

# Mechanica - Inleveropgave 1

Boris van Boxtel - Jean Croes - Mike van Eck - Lotte Gritter

28 september 2022 - Week 39

- (a). De ruimtetijdcoördinaten van de events in stelsel  $\mathcal{O}$  zijn:  $(x, y, ct) = (L, h, h)$  en  $(x, y, ct) = (L, -h, h)$ .
- (b). Het toepassen van een Lorentztransformatie op de bij (a). gevonden ruimte-tijd coördinaten, geeft als coördinaten in stelsel  $\mathcal{O}'$ :  $(L, \gamma h(1 - \frac{v}{c}), \gamma h(1 - \frac{v}{c}))$  en  $(L, -\gamma h(1 + \frac{v}{c}), \gamma h(1 + \frac{v}{c}))$ . Waar  $v$  de snelheid van  $\mathcal{O}'$  is ten opzichte van  $\mathcal{O}$ .
- (c). De tijd die het licht erover doet om van het lampje naar het papiertje te gaan is  $\frac{h}{c}$ . De tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong te gaan is  $\frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c}$ . Het tijdstip waarop de waarnemer in  $\mathcal{O}$  de lichtflits via het papiertje ziet wordt dus gegeven door:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \quad (1)$$

- (d). Door lengtecontractie is  $h' \neq h$ , dus is de tijd die het licht erover doet om bij de oorsprong te komen anders. Door een lorentztransformatie toe te passen vinden we:

$$h' = \gamma h (1 - \beta) \quad (2)$$

Waar  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Nu kunnen we in (1) de substitutie  $h = h'$  maken om de tijd gemeten door  $\mathcal{O}'$  te vinden. Hieruit volgt dat het tijdstip waarop  $\mathcal{O}$  de lichtflits waarneemt gegeven wordt door:

$$t' = \frac{\gamma h (1 - \frac{v}{c})}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (\gamma h (1 - \frac{v}{c}))^2}}{c} \quad (3)$$

- (e). Volgens de waarnemer in  $\mathcal{O}$  is de tijd die het licht erover doet om bij het papiertje aan te komen gelijk aan  $\frac{h}{c}$ . De snelheid van  $\mathcal{O}'$  ten opzichte van  $\mathcal{O}$  is  $v$ , dus  $v\Delta t$  is de afgelegde afstand over een tijd  $\Delta t$ . Dus de tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong van  $\mathcal{O}$  te komen, is gelijk aan  $\frac{\sqrt{L^2 + (v\Delta t \pm h)^2}}{c}$ . Dus de tijd die het licht erover doet om in  $\mathcal{O}'$  aan te komen wordt gegeven door:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (v\Delta t \pm h)^2}}{c} \quad (4)$$

Omdat de tijd die het licht erover doet om in  $\mathcal{O}'$  aan te komen, en de tijd die  $\mathcal{O}'$  erover doet om in dat punt te komen gelijk zijn, geldt  $t = \Delta t$ . Dus de volgende vergelijking geldt:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (vt \pm h)^2}}{c} \quad (5)$$

Deze vergelijking resulteert in een kwadratische vergelijking in  $t$ , die kan worden opgelost om de volgende oplossingen te vinden:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \\ t_2 &= -\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Waar we de oplossingen die een negatieve waarden voor  $t$  aannemen buiten beschouwing hebben gelaten.

Dit is de tijd wanneer dat het licht in  $\mathcal{O}'$  aankomt volgens een waarnemer in  $\mathcal{O}$ . Dit moeten we dus nog vertalen naar een tijd in  $\mathcal{O}'$ . Omdat het event waar het licht en de oorsprong van  $\mathcal{O}'$  samenkomen per definitie in de oorsprong van  $\mathcal{O}'$  ligt, is de tijd waarop dit gebeurt volgens  $\mathcal{O}'$  de eigentijd van dit event. Dus geldt  $\tau' = t/\gamma$  waar  $\tau'$  de eigentijd van het event van de waarneming van het licht is in  $\mathcal{O}'$ , dus  $\tau' = t'$ .

Dus het tijdstip waarop de waarnemer in  $\mathcal{O}'$  de lichtflits via de papiertjes waarneemt, is gegeven door:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[ \frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \\ t'_2 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[ -\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

En dit kunnen we herschrijven tot het volgende:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left( \frac{c-v}{c+v} \right)} \\ t'_2 &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left( \frac{c+v}{c-v} \right)} \end{aligned} \quad (8)$$

En dit is ook weer te herschrijven als:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{h}{c} k(-\beta) + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 k(-\beta)^2} \\ t'_2 &= \frac{h}{c} k(\beta) + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 k(\beta)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Waar  $k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ .

Om te testen of we de goede formule hebben, kunnen we  $v = 0$  invullen, en dan zouden we dezelfde vergelijking moeten krijgen als verg. (1).

Als we  $v = 0$  nemen geeft dit:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c-0}{c+0}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left( \frac{c-0}{c+0} \right)} \\ t'_2 &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c+0}{c-0}} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2 \left( \frac{c+0}{c-0} \right)} \end{aligned} \quad (10)$$

Omdat  $t'_1$  en  $t'_2$  samenvallen, geven deze allebei:

$$t' = \frac{h}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + h^2} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \quad (11)$$

Wat hetzelfde is als verg. (1).

- (f). Bij (d). en (e). worden verschillende dingen beschreven. Bij (d). beschrijf je de tijd die het licht er, volgens de waarnemer in  $\mathcal{O}'$ , in  $\mathcal{O}$  over doet om de waarnemer in de oorsprong van  $\mathcal{O}$  te bereiken. Dit is korter dan de tijd die de waarnemer in  $\mathcal{O}$  waarneemt omdat de afstand  $h$  tot de papiertjes volgens de waarnemer in  $\mathcal{O}'$  korter is vanwege lengtecontractie.

Bij (e). wordt de tijd beschreven die het licht erover doet om via de papiertjes bij de waarnemer in de oorsprong van  $\mathcal{O}'$  te komen. Dit is iets heel anders en geeft dus ook een andere tijd.