Bewijzen - Inleveropgave 3

B.H.J. van Boxtel

5 Oktober 2022 - Week 40

Gegeven is het volgende lemma:

Lemma 1. Zij $m, n \in \mathbb{Z}$ en p een priemgetal. Als $p \mid mn$, dan geldt dat $p \mid m$ of $p \mid n$.

(a.) **Theorem 1.** Voor twee priemgetallen p, q geldt dat $\sqrt{pq}$ irrationaal is. Met behulp van **lemma 1.** kan dit met behulp van contradictie worden bewezen.

Bewijs van ***Theorem 1****.*
Stel p, q zijn twee priemgetallen.
Neem aan dat $\sqrt{pq}$ is rationaal. In andere woorden $\sqrt{pq}$ is te schrijven als $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$ zodat a en b geen gemeenschappelijke deler(s) hebben.

Dan $pq = \frac{a^2}{b^2}$ en $b^2pq = a^2$.
Dus p deelt a^2, en samen met **lemma 1.** volgt dat p deelt a.
Omdat p deelt a, is a te schrijven als $a = pk$, met k een willekeurig getal in $\mathbb{Z}$. hieruit volgt dat $a^2 = p^2k^2$.

Wanneer we dit invullen in de vergelijking die we voor a^2 hadden gevonden, vinden we dat $b^2pq = p^2k^2$. Nu kan er aan allebei de kanten een p worden weggestreept, om het volgende te vinden: $b^2q = pk^2$. Waaruit blijkt dat p deelt b^2q.

Vanuit **lemma 1.** weten we dat dit impliceert dat p deelt b^2, of p deelt q. Maar omdat q priem is, kan p deelt q niet, wat leidt tot het feit dat p deelt b^2 en dus (opnieuw volgens **lemma 1.**) ook p deelt b.

Maar nu zien we dat p deelt a en p deelt b, terwijl de aannamen was dat a en b geen gemeenschappelijke deler(s) hebben. We hebben een tegenspraak gevonden met onze orginele aanname, dus er bestaan geen a en b waarvoor $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$, met a en b geen gemeenschappelijke deler(s).

Voor twee priemgetallen p en q geldt $\sqrt{pq}$ is irrationaal.

□

(b.) **Claim 1. Theorem 1.** blijft gelden wanneer de twee getallen p en q niet priem zijn.

Het tegendeel van deze stelling is te bewijzen door middel van een tegenvoorbeeld.

Bewijs van het tegendeel van ***claim 1****.*
Neem twee getallen $p = 2$ en $q = 8$.
Dan $\sqrt{pq} = \sqrt{16} = 4$.
4 is niet irrationaal, dus **claim 1.** is onwaar.

$\square$