1 Kritische demping

In het hoorcollege hebben we het geval van kritische demping overgeslagen. Nu gaan we dat geval wel behandelen. We doen dat door de afleiding op pagina 98 in het boek zelf te doen. We beginnen met de bewegingsvergelijking 3.4.4, die we schrijven als

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x = 0.$$

a) Laat door de haakjes uit te werken zien dat dit inderdaad hetzelfde is als vergelijking 3.4.4 uit het boek.

b) Laat door de haakjes uit te werken zien dat we dit ook kunnen schrijven als

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)\left(\frac{d}{dt} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) x = 0.$$

c) Veréénvoudig de bovenstaande vergelijking voor het geval van kritische demping.

d) Laat zien dat we die vergelijking kunnen schrijven als

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) u = 0, \tag{1}$$

waar we de functie

$$u = \left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) x, \tag{2}$$

hebben gedefinieerd.

e) Geef de oplossing $u(t)$ van bovenstaande vergelijking (1). Neem de beginvoorwaarde $u(t = 0) = u_0$.

f) Vul deze oplossing in, in de definitie van u (vergelijking (2))). Laat zien dat je dit kunt schrijven als

$$u_0 = \frac{d}{dt}\left(xe^{\gamma t}\right)$$

g) Integreer de bovenstaande vergelijking links en rechts van het = teken over de tijd en gebruik je resultaat om de algemene oplossing voor $x(t)$ te geven.

2 Gedreven harmonisch oscillator

We gaan hier verder aan de slag met de situatie van de laatste twee filmpjes van deze week. Zoals in de filmpjes uitgelegd, kunnen we de bewegingsvergelijkingen van de gedreven harmonische oscillator oplossen door de cos in de drijvingsterm op te splitsen in twee complexe e-machten. Omdat de positie z natuurlijk wel een reëele grootheid moet zijn, tellen we de twee complexe oplossingen naderhand bij elkaar op om op die manier weer een reëel antwoord te krijgen.

Concreet schrijven we

$$F_d(t) = F_0 \cos \omega t = F_+ e^{i\omega t} + F_- e^{-i\omega t},$$

waarbij $F_+ = F_- = F_0/2$ en we nemen aan dat

$$z(t) = z_+ e^{i\omega t} + z_- e^{-i\omega t}$$

en vullen we de + en − componenten afzonderlijk in in de bewegingsvergelijking.

a) Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor de + componenten geschreven kan worden als

$$m\ddot{z} + c_1\dot{z} + kz = F_+ e^{i\omega t}$$

b) Laat zien dat deze reduceert tot $-m\omega^2 z_+ + i\omega c_1 z_+ + kz_+ = F_+$ als we voor z de + probeeroplossing invullen.

c) Laat zien dat hieruit volgt dat

$$z_+ = \frac{F_+/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}$$

d) Laat op dezelfde wijze zien dat

$$z_- = \frac{F_-/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 - 2i\gamma\omega}$$

e) Schrijf nu de totale oplossing $z = z_+ e^{i\omega t} + z_- e^{-i\omega t}$ van de inhomogene differentiaal vergelijking op.

f) Breng de beide termen in z onder één noemer en laat zien dat de resulterende vergelijking kan worden veréénvoudigd tot

$$z = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\gamma\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

g) Breng deze vergelijking op de vorm $z = \tilde{z}\cos(\omega t - \phi)$ en geef uitdrukkingen voor de amplitude $\tilde{z}$ en de fase ϕ.

h) Schets het gedrag van de amplitude en de fase als functie van de drijffrequentie ω.

2.1 Alternatief

Een alternatieve methode is om voor de kracht een complexe e-macht te gebruiken

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t}.$$

Omdat krachten en posities reële grootheden zijn, moeten we wel een beetje voorzichtig zijn.

a) Schrijf de bewegingsvergelijking op voor de gedreven, gedempte harmonische oscillator met de bovenstaande uitdrukking voor de kracht.

b) Hoe kunnen we de oplossing van de bovenstaande D.E. vergelijking gebruiken om de oplossing te vinden voor het geval dat $F(t) = F0\cos(\omega t)$? Hint: zoek op hoe je een complexe e-machten schrijft in termen van goniometrische functies.

c) Los de bewegingsvergelijking op, op dezelfde manier als we dat in het hoorcollege hebben gedaan.

d) Gebruik nu je antwoord van **b)** om je antwoord van **c)** te vertalen naar een fysisch correcte oplossing.

e) Bepaal wat de amplitude is van de oscillatie als functie van de frequentie van de drijvende kracht en maak een schets van het resultaat.

f) Maar ook een schets van het fase-verschil tussen de oscillatie en het drijvende veld.