Inlever 2 Lial 2

Boris van Boxtel en Lotte Gritter

21 December 2022

Opgave 1. Gegeven zijn twee eindig dimensionale vectorruimten V en W en een lineare afbeelding $A\colon V \to W$. Er wordt bewezen dat als $\dim(V) > \dim(W)$, A niet injectief is.

Bewijs.
Volgens de dimensiestelling geldt de volgende vergelijking:

$$\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(A(V)) \tag{1}$$

Hieruit volgt de volgende vergelijking:

$$\dim(V) - \dim(A(V)) = \dim(\ker(A)). \tag{2}$$

Per definitie geldt het volgende: (komt omdat $A(V) \subseteq W$, moet meer uitleg bij?)

$$\dim(W) \geq \dim(A(V)) \tag{3}$$

En samen met het gegeven dat $\dim(V) > \dim(W)$, gelden de volgende ongelijkheden:

$$\dim(V) > \dim(W) \geq \dim(A(V)) \tag{4}$$

$$\dim(V) > \dim(A(V)) \tag{5}$$

Hieruit volgt dat

$$\dim(V) - \dim(A(V)) > 0. \tag{6}$$

Vanuit verg. (2) volgt dus dat $\dim(\ker(A)) > 0$. Samen met **Stelling 7.3.3** is de conclusie dat A niet injectief is.

$\square$

Opgave 2. Het doel is de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36 \tag{7}$$

om te schrijven naar een vorm

$$a(x')^2 + b(y')^2 = 36 \tag{8}$$

met behulp van lineare algebra. We geven eerst een beeld van de aanpak om dit bereiken.

We beginnen met het schrijven van verg. (7) in de volgende vorm:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 36 \tag{9}$$

Waar $\mathbf{x} = (x, y)^T$ en A een 2×2 matrix, namelijk $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. We zoeken nu een basis van eigenvectoren van A, zodat we A kunnen diagonaliseren. Wanneer we deze hebben gevonden, kan A geschreven worden als $A = S^{-1}DS$. Voor een coördinatentransformatie matrix S en een diagonaalmatrix D. Als we dit invullen in verg. (9) vinden we de volgende vergelijking:

$$\mathbf{x}^T S^{-1} D S \mathbf{x} = 36. \tag{10}$$

Vervolgens bewijzen we dat $S^{-1} = S^T$, waardoor we verg. (10) kunnen schrijven als:

$$\mathbf{x}^T S^T D S \mathbf{x} = 36. \tag{11}$$

wat we volgens **Stelling 3.1.1** kunnen schrijven als volgt:

$$(S\mathbf{x})^T D S \mathbf{x} = 36. \tag{12}$$

Hier zien we in dat we aan de linker en rechterkant nu nieuwe coördinaten $S\mathbf{x} = \mathbf{x}' = (x', y')^T$ hebben, dus we vinden het volgende:

$$\mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' = 36. \tag{13}$$

Per definitie is D een diagonaal matrix, dus vinden we een polynoom in de coördinaten $(x', y')^T$ zonder kruistermen. Nu volgt de uitvoering voor de gegeven vergelijking.

Voor een basis van eigenvectoren van A beginnen we bij het zoeken van eigenwaarden van A. Dit doen we door de vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ op te lossen. Dit geeft de volgende vergelijking in λ:

$$(2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 0 \tag{14}$$

De oplossingen hiervan zijn $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$, met beide λ_1, λ_2 een algebraïsche multipliciteit van 1. We vinden de eigenvectoren bij de eigenwaarden λ_1 en λ_2 door een basis te vinden van $\ker(A - \lambda_1 I) = E_1$ en $\ker(A - \lambda_2 I) = E_2$ respectievelijk. Dit doen we door Gauss-Jordan toe te passen op de matrix $A - \lambda I$, en vervolgens een basis op te stellen. We vinden de volgende bases van de eigenruimtes:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\} \tag{15}$$

$$B_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\} \tag{16}$$

Waar B_1 de basis is van E_1 en B_6 de basis van E_6. Deze specifieke vectoren zijn zo gekozen zodat de lengte 1 is. We zien dat deze bases beide uit 1 vector bestaan. Dus geldt dat de dimensie van E_1 en E_6 beide gelijk is aan 1. Dus voor elke eigenwaarde geldt dat de algebraïsche multipliciteit gelijk is aan de meetkundige multipliciteit, dus A is diagonalizeerbaar. We zien dat het inproduct van de twee vectoren in B_1 en B_6 0 is, dus ze staan loodrecht op elkaar en vormen dus een basis van $\mathbb{R}^n$. De coördinatentransformatie matrix S en de diagonaal matrix D zijn gegeven door:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{17}$$

We laten nu zien dat $S^{-1} = S^T$.

Bewijs.
We kunnen beide matrices berekenen, en vinden het volgende.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad S^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \tag{18}$$

We zien dus dat voor deze S geldt dat $S^{-1} = S^T$.

$\square$

We hebben alle benodigde componenten gevonden. Als we de gevonden matrix voor D invullen in verg. (13) vinden we het volgende:

$$\mathbf{x}'^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}' = 36 \tag{19}$$

en dit kunnen we schrijven als:

$$x'^2 + 6y'^2 = 36. \tag{20}$$

We hebben de orginele vraag beantwoord met oplossing $a = 1$ en $b = 6$.

Ook zien we dat de volgende vergelijking geldt:

$$S\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Als we ter controle deze twee vergelijking van x' en y' invullen in verg. (20), vinden we zoals verwacht verg. (7) terug.

Hieronder staat een plot van de oplossingsverzameling van verg. (20).