Relativistische mechanica inleveropdracht 1, Groepje H

Niek, Gian, Boris, Jiri, Siemen

September 2022

1 Introductie

Zie het plaatje, we definiëren +**L** als de vector van O naar de lichtbron en +**h** van de lichtbron naar het papiertje boven. We definiëren het papiertje boven als papiertje 1 en onder als papiertje 2.

2 Opdracht a

Vraag: Op welke ruimte-tijd coordinaten (in het stelsel O) vinden de "events" plaats waar de lichtflitsen aankomen op de papiertjes?

Event 1:
$\mathbf{r}_1$=$\mathbf{L}$+$\mathbf{h}$
t_1=h/c $\rightarrow$ ct$_1$=h
Event 2:
$\mathbf{r}_2$=$\mathbf{L}$ - $\mathbf{h}$
t_2=h/c $\rightarrow$ ct$_2$=h
Coördinaten Event 1: ($\mathbf{L}$+$\mathbf{h}$, h)
Coördinaten Event 2: ($\mathbf{L}$ - $\mathbf{h}$, h)

3 Opdracht b

Geef deze events ook volgens een waarnemer in O':
Lorentztransformaties ruimte:
$\mathbf{r}'_{//}$=γ_v($\mathbf{r}_{//}$ - βct)
$\mathbf{r}_\perp$=$\mathbf{r}'_\perp$
Met:

$\mathbf{r}_{//1}$=$\mathbf{h}$
$\mathbf{r}_{//2}$= - $\mathbf{h}$
$\mathbf{r}_{\perp}$= $\mathbf{L}$
β= $\mathbf{v}$/c
ct=h

Dan:
$\mathbf{r}'_{//1}$=γ_v($\mathbf{h}$ - βh)= γ_v($\mathbf{h}$ - $\frac{\mathbf{v}h}{c}$)
$\mathbf{r}'_{//2}$=γ_v(- $\mathbf{h}$ - βh)= - γ_v($\mathbf{h}$ + $\frac{\mathbf{v}h}{c}$)
$\mathbf{r}'_{\perp 1}$= $\mathbf{r}'_{\perp 2}$= $\mathbf{L}$

Dus:
$\mathbf{r}'_1$= $\mathbf{L}$ + γ_v($\mathbf{h}$ - $\frac{\mathbf{v}h}{c}$)
$\mathbf{r}'_2$= $\mathbf{L}$ - γ_v($\mathbf{h}$ + $\frac{\mathbf{v}h}{c}$)
Lorentztransformaties tijd:
ct'= γ_v(ct - $\beta\mathbf{r}$)

Met:
ct=h
β= $\mathbf{v}$/c
$\mathbf{r}_1$=$\mathbf{L}$+$\mathbf{h}$
$\mathbf{r}_2$=$\mathbf{L}$ - $\mathbf{h}$

Dan:
ct'_1= γ_v(h - $\frac{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{h})}{c}$)
ct'_2= γ_v(h - $\frac{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{L}-\mathbf{h})}{c}$)

Dus:
ct'_1= γ_v(h - $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{h})}{c}$)
ct'_2= γ_v(h + $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{h})}{c}$)

Coördinaten Event 1 volgens O':
($\mathbf{L}$ + γ_v($\mathbf{h}$ - $\frac{\mathbf{v}h}{c}$), γ_v(h - $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{h})}{c}$))

Coördinaten Event 2 volgens O':
($\mathbf{L}$ - γ_v($\mathbf{h}$ + $\frac{\mathbf{v}h}{c}$), γ_v(h + $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{h})}{c}$))

4 Opdracht c

In opdracht a zagen we dat de twee tijden gelijk waren:

t_1= t_2=t

t=$\frac{afstand}{snelheid}$ (v= Δs/Δt)

Met:

afstand= $\sqrt{L^2+h^2}+h$ (Phytagoras)

snelheid= c

Dus:

$$t = \frac{\sqrt{L^2+h^2}+h}{c} \tag{1}$$

5 Opdracht d

Op welk tijdstip neemt de waarnemer in O de lichtflits(en) via de twee papiertjes waar, volgens de waarnemer in O'? Lorentztransformaties: Omdat dit in de oorsprong afspeelt, is **r**= 0. Dus:

$ct' = \gamma_v ct$

$t' = \gamma_v t$

De uitdrukking van t hebben we bij c bepaald dus:

$$t' = \gamma_v(\frac{\sqrt{L^2+h^2}+h}{c}) \tag{2}$$

6 Opdracht e

Op welk tijdstip neemt de waarnemer in O' de lichtflits(en) via de papiertjes waar? Noem dat tijdstip t'. t' kunnen we definiëren als de tijd volgens O' van het licht naar de papiertjes + de tijd van het licht om naar O' te komen volgens O'. Dus:

$$t' = t'_{papier} + t'_{licht} \tag{3}$$

De tijd van het licht naar het papiertje volgens O' hebben we al berekend bij Opdracht b. Namelijk:

$$ct'_{papier} = \gamma_v(h \pm \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}}{c}) \tag{4}$$

De tijd van het licht naar O' kunnen we definiëren als:

$$t'_{licht} = \frac{afstand}{snelheid} \tag{5}$$

De afstand van de y-as is gedefiniërd als de snelheid v maal de t'_{papier} $\pm$ h volgens stelsel O.

$$afstand_{y-as} = vt'_{papier} \pm h \tag{6}$$

Dan volgens stelsel O' moeten we lorentzcontractie toepassen, dus delen door γ.

$$afstand_{y-as} = \frac{vt'_{papier} \pm h}{\gamma_v} \tag{7}$$

De afstand van de x-as blijft gelijk aangezien deze loodrecht op de beweging staat. Dus:

$$afstand_{x-as} = L \tag{8}$$

Phytagoras geeft ons de formule voor t'_{licht}:

$$t'_{licht} = \frac{\sqrt{(\frac{vt'_{papier} \pm h}{\gamma_v})^2 + L^2}}{c} \tag{9}$$

Nu kunnen we t' invullen:

$$t' = \frac{\gamma_v}{c}(h \pm \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}}{c}) + \frac{\sqrt{(\frac{vt'_{papier} \pm h}{\gamma_v})^2 + L^2}}{c} \tag{10}$$

Vereenvoudigen geeft:

$$t' = \frac{\gamma_v(h \pm \beta \cdot \mathbf{h}) + \sqrt{(\frac{\beta h \pm h}{\gamma_v})^2 + L^2}}{c} \tag{11}$$

Aangezien dit voor ons een redelijke complexe formule lijkt, doen we een controle. Stel v=0, dan zouden we op dezelfde formule moeten uitkomen als bij c. Als v=0 dan is $\beta = 0$ en $\gamma_v = 1$. Invullen geeft:

$$t' = \frac{h + \sqrt{(\pm h)^2 + L^2}}{c} \tag{12}$$

Aangezien $(\pm h)^2$ gelijk is aan h^2 is dit gelijk aan de formule bij c namelijk:

$$t' = \frac{h + \sqrt{h^2 + L^2}}{c} \tag{13}$$

Dus het tijdstip waar O' de lichtflits(en) via de papiertjes waarneemt is:

$$t' = \frac{\gamma_v(h \pm \beta \cdot \mathbf{h}) + \sqrt{(\frac{\beta h \pm h}{\gamma_v})^2 + L^2}}{c} \tag{14}$$

7 Opdracht f

Waarom zijn de tijden die je bij d) en e) vinden (niet) gelijk aan elkaar?

Het licht moet een langere afstand afleggen bij vraag d), omdat het licht eerst naar stelsel O moet, daarna door naar O'. Dat is omdat het licht die O heeft bereikt ook nog de waarnemer in O' moet bereiken, anders kan deze er niks over vertellen. In e) gaat het licht direct naar de waarnemer in O'. Het licht legt hier dus een kortere afstand af.
Wanneer de afstanden die moeten worden afgelegd niet hetzelfde zijn, zal het licht er bij de ene (in dit geval d)) er langer over doen dan bij e).