## Bewijzen - Inleveropgave 6

## B.H.J. van Boxtel

## 25 Oktober 2022 - Week 43

Gegeven is de functie  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto 3x^5$ . Een functie g(x) is continu in a als  $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ .

**Stelling 1.** Zij  $a \ge 0$  willekeurig maar vast, dan is f continu in a.

In andere woorden, er moet worden bewezen dat  $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ , oftewel  $\lim_{x\to a} 3x^5 = 3a^5$ .

Dit is te bewijzen doormiddel van een  $\epsilon - \delta$ -bewijs.

Bewijs.

Kies

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3}\right\}$$

Neem nu aan:

$$|x - a| < \delta \tag{1}$$

We willen laten zien dat hieruit volgt dat:

$$|3x^5 - 3a^5| < \epsilon \tag{2}$$

Door onze keuze van  $\delta$ , geldt het volgende:

$$\delta \le 1 \tag{3}$$

En hierdoor geldt ook:

$$x \le a + 1 \tag{4}$$

We zien dat we het linkerdeel van verg. (2) kunnen herschrijven als:

$$|3x^{5} - 3a^{5}| = |x - a||3x^{4} + 3x^{3}a + 3x^{2}a^{2} + 3xa^{3} + 3a^{4}|$$

$$(5)$$

Door de driehoeks ongelijkheid kunnen we schrijven:

$$|3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \le |3x^4| + |3x^3a| + |3x^2a^2| + |3xa^3| + |3a^4|$$
 (6)

Door verg. (4) geldt het volgende:

$$|3x^{4} + 3x^{3}a + 3x^{2}a^{2} + 3xa^{3} + 3a^{4}|$$

$$\leq |3(a+1)^{4}| + |3(a+1)^{3}a| + |3(a+1)^{2}a^{2}| + |3(a+1)a^{3}| + |3a^{4}| \quad (7)$$

Gegeven is dat  $a \geq 0$ , dus we kunnen aan de rechterkant de absoluutstrepen weglaten, en vervolgens de hele vergelijking simplificeren tot het volgende:

$$|3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \le 15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3 \tag{8}$$

Wanneer we dit samennemen met verg. (1) vinden we:

$$|x - a||3x^4 + 3x^3a + 3x^2a^2 + 3xa^3 + 3a^4| \le \delta(15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3)$$
 (9)

Door verg. (5) kunnen we het linkerdeel van de ongelijheid als volgt schrijven:

$$|3x^5 - 3a^5| \le \delta(15a^4 + 30a^3 + 30a^2 + 15a + 3) \tag{10}$$

Door onze keuze van  $\delta$  weten we dat:

$$\delta \le \frac{\epsilon}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3} \tag{11}$$

Hierdoor kunnen we verg. (10) ook schrijven als:

$$|3x^5 - 3a^5| \le \frac{\epsilon(15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3)}{15a^4 + 30a^4 + 30a^2 + 15a + 3} \tag{12}$$

Dus:

$$|3x^5 - 3a^5| \le \epsilon \tag{13}$$