Mechanica - Inleveropgave 1

Boris van Boxtel - Jean Croes - Mike van Eck - Lotte Gritter

28 september 2022 - Week 39

(a). De ruimtetijdcoördinaten van de events in stelsel O zijn: $(x, y, ct) = (L, h, h)$ en $(x, y, ct) = (L, -h, h)$.

(b). Het toepassen van een Lorentztransformatie op de bij (a). gevonden ruimtetijd coördinaten, geeft als coördinaten in stelsel $\mathcal{O}'$: $(L,\, \gamma h(1-\frac{v}{c}),\, \gamma h(1-\frac{v}{c}))$ en $(L,\, -\gamma h(1+\frac{v}{c}),\, \gamma h(1+\frac{v}{c}))$. Waar v de snelheid van $\mathcal{O}'$ is ten opzichte van $\mathcal{O}$.

(c). De tijd die het licht erover doet om van het lampje naar het papiertje te gaan is $\frac{h}{c}$. De tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong te gaan is $\frac{\sqrt{L^2+h^2}}{c}$. Het tijdstip waarop de waarnemer in $\mathcal{O}$ de lichtflits via het papiertje ziet wordt dus gegeven door:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \tag{1}$$

(d). Door lengtecontractie is $h' \neq h$, dus is de tijd die het licht erover doet om bij de oorsprong te komen anders. Door een lorentztransformatie toe te passen vinden we:

$$h' = \gamma h \left(1 - \beta\right) \tag{2}$$

Waar $\beta = \frac{v}{c}$.

Nu kunnen we in (1) de substitutie $h = h'$ maken om de tijd gemeten door $\mathcal{O}'$ te vinden. Hieruit volgt dat het tijdstip waarop $\mathcal{O}$ de lichtflits waarneemt gegeven wordt door:

$$t' = \frac{\gamma h \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + \left(\gamma h \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right)^2}}{c} \tag{3}$$

(e). Volgens de waarnemer in $\mathcal{O}$ is de tijd die het licht erover doet om bij het papiertje aan te komen gelijk aan $\frac{h}{c}$. De snelheid van $\mathcal{O}'$ ten opzichte van $\mathcal{O}$ is v, dus $v\Delta t$ is de afgelegde afstand over een tijd Δt. Dus de tijd die het licht erover doet om van het papiertje naar de oorsprong van $\mathcal{O}$ te komen, is gelijk aan $\frac{\sqrt{L^2+(vt\pm h)}}{c}$. Dus de tijd die het licht erover doet om in $\mathcal{O}'$ aan te komen wordt gegeven door:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + \left(v\Delta t \pm h\right)^2}}{c} \tag{4}$$

Omdat de tijd die het licht erover doet om in $\mathcal{O}'$ aan te komen, en de tijd die $\mathcal{O}'$ erover doet om in dat punt te komen gelijk zijn, geldt $t = \Delta t$. Dus de volgende vergelijking geldt:

$$t = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + (vt \pm h)^2}}{c} \tag{5}$$

Deze vergelijking resulteert in een kwadratische vergelijking in t, die kan worden opgelost om de volgende oplossingen te vinden:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \\ t_2 &= -\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Waar we de oplossingen die een negatieve waarden voor t aannemen buiten beschouwing hebben gelaten.

Dit is de tijd wanneer dat het licht in $\mathcal{O}'$ aankomt volgens een waarnemer in $\mathcal{O}$. Dit moeten we dus nog vertalen naar een tijd in $\mathcal{O}'$. Omdat het event waar het licht en de oorsprong van $\mathcal{O}'$ samenkomen per definitie in de oorsprong van $\mathcal{O}'$ ligt, is de tijd waarop dit gebeurt volgens $\mathcal{O}'$ de eigentijd van dit event. Dus geldt $\tau' = t/\gamma$ waar τ' de eigentijd van het event van de waarneming van het licht is in $\mathcal{O}'$, dus $\tau' = t'$.

Dus het tijdstip waarop de waarnemer in $\mathcal{O}'$ de lichtflits via de papiertjes waarneemt, is gegeven door:

$$\begin{aligned} t_1' &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{h}{c+v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c+v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \\ t_2' &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{h}{c-v} + \sqrt{\frac{h^2}{(c-v)^2} + \frac{L^2}{c^2 - v^2}} \right] \end{aligned} \tag{7}$$

En dit kunnen we herschrijven tot het volgende:

$$\begin{aligned} t_1' &= \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\left(\frac{c-v}{c+v}\right)} \\ t_2' &= \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\left(\frac{c+v}{c-v}\right)} \end{aligned} \tag{8}$$

En dit is ook weer te herschrijven als:

$$\begin{aligned} t_1' &= \frac{h}{c}\,k(-\beta) + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\,k(-\beta)^2} \\ t_2' &= \frac{h}{c}\,k(\beta) + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\,k(\beta)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Waar $k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

Om te testen of we de goede formule hebben, kunnen we $v = 0$ invullen, en dan zouden we dezelfde vergelijking moeten krijgen als verg. (1).

Als we $v = 0$ nemen geeft dit:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c-0}{c+0}} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\left(\frac{c-0}{c+0}\right)} \\ t'_2 &= \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c+0}{c-0}} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2\left(\frac{c+0}{c-0}\right)} \end{aligned} \tag{10}$$

Omdat t'_1 en t'_2 samenvallen, geven deze allebei:

$$t' = \frac{h}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + h^2} = \frac{h}{c} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c} \tag{11}$$

Wat hetzelfde is als verg. (1).

(f). Bij (d). en (e). worden verschillende dingen beschreven. Bij (d). beschrijf je de tijd die het licht er, volgens de waarnemer in $\mathcal{O}'$, in $\mathcal{O}$ over doet om de waarnemer in de oorsprong van $\mathcal{O}$ te bereiken. Dit is korter dan de tijd die de waarnemer in $\mathcal{O}$ waarneemt omdat de afstand h tot de papiertjes volgens de waarnemer in $\mathcal{O}'$ korter is vanwege lengtecontractie.

Bij (e). wordt de tijd beschreven die het licht erover doet om via de papiertjes bij de waarnemer in de oorsprong van $\mathcal{O}'$ te komen. Dit is iets heel anders en geeft dus ook een andere tijd.