opgave 12

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

a. $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} -e^{-t} + e^{-0}$

$= 0 + 1 = 1$

$\Gamma(1) = 1$

gegeven is:

b. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

dus $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x} e^{-t}\,dt$.

als we dit partieel integreren, vinden we het volgende:

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -x t^{x-1} e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Als we nu de grenzen uitschrijven, krijgen we het volgende:

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t} + \frac{0^x}{e^{-0}} + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

we weten uit Oefening 326. dat $\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t} = 0$, dus we houden het volgende over:

$$= 0 + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

omdat x geen integratie variabelen is, kunnen we deze buiten de haakjes halen. Vanuit de definitie van de Γ-functie volgt dan ook:

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

~~a. $\Gamma(6) = \Gamma(5+1) = 5\Gamma(5) = 5\Gamma(4+1) = 5\cdot 4\,\Gamma(4)$~~

c. we weten nu vanuit b. dat $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Dus kunnen we schrijven:

$$\Gamma(6) = \Gamma(5+1) = 5\Gamma(5).$$

dit kunnen we herhalen tot we $\Gamma(1)$ hebben, waarvan we de waarde al weten.

$$\Gamma(6) = 5\Gamma(4+1) = 5\cdot 4\,\Gamma(4) \dots = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,\Gamma(1).$$

we weten dat $\Gamma(1) = 1$, dus

$$\Gamma(6) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 120.$$