1 Ellipsbanen

In een tussenopdracht hebben jullie gezien dat $e = 1$ overeenkomt met paraboolbanen. Hier gaan jullie laten zien dat $0 < e < 1$ een ellipsbaan geeft. We beginnen weer met de baanvergelijking

$$r = r_0 \frac{1+e}{1+e\cos\theta}.$$

a) Elimineer $\cos\theta$ en r op dezelfde manier waarop je dat in de tussenopdracht over paraboolbanen hebt gedaan. Laat zien dat de baanvergelijking dat reduceert tot
$$x^2 + y^2 = \left(r_0(1+e) - ex\right)^2.$$

b) Werk de haakjes uit en deel alles door $1+e$. Je zou nu moeten vinden dat

$$x^2(1-e) + 2er_0x + \frac{y^2}{1+e} - r_0^2(1+e) = 0$$

c) Laat zien dat we kunnen schrijven dat

$$x^2(1-e) + 2er_0x = (1-e)\left(x + \frac{er_0}{1-e}\right)^2 - \frac{e^2r_0^2}{1-e}$$

d) Vul dit in in de vergelijking van c) en laat zien dat dit inderdaad aan de ellipsvergelijking
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
voldoet. Geef ook uitdrukkingen voor a^2 en b^2 in termen van r_0 en e. Let op: de bovenstaande standaard ellipsvergelijking geldt voor een ellips met het centrum in de oorsprong, terwijl de planeetbaan het centrum in één van de foci van de ellips heeft liggen. Er zal dus een kleine verschuiving in de coordinaten nodig zijn.

2 De energie van een object in een baan om de zon

We weten al dat het impulsmoment een behouden grootheid is, maar we weten ook dat de energie een behouden grootheid is. Het is daarom interessant om te weten wat deze energie is. Hier gaan we die energie berekenen. De energie wordt natuurlijk gegeven door de kinetisch plus de potentiele energie.

a) Geef om te beginnen de formule voor de potentiele energie t.g.v. de zwaartekracht en bereken de totale energie E in termen van de snelheid v en de straal r. Je hoeft de waardes voor v en r dus nog niet in te vullen.

b) In het hoorcollege hebben we gezien dat eccentriciteit e bepaald of een baan gesloten of open is. Beredeneer welke waarde de totale energie E kan hebben bij een gesloten of een open baan.

Uit het bovenstaande, kunnen we vermoeden dat de totale energie E iets met de eccentriciteit e te maken heeft. Omdat de totale energie constant is, hoeven we haar maar op één moment uit te rekenen. Het minste werk is het om dat te doen op het punt van dichtse nadering.

c) Gebruik een geschikte behoudswet om de baansnelheid v_0 uit te rekenen op het punt van dichtste nadering. Maak hierbij gebruik van het feit dat op dat punt de snelheid en de straal precies loodrecht op elkaar staan.

d) Gebruik de uitdrukking voor v_0 die je net hebt gevonden om de totale energie E te schrijven als functie van r_0 (de afstand op het punt van dichtste nadering).

e) Welke (in het hoorcollege afgeleide) relatie kunnen we gebruiken om r_0 uit de uitdrukking te elimineren? Gebruik deze relatie om de totale energie E op te schrijven in termen van het impulsmoment L en de eccentriciteit e.

f) Controleer of het verband tussen E en e consistent is met je antwoorden op b).

3 De Hohmann-transfer

In 1925 stelde Walter Hohmann een conceptueel éénvoudige manier voor om van een circulaire baan in een andere circulaire baan te komen. Dit was dus lang voordat de eerste satelieten waren gelanceerd. Toch is deze methode nog steeds de methode die wordt gebruikt om satelieten in de juiste baan te krijgen, bijvoorbeeld in een geosynchrone baan.

Het idee van de methode van Hohmann is de volgende. Als je van de ene circulaire baan naar de andere circulaire baan wilt, doe je dat via een elliptisch baan die aan beide uiteinden raakt aan die twee circulaire banen. Je zet in de ene baan je motor even aan zodat je in de elliptische baan komt. Dan wacht je af totdat je op het raakpunt tussen die elliptisch baan en de andere circulaire baan bent. Daar zet je je motor weer even aan om te zorgen dat je in die circulaire baan komt. In deze opgave noemen we de initiele circulaire baan 1, de elliptische baan h en de uiteindelijke circulaire baan 2. We nemen aan dat de initiele baan een kleinere straal heeft dan de uiteindelijke baan.

In de berekening zullen we, net al Hohmann dat deed, aannemen dat onze motor in een zeer korte tijd, een zeer krachtige versnelling kan geven. Zo kort en krachtig dat we in feite alleen over de snelheidsverandering Δv hoeven na te denken. Dit is natuurlijk een benadering, maar het maakt het sommetje analytisch mogelijk en daarom zullen we het gebruiken. Het is overigens een zeer goede benadering.

a) Maak een schets van de bovengenoemde situatie. Geef in de schets de stralen r_1 en r_2 aan en geef aan op welke punten de motor aangezet moet worden.

b) Wat zijn de eccentriciteiten e_1 en e_2 van de twee circulaire banen?

c) Baan h is een elliptisch baan met r_1 als afstand van dichtste nadering en r_2 het verste punt. Druk de eccentriciteit e_h van deze elliptische baan uit in r_1 en r_2.

d) Gebruik de formule de eccentriciteit om het impulsmoment in baan 1 te schrijven als functie van de straal r_1.

e) Gebruik de definitie van het impulsmoment om het impulsmoment in baan 1 te schrijven als functie van de straal r_1 en de baansnelheid v_1.

f) Gebruik de twee uitdrukking die je nu hebt voor het impulsmoment in baan 1, om de snelheid v_1 uit te rekenen.

g) Bereken nu op dezelfde manier de snelheid v_{h1}. Daarmee bedoelen we de snelheid die de raket in de elliptische baan op het punt waar hij aan baan 1 raakt. Hint: je zou je antwoord moeten kunnen schrijven in termen van de snelheid v_1 en de twee stralen r_1 en r_2.

h) Bereken nu Δv_1, de hoeveelheid snelheid die moet worden toegevoegd om van baan 1 in baan h te komen.

g) Bereken op dezelfde manier Δv_2.