6 Groepsopdracht: Functies en het Gibbs-fenomeen

In deze week is er tijd om samen met je groepje aan de groepsopdracht te werken. Bekijk eerst opdracht 5.7.2, deze lijkt in vorm erg op de inleveropgave. In de inleveropgave van deze week bestuderen we het Gibbs-fenomeen. Je kunt ***1 punt*** verdienen met een overzichtelijk en goed leesbaar script.

6.1 Fourierreeksen *3.5 punten*

Bij deze groepsopdracht kijken we naar de volgende functie:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(n \times 2\pi f_0(t - t_0) + \varphi_n).$$

Bovenstaande functie is een Fourierreeks: een som van golffuncties. Door de coëfficiënten A_n, en de andere parameters (f_0, t_0 en φ_n) juist te kiezen kan je de vorm van elke periodieke functie hiermee benaderen.

Net als bij de opgave over machtenreeksen bepaalt het aantal coëfficiënten A_n dat je opgeeft hoe groot N is.

Verwerk de volgende eigenschappen in één zelf geschreven `python`-functie:

(a) Schrijf een Python functie die voor een gegeven t de functiewaarde $y(t)$ als output geeft. De verplichte argumenten zijn t, de lijst met coëfficiënten A_n en de frequentie f_0.[23]

(b) De optionele argumenten zijn de offset t_0 en de lijst met fase-getallen φ_n. Merk op dat wanneer φ_n ingesteld is, de lengte van de lijst met φ_n en A_n hetzelfde moet zijn. Als de lijst met φ_n ontbreekt mag je veronderstellen dat alle φ's gelijk zijn aan 0.

(c) Controleer binnen je functie of de lijsten φ_n en A_n dezelfde lengte hebben. Als φ_n en A_n niet dezelfde lengte hebben print je functie de foutmelding: `'phi_n en A_n zijn niet even lang!'`.

6.2 Testfuncties *2 punten*

Het Gibbs-fenomeen is het verschijnsel dat wanneer een discontinue functie ontbonden wordt over sinussen (wat continue functies zijn), de reeks van sinussen nooit exact convergeert naar de discontinue functie die gerepresenteerd wordt. Om dit te demonstreren vergelijken we de driehoeksgolf $D(t)$ met een zaagtand $Z(t)$[24]. Deze functies worden gegeven door:

$$D(t) = 4\left\|f_0 t + \frac{1}{4} - \left\lfloor f_0 t + \frac{3}{4}\right\rfloor\right\| - 1$$

$$Z(t) = f_0 t - \lfloor f_0 t \rfloor - \frac{1}{2}$$

De uitdrukking $\lfloor x \rfloor$ staat voor naar beneden afronden (Engels: *floor*) en wordt geïmplementeerd in Python met `np.floor()`. de uitdrukking $\|x\|$ betekent: de absolute waarde nemen.

[23] Een eerste test is dus dat de functie bij gebruik van dit statement het correcte antwoord print: 2. `print(fourierreeks([0.25], [1,2], 1))`.

[24] Beide functies zijn zo gedefinieerd dat het tijdgemiddelde gelijk is aan 0

(a) Implementeer deze functies in Python. Hoe denk je om te gaan met de grootheid f_0? Dit is een frequentie, die je natuurlijk ook wilt kunnen variëren.

(b) Laat de zaagtand, driehoeksgolf en $S(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ in één figuur zien. Kies $f_0 = 2$.

6.3 Convergentie *3 punten*

We nemen vanaf nu voor het gemak aan dat $f_0 = 1$. De coëfficiënten A_n worden voor de Fourierreeks van de **driekhoeksgolf** ($D(t)$) gegeven door:

$$A_n = \frac{8}{\pi^2}\begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} & n \text{ oneven} \end{cases},$$

En voor de Fourierreeks van de **zaagtand** ($Z(t)$) door:

$$A_0 = 0 \qquad A_{n>0} = -\frac{1}{n\pi}.$$

Gebruik bovenstaande coëfficiënten om de convergentie van de Fourierreeks naar de originele functie te onderzoeken. Het is niet nodig om héle grote aanatallen termen te testen; kies het aantal termen klein genoeg dat je script ruim binnen een minuut klaar is met de (deel) opgaven.[25]

(a) Plot behalve de originele functie ook de benadering ervan met reeksen bestaande uit een verschillend aantal termen. Kies 1000 punten voor t om de functie te representeren. Je moet kunnen zien dat alle functies die je plot periodiek zijn (net zoals een sinus-functie) met een periode 1, ongeacht het aantal termen dat je beschouwt. Al die 1000 punten verdeel je dus bij voorkeur uniform over één periode.

(b) Bereken nu ook het totale kwadratisch verschil om dit te kunnen vergelijken voor een verschillend aantal termen. Verwar hierbij niet het aantal termen N en het aantal punten in t. Met het totale kwadratisch verschil wordt bedoeld $\sum_j (D(t_j) - D_{\text{reeks}}(t_j))^2$, en gelijk voor $Z(t)$.

(c) Plot dit verschil op een log-schaal (langs de y-as). Langs de x-as staat het aantal termen uitgezet, N.

6.4 Conclusies *0.5 punt*

Beschrijf en vergelijk het convergentiegedrag van de driehoeksgolf en de zaagtand. (Je kunt dit onderaan je script in de vorm van comments doen.) Kun je iets zeggen over:

(a) Hoeveel termen zijn (in beide gevallen) nodig om convergentie te bereiken? Je moet dus aangeven wanneer je vindt dat convergentie is bereikt.

(b) Convergeren beide functies volledig? Ofwel, gaat het gemiddelde kwadratisch verschil naar 0? Houd er hier rekening mee dat resolutie in de tijd wordt bepaald door het aantal punten dat je kiest, en hierdoor je boven een aantal termen de gevoeligheid voor fluctuaties kwijt bent.

[25] Je hoeft je script dus niet sterk te optimalizeren, dat komt in het volgende hoofdstuk pas aan bod.