\mathbf{b}| \sin \beta$. We gebruiken dit in de volgende afleiding,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\beta - \alpha) &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \\
&= |\mathbf{a}| \cos \alpha |\mathbf{b}| \sin \beta - |\mathbf{a}| \sin \alpha |\mathbf{b}| \cos \beta \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}$$

De gevraagde oppervlakte wordt dus $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$. Echter, door de absolute waarde te nemen, verliezen we twee dingen. De functie $a_1 b_2 - a_2 b_1$ heeft de eigenschap dat hij lineair is in a_1, a_2 en lineair in b_1, b_2. Ten tweede, de functie $a_1b_2 - a_2b_1$ is positief als $\sin(\beta-\alpha) > 0$ en negatief als $\sin(\beta-\alpha) < 0$. Merk op dat $\sin(\beta-\alpha)$ precies dan positief is als $0 < \beta - \alpha < \pi$. Meer meetkundig gezegd, als we $\mathbf{a}$ over de kortst mogelijke hoek naar de richting van $\mathbf{b}$ draaien, moeten we tegen de klok in draaien. Dit is extra informatie, die we zouden verliezen als we de absolute waarde zouden nemen. We noemen $a_1b_2 - a_2b_1$ het *georienteerde oppervlak* van het blok opgespannen door het geordende paar vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Notaties,

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

We zeggen dat het geordende paar $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *positief georienteerd* is als $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0$ en *negatief georienteerd* als $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$. Merk op dat onze standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ook positief georienteerd is.

5.2 Uitwendig product

Zij nu een tweetal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeven en zij P het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Wederom vragen we naar het oppervlak van P uitgedrukt in de coördinaten van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Zij ϕ de ingesloten hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dan geldt,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Opp}(P)^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\sin\phi)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\cos\phi)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2
\end{aligned}$$

Het blijkt dus dat het gevraagde oppervlak gelijk is aan de lengte van de vector

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

We noemen deze vector het *uitwendig product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Notatie: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Dit uitwendig product heeft de volgende eigenschappen.

Stelling 5.2.1 *Zij* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. *Dan geldt,*

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *is orthogonaal met* $\mathbf{a}$ *en* $\mathbf{b}$*, dat wil zeggen,* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

3. $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ *voor elke* $\lambda\in\mathbb{R}$.

4. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ *voor elke* $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$.

5. *Het oppervlak van het parallellogram opgespannen door* $\mathbf{a}$ *en* $\mathbf{b}$ *is gelijk aan de lengte van* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

De eerste vier eigenschappen zijn direct na te rekenen. De laatste eigenschap hebben we boven afgeleid. We zien uit de laatste eigenschap ook dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ afhankelijk zijn (dat wil zeggen in dezelfde of tegengestelde richting wijzen) precies dan als $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Het oppervlak van het parallellogram is immers precies dan nul als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ afhankelijk zijn.
Als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ onafhankelijk zijn, dan wordt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bijna gekarakteriseerd door het feit dat zijn lengte vastligt en het feit dat het uitproduct loodrecht op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ staat. Er zijn precies twee onderling tegengestelde vectoren die aan deze eisen voldoen. De juiste richting van $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ wordt vastgelegd door de zogenaamde *kurketrekkerregel* (wordt op college uitgelegd). Ook hier krijgen we dus te maken met orientatie-kwesties.

5.3 Georienteerd volume in $\mathbb{R}^3$

Zij nu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ een drietal vectoren in $\mathbb{R}^3$ en zij B het blok opgespannen door deze vectoren. dat wil zeggen,

$$B = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} \mid 0 \le \lambda, \mu, \nu \le 1\}.$$

We willen het volume van B berekenen in termen van de coördinaten van $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Laten we het vlak opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ beschouwen als grondvlak. Geef de normaalvector van dit vlak met lengte 1 aan door $\mathbf{n}$. De hoogte van het blok is dan gelijk aan $|\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}|$. Het volume van het blok is gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte van het blok. Het oppervlak is gelijk aan $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ en omdat $\mathbf{n} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})/|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, is de hoogte gelijk aan $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|/|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Het volume wordt dus,

$$\mathrm{Vol}(B) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Stel nu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Dan geldt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Deze laatste uitdrukking noemen we het *georienteerde volume* van het blok opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Notaties:

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

In Opgave 5.5.6 bewijzen we dat $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ een lineaire functie is in elk van zijn argumenten. Dit is een eigenschap die we zouden verliezen bij de functie $|\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. Ook hier loont het dus de moeite het geörenteerde volume te beschouwen in plaats van het positieve volume. Bovendien krijgen we met het voorteken van het geörienteerde volume extra informatie over de orientatie van de vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. We zeggen dat het geordende drietal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *positief geörienteerd* is als $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$. Meetkundig gezien is het geordende drietal $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ positief georienteerd, als ze georienteerd zijn via de kurketrekkerregel. Belangrijk hierbij is dat de geordende standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ook georienteerd is via de kurketrekkerregel. Tenslotte is het geörienteerde volume $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gelijk aan nul als één van de vectoren ligt in het vlak opgespannen door de twee andere vectoren.

5.4 Determinanten

Historisch gezien kwamen de formules voor geörienteerde volumes op een heel andere manier tot stand, namelijk bij het oplossen van stelsels van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden. Beschouw bijvoorbeeld het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

in de onbekenden x_1, x_2. In het algemeen luidt de oplossing als volgt.

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{-b_1a_{21} + b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Anders geschreven,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

De oplossing van het stelsel

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

ziet er uiteraard ingewikkelder uit. Na veel rekenwerk komt de waarde van x_1 uit op

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + b_2a_{32}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}}.$$

Anders geschreven,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

met een analoge formule voor x_2 en x_3. De volumefunctie wordt in deze gevallen ook wel de *determinant* van de coëfficientenmatrix genoemd. In Hoofdstuk 6 zullen we het determinantbegrip uitbreiden naar $n \times n$-matrices.

5.5 Opgaven

Opgave 5.5.1 Bepaal het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(-1,4),(3,2),(0,1)$.

Opgave 5.5.2 Bepaal het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(6,1),(1,2),(-3,1)$.

Opgave 5.5.3 Bepaal het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $(1,1,1),(0,-1,2),(1,3,4)$.

Opgave 5.5.4 Bepaal het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $(1,0,-1),(2,3,-1),(1,2,5)$.

Opgave 5.5.5 Bepaal het volume van het viervlak in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $(1,0,0),(2,3,4),(-1,0,2),(3,2,-1)$.

Opgave 5.5.6 Zij $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ en $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Bewijs de volgende eigenschappen van de determinantfunctie Δ, gebruik hiervoor de definitie $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ (dus niet verder uitschrijven, maar uitsluitend de regels voor in- en uitproducten gebruiken, dwz Stellingen 2.2.3 en 5.2.1) .

1. Lineariteit in het eerste argument:
   (a) $\Delta(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\lambda\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$
   (b) $\Delta(\mathbf{a}'+\mathbf{a}'',\mathbf{b},\mathbf{c})=\Delta(\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{c})+\Delta(\mathbf{a}'',\mathbf{b},\mathbf{c})$.
2. Lineariteit in het laatste argument:
   (a) $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda\mathbf{c})=\lambda\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$
   (b) $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}'+\mathbf{c}'')=\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}')+\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}'')$.
3. $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})=0$.
4. $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=-\Delta(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$.
5. $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})=0$.
6. $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=-\Delta(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b})$ (hint: werk $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}-\mathbf{c},\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$ uit).
7. Stel $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ dan geldt $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$.

Opgave 5.5.7 Bewijs dat $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})=\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})$. (cyclische verwisseling van $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$). Gebruik hiervoor opgave 5.5.6 onderdelen (4) en (6).

Opgave 5.5.8 Bepaal de volgende determinanten,

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Opgave 5.5.9 Bepaal de volgende determinanten,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Opgave 5.5.10 Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Gebruik hiervoor de 6-terms formule voor de determinant.

Opgave 5.5.11 Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Toon de volgende eigenschappen aan:

1. $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$.
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
4. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ (Jacobi's identiteit).

Opgave 5.5.12 Zij A, B, C een drietal punten in de ruimte en neem aan dat ze niet op één rechte liggen. Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ het drietal bijbehorende vectoren. Bewijs dat de vergelijking van het vlak door A, B, C gegeven wordt door

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) + \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Opgave 5.5.13 Gegeven een drietal punten A, B, C in $\mathbb{R}^2$ met coördinaten $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$. Laat zien dat het oppervlak van ΔABC gelijk is aan de absolute waarde van de determinant

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Opgave 5.5.14 Stel we hebben drie punten in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Bewijs dat de punten op één lijn liggen precies dan als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Opgave 5.5.15 In $\mathbb{R}^3$ hebben we een punt P gegeven door de vector $\mathbf{p}$ en een rechte lijn l gegeven door de parametervoorstelling $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}$. Stel dat P niet op l ligt. Bewijs dat een vergelijking van het vlak door P en l gegeven wordt door

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{p} - \mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}).$$

Opgave 5.5.16 In $\mathbb{R}^3$ hebben we twee rechte lijnen l, m met parametervoorstellingen $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}$ en $\mathbf{q} + \mu\mathbf{b}$. Neem aan dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ onafhankelijk zijn. Laat zien dat de afstand tussen l en m gegeven wordt door

$$\frac{|\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p} - \mathbf{q})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Opgave 5.5.17 Bewijs onderdelen (1),(2),(3),(4) van Stelling 5.2.1 uit het dictaat. Gebruik hierbij de definitie

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Bewijs verder ook dat $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ voor alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Hieronder een aantal opgaven die ook in eerdere hoofdstukken ook hadden kunnen voorkomen, behalve dat er een oppervlak van een driehoek gevraagd wordt.

Opgave 5.5.18 Gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 3),\ B = (6, -3, 5),\ C = (-8, 4, -2)$.

1. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l die door het zwaartepunt Z van de driehoek ΔABC gaat en die loodrecht staat op het vlak door A, B, C.

2. Bepaal de coördinaten van het punt D op de lijn l, waarvan de afstand tot het punt $O = (0, 0, 0)$ minimaal is.

3. Bewijs dat ΔABC gelijkbenig en stomphoekig is en bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 5.5.19 Gegeven zijn de punten $A = (1, 2, 3),\ B = (1, -2, 5),\ C = (4, -3, 1),\ D = (-1, -10, 5)$.

1. Bewijs dat A, B, C, D niet in één vlak liggen.

2. Bereken de oppervlakte van ΔABC.

3. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

4. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l door D en Z.

5. Bepaal de vergelijking van het vlak door A, B, C.

6. Bereken de coördinaten van de punten S en T op l, zó dat de lijnen m door A en S en n door A en T een hoek $\pi/6$ met V maken.

Hoofdstuk 6

Determinanten

6.1 Permutaties

Determinanten van $n \times n$-matrices kunnen er ingewikkeld uitzien. Voor een goed begrip van het onderliggende patroon van determinanten is het begrip permutatie van cruciaal belang.
Een *permutatie* van $1, 2, 3, \ldots, n$ is een herrangschikking van de getallen $1, 2, 3, \ldots, n$. Later, bij Algebra, zul je een iets andere definitie van een permutatie aanleren. Echter, voor de eenvoud hanteren we hier het begrip permuatie als herrangschikking. Hier volgt een lijstje met permutaties van $1, 2, 3$,

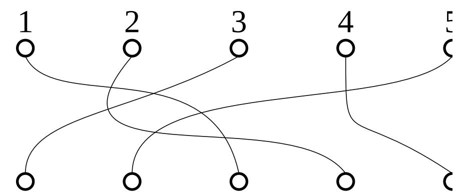
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Schrijf zelf alle permutaties van $1, 2, 3, 4$ op. Je zult zien dat het er 24 zijn. In het algemeen zijn er $n!$ permutaties van $1, 2, \ldots, n$. Een paarswisseling is een operatie waarmee twee elementen verwisseld worden en de anderen vastgelaten Elke permutatie kan door een opeenvolging van paarswisselingen gevormd worden. Bijvoorbeeld de permutatie $3, 5, 1, 2, 4$ bereiken we als volgt vanuit $1, 2, 3, 4, 5$. Eerst $1, 3$ verwisselen geeft $3, 2, 1, 4, 5$, vervolgens $2, 4$ verwisselen: $3, 4, 1, 2, 5$ en tenslotte geeft $4, 5$ verwisselen onze permutatie. Het zal duidelijk zijn dat een permutatie op vele manieren door paarswisselingen samengesteld kan worden. Het aantal benodigde paarswisselingen kan daarbij zelfs variëren. Wat echter niet varieert is de pariteit (even of oneven zijn) van het aantal paarswisselingen. We vatten dit in de volgende stelling samen.

Stelling 6.1.1 *Het aantal paarswisselingen nodig om een gegeven permutatie samen te stellen is altijd even of altijd oneven.*

Later, bij Algebra, zal deze stelling bewezen worden. We noemen een permutatie *even* als we er een even aantal paarswisselingen voor nodig hebben, *oneven* als we er een oneven aantal paarswisselingen voor nodig hebben. We noteren de pariteit met de *signum functie* sign. Als een permutatie σ even is, zetten we $\text{sign}(\sigma) = 1$ en als σ oneven is, $\text{sign}(\sigma) = -1$. Controleer zelf dat $\text{sign}(1,2,3) = 1$ en $\text{sign}(3,2,1) = -1$.

Een andere, grafische manier om de pariteit te bepalen, illustreren we aan de hand van ons voorbeeld $3,5,1,2,4$.



In dit plaatje is wordt 1 naar plaats 3 verschoven, 2 naar plaats 4, etc. De verbindingslijnen zijn losjes getekend om ervoor te zorgen dat niet verbindingslijnen in één punt snijden. Tellen we nu het totale aantal snijpunten van de verbindingsstukjes dan komen we op 7. Dit is een oneven getal, precies overeenkomend met het oneven zijn van onze permutatie.

Hier geven we bij de permutaties van $1,2,3$ aan welke even (met $+$) en welke oneven (met $-$) zijn,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & + \\ 2 & 3 & 1 & + \\ 3 & 1 & 2 & + \\ 1 & 3 & 2 & - \\ 3 & 2 & 1 & - \\ 2 & 1 & 3 & - \end{array}$$

Laten we nu eens kijken naar de algemene 3×3-determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

welke gelijk is aan

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Een dergelijke determinant zijn we in Hoofdstuk 5 al tegengekomen. De zes termen zijn zodanig opgeschreven dat de kolom-indices op de volgorde $1,2,3$ staan. Merk nu op dat elk van de zes termen overeenkomt met een permutatie van de rij-indices $1,2,3$. Bovendien komt het voorteken dat bij elke term staat precies overeen met de pariteit van de permutatie van de rij-indices. Dit zal in de volgende paragraaf het algemene patroon in een $n \times n$-determinant zijn.

6.2 Algemene determinanten

Zij gegeven de $n \times n$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De *determinant* van A wordt gedefinieerd door

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n \\ i_j \neq i_k}} \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_n)\ a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{6.1}$$

Notaties:

$$\det(A), \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Indien we de kolommen van A aangeven met $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ dan noteren we de determinant ook wel als

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Hoewel de determinantdefinitie er ingewikkeld uitziet, heeft deze functie een aantal elegante eigenschappen. Het zal blijken dat vrijwel alleen deze afgeleide eigenschappen bij determinantberekeningen gebruikt worden. De oorspronkelijke definitie wordt in de praktijk nauwelijks gebruikt.
Allereerst vermelden een drietal fundamentele eigenschappen.

Stelling 6.2.1 (Basiseigenschappen determinant) *Neem de notatie zoals net geschetst. Dan geldt,*

1. *De functie* det *is lineair in elk van zijn argumenten. Dat wil zeggen, voor elke r, $1 \leq r \leq n$ geldt*

   (a) *Voor elke $(n+1)$-tal $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^n$ geldt,*

   $$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}' + \mathbf{a}'', \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}', \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'', \dots, \mathbf{a}_n)$$

   waarbij $\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}' + \mathbf{a}''$ allen op de r-de plaats staan.

   (b) *Voor elke $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ en $1 \leq r \leq n$ geldt,*

   $$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \lambda\mathbf{a}_r, \dots, \mathbf{a}_n) = \lambda\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \dots, \mathbf{a}_n)$$

2. $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ *als $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_s$ voor zekere $r \neq s$.*

3. $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$*, waarin $\mathbf{e}_i$ de standaardbasis vectoren van $\mathbb{R}^n$ zijn. Anders gezegd,* $\det(I_n) = 1$*.*

Bewijs: Eigenschap (1) volgt vrijwel direct uit de definitie. Immers,

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_j\neq i_k}} \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)a_{i_1 1}\ldots(a'_{i_r r}+a''_{i_r r})\ldots a_{i_n n}$$

is gelijk aan

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_j\neq i_k}} \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\, a_{i_1 1}\ldots a'_{i_r r}\ldots a_{i_n n} + \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_j\neq i_k}} \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\, a_{i_1 1}\ldots a''_{i_r r}\ldots a_{i_n n}$$

Verder,

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_j\neq i_k}} \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\, a_{i_1 1}\ldots(\lambda a_{i_r r})\ldots a_{i_n n} = \lambda \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_j\neq i_k}} \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\, a_{i_1 1}\ldots a_{i_n n}$$

Eigenschap (2) is iets subtieler. Stel dat $r < s$. Kies een permutatie $i_1, i_2, \ldots, i_n$ van $1, 2, \ldots, n$ en beschouw de sommand

$$\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_r,\ldots,i_s,\ldots,i_n)\; a_{i_1 1}\cdots a_{i_r r}\cdots a_{i_s s}\cdots a_{i_n n}.$$

Beschouw ook de sommand

$$\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_s,\ldots,i_r,\ldots,i_n)\; a_{i_1 1}\cdots a_{i_s r}\cdots a_{i_r s}\cdots a_{i_n n}.$$

In ieder geval geldt dat

$$\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_r,\ldots,i_s,\ldots,i_n) = -\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_s,\ldots,i_r,\ldots,i_n)$$

omdat de twee permutaties een paarswisseling verschillen. Omdat $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_s$, geldt dat $a_{ir} = a_{is}$ voor $i = 1, \ldots, n$. In het bijzonder $a_{i_r r} = a_{i_r s}$ and $a_{i_s r} = a_{i_s s}$. Dus $a_{i_1 1}\cdots a_{i_r r}\cdots a_{i_s s}\cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1}\cdots a_{i_s r}\cdots a_{i_r s}\cdots a_{i_n n}$. Met andere woorden de som van de twee termen is 0. Omdat de termen in de determinant kunnen opgedeeld worden in dergelijke paren, is de determinant zelf ook 0.
Eigenschap (3) volgt uit het feit dat de elementen a_{ij} van de identiteitsmatrix alleen ongelijk nul zijn als $i = j$. In dat geval is de waarde 1. Van de termen in de determinant blijft dus alleen de term $\mathrm{sign}(1, 2, \ldots, n)\; a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ over, en deze is gelijk aan 1.

□

Bovenstaande eigenschappen hadden we in Hoofdstuk 5 al voor het geval $n = 2, 3$ gezien. Hoewel de definitie van de determinant er vrij ingewikkeld uitziet, is het toch een natuurlijke voortzetting van het begrip georienteerd volume dat we in dimensies 2 en 3 gezien hebben. Dit blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 6.2.2 *Zij Δ een functie die aan ieder geordend n-tal $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ een waarde $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}$ toekent met de volgende eigenschappen,*

1. *Δ is lineair in elk van zijn argumenten. Dat wil zeggen, voor elke r, $1 \leq r \leq n$ geldt*

(a) *Voor elke* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^n$ *geldt,*

$$\Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'+\mathbf{a}'', \ldots, \mathbf{a}_n) = \Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}', \ldots, \mathbf{a}_n)+\Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'', \ldots, \mathbf{a}_n)$$

waarbij $\mathbf{a}'\mathbf{a}'', \mathbf{a}' + \mathbf{a}''$ *allen op de* r*-de plaats staan.*

(b) *Voor elke* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *en* $\lambda \in \mathbb{R}$ *geldt,*

$$\Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_r, \ldots, \mathbf{a}_n) = \lambda\Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

2. $\Delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{a}_n) = 0$ *als* $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_s$ *voor zekere* $r \neq s$.

3. $\Delta(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$*, waarin* $\mathbf{e}_i$ *de standaardbasis vectoren van* $\mathbb{R}^n$ *zijn.*

Dan geldt, $\Delta = \det$.

Hoewel het niet lastig is, zullen we geen bewijs van deze stelling geven. Wel laat deze stelling zien dat als we het bestaan van een volumefunctie aannemen die lineair is in elk van zijn argumenten en die nul is als twee vectoren hetzelfde zijn, we automatisch op het door ons gedefinieerde determinantbegrip terechtkomen.

6.3 Eigenschappen van determinanten

We leiden eerst een aantal andere nuttige eigenschappen van determinanten af.

Stelling 6.3.1 (Afgeleide eigenschappen determinant) *Zij* det *de determinantfunctie. Dan geldt,*

1. *De waarde van* $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *verandert niet als we* $\mathbf{a}_i$ *vervangen door* $\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j$ *met* $\lambda \in \mathbb{R}$ *en* $j \neq i$.

2. *De waarde van* $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *gaat in zijn tegengestelde over bij verwisseling van* $\mathbf{a}_i$ *en* $\mathbf{a}_j$ *met* $i \neq j$.

3. $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = 0$ *als* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *een afhankelijk stelsel is.*

Deze stelling zegt dus dat de waarde van een determinant niet verandert bij vegen van kolommen en dat de determinant in zijn tegengestelde verandert bij verwisseling van twee kolommen. Uit Stelling 6.2.1(1b) wisten we al dat de determinant met λ vermenigvuldigt als we een kolom met λ vermenigvuldigen.

Bewijs: Eerst bewijzen we eigenschap (1).

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + \lambda\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

Deze twee regels volgen uit de lineariteitseigenschap van det. De laatste detwaarde is nul omdat de vector $\mathbf{a}_j$ tweemaal als argument voorkomt. Dit volgt uit eigenschap (2) van Stelling 6.2.1. We houden dus over,

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Eigenschap (2) kunnen we inzien door herhaalde toepassing van eigenschap (1),

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,-\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= -\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt weer uit de lineariteit van det.
Eigenschap (3) volgt direct uit eigenschap (1). Stel bijvoorbeeld dat $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n$ dan geldt,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1-\lambda_2\mathbf{a}_2-\cdots-\lambda_n\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{0},\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=0\end{aligned}$$

□

Merk op dat het bewijs van Stelling 6.3.1 vrij direct volgt uit de eigenschappen van Stelling 6.2.1. Hier volgt nog een tweetal eigenschappen die direct uit de determinantdefinitie volgen.

Stelling 6.3.2 *Zij A een $n\times n$-matrix. Dan geldt,* $\det(A)=\det(A^t)$.

Bewijs: Stel $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Dan geldt,

$$\det(A)=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n\\ i_l\ne i_k}}\operatorname{sign}(i_1,i_2,\dots,i_n)a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

Deze schrijfwijze is zo gekozen dat de kolom-indices in de factoren a_{ij} in de oplopende volgorde $1,2,\dots,n$ staan. We gaan nu de factoren a_{ij} in elke term zodanig van volgorde verwisselen dat de eerste indices in de volgorde $1,2,\dots,n$. We krijgen dan $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ en nu staan de eerste indices in de permutatie $j_1,j_2,\dots,j_n$. Merk op dat $\operatorname{sign}(i_1,i_2,\dots,i_n)=\operatorname{sign}(j_1,j_2,\dots,j_n)$. Het aantal paarswisselingen nodig om $j_1,\dots,j_n$ uit $1,2,\dots,n$ te vormen is immers even groot als het aantal paarswisselingen nodig om $1,2,\dots,n$ uit $i_1,\dots,i_n$ te vormen. Verder, als we over de indices $i_1,\dots,i_n$ met $i_l\ne i_k$ sommeren, kunnen we net zo goed over de indices $j_1,\dots,j_n$ sommeren. Dus,

$$\det(A)=\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_n\\ j_l\ne j_k}}\operatorname{sign}(j_1,j_2,\dots,j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

Deze laatste uitdrukking is echter precies de determinant van de getransponeerde matrix A^t. Dus $\det(A)=\det(A^t)$.

□

Als gevolg van deze Stelling kunnen we de rol van rijen en kolommen in een matrix verwisselen. Samen met eigenschappen (1),(2) van Stelling 6.3.1 en (1b) van 6.2.1 geeft dit de volgende observatie.

Gevolg 6.3.3 *Zij A een $n \times n$-matrix. Dan geldt,*

> *De waarde van* $\det(A)$ *verandert niet als we een veelvoud van een rij of kolom optellen bij een andere rij, respectievelijk kolom.*
>
> *De waarde van* $\det(A)$ *gaat in zijn tegengestelde over als twee rijen verwisselen, of twee kolommen verwisselen.*
>
> *De waarde van* $\det(A)$ *wordt met λ vermenigvuldigd als we een rij of kolom met λ vermenigvuldigen.*

Een tweede belangrijke eigenschap is de volgende.

Stelling 6.3.4 *Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices. Dan geldt*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Bewijs: Geef de elementen van B aan met b_{ij}. De j-de kolomvector van A geven we aan met $\mathbf{a}_j$ voor $j = 1, 2, \ldots, n$. Ga nu zelf na dat de i-de kolomvector van AB gegeven wordt door $b_{1i}\mathbf{a}_1 + b_{2i}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{ni}\mathbf{a}_n$ ofwel $\sum_j b_{ji}\mathbf{a}_j$. We gaan nu de lineariteit van de determinantfunctie gebruiken,

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\left(\sum_{i_1} b_{i_1 1}\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n} b_{i_n n}\mathbf{a}_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n})
\end{aligned}$$

De waarde $\det(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n})$ is nul als $i_k = i_l$ voor zekere $k \neq l$. Als alle i_k verschillend zijn, is $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n}$ een permutatie van $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ en we hebben $\det(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n}) = \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n)\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Conclusie,

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(B)\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(B)\det(A)
\end{aligned}$$

□

Tenslotte geeft een determinant van een matrix A een numeriek criterium om te zien of A al of geen maximale rang heeft.

Stelling 6.3.5 *Zij A een $n \times n$-matrix. Dan zijn de volgende beweringen equivalent,*

1. $\mathrm{rang}(A) = n$
2. *A is inverteerbaar*
3. $\det(A) \neq 0$

Bewijs: Dat (2) uit (1) volgt hadden we al eerder gezien bij het oplossen van lineaire vergelijkingen. Stel nu dat A inverteerbaar is. Dan is er een $n \times n$-matrix B zó dat $I_n = AB$. Neem aan beide zijden de determinant. We vinden $1 = \det(AB) = \det(A)\det(B)$. Hieruit zien we dat $\det(A) \neq 0$. Dus deel (2) impliceert deel (3). Stel tenslotte dat $\det(A) \neq 0$. Dan kunnen de rijen van A nooit afhankelijk zijn want Stelling 6.3.1(3) zegt dat de determinant nul is in dat geval. Conclusie, $\mathrm{rang}(A) = n$ en de implicatie (3)⇒(1) is bewezen.

□

6.4 De berekening van determinanten

De snelste methode om een determinant te berekenen is met behulp van Gevolg 6.3.3 waarmee we een Gauss-Jordan-eliminatie kunnen nabootsen. Om te laten zien wat we bedoelen geven we hier een illustratie.
We gaan

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \tag{6.2}$$

berekenen. We kunnen veelvouden van rijen bij andere rijen kunnen optellen zonder dat de waarde verandert. Tel de eerste bij de derde rij op. We krijgen

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

We verwisselen de tweede en derde rij en gebruiken de nieuwe tweede rij om de derde en vierde rij te vegen,

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \tag{6.3}$$

Let op, het $-$teken is ontstaan door de rijverwisseling. Tenslotte kunnen we de elementen boven de diagonaal nul maken door Gauss-Jordan-reductie,

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

We gebruiken nu de lineariteit van de volumefunctie en vinden,

$$\Delta = -(-35) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 35.$$

Als we daarmee tot een sneller resultaat komen, kunnen we gedurende dit proces ook veelvouden van kolommen bij andere kolommen optellen, of kolommen verwisselen.
Als we er goed over nadenken, zien we dat we vanaf formule (6.3) kunnen zien wat de determinant gaat worden. De matrix staat in bovendriehoeksvorm en de determinant wordt gewoon het product van de diagonaalelementen van de bovendriehoeksmatrix. We vatten dit expliciet samen.

Stelling 6.4.1 *Zij A een $n \times n$ bovendriehoeksmatrix met op de diagonaal de elementen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Dan geldt*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Dezelfde uitspraak geldt voor een benedendriehoeksmatrix.

Een tweede manier om determinanten uit te rekenen is door *ontwikkeling naar een rij of kolom.* We geven eerst een beschrijving van dit proces.

Stelling 6.4.2 *Zij gegeven een $n \times n$-matrix A. Voor elke i, j geven we met A_{ij} de $(n-1) \times (n-1)$- matrix aan, die we krijgen als we uit A de i-de rij en j-de kolom wegstrepen. Dan,*

1. *Voor elke i geldt dat* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
2. *Voor elke j geldt dat* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

In het eerste geval spreken we van ontwikkeling van de determinant naar de i-de rij (de kolom-index j laten we immers lopen) in het tweede geval spreken van een ontwikkeling naar de j-de kolom (nu loopt de rij-index i op).

Voorbeeld 6.4.3. Hier volgt als voorbeeld de ontwikkeling van onze voorbeelddeterminant (6.2) naar de tweede rij,

$$-0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} +(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Elk van de drie bij drie determinanten kunnen we weer naar een rij of kolom ontwikkelen en we gaan zo door tot we alleen één bij één determinanten hebben, m.a.w. getallen.

$\diamondsuit$

Bewijs: De reden dat we determinanten naar hun kolommen kunnen ontwikkelen berust op het feit dat

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A_{11}) \qquad (6.4)$$

Dit kunnen we direct uit formule (6.1) zien. We zijn nu in het geval dat $a_{i_1 1} = 1$ als $i_1 = 1$ en $a_{i_1 1} = 0$ als $i_1 \neq 1$. Alleen de termen met $i_1 = 1$ geven dus een bijdrage. De overige indices $i_2, i_3, \dots, i_n$ zijn dus een permutatie van $2, 3, \dots, n$ en $\text{sign}(1, i_2, \dots, i_n) = \text{sign}(i_2, \dots, i_n)$. We houden de formule voor de determinant $\det(A_{11})$ over.
Stel nu dat we de determinant van een matrix willen hebben waarvan de j-de kolom nullen bevat, op de i-de plaats na, waar een 1 staat.

$$\Delta_{ij} := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

We verwisselen nu de j-de kolom met de $j-1$-de kolom, vervolgens met de $j-2$-de kolom enzovoorts, tot hij helemaal links staat,

$$\Delta_{ij} := (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vervolgens verwisselen we de i-de rij met de $i-1$-de rij, dan de $i-2$-de, enzovoorts, tot deze rij bovenaan staat,

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Merk op dat deze determinant weer de gedaante van (6.4) heeft, met de matrix A_{ij} in het rechteronder deel. Deze determinant is dus gelijk aan $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.
Stel nu dat we een willekeurige determinant $\det(A)$ moeten uitrekenen. Gebruik makend van de lineariteit van de determinant in de j-de kolom vinden we dat

$$\det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

Met bovenstaande afleiding voor Δ_{ij} geeft dit,

$$\det(A) = (-1)^{j+1}a_{1j}\det(A_{1j}) + (-1)^{j+2}a_{2j}\det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{j+n}a_{nj}\det(A_{nj}).$$

Hiermee hebben we de algemene ontwikkeling van een determinant naar de j-de kolom. Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat we determinanten naar een rij kunnen ontwikkelen.

$\square$

Met bovenstaande notaties noemen we $\det(A_{ij})$ de *onderdeterminant* van A behorend bij de plaats i, j. Het element $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ noemen we de *minor* van A behorend bij plaats i, j.

6.5 De VanderMonde determinant (optioneel)

In de praktijk gebeurt het heel vaak dat de determinant van een matrix met een regelmatig patroon een verrassend eenvoudig antwoord heeft. Het beste voorbeeld hiervan is de *VanderMonde determinant* .

Stelling 6.5.1 *Voor elke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geldt,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Bewijs: Het bewijs van deze stelling gaat met volledige inductie naar n. Voor $n = 2$ is de Stelling duidelijk, we berekenen direct

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Stel nu $n > 2$ en dat de Stelling waar is voor $(n-1) \times (n-1)$ VanderMonde determinanten. In de $n \times n$-determinant trekken we nu x_n maal de $n-1$-de rij van de n-de rij af. Vervolgens x_n maal de $n-2$-de rij van de $n-1$-de rij enzovoort. Als laatste trekken we x_n maal de eerste rij van de tweede af. We houden de volgende determinant over,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \ldots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1^2 - x_n x_1 & x_2^2 - x_n x_2 & \ldots & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

De laatste kolom bestaat uit nullen, behalve op de eerste plaats, waar een 1 staat. De determinant is dus gelijk aan de $(n-1) \times (n-1)$-determinant

$$(-1)^n \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \ldots & x_{n-1} - x_n \\ x_1^2 - x_n x_1 & x_2^2 - x_n x_2 & \ldots & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Merk nu op dat alle termen van de eerste kolom deelbaar zijn door $x_1 - x_n$. De termen van de tweede kolom zijn allen deelbaar door $x_2 - x_n$, enzovoort. We gebruiken nu de lineariteit van de determinant in de kolommen om deze factoren eruit te halen. We krijgen,

$$(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

De laatste determinant is een $(n-1) \times (n-1)$ VanderMonde determinant. Volgens onze inductieveronderstelling is deze gelijk aan $\prod_{1 \le i < j \le n-1}(x_j - x_i)$. Onze $n \times n$- determinant wordt hiermee

$$(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Hiermee is de inductiestap voltooid.

□

De VanderMonde determinant komt op veel verschillende plaatsen in de wiskunde voor. Hier is een kleine toepassing. Onder een *polynoom* of *veelterm* verstaan we een functie van de vorm $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, waarin de p_i reële of complexe getallen zijn. We nemen aan dat $p_n \neq 0$. We zeggen dan dat $P(x)$ graad n heeft. Een *nulpunt* van $P(x)$ is een reëel of complex getal a zó dat $P(a) = 0$. Je weet dat een kwadratisch (=tweede graads) polynoom nooit meer dan 2 nulpunten kan hebben. Dit geldt ook in het algemeen.

Stelling 6.5.2 *Zij $P(x)$ een polynoom van graad n. Dan heeft $P(x)$ niet meer dan n verschillende nulpunten.*

Bewijs: Stel namelijk dat $P(x)$ meer dan n nulpunten heeft. Neem daarvan $n+1$ stuks en noem ze $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Dan geldt

$$p_n a_i^n + p_{n-1} a_i^{n-1} + \cdots + p_2 a_i^2 + p_1 a_i + p_0, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

We kunnen nu de zaak omdraaien door de punten $a_1, \dots, a_{n+1}$ als gegeven te beschouwen en de vergelijkingen als een stelsel van $n+1$ lineaire vergelijkingen in de $n+1$ onbekenden $p_n, \dots, p_1, p_0$ te zien. Omdat $p_n \neq 0$ voor ons gegeven polynoom, bestaat er een niet-triviale oplossing. Dit betekent volgens Stelling 6.3.5 dat de coëfficientendeterminant nul is. Met andere woorden,

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^n & a_2^{n-1} & \dots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} & \dots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Anderzijds is deze determinant een VanderMonde determinant, waarvan de waarde gelijk is aan $\prod_{1\le i<j\le n+1}(a_j - a_i)$. Omdat de nulpunten a_i allen verschillend zijn, is dit product ongelijk nul. Dit is in tegenspraak met het nul worden van de coëfficientendeterminant. We concluderen dat we niet meer dan n nulpunten kunnen hebben.

□

6.6 Regel van Cramer

In de eerste paragraaf hebben we erop gewezen dat determinanten van oudsher optreden bij de oplossing van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

De coefficientenmatrix van dit stelsel geven we aan met A. De i-de kolomvector van A geven we aan met $\mathbf{a}_i$. De kolom bestaande uit de b_i geven we aan met $\mathbf{b}$. De oplossing van ons stelsel wordt door de volgende stelling gegeven.

Stelling 6.6.1 (Regel van Cramer) *Stel* $\det(A) \neq 0$. *Dan heeft het stelsel vergelijkingen een unieke oplossing* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *gegeven door*

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)}$$

voor $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bewijs: Omdat $\det(A) \neq 0$ weten we dat er een unieke oplossing $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestaat. Dat wil zeggen, $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$. Merk nu op dat

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}&, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, x_i\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= x_i\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)
\end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt uit het feit dat we x_j maal de j-de kolom kunnen aftrekken van de i-de kolom voor elke $j \neq i$. Uit de laatste regel volgt onze formule voor x_i direct.

□

6.7 Geadjungeerde en inverse

Stel dat A een $n \times n$-matrix is met $\det(A) \neq 0$. Geef, net als in de vorige paragraaf, de kolommen aan met $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Kies j en los het stelsel vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ op. Volgens de regel van Cramer wordt de oplossing gegeven door

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2 \ldots, n.$$

Merk nu op dat de determinant in de teller precies de minor Δ_{ij} van A is op plaats i, j. De oplossingsvector wordt dus gegeven door

$$\frac{1}{\det(A)}(\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \ldots, \Delta_{in})^t.$$

Tevens is de oplossingsvector voor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ precies de i-de kolom van A^{-1}. Conclusie, de inverse matrix van A wordt gegeven door de formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

We hebben de volgende stelling bewezen.

Stelling 6.7.1 *Zij A een inverteerbare $n \times n$-matrix. Dan wordt het element van A^{-1} op plaats i, j gegeven door*

$$\Delta_{ji}/\det(A) = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})/\det(A).$$

Let op, de indices i, j zijn verwisseld in deze formule! De matrix met het element $(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ op plaats i, j noemen we de *geadjungeerde matrix* van A. Notatie: $\mathrm{Ad}(A)$. Er geldt het volgende.

Stelling 6.7.2 *Zij A een $n \times n$-matrix en $\mathrm{Ad}(A)$ zijn geadjungeerde. Dan geldt dat $A\mathrm{Ad}(A) = \mathrm{Ad}(A)A = \det(A)I_n$.*

Voorbeeld 6.7.3. Stel, we willen de inverse van

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

bepalen met behulp van de geadjungeerde. De determinant van A is -3. De eerste rij van $\mathrm{Ad}(A)$ vinden we door de onderdeterminanten te bepalen behorend bij de eerste kolom van A en die van $\pm$ te voorzien. Dat worden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

De tweede rij van de geadjungeerde krijgen we door de tweede kolom van A af te lopen:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7, \ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

En tenslotte de derde rij van $\mathrm{Ad}(A)$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

We concluderen dat de inverse van A wordt gegeven door

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -5 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Het kan zijn dat je er sneller uit was gekomen als je veegprocedure had toegepast, maar dat hangt helemaal van de situatie af waarin we verkeren. Het is in elk geval goed om op de hoogte te zijn van het bestaan van een formule voor de inverse van een matrix.

$\diamondsuit$

6.8 Opgaven

Opgave 6.8.1 Bepaal de volgende determinanten door in zelfgekozen rijen of kolommen te ontwikkelen,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Opgave 6.8.2 Bepaal de volgende determinanten door in zelfgekozen rijen of kolommen te ontwikkelen,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Opgave 6.8.3 Bepaal de volgende determinanten door in zelfgekozen rijen of kolommen te ontwikkelen,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$$

Opgave 6.8.4 Er is gegeven dat

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4.$$

Bepaal de volgende determinanten

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-b & a+b & c \\ d-e & d+e & f \\ g-h & g+h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b+2a & e+2d & h+2g \\ -c & -f & -i \end{vmatrix}$$

Opgave 6.8.5 Bereken de volgende determinanten

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Opgave 6.8.6 Bereken de volgende determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Opgave 6.8.7 Stel $n \geq 2$. Ga na van de volgende uitspraken na of hij waar of onwaar is voor elke tweetal $n \times n$-matrices A en B

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
3. $\det(A^k) = \det(A)^k$ voor elke gehele $k \geq 0$.
4. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ (mits $\det(A) \neq 0$).
5. $\det(\lambda A) = \lambda\det(A)$.

Opgave 6.8.8 Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Opgave 6.8.9 Bovenstaande determinant heeft het volgende patroon. Een $n \times n$ matrix A met overal nullen, behalve op de plaats van een $r \times r$ deelmatrix R en een $s \times s$ deelmatrix S, zodat $r + s = n$ en R en S hebben geen gemeenschappelijke rijen of kolommen. Verder liggen de diagonalen van R en S op die van A. Bewijs dat $\det(A) = \det(R)\det(S)$

Opgave 6.8.10 In $\mathbb{R}^2$ is een drietal rechte lijnen gegeven door vergelijkingen van de vorm $a_i x + b_i y = c_i$ voor $i = 1, 2, 3$, waarbij $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ voor $i = 1, 2, 3$. Bewijs: als de drie lijnen door één punt gaan, dan geldt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

De omkering geldt niet altijd: geef een drietal lijnen waarvoor bovenstaande determinant nul is, maar die niet door één punt gaan.

Opgave 6.8.11 Gebruik de regel van Cramer om de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen,

1. $$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = 3 \\ x_1 & - & x_2 & = -1 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{cccc} x_1 & + & 3x_2 & = 4 \\ x_1 & - & x_2 & = 0 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{cccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & = 0 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = -4 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = a \\ & & x_2 & + & x_3 & = b \\ & & & & x_3 & = c \end{array}$$

Opgave 6.8.12 Bepaal de geadjungeerde en inverse (indien deze bestaat) van de volgende matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 6.8.13 Laat zien dat de volgende determinanten nul zijn (door handig te redeneren)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix}$$

Opgave 6.8.14 Zij A een $n \times n$-matrix met gehele getallen coëfficienten. Bewijs

$$A^{-1} \text{ heeft gehele coefficienten } \iff \det(A) = \pm 1.$$

Opgave 6.8.15 De vergelijking van een cirkel in het platte vlak met middelpunt (a, b) en straal r luidt: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Uitgeschreven: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.
Stel we hebben vier punten (x_i, y_i) met $i = 1, 2, 3, 4$ waarvan we weten dat ze op een cirkel liggen. Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Geldt de omkering ook, dat wil zeggen als de determinant nul is, liggen de vier punten (x_i, y_i) dan op een cirkel?

6.9 Extra opgaven

Opgave 6.9.1 (Lastig) Zij $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ een tweetal vectoren in $\mathbb{R}^n$. Stel dat het oppervlak O van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ gelijk is aan $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin \phi|$ waarin ϕ de hoek is tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Laat zien dat

$$O^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Opgave 6.9.2 Bereken

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ a^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix}$$

Opgave 6.9.3 Bereken (met gebruikmaking van volledige inductie) de volgende $n \times n$-determinanten,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Opgave 6.9.4 Bereken de $n \times n$-determinanten

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & 1 & x & \cdots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Opgave 6.9.5 Zij gegeven de $n \times n$-determinant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Bewijs dat $\Delta_n = x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

Opgave 6.9.6 Het Kroneckersymbool δ_{ij} wordt gegeven door $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$. Zij $x_1, \cdots, x_n$ een willekeurig n-tal scalairen. Zij M de $n \times n$-matrix met op plaats i, j het element $\delta_{ij} + x_i x_j$. Bewijs dat $\det(M) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Opgave 6.9.7 Bewijs,

$$\begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1,n-1} & 1 \\ a_1 & x & b_{23} & b_{24} & \dots & b_{2,n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & b_{34} & \dots & b_{3,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k).$$

Opgave 6.9.8 Stel $n \geq 3$. Bewijs dat voor elke keuze van a_i, b_j geldt:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Opgave 6.9.9 Bewijs,

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$$

Opgave 6.9.10 Bewijs dat als $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Hoofdstuk 7

Vectorruimten

7.1 Axioma's

Tot nu toe hebben we het uitsluitend over $\mathbb{R}^n$ gehad. In de geschiedenis van de wiskunde blijkt dat veel andere verzamelingen ook gezien kunnen worden als vectorruimten. Met name oplossingsverzamelingen van lineaire differentiaalvergelijkingen. Misschien is dit niet één-twee-drie duidelijk, maar we zullen er later in dit hoofdstuk op terugkomen. Voorbeelden waarvan je je misschien wel kunt voorstellen dat ze $\mathbb{R}^n$ generaliseren zijn bijvoorbeeld de oneindige rijtjes reële getallen, aan te geven met $\mathbb{R}^\infty$.
Een andere generalisatie is om de reële getallen los te laten en in andere getalsystemen te rekenen. Bijvoorbeeld, we kunnen naar verzameling vectoren $(x_1, \ldots, x_n)$ met $x_i \in \mathbb{C}$ kijken en deze ruimte $\mathbb{C}^n$ noemen. Matrixvermenigvuldiging, oplossing van lineaire vergelijkingen, lineaire deelruimten, determinanten, dit alles zou even goed kunnen plaats vinden met complexe getallen. Ook gaan onze stellingen over rang en dimensie onveranderd door. Evenzo kunnen we kijken naar $\mathbb{Q}^n$. Om niet alles tegelijk te generaliseren beperken we ons voorlopig tot vectorruimten met scalairen $\mathbb{R}$.
De belangrijkste idee is dat we vectoren zien als objecten die los staan van hun beschrijving door coördinaten, vaak hebben we die niet eens nodig. We concentreren ons op de belangrijkste eigenschappen van vectoren, namelijk dat er een optelling en scalaire vermenigvuldiging bestaan. De rest, zoals coördinaten, komt later als dat nodig mocht blijken.
Een *vectorruimte over* $\mathbb{R}$ is een niet-lege verzameling V met daarin een optelling $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$ en een scalaire vermenigvuldiging $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V \mapsto \lambda\mathbf{x}$ die voldoet aan de volgende eigenschappen.

1. Voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2. Voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ geldt $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

3. Bij elke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ is er een uniek bepaalde $\mathbf{z} \in V$ zó dat $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$.

4. Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\mathbf{x} \in V$ geldt $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

5. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

6. Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$

7. Voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

De elementen van V noemen we *vectoren.* Allereerst een aantal belangrijke opmerkingen.

1. We noemen de oplossing $\mathbf{z}$ in eigenschap (3) het *verschil* van de vectoren $\mathbf{y}$ en $\mathbf{x}$. Notatie: $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

2. Er is een uniek bepaald element $\mathbf{0} \in V$ zó dat $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ voor alle $\mathbf{x} \in V$. Om te zien dat zo'n element bestaat kiezen we $\mathbf{v} \in V$ (dat kan, V is immers niet leeg) en nemen $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v}$. Dus $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$. Zij nu $\mathbf{x}$ willekeurig en tel aan beide zijden $\mathbf{x} - \mathbf{v}$ op. We vinden $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} + \mathbf{0} = (\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$. Per definitie geldt dat $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{x}$. Onze gelijkheid gaat dus over in $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$. Het element $\mathbf{0}$ heeft dus de gewenste eigenschap.

   Nu moeten we ons er nog van overtuigen dat er maar één element is met deze eigenschap. Maar dat volgt uit het feit dat er volgens eigenschap (3) precies één element $\mathbf{n}$ is zó dat $\mathbf{v} + \mathbf{n} = \mathbf{v}$ en dat moet dus wel $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ zijn.

3. Voor elke $\mathbf{x} \in V$ geldt $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dit zien we uit het feit dat $\mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = (1 + 0)\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Aangezien $\mathbf{0}$ de unieke vector is met de eigenschap dat $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ concluderen we dat $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4. Voor elke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{y} + (-1) \cdot \mathbf{x}$. Stel $\mathbf{z} = \mathbf{y} + (-1) \cdot \mathbf{x}$. Dan geldt $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + (-1) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} + (1 - 1)\mathbf{x} = \mathbf{y} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Hieruit zien we dat ook $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

   Voortaan noteren we $\mathbf{0} - \mathbf{x}$ als $-\mathbf{x}$. In het bijzonder geldt $-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}$.

Hier zijn een aantal voorbeelden van vectorruimten. Ga van elk van de voorbeelden na dat ze inderdaad een vectorruimte vormen.

1. De intuïtieve vectoren uit onze inleiding.

2. De verzamelingen $\mathbb{R}^n$ (eindige rijen van lengte n van elementen uit $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\infty$ (oneindige rijen) en $\mathbb{R}_0^\infty$ (oneindige rijen met eindig veel termen $\neq 0$) vormen vectorruimten over $\mathbb{R}$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn de gebruikelijke coördinaatsgewijze bewerkingen.

3. De verzameling van $m \times n$-matrices met elementen uit $\mathbb{R}$ en gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging vormen een vectorruimte over $\mathbb{R}$.

4. De verzameling van polynomen
$$\{a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$
   met de voor de hand liggende optelling en scalaire vermenigvuldiging. Notatie: $\mathbb{R}[X]$

5. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval. De verzameling van continue functies $f : I \to \mathbb{R}$ vormen een vectorruimte over $\mathbb{R}$ als we optelling en scalaire vermenigvuldiging als volgt kiezen:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Notatie: $C^0(I)$.

6. In plaats van bovenstaand voorbeeld kunnen we natuurlijk ook de verzameling van continu differentieerbare functies, $(C^1(I))$ oneindig vaak differentieerbare functies $(C^\infty(I))$, of willekeurige functies nemen.

7. De complexe getallen vormen een vectorruimte over $\mathbb{R}$ als we gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging nemen.

Definitie 7.1.1 (Deelruimte) *Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $W \subset V$ een deelverzameling. We noemen W een (lineaire) deelruimte van V als de volgende eigenschappen gelden:*

1. $\mathbf{0} \in W$.

2. Als $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ *dan* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.

3. Als $\lambda \in \mathbb{R}$ *en* $\mathbf{x} \in W$ *dan* $\lambda \mathbf{x} \in W$

Stelling 7.1.2 *Een lineaire deelruimte W van een vectorruimte V is zelf ook een vectorruimte als we de optelling en scalaire vermenigvuldiging uit V nemen.*

Bewijs: Zij W een deelruimte van V. Uit de definitie van deelruimte volgt dat we in W een optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren hebben. Omdat deze optelling en vermenigvuldiging aan de axioma's voor de ruimte V voldoen, voldoen ze zeker ook als we ons beperken tot de vectoren in W. Daarmee is W zelf ook een vectorruimte.

□

Voorbeelden van deelruimten.

1. $V = \mathbb{R}^n$ en W is oplossingsverzameling van een stelsel homogene lineaire vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (Deze kenden we al).

2. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $V = C^0(I)$. Dan zijn $C^1(I)$ en $C^\infty(I)$ voorbeelden van lineaire deelruimten.

3. Zij $V = \mathbb{R}[X]$. Dan zijn de volgende deelverzamelingen ook deelruimten
   (a) Kies $n \in \mathbb{N}$. De polynomen met graad $\leq n$. Notatie: $\mathbb{R}[X]_n$.
   (b) De verzameling $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ met $p(1) = 0$. Of algemener, kies $a \in \mathbb{R}$ en neem als W de verzameling polynomen met $p(a) = 0$.

4. $V = \mathbb{R}^\infty$. Ga na dat de volgende deelverzamelingen lineaire deelruimten zijn:

(a) $\mathbb{R}_0^\infty$: de verzameling van alle $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ met $x_n = 0$ als n groot genoeg is.

(b) l^∞: de verzameling $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ zó dat $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) l^2: (lastig) de verzameling $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ zó dat $\lim_{n\to\infty} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ bestaat.

Ga tevens na dat we in dit voorbeeld de inclusies

$$\mathbb{R}_0^\infty \subset l^2 \subset l^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$$

hebben.

5. Gegeven een vectorruimte V over $\mathbb{R}$ en een eindige verzameling vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Het *opspansel* van deze vectoren gegeven door

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

is een lineaire deelruimte van V.

6. Gegeven een vectorruimte V over $\mathbb{R}$ en een willekeurige deelverzameling $S \subset V$. De verzameling van alle (eindige) lineaire combinaties van elementen uit S noemen we het *opspansel* van S. Notatie: Span(S). Merk op dat Span(S) ook een lineaire deelruimte van V is.

   Verder geldt voor elke deelruimte $W \subset V$ met de eigenschap $S \subset W$, dat alle lineaire combinaties van elementen uit S ook in W bevat moeten zijn. Met andere woorden, Span(S) $\subset W$. Op deze manier kunnen we Span(S) zien als de kleinste deelruimte die een gegeven verzameling S omvat.

7.2 Afhankelijkheid

Ook in onze abstracte vectorruimten hanteren we het begrip (on)afhankelijkheid. Stel we hebben een vectorruimte V over het lichaam $\mathbb{R}$ en zij $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ een r-tal vectoren in V. Een *lineaire combinatie* van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ is een vector van de vorm

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r$$

waarin $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. Onder een *(lineaire) relatie* tussen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ verstaan we een lineaire combinatie die de nulvector oplevert.

Definitie 7.2.1 *Zij V een vectorruimte over het lichaam $\mathbb{R}$. Een r-tal vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ noemen we (lineair) onafhankelijk als de enige relatie*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ de triviale is, dat wil zeggen $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. We noemen de vectoren (lineair) afhankelijk als er een niet-triviale relatie bestaat.

We kunnen ook lineaire onafhankelijkheid voor willekeurige verzamelingen definiëren (dus ook oneindige verzamelingen).

Definitie 7.2.2 *Zij V een vectorruimte over het lichaam $\mathbb{R}$. Een deelverzameling $S \subset V$ heet (lineair) onafhankelijk als elke eindige deelverzameling van S onafhankelijk is.*

We kunnen nu ook het begrip rang invoeren.

Definitie 7.2.3 *Zij V een vectorruimte en $S \subset V$ een niet lege verzameling vectoren. Het grootste getal r, zó dat S een r-tal onafhankelijke vectoren bevat, noemen we de rang van S. Notatie:* $\text{rang}(S)$.
In het bijzonder, als $S = \{\mathbf{0}\}$, dan zeggen we dat $\text{rang}(S) = 0$.
Als S een deelruimte is dan noemen we de rang van S ook wel dimensie. Notatie: $\dim(S)$.
Als r niet bestaat, dan zeggen we dat de rang (of dimensie) van S oneindig is.

We kunnen alleen $r = \infty$ hebben als S voor elke positief gehele r een r-tal onafhankelijke vectoren bevat.
De volgende stelling hebben we ook al in Hoofdstuk 4 gezien. Het bewijs gaat op precies dezelfde manier, dus zullen we dat niet herhalen.

Stelling 7.2.4 (Hoofdstelling) *Zij V een vectorruimte en $S \subset V$ een verzameling vectoren en stel dat S bevat is in het opspansel van n vectoren $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Dan geldt dat* $\text{rang}(S) \leq n$.

Het begrip basis hebben we ook in Hoofdstuk 4 gezien, met als enige subtiliteit dat hier een basis uit oneindig veel elementen kan bestaan.

Definitie 7.2.5 *Zij V een vectorruimte $S \subset V$ een verzameling vectoren. Een deelverzameling $B \subset S$ heet een basis van S als*

1. *B onafhankelijk is, en*
2. *elke $\mathbf{v} \in S$ afhankelijk is van B (dat wil zeggen $\mathbf{v}$ is een lineaire combinatie van een eindig aantal elementen uit B).*

In deze definitie hebben we het woord eindig onderstreept om duidelijk te maken dat we in dit stadium niet kunnen spreken over lineaire combinatie van een oneindig aantal elementen. Om over oneindige sommen te kunnen spreken hebben we ook een convergentiebegrip nodig. In een aantal gevallen zullen we deze later zien. Vooralsnog hebben oneindige sommen geen betekenis in de lineaire algebra.
Bij abstracte vectorruimten kan het gebeuren dat er helemaal geen eindige basis bestaat. In dat geval bevat de vectorruimte een oneindige onafhankelijke deelverzameling en waarmee de dimensie van V oneindig is. In dergelijke gevallen kan het gebeuren dat we een oneindige basis kunnen aanwijzen, maar veel vaker gebeurt het dat er helemaal geen basis aangegeven kan worden.
Twee mooie voorbeelden worden gegeven door $\mathbb{R}^\infty$ bestaande uit de oneindige rijen reële getallen, en $\mathbb{R}^\infty_0$, bestaande uit de oneindige rijen reële getallen die

vanaf zeker moment nul zijn. De vectoren

$$\begin{gathered}(1,0,0,0,\ldots)\\(0,1,0,0,\ldots)\\(0,0,1,0,\ldots)\\\cdots\end{gathered}$$

vormen een basis van $\mathbb{R}_0^\infty$. Ga zelf na dat dit zo is. Begrijp je ook waarom bovenstaand stelsel geen basis van $\mathbb{R}^\infty$ is?
Analoog, en met het zelfde bewijs als in Stelling 4.2.4 kunnen we hier ook eindige bases karakteriseren.

Stelling 7.2.6 *Zij S een verzameling vectoren van rang n. Dan geldt:*

1. *Elke basis van S bestaat uit n vectoren.*
2. *Elk onafhankelijk stelsel vectoren uit S bestaande uit n vectoren is een basis van S.*

Hier volgt een aantal voorbeelden van (on)afhankelijke verzamelingen en eventuele bases van vectorruimten.

Voorbeeld 7.2.7. Beschouw de vectorruimte over $\mathbb{R}$ bestaande uit de reëelwaardige continue functies op $]0,1[$. We geven deze aan met $C^0(]0,1[)$. De rol van de nulvector in deze ruimte wordt gespeeld door de constante functie 0. Als voorbeeld laten we zien dat $1/x, 1/x^2, 1/(1-x)$ onafhankelijk zijn. Stel namelijk

$$a\frac{1}{x}+b\frac{1}{x^2}+c\frac{1}{1-x}\equiv 0$$

voor zekere $a,b,c\in\mathbb{R}$. Met het $\equiv$-teken geven we hier nog een keer extra aan dat het om een gelijkheid van functies gaat. Dat wil zeggen dat de gelijkheid geldt voor alle keuzen van x.
Om onafhankelijkheid aan te tonen kunnen we een aantal waarden van x kiezen. Neem bijvoorbeeld achtereenvolgens $x=1/3,1/2,2/3$. We vinden dan,

$$\begin{aligned}3a+9b+3c/2 &= 0\\2a+4b+2c &= 0\\3a/2+9b/4+3c &= 0\end{aligned}$$

Oplossing van dit stelsel leert dat $a=b=c=0$. Met andere woorden, alleen de triviale relatie geldt, en de functies zijn onafhankelijk.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.2.8. De ruimte $C(\mathbb{R})$ van continue functies op $\mathbb{R}$. De nulvector in deze ruimte is de triviale functie 0. Beschouw de functies $f_0,f_1,f_2,\ldots$ gegeven door $f_m(x)=e^{mx}$. Wij beweren dat de functies $f_0,f_1,\ldots,f_n$ onafhankelijk zijn voor elke gehele n. Stel dat er $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ bestaan, zó dat

$$a_nf_n+a_{n-1}f_{n-1}+\cdots+a_1f_1+a_0f_0=0$$

Anders gezegd,

$$a_n e^{nx} + a_{n-1} e^{(n-1)x} + \cdots + a_1 e^x + a_0$$

is identiek gelijk nul voor alle keuzen van x. Anders geschreven, $P(e^x) = 0$ voor alle x, waarin

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Anders gezegd, het polynoom $P(X)$ heeft oneindig veel verschillende nulpunten, namelijk $X = e^x$ met $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als $P(X)$ een niet-triviaal polynoom zou zijn, dan kunnen er hooguit n nulpunten zijn. We moeten dus concluderen dat $P(X)$ het triviale polynoom is. Met andere woorden, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.
In het bijzonder zien we dat het opspansel van $f_0, f_1, f_2, \ldots$ in $C(\mathbb{R})$ een oneindigdimensionale deelruimte van $C(\mathbb{R})$ is.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.2.9. Oplossingen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n}{dx^n} y + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots + p_1(x) \frac{d}{dx} y + p_0(x) y = 0$$

waarin de $p_i(x)$ voldoende vaak differentieerbare functies in het open interval $(-1, 1)$ zijn (je kunt natuurlijk ook andere open intervallen kiezen). We kunnen de vergelijking iets korter schrijven door

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0.$$

Zij V de verzameling oplossingen van deze vergelijking. Ga zelf het volgende na: als y_1, y_2 twee oplossingen zijn en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan zijn $y_1 + y_2$ en λy_1 ook oplossingen. Met andere woorden, V is een vectorruimte ten aanzien van de gewone optelling en scalaire vermenigvuldiging van functies.
Uit de theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen volgt dat de dimensie van V gelijk is aan n. Met andere woorden, er bestaan n onafhankelijke oplossingen $y_1, \ldots, y_n$ van onze differentiaalvergelijking zo dat iedere iedere oplossing in de vorm $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ te schrijven is met $\lambda_i \in \mathbb{R}$ voor alle i.
Hier volgen een paar specifieke voorbeelden.

1. $$\frac{d^n}{dx^n} y = 0.$$

   De verzameling oplossingen bestaat uit alle polynomen van graad $< n$,

   $$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x^{n-1}.$$

2. $$\frac{d^2}{dx^2} y - 3 \frac{d}{dx} y + 2y = 0.$$

   Laten we een oplossing van de vorm $y = e^{\lambda x}$ voor nog nader te bepalen $\lambda \in \mathbb{R}$ proberen. Invullen in de vergelijking geeft $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) e^{\lambda x} = 0$, waaruit volgt $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ en dus $\lambda = 1$ of 2. Twee oplossingen zijn dus e^x en e^{2x} en volgens de theorie spannen deze de volledige oplossingsverzameling op.

3.
$$\frac{d^2}{dx^2}y - xy = 0.$$

Deze vergelijking is niet met de ons bekende klassieke functies op te lossen en we moeten oneindige Taylorontwikkelingen in de strijd gooien. Dit zullen we hier niet doen, maar wel opmerken dat desondanks de oplossingsruimte een vectorruimte over $\mathbb{R}$ van dimensie 2 is.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.2.10. De vectorruimte van complexe getallen over $\mathbb{R}$. Elk complex getal kan op unieke manier geschreven worden als $a + b\sqrt{-1}$. Hieruit volgt dat $1, \sqrt{-1}$ een basis van onze vectorruimte is. De dimensie van $\mathbb{C}$ over $\mathbb{R}$ is dus twee.

$\diamondsuit$

7.3 Lineaire afbeeldingen

Van bijzonder belang zijn afbeeldingen tussen vectorruimten die de vectorruimtestructuur intact laten. Om wat preciezer te zijn, zij V, W een tweetal vectorruimten over het scalairenlichaam $\mathbb{R}$. Een *lineaire afbeelding* $A : V \to W$ is een afbeelding met de volgende eigenschappen

1. Voor elke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$.
2. Voor elke $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$ geldt $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$.

Om wat houvast te hebben, matrixvermenigvuldiging is het standaardvoorbeeld van een lineaire afbeelding. Preciezer, zij M een $m \times n$-matrix met reële coëfficienten. De afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die aan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de vector $M\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ toekent, is een lineaire afbeelding. Uit de elementaire regels van matrixvermenigvuldiging volgt immers dat

$$M(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = M\mathbf{x} + M\mathbf{y}$$

en

$$M(\lambda\mathbf{x}) = \lambda M\mathbf{x}.$$

In het volgende hoofdstuk zal blijken dat lineaire afbeeldingen tussen eindigdimensionale vectorruimten allemaal kunnen worden teruggebracht tot matrixvermenigvuldiging met een matrix M waarvan met coëfficienten in $\mathbb{R}$.
Alvorens verdere voorbeelden te bespreken, maken we een aantal opmerkingen en voeren wat begrippen in.

Lemma 7.3.1 *Zij V, W een tweetal vectorruimten over het scalairenlichaam $\mathbb{R}$ en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt,*

1. *Voor elk tweetal $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt $A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x}) + \mu A(\mathbf{y})$.*

2. $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Geef zelf een bewijs voor dit Lemma.
Een belangrijke ruimte die bij een lineaire afbeelding hoort is de *kern*. Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding, dan is de kern van f de verzameling van alle $\mathbf{x} \in V$ met $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Notatie: $\ker(f)$.
In het voorbeeld van matrixvermenigvuldiging $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ wordt de kern gegeven door de *nulruimte* van de matrix M.

Lemma 7.3.2 *De kern van een lineaire afbeelding $f : V \to W$ is een lineaire deelruimte van V.*

Geef ook van dit Lemma zelf een bewijs. Verder geldt,

Stelling 7.3.3 *Zij V, W een tweetal vectorruimten en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is A injectief precies dan als $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.*

Bewijs: Dit is niet lastig in te zien. Stel namelijk dat A injectief is. Dan geldt $\mathbf{x} \in \ker(A) \Rightarrow A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = A(\mathbf{0})$ en wegens injectiviteit van A volgt hieruit dat $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dus $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.
Stel anderzijds dat $\ker(A)$ alleen uit de nulvector bestaat. Dan volgt uit $A\mathbf{x} = A(\mathbf{y})$ dat $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ wegens de lineariteit van A. Omdat de kern triviaal is impliceert dit $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ en dus $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Met andere woorden, A is injectief.

□

Hier zijn een aantal voorbeelden van lineaire afbeeldingen.

1. Als vectorruimte V nemen we de intuïtieve vectoren in de ruimte, waarmee we dit college begonnen. Meetkundig realiseren we deze ruimte door de punten in de driedimensionale ruimte met gegeven oorsprong O. Let op: we voeren geen coördinaten in! Beschouw nu de volgende twee speciale voorbeelden.

   (a) Zij W een vlak door O met normaalvector $\mathbf{n}$. De loodrechte projectie P van V op W is een voorbeeld van een lineaire afbeelding. Zij namelijk $\mathbf{v} \in V$. De loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ op W is dat punt op de lijn $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{n}$ met de eigenschap dat $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dus $(\mathbf{v} + \lambda\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0$ waaruit volgt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \lambda|\mathbf{n}|^2$. Dus $\lambda = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/|\mathbf{n}|^2$ en

   $$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}. \qquad (7.1)$$

   Dat P lineair is volgt uit:

   $$\begin{aligned} P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{x} + \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{y} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} - \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \\ &= P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} P(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda\mathbf{x} - \frac{(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \\ &= \lambda\mathbf{x} - \lambda\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \\ &= \lambda P(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

De *kern* bestaat uit alle vectoren die naar **0** geprojecteerd worden, in dit geval alle vectoren die loodrecht op het vlak W staan.

2. Zij $V = \mathbb{R}[X]$, de ruimte van polynomen. Dan is differentiatie naar X een lineaire afbeelding van V naar V. Immers,

$$\frac{d}{dX}(\lambda f(X)) = \lambda\frac{d}{dX}f(X).$$

en

$$\frac{d}{dX}(f(X)+g(X)) = \frac{d}{dX}f(X) + \frac{d}{dX}g(X).$$

De enige polynomen die na differentiatie nul worden, zijn de constante polynomen. Deze constante polynomen vormen dus de kern.

3. Zij $V = C(\mathbb{R})$ de ruimte van continue functies op $\mathbb{R}$. Integratie van een continue functie over het interval $[0, 1]$ (of een ander interval) geeft een lineaire afbeelding van V naar $\mathbb{R}$. Immers,

$$\int_0^1 (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

en

$$\int_0^1 \lambda f(x)dx = \lambda\int_0^1 f(x)dx.$$

De kern wordt gegeven door alle functies waarvan de integraal nul is.

4. Zij $M_{2,2}$ de ruimte van 2×2-matrices met elementen in $\mathbb{R}$. De afbeelding $M_{2,2} \to \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)^t$$

is lineair. Ga dit na!

We noemen twee vectorruimten V, W *isomorf* als er een bijectieve lineaire afbeelding $A : V \to W$ bestaat. Er geldt:

Stelling 7.3.4 *Zij $A : V \to W$ een bijectieve lineaire afbeelding tussen twee vectorruimten V, W. Dan is de inverse afbeelding $A^{-1} : W \to V$ ook lineair.*

Bewijs: Zij $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$. Kies $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ zó dat $A(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ en $A(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Dan geldt, wegens lineariteit van A, dat $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}$. Gevolg: $A^{-1}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = A^{-1}(\mathbf{x}) + A^{-1}(\mathbf{y})$. Hiermee is het eerste kenmerk van lineariteit aangetoond.
Kies nu $\mathbf{x} \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Stel $\mathbf{v}$ zó dat $\mathbf{x} = A(\mathbf{v})$. Dan geldt dat $A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{x}$. Dus $A^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{v} = \lambda A^{-1}(\mathbf{x})$.

□

We kunnen isomorfe vectorruimten zien als twee incarnaties van dezelfde vectorruimte structuur. De 1-1-duidige correspondentie tussen de twee wordt gegeven door de bijectie A. Hier zijn een paar voorbeelden.

1. Zij $M_{2,2}$ de ruimte van 2×2-matrices met elementen in $\mathbb{R}$. De afbeelding $M_{2,2} \to \mathbb{R}^4$ gegeven door
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)^t$$
is een bijectieve lineaire afbeelding tussen $M_{2,2}$ en $\mathbb{R}^4$. Goed beschouwd maakt het ook niet uit of we de vier componenten van vectoren uit $\mathbb{R}^4$ in een rij, kolom of vierkantsvorm opschrijven.

2. Zij $\mathbb{R}$ een oneindig lichaam. De ruimten $\mathbb{R}[X]$ van polynomen en $\mathbb{R}_0^\infty$ zijn isomorf via de lineaire bijectie
$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \mapsto (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Hier is nog een algemene opmerking.

Lemma 7.3.5 *Zij V, W een tweetal vectorruimten en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $A(V)$ een lineaire deelruimte van W.*

Opgave 7.3.6 Geef zelf een bewijs van dit Lemma.

Tenslotte wijzen we erop dat een eindigdimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ altijd isomorf is met $\mathbb{R}^n$. Dit gaat als volgt Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een geordende basis. Elke vector $\mathbf{x} \in V$ kan op unieke manier geschreven worden als $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ met $x_i \in \mathbb{R}$. We noemen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de coördinaten van $\mathbf{x}$ ten opzichte van B. De kolom bestaande uit deze coördinaten noemen we de *coördinatenkolom* van $\mathbf{x}$ ten opzichte van B. We geven deze aan met $\mathbf{x}_B$.

Opgave 7.3.7 Laat zien dat de toekenning
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_B$$
een bijectieve lineaire afbeelding tussen V en $\mathbb{R}^n$ geeft.

We zien hieruit dat een eindigdimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ van dimensie n isomorf is met $\mathbb{R}^n$. Men zou dus kunnen zeggen dat, wat betreft eindigdimensionale vectorruimten, alles weer bij het oude is. In de praktijk blijkt het echter vaak onhandig of omslachtig een basis te kiezen. Vaak is zo'n keuze helemaal niet voor de hand liggend. Bijvoorbeeld we weten dat de deelruimte V van $\mathbb{R}^3$ gegeven door $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dimensie 2 heeft en dus isomorf is met $\mathbb{R}^2$. Om deze isomorfie expliciet te maken kunnen we een basis van V kiezen. Maar welke? Er is veel keuze, maar er is geen 'natuurlijke' basis. In zulke gevallen is het veel eleganter om coördinaatvrij te werken. Dit is de kracht van een axiomatische opzet van vectorruimten.

7.4 Lineaire afbeeldingen in eindige dimensie

In deze paragraaf geven we aan wat het verband is tussen lineaire afbeeldingen en matrixvermenigvuldiging. Zij V, W een tweetal vectorruimten over het scalairenlichaam $\mathbb{R}$ en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding. We nemen aan dat V, W eindigdimensionaal zijn met dimensies n respectievelijk m. Zij $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een geordende basis van V en $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ een geordende basis van W. We geven de coördinatenkolom van $\mathbf{x} \in V$ ten opzichte van B aan met $\mathbf{x}_B$. En evenzo is $\mathbf{y}_C$ de coördinatenkolom van $\mathbf{y} \in W$ ten opzichte van C.

Stelling 7.4.1 *Gegeven V, W, hun geordende bases B, C, en $A : V \to W$ als daarnet. Stel $\mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in W$ zó dat $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$. Zij A_C^B de $m \times n$-matrix die we krijgen door als i-de kolom de coördinatenkolom van $A(\mathbf{b}_i)$ ten opzichte van C te nemen. Dan geldt:*

$$\mathbf{y}_C = A_C^B \mathbf{x}_B.$$

Bewijs: De volgende stappen spreken hopelijk voor zich. We beginnen met $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$. Neem nu de coördinatenkolommen ten opzichte van C,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_C &= (A(\mathbf{x}))_C \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i A(\mathbf{b}_i))_C \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i A(\mathbf{b}_i)_C \\
&= A_C^B \mathbf{x}_B
\end{aligned}$$

$\square$

Hier is een viertal voorbeelden van de vorm $A : V \to V$, dus $W = V$. We kiezen in beide copieën van V dezelfde basis $B = C$.

Voorbeeld 7.4.2. We nemen de projectie afbeelding (7.1) op pagina 99 met $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$ ten opzichte van de standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die we aangeven met E. Er geldt

$$P(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Evenzo volgt

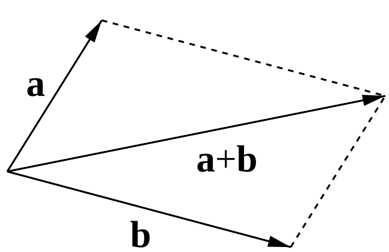
$$P(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 5/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad P(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

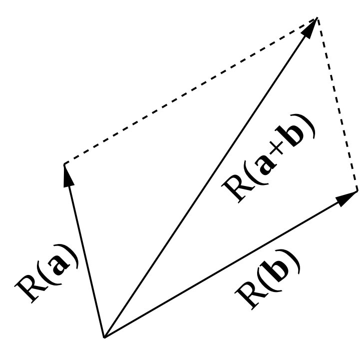
De matrix van P ten opzichte van E wordt dus gegeven door

$$P_E^E = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -1/3 \\ -1/6 & 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.4.3. Beschouw het platte vlak met een oorsprong en een coördinatenkeuze zo dat we het kunnen identificeren met $\mathbb{R}^2$. We beschouwen nu de rotatie-afbeelding R van het vlak naar zichzelf met de oorsprong $(0,0)$ als rotatiepunt, tegen de richting van de klok in, over een hoek α. Wij beweren dat R een lineaire afbeelding is. Om eigenschap (1) te zien kiezen we twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ en draaien die beide om de hoek α. Hieronder staan het optelparallellogram van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ met daarnaast het resultaat na draaiing door R.





Uit het plaatje rechts is nu direct duidelijk dat de gedraaide somvector $R(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ precies de diagonaal is van het parallellogram opgespannen door $R(\mathbf{a})$ en $R(\mathbf{b})$. Met andere woorden, $R(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = R(\mathbf{a}) + R(\mathbf{b})$. Op analoge manier heeft voor willekeurige $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ de gedraaide vector $R(\lambda\mathbf{a})$ precies dezelfde richting als $R(\mathbf{a})$ en is de lengte λ maal de lengte van $R(\mathbf{a})$. Dus $R(\lambda\mathbf{a}) = \lambda R(\mathbf{a})$ als $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Voor negatieve λ kunnen we een soortgelijk argument geven.

Als basis in $\mathbb{R}^2$ kiezen we de geordende standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ die we kort aangeven met E. De matrix die bij R hoort is de matrix waarvan de eerste kolom gelijk is aan $R(\mathbf{e}_1)$ en de tweede kolom $R(\mathbf{e}_2)$ (beiden in gewone coordinaten, dus ten opzichte van $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Ga zelf na dat

$$R(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad R(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

De matrix behorende bij R wordt dus

$$R_E^E = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.4.4. Zij $\mathbb{R}[X]_3$ de vectorruimte van polynomen van graad ≤ 3 en beschouw de lineaire afbeelding $D : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ gegeven door $D : p(X) \mapsto p'(X)$. Omdat bereik en domein hetzelfde zijn kunnen we voor B en C dezelfde basis van de ruimte $\mathbb{R}[X]_3$ nemen. We kiezen $B = \{1, X, X^2, X^3\}$. De afbeelding D losgeleten op deze elementen geeft achtereenvolgens $0, 1, 2X, 3X^2$. Schrijven we deze vectoren uit ten opzichte van $C = B$, dan vinden we de coördinaten kolommen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De matrix van D ten opzichte van B wordt dus

$$D_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 7.4.5. Zij $\mathbb{C}$ de vectorruimte van complexe getallen over $\mathbb{R}$. Kies $a + bi \in \mathbb{C}$. De afbeelding $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geven door $\mu : z \mapsto (a + bi)z$ is linear. We kiezen de natuurlijke basis $B = \{1, i\}$ van $\mathbb{C}$. Deze basisvectoren gaan onder μ over in $a + bi, -b + ai$. De coördinaatkolommen van deze vectoren ten opzichte van $C = B$ zijn,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

De matrix van μ ten opzichte van B wordt dus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Controle, als we het complexe getal $x + iy$ met $a + bi$ vermenigvuldigen krijgen we $ax - by + (bx + ay)i$. Matrixvermenigvuldiging levert

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Vergelijk de resultaten!
Merk op ook dat de gevonden matrix precies $\sqrt{a^2 + b^2}$ maal de draaiingsmatrix

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

waarin ϕ het argument van $a + bi$ is.

$\diamondsuit$

Een speciaal geval van Stelling 7.4.1 is het geval dat $W = V$ en A de identieke afbeelding $I : V \to V$ gegeven door $I : \mathbf{x} \to \mathbf{x}$. De stelling toegepast op $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ luidt nu als volgt.

Gevolg 7.4.6 *Zij B, C een tweetal geordende bases van V en I_C^B de $n \times n$-matrix die we krijgen door als i-de kolom de coördinaten ten opzichte van C van de vector $\mathbf{b}_i$ te nemen. Dan geldt*

$$\mathbf{x}_C = I_C^B \mathbf{x}_B.$$

Dit gevolg is te interpreteren als de relatie tussen de B-coördinaten en C-coördinaten van $\mathbf{x}$. We noemen dit een *coördinatentransformatie* .

Lemma 7.4.7 *Met de notaties als boven geldt dat $I_C^B = (I_B^C)^{-1}$.*

Bewijs: Als we in Gevolg 7.4.6 B en C verwisselen dan zien we dat $\mathbf{x}_B = I_B^C \mathbf{x}_C$. Anderzijds volgt door inverteren ook dat $\mathbf{x}_B = (I_C^B)^{-1}\mathbf{x}_C$. We concluderen dat $I_B^C = (I_C^B)^{-1}$.

□

Voorbeeld 7.4.8. Gegeven de vector $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^t$ in $\mathbb{R}^3$. Beschouw nu de geordende basis F van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 0)^t, \mathbf{f}_2 = (0, 1, 1)^t, \mathbf{f}_3 = (1, 0, 1)^t$. Gevraagd wordt de coördinaten van $\mathbf{v}$ ten opzichte van F te bepalen. Laten we de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ aangeven met E.

We zullen het eerst doen zonder de expliciete coördinatentransformaties aan te geven. Er wordt gevraagd naar getallen y_1, y_2, y_3 zó dat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

De 3×3-matrix van daarnet is precies de matrix I_E^F. Volgens onze formules geldt $I_E^F = (I_F^E)^{-1}$ en $\mathbf{v}_F = I_F^E \mathbf{v}_E$. Voeren we deze berekening uit,

$$\mathbf{v}_F = I_F^E \mathbf{v}_E = (I_E^F)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Kijk goed naar de parallel tussen de aanpak boven en de formules.

♢

Het zal duidelijk zijn dat de matrix van een lineaire afbeelding sterk afhangt van de bases ten opzichte waarvan deze wordt uitgeschreven. Zij V, W en $A : V \to W$ als aan het begin van deze paragraaf. In plaats van B, C kiezen we een tweetal andere geordende bases B', C' van V respectievelijk W. Het verband tussen A_C^B en $A_{C'}^{B'}$ kan bepaald worden door de coördinatentransformatieformules uit Gevolg 7.4.6. Er geldt

Stelling 7.4.9 *Met de notaties als boven,*

$$A_{C'}^{B'} = I_{C'}^{C} A_C^B I_B^{B'}.$$

Bewijs: Dit is een kwestie van uitschrijven. Kies een vector $\mathbf{x} \in V$. We moeten laten zien dat de matrix aan de rechterkant, losgelaten op $\mathbf{x}_{B'}$ de coördinatenkolom $A(\mathbf{x})_{C'}$ geeft. Dit gaat in stapjes. We laten eerst $I_B^{B'}$ los op $\mathbf{x}_{B'}$. Dit geeft $\mathbf{x}_B$ volgens Gevolg 7.4.6 toegepast op $B = B'$ en $C = B$. De matrix A_C^B losgelaten op $\mathbf{x}_B$ geeft $A(\mathbf{x})_C$, de coördinatenkolom van $A(\mathbf{x})$ ten opzichte van C. laten we hier tenslotte $I_{C'}^C$ op los dan eindigen we met $A(\mathbf{x})_{C'}$, zoals we wilden.

□

Stelling 7.4.9 wordt het meest gebruikt bij lineaire afbeeldingen van een eindigdimensionale vectorruimte V naar zichzelf. We kiezen daarbij $C = B$ en $C' = B'$.

Gevolg 7.4.10 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Zij B, B' een tweetal geordende bases van V en gebruik verder de notaties zoals boven. Geef bovendien de coördinatentransformatie matrix $I_B^{B'}$ aan met S. Dan geldt,*

$$A_{B'}^{B'} = S^{-1} A_B^B S.$$

Het bewijs volgt door Stelling 7.4.9 toe te passen met $C = B, C' = B'$.

Twee $n \times n$-matrices A, B heten *geconjugeerd* als er een inverteerbare n $timesn$-matrix bestaat zó dat $B = S^{-1}AS$. In bovenstaand Gevolg 7.4.10 $A_{B'}^{B'}$ en A_B^B zijn dus geconjugeerd.

Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Kies een geordende basis B van V en zij A_B^B de matrix van A ten opzichte van B. Dan geldt dat $\det(A_B^B)$ onafhankelijk van de keuze van B is. Om dit te zien maken we gebruik van de regels dat als M een $n \times n$-matrix is en S een inverteerbare $n \times n$-matrix, dan $\det(SMS^{-1}) = \det(M)$. Passen we dit toe met Gevolg 7.4.10 en $S = I_{B'}^B, M = A_B^B$ dan vinden we

$$\det(A_{B'}^{B'}) = \det(I_{B'}^B A_B^B I_B^{B'}) = \det(I_{B'}^B A_B^B (I_{B'}^B)^{-1}) = \det(A_B^B).$$

We noemen $\det(A_B^B)$ *determinant* van de lineaire afbeelding $A : V \to V$. Later zal blijken dat ook het spoor (=som van de diagonaalelementen) van A_B^B onafhankelijk is van de keuze van B. We kunnen dus ook spreken van het *spoor* van de afbeelding $A : V \to V$.
Tenslotte nog een aantal opmerkingen over het verband tussen lineaire afbeeldingen en hun matrices. Stel $A : V \to W$ een lineaire afbeelding met V, W eindigdimensionaal en geordende bases $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ en $C = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m)$. Zij $\mathcal{A}$ de matrix van A ten opzichte van deze twee bases. Het beeld $A(V)$ wordt opgespannen door de vectoren $A(\mathbf{b}_1), \ldots, A(\mathbf{b}_n)$. De coördinatenkolommen ten opzichte van C van de vectoren in $A(\mathbf{x})$ worden opgespannen door de kolommen

$A(\mathbf{b}_1)_C, \ldots, A(\mathbf{b}_n)_C$. Dit zijn precies de kolommen van de $m \times n$-matrix $\mathcal{A}$. We concluderen,

$$\text{rang}(\mathcal{A}) = \dim(A(V)).$$

Zij nu $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r$ een basis van de kern van A. Dan vormen hun kolomvectoren ten opzichte van B, $(\mathbf{n}_1)_B, \ldots, (\mathbf{n}_r)_B$ een basis van de nulruimte van $\mathcal{A}$. We concluderen,

$$\text{rang}(\text{Nul}(\mathcal{A})) = \dim(\ker(A)).$$

Uit Stelling 4.3.2 weten we dat

$$n = \dim(\text{Nul}(\mathcal{A})) + \text{rang}(\mathcal{A}).$$

Hieruit volgt meteen de volgende belangrijke stelling.

Stelling 7.4.11 (Dimensiestelling) *Stel we hebben een lineaire afbeelding* $A : V \to W$ *met* $\dim(V)$ *en* $\dim(W)$ *eindig. Dan geldt,*

$$\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(A(V)).$$

Merk op deze stelling geheel vrij is van eventuele basiskeuzen die we maken.

7.5 Vectorruimteconstructies (optioneel)

Gegeven een aantal vectorruimten, dan is het vaak mogelijk om daaruit op abstracte wijze nieuwe vectorruimten te creëren. Met deze constructies zullen we als beginners in de lineaire algebra niet veel in aanraking komen. Later zullen ze evenwel van steeds groter belang worden in de algebra, meetkunde en analyse.

1. Zij V, W een tweetal vectorruimten over $\mathbb{R}$. De *directe som* van V en W is de vectorruimte bestaande uit alle geordende paren $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ met als optelling $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ en scalaire vermenigvuldiging $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{w})$. Notatie $V \oplus W$.

2. Zij V een vectorruimte en W een deelruimte. We zeggen dat twee vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ equivalent zijn modulo W als $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$. De verzameling van vectoren die equivalent modulo W zijn met een gegeven vector $\mathbf{v}$ noemen we de *equivalentieklasse* van $\mathbf{v}$. Notatie: $\mathbf{v}(\text{mod } W)$. Merk op, als $\mathbf{v}_1 \in V$ en $\mathbf{v}_2 \in V$ niet equivalent zijn modulo W dan zijn de klassen $\mathbf{v}_1(\text{mod } W)$ en $\mathbf{v}_2(\text{mod } W)$ disjunct. Als ze namelijk een element $\mathbf{W}$ gemeenschappelijk zouden hebben, dan $\mathbf{v}_1 - \mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{v}_2 - \mathbf{w} \in W$. Na verschil nemen, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$ en we hebben een tegenspraak. De ruimte V kan dus opgedeeld worden in een disjuncte vereniging van equivalentieklassen modulo W.

   Zij $\mathbf{v}_1(\text{mod } W)$ en $\mathbf{v}_2(\text{mod } W)$ een tweetal klassen modulo W en $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ een tweetal elementen in de respectievelijke klassen. Dan geldt $\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 \in W$ en $\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2 \in W$. Na optelling, $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in W$. Met andere woorden, kiezen we twee elementen uit $\mathbf{v}_1 \pmod W$ respectievelijk $\mathbf{v}_2$

(mod W) dan zal hun som altijd in de klasse $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \pmod W$ liggen. Hiermee hebben we een optelling gedefinieerd op de equivalentieklassen modulo W. Op dezelfde manier kunnen we een scalaire vermenigvuldiging invoeren, en daarmee krijgen de klassen modulo W een vectorruimte structuur die we de *quotientruimte* zullen noemen. Notatie: V/W.

3. Zij V, W een tweetal vectorruimten over $\mathbb{R}$. De verzameling lineaire afbeeldingen $A : V \to W$ vormen een vectorruimte als we optelling en scalaire vermenigvuldiging als volgt definiëren: $(A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$ voor alle $\mathbf{x} \in V$ en $(\lambda A)\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x})$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$. Notatie $\mathrm{Hom}(V, W)$.

4. Nemen we in het bijzonder in voorgaand voorbeeld $W = \mathbb{R}$, dan krijgen we de vectorruimte $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$, die we de *duale vectorruimte* noemen. Notatie: V^d. Een lineaire afbeelding $V \to \mathbb{R}$ noemen we ook wel een *lineaire vorm* op V. De duale vectorruimte is dus de ruimte van lineaire vormen op V.

5. Zij V, W een tweetal vectorruimten over $\mathbb{R}$. Het *tensorproduct* van V, W bestaat uit alle (eindige) lineaire combinaties van symbolen $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ met $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ die voldoen aan de volgende relaties

   (a) $\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (\lambda\mathbf{w})$ voor alle $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W, \lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}$ voor alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \mathbf{w} \in W$.

   (c) $\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2$ voor alle $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$.

   Notatie: $V \otimes W$. In het bijzonder, als V, W eindigdimensionaal zijn en $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ is een basis van V en $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ een basis van W, dan is $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ met $i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m$ een basis van $V \otimes W$.

7.6 Scalairen (optioneel)

De verzamelingen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ zijn voorbeelden van zogenaamde *lichamen*. Dat zijn verzamelingen waarin we een optelling en vermenigvuldiging met de gebruikelijke regels hebben en waarbij we door elk element ongelijk aan nul kunnen delen. De gehele getallen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ vormen bijvoorbeeld geen lichaam, want deling van een geheel getal door een ander geheel getal levert niet altijd een geheel getal op. Daarentegen vormen de rationale getallen (breuken) $\mathbb{Q}$ wel een lichaam. Een ander voorbeeld van een lichaam is de verzameling van 2 elementen $\{0, 1\}$ met als optelling

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 1 = 0 \qquad 0 + 1 = 1$$

en vermenigvuldiging

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

We geven dit lichaam aan met $\mathbb{F}_2$.

We kunnen de vectorruimte axiomas en alle daarop volgende begrippen ook hanteren als we een ander scalairenlichaam in plaats van $\mathbb{R}$ nemen. Vrijwel alles uit dit hoofdstuk gaat op precies dezelfde manier door. Hier is een voorbeeld. De reële getallen vormen een vectorruimte met als scalairen $\mathbb{Q}$ als we gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging (met elementen uit $\mathbb{Q}$) nemen. Beschouw de reële getallen $1, \sqrt{2}$. Wij beweren dat ze lineair onafhankelijk over $\mathbb{Q}$ zijn. Stel namelijk dat er $a, b \in \mathbb{Q}$, niet beide nul, bestaan zó dat $a+b\sqrt{2} = 0$. Er geldt natuurlijk $b \neq 0$, want anders zou uit de relatie volgen dat a ook nul is. Dus $\sqrt{2} = -a/b$, met andere woorden, $\sqrt{2}$ is een rationaal getal (een breuk). We weten echter dat dit niet zo is. Dus onststaat er een tegenspraak en we moeten concluderen dat $1, \sqrt{2}$ onafhankelijk over $\mathbb{Q}$ zijn. We zien hier een voorbeeld waarin lineaire onafhankelijkheid van getallen over $\mathbb{Q}$ neerkomt op irrationaliteitseigenschappen van getallen.

Het is zelfs mogelijk om oneindige verzamelingen reële getallen aan te geven die lineair onafhankelijk over $\mathbb{Q}$ zijn. Het bewijs hiervan is echter bijzonder lastig. Voorbeelden zijn,

$$\{1, e, e^2, e^3, \ldots\}$$

$$\{1, \pi, \pi^2, \pi^3, \ldots\}$$

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots\}$$

Het laatste voorbeeld bestaat uit de wortels van alle priemgetallen.

Hier is iets wat je wellicht wèl kunt aantonen:

1. Laat zien dat de verzameling $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ met n afhankelijk is over $\mathbb{Q}$.
2. Laat zien dat de verzameling

   $$\{\log 2, \log 3, \log 5, \log 7, \log 11, \ldots\}$$

   de logaritmen van de priemgetallen, onafhankelijk is over $\mathbb{Q}$.

7.7 Opgaven

Een aantal van de opgaven hieronder zijn ontleend aan het boekje "Lineaire Algebra"van Paul Igodt en Wim Veys.

Opgave 7.7.1 Controleer of de verzameling $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ een vectorruimte is met de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd als volgt:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1)$ en $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ en $\lambda(x, y) = (\lambda y, \lambda x)$.
3. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$ en $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
4. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ en $\lambda(x, y) = (\lambda x, y/\lambda)$ als $\lambda \neq 0$ en $0(x, y) = (0, 0)$.

Opgave 7.7.2 Definieer voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ twee bewerkingen $\oplus$ en $\cdot$ als volgt:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = -\lambda \mathbf{x}$$

waarbij de bewerkingen in de rechterleden het gewone verschil en de gewone scalaire vermenigvuldiging zijn. Aan welke vectorruimte axiomas voldoen deze bewerkingen? en welke niet?

Opgave 7.7.3 Welk van de volgende verzamelingen met de voor de hand liggende optelling en scalaire vermeningvuldiging vormen een vectorruimte?

1. De reële continue functies op het gesloten interval $[0, 1]$.
2. De reële niet-negatieve functies op $[0, 1]$.
3. De verzameling polynomen met coefficienten in $\mathbb{R}$ van exacte graad n.
4. De symmetrische $n \times n$-matrices met elementen in $\mathbb{R}$.

Opgave 7.7.4 Geef in de voorbeelden van pagina 92 van het dictaat de nulvector aan.

Opgave 7.7.5 Laat in de voorbeelden op pagina 93 van het dictaat zien dat de gegeven ruimten inderdaad lineaire deelruimten zijn.

Opgave 7.7.6 Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van de gegeven vectorruimte over $\mathbb{R}$? Leg uit.

1. $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xyz = 0\}$
2. $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$
3. $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \in \mathbb{Q}\}$
4. $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
5. $W_5 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} = 0\}$
6. $W_6 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$
7. $W_7 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | A^t = A\}$
8. $W_8 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$
9. $W_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 \text{ of } y = 0\}$
10. $W_{10} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(0) = 1\}$
11. $W_{11} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(-x) = -f(x)\}$
12. $W_{12} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ is integreerbaar en } \int_0^1 f(x)dx = 0\}$
13. $W_{13} = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Opgave 7.7.7 Beschouw de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \cos^2 x,\ g(x) = \sin 2x,\ h(x) = 1,\ \exp(x) = e^x$$

als elementen van de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bewijs dat $f, g, h, \exp$ lineair onafhankelijk over $\mathbb{R}$ zijn.

Opgave 7.7.8 Welk van de volgende verzamelingen vectoren zijn onafhankelijk?

1. $\{(1, 2, 0), (2, -1, 1), (1, 7, -1)\}$ in $\mathbb{R}^3$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
3. $\{X^3 + 2X^2, -X^2 + 3X + 1, X^3 - X^2 + 2X - 1\}$ in $\mathbb{R}[X]$.

Opgave 7.7.9 Laat zien dat $\{X + 1, X^2 + 1, X^2 + X\}$ een basis is van $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van polynomen van graad ≤ 2. Bepaal de coördinaten van elk van de vectoren $1, X, X^2$ ten opzichte van deze basis.

Opgave 7.7.10 Zijn V de vectorruimte van symmetrische 2×2-matrices met coefficienten in $\mathbb{R}$. Bewijs dat de geordende drietallen

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

en

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

elk een basis van V vormen.
Bepaal van elk element van B_2 de coördinaten ten opzichte van B_1.
Bepaal van elk element van B_1 de coördinaten ten opzichte van B_2.

Opgave 7.7.11 Beschouw de verzameling V gegeven door de rijen $(x_n)_{n \geq 1}$ (termen in $\mathbb{R}$) die voldoen aan de differentievergelijking $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ voor $n \geq 2$.

1. Schrijf de eerste vijf termen op van de rij beginnend met $(0, 1, \ldots)$.
2. Schrijf de eerste vijf termen op van de rij beginnend met $(1, 0, \ldots)$.
3. Laat zien dat met de voor de hand liggende optelling en scalaire vermenigvuldiging V een vectorruimte is van dimensie 2.
4. Stel $\eta = (1 + \sqrt{5})/2$ en $\eta' = (1 - \sqrt{5})/2$. Laat zien dat de rijen $(\eta^n)_{n \geq 1}$ en $(\eta'^n)_{n \geq 1}$ voldoen aan de differentievergelijking.
5. Zij $(u_n)_{n \geq 1}$ de oplossing van de differentievergelijking met begintermen $0, 1$. Dit is de rij van Fibonacci. Geef een formule voor u_n in termen van η^n en η'^n.

Opgave 7.7.12 Zijn de volgende uitspraken juist of onjuist? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

1. Als S, T onafhankelijke deelverzamelingen zijn van een vectorruimte V, dan is $S \cup T$ ook onafhankelijk.

2. Als U, W deelruimten zijn van een vectorruimte V en B_U een basis van U en B_W een basis van W, dan is $B_U \cap B_W$ een basis van $U \cap W$.

3. Als U een deelruimte is van een vectorruimte V en $v, w \in V$ zó dat $v + w \in U$ dan is $v \in U$ en $w \in U$.

4. Zij V een n-dimensionale vectorruimte en deelruimten $U_i \subset V$ voor $i = 1, \ldots, r$ zó dat
$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_r.$$
Als $r \geq n + 2$ dan is er een index i zó dat $U_i = U_{i+1}$.

5. Zij V een vectorruimte met basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Zij $W = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Dan is er een basis van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ van V met $\mathbf{v}_i \notin W$ voor $i = 1, 2, 3$.

Opgave 7.7.13 Beschouw de verzameling $V = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ met een optelling $\boxplus$ en scalaire vermenigvuldiging $\odot$ gedefineerd door

$$(x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \lambda \odot (x, y) = (x^\lambda, y^\lambda).$$

Is V met deze bewerkingen een vectorruimte over $\mathbb{R}$?

Opgave 7.7.14 Welk van de volgende afbeeldingen zijn lineair? Bepaal de kern en het beeld van de lineaire afbeeldingen en controleer de dimensiestelling.

1. $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_1 : x \mapsto 2x + 1$

2. $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_2 : (x, y) \mapsto x + y$

3. $L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_3 : (x, y) \mapsto |x - y|$

4. $L_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $L_4 : (x, y) \mapsto (\sin x, 7y, xy)$

5. $L_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $L_5 : (x, y, z) \mapsto (3y + z, x - y - z)$

6. $L_6 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_6 : A \mapsto \det(A)$

7. $L_7 : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $L_7 : A \mapsto A^t$

8. $L_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_8 : x \mapsto x^n$ voor $n > 1$

9. $L_9 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ gegeven door $L_9 : Q(X) \mapsto P(X)Q(X)$ voor vast gegeven $P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

10. $L_{10} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_{10} : f \mapsto f(a)$ voor vast gegeven $a \in \mathbb{R}$ (hier is $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de vectorruimte van reële functies met $\mathbb{R}$ als domein.

11. $L_{11} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $L_{11} : x \mapsto e^x$.

Opgave 7.7.15 Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ gegeven door $T : f \mapsto f'' - 4f' + f$ ten opzichte van de geordende basis $(X, 1 + X, X + X^2, X^3)$.

Opgave 7.7.16 Beschouw de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$L : a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 \mapsto (a + b, c + d + e)$$

en de geordende basis $\alpha = (1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3, (1 + X)^4)$ voor $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ en de geordende basis $\beta = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ van $\mathbb{R}^2$.

1. Bepaal de coördinatentransformatie matrix van vectoren ten opzichte van de basis α naar de standaardbasis $1, X, X^2, X^3, X^4$.

2. Bepaal de coördinaten van de vector $X + X^3 + X^4$ ten opzichte van de basis α.

3. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaardbases $1, X, X^2, X^3, X^4$ en $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

4. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de bases α en β.

Opgave 7.7.17 Beschouw de vectorruimte

$$\mathbb{R}[X, Y]_{\leq 2} = \{aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f|\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$$

met de voor de hand liggende optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer $L : \mathbb{R}[X, Y]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ door

$$L : f(X, Y) \mapsto f(X, 2).$$

1. Toon aan dat L lineair is.

2. Geef de matrix van L ten opzichte van de geordende bases $(X^2, XY, Y^2, X, Y, 1)$ en $(X^2, X, 1)$.

3. Bepaal kern, beeld en rang van L.

Opgave 7.7.18 Beschouw de volgende deelverzameling in de ruimte $M_{2,2}(\mathbb{R})$ van twee bij twee matrices

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bewijs dat V een deelruimte van $M_{2,2}(\mathbb{R})$ is, die isomorf is met $\mathbb{R}^3$.

Opgave 7.7.19 Bepaal twee onafhankelijke oplossingen van de lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2}y + 3\frac{d}{dx}y - 4y = 0.$$

(hint: probeer oplossingen $e^{\lambda x}$ met nader te bepalen λ.

Opgave 7.7.20 Bepaal twee onafhankelijke oplossingen van de lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{3}{x}\frac{d}{dx}y - \frac{3}{x^2}y = 0.$$

(hint: probeer oplossingen $y = x^a$ voor nader te bepalen a).

Opgave 7.7.21 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de matrix van A ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$.
2. Zij gegeven de geordende basis

   $$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   van $\mathbb{R}^3$. Bepaal de matrix van A ten opzichte van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

Opgave 7.7.22 Zij V en W een tweetal vectorruimten met geordende bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respectievelijk $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. De lineaire afbeelding $A : V \to W$ wordt gedefinieerd door $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,\ A(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3,\ A(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$.
In V is een tweede basis $\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ gegeven, en in W een tweede basis $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}'_2 = 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3,\ \mathbf{f}'_3 = -3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$.

1. Bereken de matrix van A ten opzichte van de bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.
2. Bereken de matrix van A ten opzichte van de bases $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ en $\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3$.
3. Bewijs dat A een bijectieve afbeelding is en bereken de matrix van A^{-1} ten opzichte van $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

Opgave 7.7.23 In $\mathbb{R}^3$ zijn de vectoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeven.

1. Bewijs dat $E = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en $F = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ een tweetal bases van $\mathbb{R}^3$ is.
2. Bereken de overgangsmatrix I_F^E.
3. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft ten opzichte van E de matrix

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Bereken de matrix van A ten opzichte van F.

Opgave 7.7.24 Zij $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de standaard basis van $\mathbb{R}^3$. De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{x}$ voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

1. Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

2. Bereken de matrix van A ten opzichte van de standaard basis.

3. Zij $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Bereken de matrix van A ten opzichte van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

Opgave 7.7.25 Zij W_1, W_2 een tweetal deelruimten van een vectorruimte V. Laat zien dat $W_1 \cap W_2$ een deelruimte van V is.

Opgave 7.7.26 Zij W_1, W_2 een tweetal deelruimten van de vectorruimte V. Laat zien dat $W_1 \cup W_2$ een deelruimte is precies dan als $W_1 \subset W_2$ of $W_2 \subset W_1$.

Opgave 7.7.27 Zij W_1, W_2 een tweetal eindigdimensionale deelruimten van een vectorruimte V. Laat zien dat $W_1 + W_2$ eindigdimensionaal is en dat

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

(Hint: breidt een basis van $W_1 \cap W_2$ uit tot een basis van W_1 en van W_2).

Opgave 7.7.28 Als S_1, S_2 niet-lege deelverzamelingen van een vectorruimte V zijn, dan geven we met $S_1 + S_2$ de verzameling $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} \in S_1, \mathbf{y} \in S_2\}$ aan.
Stel dat W_1, W_2 deelruimten van V zijn. Laat zien dat $W_1 + W_2$ een deelruimte van V is die W_1, W_2 omvat. Laat ook zien dat $W_1 + W_2$ de kleinste deelruimte van V is die W_1 en W_2 omvat (dat wil zeggen, elke deelruimte die W_1 en W_2 bevat moet ook $W_1 + W_2$ bevatten).

Opgave 7.7.29 Zij V, W een tweetal vectorruimten en $A : V \to W$ een lineaire afbeelding.

1. Bewijs, als $\dim(V) < \dim(W)$, dan is A niet surjectief.

2. Bewijs, als $\dim(V) > \dim(W)$, dan is A niet injectief.

Opgave 7.7.30 Zij V en W een tweetal eindigdimensionale vectorruimten. Bewijs:

1. $A :\ V \to W$, A is lineair en injectief $\Rightarrow \dim(W) \geq \dim(V)$.

2. $B :\ V \to W$, B is lineair en surjectief $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.

Opgave 7.7.31 Zij V en W een tweetal vectorruimten met geordende bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ respectievelijk $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$. In V zijn gegeven de vectoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ en $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. In W zijn gegeven de vectoren $\mathbf{u} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3 + 2\mathbf{f}_5$, $\mathbf{v} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + 3\mathbf{f}_5$, $\mathbf{w} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3 - 2\mathbf{f}_4$, $\mathbf{z} = 3\mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3 - 3\mathbf{f}_4 + 3\mathbf{f}_5$. De lineaire afbeelding $A : V \to W$ wordt gegeven door $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}, A(\mathbf{a}) = \mathbf{v}, A(\mathbf{e}_3) = \mathbf{w}$ en $A(\mathbf{b}) = \mathbf{z}$.

1. Bepaal de matrix van A ten opzichte van de bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ en $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.
2. Bepaal $A(V)$ en $\ker(A)$.

Opgave 7.7.32 Zij V en W een tweetal vectorruimten met geordende bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ respectievelijk $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $A_\alpha : V \to W$ heeft ten opzichte van $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ en $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal voor elke waarde van α de dimensies en een basis van de ruimten $\ker(A_\alpha)$ en $A_\alpha(V)$.

Opgave 7.7.33 De n-dimensionale vectorruimte V $(n > 3)$ heeft $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ als geordende basis. De lineaire afbeelding $A : V \to V$ wordt gedefinieerd door $A\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k+1},\ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ en $A\mathbf{v}_n = 2\mathbf{v}_n$.

1. Bewijs dat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ gegeven door $\mathbf{w}_l = \sum_{k=}^{l} \mathbf{v}_k$ een basis van V is.
2. Bepaal de matrix van A ten opzichte van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.
3. Bepaal de matrix van A ten opzichte van $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$.
4. Bereken de dimensie van $\ker(A^2)$ en bepaal een basis van deze ruimte.

Opgave 7.7.34 Zij P_n de vectorruimte van de polynomen in x met reële coëfficienten en graad $\leq n$. De afbeelding $A : P_n \to P_n$ wordt gedefinieerd door $A(p) = \frac{dp}{dx}$ voor ieder polynoom $p \in P_n$.

1. Bewijs dat A lineair is.
2. Bepaal $\ker(A)$ en $A(V)$.
3. Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Opgave 7.7.35 Zij $V = P_3$ en $W = P_2$ de deelruimte van polynomen met graad ≤ 2. De lineaire afbeelding $A : V \to W$ wordt gegeven door $A(p) = \frac{dp}{dx}$ en de lineaire afbeelding $B : W \to V$ door $B(p) = \int_0^x p(t)dt$.

1. Bepaal $\dim(A(V) \cap B(W))$ en bepaal een basis van deze ruimte.
2. Bewijs dat $AB \neq BA$.
3. Bepaal de matrix van A ten opzichte van de bases $1, x, x^2, x^3$ van V en $1, x, x^2$ van W.
4. Bepaal de matrix van B t.o.v. bovengenoemde bases.

Opgave 7.7.36 Zij V de vectorruimte van homogene polynomen in x en y van graad 2 met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. De lineaire afbeelding $A : V \to V$ wordt gegeven door $A(f) = y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$ voor iedere $f \in V$.

1. Bepaal $\ker(A)$.
2. Bepaal een basis van $A(V)$.
3. Voor welke f is $A(f) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$?
4. Bewijs dat $x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2$ een basis van V is. Bepaal de matrix van A ten opzichte van deze basis.

Opgave 7.7.37 Zij V de vectorruimte van homogene polynomen in x en y van graad 2 met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. De lineaire afbeelding $A : V \to V$ wordt gegeven door

$$A(f) = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

voor iedere $f \in V$.

1. Bepaal $\ker(A)$.
2. Bepaal een basis van $A(V)$.
3. Voor welke f is $A(f) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$?
4. Bewijs dat $x^2, y^2, (x-y)^2$ een basis van V is. Bepaal de matrix van A ten opzichte van deze basis.

7.8 Extra opgaven

(Optioneel) NB: De meeste opgaven zijn aangegeven met optioneel en lastig. Ze horen niet tot de standaard(=tentamen)stof en behandelen ook het begrip directe som. Ze zijn er alleen voor degenen die meer willen doen of extra uitdaging nodig hebben.

Opgave 7.8.1 (Optioneel) Gegeven is een vectorruimte V en twee deelruimten W_1, W_2 met de eigenschappen dat $V = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Bewijs dat V isomorf is met de directe som $W_1 \oplus W_2$. (hint: bekijk de afbeelding $W_1 \oplus W_2 \to V$ gegeven door $w_1 \oplus w_2 \mapsto w_1 + w_2$).

Opgave 7.8.2(Optioneel) Gebruik Opgave 7.8.1 om de volgende vragen te beantwoorden.

1. Laat zien dat $\mathbb{R}^n$ de directe som is van de deelruimten

   $$W_1 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n | a_n = 0\}$$

   en

   $$W_2 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0\}.$$

2. Beschouw de ruimte van polynomen $\mathbb{R}[X]$ en de deelruimten $W_1 = \{P(X) | P(x) = P(-X)\}$ (even polynomen) en $W_2 = \{P(X) | P(X) = -P(X)\}$ (oneven polynomen. Laat zien dat $\mathbb{R}[X] = W_1 \oplus W_2$.

Opgave 7.8.3(Optioneel) Zij W_1 een deelruimte van een eindigdimensionale vectorruimte V. Laat zien dat er een deelruimte W_2 van V bestaat zó dat $V = W_1 \oplus W_2$.
(Opmerking: als V oneindig-dimensionaal is dan is dit helemaal niet voor de hand liggend. Neem als voorbeeld $W_1 = C^1(I)$ de ruimte van differentieerbare functies op $I = (0,1)$ en $V = C^0(I)$ de ruimte van continue functies op $I = (0,1)$.)

Opgave 7.8.4 (Lastig) Laat zien dat $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ lineair onafhankelijk zijn over de rationale getallen. Hint: bewijs eerst dat $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ onafhankelijk over $\mathbb{Q}$ zijn.

Opgave 7.8.5 (Lastig) Laat zien, dat voor elke n de functies $1, \cos(x), \cos(2x), ..., \cos(nx)$ lineair onafhankelijk over $\mathbb{R}$ zijn (Om de gedachten te bepalen: neem eerst het geval $n = 2$ en gebruik differentiatie).

Opgave 7.8.6(Optioneel) Zij L een lineaire afbeelding van een vectorruimte V naar zichzelf. Toon aan dat $L^2 = L \Rightarrow V = \ker(L) \oplus \mathrm{Im}(L)$.

Hoofdstuk 8

Eigenwaarden en eigenvectoren

8.1 Inleiding

In Voorbeeld 7.4.2 hebben we gekeken naar de loodrechte projectie P van $\mathbb{R}^3$ op het vlak gegeven door $x + y + 2z = 0$ De matrix ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^3$ werd gegeven door

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -1/3 \\ -1/6 & 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Hoewel de projectie P meetkundig gezien heel eenvoudig is, kunnen we dit niet meteen aan de matrix aflezen. Dat we te maken hebben met een projectie blijkt pas als we opmerken dat de vector $(1, 1, 2)^t$ naar de nulvector wordt afgebeeld en de vectoren $(1, -1, 0)$ en $(2, 0, -1)$, die in het vlak liggen, naar zichzelf. Deze vectoren spelen dus een speciale rol ten aanzien van de projectie, en door hun gedrag onder P de projectie zelf gekenmerkt. Ten opzichte van de geordende basis F gegeven door $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 2)^t, \mathbf{f}_2 = (1, -1, 0)^t, \mathbf{f} = (2, 0, -1)^t$ zou onze projectie P de matrix

$$P_F^F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hebben. Een stuk eenvoudiger dus.

Voor de studie van de werking van een willekeurige lineaire afbeelding is het van belang dergelijke bijzondere vectoren op te sporen. Dit is het onderwerp van dit hoofdstuk.

Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Een vector $\mathbf{v} \in V$ heet *eigenvector* van A als

1. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
2. er is een scalair $\lambda \in \mathbb{R}$ is, zó dat $A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

We noemen λ de *eigenwaarde* van A behorend bij $\mathbf{v}$. In ons voorbeeld zou $(1,1,2)$ een eigenvector van P zijn met eigenwaarde 0 en $(1,-1,0)$ en $(2,0,-1)$ eigenvectoren met eigenwaarde 1.

Voorbeeld 8.1.1. Hier is nog een voorbeeld, de afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door matrixvermenigvuldiging met

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat

$$Q \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De afbeelding A heeft dus een eigenvector met eigenwaarde 2 en een eigenvector met eigenwaarde -1. Merk op dat ook ieder veelvoud van $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector met eigenwaarde 2 is, en ieder veelvoud van $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eigenvector met eigenwaarde -1. We zullen zien dat er geen andere eigenvectoren van A bestaan.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 8.1.2. Voor V nemen we de vectorruimte $C^\infty(\mathbb{R})$, de oneindig vaak differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ en als lineaire afbeelding D kiezen we differentiatie: $D : f \mapsto f'$. Het is duidelijk dat de exponentiele functie e^{ax} voor willeurige a een eigenfunctie is met eigenwaarde a. Immers, $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$. Tevens zijn deze vectoren, en hun veelvouden, de enige eigenvectoren.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 8.1.3. Neem $V = \mathbb{R}[X]$ en als lineaire afbeelding $P(X) \mapsto XP'(X)$. Eigenvectoren zijn de monomen X^n en hun veelvouden (met eigenwaarde n).

$\diamondsuit$

Stelling 8.1.4 *Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ een gegeven scalair. Dan vormt de verzameling*

$$E_\lambda := \{\mathbf{x} \in V | A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$$

een lineaire deelruimte van V.

Het bewijs van deze stelling bestaat uit een eenvoudige controle. Voer deze controle uit! De ruimte E_λ, indien deze niet alleen uit de nulvector bestaat, noemen we de *eigenruimte* van A behorend bij de eigenwaarde λ. In ons voorbeeld van de projectiematrix P zien we dat de vectoren loodrecht op het projectievlak de eigenruimte met eigenwaarde 0 vormen, en het projectievlak zelf is de eigenruimte behorend bij eigenwaarde 1.

8.2 Berekening van eigenwaarden en eigenvectoren

In het algemeen is de berekening van eigenwaarden en eigenvectoren van een lineaire afbeelding een lastige klus als we te maken hebben met oneindig dimensionale vectorruimten. Veel trillingsverschijnselen (trommels, snaren, atomen) in de natuurkunde zijn terug te brengen tot eigenvector/waarde problemen van differentiaaloperatoren op functieruimten. Vaak komt hier ook nogal wat analyse bij kijken.
Hier stellen we ons wat bescheidener op en berekenen alleen eigenwaarden en eigenvectoren in eindig dimensionale gevallen. We beginnen met het speciale geval van matrixvermenigvuldiging in $\mathbb{R}^n$ met een $n \times n$-matrix M. De eigenvectoren en eigenwaarden van de lineaire afbeelding gegeven door M zullen we ook wel gewoonweg de eigenvectoren en eigenwaarden van M noemen.
Hier volgt het principe van de berekening van eigenvectoren en eigenwaarden van M. Stel dat λ een eigenwaarde is. De vergelijking $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kunnen we zien als een stelsel lineaire vergelijkingen in de n componenten van $\mathbf{x}$. We herschrijven de rechterkant als $\lambda I_n\mathbf{x}$ en brengen deze naar links. We vinden,

$$(M - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Opdat dit stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden een niet-triviale oplossing heeft, is het nodig en voldoende dat de coëfficientendeterminant nul is. Met andere woorden,

$$\det(M - \lambda I_n) = 0 \tag{8.1}$$

Deze vergelijking staat bekend als de *eigenwaardevergelijking* van M. Het polynoom $\det(M - \lambda I_n)$ in λ noemen we ook wel het *karakteristieke polynoom* van M. Stel

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

dan luidt de eigenwaardevergelijking uitgeschreven,

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Oplossing van deze polynoomvergelijking geeft ons een eindig aantal oplossingen. Gegeven een oplossing λ_0 van deze vergelijking, dan is het bepalen van de bijbehorende eigenruimte slechts een kwestie van oplossing van het lineaire stelsel vergelijkingen

$$(M - \lambda_0 I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{8.2}$$

Voorbeeld 8.2.1. Hier berekenen we eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix Q uit de vorige paragraaf. De eigenwaardevergelijking luidt

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Uitgeschreven, $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. De oplossingen zijn $\lambda = -1, 2$. De eigenvectoren bij elk van deze λ's vinden we door oplossing van het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus bij $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

met als oplossingen $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, t willekeurig. Bij $\lambda = 2$ vinden we het stelsel

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

met als oplossingen $t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, t willekeurig.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 8.2.2. *Elk eigenwaardeprobleem $A : V \to V$ met $\dim(V) < \infty$ kan worden teruggebracht tot de bepaling van eigenwaarden en -vectoren van een $n \times n$-matrix, waarin $n = \dim(V)$.*
Neem bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}[X]_{\le 2}$ de polynomen van graad ≤ 2 en de lineaire afbeelding $A : P(X) \mapsto (X+1)P'(X)$. We bepalen de matrix van A ten opzichte van de basis $1, X, X^2$.

$$A(1) = 0, \quad A(X) = X + 1, \quad A(X^2) = 2X^2 + 2X.$$

De matrix van A wordt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eigenwaardevergelijking,

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

De eigenwaarden zijn dus $0, 1, 2$. Eigenvectoren bij $\lambda = 0$ zijn $\mu(1,0,0)^t$, eigenvectoren bij $\lambda = 1$ zijn $\mu(1,1,0)^t$ en eigenvectoren bij $\lambda = 2$ zijn $\mu(1,2,1)^t$. De eigenvectoren in hun polynoomnotatie worden dus

$$\lambda = 0 : \ \mu, \quad \lambda = 1 : \ \mu(X+1), \quad \lambda = 2 : \mu(X^2 + 2X + 1) = \mu(X+1)^2.$$

$\diamondsuit$

8.3 Basiseigenschappen

Stelling 8.3.1 *Zij $A : V \to V$ een lineaire afbeelding van een vectorruimte V naar zichzelf. Zij $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ een r-tal eigenvectoren van A met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ onafhankelijk.*

Bewijs: We voeren inductie naar r uit. Als $r = 1$ dan is er één eigenvector $\mathbf{v}_1$ (op scalaire factoren na). Omdat deze niet de nulvector is, is $\mathbf{v}_1$ een onafhankelijk stelsel.
Stel nu $r > 1$ en dat elk $r-1$-tal eigenvectoren met verschillende eigenwaarden onfahankelijk is. We gaan nu $\mu_1, \ldots, \mu_r$ oplossen uit de relatie

$$\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \mu_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Laat de afbeelding A op beide zijden los. We vinden de nieuwe relatie

$$\mu_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \mu_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Trek hiervan λ_r maal de oorspronkelijke relatie af. We vinden,

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_r)\mathbf{v}_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_r)\mathbf{v}_2 + \cdots + \mu_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\mathbf{v}_{r-1} = \mathbf{0}.$$

Omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$ onafhankelijk zijn, geldt $\mu_i(\lambda_i - \lambda_r) = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, s-1$. We hadden aangenomen dat $\lambda_i \neq \lambda_r$ voor $i < r$. Gevolg, $\mu_i = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, r-1$. De relatie tussen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ impliceert nu dat $\mu_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$. Omdat $\mathbf{v}_r \neq \mathbf{0}$ volgt hieruit dat $\mu_r = 0$. Met andere woorden, alleen de triviale relatie bestaat tussen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Conclusie: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ zijn onafhankelijk.

□

Voorbeeld 8.3.2. Van Stelling 8.3.1 kunnen we slim gebruik maken om onafhankelijkheid van vectoren aan te tonen in bijvoorbeeld functieruimten. Neem $V = C^\infty(\mathbb{R})$, de oneindig vaak differentieerbare functies op $\mathbb{R}$. Kies de functies $f_1 = e^x, f_2 = e^{2x}, \ldots, f_n = e^{nx}$. We hadden in Voorbeeld 7.2.8 de lineaire onafhankelijkheid van deze functies aangetoond. Nu is dat heel simpel te zien. De functies f_i $(i = 1, \ldots, n)$ zijn immers eigenfuncties van de lineaire afbeelding $f \mapsto f'$ met de verschillende eigenwaarden $1, 2, \ldots, n$.

♢

Laten we teruggaan naar een eindigdimensionale vectorruimte V van dimensie n en een lineaire afbeelding $A : V \to V$. We zeggen dat A een *basis van eigenvectoren* heeft als er een basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ van V is, zodat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tevens eigenvectoren van A zijn. Stel dat A een basis F van eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ heeft met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dan wordt de matrix van A ten opzichte van de basis F gegeven door

$$A_F^F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

We zeggen dat we A gediagonaliseerd hebben.

Voorbeeld 8.3.3. We gaan weer terug naar de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeven door matrixvermenigvuldiging met een $n \times n$-matrix M. Merk op dat M gewoon de matrix van A is ten opzichte van de standaard basis E van $\mathbb{R}^n$. Dus $M = A_E^E$. Stel dat A een basis van eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ heeft met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Noem deze basis F. Dan geldt

$$A_F^F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Deze matrix staat dus in diagonaalvorm. We weten ook dat $A_F^F = S^{-1}MS$ is waarin $S = I_E^F$ de coordinatentransformatie matrix tussen E, F. Als de matrix M een basis van eigenvectoren toelaat, dan is M geconjugeerd met een diagonaalmatrix. En omgekeerd.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 8.3.4. We behandelen een speciaal geval met de 2×2-matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

We hadden al eerder gezien dat

$$Q \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dus we hebben een basis van eigenvectoren. We schrijven bovenstaande iets anders,

$$Q \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En hieruit zien we dat

$$S^{-1}QS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{met } S = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dus Q is geconjugeerd met een diagonaalmatrix. De conjugatie gebeurt met de coordinatentransformatie matrix S.

$\diamondsuit$

Een belangrijk gevolg van Stelling 8.3.1 is het volgende.

Gevolg 8.3.5 *Als een $n \times n$-matrix n verschillende eigenwaarden heeft, dan heeft M een basis van eigenvectoren.*

Bewijs: Noem de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en kies bij elk eigenwaaarde een eigenvector $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Omdat de eigenwaarden verschillend zijn, volgt uit Stelling 8.3.1 dat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ onafhankelijk zijn. Ze vormen dus een basis van $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Hier volgen nog een paar eigenschappen van conjugatie.

Lemma 8.3.6 *Zij S een inverteerbare $n \times n$-matrix en M een $n \times n$- matrix. Dan hebben M en $S^{-1}MS$ hetzelfde karakteristieke polynoom*

Bewijs: Dit volgt direct uit de volgende afleiding

$$\begin{aligned}
\det(S^{-1}MS - \lambda I_n) &= \det(S^{-1}MS - \lambda S^{-1}I_nS) \\
&= \det(S^{-1}(M - \lambda I_n)S) \\
&= \det(S)^{-1}\det(M - \lambda I_n)\det(S) = \det(M - \lambda I_n)
\end{aligned}$$

□

Een andere belangrijke observatie is de volgende. Het karakteristieke polynoom van een $n \times n$-matrix M heeft de gedaante

$$\det(M - \lambda I_n) = (-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-\lambda) + a_n \tag{8.3}$$

De coëfficienten a_i zijn natuurlijk functies van de matrixelementen van M. Voor de meeste coëfficienten zien deze functies er nogal ingewikkeld uit. Het blijkt echter dat de coëfficienten a_1 en a_n een eenvoudige interpretatie hebben. Daartoe definiëren we het *spoor* van een $n \times n$-matrix A als de som van de diagonaalelementen van A. Notatie: Spoor(A).

Stelling 8.3.7 *Met de zojuist ingevoerde notaties geldt:*

$$a_n = \det(M), \qquad a_1 = \text{Spoor}(M).$$

Bewijs: De eerste bewering volgt door in (8.3) links en rechts $\lambda = 0$ in te vullen. We vinden dan $\det(M) = a_n$. Dit was onze eerste bewering. Om de tweede bewering in te zien bepalen we de coëfficient van $(-\lambda)^{n-1}$ in $\det(M - \lambda \mathrm{I}_n)$ We bepalen deze door uitschrijven van de somformule voor

$$\det(M - \lambda \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Bij uitschrijven van deze determinant blijkt dat het enige product dat bijdraagt tot de coëfficient van $(-\lambda)^{n-1}$ het product van de diagonaalelementen $(m_{11} - \lambda)(m_{22} - \lambda) \cdots (m_{nn} - \lambda)$ is. De bijdrage is precies gelijk aan $m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}$. We concluderen nu dat

$$a_1 = m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}.$$

□

Een direct gevolg van bovenstaande Stelling is dat we bij een diagonaliseerbare matrix direct het product en de som van de eigenwaarden in de matrix M terug kunnen zien.

Stelling 8.3.8 *Zij M een diagonaliseerbare $n \times n$-matrix met eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dan geldt*

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(M) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Spoor}(M).$$

Bewijs: We gebruiken hiervoor Stelling 8.3.7 en het feit dat

$$(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_n - \cdots + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n.$$

De constante coefficient is nu $\det(M) = a_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ en de coefficient van $(-\lambda)^{n-1}$ is $\mathrm{Spoor}(M) = a_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

□

Helaas is niet iedere $n \times n$ matrix diagonaliseerbaar. Er zijn twee belangrijke obstructies die we aan de hand van een voorbeeld aangeven. Neem als eerste voorbeeld de 2×2-matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, die een rotatie om 90° voorstelt. Het is duidelijk dat er bij een rotatie in het vlak geen eigenvectoren kunnen zijn. Dit wordt ook duidelijk als we de eigenwaardevergelijking opstellen.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen, en dus vinden we ook geen reële eigenvectoren. De eerste obstructie is dus dat de eigenwaardevergelijking niet voldoende oplossingen in $\mathbb{R}$ heeft.
De tweede obstructie treedt op als we eigenwaarden met hogere multipliciteit hebben. Neem bijvoorbeeld de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De eigenwaarde vergelijking luidt

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0.$$

Er is één eigenwaarde, namelijk $\lambda = 1$. Berekenen we de bijbehorende eigenruimte, dan vinden we de veelvouden van $(1, 0)$. De eigenruimte is dus 1-dimensionaal en aangezien er geen andere eigenwaarden dan 1 zijn, zijn dit de enige eigenvectoren. In dit geval is er dus ook geen basis van eigenvectoren. Beide obstructies zullen we in de komende paragrafen nader bekijken. Eerst vertellen we iets over nulpunten van polynomen.

8.4 Polynomen en hun nulpunten (optioneel)

Zij gegeven een polynoom of veelterm. Dat is een functie van de vorm

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

met $p_i \in \mathbb{R}$ of in $\mathbb{C}$. Als $p_n \neq 0$ dan noemen we p_n de *kopcoëfficient* en n de *graad* van het polynoom P. Notatie: $\deg(P)$. De graad van een constant polynoom$\neq 0$, zoals 1 of 2 is nul. Merk op dat de graad van het triviale polynoom 0 niet gedefinieerd is. Een eenvoudige doch nuttige eigenschap is de volgende,

Stelling 8.4.1 *Zij P, Q een tweetal niet-triviale polynomen. Dan geldt* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Met andere woorden, de graden van twee polynomen tellen op als we ze vermenigvuldigen.
We noemen een element a een *nulpunt* van P als $P(a) = 0$. We hadden reeds gezien in Stelling 6.5.2 dat $P(x)$ niet meer dan n verschillende nulpunten kan hebben. Verder geldt,

Stelling 8.4.2 *Zij a een nulpunt van het polynoom $P(x)$. Dan is er een polynoom $Q(x)$ zó dat $P(x) = (x - a)Q(x)$.*

Bewijs: Allereerst merken we op dat elk polynoom van de vorm $x^m - a^m$ als volgt ontbindt,

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + a^{m-2}x + a^{m-1}).$$

We schrijven nu $P(x)$ even uit

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

en trekken daar $0 = P(a) = p_n a^n + p_{n-1}a^{n-1} + \cdots + p_1 a + p_0$ vanaf. We krijgen

$$P(x) = p_n(x^n - a^n) + p_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + p_1(x - a).$$

Elk van de termen $x^m - a^m$ rechts is deelbaar door $x - a$ en dus ook hun som. Daarmee is $P(x)$ deelbaar door $x - a$. Met andere woorden er bestaat een polynoom $Q(x)$ zó dat $P(x) = (x - a)Q(x)$.

□

Het kan wel eens gebeuren dat als een polynoom P het nulpunt a heeft, het polynoom P meerdere factoren $x - a$ bevat. Bijvoorbeeld $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$ heeft $x = 1$ als nulpunt. We kunnen nu schrijven $P(x) = (x - 1)Q(x)$ waarin $Q(x) = x^3 + x - 2$. Maar het polynoom $Q(x)$ heeft ook een nulpunt in $x = 1$. Dus $Q(x) = (x-1)(x^2+x+2)$. We vinden dus $P(x) = (x-1)^2(x^2+x+2)$ en de laatste factor heeft geen nulpunten $x = 1$ meer. We zeggen dat $x = 1$ een nulpunt van multipliciteit 2 is. In het algemeen, stel dat $P(x)$ een nulpunt a heeft en zij k het grootste getal zó dat $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ voor een zeker polynoom $Q(x)$. Dan noemen we k de *multipliciteit* van het nulpunt $x = a$.
Het is lang niet altijd zo dat een polynoom een nulpunt heeft, denk maar aan $P(x) = x^2 + 1$, dat geen nulpunten in $\mathbb{R}$ heeft. Als we echter over de complexe getallen werken, dan zijn er wel altijd nulpunten.

Stelling 8.4.3 (Hoofdstelling van de algebra) *Zij $P(x)$ een niet-triviaal polynoom met reële of complexe coëfficienten. Dan is er een complex getal a zó dat $P(a) = 0$.*

We zullen deze stelling hier niet bewijzen, maar vermelden wel het belangrijkste gevolg.

Gevolg 8.4.4 *Zij $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1x + p_0$ een polynoom van graad n met reële of complexe coëfficienten. Dan zijn er n complexe getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zó dat*

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

Bewijs: We zien dit het makkelijkst door inductie naar n. Voor $n = 1$ is $P(x) = x + p_0$ meteen al van de vereiste vorm.
Stel nu $n > 1$ en dat ons Gevolg waar is voor polynomen van graad $n - 1$. Uit de hoofdstelling van de algebra weten we dat ons n-de graads polynoom $P(x)$ een nulpunt $a_n \in \mathbb{C}$ heeft. Maar dan bestaat er een polynoom $Q(x)$ van graad $n - 1$ zó dat $P(x) = (x - a_n)Q(x)$. Wegens onze inductiehypothese ontbindt $Q(x)$ in $n - 1$ factoren $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1})$. We vinden dus $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, waarmee onze bewering bewezen is.

□

Een ander gevolg van de hoofdstelling van de algebra is dat we ook iets kunnen zeggen over reële polynomen.

Stelling 8.4.5 *Zij $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1x + p_0$ een polynoom van graad n met coëfficienten in $\mathbb{R}$. Dan bestaan er reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en paren reële getallen b_i, c_i $(i = 1, \ldots, s)$ met $m + 2s = n$ en $b_i^2 - 4c_i < 0$ zó dat*

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)(x^2 + b_1x + c_1) \cdots (x^2 + b_sx + c_s).$$

Het kan voorkomen dat $m = 0$ of $s = 0$, hetgeen betekent dat er geen lineaire factoren of kwadratische factoren hoeven zijn. Ruw samengevat zegt onze stelling dat elk polynoom met reële coëfficienten geschreven kan worden als product van lineaire en kwadratische polynomen met reële coëfficienten, waarbij de kwadratische polynomen negatieve discriminant hebben.
Bewijs: Deze bewering is een gevolg van Gevolg 8.4.4. Er bestaan namelijk complexe getallen $a_1, \ldots, a_n$ zó dat

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Een aantal van de a_i, zeg de eerste m kunnen reëel zijn. De overige, niet-reële, nulpunten komen in complex geconjugeerde paren voor. Als namelijk a een complex nulpunt van P is, dan geldt, omdat P reële coëfficienten heeft, dat $P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = 0$. Dus $\overline{a}$ is ook een (complex) nulpunt van P. Het polynoom $(x - a)(x - \overline{a})$ is een kwadratisch polynoom met reële coëfficienten en negatieve discriminant. Door de paren complex geconjugeerde nulpunten van $P(x)$ bij elkaar te nemen, vinden we de gewenste kwadratische factoren.

□

Gevolg 8.4.6 *Een polynoom met coëfficienten in $\mathbb{R}$ en oneven graad heeft minstens één reëel nulpunt.*

Bewijs: Als de graad oneven is, kan de ontbinding van het polynoom in kwadratische en lineaire factoren niet uitsluitend uit kwadratische factoren bestaan. Er moet een lineaire factor zijn, en dus een reëel nulpunt.

□

8.5 Multipliciteiten en Jordan normaalvorm

Zoals gezegd wordt afwezigheid van een basis van eigenvectoren van een matrix M deels veroorzaakt door meervoudige nulpunten van het karakteristieke polynoom van M. Zij λ_0 een eigenwaarde van M. De dimensie van de eigenruimte E_{λ_0} noemen we de *meetkundige multipliciteit* van λ_0. De multipliciteit van λ_0 als nulpunt van $\det(M - \lambda I_n)$ noemen we de *algebraïsche multipliciteit* . Dan geldt

Stelling 8.5.1 *De algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde λ_0 is groter of gelijk aan de meetkundige multipliciteit.*

Bewijs: Om deze stelling in te zien, stellen we de meetkundige multipliciteit van λ_0 gelijk aan m. Kies een basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ van de eigenruimte van λ_0 en breidt deze uit tot een basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ van $\mathbb{R}^n$. Zij S de matrix met als i-de kolom de kolomvector $\mathbf{v}_i$. We schrijven ook wel $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Laat nu de matrix $M - \lambda I_n$ van links los op S. Omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ eigenvectoren van M zijn, geldt

$$(M - \lambda I_n)S = ((\lambda_0 - \lambda)\mathbf{v}_1, \ldots, (\lambda_0 - \lambda)\mathbf{v}_m, M\mathbf{v}_{m+1} - \lambda\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, M\mathbf{v}_n - \lambda\mathbf{v}_n).$$

Merk op dat de eerste m kolommen van de laatste matrix allen een factor $(\lambda_0 - \lambda)$ bevatten. Dus

$$\det(M - \lambda I_n)\det(S) = (\lambda_0 - \lambda)^m Q(\lambda)$$

waarin $Q(\lambda)$ de determinant is die we overhouden na wegdeling van de factoren $\lambda_0 - \lambda$. Merk op dat $Q(\lambda)$ een polynoom in λ is en $\det(S)$ een constante $\neq 0$. Het zou kunnen zijn dat $Q(\lambda_0) = 0$, maar in ieder geval is het duidelijk dat de algebraïsche multipliciteit van λ_0 minstens gelijk is aan m, waarmee de stelling bewezen is.

$\square$

Een extreem geval waarin meetkundige en algebraïsche multipliciteit uiteenlopen zijn matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{pmatrix}.$$

Met andere woorden, matrices met hetzelfde element a op de diagonaal, allemaal enen op de nevendiagonaal erboven en nullen op alle andere plaatsen. Een dergelijke matrix word ook wel *Jordan blok* genoemd met eigenwaarde a. Zij J een $n \times n$ Jordan blok met eigenwaarde a. De eigenwaarde vergelijking luidt $(a - \lambda)^n = 0$ (ga na!). We zien dus dat de algebraïsche multipliciteit van a gelijk is aan n. Daarentegen zien we ook dat de rang van $J - aI_n$ gelijk is aan $n - 1$,

en dus heeft de eigenruimte bij a dimensie 1. De meetkundige multipliciteit van a is daarmee 1. We zien dus dat Jordanblokken niet diagonaliseerbaar zijn, tenzij we $n = 1$ hebben, het 1×1-blok. In het geval $n = 1$ is het Jordan triviaal diagonaliseerbaar, het staat immers al in die vorm.
Met behulp van Jordanblokken kunnen we ook matrices vormen waarbij voor meerdere eigenwaarden de meetkundige en algebraïsche multipliciteit uit elkaar loopt. We doen dit door Jordanblokken als volgt op elkaar te stapelen. De blokken

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

stapelen we op tot

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In het algemeen:

$$\begin{pmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & J_2 & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_m \end{pmatrix}$$

waarin $J_1, J_2, \dots, J_m$ Jordanblokken van eventueel verschillende afmetingen zijn. De symbolen O staan voor nulmatrices van diverse afmetingen. Een diagonaalmatrix kunnen we ons opgebouwd denken uit 1×1 Jordanblokken. Matrices, opgebouwd uit Jordanblokken, noemen we *Jordan matrices*.

Stelling 8.5.2 (Jordan normaalvorm) *Zij M een $n \times n$-matrix met elementen in $\mathbb{R}$ resp $\mathbb{C}$, waarvan de eigenwaardevergelijking al zijn oplossingen in $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ heeft. Dan is er een inverteerbare matrix S en een Jordan matrix J zó dat*

$$S^{-1}MS = J.$$

Bovendien, als de eigenwaarde λ_0 van M algebraïsche multipliciteit m heeft, dan komt de λ_0 precies m maal op de diagonaal van J voor.

8.6 Cayley-Hamilton (optioneel)

Stel dat we een diagonaliseerbare $n \times n$-matrix M hebben. Zij S inverteerbaar zó dat $S^{-1}MS$ een diagonaalmatrix D is. De diagonaal elementen van D zijn precies de eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ van M. Stel dat het karakteristieke polynoom van M, na vermenigvuldiging met $(-1)^n$, gelijk is aan

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

De eigenwaarden λ_i zijn precies de nulpunten van dit polynoom. Dus moet ook gelden,

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = O, \tag{8.4}$$

waarin O de $n \times n$ nulmatrix is. Merk nu op dat $SDS^{-1} = M$, $SD^2S^{-1} = M^2, \ldots SD^nS^{-1} = M^n$. Conjugatie van (8.4) levert

$$SD^nS^{-1} + a_1 SD^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_{n-1} SDS^{-1} + a_n = O$$

en dus,

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \cdots + a_{n-1} M + a_n = O.$$

Deze laatste identiteit is een speciaal geval van de volgende stelling.

Stelling 8.6.1 (Cayley-Hamilton) *Zij M een $n \times n$ matrix en zij $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ het karakteristieke polynoom van M. Dan geldt,*

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \cdots + a_{n-1} M + a_n = O.$$

Het argument dat we boven gaven levert een bewijs van de Stelling van Cayley-Hamilton voor het geval dat M diagonaliseerbaar is. De stelling geldt echter voor iedere willekeurige $n \times n$ matrix M. Het bewijs voor dit algemene geval volgt later.

8.7 Een toepassing, Google's Pagerank (optioneel)

Eigenwaarden en eigenvectoren komen in de praktijk in talloze toepassingen voor. Met name in de natuurkunde, waarin trillingsverschijnselen en quantummechanica allen voorbeelden geven van eigenvectoren in (oneindigdimensionale) vectorruimten en operatoren die erop werken. Ook in de techniek, wiskunde, scheikunde etc. spelen ze een belangrijke rol. In deze paragraaf bespreken we de wiskunde achter een heel eigentijdse toepassing, namelijk de bepaling van de zogenaamde *page rank* die op gezette tijden door Google wordt opgesteld om een ranglijst naar relevantie van webpaginas over de hele wereld te geven. Hierover zijn veel artikelen op internet te vinden, wij noemen
`http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank` die je als achtergrondmateriaal zou kunnen lezen. Wij behandelen hier eerst het wiskundige idee en geven daarna kort weer hoe het bij Google toegepast wordt. De precieze details van de berekening zijn bedrijfsgeheim.
Zij A een $m \times m$ matrix en kies een startvector $\mathbf{x}_0$. Laat A hier herhaald op los,

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1, \quad \ldots \quad \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \quad \ldots$$

De vector $\mathbf{x}_k$ wordt natuurlijk gegeven door $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ voor elke $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Grote vraag is wat er gebeurt met $A^k\mathbf{x}_0$ als $k \to \infty$. Voor de beantwoording van deze vraag zijn eigenvectoren en eigenwaarden van A bijzonder handig. Neem om te beginnen aan dat A een basis van eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ heeft met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (eventueel over de complexe getallen). Schrijf nu

$\mathbf{x}_0$ als lineaire combinatie van de eigenvectoren, $x_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$ en merk op, dat

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m. \tag{8.5}$$

In het bijzonder, als $|\lambda_i| < 1$ voor alle i, dan geldt $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = 0$, ongeacht de startvektor $\mathbf{x}_0$. Trouwens, ook als er geen basis van eigenvektoren bestaat dan blijft deze uitspraak waar.

Stelling 8.7.1 *Stel dat de $m\times m$ matrix A eigenwaarden heeft die allen kleiner dan 1 zijn in absolute waarde (zowel de reële als complexe). Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} A^k = 0$ d.w.z., voor elke i, j gaat het element met index (i, j) in A^k naar 0 als $k \to \infty$.*

Laten we nu een matrix nemen met eigenwaarde 1 en $|\lambda| < 1$ voor alle andere eigenwaarden $\lambda \in \mathbb{C}$. Bijvoorbeeld,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft eigenwaarden $1, 1/2, -1/2$ en de eigenwaarde 1 heeft als bijbehorende eigenvector $(1, 1, 1)^t$. Voor de 5e en 10e macht van A vinden we, tot op vier decimalen,

$$A^5 = \begin{pmatrix} -0.9375 & -0.9062 & 2.8437 \\ -0.9687 & -1.0000 & 2.9687 \\ -0.9687 & -0.9687 & 2.9375 \end{pmatrix} \quad A^{10} = \begin{pmatrix} -0.99804 & -0.99902 & 2.9970 \\ -0.99902 & -0.99804 & 2.9970 \\ -0.99902 & -0.99902 & 2.9980 \end{pmatrix}$$

Het lijkt er dus op dat de kolommen van A^k naar een veelvoud van de eigenvector $(1, 1, 1)^t$ convergeren als $k \to \infty$. A fortiori convergeert $A^k\mathbf{x}_0$ voor elke startvector $\mathbf{x}_0$ naar een veelvoud van $(1, 1, 1)^t$. De eigenwaarde is de grootste van de drie eigenwaarden en we noemen het de dominante eigenwaarde. Deze speelt een belangrijke rol bij de bepaling van A^k als $k \to \infty$.
In het algemeen noemen we de eigenwaarde λ van de $m \times m$ matrix A een *dominante eigenwaarde* als λ algebraische multipliciteit 1 heeft en als voor iedere andere eigenwaarde μ, ook de complexe, geldt dat $|\mu| < |\lambda|$.

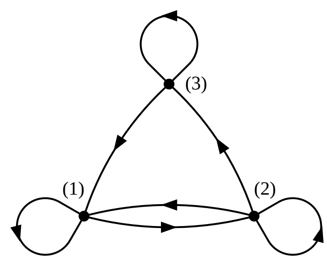
Stelling 8.7.2 *Stel dat de $m\times m$ matrix A een dominante eigenwaarde λ heeft. Zij $\mathbf{v}$ een eigenvektor bij λ. Dan is er bij elke $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ een scalair $c(\mathbf{x}_0)$ zó dat*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k A^k\mathbf{x}_0 = c(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}.$$

Merk op dat $(1/\lambda)^k A^k = (A/\lambda)^k$ en dat A/λ een matrix met dominante eigenwaarde 1 is. Dit is precies de situatie uit ons voorbeeld.
Indien A in Stelling 8.7.2 een basis van eigenvektoren heeft, dan is het bewijs niet lastig. Beschouw (8.5) en stel $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ en $\lambda_1 = \lambda$. We vinden,

$$(1/\lambda)^k A^k\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v} + \alpha_2(\lambda_2/\lambda)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m(\lambda_m/\lambda)^k\mathbf{v}_m.$$

Omdat $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ voor alle $i > 1$ volgt hieruit dat $\lim_{k\to\infty}(1/\lambda)^k A^k \mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}$. De coëfficient α_1 is de scalair $c(\mathbf{x}_0)$ uit de Stelling. Het bewijs voor het geval er geen basis van eigenvectoren bestaat is lastiger en laten we hier achterwege. In de praktijk hebben de matrices A waarmee we werken elementen die groter of gelijk aan nul zijn. Aan dergelijke matrices kunnen we een zogenaamde gerichte graaf toekennen. Voor elke index $i = 1, \ldots, m$ tekenen we een punt in het vlak en trekken een verbindingslijn van punt i naar punt j als het matrix element a_{ij} strikt positief is (dus niet nul). Voorbeeld, de matrix heeft als gerichte graaf



Definitie 8.7.3 *Onder een pad in de graaf verstaan we een opeenvolging van gerichte lijnstukken, waarbij het eindpunt van de één weer beginpunt van de ander is. Een gerichte graaf heet samenhangend als elk punt van de graaf via een pad met elk ander punt verbonden is. De graaf heet a-cyclisch als de grootste gemeenschappelijke deler van alle lengtes van gesloten paden gelijk is aan* 1.

Merk in het bijzonder op dat de graaf bij een matrix A a-cyclisch is als A een positief diagonaal-element a_{ii} heeft. De bijbehorende graaf heeft dan een verbinding van het punt (i) naar zichzelf en dat is een gesloten pad met lengte 1.

We hebben nu de volgende klassieke stelling, waarvan we het bewijs niet zullen geven.

Stelling 8.7.4 (Perron-Frobenius) *Zij A een $m \times m$-matrix met alle elementen ≥ 0. Als de bijbehorende graaf samenhangend en a-cyclisch is, dan heeft A een dominante eigenwaarde.*

Dat de twee voorwaarden nodig zijn moge blijken uit de volgende simpele voorbeelden. De graaf van $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ heeft de twee eigenwaarden 2 en dus geen dominante eigenwaarde. De bijbehorende graaf bestaat uit twee punten die alleen met zichzelf verbonden zijn, maar niet met elkaar. De graaf is dus niet samenhangend. Een ander voorbeeld is $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De eigenwaarden zijn ± 1 en er is dus geen dominante eigenwaarde. De graaf bestaat uit twee punten (1) en (2), waarbij (1) verbonden wordt met (2) en (2) met (1). Het is duidelijk dat elk gesloten pad bestaat uit herhaling van (1)→(2)→(1) of van (2)→(1)→(2). Elk gesloten pad heeft even lengte en de graaf is dus niet a-cyclisch.

We gaan nu terug naar *Google's page rank*. Het idee is om aan elke webpagina P een gewicht $I(P)$ van belangrijkheid toe te kennen. Stel bijvoorbeeld dat webpagina P_j l_j links heeft. Als zo'n link naar pagina P_i wijst, dan krijgt die pagina een bijdrage $I(P_j)/l_j$ aan zijn gewicht van webpagina P_j. Als we de verzameling pagina's die een link naar P_i hebben, aangeven met B_i, dan krijgen we:

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}.$$

Om de waarden van $I(P)$ te vinden moeten we dit stelsel lineaire vergelijkingen oplossen. Gezien de grootte van de coefficienten matrix is dit een onmogelijke taak. Het idee is om de oplossing te benaderen door er een eigenwaarde probleem van te maken. Stel we hebben N webpaginas. We stellen de $N \times N$-matrix G op door op plaats i, j de waarde $1/l_j$ te zetten als P_j naar P_i wijst en 0 anders. Geven we de vector met componenten $I(P_i)$ aan met $\mathbf{I}$ dan kunnen we bovenstaand stelsel vergelijkingen herschrijven als

$$\mathbf{I} = G\mathbf{I}.$$

Met andere woorden, $\mathbf{I}$ is een eigenvector met eigenwaarde 1 van G. We gaan ervan uit dat G bekend is, en de opgave is om $\mathbf{I}$ te berekenen. We gebruiken nu de Stelling van Perron-Frobenius. Kies een startvector $\mathbf{I}_0$ en laat G herhaald los, $\mathbf{I}_1 = G\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_2 = G\mathbf{I}_1, \ldots, \mathbf{I}_{k+1} = G\mathbf{I}_k, \ldots$. De opzet is dat de rij $\mathbf{I}_k$ naar een stationaire vector, de oplossing van ons probleem, convergeert en dat dit in redelijk snelle tijd gebeurt. Zoals we boven zagen zijn er restricties op de matrix opdat we convergentie krijgen. Die kunnen we forceren door in plaats van G de matrix $\alpha G + (1-\alpha)H/N$ te nemen waarin α een kleine parameter is en H de $N \times N$-matrix met 1 op elke plaats. Deze maatregel dempt eventuele ongewenste fluctuaties. Met een parameterwaarde van 0.85 lijkt het dat er 50 tot 100 iteraties nodig zijn om een acceptabele benadering van $\mathbf{I}$ te vinden. Een dergelijke berekening duurt enkele dagen. Dat de berekening met de reusachtige matrix G mogelijk is, komt doordat G een zogenaamde *sparse matrix* is. Dat wil zeggen, het merendeel van de coefficienten is nul en hoeft niet meegenomen te worden in de berekeningen.
Op gezette tijden (eens per maand?) wordt bij Google de benadering van de gewichtsvector $\mathbf{I}$ bijgewerkt en aangepast aan het veranderende internet.

8.8 Opgaven

Opgave 8.8.1 Bepaal voor de volgende matrices het karakteristieke polynoom, de eigenwaarden en de eigenvectoren.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d) \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -14 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad h)\quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad j)\quad \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 8 & -3 & 3 \\ 32 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$k)\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad l)\quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$m)\quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad n)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 8.8.2 Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices. Stel dat λ een eigenwaarde van A is en μ een eigenwaarde van B.

1. Laat met een voorbeeld zien dat $\lambda + \mu$ geen eigenwaarde hoeft te zijn van $A + B$.

2. Laat met een voorbeeld zien dat $\lambda\mu$ geen eigenwaarde hoeft te zijn van AB.

3. Stel dat λ en μ behoren bij dezelfde eigenvector. Laat zien dat $A + B$ eigenwaarde $\lambda + \mu$ heeft en AB eigenwaarde $\lambda\mu$.

Opgave 8.8.3 Zij A een $n \times n$-matrix. Bewijs dat A en A^t dezelfde eigenwaardevergelijking hebben.

Opgave 8.8.4 Zij A een $n \times n$ matrix zó dat de som van de elementen uit elke rij gelijk is aan 1. Bewijs dat A eigenwaarde 1 heeft.
Zij A een $n \times n$-matrix zó dat de som van de elementen uit elke kolom gelijk is aan 1. Bewijs dat A eigenwaarde 1 heeft.

Opgave 8.8.5 Zij A een $n \times n$-matrix en λ een eigenwaarde. Laat zien dat A^k eigenwaarde λ^k heeft voor elke $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
Stel bovendien dat A inverteerbaar is. Bewijs dat λ^{-1} een eigenwaarde is.

Opgave 8.8.6 Zij A een nilpotente $n \times n$-matrix, dat wil zeggen, er is een $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zó dat $A^k = O$. Bewijs dat 0 de enige eigenwaarde van A is.

Opgave 8.8.7 Gegeven is

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren. Bepaal een inverteerbare matrix S zó dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

Is S uniek bepaald? Geef meerdere mogelijkheden voor S.

Opgave 8.8.8 Zelfde vraag als daarnet maar nu voor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Opgave 8.8.9 Zijn de volgende matrices diagonaliseerbaar?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 8.8.10 Gegeven is de $n \times n$ diagonaal matrix Λ met elementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ op de diagonaal. Gegeven is dat alle λ_i verschillend zijn. Zij S een inverteerbare $n \times n$-matrix zó dat $S^{-1}\Lambda S = \Lambda$. Bewijs dat S een diagonaalmatrix is.

Opgave 8.8.11 Zij A een $n \times n$ matrix met n verschillende positieve eigenwaarden. Bewijs dat er een matrix B bestaat zó dat $B^2 = A$. Is B uniek bepaald?

Opgave 8.8.12 Zij A en B een tweetal geconjugeerde $n \times n$-matrices (dwz er bestaat een inverteerbare S zó dat $B = S^{-1}AS$). Bewijs dat A en B dezelfde eigenwaarde vergelijking hebben.

Opgave 8.8.13 Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices. Bewijs dat AB en BA dezelfde eigenwaardenvergelijking hebben. (Hint: begin met A of B inverteerbaar en gebruik de voorgaande opgave).
Laat ook zien dat $\mathrm{Spoor}(AB) = \mathrm{Spoor}(BA)$.

Opgave 8.8.14 Gegeven is het polynoom $q(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Beschouw de matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bewijs dat $\det(Q - \lambda I_n) = (-1)^n q(\lambda)$. Met andere woorden, $q(\lambda) = 0$ is de eigenwaardevergelijking van Q.

Opgave 8.8.15 Verifieer de Stelling van Cayley-Hamilton aan de hand van het voorbeeld

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Opgave 8.8.16 Zij A een inverteerbare 2×2-matrix met eigenwaardevergelijking $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Laat zien dat A^{-1} gegeven wordt door $A^{-1} = -\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I_2$.

Opgave 8.8.17 Zij M een $n \times n$-matrix met alleen maar eigenwaarden 0. Bewijs dat M nilpotent is (hint: gebruik Cayley-Hamilton).

Opgave 8.8.18 Beschouw de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.
2. Bereken de kern van A.
3. Bepaal een basis van $A(\mathbb{R}^3)$.

Opgave 8.8.19 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

Opgave 8.8.20 Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 + \alpha - 2 & 0 \\ 1 & 2\alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de eigenwaarden van A_α.
2. Eén eigenwaarde is onafhankelijk van α. Bepaal de eigenruimte behorend bij deze eigenwaarde.
3. Voor welke waarde(n) van α heeft A_α een tweedimensionale eigenruimte in $\mathbb{R}^3$?

Opgave 8.8.21 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} -10 & 7 & 11 \\ -6 & 5 & 6 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

Opgave 8.8.22 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de eigenwaarden $1, -1$ en 0. Ten opzichte van de standaardbasis is $(1,1,1)$ een eigenvector bij de eigenwaarde 1, $(1,2,0)$ een eigenvector bij de eigenwaarde -1 en $(3,0,1)$ een eigenvector bij de eigenwaarde 0. Bereken de matrix van A ten opzichte van de standaardbasis.

Opgave 8.8.23 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft ten opzichte van de standaardbasis de matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de eigenwaarden van A en de corresponderende eigenvectoren.

2. Is het mogelijk om een basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ te vinden, zó dat de matrix van A ten opzichte van deze basis een diagonaalmatrix is? Hoeveel van deze bases kunnen gevonden worden?

Opgave 8.8.24 Zelfde opgave als daarnet, maar nu met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 8.8.25 Dezelfde vragen als daarnet maar nu twee afbeeldingen $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met respectievelijk de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 8.8.26 In een n-dimensionale vectorruimte V zijn $A : V \to V$ en $B : V \to V$ een tweetal lineaire afbeeldingen.

1. (Lastig als A, B niet inverteerbaar) Bewijs dat de lineaire afbeeldingen AB en BA dezelfde eigenwaarden hebben.

2. Als A een bijectieve afbeelding is en λ een eigenwaarde van A, dan is λ^{-1} een eigenwaarde van A^{-1}.

3. Bewijs dat, als A een eigenwaarde λ heeft met bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}$, deze vector tevens eigenvector van A^n is met eigenwaarde λ^n.

4. Zij A, B en tweetal $n \times n$-matrices. Bewijs dat $\text{Spoor}(AB) = \text{Spoor}(BA)$.

Opgave 8.8.27 Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding. Gegeven is dat $A^2 = A$. Bewijs dat elke eigenwaarde van A of 0 of 1 is.

Opgave 8.8.28 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft de matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ met $\gamma \neq 0$. Bovendien is gegeven dat $A^2 = A$.

1. Bewijs dat $\alpha + \delta = 1$ en dat $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$. Druk β in α en γ uit.

2. Bereken de eigenwaarden van A of beredeneer welke eigenwaarden A heeft.

Opgave 8.8.29 De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de eigenwaarden van A en bepaal de corresponderende eigenruimten.
2. Bepaal de vergelijking van het vlak dat onder A invariant is.

Opgave 8.8.30 Zij $M_{22}(\mathbb{R})$ de vectorruimte van twee bij twee matrices met elementen in $\mathbb{R}$. Een basis van deze vectorruimte wordt gegeven door

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definieer de afbeelding $T : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ door

$$T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M^t,$$

waarin $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.
2. Bepaal de matrix van T ten opzichte van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$.
3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

Opgave 8.8.31 Zij $\mathbb{R}[X]_2$ de ruimte van polynomen van graad hooguit 2 met coefficienten in $\mathbb{R}$. Definieer de afbeelding $T : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}[X]_2$ door $T : p(X) \mapsto p(X+1)$.

1. Bewijs dat T lineair is.
2. Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis $1, X, X^2$.
3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

Opgave 8.8.32 Definieer $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ door $T : p(X) \mapsto \int_0^X p(t)dt$.

1. Bewijs dat T een lineaire afbeelding is, en dat T injectief, maar niet surjectief is.
2. Bewijs dat T geen eigenvectoren heeft.

Opgave 8.8.33 Zij $\mathbb{R}[X]_n$ de vectorruimte van polynomen met graad $\leq n$. Definieer $T : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ door $T : p(X) \mapsto p(X) + Xp'(X)$.

1. Bewijs dat T inderdaad $\mathbb{R}[X]_n$ naar zichzelf afbeeldt en lineair is.
2. Laat zien dat $1, X, X^2, \ldots, X^n$ een basis van $\mathbb{R}[X]_n$ is.
3. Vindt alle eigenwaarden en eigevectoren van T in het geval dat $n = 2$.
4. Vindt alle eigenwaarden en eigenvectoren in het algemene geval.

Opgave 8.8.34 Definieer $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ door $T : p(X) \mapsto xp''(X) + p'(X)$. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van T.

Opgave 8.8.35 Zij $\mathbb{R}[X]_n$ de vectorruimte van polynomen met graad $\leq n$. Definieer $T : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ door $T : p(X) \mapsto -p''(X) + Xp'(X)$.

1. Bewijs dat T inderdaad $\mathbb{R}[X]_n$ naar zichzelf afbeeldt en lineair is.
2. Laat zien dat $1, X, X^2, \ldots, X^n$ een basis van $\mathbb{R}[X]_n$ is.
3. Vindt alle eigenwaarden van T in het geval dat $n = 2$.
4. Vindt alle eigenwaarden in het algemene geval.

Opgave 8.8.36 Zij $\mathbb{R}[X]_n$ de vectorruimte van polynomen met graad $\leq n$. Definieer $T : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}[X]_2$ door $T : p(X) \mapsto (X^3 - X)p''(X) + X^2p'(X) - 4Xp(X)$.

1. Verifieer dat T de ruimte $\mathbb{R}[X]_2$ naar zichzelf afbeeldt en dat T lineair is.
2. Schrijf de matrix van T uit ten opzichte van de geordende basis $1, X, X^2$.
3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.
4. Laat zien dat T de ruimte $\mathbb{R}[X]_3$ niet naar zichzelf afbeeldt.

Opgave 8.8.37 Zij V een eindigdimenisonale vectorruimte en $A, B : V \to V$ een tweetal lineaire afbeeldingen. Stel dat er een basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ van V is, bestaande uit eigenvectoren van A met verschillende eigenwaarden. Bewijs:

$$AB = BA \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \text{ zijn eigenvectoren van } B.$$

Opgave 8.8.38 Beschouw de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ gegeven door $A : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$ ('shift operator'). Bewijs dat A geen eigenvectoren heeft.

Opgave 8.8.39 Bewijs dat de functies $\sin(kx)$ voor $k = 1, 2, \ldots$ lineair onafhankelijk zijn door middel van Stelling 8.3.1 en een geschikte lineaire afbeelding van de ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ naar zichzelf.

Hoofdstuk 9

Vectorruimten met inproduct

9.1 Inwendige producten

Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Een *inwendig product* op V is een functie $V \times V \to \mathbb{R}$, genoteerd met $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, die aan de volgende eigenschappen voldoet.

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ voor elke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
2. $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ voor elke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ voor elke $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ voor alle $\mathbf{x} \in V$ en bovendien: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Eigenschappen (ii) en (iii) laten zien dat een inproduct linear is in het eerste argument. Wegens de symmetrie (i) geldt nu dat een inproduct ook lineair is in het tweede argument. Dat wil zeggen:

$$\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$$

voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Hier zijn een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 9.1.1. $V = \mathbb{R}^n$ met het standaard inproduct of dotproduct

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.2. $V = \mathbb{R}_0^\infty$, de ruimte van oneindige rijen reële getallen die vanaf zeker moment nul zijn. Als inproduct kunnen we nemen:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.3. (optioneel) Iets interessanter is de deelruimte l^2 van $\mathbb{R}^\infty$ bestaande uit alle oneindige rijen $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ zó dat de reeks $\sum_{i=1}^\infty x_i^2$ convergent is. Dat l^2 een deelruimte is, volgt uit de volgende observaties.

1. $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots) \in l^2$ want $\sum_{i=1}^{\infty} 0^2 = 0$.
2. Stel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, en dus ook $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_i)^2$. Dus $\lambda \mathbf{x} \in l^2$.
3. Stel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$. Dan geldt voor elke n dat $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} 2(x_i^2 + y_i^2)$. Omdat de reeksen $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ en $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ convergeren, convergeert $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2$ ook.

Als inproduct van $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ nemen we $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. We moeten wel laten zien dat deze reeks convergeert. Deze convergentie blijkt zelfs absoluut te zijn. Voor elke n geldt namelijk volgens de ongelijkheid van Schwarz dat,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Omdat de reeksen $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ en $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ convergeren, convergeert $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$ ook.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.4. $V = \mathbb{R}^2$ met

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

Opgave: ga zelf na dat dit een inproduct is. We zien hiermee dat er, naast het gebruikelijke dotproduct, vele andere inproducten op $\mathbb{R}^2$ zijn. Hetzelfde geldt uiteraard ook voor $\mathbb{R}^n$ met $n > 2$.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.5. $V = C([0, 1])$, de verzameling van continue functies op $[0, 1]$ en $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. We zullen eigenschappen (i) tot en met (iv) voor dit inproduct controleren.

1. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 g(x) f(x) dx = \langle g, f \rangle$.
2. $\langle \lambda f, g \rangle = \int_0^1 \lambda f(x) g(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) g(x) dx = \lambda \langle f, g \rangle$.
3. $\langle f + g, h \rangle = \int_0^1 (f(x) + g(x)) h(x) dx = \int_0^1 f(x) h(x) dx + \int_0^1 g(x) h(x) dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.
4. $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 dx \ge \int_0^1 0 \cdot dx = 0$. We moeten nu nog laten zien dat $\langle f, f \rangle = 0$ impliceert dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$. Vaak is dit de lastigste stap in het bewijs dat we met een inproduct te maken hebben. In dit geval maken gebruik van de continuiteit van $f(x)$. Stel namelijk dat er een punt $x_0 \in [0, 1]$ is met $f(x_0) \ne 0$. Dat betekent dat $f(x_0)^2 > 0$. Wegens de continuiteit van $f(x)^2$ is er een $\delta > 0$ zodat $f(x)^2 \ge f(x_0)^2/2$ voor alle $x_0 \in [0, 1] \cap [-\delta, \delta]$. De lengte van dit laatste interval is minstens δ. Dat betekent dat $\int_0^1 f(x)^2 dx$ groter of gelijk δ maal $f(x_0)^2/2$ is. Conclusie, $\int_0^1 f(x)^2 dx > 0$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat de integraal 0 is. Het kan blijkbaar dus niet gebeuren dat $f(x_0) \ne 0$. Gevolg, $f(x_0) = 0$ voor alle $x_0 \in [0, 1]$.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.6. $V = \mathbb{R}[x]$ met als inproduct $\langle p, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}dx$. Het bewijs dat dit een inproduct is verloopt op analoge wijze als bij het vorige voorbeeld.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.1.7. Er zijn ook vectorruimten waarbij het helemaal niet duidelijk is of er een inproduct op te definiëren valt. Probeer maar eens een inproduct te bedenken op $\mathbb{R}^\infty$, of op $C(\mathbb{R})$, de ruimte van continue functies op $\mathbb{R}$.

$\diamondsuit$

Stel dat V een vectorruimte met inproduct is. We definiëren de lengte van een vector $\mathbf{v} \in V$ als $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$. Notatie: $||\mathbf{v}||$. Evenals bij het dotproduct geldt ook hier de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.*

Stelling 9.1.8 *Zij V een vectorruimte met inproduct. Dan geldt voor elk tweetal $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ de ongelijkheid*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Bewijs: Het bewijs kunnen we hier verbatim overnemen van het bewijs voor het dotproduct. Als $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan zijn beide zijden van de ongelijkheid nul, en dus klopt de ongelijkheid. Stel nu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dan geldt ook dat $||\mathbf{x}|| > 0$. Dit volgt uit eigenschap (iv) van het inproduct. Voor elke keuze van $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $0 \leq ||\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}||$. Laten we dit uitwerken.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \end{aligned}$$

De rechterkant kan gezien worden als een kwadratische functie in λ die uitsluitend waarden ≥ 0 aanneemt. De discriminant is dus ≤ 0. Met andere woorden,

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \leq 0.$$

Hieruit volgt dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$ en dus de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

$\square$

De ongelijkheid van Schwarz in het geval van de ruimte van continue functies op $[0, 1]$ luidt dus,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2dx\right).$$

Het waren ongelijkheden van dit type die door H.A.Schwarz in zijn werk gebruikt werden.
Stel dat V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met een inproduct $\langle ., .\rangle$. Voor elk tweetal elementen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ kunnen we *afstand* tussen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ definiëren door $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$. Voor deze afstand geldt,

1. Voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||$ en $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \geq 0$.
2. Voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ geldt
$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{z}|| + ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||$$
(driehoeksongelijkheid).
3. $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Met de afstandsfunctie $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$ is V een zogenaamde *metrische ruimte* geworden. Als laatste noemen we nog de *Stelling van Pythagoras* voor inproduct ruimten: Als $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ dan geldt $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$. Dit is opgave 9.4.8(a).

9.2 Orthogonale en orthonormale stelsels

Zij V een vectorruimte met inproduct. We zeggen dat twee vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *orthogonaal* zijn ten aanzien van het inproduct als $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Een verzameling vectoren $S \subset V$ heet *orthogonaal stelsel* als $\mathbf{0} \notin S$ en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ voor elk tweetal verschillende vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$. Een verzameling $S \subset V$ heet *orthonormaal stelsel* als S een orthogonaal stelsel is en bovendien $||\mathbf{x}|| = 1$ voor elke $\mathbf{x} \in S$.

Stelling 9.2.1 *Zij S een orthogonaal stelsel vectoren. Dan is S een onafhankelijk stelsel.*

Bewijs: Stel dat we een relatie hebben van de vorm
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$
met $\mathbf{v}_i \in S$. Kies i en neem aan beide zijden het inproduct met $\mathbf{v}_i$. We krijgen, vanwege de lineariteit van het inproduct in zijn eerste argument,
$$\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + \lambda_r \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0.$$
Wegens de orthogonaliteit van de vectoren $\mathbf{v}_j$ zijn alle inproducten $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \rangle$ nul, behalve die met $k = i$. We houden dus over,
$$\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0.$$
Gegeven is dat $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$. Dus $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle > 0$ en we concluderen dat $\lambda_i = 0$. We kunnen alleen maar triviale relaties tussen de elementen van S hebben, en dus is S onafhankelijk.

□

Voorbeeld 9.2.2. (optioneel) Zij V de vectorruimte van continue functies op $[-\pi, \pi]$ met als inproduct $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$. Dan is het stelsel functies
$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin mx, \cos mx, \ldots$$

een orthonormaal stelsel. Ter illustratie laten we de orthonormaliteit van het stelsel functies $\sin mx$ met $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ zien. We maken daarbij gebruik van de gonio-identiteit

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x - \frac{1}{2}\cos(m+n)x.$$

Stel nu $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Merk op dat

$$\begin{aligned} \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx \end{aligned}$$

Als $k \in \mathbb{Z}$ en $k \neq 0$ dan weten we dat $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$. Dus, als $m \neq n$ dan volgt uit bovenstaande berekening dat $\langle \sin mx, \sin nx \rangle = 0$. Als $m = n$ dan vinden we dat $\langle \sin mx, \sin mx \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)^2 \cdot dx = 1$.
We laten het aan de lezer over om orthonormaliteit van het stelsel inclusief de overige vectoren aan te tonen.

$\diamondsuit$

Een orthogonaal respectievelijk orthonormaal stelsel dat tevens basis is van de vectorruimte V noemen we een *orthogonale basis* respectievelijk *orthonormale basis*.

Stelling 9.2.3 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte $\neq \{\mathbf{0}\}$ met inproduct. Dan heeft V een orthonormale basis.*

Bewijs: Het bewijs van deze stelling volgt door inductie naar $\dim(V)$. Stel dat $\dim(V) = 1$. In dat geval is de stelling duidelijk, elke vector met lengte 1 vormt een orthonormale basis.
Stel nu $n = \dim(V) > 1$, en neem aan dat de stelling bewezen is voor elke vectorruimte van dimensie $n-1$. Kies een basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ van V. Definieer nu

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i - \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1$$

voor $i = 2, \ldots, n$. Dan vormen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*$ ook een basis van V en $\mathbf{v}_i^*$ is orthogonaal met $\mathbf{v}_1$ voor alle $i \geq 2$ (controleer dit door uit te rekenen!). We noemen $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}$. De deelruimte $\text{Span}(\mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*)$ heeft dimensie $n-1$. Volgens de inductiehypothese heeft deze deelruimte een orthonormale basis. Laten we deze $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ noemen. Dan vormen de vectoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ samen een orthonormale basis van V.

$\square$

In bovenstaand bewijs zit een inductief proces verborgen om daadwerkelijk een orthormale basis te construeren. Deze constructie staat bekend als het *Gram-Schmidt procédé*.

Gegeven een basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ van een vectorruimte V met inproduct. Vorm hieruit de zogenaamde *Gram-matrix* met als elementen de inproducten $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$. Vul deze Gram-matrix van rechts aan met de vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Dus,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{v}_1 \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{v}_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{v}_n \end{array}\right).$$

We brengen nu door rijen te vegen de Gram-matrix in bovendriehoeksvorm. We mogen hierbij *alleen veelvouden van rijen bij andere rijen optellen of aftrekken! Verwisseling van rijen of scalaire vermenigvuldiging met een rij is absoluut verboden*! Bij het veegproces nemen we ook de vectoren rechts van de Gram-matrix mee. Het resultaat is een nieuwe basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ van V zó dat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{w}_1 \\ \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{w}_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n \rangle & \mathbf{w}_n \end{array}\right),$$

en $\mathbf{w}_i \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i)$ voor alle i en $\mathbf{w}_i \perp \mathbf{v}_j$ voor alle i, j met $j < i$. In het bijzonder volgt hieruit dat $\mathbf{w}_i$ loodrecht staat op alle vectoren in $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1})$ en in het bijzonder, $\mathbf{w}_i \perp \mathbf{w}_j$ voor alle $j = 1, 2, \ldots, i-1$. De vectoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ vormen een orthogonale basis van V en door de vectoren te normaliseren krijgen we een orthonormale basis.
Een bijzondere bonus van deze procedure is dat de diagonaalelementen van de gereduceerde matrix precies de inproducten $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle$ zijn.

Voorbeeld 9.2.4. Gevraagd een orthonormale basis van de deelruimte $W \subset \mathbb{R}^4$ opgespannen door $(1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 0)$. Laten we deze vectoren aangeven met respectievelijk $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$. Als inproduct nemen we het standaard inproduct op $\mathbb{R}^4$. De Gram matrix wordt

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Samen met de rijvectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ geeft dit de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

We passen nu veegoperaties toe zodanig dat de Gram-matrix in bovendriehoeksvorm komt. In de eerste kolom vegen,

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 & -1/3 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{array}\right).$$

In de tweede kolom vegen,

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

De rijvectoren in het rechterdeel zijn nu orthogonaal geworden en de gevraagde orthonormale basis wordt gegeven door

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1).$$

Merk op dat de diagonaalelementen $3, 3, 1/3$ precies de lengten in het kwadraat van de orthogonale basisvectoren zijn.

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.2.5. Zij $V = \mathbb{R}^2$ met inproduct $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$. We starten met $\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1)$. De bijbehorende Gram-matrix is

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Samen met $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ geeft dit

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen in eerste kolom van de Gram-matrix,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

De vectoren $(1, 0)$ en $(-1/2, 1)$ zijn orthogonaal met betrekking van ons inproduct. De lengtes zijn $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3/2}$. De orthonormale basis wordt dus

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2).$$

$\diamondsuit$

Voorbeeld 9.2.6. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ met inproduct $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. We nemen $\mathbf{v}_0 = 1, \mathbf{v}_1 = x, \mathbf{v}_2 = x^2, \ldots, \mathbf{v}_n = x^n, \ldots$ en passen hierop het Gram-Schmidt procédé toe. Laten we, om de gedachten te bepalen, beginnen met $1, x, x^2$. De Gram-matrix wordt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Uitgebreid met de vectoren $1, x, x^2$ geeft dit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & x \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & x^2 \end{array}\right).$$

We vinden achtereenvolgens,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & x-1/2 \\ 0 & 1/12 & 4/45 & x^2-1/3 \end{array}\right)$$

en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & x-1/2 \\ 0 & 0 & 1/180 & x^2-x+1/6 \end{array}\right).$$

We zien dat $1, x-1/2, x^2-x+1/6$ een orthognaal stelsel vormen en hun lengtes zijn $1, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{180}$. Het is duidelijk dat we dit proces kunnen voortzetten met $x^3, x^4, \ldots$. We vinden de polynomen

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x-\frac{1}{2} \\ P_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6} \\ P_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20} \\ \vdots\quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

De polynomen die we op deze wijze krijgen zijn, op een factor na, de zogenaamde *Legendre polynomen* op het interval $[0,1]$. De algemene formule luidt

$$P_n(x) = \frac{1}{2n(2n-1)\cdots(n+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(x-1)^n.$$

Deze polynomen vormen een voorbeeld van zogenaamde *orthogonale polynomen* en zijn belangrijk in vele, vaak numerieke, toepassingen.
Het orthogonalisatieprocédé ten aanzien van $\langle p,q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}dx$ levert weer een andere klasse van orthogonale polynomen op, de zogenaamde *Hermite polynomen.*

$\diamondsuit$

Hoewel we gezien hebben dat er op $\mathbb{R}^n$ vele inproducten mogelijk zijn, blijkt het in de praktijk wel weer mee te vallen. De volgende stelling is daar verantwoordelijk voor.
Een orthonormale basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ van een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct heeft de eigenschap dat

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i=j \\ 0 & \text{als } i\neq j \end{cases}$$

Het symbool δ_{ij} staat bekend als de *Kronecker delta.*

Stelling 9.2.7 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte $\neq \{\mathbf{0}\}$ met inproduct en zij $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ een orthonormale basis. Van het tweetal vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geven we de coördinaten t.o.v. de geordende basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ aan met $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectievelijk $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dan geldt:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Bewijs: Deze stelling kunnen we afleiden door in $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ de expansies $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ en $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$ in te vullen en van de lineariteitseigenschappen van het inproduct gebruik te maken.

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n
\end{aligned}
$$

□

9.3 Orthogonale projecties

Zij V een vectorruimte met inproduct en W een deelverzameling. Het *orthogonaal complement* van W is de verzameling vectoren

$$\{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ voor alle } \mathbf{w} \in W\}.$$

Notatie: $W^\perp$.
Het zal duidelijk zijn dat iedere vector uit W loodrecht op alle vectoren van $W^\perp$ staat. Dus $W \subset (W^\perp)^\perp$. Verder geldt dat als W een lineaire deelruimte is van V dat $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Stel namelijk $\mathbf{x} \in W$ en $\mathbf{x} \in W^\perp$. Dat betekent dat $\mathbf{x}$ loodrecht op zichzelf staat, m.a.w. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Maar dit impliceert dat $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Stelling 9.3.1 *Zij V een vectorruimte met inproduct en W een eindigdimensionale deelruimte. Dan bestaat er bij iedere $\mathbf{v} \in V$ een uniek bepaalde vector $\mathbf{w} \in W$ zó dat $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^\perp$.*

Bewijs: We zullen eerst een vector $\mathbf{w}$ aangeven die inderdaad de gewenste eigenschap heeft. Neem hiertoe een orthonormale basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ van W. Dan heeft de vector

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_m$$

de eigenschap dat $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^\perp$. Om dit aan te tonen is het voldoende om te laten zien dat $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{e}_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, m$. En inderdaad,

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle \, \delta_{ij} \\ &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle = 0 \end{aligned}$$

De existentie van een $\mathbf{w}$ zo dat $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^{\perp}$ is hiermee aangetoond. Nu moeten we nog laten zien dat $\mathbf{w}$ uniek bepaald is. Stel dat we een andere vector $\mathbf{w}'$ hebben zo dat $\mathbf{v} - \mathbf{w}' \in W^{\perp}$. Dan geldt $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = (\mathbf{v} - \mathbf{w}') - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in W^{\perp}$. Anderzijds geldt ook dat $\mathbf{w} - \mathbf{w}' \in W$. Omdat W en $W^{\perp}$ een triviale doorsnede hebben, moet gelden $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0}$, en dus $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. Daarmee is ook de uniciteit van $\mathbf{w}$ aangetoond.

□

We noemen de vector $\mathbf{w}$ de loodrechte of *orthogonale projectie* van $\mathbf{v}$ op W. De afbeelding $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$ noemen we ook de orthogonale projectie op W en we zullen deze afbeelding aangeven met P_W. Als verder $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ een orthonormale basis van W is, dan hebben in bovenstaand bewijs gezien dat

$$P_W(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_m. \tag{9.1}$$

Stelling 9.3.2 *Neem notaties zoals hierboven. De afbeelding* $P_W : V \to V$ *is een lineaire afbeelding. Bovendien geldt dat* $\langle \mathbf{x}, P_W(\mathbf{y}) \rangle = \langle P_W(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$ *voor elk tweetal* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Bewijs: Dat P_W lineair is volgt direct uit formule (9.1). Omdat $\mathbf{x} - P_W(\mathbf{x})$ in $W^{\perp}$ bevat is, geldt dat $\langle \mathbf{x}, P_W(\mathbf{y}) \rangle = \langle P_W(\mathbf{x}), P_W(\mathbf{y}) \rangle$. Dezelfde redenatie kunnen we ook voor $\mathbf{y}$ houden en daarmee zien we dat het laatste inproduct gelijk is aan $\langle P_W(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$.

□

Voorbeeld 9.3.3. Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 0, 2)^t$ en $\mathbf{w}_2 = (1, -1, -1, 1)^t$. Bepaal de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)^t$ op W.
Allereerst bepalen we een orthonormale basis van W met het Gram-Schmidt procédé toegepast op $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Schrijf deze vectoren in rij-vorm, aangevuld met de Gram-matrix van $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Veeg de eerste kolom van de Gram-matrix,

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & -4/3 & -1 & 1/3 \end{array} \right).$$

De tweede rij vector staat nu loodrecht op de eerste. We krijgen een orthonormale basis als we de lengtes op 1 normaliseren. Dus een orthonormale basis wordt gegeven door

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0, 2), \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -4, -3, 1).$$

Volgens het bewijs van Stelling 9.3.1 wordt de orthogonale projectie van $\mathbf{a} = (1,0,0,1)^t$ gegeven door

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= \frac{3}{6}(1,1,0,2)^t + \frac{3}{30}(2,-4,-3,1)^t \\ &= \frac{1}{10}(7,1,-3,11)^t\end{aligned}$$

We kunnen ook de matrix van de orthogonale projectie uitrekenen. Dit doen we bijvoorbeeld door de projectie van de standaard basisvectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ van $\mathbb{R}^4$ uit te rekenen.

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{10}(3,-1,-2,4)^t \\ (\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{10}(-1,7,4,2)^t \\ (\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{10}(-2,4,3,-1)^t \\ (\mathbf{e}_4\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_4\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{10}(4,2,-1,7)^t\end{aligned}$$

De matrix van de projectie bestaat uit de beelden van $\mathbf{e}_1$ tot en met $\mathbf{e}_4$, kolomsgewijs opgeschreven,

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Merk op dat deze matrix symmetrisch is!

$\diamondsuit$

Tevens volgt uit bovenstaande de volgende belangrijke opmerking.

Opmerking 9.3.4 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ een geordende orthonormale basis. Dan worden de coördinaten van een vector $\mathbf{x} \in V$ t.o.v $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ gegeven door $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x}\rangle, \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x}\rangle, \ldots, \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{x}\rangle$.*

Een tweede belangrijke opmerking betreft matrices van lineaire afbeeldingen ten opzichte van orthonormale bases.

Opmerking 9.3.5 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ een geordende orthonormale basis. Zij $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Zij $\mathcal{A}$ de matrix van A ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Zij a_{ij} het matrix element van $\mathcal{A}$ op plaats i, j. Dan geldt $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j\rangle$.*

Bewijs: Het matrixelement a_{ij} is de i-de coördinaat van $A\mathbf{e}_j$ ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Dus volgt uit voorgaande opmerking dat $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{v}_j\rangle$

$\square$

Studenten die ook colleges quantummechanica volgen, komen bovenstaande regels talloze malen tegen.

Voorbeeld 9.3.6. (optioneel) Een mooie toepassing van orthogonale projectie is die van de zogenaamde Fouriersommen. We starten met de continue functies op het interval $[-\pi, \pi]$, dus $C([-\pi, \pi])$, met inproduct $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. We projecteren deze loodrecht op de ruimte W opgespannen door

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin mx, \cos mx.$$

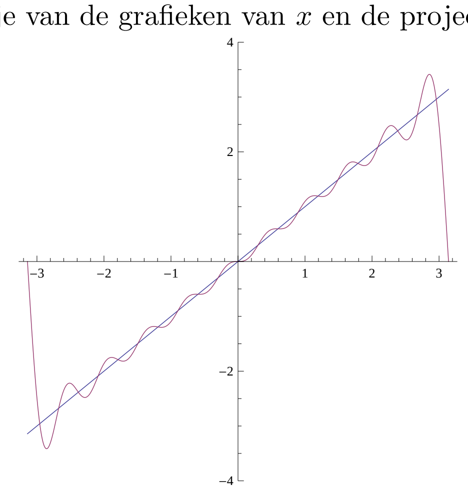
We zagen eerder dat deze functies een orthormaal stelsel vormen. Ter illustratie starten we met de functie $f(x) = x$ en projecteren deze op W. Omdat $x/\sqrt{2}$ en $x \cos kx$ oneven zijn voor elke k, zien we dat het inproduct van x met $1/\sqrt{2}$ en de functie $\cos kx,\ k \in \mathbb{Z}_{>0}$ nul is. We hoeven dus alleen het inproduct van x en $\sin kx,\ k \in \mathbb{Z}_{>0}$ uit te rekenen. We doen dit met partiele integratie als volgt.

$$\begin{aligned}
\langle x, \sin kx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}[-x(\cos kx)/k]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \\
&= 2 \cdot (-1)^{k-1}/k.
\end{aligned}$$

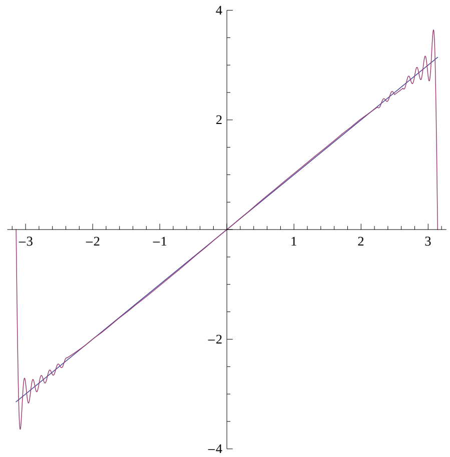
In de één na laatste regel gebruiken we dat de integraal van de symmetrische $\cos kx$ nul is. De gevraagde projectie wordt dus:

$$f_m(x) := 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{\sin mx}{m}\right).$$

Hier zie je een plaatje van de grafieken van x en de projectie $f_{10}(x)$,



Hier zie je een plaatje van de grafieken van x en de projectie $f_{50}(x)$,



◇

Voorbeeld 9.3.7. (optioneel) Een mooie toepassing van loodrechte projecties is die van de zogenaamde *kleinste kwadraten methode* van Gauss. Deze wordt gebruikt om de optimale rechte lijn te bepalen die langs een stel meetpunten gaat bij bijvoorbeeld een fysisch experiment. In zo'n experiment doen we metingen van een grootheid, zeg y, die met de tijd t varieert. We nemen aan dat de afhankelijkheid van y met de tijd t gegeven wordt door een lineaire functie $y = at + b$ waarvan de coëfficienten a, b onbekend zijn. We willen graag de waarden van a, b uit ons experiment willen bepalen. We doen de meting op een aantal tijdstippen $t_1, t_2, \ldots, t_n$. De bijbehorende meetwaarden zijn $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Door allerlei meetfouten, storingen, etc zullen de punten (t_i, y_i) niet precies op één rechte lijn liggen. De vraag is nu om die a, b te bepalen zó dat de punten (t_i, y_i) gezamenlijk zo dicht mogelijk bij de lijn $y = at + b$ komen te liggen. Door overwegingen van practische aard wordt deze vraag als volgt concreet gemaakt: Bepaal a, b zodanig dat $(-y_1+at_1+b)^2+\cdots+(-y_n+at_n+b)^2$ een minimale waarde heeft. Ervan uitgaande dat de meetfouten een statistisch normale verdeling hebben, geeft deze aanpak de meest waarschijnlijke waarden voor a, b.

We kunnen deze vraag een meetkundige interpretatie geven. Gegeven is het punt $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Verder hebben we de deelruimte W opgespannen door $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^t$ en $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^t$. De som van de kwadraten is gelijk aan het kwadraat van de afstand $|-\mathbf{y} + a\mathbf{t} + b\mathbf{1}|$. Minimalisatie van deze afstand komt nu neer op de bepaling van de loodrechte projectie van $\mathbf{y}$ op W (zie opgave 9.4.8). We moeten dus a, b bepalen zó dat $-\mathbf{y}+a\mathbf{t}+b\mathbf{1}$ loodrecht staat op zowel $\mathbf{t}$ als $\mathbf{1}$. Dit geeft ons twee lineaire vergelijkingen, te weten

$$
\begin{aligned}
0 &= (-\mathbf{y} + a\mathbf{t} + b\mathbf{1}) \cdot \mathbf{t} = -(\mathbf{y} \cdot \mathbf{t}) + a(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) + b(\mathbf{1} \cdot \mathbf{t}) \\
&= -t_1 y_1 - \cdots - y_n t_n + a(t_1^2 + \cdots + t_n^2) + b(t_1 + \cdots + t_n) \\
0 &= (-\mathbf{y} + a\mathbf{t} + b\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} = -(\mathbf{y} \cdot \mathbf{1}) + a(\mathbf{t} \cdot \mathbf{1}) + b(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) \\
&= -y_1 - \cdots - y_n + a(t_1 + \cdots + t_n) + bn
\end{aligned}
$$

Oplossing van a, b hieruit levert ons

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2} \begin{pmatrix} \overline{ty} - (\overline{y})^2 \\ (\overline{t^2})(\overline{y}) - (\bar{t})(\overline{ty}) \end{pmatrix}$$

waarin we de volgende afkortingen gebruiken,

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{n}(t_1 + \cdots + t_n) \\ \overline{t^2} &= \frac{1}{n}(t_1^2 + \cdots + t_n^2) \\ \overline{y} &= \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n) \\ \overline{ty} &= \frac{1}{n}(t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n) \end{aligned}$$

De methode werd in 1809 door C.F.Gauss gepubliceerd. Een spectaculaire toepassing was het gebruik van de methode in de herontdekking van de destijds pas gevonden planetoïde Ceres. Deze planetoïde was in 1801 door de astronoom G.Piazzi ontdekt. Na 40 dagen verdween Ceres uit het zicht doordat hij achter de zon verdween. Dank zij Gauss' berekeningen kon hij een jaar later weer worden teruggevonden.

$\diamondsuit$

9.4 Opgaven

Opgave 9.4.1 Verifieer in de volgende onderdelen dat de opspannende vectoren van W orthogonaal zijn en bepaal de projectie van $\mathbf{b}$ op W.

1. $W = \mathrm{Span}((2, 3, 1), (-1, 1, -1))$ en $\mathbf{b} = (2, 1, 4)$.
2. $W = \mathrm{Span}((-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ en $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$.
3. $W = \mathrm{Span}((1, -1, -1, 1), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 0, 1))$ en $\mathbf{b} = (2, 1, 3, 1)$.
4. $W = \mathrm{Span}((1, -1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, 1))$ en $\mathbf{b} = (1, 4, 1, 2)$.

Opgave 9.4.2 Vind een orthonormale basis voor de vectoren in de deelruimte gegeven door $2x + 3y + z = 0$.

Opgave 9.4.3 Bepaal een orthonormale basis voor de deelruimte in $\mathbb{R}^4$ gegeven door $x_1 = x_2 + 2x_3$ en $x_4 = -x_2 + x_3$.

Opgave 9.4.4 Pas het Gram-Schmidt procédé toe op de vectoren $(1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)$.

Opgave 9.4.5 Pas het Gram-Schmidt procédé toe op de vectoren

$$(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4.$$

Opgave 9.4.6 Pas het Gram-Schmidt procédé toe op de vectoren

$$(1,-1,1,0,0),(-1,0,0,0,1),(0,0,1,0,1),(1,0,0,1,1)\in\mathbb{R}^5.$$

Opgave 9.4.7 Beschouw de lineaire deelruimte $W\subset\mathbb{R}^4$ gegeven door

$$x_1+x_2-2x_3=0,\ x_1-2x_2+x_4=0.$$

Hierin zijn x_1,x_2,x_3,x_4 de standaard coördinaten in $\mathbb{R}^4$.

1. Bepaal een orthonormale basis $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ van W.

2. Bepaal de orthogonale projectie van $\mathbf{x}=(1,1,1,1)^t$ op W.

Opgave 9.4.8 Zij V een inproductruimte.

1. Stel dat $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ en $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$. Bewijs dat $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2=||\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2$ (Pythagoras voor inproductruimten).

2. Zij $W\subset V$ een deelruimte en $\mathbf{a}\in V$. Zij $\mathbf{a}'$ de loodrechte projectie van $\mathbf{a}$ op W aan. Bewijs dat voor elke $\mathbf{x}\in W$ met $\mathbf{x}\ne\mathbf{a}'$ geldt $||\mathbf{a}-\mathbf{x}||>||\mathbf{a}-\mathbf{a}'||$. Met andere woorden, $\mathbf{a}'$ is het unieke punt $\mathbf{x}\in W$ waarvan de afstand tot $\mathbf{a}$ minimaal is.

Opgave 9.4.9 Gegeven is een lineaire deelruimte $W\subset\mathbb{R}^n$. Zij $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de orthogonale projectie afbeelding op W. Kies een basis $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ van W. Zij A de matrix met als rijen de vectoren $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$.

1. Laat zien dat de Gram-matrix van de $\mathbf{a}_i$ gegeven wordt door het matrix-product AA^t.

2. Laat zien dat de matrix van P gegeven wordt door $A^t(AA^t)^{-1}A$ (hint: het beeld van een willekeurige vector in W en van een willekeurige vector in $W^\perp$).

3. Laat zien dat de matrix van P symmetrisch is.

Opgave 9.4.10 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct $\langle f(X),g(X)\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Bepaal van elk van de vectoren

$$p_1(X)=1+X,\quad p_2(X)=1+X^2,\quad p_3(X)=X+X^2$$

   de lengte. Bepaal ook van elk tweetal de 'hoek' ϕ ertussen. Deze wordt gegeven door $\cos\phi=\langle f,g\rangle/(||f||\cdot||g||)$.

2. Vindt alle polynomen van graad ≤ 2 die loodrecht op $p_1(X)$ staan.

Opgave 9.4.11 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct $\langle f(X),g(X)\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Bepaal een polynoom van graad ≤ 2 dat loodrecht staat op alle vectoren X^n met $n \geq 1$.

2. Toon aan dat het enige polynoom in $\mathbb{R}[X]$ dat loodrecht staat op alle vectoren X^n met $n \geq 1$ het nulpolynoom is. (Hint: er is gegeven dat de determinant $\det(1/(i+j))_{i,j=1,\ldots,m} \neq 0$ is voor alle $m \geq 1$).

Opgave 9.4.12 Zij V de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met daarop het standaard inproduct. Zij $W \subset V$ de deelruimte opgespannen door de vectoren $(1,1,1,1), (5,-1,5,-1)$ en $(2,1,-8,1)$.

1. Bepaal met behulp van het Gram-Schmidt procédé een orthonormale basis van W.

2. Zij $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ een orthonormale basis van W die je in onderdeel (a) gevonden hebt. Vul deze basis aan tot een orthonormale basis $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ van $\mathbb{R}^4$.

3. De orthogonale spiegeling $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ten aanzien van de deelruimte W wordt gegeven door $S\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i$ voor $i = 1,2,3$ en $S\mathbf{f}_4 = -\mathbf{f}_4$. Bepaal de matrix van S ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$.

Opgave 9.4.13 Beschouw de vectorruimte M_{nn} van $n \times n$-matrices met reële coëfficienten.

1. Laat zien dat $\mathrm{Spoor}(AB^t) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}B_{ij}$ waarin A_{ij} en B_{ij} de matrixelementen van A resp. B zijn.

2. Bewijs nu dat $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spoor}(AB^t)$ een inproduct op M_{nn} is.

Opgave 9.4.14 Gegeven is de vectorruimte M_{nn} over $\mathbb{R}$ bestaande uit $n \times n$-matrices met elementen in $\mathbb{R}$. Als inproduct nemen we $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spoor}(AB^t)$ (zie Opgave 9.4.13). Verder zijn gegeven de deelruimten M_{nn}^{sym} van symmetrische matrices (dwz $A^t = A$) en M_{nn}^{asym} van antisymmetrische matrices (dwz $A^t = -A$).

1. Stel dat A een symmetrische matrix is en B een antisymmetrische. Bewijs dat $\langle A, B\rangle = 0$.

2. Bewijs dat de doorsnijding van M_{nn}^{asym} en M_{nn}^{sym} uit de nulvector bestaat.

3. Bewijs dat iedere $n\times n$-matrix te schrijven is als som van een symmetrische en een antisymmetrische matrix.

4. Bewijs dat M_{nn}^{sym} het orthogonaal complement is van M_{nn}^{asym}.

Opgave 9.4.15

1. Bewijs dat de afbeelding die aan elk tweetal $\mathbf{u} = (x,y,z), \mathbf{u}' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ het getal

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = (x',y',z') \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

toekent, een inwendig produkt op $\mathbb{R}^3$ is.

2. Bepaal een orthonormale basis van het orthogonale complement van $(0,0,1)^t$ met betrekking tot het inwendig produkt uit het voorgaande onderdeel.

Opgave 9.4.16 Gegeven is $\mathbb{R}^4$ met het standaard inprodukt en standaardcoördinaten x, y, z, u. Zij de $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de lineaire afbeelding die elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ afbeeldt naar zijn loodrechte projektie op het hypervlak $x + y - z + u = 0$.

1. Bepaal het beeld van $(1,2,2,1)^t$ onder P.
2. Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van P.
3. Bepaal de matrix van P ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$.

Opgave 9.4.17 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct

$$\langle f(X), g(X)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Voer de Gram-Schmidt procedure uit op $1, X, X^2$.

Opgave 9.4.18 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct

$$\langle f(X), g(X)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\exp(-t^2)dt.$$

Voer de Gram-Schmidt procedure uit op $1, X, X^2$. (Hint: er is gegeven dat $\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-x^2)dx$ gelijk is aan 0 als n oneven en $(1/2)\cdot(3/2)\cdots(k-1/2)\sqrt{\pi}$ als $n = 2k$ even.)

Opgave 9.4.19 Gegeven de vectorruimte $\mathbb{R}[x]$ met inproduct

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Zij V de deelruimte opgespannen door $1, x, x^2$. Bepaal de orthogonale projectie van x^n op V.

Opgave 9.4.20 Gegeven de vectorruimte van continue functies op $[-\pi, \pi]$ en inproduct

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Zij V de deelruimte opgespannen door $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx)$. Bepaal de orthogale projectie van de functie x op V.

Opgave 9.4.21 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met standaard inproduct (dot-product). Zij V de deelruimte gegeven door de vergelijking $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Zij $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de loodrechte projectie-afbeelding op V. Bepaal de matrix van P ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^4$.

Opgave 9.4.22 Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van A.

Opgave 9.4.23 Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^4$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van A.

Opgave 9.4.24 Zij V een vectorruimte met inproduct $\langle , \rangle$ en $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. De Gram-matrix van deze vectoren noemen we M. Bewijs:

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \text{ afhankelijk } \iff \det(M) = 0.$$

Opgave 9.4.25 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct

$$\langle f(X), g(X) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Verder zijn gegeven de deelruimten $\mathbb{R}[X]_{\text{sym}}$ bestaande uit de polynomen $f(X)$ met $f(-X) = f(X)$ (symmetrische polynomen) en de deelruimte $\mathbb{R}[X]_{\text{asym}}$ gegeven door de polynomen $f(X)$ met $f(-X) = -f(X)$ (antisymmetrische polynomen).

1. Stel $f \in \mathbb{R}[X]_{\text{sym}}, g \in \mathbb{R}[X]_{\text{asym}}$. Bewijs dat $\langle f(X), g(X) \rangle = 0$.
2. Geef een basis van $\mathbb{R}[X]_{\text{sym}}$ en van $\mathbb{R}[X]_{\text{asym}}$.
3. Bewijs dat elk element uit $\mathbb{R}[X]$ te schrijven is als som van een symmetrisch en een antisymmetrisch polynoom.
4. Bewijs dat $\mathbb{R}[X]_{\text{sym}}$ het orthogonaal complement van $\mathbb{R}[X]_{\text{asym}}$ is.

Opgave 9.4.26 Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met inproduct $\langle ., . \rangle$. Zij W een deelruimte van V en $W^\perp$ het orthogonaal complement van W in V.

1. Bewijs dat als $\dim(W) < \infty$ dan $V = W \oplus W^\perp$.
2. Kun je een voorbeeld vinden waarbij V niet gelijk is met $W \oplus W^\perp$? (Hint: zie Opgave 9.4.11).

Hoofdstuk 10

Symmetrische en orthogonale afbeeldingen

10.1 Symmetrische afbeeldingen

Zij V een vectorruimte met inproduct. Een lineaire afbeelding $A : V \to V$ heet *symmetrisch* als

$$\langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y}) \rangle = \langle A(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$$

voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Uit Stelling 9.3.2 zien we bijvoorbeeld dat loodrechte projectie een symmetrische afbeelding is.

Stelling 10.1.1 *Zij V een vectorruimte met inproduct en $A : V \to V$ een symmetrische afbeelding. Dan gelden de volgende eigenschappen:*

1. *Eigenvectoren met verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal.*
2. *Zij $\mathbf{v}$ een eigenvector en $\mathbf{v}^\perp$ het orthogonaal complement van $\mathbf{v}$. Dan geldt dat $A(\mathbf{v}^\perp) \subset \mathbf{v}^\perp$.*
3. *Zij W een deelruimte van V zó dat $A(W) \subset W$. Dan geldt voor het orthogonaal complement $W^\perp$ dat $A(W^\perp) \subset W^\perp$.*

Bewijs: (i) Stel $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ een tweetal eigenvectoren met verschillende eigenwaarden λ_1, λ_2. Dan volgt uit $\langle \mathbf{v}_1, A(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle A(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle$ dat $\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Omdat $\lambda_1 \ne \lambda_2$ volgt hieruit dat $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.
(ii) Zij $\mathbf{u}$ een vector loodrecht op $\mathbf{v}$. Zij λ de eigenwaarde van $\mathbf{v}$. Dan volgt uit $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{u}) \rangle = \langle A(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle$ dat $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{u}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$. Dus $A\mathbf{u}$ staat ook loodrecht op $\mathbf{v}$.
(iii) Zij $\mathbf{u} \in W^\perp$. We moeten laten zien dat $A\mathbf{u}$ loodrecht staat op iedere $\mathbf{w} \in W$. Dit volgt uit $\langle \mathbf{w}, A(\mathbf{u}) \rangle = \langle A(\mathbf{w}), \mathbf{u} \rangle$, het feit dat $A(\mathbf{w}) \in W$ en $\mathbf{u} \in W^\perp$.

$\square$

Het verband tussen symmetrische matrices en afbeeldingen wordt door de volgende stelling gegeven.

Stelling 10.1.2 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ een geordende orthonormale basis. Zij $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. De matrix van A t.o.v. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ geven we aan met $\mathcal{A}$. Dan is A een symmetrische afbeelding precies dan als $\mathcal{A}$ een symmetrische matrix is.*

Bewijs: Stel dat A symmetrisch is. Geef de matrixelementen van A aan met a_{ij}. Dan geldt $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j \rangle$. Omdat $\langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j \rangle = \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_i \rangle = a_{ji}$ volgt hieruit dat $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i, j. Dus $\mathcal{A}$ is een symmetrische matrix.
Stel nu dat $\mathcal{A}$ een symmetrische matrix is. Zij $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ een willekeurig tweetal vectoren. Geef de coördinaten van $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ t.o.v. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ aan met

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dan geldt

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = (x_1, \ldots, x_n)\mathcal{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Omdat $\mathcal{A}$ symmetrisch is, is dit precies gelijk aan

$$(y_1, \ldots, y_n)\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

en dit is weer precies gelijk aan $\langle \mathbf{y}, A\mathbf{x} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Dus is A een symmetrische afbeelding.

□

De volgende stelling heeft een enorm aantal toepassingen zowel binnen als buiten de wiskunde.

Stelling 10.1.3 (Hoofdstelling van de symmetrische afbeeldingen) *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $A : V \to V$ een symmetrische afbeelding. Dan is er een orthonormale basis van eigenvectoren van A met reële eigenwaarden.*

Bewijs: Stel $n = \dim(V)$. We zullen een bewijs geven met volledige inductie naar n. Voor het geval $n = 1$ zijn we klaar omdat elke vector in een ééndimensionale V eigenvector is.
Stel nu $n > 1$ is en dat de Stelling waar is voor ruimten van dimensie $n - 1$. In het Lemma dat hierna komt zien we dat A een reële eigenwaarde λ heeft en dus ook een bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}$, waarvan we aannemen dat de lengte 1 is. Zij nu $\mathbf{v}^\perp$ het orthogonaal complement van $\mathbf{v}$. Volgens Stelling 10.1.1(ii) geldt $A : \mathbf{v}^\perp \to \mathbf{v}^\perp$. Omdat de dimensie van $\mathbf{v}^\perp$ gelijk is aan $n - 1$ volgt uit onze inductiehypothese dat $\mathbf{v}^\perp$ een orthonormale basis heeft bestaande uit eigenvectoren van A. Samen met $\mathbf{v}$ vormt dit een orthormale eigenvectorbasis van de ruimte V.

□

Lemma 10.1.4 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $A : V \to V$ een symmetrische afbeelding. Dan heeft A minstens één reële eigenwaarde.*

Bewijs: We bewijzen dit Lemma door naar symmetrische matrices te kijken. Wegens Stelling 10.1.2 is het voldoende om aan te tonen dat een symmetrische matrix een reële eigenwaarde heeft. Zij $\mathcal{A}$ een symmetrisch $n \times n$-matrix. Zij λ een (complex) nulpunt van de eigenwaardenvergelijking. Dan zijn er complexe getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, niet allen nul, zó dat

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldig dit van links met de rijvector $(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$. We vinden,

$$(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)\mathcal{A}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2).$$

Neem aan beide zijden de getransponeerde en de complex geconjugeerde. Doordat $\mathcal{A}$ een symmetrische matrix is met reële coëfficienten, blijft de linkerzijde hetzelfde. De rechterzijde gaat over in $\overline{\lambda}(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$. Gevolg,

$$\overline{\lambda}(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2) = \lambda(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2).$$

Omdat de z_i niet allen zijn, geldt $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$ en dus $\overline{\lambda} = \lambda$. Conclusie: $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

10.2 Orthogonale matrices

Een $n \times n$-matrix U met reële coëfficienten heet *orthogonale matrix* als de kolommen van U een orthonormaal stelsel vormen ten aanzien van het dotproduct. Geef de matrixelementen van U aan met u_{ij}. Orthogonaliteit van U is equivalent met

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj} = \delta_{ij}$$

voor alle i, j. Geven we de matrixelementen van de getransponeerde U^t aan met $(u^t)_{ij}$ dan gaat de orthogonaliteitsrelatie over in

$$\sum_{k=1}^{n} (u^t)_{ik}u_{kj} = \delta_{ij}.$$

Links herkennen we de matrixvermenigvuldiging U^tU en we kunnen de orthogonaliteitsrelaties dus ook samenvatten door

$$U^tU = I_n.$$

Een matrix is dus orthogonaal precies dan als $U^tU = I_n$. Anders gezegd, $U^t = U^{-1}$.
Uit $U^tU = I_n$ volgt tevens $UU^t = I_n$. Met andere woorden, U^t is ook orthogonaal en de rijen van U vormen dus een orthonormaal stelsel. Samenvattend:

Stelling 10.2.1 *Zij U een $n \times n$-matrix met reële coëfficienten. Dan zijn de volgende beweringen equivalent,*

1. *U is ortogonaal.*
2. *$U^tU = I_n$.*
3. *De rijen van U vormen een orthonormaal stelsel.*

Verder hebben orthogonale matrices de volgende eigenschappen:

Stelling 10.2.2 *Zij U, U' een tweetal orthogonale $n \times n$-matrices. Dan geldt:*

1. $\det(U) = \pm 1$.
2. *U^{-1} is orthogonaal.*
3. *UU' is orthogonaal.*

Bewijs: Merk allereerst op dat $U^tU = I_n$ impliceert $\det(U^t)\det(U) = 1$. Omdat $\det(U^t) = \det(U)$ volgt hieruit dat $(\det(U))^2 = 1$ en dus $\det(U) = \pm 1$.
Als U orthogonaal is, dan is U^t ook orthogonaal en dus ook $U^{-1} = U^t$.
Merk op dat $(UU')^tUU' = (U')^tU^tUU' = (U')^tU' = I_n$. Dus UU' is orthogonaal.

□

Tenslotte volgt hier nog een uitspraak over de complexe nulpunten van de eigenwaardevergelijking van een orthogonale matrix.

Stelling 10.2.3 *Zij U een orthogonale matrix en $\lambda \in \mathbb{C}$ een nulpunt van de eigenwaardevergelijking $\det(U - \lambda I_n) = 0$. Dan geldt $|\lambda| = 1$. In het bijzonder zijn de reële eigenwaarden van een orthogonale matrix ± 1.*

We kunnen met de gevonden $\lambda \in \mathbb{C}$ de bijbehorende complexe eigenvector bepalen, zeg $(z_1, z_2, \ldots, z_n)^t$ met $z_i \in \mathbb{C}$. Met andere woorden,

$$U \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Neem hiervan de complex geconjugeerde en de getransponeerde,

$$(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})U^t = \overline{\lambda}(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$$

Voer hiermee een matrixvermenigvuldiging van links uit op de eerste relatie:

$$(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})U^tU \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \overline{\lambda}\lambda(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Gebruik nu dat $U^tU = I_n$ en we vinden:

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = |\lambda|^2(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2).$$

Omdat niet alle z_i nul zijn geldt dat $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$ en we concluderen na wegdeling van deze som dat $|\lambda| = 1$. □

10.3 Orthogonale afbeeldingen

Zij V een vectorruimte met inproduct. Een lineaire afbeelding $U : V \to V$ heet *orthogonale afbeelding* als

$$||U\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$$

voor elke $\mathbf{x} \in V$. Met andere woorden, een orthogonale afbeelding is een lengtebehoudende lineaire afbeelding.

Stelling 10.3.1 *Zij V een vectorruimte met inproduct en $U : V \to V$ een orthogonale afbeelding. Dan geldt:*

1. $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ *voor alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
2. *Als* $\dim(V)$ *eindig is, dan is U bijectief.*
3. *De (reële) eigenwaarden van U zijn ± 1.*
4. *Zij $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ een tweetal eigenvectoren van U met eigenwaarden respectievelijk 1 en -1. Dan zijn $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ orthogonaal.*
5. *Zij $\mathbf{v}$ een eigenvector van U en $\mathbf{v}^\perp$ het orthogonaal complement van $\mathbf{v}$. Dan geldt $U : \mathbf{v}^\perp \to \mathbf{v}^\perp$.*
6. *Zij $W \subset V$ een eindig-dimensionale deelruimte zo dat $U(W) \subset W$. Zij $W^\perp$ het orthogonaal complement van W. Dan geldt $U(W^\perp) \subset W^\perp$.*

Bewijs: (1) Merk op dat $||U(\mathbf{x} + \mathbf{y})|| = ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||$. Neem het kwadraat aan beide zijden en werk uit. We vinden:

$$\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{x}\rangle + 2\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle + \langle U\mathbf{y}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle.$$

Omdat $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ en $\langle U\mathbf{y}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$ houden we over dat $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.
(2) Stel $\dim(V)$ eindig. Een lineaire afbeelding $A : V \to V$ is in dat geval bijectief precies dan als de kern triviaal is. Stel $U\mathbf{x} = 0$. Dan volgt uit $||U\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ dat $||\mathbf{x}|| = 0$. De kern van U is dus triviaal en U bijectief.

(3) Neem een eigenvector $\mathbf{v}$ met eigenwaarde λ. Dan geldt $||U\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$. De linkerzijde is gelijk aan $||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{v}||$. Aangezien de rechterzijde gelijk is aan $||\mathbf{v}|| > 0$ volgt dat $|\lambda| = 1$ en dus $\lambda = \pm 1$.
(4) Merk op dat $\langle U\mathbf{v}_1, U\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$. Gebruik makend van $U\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ en $U\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$ volgt hieruit dat $-\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$. Conclusie: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$
(5) Stel dat $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$. We moeten laten zien dat $U\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$. Dit volgt uit $\langle U\mathbf{w}, U\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0$ en het feit dat $\langle U\mathbf{w}, U\mathbf{v}\rangle$ gelijk is aan $\lambda \langle U\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$.
(6) Stel $\mathbf{u} \in W^{\perp}$. We moeten laten zien dat $U\mathbf{u} \in W^{\perp}$. Merk op dat voor elke $\mathbf{w} \in W$ geldt: $\langle U\mathbf{u}, U\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$. De vector $U\mathbf{u}$ staat dus loodrecht op alle vectoren in $U(W)$. Omdat U beperkt tot W bijectief is (eigenschap (ii)), geldt $U(W) = W$ en dus staat $U\mathbf{u}$ loodrecht op alle vectoren uit W.

$\square$

Bij eigenschap (2) kunnen we opmerken dat de eis $\dim(V) < \infty$ essentieel is. Neem bijvoorbeeld de oneindig dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}_0^\infty$ met standaard inproduct. Het is makkelijk te controleren dat de afbeelding

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

orthogonaal is. Maar hij is niet surjectief, en dus ook niet bijectief. Wel volgt uit het bewijs van (2) dat elke orthogonale $U : V \to V$ injectief is.
Laten we ons nu beperken tot orthogonale $U : V \to V$ met $\dim(V)$ eindig. Het blijkt dat de theorie van orthogonale afbeeldingen gewoon neerkomt op de theorie van orthogonale matrices.

Stelling 10.3.2 *Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met inproduct en $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ een geordende orthonormale basis. Zij $U : V \to V$ een lineaire afbeelding. De matrix van U t.o.v. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ geven we aan met $\mathcal{U}$. Dan is U een orthogonale afbeelding precies dan als $\mathcal{U}$ een orthogonale matrix is.*

Bewijs: Neem eerst aan dat U orthogonaal is. Geef de matrixelementen van $\mathcal{U}$ aan met u_{ij}. Dan geldt voor elke i dat $U\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^n u_{ki}\mathbf{e}_k$. We passen dit toe op de gelijkheid $\langle U\mathbf{e}_i, U\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$. Uitwerking van de linkerzijde geeft:

$$\begin{aligned}
\langle U(e_i), U(e_j)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n u_{ki}\mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^n u_{lj}\mathbf{e}_l \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{ki}u_{lj} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj}
\end{aligned}$$

We zien dat orthogonaliteit van U impliceert dat $\sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj} = \delta_{ij}$ voor alle i, j. Met andere woorden, $\mathcal{U}$ is orthogonaal.
Stel omgekeerd dat $\mathcal{U}$ orthogonaal is. Stel $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ met $\mathbf{x} \in V$ willekeurig. We moeten laten zien dat $||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||$. Geef de coördinaten van $\mathbf{x}$ t.o.v. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$

aan met de coördinaten kolom $(x_1, \ldots, x_n)^t$. Dan worden de coördinaten van $\mathbf{y}$ gegeven door

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dus

$$||\mathbf{y}||^2 = (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\mathcal{U}^t\mathcal{U} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

en omdat $\mathcal{U}^t\mathcal{U} = I_n$ volgt hieruit dat

$$||\mathbf{y}||^2 = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ||\mathbf{x}||^2.$$

□

10.4 Standaardvorm orthogonale afbeeldingen

We bepalen hoe orthogonale afbeeldingen $U : V \to V$ er uit zien als $\dim(V) = 2$. Daartoe bepalen we de orthogonale 2×2-matrices. Dat wil zeggen, reële matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ met de condities

1. $a^2 + c^2 = 1$
2. $b^2 + d^2 = 1$
3. $ab + cd = 0$

Uit de eerste vergelijking volgt het bestaan van een hoek ϕ zó dat $a = \cos\phi$ en $c = \sin\phi$. Uit de derde vergelijking volgt dan $b\cos\phi + d\sin\phi = 0$. Oplossing hiervan geeft dat $b = -r\sin\phi, d = r\cos\phi$ voor zekere $r \in \mathbb{R}$. Dit invullen in de tweede vergelijking geeft $r^2 = 1$ en dus $r = \pm 1$. We concluderen dat orthogonale 2×2-matrices één van de volgende vormen aanneemt,

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

In het eerste type matrix herkennen we de rotatie in het platte vlak om de hoek ϕ. In het tweede voorbeeld zien we dat de eigenwaardevergelijking luidt $\lambda^2 - 1 = 0$. Er zijn dus twee reële eigenwaarden ± 1. De bijbehorende eigenvectoren staan loodrecht op elkaar (Stelling 10.3.1(iv). We hebben dus te maken met een orthogonale spiegeling.
Merk ook op dat de determinant van de matrix gelijk is aan 1 in het eerste geval en -1 in het tweede geval. We concluderen:

Stelling 10.4.1 *Een orthogonale afbeelding* $U : V \to V$ *met* $\dim(V) = 2$ *is ofwel een draaiing, ofwel een spiegeling. In het eerste geval geldt* $\det(U) = 1$, *in het tweede geval* $\det(U) = -1$.

We onderzoeken nu orthogonale afbeeldingen $U : V \to V$ met $\dim(V) = 3$. De eigenwaardevergelijking heeft graad 3. Er is dus altijd een reële oplossing λ en deze moet dus ± 1 zijn. Geef een bijbehorende eigenvector aan met $\mathbf{v}$. Zij W het orthogonaal complement van $\mathbf{v}$. Volgens Stelling 10.3.1 (v) geldt dat $U : W \to W$. Omdat $\dim(W) = 2$, is U beperkt tot W een draaiing of spiegeling. We hebben nu vier mogelijkheden:

1. $\lambda = 1$ en $U : W \to W$ is een draaiing. In dit geval kunnen we U zien als een draaiing met $\mathbf{v}$ als draaiingsas. Merk op dat $\det(U) = 1$.

2. $\lambda = 1$ en $U : W \to W$ is een spiegeling. In W zijn er eigenvectoren $\mathbf{v}'$ en $\mathbf{v}''$ met eigenwaarde 1 respectievelijk -1. In dit geval hebben we te maken met een spiegeling. Merk op dat $\det(U) = -1$.

3. $\lambda = -1$ en $U : W \to W$ is een draaiing. Ditmaal hebben we te maken met een draaiing in het vlak W rond de as $\mathbf{v}$, gevolgd door een loodrechte spiegeling in het vlak W waarbij $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$ overgaat. We noemen dit een *draaispiegeling*. We hebben nu $\det(U) = -1$.

4. $\lambda = -1$ en $U : W \to W$ is een spiegeling. In het vlak W zijn er twee onderling loodrechte vectoren $\mathbf{v}'$ en $\mathbf{v}''$ met eigenwaarden 1 respectievelijk -1. Merk nu op dat we een draaiing om de hoek π in het vlak opgespannen door $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}''$ hebben. Merk op dat $\det(U) = 1$.

Samenvattend, een orthogonale afbeelding van een driedimensionale ruimte naar zichzelf kan een draaiing of een draaispiegeling zijn. In het eerste geval is de determinant 1, in het tweede -1.
Voor eindigdimensionale vectorruimten in het algemeen hebben we de volgende stelling, die we hier niet zullen bewijzen.

Stelling 10.4.2 (Hoofdstelling orthogonale afbeeldingen) . *Zij* $U : V \to V$ *een orthogonale afbeelding en* $\dim(V) = n < \infty$. *Zij* E_1 *de eigenruimte van* U *bij de eigenwaarde* 1 *en* E_{-1} *de eigenruimte bij* -1. *Dan zijn er een eindig aantal (mogelijk nul) onderling loodrechte, tweedimensionale deelruimten* $W_1, W_2, \ldots, W_s \subset V$ *zó dat*

1. *Elke* W_i *staat loodrecht op zowel* E_1 *als* E_{-1}.

2. $U : W_i \to W_i$ *en* U *beperkt tot* W_i *is een draaiing.*

3. $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) + 2s = n$.

10.5 Opgaven

Opgave 10.5.1 Verifieer dat de onderstaande matrices orthogonaal zijn en bepaal hun inverse,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 10.5.2 Geef een derde kolom voor de matrix zó dat de matrix orthogonaal wordt

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2/7 & 3/\sqrt{13} & \\ 3/7 & -2/\sqrt{13} & \\ 6/7 & 0 & \end{pmatrix}$$

Opgave 10.5.3 Zij $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ een niet-triviale vector. Bewijs dat $I_n - \frac{2}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ een orthogonale matrix is.

Opgave 10.5.4 Zij Q_1 een $m \times n$-matrix waarvan de kolommen een orthonormaal stelsel vormen en Q_2 een $n \times t$-matrix waarvan de kolommen ook orthonormaal zijn. Bewijs dat de kolommen van Q_1Q_2 een orthormaal stelsel vormen.

Opgave 10.5.5 Zij $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding met de eigenschap dat $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Rightarrow U(\mathbf{x}) \cdot U(\mathbf{y}) = 0$. Met andere woorden de beelden van elk tweetal orthogonale vectoren vormen weer een orthogonaal tweetal. Bewijs dat U een scalair veelvoud van een orthogonale afbeelding is (hint: bewijs dat $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 \Rightarrow |U(\mathbf{x})|^2 = |U(\mathbf{y})|^2$).

Opgave 10.5.6 Beschouw $\mathbb{R}^3$ met standaard inprodukt en de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met als matrix t.o.v. de standaardbasis,

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Toon aan dat A zowel een orthogonale als een symmetrische afbeelding is.

2. Bewijs, zonder berekening van de eigenwaardevergelijking, dat de eigenwaarden $1, -1, -1$ zijn.

3. Bepaal een 3×3-matrix Q en een 3×3 diagonale matrix D zó dat $QAQ^{-1} = D$.

Opgave 10.5.7 Zij V een reële vectorruimte van dimensie k met inproduct $\langle .,. \rangle$. Stel dat $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ een basis van V is. Zij tenslotte $A : V \to V$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$A : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{a}_1 + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{a}_2 + \cdots + \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{a}_k$$

a) Bewijs dat A een symmetrische afbeelding is (d.w.z. $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$)

b) Bewijs dat $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ voor alle $\mathbf{x} \in V$ met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Laat vervolgens zien dat $\lambda > 0$ voor elke eigenwaarde λ van A.

Stel nu dat A tevens een orthogonale afbeelding is.

c) Laat met behulp van voorgaand onderdeel zien dat alle eigenwaarden van A gelijk aan 1 zijn.

d) Leidt uit voorgaand onderdeel af dat A de identieke afbeelding is, d.w.z. $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ voor alle $\mathbf{x} \in V$.

Opgave 10.5.8 Zij M_2 de vectorruimte van 2×2-matrices met reële elementen en gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.Beschouw de funktie die aan ieder tweetal $X, Y \in M_2$ het getal $\langle X, Y \rangle = \text{Spoor}(XY^t)$ toekent. In de volgende onderdelen mag je gebruiken dat $\text{Spoor}(AB) = \text{Spoor}(BA)$ en $\text{Spoor}(A) = \text{Spoor}(A^t)$.

a) Bewijs dat $\langle X, Y \rangle$ een inwendig produkt op M_2 is.

Zij C een gegeven symmetrische 2×2-matrix.

b) Bewijs dat de lineaire afbeelding $T : M_2 \to M_2$ gegeven door $T(X) = CX - XC$ symmetrisch is. (Symmetrisch wil zeggen: $\langle T(X), Y \rangle = \langle X, T(Y) \rangle$ voor alle $X, Y \in M_2$).

c) Stel dat λ, μ de eigenwaarden van C zijn. Bewijs dat T de eigenwaarden $0, 0, \lambda - \mu, \mu - \lambda$ heeft.

Opgave 10.5.9 Gegeven is de vectorruimte V over $\mathbb{R}$ van alle functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met de eigenschap $f(0) = f(1) = 0$ en dat alle afgeleiden van f bestaan en ook nul zijn in $0, 1$. Neem als inproduct $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Definieer de lineaire afbeelding $A : V \to V$ gegeven door $A : f(x) \mapsto f'(x)$.

1. Laat zien dat $\exp(-1/x^2 - 1/(x-1)^2)$ een niet-triviaal voorbeeld van een element van V is.

2. Bewijs dat V oneindigdimensionaal is.

3. Bewijs dat $\langle f, A(g) \rangle = - \langle A(f), g \rangle$ voor alle $f, g \in V$ (hint: gebruik partiele integratie).

4. Bewijs dat $A^2 : V \to V$ een symmetrische afbeelding is.

5. Bewijs dat A^2 geen eigenvectoren in V heeft.

Opgave 10.5.10 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ met inproduct

$$\langle f(X), g(X) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\exp(-t^2)dt.$$

Definieer de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ door $A : p(X) \mapsto p'(X) - Xp(X)$. Definieer de lineaire afbeelding $B : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ door $B : p(X) \mapsto Xp(X)$.

1. Bewijs dat $A(p(X)) = \exp(X^2/2)\frac{d}{dX}\left(p(X)\exp(-X^2/2)\right)$.
2. Laat zien dat $\langle p(X), A(q(X)) \rangle = -\langle A(p(X), q(X) \rangle$ voor elk tweetal $p, q \in \mathbb{R}[X]$ (hint: gebruik partiele integratie).
3. Bewijs dat A^2 een symmetrische afbeelding is.
4. Laat zien dat A^2 geen eigenvectoren heeft.
5. Bewijs dat B een symmetrische afbeelding is.
6. Bepaal de eigenvectoren van $A^2 - B^2$ van graad ≤ 2.

Opgave 10.5.11(Lastig) Bewijs dat een rotatie in $\mathbb{R}^3$ met rotatie-as $\mathbf{a}$ ($|\mathbf{a}| = 1$) en rotatiehoek ϕ gegeven wordt door

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + \cos\phi(\mathbf{x} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}) + \sin\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{x}).$$

Index

Index

Appendices bij het vak Lineaire Algebra

Appendix A: Complexe getallen
Appendix B: Lichamen
Appendix C: Lineaire differentiaalvergelijkingen

Barbara van den Berg, 2021

Inhoudsopgave

Bijlage A

Complexe getallen

A.1 Motivatie en definities

Veel wiskundige problemen hebben betrekking op het oplossen van vergelijkingen. We kunnen bijvoorbeeld een functie gelijk stellen aan een bepaalde waarde, zoals $e^x + sin(x) = 3$, en we willen dan weten voor welke waarde(n) van x de vergelijking geldt. Een belangrijke klasse van functies is de verzameling van polynomen, ook wel veeltermen genoemd. Dit zijn functies van de vorm

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0,$$

waarbij de coëfficiënten p_i vast gekozen getallen zijn, bijvoorbeeld gehele getallen, of reële getallen. Een voorbeeld is het polynoom $P(x) = 6x^4 + x^2 - x$. Als $p_n \neq 0$ dan heet p_n de kopcoëfficient en is n de graad van het polynoom. Het polynoom $P(x) = 6x^4 + x^2 - x$ heeft dus graad vier. Een belangrijke motivatie om naar complexe getallen te kijken komt naar voren als we zoeken naar oplossingen van de vergelijking $P(x) = 0$. Zo'n oplossing heet een nulpunt van het polynoom. We zullen dit toelichten. Als we beginnen met zoeken in de verzameling getallen $\{1, 2, 3, \cdots\}$ dan blijkt dat we deze verzameling steeds verder moeten uitbreiden om een nulpunt te vinden, ook als de coëfficiënten geheel zijn. Bijvoorbeeld, het eerstegraads polynoom $P(x) = x - 3$ heeft een nulpunt in de natuurlijke getallen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

maar $P(x) = x + 3$ heeft dat niet. Hiervoor moeten we $\mathbb{N}$ uitbreiden tot de gehele getallen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Vervolgens zien we dat een polynoom als $P(x) = 2x - 1$ geen nulpunt heeft in $\mathbb{Z}$, maar als we de breuken toevoegen aan $\mathbb{Z}$, zodat we de verzameling

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

van rationale getallen krijgen, dan heeft $P(x) = 2x - 1$ wel een nulpunt. Maar als we naar het tweedegraads polynomen $P(x) = x^2 - 2$ kijken, dan blijkt dat dit polynoom geen nulpunt heeft in $\mathbb{Q}$; de twee nulpunten, $\pm\sqrt{2}$, zijn niet als breuk te schrijven (een bewijs hiervoor krijg je bij het vak Bewijzen in de Wiskunde). De twee nulpunten liggen wel in de uitbreiding van $\mathbb{Q}$ tot de verzameling van de reëele getallen $\mathbb{R}$ (informeel is dit de verzameling van alle getallen met eindige en oneindige decimale ontwikkeling, de formele definitie krijg je bij de analysevakken). Maar binnen $\mathbb{R}$ lopen we tenslotte tegen het probleem aan dat $P(x) = x^2 + 1$ geen nulpunt heeft. We zullen de verzameling van reële getallen op haar beurt uitbreiden tot de complexe getallen, $\mathbb{C}$. We hebben dus de keten van verzamelingen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

We zullen zien (maar in dit college niet bewijzen) dat in $\mathbb{C}$ ieder polynoom met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ (of in $\mathbb{C}$) een nulpunt heeft.

Om $\mathbb{C}$ te definiëren introduceren we eerst een nieuw symbool i. Dit is een getal waarvan we vastleggen dat het kwadraat ervan -1 is. Dus

$$i^2 = -1.$$

We kunnen i dus ook voorstellen als $\sqrt{-1}$, en we noemen i een wortel van -1 (de andere wortel van -1 is dan $-i = -\sqrt{-1}$). Het getal i is geen reëel getal, omdat het kwadraat van ieder reëel getal positief is. We noemen i een imaginair getal.

Definitie A.1.1. *We definiëren de verzameling van complexe getallen $\mathbb{C}$ door*

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Als $z = a + bi$ een complex getal is, dan heet a het reële deel van z, notatie $Re(z)$, en b het imaginaire deel van z, notatie $Im(z)$. Het getal z wordt ook wel genoteerd met $a + ib$.

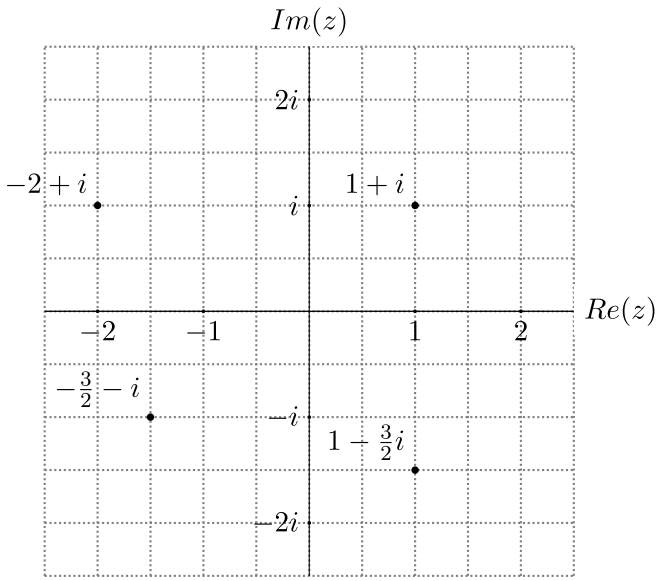
De hoofdstelling van de algebra zegt nu dat elk niet-constant polynoom met reële of complexe coëfficiënten een nulpunt heeft in $\mathbb{C}$. Een gevolg hiervan is dat alle nulpunten van een polynoom in $\mathbb{C}$ liggen. We hoeven bij het zoeken naar nulpunten van polynomen de verzameling $\mathbb{C}$ dus niet verder uit te breiden. We zullen deze stellingen hier niet bewijzen. Een bewijs hiervan met behulp van complexe functietheorie wordt behandeld in het tweedejaarsvak Functies en Reeksen.

Opgave A.1.2 Bereken de complexe nulpunten van het polynoom $P(x) = x^2 - 4x + 13$ met behulp van de abc- formule. Gebruik hierbij dat als $b \in \mathbb{R}$ en $b \geq 0$ dan is $\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{b}$. Geef je antwoord in de vorm $a + bi$.

Hoewel het getal i geen reëel getal is, en dus niet op de reële rechte te plaatsen is, blijkt dat het werken met wortels uit negatieve getallen zeer veel toepassingen heeft, niet alleen binnen de wiskunde, maar ook in andere wetenschappen, zoals in de Natuurkunde, de Elektrotechniek, de Biomedische technologie of de Economie, onder andere als bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen, bij signaalanalyse en beeldherkenning.

A.2 Het complexe vlak en poolcoördinaten

We kunnen de complexe getallen meetkundig weergeven in een cartesisch assenstelsel, als volgt: als $a + bi$ een complex getal is, dan geven we dit weer met de coördinaten (a, b) in het (x, y)-vlak:



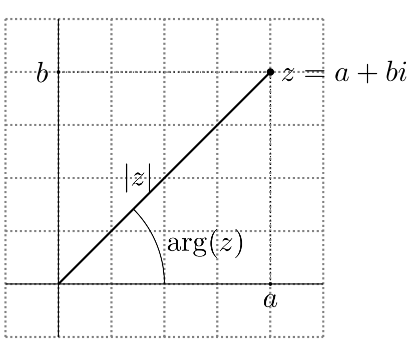
De x-as noemen we de reële as; de y-as de imaginaire as. De verzameling van complexe getallen wordt ook wel het complexe vlak genoemd, of het Argand-vlak, genoemd naar de Zwitserse wiskundige Jean-Robert Argand (1768-1822).

Opgave A.2.1 Teken de complexe getallen $1 + 2i$, $3i$, -1, $-4 - i$, $2 - i$ en 4 in het complexe vlak.

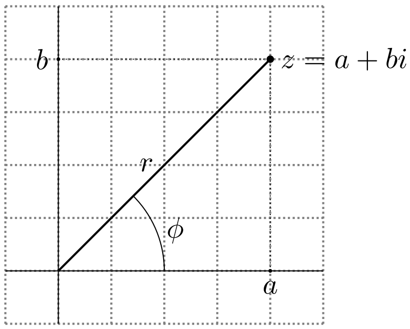
Definitie A.2.2. *De lengte van de vector* (a, b) *corresponderend met het complexe getal* $z = a + bi$ *wordt de modulus van* z *genoemd, en wordt genoteerd met* $|z|$. *Dus:*

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

We zien dat $|z| \geq 0$. *De hoek die de lijn vanuit de oorsprong naar het punt* (a, b) *maakt met de positieve reële as (met positieve hoeken tegen de richting van de klok in) heet het argument van* z, *notatie* $\arg(z)$.



Het argument is op veelvouden van 2π bepaald. We spreken af dat we $\arg(z)$ zo kiezen dat $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. Als we schrijven $r = |z|$ en $\phi = \arg(z)$ dan zien we dat als $r \neq 0$ dat $\cos(\phi) = \frac{a}{r}$ en $\sin(\phi) = \frac{b}{r}$:



We kunnen z dus schrijven als

$$z = a + bi = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)).$$

De getallen r en ϕ heten de poolcoördinaten van z en de bovenstaande uitdrukking van z in r en ϕ heet de representatie van z in poolcoördinaten.

Opgave A.2.3 Bereken de lengte en het argument van de volgende complexe getallen: $1 + i$, $3i$, -20 en $-1 - i$, en geef ze weer in het complexe vlak.

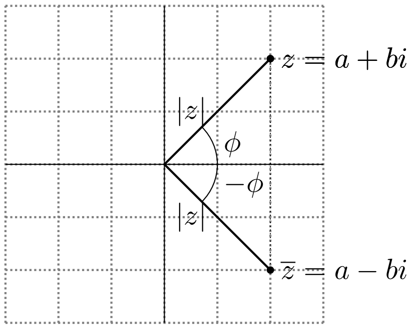
Opgave A.2.4 Laat $z = a + bi$. Vind formules voor $\arg(z)$ in termen van de inverse tangens functie voor de volgende gevallen:

1. $a > 0$, $b \geq 0$;
2. $a > 0$, $b < 0$;
3. $a < 0$, $b \geq 0$;
4. $a < 0$, $b < 0$;
5. $a = 0$, $b > 0$;
6. $a = 0$, $b < 0$.

Waarom is $\arg(z)$ niet bepaald als $a = 0$ en $b = 0$? Bereken $\arg(z)$ als $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$.

Definitie A.2.5. *De complex geconjugeerde van een complex getal $z = a + bi$ is het complexe getal $a - bi$, genoteerd met $\overline{z}$.*

We zien dat in het complexe vlak de complex geconjungeerde $\overline{z}$ van z wordt verkregen door z te spiegelen in de reële as.



We zien dat $Re(\overline{z}) = Re(z)$, $Im(\overline{z}) = -Im(z)$ en dat $|\overline{z}| = |z|$ en $\arg(\overline{z}) = -arg(z)$. Verder volgt ook direct uit de definitie dat $\overline{\overline{z}} = z$.

Opgave A.2.6 Schrijf $\overline{z}$ in de vorm $a + bi$ voor de volgende complexe getallen z: $1 + i$, $3i$, -20 en $-1 - i$.

Opgave A.2.7 Laat zien dat als $z \in \mathbb{C}$ een oplossing is van de vergelijking $ax^2+bx+c = 0$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan is $\overline{z}$ ook een oplossing van deze vergelijking. Je kunt dit bewijzen met behulp van de a, b, c-formule of, vooruitlopend op de volgende paragraaf, met behulp van Stelling A.3.4. Geef een bewijs met beide methoden. Bereken ook de oplossingen van $x^2 + 2x + 2 = 0$.

A.3 Berekeningen in $\mathbb{C}$

Net als reële getallen, kunnen we complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. We definiëren eerst de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$.

Definitie A.3.1. *Als $z = a+bi$ en $w = c+di$, met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dan definiëren we de som en het product van z en w door:*

1. $z + w = (a + c) + (b + d)i$;
2. $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Opgave A.3.2 Bereken $z + w$ en zw voor $z = 3 - 2i$, $w = 1 + i$ en voor $z = i$, $w = 1 - i$.

Voor $z - w$ geldt dan $z - w = z + (-w) = (a - c) + (b - d)i$. De deling van complexe getallen wordt na stelling A.3.4 toegelicht. De optelling en vermenigvuldiging voldoet aan bekende wetten voor commutativiteit, associativiteit en distributiviteit die we ook in $\mathbb{R}$ kennen. In de extra bijlage B staat uitgelegd wat deze drie begrippen betekenen en staan de eigenschappen beschreven die een verzameling met een optelling en een vermenigvuldiging tot een *lichaam* maken.

Opgave A.3.3 Bekijk de definitie van een lichaam in bijlage B. Ga na dat $\mathbb{C}$ een 0-element en een 1-element heeft en dat de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ voldoen aan de eigenschappen in deze definitie.

Er gelden de volgende eigenschappen:

Stelling A.3.4. *Als $z, w \in \mathbb{C}$, dan geldt:*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
3. $z\overline{z} = |z|^2$;
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

Bewijs: De eerste eigenschap volgt uit de definitie. Schrijf dit zelf uit als opgave. We schrijven het bewijs van de tweede eigenschap uit: Als $z = a + bi$ en $w = c + di$ dan is

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\
&= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i \\
&= (ac-bd)+(a(-d)+(-b)c)i \\
&= (ac-(-b)(-d))+(a(-d)+(-b)c)i \\
&= (a+(-b)i)(c+(-d)i) \\
&= (a-bi)(c-di) \\
&= \overline{z}\,\overline{w}.
\end{aligned}$$

Het bewijs voor de derde eigenschap schrijven we ook uit. Er geldt: $(a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. Schrijf zelf het bewijs voor de vierde eigenschap uit.

□

Met behulp van de derde eigenschap van stelling A.3.4 kunnen we de inverse $\frac{1}{z}$ van een complex getal $z \neq 0$ bepalen en complexe getallen op elkaar delen: uit $z\overline{z} = |z|^2$ volgt dat als $|z| \neq 0$ dat $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, en dus is

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}.$$

Een complexe noemer kan dus altijd reël gemaakt worden door teller en noemer te vermenigvuldigen met de complex geconjungeerde van de noemer.

Opgave A.3.5 Schrijf $\frac{z}{w}$ in de vorm $a + bi$ voor $z = 1$ en $w = 2 + 3i$ en voor $z = 1 + i$ en $w = i$.

A.4 De complexe e-macht en de stelling van de Moivre

Opgave A.4.1 Ga na in het complexe vlak dat de optelling van twee complexe getallen $a+bi$ en $c+di$ gelijk is aan de optelling van de vectoren (a, b) en (c, d).

Het product van twee complexe getallen heeft ook een meetkundige interpretatie die we het makkelijkst in poolcoördinaten kunnen zien: als z en w complexe getallen zijn, in poolcoördinaten weergegeven door $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ en $w = s(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, dan is

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos(\phi) + i\sin(\phi))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= rs((\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)) + i(\cos(\phi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\cos(\theta))) \\ &= rs(\cos(\phi + \theta) + i\sin(\phi + \theta)). \end{aligned}$$

Voor de laatste gelijkheid maken we gebruik van de bekende dubbele hoekformules voor goniometrische functies. We zien dat de lengte van zw het product is van de lengtes van z en w, en dat het argument van zw de som is van de argumenten van z en w. Dit bewijst de volgende stelling:

Stelling A.4.2. *Als $z, w \in \mathbb{C}$, dan geldt:*

1. $|zw| = |z||w|$;
2. $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

We kunnen deze stelling gebruiken om gehele machten van complexe getallen te schrijven in de vorm $a + bi$ zonder de vermenigvuldiging met de hand uit te hoeven schrijven, zoals we zien in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld A.4.3. $(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3$ is i omdat (maak zelf een plaatje in het complexe vlak bij de berekeningen!)

$$|(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3| = |\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i|^3 = (\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}})^3 = 1^3 = 1$$

en

$$\arg((\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3) = 3\arg(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = 3\tan^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

dus $(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

$\diamondsuit$

Opgave A.4.4 Wat is de meetkundige interpretatie van vermenigvuldiging van een complex getal met i?

Opgave A.4.5 Schrijf $(1 + i)^7$ in de vorm $a + bi$.

Laat nu $z = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ een complex getal zijn van lengte 1, dan volgt uit stelling A.4.2 de volgende stelling van de Moivre:

Stelling A.4.6. *Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Opmerking: in de theorie van complexe functies wordt de complexe e-macht van een zuiver imaginair getal ib gedefinieerd door:

$$e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b).$$

Merk op dat we hier de complexe e-macht definiëren, dus we benoemen wat we bedoelen met e^{ib}. We zien dat voor een willekeurig complex getal z met poolcoördinaten r en ϕ geldt:

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}.$$

Voor de vermenigvuldiging van z met een complex getal w met poolcoördinaten s en θ geldt dan:

$$zw = re^{i\phi}se^{i\theta} = rse^{i(\phi+\theta)},$$

want bij een vermenigvuldiging van complexe getallen worden volgens stelling A.4.2 de lengtes met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. De stelling van de Moivre zegt dus dat

$$(e^{i\phi})^n = e^{in\phi},$$

voor $n \in \mathbb{N}$, zoals je verwacht van een e-macht.

Met behulp van de definitie van e^{ib} is de e-macht van een willekeurig complex getal $z = a + ib$ gedefinieerd door

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Opgave A.4.7 Schrijf $e^{1+i\frac{\pi}{3}}$ in de vorm $a + bi$. Waaraan is $e^{i\pi}$ gelijk?

Voorbeeld A.4.8. De notatie met behulp van de e-macht maakt het eenvoudiger om bepaalde berekeningen uit te voeren, zoals we in dit voorbeeld zullen zien. Bekijk de vergelijking met het vierdegraads polynoom $z^4 = 1$. We zullen de vier oplossingen zoeken met behulp van de theorie hierboven. Laat $z = re^{i\phi}$ een nulpunt zijn. Uit de vergelijking volgt dat $|z^4| = |z|^4 = 1$ en dus dat $r = |z| = 1$ (merk op dat $|z|$ een niet-negatief reël getal is). Dus we kunnen z schrijven als $e^{i\phi}$. Het argument van 1 is 0, dus $1 = e^{i0}$. Er volgt uit $(e^{i\phi})^4 = e^{i4\phi} = e^{i0}$ dat $4\phi = 0 + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$ (argumenten zijn bepaald op veelvouden van 2π na). De oplossingen voor ϕ zijn dus $\phi = \frac{k}{2}\pi$. Voor $k = 0, 1, 2, 3$ geeft dit de vier oplossingen $z = e^{i0} = 1$, $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z = e^{i\pi} = -1$ en $z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Voor andere waarden van k vinden we steeds dezelfde oplossingen terug.

$\diamondsuit$

Opgave A.4.9 Maak zelf een meetkundig plaatje bij deze oplossingen en controleer meetkundig dat dit inderdaad de vier oplossingen zijn van $z^4 = 1$.

Opgave A.4.10 Bereken de hulpunten van $z^3 = 8$.

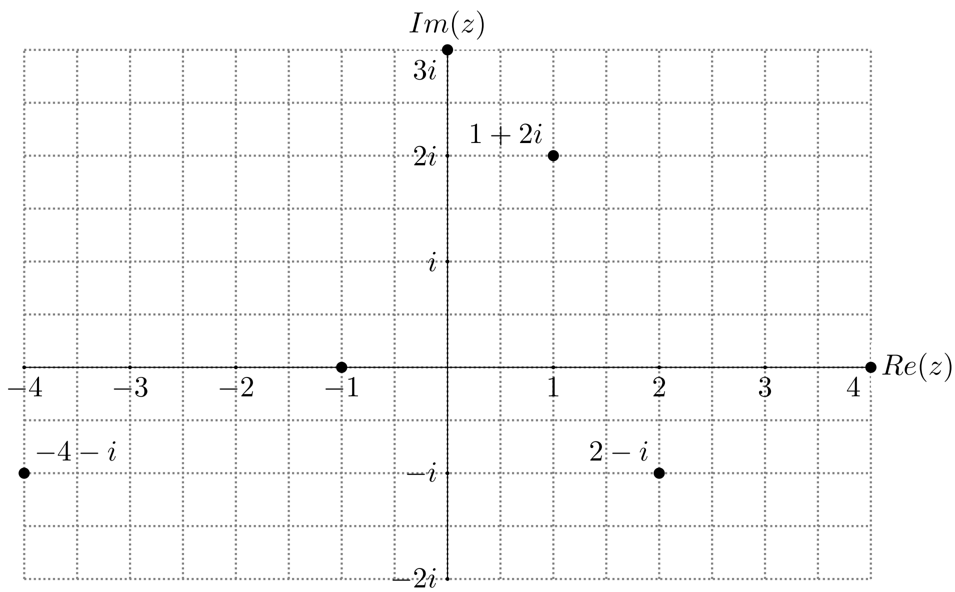
A.5 Uitwerkingen

Opgave A.5.1 Bereken de complexe nulpunten van het polynoom $P(x) = x^2 - 4x + 13$ met behulp van de *abc*- formule. Gebruik hierbij dat als $b \in \mathbb{R}$ en $b \geq 0$ dan is $\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{b}$.

Uitwerking: Met de *abc*-formule krijgen we: $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-36} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$.

Opgave A.5.2 Teken de complexe getallen $1+2i$, $3i$, -1, $-4-i$, $2-i$ en 4 in het complexe vlak.

Uitwerking:



Opgave A.5.3 Bereken de lengte en het argument van de volgende complexe getallen: $1+i$, $3i$, -20 en $-1-i$, en geef ze weer in het complexe vlak.

Uitwerking: We vinden het argument van de getallen door een plaatje in het complexe vlak te maken (maak zelf het plaatje).

1. De lengte van $1+i$ is $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ en voor het argument van $1+i$ geldt $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

2. De lengte van $3i$ is $|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$ en voor het argument van $3i$ geldt $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$.

3. De lengte van -20 is $|-20| = \sqrt{(-20)^2+0^2} = \sqrt{20^2} = 20$ en voor het argument van -20 geldt $\arg(-20) = \pi$.

4. De lengte van $-1-i$ is $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ en voor het argument van $-1-i$ geldt $\arg(-1-i) = -\frac{3}{4}\pi$.

Opgave A.5.4 Laat $z = a + bi$. Vind formules voor $\arg(z)$ in termen van de inverse tangens functie voor de volgende gevallen:

1. $a > 0$, $b \geq 0$;
2. $a > 0$, $b < 0$;
3. $a < 0$, $b \geq 0$;
4. $a < 0$, $b < 0$;
5. $a = 0$, $b > 0$;
6. $a = 0$, $b < 0$.

Waarom is $\arg(z)$ niet bepaald als $a = 0$ en $b = 0$? Bereken $\arg(z)$ als $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$.

Uitwerking: We zien in het complexe vlak, en gebruikmakend van het gegeven $\tan(-x) = -\tan(x)$, dat:

1. Als $a > 0$, $b \geq 0$ dan is $\arg(z) = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$.
2. Als $a > 0$, $b < 0$ dan is $\arg(z) = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$.
3. Als $a < 0$, $b \geq 0$ dan is $\arg(z) = \pi + \tan^{-1}(\frac{b}{a})$.
4. Als $a < 0$, $b < 0$ dan is $\arg(z) = -\pi + \tan^{-1}(\frac{b}{a})$.
5. Als $a = 0$, $b > 0$ dan is $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
6. Als $a = 0$, $b < 0$ dan is $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

We kunnen hiermee het argument van $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ berekenen en zien dat dit gelijk is aan $-\frac{5\pi}{6}$. Als $a = 0$ en $b =$ dan correspondeert $a + bi$ met de nulvector in het complexe vlak, en dus is er geen hoek gedefinieerd met de positieve x-as.

Opgave A.5.5 Schrijf $\overline{z}$ in de vorm $a + bi$ voor de volgende complexe getallen z: $1 + i$, $3i$, -20 en $-1 - i$.

Uitwerking: Er geldt:

1. $\overline{1 + i} = 1 - i$;
2. $\overline{3i} = -3i$;
3. $\overline{-20} = -20$;
4. $\overline{-1 - i} = -1 + i$.

Opgave A.5.6 Laat zien dat als $z \in \mathbb{C}$ een oplossing is van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan is $\overline{z}$ ook een oplossing van deze vergelijking. Bereken de oplossingen van $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Uitwerking: We nemen aan dat $az^2 + bz + c = 0$. Dan geldt met stelling A.3.4 dat $a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = a\overline{z^2} + b\overline{z} + c = \overline{az^2} + \overline{bz} + c = \overline{az^2 + bz + c} = \overline{0} = 0$.

We kunnen dit ook afleiden uit de (abc)-formule, we doen dit voor het voorbeeld $x^2 + 2x + 2 = 0$. We krijgen als oplossingen $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$, dus $z = -1 + i$ is een oplossing en $\overline{z} = -1 - i$ is een oplossing.

Opgave A.5.7 Bereken $z + w$ en zw voor $z = 3 - 2i$, $w = 1 + i$ en voor $z = i$, $w = 1 - i$.

Uitwerking: Er geldt:

1. $(3 - 2i) + (1 + i) = 4 - i$ en $(3 - 2i)(1 + i) = 3 + 3i - 2i + 2 = 5 + i$.
2. $(i) + (1 - i) = 1$ en $(i)(1 - i) = i + 1 = 1 + i$.

Opgave A.5.8 Schrijf $\frac{z}{w}$ in de vorm $a + bi$ voor $z = 1$ en $w = 2 + 3i$ en voor $z = 1 + i$ en $w = i$.

Uitwerking: Er geldt:

1. $\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.
2. $\frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i}\frac{-i}{-i} = \frac{1-i}{1} = 1 - i$.

Opgave A.5.9 Ga na in het complexe vlak dat de optelling van twee complexe getallen $a+bi$ en $c+di$ gelijk is aan de optelling van de vectoren (a, b) en (c, d).

Uitwerking: Er geldt: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. De som correspondeert dus met de vector $(a + c, b + d)$ in het complexe vlak.

Opgave A.5.10 Wat is de meetkundige interpretatie van vermenigvuldiging van een complex getal met i?

Uitwerking: Het complexe getal i heeft lengte 1 en argument $\frac{\pi}{2}$, dus vermenigvuldiging met i verandert de lengte van het getal niet, en telt $\frac{\pi}{2}$ op bij het argument van het getal. In het complexe vlak geeft dat dus een rotatie over 90 graden tegen de wijzers van de klok in.

Opgave A.5.11 Schrijf $(1 + i)^7$ in de vorm $a + bi$.

Uitwerking: We geven hier een uitwerking met behulp van de complexe e-macht, wat in het vervolg van deze paragraaf wordt uitgelegd. Een andere methode is om de vorige stelling toe te passen, zoals in het vorige voorbeeld. We schrijven eerst $1 + i$ als e-macht: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, en dus geldt: $(1 + i)^7 = (\sqrt{2})^7 e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2^{\frac{7}{2}}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})) = 2^{\frac{7}{2}}(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = 8 - 8i$.

Opgave A.5.12 Schrijf $e^{1+i\frac{\pi}{3}}$ in de vorm $a + bi$. Waaraan is $e^{i\pi}$ gelijk?

Uitwerking: $e^{1+i\frac{\pi}{3}} = ee^{i\frac{\pi}{3}} = e(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = e(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{e}{2} + i\frac{e}{2}\sqrt{3})$.

We zien tenslotte, dat $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

Opgave A.5.13 Bereken de nulpunten van $z^3 = 8$.

Uitwerking:
Bekijk het derdegraads polynoom $z^3 = 8$. Laat $z = re^{i\phi}$ een nulpunt zijn. Uit de vergelijking volgt dat $|z^3| = |z|^3 = 8$ en dus dat $r = |z| = 2$. Dus we kunnen z schrijven als $2e^{i\phi}$. Het argument van 8 is 0, dus $8 = 8e^{i0}$. Er volgt uit $(e^{i\phi})^3 = e^{i3\phi} = e^{i0}$ dat $3\phi = 0 + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$ (argumenten zijn bepaald op veelvouden van 2π na). De oplossingen voor ϕ zijn dus $\phi = \frac{2k}{3}\pi$. Voor $k = 0, 1, 2$ geeft dit de drie oplossingen $z = 2e^{i0} = 2$, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i$ en $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})) = 2(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i$.

Bijlage B

Lichamen

B.1 Definitie van een lichaam

In deze appendix geven we de definitie van het wiskundige begrip *lichaam*. In het Engels heet een lichaam een *field*, in het Vlaams wordt *veld* gebruikt.

Definitie B.1.1. *Een lichaam is een niet-lege verzameling F met daarop twee bewerkingen, die we noteren met $+$ en $*$ (optelling en een vermenigvuldiging genoemd), zodat voor ieder paar elementen x en y in F er unieke elementen $x+y$ en $x*y$ in F bestaan met de eigenschap dat voor alle $x, y, z \in F$:*

1. $x+y=y+x$ *en* $x*y=y*x$
   (commutativiteit van optelling en vermenigvuldiging);

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ *en* $(x*y)*z=x*(y*z)$
   (associativiteit van optelling en vermenigvuldiging);

3. *Er bestaat een element* $0 \in F$ *en een element* $1 \in F$ *zodat voor ieder element* $x \in F$ *geldt* $0+x=x$ *en* $1*x=x$
   (bestaan van een eenheidselement onder optelling en vermenigvuldiging);

4. *Voor ieder element* $x \in F$ *en ieder element* $y \in F$ *met* $y \neq 0$*, bestaan er elementen* $z, w \in F$ *zodat* $x+z=0$ *en* $y*w=1$
   (bestaan van een inverse element onder optelling en vermenigvuldiging);

5. $x*(y+z)=x*y+x*z$
   (distributiviteit van vermenigvuldiging over optelling).

Voorbeeld B.1.2. De verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen $\{\frac{m}{n}|m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ is een lichaam onder de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging van rationale getallen. Om dit te bewijzen moeten we de eigenschappen uit definitie B.1.1 nalopen. We zullen deze als oefening helemaal uitschrijven. Laat $x, y, z \in \mathbb{Q}$ willekeurig gegeven zijn. Dan zijn er gehele getallen $m, n, q, r, s, t \in \mathbb{Z}$ met $n, r, t \neq 0$ zodat $x = \frac{m}{n}, y = \frac{q}{r}$ en $z = \frac{s}{t}$. Er geldt dat $x + y = \frac{m}{n} + \frac{q}{r} = \frac{mr+qn}{nr}$ en $x * y = \frac{m}{n}\frac{q}{r} = \frac{mq}{nr}$. Dus $x+y$ en $x*y$ zijn inderdaad te schrijven als een breuken van gehele getallen, dus het zijn elementen van $\mathbb{Q}$. We laten zien dat ook de bovenstaande eigenschappen 1 t/m 5 gelden (we gebruiken hierbij de bekende eigenschappen van optellen en vermenigvuldigen in $\mathbb{Z}$):

1. $x+y = \frac{m}{n} + \frac{q}{r} = \frac{mr+qn}{nr} = \frac{qn+mr}{nr} = \frac{q}{r} + \frac{m}{n} = y+x$ en $x*y = \frac{mq}{nr} = \frac{qm}{rn} = y*x$;

2. $(x+y)+z = (\frac{m}{n} + \frac{q}{r}) + \frac{s}{t} = \frac{mr+qn}{nr} + \frac{s}{t} = \frac{mrt+qnt+nrs}{nrt} = \frac{m}{n} + \frac{qt+rs}{rt} = \frac{m}{n} + (\frac{q}{r} + \frac{s}{t}) = x+(y+z)$ en $(x*y)*z = (\frac{m}{n} * \frac{q}{r}) * \frac{s}{t} = \frac{mq}{nr} * \frac{s}{t} = \frac{mqs}{nrt} = \frac{m}{n} * (\frac{qs}{rt}) = \frac{m}{n} * (\frac{q}{r} * \frac{s}{t}) = x*(y*z)$.

3. Het element 0 is het eenheidselement onder optellen. Ten eerste merken we op dat $0 = \frac{0}{1}$, dus 0 is te schrijven als breuk van gehele getallen, dus het is een element van $\mathbb{Q}$, en er geldt: $0 + \frac{m}{n} = \frac{0n+m1}{n} = \frac{m}{n}$. Het element 1 is het eenheidselement onder vermenigvuldiging, want $1 = \frac{1}{1}$, dus 1 is ook een element van $\mathbb{Q}$ en er geldt $1 * \frac{m}{n} = \frac{1m}{n} = \frac{m}{n}$.

4. Laat $x = \frac{m}{n}$ en $y = \frac{q}{r}$ met $q \neq 0$ willekeurig gekozen zijn. Dan is $\frac{-m}{n}$ de inverse van x onder optelling, want $\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{m-m}{n} = 0$ en $\frac{r}{q}$ is de inverse van y onder vermenigvuldiging, want $\frac{q}{r} * \frac{r}{q} = 1$.

5. $x*(y+z) = \frac{m}{n} * (\frac{q}{r} + \frac{s}{t}) = \frac{m}{n} * \frac{qt+rs}{rt} = \frac{mqt+mrs}{nrt} = \frac{mq}{nr} + \frac{ms}{nt} = x*y+x*z$.

$\diamondsuit$

Ook de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$ vormt een lichaam onder de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging.

Opgave B.1.3 Is de verzameling $\mathbb{Z}$ onder de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging een lichaam?

Uit de eigenschappen van een lichaam volgen nog meer eigenschappen die nuttig zijn bij berekeningen met elementen uit een lichaam. Deze zullen verder aanbod komen in de algebravakken.

Bijlage C

Lineaire differentiaalvergelijkingen

C.1 Inleiding

In voorbeeld 7.2.9 in het dictaat wordt de oplossingsverzameling van een homogene lineaire differentiaalvergelijking besproken. Dit zijn differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$p_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y(x) + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x) + \cdots + p_1(x)\frac{d}{dx}y(x) + p_0(x)y(x) = 0,$$

waarbij de functies $p_i(x)$ gedefinieerd zijn op $\mathbb{R}$, of op een interval in $\mathbb{R}$. In deze bijlage gaan we de oplossingsverzameling nader bekijken voor het geval dat $n = 2$ en de functies $p_i(x)$ constant zijn.

Om te beginnen wat terminologie. De bovenstaande differentiaalvergelijking heet lineair omdat er alleen eerstegraads termen van y en de afgeleiden van y in voorkomen, en geen producten van y en de afgeleiden van y. De vergelijking heet homogeen omdat geen van de summanden in de sommatie alleen van de variabele x afhangt (zonder y of afgeleiden van y). We noemen de differntiaalvergelijking inhomogeen als er wel een term in de sommatie voorkomt die alleen van x afhangt. Het is de gewoonte om deze term aan de rechterkant van de vergelijking te zetten, dus:

$$p_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y(x) + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x) + \cdots + p_1(x)\frac{d}{dx}y(x) + p_0(x)y(x) = f(x).$$

De functie $f(x)$ mag ook gelijk aan een constante ($\neq 0$) zijn. De orde van de differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide van y waarbij de functie p_i niet gelijk is aan de nulfunctie. Als de $p_i(x)$ allemaal constante functies zijn, dan zeggen we dat de differentiaalvergelijking constante coëffiënten heeft.

We kunnen de bovenstaande differentiaalvergelijking ook weergeven als een operator die op functies werkt: $L(y) = f(x)$, met

$$L = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \frac{d^i}{dx^i}.$$

Het begrip operator wordt in de wiskunde vaak gebruikt voor een functie die als domein een verzameling van functies heeft. Als de differentiaalvergelijking homogeen is dan zien we dat de nulfunctie een oplossing is van de differentaalvergelijking. Ook zien we dat als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ beide oplossingen zijn, dat $y_1(x) + y_2(x)$ en $\lambda y_1(x)$ ook oplossingen zijn (met $\lambda \in \mathbb{R}$), want $L(y_1+y_2) = L(y_1)+L(y_2) = 0+0 = 0$ en $L(\lambda y_1) = \lambda L(y_1) = 0$. We concluderen dat de verzameling van alle oplossingen van de homogene lineaire differentiaalvergelijking een lineaire deelruimte is van de vectorruimte van functies op $\mathbb{R}$. De oplossingsverzameling is dus een vectorruimte. Uit de theorie van lineaire differentiaalvergelijkingen blijkt dat de dimensie van de oplossingsverzameling gelijk is aan de orde van de differentiaalvergelijking.

In deze bijlage onderzoeken we de oplossingsverzameling van een tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Zo'n vergelijking is dus van de vorm:

$$a\frac{d^2}{dx^2}y(x) + b\frac{d}{dx}y(x) + cy(x) = f(x),$$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$, kortweg geschreven als:

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

C.2 De structuur van de oplossingsverzameling van $ay'' + by' + cy = f(x)$

In paragraaf 3.4 van het diktaat hebben we de oplossingsverzameling van homogene en inhomogene lineaire stelsels bekeken. Deze methode kunnen we direct overnemen voor lineaire differentiaalvergelijkingen. We werken dit hier uit voor de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Noem S_{hom} de oplossingsverzameling van de homogeen gemaakte differentiaalvergelijking $ay'' + by' + cy = 0$ en S_{inhom} de oplossingsverzameling van de inhomogene differentiaalvergelijking $ay'' + by' + cy = f(x)$. Zoals we in de inleiding hebben opgemerkt is S_{hom} een vectorruimte van dimensie 2. Stel dat we twee onafhankelijke oplossingen y_1 en y_2 hebben gevonden van de homogene vergelijking. Dan vormen zij dus een basis van S_{hom}, en dus is iedere oplossing van de homogene vergelijking te schrijven als

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

met $A, B \in \mathbb{R}$. Veronderstel vervolgens dat we een oplossing y_p hebben gevonden van de inhomogene vergelijking. Dan volgt op precies dezelfde wijze als in paragraaf 3.4 dat

$$S_{\text{inhom}} = \{y_p + y | y \in S_{\text{hom}}\}.$$

Het argument dat we daar gebruikten was ten eerste dat voor iedere $y \in S_{\text{hom}}$ en de gegeven oplossing $y_p \in S_{\text{inhom}}$ geldt dat $L(y_p + y) = f(x) + 0 = f(x)$, dus $y_p + y \in S_{\text{inhom}}$, en ten tweede dat voor iedere oplossing $z \in S_{\text{inhom}}$ geldt dat $L(z - y_p) = f(x) - f(x) = 0$ dus $z - y_p \in S_{\text{hom}}$, en we zien dat z te schrijven als $y_p + y$ met $y \in S_{\text{hom}}$.
We concluderen dat alle oplossingen van de inhomogene vergelijking gegeven worden door

$$y(x) = y_p(x) + Ay_1(x) + By_2(x).$$

De oplossing y_p wordt een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking genoemd.

C.3 Oplossingen van de homogene vergelijking $ay'' + by' + cy = 0$

Om twee onafhankelijke oplossingen te vinden voor de homogene vergelijking $ay'' + by' + cy = 0$ proberen we een oplossing van de vorm $y(x) = e^{rx}$. Als we dit invullen in de differentiaal vinden we $e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$. Omdat $e^{rx} \neq 0$ volgt hieruit dat $ar^2 + br + c = 0$. Dit wordt de karakteristieke vergelijking van de differentiaalvergelijk genoemd. De karakteristieke vergelijking is een tweedegraads polynoom, dus de vergelijking heeft twee oplossingen, r_1 en r_2. We onderscheiden de volgende gevallen:

- Als r_1 en r_2 twee verschillende reële nulpunten zijn, dan vinden we op deze manier twee onafhanklijke oplossingen e^{r_1x} en e^{r_2x} (ga zelf na dat de twee oplossingen onafhankelijk zijn). Dus de algemene oplossing wordt gegeven door:
$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}.$$
- Als r_1 een dubbel nulpunt is, dan vinden we een oplossing van de vorm e^{r_1x}. Ga zelf na dat xe^{r_1x} in dit geval ook een oplossing is (gebruikmakend van het gegeven dat r_1 een dubbel nulpunt is), en dat de twee oplossingen onafhankelijk zijn. Dus de algemene oplossing wordt gegeven door:
$$y(x) = Ae^{r_1x} + Bxe^{r_1x}.$$
- Als $r_1 = \alpha + \omega i$ en $r_2 = \alpha - \omega i$ complexe nulpunten zijn, dan vinden we twee complexe oplossingen $y(x) = e^{(\alpha+\omega i)x}$ en $y_2(x) = e^{(\alpha-\omega i)x}$. Als we geïntereseerd zouden zijn in complexe oplossingen dan hadden we zo alle complexe oplossingen gevonden door te nemen $Ae^{(\alpha+\omega i)x} + Be^{(\alpha-\omega i)x}$ met $A, B \in \mathbb{C}$. We zijn echter op zoek naar twee onafhankelijke reële oplossingen. Die vinden we door de constanten A en B handig te kiezen: Als $A = \frac{1}{2}$ en $B = \frac{1}{2}$ dan vinden we: $y(x) = \frac{1}{2}e^{\alpha x+\omega xi} + \frac{1}{2}e^{\alpha x-\omega xi} = \frac{1}{2}e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x) + \cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x)) = \frac{1}{2}e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x) + \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)) = e^{\alpha x}\cos(\omega x)$. Als we vervolgens $A = \frac{1}{2i}$

en $B = -\frac{1}{2i}$ kiezen, dan vinden we: $y(x) = \frac{1}{2i}e^{\alpha x+\omega xi} - \frac{1}{2i}e^{\alpha x-\omega xi} = \frac{1}{2i}e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x) - \cos(-\omega x) - i\sin(-\omega x)) = \frac{1}{2i}e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x) - \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) = e^{\alpha x}\sin(\omega x)$.
We vinden als onafhankelijke oplossingen $e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ en $e^{\alpha x}\sin(\omega x)$ (ga zelf na dat de twee oplossingen onafhankelijk zijn). Dus de algemene oplossing wordt gegeven door:

$$y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\omega x) + Be^{\alpha x}\sin(\omega x).$$

C.4 Oplossingen van de inhomogene vergelijking $ay''+by'+cy=f(x)$

In het algemeen is het niet eenvoudig om een particuliere oplossing te vinden van de inhomogene differentiaalvergelijking $ay'' + by' + cy = f(x)$, maar dit hangt uiteraard sterk af van de functie $f(x)$. In sommige gevallen kun je een oplossing met daarin nog parameters gokken en door deze in te vullen in de differentiaalvergelijking afleiden voor welke waarden van de parameters je een oplossing vindt.

We geven een paar voorbeelden:

- Als $f(x)$ een polynoom is van graad n, probeer dan als oplossing een polynoom van graad n.
- Als $f(x)$ een lineaire combinatie is van $\sin(\alpha x)$ en $\cos(\alpha x)$ probeer dan een oplossing van de vorm $C\sin(\alpha x) + D\cos(\alpha x)$.
- Als $f(x) = p(x)e^{ax}$ met $p(x)$ een polynoom, probeer dan een oplossing van de vorm $q(x)e^{ax}$ met $q(x)$ een polynoom van dezelfde graad als $p(x)$.

Er zijn allerlei uitzonderingen te geven waarin de bovenstaande recepten niet werken. In deze bijlage zullen we daar niet verder op in gaan. In vrijwel ieder calculusboek zul je een lijst met recepten hiervoor vinden.

Om de algemene oplossingsverzameling te vinden voor de inhomogene vergelijking doorloop je dus de volgende stappen:

1. Vind twee onafhankelijke oplossingen y_1 en y_2 van de bijbehorende homogene vergelijking.
2. De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt dan gegeven door $Ay_1 + By_2$ met $A, B \in \mathbb{R}$.
3. Vind een particuliere oplossing y_p van de inhomogene vergelijking.
4. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking wordt dan gegeven door $y_p + Ay_1 + By_2$ met $A, B \in \mathbb{R}$.

Als er ook beginvoorwaarden gegeven zijn, dan vind je waarden voor A en B zodat je oplossing voldoet aan de beginvoorwaarden. We zullen hier in dit college niet verder op in gaan.

C.5 Voorbeelden

Voorbeeld C.5.1. Bepaal alle oplossingen van de vergelijking $y'' - 5y' + 6y = \sin(6x)$.

$\diamondsuit$

We doorlopen de bovenstaande stappen:

1. De karakteristieke vergelijking van de bovenstaande differentiaalvergelijking is $r^2 - 5r + 6 = 0$. Er geldt dat $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$, dus $r = 2$ en $r = 3$ zijn twee verschillende wortels van de karakteristieke vergelijking. We vinden $y_1(x) = e^{2x}$ en $y_2(x) = e^{3x}$ als onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking $y'' - 5y' + 6y = 0$.

2. De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt dan gegeven door $Ae^{2x} + Be^{3x}$ met $A, B \in \mathbb{R}$.

3. Om een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden vullen we een functie in van de vorm $C\sin(6x) + D\cos(6x)$. We vinden

   $-36C\sin(6x) - 36D\cos(6x) - 30C\cos(6x) + 30D\sin(6x) + 6C\sin(6x) + 6D\cos(6x) = (-30C + 30D)\sin(6x) + (-30D - 30C)\cos(6x) = \sin(6x).$

   Hieruit volgt dat $-30D - 30C = 0$, dus $C = -D$, en $-30C + 30D = 1$, dus $C = -\frac{1}{60}$ en $D = \frac{1}{60}$. We vinden als particuliere oplossing $y(x) = -\frac{1}{60}\sin(6x) + \frac{1}{60}\cos(6x)$.

4. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking wordt gegeven door:
   $$-\frac{1}{60}\sin(6x) + \frac{1}{60}\cos(6x) + Ae^{2x} + Be^{3x},$$
   met $A, B \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld C.5.2. Bepaal alle oplossingen van de vergelijking $y'' + 2y' + 2y = x^2 + x$.

$\diamondsuit$

We doorlopen de bovenstaande stappen:

1. De karakteristieke vergelijking van de bovenstaande differentiaalvergelijking is $r^2 + 2r + 2 = 0$. We krijgen als oplossingen $r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$. We vinden als oplossingen $y_1(x) = e^{-x}\cos(x)$ en $y_2(x) = e^{-x}\sin(x)$ als onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2. De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt dan gegeven door $Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x)$ met $A, B \in \mathbb{R}$.

3. Om een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden vullen we een functie in van de vorm $Cx^2 + Dx + E$. We vinden

$2C+2(2Cx+D)+2(Cx^2+Dx+E) = 2Cx^2+(4C+2D)x+(2C+2D+2E) = x^2 + x$.

Hieruit volgt dat $2C = 1$, dus $C = \frac{1}{2}$, en $4C + 2D = 1$, dus $D = -\frac{1}{2}$ en $2C + 2D + 2E = 0$, dus $E = 0$. We vinden als particuliere oplossing $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

4. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking wordt gegeven door

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x),$$

met $A, B \in \mathbb{R}$.

Opgave C.5.3 Vind alle oplossingen van

1. $y'' + 2y' + 4y = 0$
2. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
3. $y'' + y' - 2y = 7e^{5x}$
4. $y'' + 9y = 2x^2 - 5$
5. $y'' - 4y = xe^x$