

opdr. 62.

$$\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + e^{-0}$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$= 0 + 1 = 1$$

gegeven is:

b. $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

$$\text{dus } \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

als we ~~hier~~ ^{dit} partieel integreren, vinden we het volgende:

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -x t^{x-1} e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

~~we weten~~ Als we nu de grenzen uitschrijven, krijgen we het volgende:

$$= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} + \frac{0^x}{e^0} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

we weten uit Oefening 326. dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0$, dus we ~~kanen~~ ~~schrijven~~ ~~hoeven~~ het volgende over:

$$= 0 + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

(-1)

omdat x geen integratie variabele is, kunnen we deze buiten de haakjes halen. Vanuit de definitie van de Γ -functie volgt dan ook:

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

$$\cancel{x} \quad \Gamma(6) = 5 \Gamma(5+1) = 5 \Gamma(5) = 5 \Gamma(4+1) = 5 \cdot 4 \Gamma(4)$$

✓ c. we weten nu vanuit b. dat $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Dus kunnen we schrijven:

$$\Gamma(6) = \Gamma(5+1) = 5 \Gamma(5).$$

dit kunnen we herhalen tot we ~~tot~~ $\Gamma(1)$ hebben, waarvan we de waarde al weten.

stijlpuntje

$$\Gamma(6) = 5 \Gamma(4+1) = 5 \cdot 4 \Gamma(4) \dots = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Gamma(1) \\ = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(1+1) =$$

~~we~~ we weten dat $\Gamma(1) = 1$, dus

$$\Gamma(6) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

- volgende keer rustiger te werk gaan, ik heb soms dwars om te komen. Zo voorkom ik ook stupiditeitsfoutjes zoals bij vraag b.
- bij vraag c. was het duidelijk geweest als ik ook nog aan het eind een stap getoond, zoals in rood aangegeven.