Lineare Algebra - Inleveropgave 1

Brechtje Poppen - Lotte Gritter - Boris van Boxtel

23 september 2022 - Week 38

(a). Stel $z^n = 1$ met $z \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan is z als volgt te schrijven: $z = re^{i\phi}$, dus $z^n = r^n e^{in\phi} = 1$.

Voor twee willekeurige getallen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ met $w_1 = w_2$ geldt $|w_1| = |w_2|$ en $\arg(w_1) = \arg(w_2)$, dus:

$$\begin{aligned} |z^n| &= |1| \\ \arg(z) &= \arg(1) \end{aligned} \tag{1}$$

We weten dat $|z^n| = r^n$, dus $r^n = 1$, en omdat $r \in \mathbb{R}$, $r = 1$. Ook geldt dat $\arg(z) = in\phi$ en $\arg(1) = 2k\pi$ met $k \in \mathbb{N}$, dus $n\phi = 2k\pi$. Hieruit volgt dat $\phi = \frac{2k\pi}{n}$.

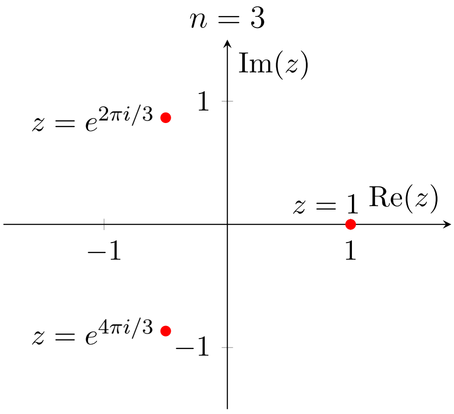
Voor een willekeurige $n \in \mathbb{N}$ geldt $r = 1$ en $\phi = \frac{2k\pi i}{n}$. Hieruit volgt dat $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. Voor $n = 3$ en $n = 6$ krijg je de volgende eenheidswortels:

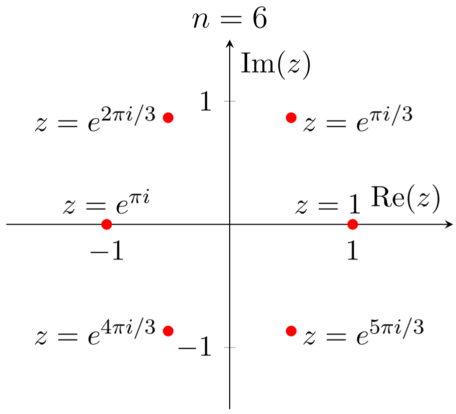
$n = 3$

k	z
0	1
1	$e^{2\pi i/3}$
2	$e^{4\pi i/3}$

$n = 6$

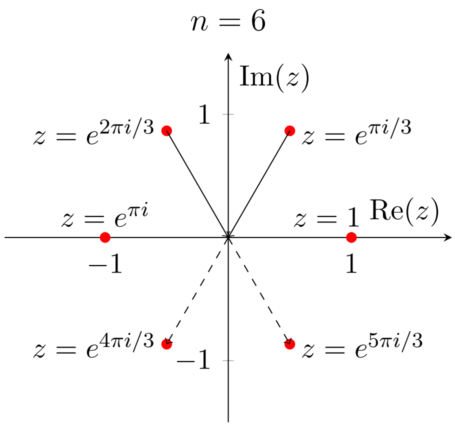
k	z
0	1
1	$e^{\pi i/3}$
2	$e^{2\pi i/3}$
3	$e^{\pi i}$
4	$e^{4\pi i/3}$
5	$e^{5\pi i/3}$



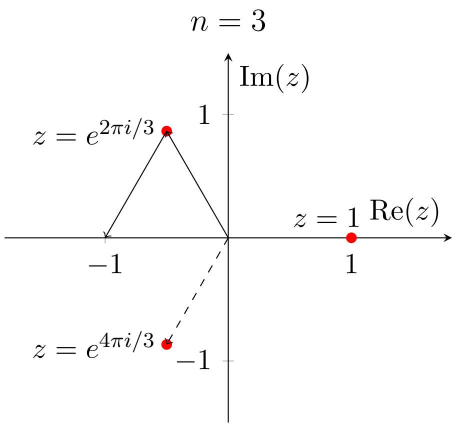


De som van de n n-de eenheidswortels is 0, omdat alle vectoren opgeteld elkaar opheffen. Voor elke n is 1 een eenheidswortel. Wanneer n even is, zoals bij $n = 6$, heffen alle getallen met een complex deel niet gelijk aan 0 elkaar op, en blijven alleen -1 en 1 over, die elkaar vervolgens opheffen. Wanneer n oneven is, is de som van alle getallen waarvan het complexe deel niet gelijk is aan nul, -1. Deze heft vervolgens de overgebleven eenheidswortel met waarde 1 op.

Voorbeelden:



We zien hier dat de som van de complexe getallen die niet op de reëele as liggen 0 is, en vervolgens -1 en 1 overblijven. Deze twee heffen elkaar op, en dus houden we 0 over.



We zien hier dat de som van de twee complexe getallen behalve 1, samen opgeteld -1 zijn. Dit heft op met de overgebleven eenheidswortel 1, en dus houden we 0 over.

(b). De n-de eenheidswortels zijn $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ met $k \in \mathbb{N}$. Zie opdracht (a). voor de afleiding hiervan.

De n-de eenheidswortels zijn weer te geven in het complexe vlak als punten die gelijkmatig zijn verdeeld over de eenheidscirkel. Er zijn altijd n aantal eenheidswortels. De hoek tussen twee opeenvolgende eenheidswortels is altijd $\frac{2\pi}{n}$.

(c). Neem $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ de eenheidswortel met het kleinste positieve argument, dan zijn de overige eenheidswortels te schrijven als ω^k voor een $k \in \mathbb{N}$, want $\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ is de algemene vorm van de eenheidswortels.

(d). Te bewijzen: $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Bewijs.
Neem $S = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$.
Dan $S \cdot \omega = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = S - 1 + \omega^n$.
Dan kunnen we schrijven $S \cdot \omega - S = -1 + \omega^n$.
Omdat $\omega^n = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^n = e^{2\pi i} = 1$, $-1 + \omega^n = 0$.
Dus $S(\omega - 1) = 0$.
Omdat $\arg(1) = 0$, en ω de eenheidswortel is met het kleinste postitieve argument, is ω niet 1.
Hieruit volgt dat $(\omega - 1)$ niet gelijk is aan nul.
Dus $S = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$. □

(e). Elke term in de som $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$ corrospondeert exact met een eenheidswortel en alle eenheidswortels corrosponderen exact met een term in deze som. Bij (d). hebben we bewezen dat deze som gelijk is aan 0, dus de som van alle eenheidswortels is 0.

(f). De eenheidswortels van x^3+x^2+x+1, zijn de oplossingen van de vergelijking $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ met $x \in \mathbb{C}$. Het is duidelijk dat een van de oplossingen is $x = -1$. Dus $(x + 1)$ is een factor. Door middel van een staartdeling vinden we dat $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$. Dit kunnen we verder factoriseren naar $(x+1)(x+i)(x-i)$. Hieruit volgt dat $x+1 = 0$ of $x+i = 0$ of $x-i = 0$. Dus $x = -1, x = -i$ of $x = i$.