1 Signalen sturen zonder licht

Beschouw een een tennisbal met massa m_1, die met een snelheid u_1 beweegt in de richting van een auto met massa m_2, die beweegt met snelheid u_2. De bal en de auto bewegen beiden in de x-richting, we mogen dus aannemen dat alles in één ruimtelijke dimensie gebeurd. We nemen aan dat $u_1 > u_2$, zodat er een botsing zal plaatsvinden tussen de bal en de auto. We noemen de snelheid van de bal na de botsing u_3 en de snelheid van de auto na de botsing u_4.

a) Gebruik impulsbehoud om te laten zien dan $m_1(u_1 - u_3) = -m_2(u_2 - u_4)$ en energiebehoud om te laten zien dat $m_1(u_1^2 - u_3^2) = -m_2(u_2^2 - u_4^2)$. Laat hieruit zien dat $u_1 + u_3 = u_2 + u_4$.

b) Leidt hieruit af dat de snelheid van de tennisbal na de botsing wordt gegeven door,

$$u_3 = 2u_2 - u_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2) \ . \tag{1}$$

c) We zijn geinteresseerd in het geval dat de tennisbal "reflecteert". Dat wil zeggen, we willen dat $u_3 < 0$. Laat zien dat dit betekent dat

$$u_1 > \left(\frac{2m_2}{m_2 - m_1}\right) u_2 = \frac{2u_2}{1 - \frac{m_1}{m_2}}, \tag{2}$$

waar we hebben aangezien dat $m_1 < m_2$ (wat natuurlijk het geval is voor een tennisbal en een auto).

d) Beargumenteer dat wanneer $m_1 \ll m_2$, de snelheid $|u_3|$ na de botsing ten hoogste $|2u_2 - u_1|$ is. Heel anders dan wanneer we licht zouden gebruiken ipv een tennisbal.

2 Ruimte en tijd

Twee events vinden 3 seconden na elkaar plaats op dezelfde plek in het laboratorium stelsel. Een waarnemer beweegt in een raket ten opzichte van het laboratorium stelsel met een constante snelheid, dusdanig dat het tijdsverschil tussen de events volgens de waarnemer 5 seconden is.

a) Wat is de snelheid van de raket?

b) Teken de ruimte-tijd diagrammen voor zowel het laboratorium stelsel als voor de raket.

c) Hoever liggen de events ruimtelijk uit elkaar volgens de waarnemer in de raket.

d) Laat ziet dat de "ruimte-tijd intervallen" hetzelfde zijn volgens de beide waarnemers. Hoe noemen we zo'n ruimte-tijd interval ook wel?

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 \ . \tag{3}$$

3 Tijdsrek uit de Lorentz-transformatie

Beschouw twee events die plaatsvinden in de oorsprong van stelsel $\mathcal{O}'$, op tijden $t_1' = 0$ and $t_2' = \tau$. Stelsel $\mathcal{O}'$ beweegt met constante snelheid v ten opzichte van een ander inertiaal stelsel $\mathcal{O}$.

a) Gebruik de Lorentz-transformaties om te laten zien dat de events in $\mathcal{O}$ liggen op de lijn $x = vt$ op tijden $t_1 = 0$ en $t_2 = \gamma\tau$. Laat zien dat de events in $\mathcal{O}$ plaatsvinden op posities $x_1 = 0$ en $x_2 = \gamma\, v\tau$, en dus niet op dezelfde plaats.

b) Laat zien dat hieruit volgt dat $\Delta t = \gamma\Delta t'$, waarbij $\Delta t = t_2 - t_1$ en $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Leg uit waarom $\Delta t'$ in dit geval de eigentijd is.

4 Lengtekrimp uit de Lorentz transformatie

Om Lorentz-FitzGerald contraction (lengtekrimp) af te leiden, bekijken we een staaf met lengte λ in rust in een inertiaalstelsel $\mathcal{O}'$. De staaf ligt langs de x'-as met eindpunten op $x' = 0$ en $x' = \lambda$. De staaf beweegt met constante snelheid v ten opzichte van een ander inertiaalstelsel $\mathcal{O}$. Een waarnemer in $\mathcal{O}$ wil de lengte van de staaf weten en moet daarvoor de posities van de eindpunten weten op dezeflde tijd. We kiezen voor deze tijd $t = 0$.

a) Gebruik de Lorentz-transformatie om de positie van de eindpunten van de staaf volgens $\mathcal{O}$ uit te rekenen.

b) Laat zien dat hier de vergelijking voor lengte-contractie uit volgt.

5 Elektronsignalen

Een ruimteschip verlaat op $t = 0$ de aarde met een constante snelheid v. Het stelsel van de aarde noemen we $\mathcal{O}$ en het stelsel van het ruimteschip noemen we $\mathcal{O}'$. Het ruimteschip en de aarde communiceren met elkaar door elektronen met zeer hoge snelheid heen en weer te sturen. Elektronen worden vanuit de aarde uitgezonden met een snelheid w. Deze snelheid moet natuurlijk voldoen aan $w > v$ om te zorgen dat de elektronen het ruimteschip bereiken. Op het moment dat het ruimteschip vertrekt, worden de klokken op aarde en op het ruimteschip gesynchroniseerd, dwz als $t = 0$ geldt ook dat $t' = 0$. Op tijdstip t_e wordt een pakketje elektronen verstuurd vanaf de aarde. Op t_r' wordt dit pakketje op het ruimteschip gemeten.

a) Teken ruimtetijd diagrammen van de situatie, gezien vanuit $\mathcal{O}$ en vanuit $\mathcal{O}'$.

b) Bepaal de tijd t_r waarop het pakketje elektronen bij het ruimteschip volgens $\mathcal{O}$ aan komt. Laat zien dat $t_r = t_e/(1 - v/w)$.

c) Bepaal, met behulp van de Lorentz-transformatie, de tijd t'_r volgens $\mathcal{O}$. Laat zien dat $t'_r = \gamma_v^{-1} t_r$.

Meteen nadat het pakketje aankomt, stuurt het ruimteschip bevestiging door een pakketje elektronen terug te schieten. De tijd waarop dit pakketje volgens $\mathcal{O}$ aankomt op aarde schrijven we als

$$t_d = \frac{\alpha}{1 - v/w} t_e \ . \tag{4}$$

d) Noem de snelheid van dit pakketje elektronen tov de aarde u en bewijs dat $\alpha = 1 + v/u$. Beargumenteer wat de minimale waarde α moet zijn.

e) Laat zien dat de snelheid u' waarmee dit pakketje elektronen beweegt tov het ruimteschip gegeven wordt door

$$u' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} \ . \tag{5}$$

f) Bepaal nu α door aan te nemen dat de snelheden waarmee de pakketjes door de aarde en door het ruimteschip worden verstuurd gelijk zijn. Laat zien dat $\alpha = [\gamma_v^2(1 - v/w)]^{-1}$.

6 Ruimte en tijd

Bewijs dat de relatie $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ geldt voor ieder event wat wordt waargenomen vanuit twee inertiaalstelsels. Doe dit met behulp van de Lorentz-transformaties. Laat ook zien dat het tijdsinterval tussen twee events het kleinst is in het inertiaalstelsel waarin de ruimtelijke afstand tussen de events het kleinst is.