UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

Expresiones algebraicas, producto notable y factorización

Ingeniería Civil Informática
Prof. Maximina Márquez Torres

1 semestre, 2023

Álgebra elemental

Expresiones algebraicas: se conoce así a la combinación de números reales (constantes) y literales o letras (variables) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc.

Ejemplos

$3a + 2b - 5$, en esta expresión son constantes 3, 2, -5 y las variables son a y b.

$(z^2 + 8)(5z^4 - 7)$, en esta expresión son constantes 8, 5 y -7, variable "z" y 2, 4 exponentes.

Término algebraico. Es un sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad. A todo término algebraico se le denomina monomio y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Álgebra elemental

Ejemplo de término algebraico

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^3$	-8	y	3
$\frac{1}{3}mn^x$	$\frac{1}{3}$	m, n	$1, x$
$-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	$2x+1$	-2

Términos semejantes: Dos o más términos son semejantes cuando los mismos exponentes afectan a las mismas bases.

Ejemplos:

Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus respectivos exponentes iguales, por lo consiguiente son semejantes:

$-7b$ con $4b$ $\quad -8x^2y^3$ con $7x^2y^3$ $\quad \frac{1}{6}abc^2$ con abc^2

Álgebra elemental

Simplificar términos semejantes:

Ejemplos:

Simplifica los términos

a) − 7a + 3a. Resp. $-7a + 3a = (-7+3)a = -4a$

b) − $6xy^2 + 9xy^2 - xy^2$ Resp. $-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2 = (-6+9-1)xy^2 = 2xy^2$

c) $10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b$

Resp. $26x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b = 20x^{2a}y^b$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$

b) $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$

c) $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$

d) $-\frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3a^2 - \frac{1}{2}ab$

e) $\frac{2}{3}x^{m-1} - \frac{1}{10}b^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{3}{4}b^{m-2} - 4x^{m-1}$

f) $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

Álgebra elemental

Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y entonces se realizan las operaciones indicadas.

Ejemplo:

Determina el valor numérico de la expresión: $x^4y^2z^3$; si $x = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4y^2z^3 = (4)^4(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2\,304}{8} = 288$$

Entonces, el resultado es: 288

Álgebra elemental

Ejemplo:

Determina el valor numérico de la expresión:

$3m^2 - 2mn + n^2p$; si $m = -3$, $n = 4$, $p = -5$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores en la expresión y se realizan las operacio

$$\begin{aligned} 3m^2 - 2mn + n^2p &= 3(-3)^2 - 2(-3)(4) + (4)^2(-5) \\ &= 3(9) - 2(-3)(4) + (16)(-5) \\ &= 27 + 24 - 80 \\ &= -29 \end{aligned}$$

El valor numérico es: -29

Álgebra elemental

Trabajo autónomo

Encuentra el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones si: $m = -2, n = 3, p = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}, y = 10, z = \frac{1}{2}$

1. $2m + n$
2. $m - n + y$
3. $8p + 3x$
4. $\frac{2z + 6x}{n}$
5. $5m - 2n + 3y$
6. $x + z - p$
7. $\frac{3x + 4z - 9}{n}$

Álgebra elemental

Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común en términos algebraicos

Ejemplos

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
1. Un número cualquiera.	m
2. Un número cualquiera aumentado en siete.	$j+7$
3. La diferencia de dos números cualesquiera.	$f-q$
4. El doble de un número excedido en cinco.	$2x+5$
5. La división de un número entero entre su antecesor.	$\dfrac{x}{x-1}$

Álgebra elemental

Lenguaje algebraico

Ejemplos

Expresa en lenguaje común:

$3x - 8$. Resp: el triple de un número disminuido en ocho

$2x + x^2$. Resp: la suma del doble de un número y su cuadrado

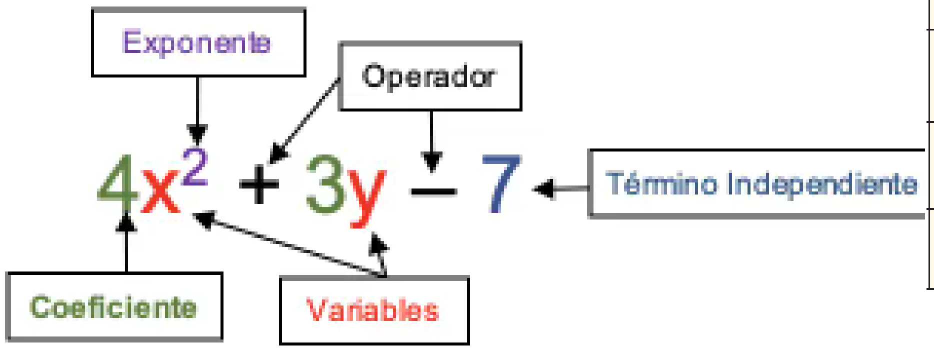
Álgebra elemental

Polinomios: Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

Un **polinomio de grado n en la variable x** es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0, \qquad (1)$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots, n$ son números reales.



Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

Álgebra elemental

Polinomios

En cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo:

$$\overset{\text{entero negativo}}{\overset{\downarrow}{x^{-1}}} + x - 1 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2\overset{\text{no entero}}{\overset{\downarrow}{x^{1/2}}} + 6$$

No son polinomios, ya que sus exponentes en los términos no son enteros positivos. Sin embargo,

$$\tfrac{1}{3}x^2 + 4 \qquad \text{y} \qquad 0.5x^3 + \sqrt{6}\,x^2 - \pi x + 9$$

Si son polinomios, ya que los exponentes de los términos sí son enteros positivos

Álgebra elemental

Polinomios: Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

Suma: En la suma los polinomios se escriben uno seguido del otro y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo

Suma los siguientes polinomios: $5x^3 - 3x^2 - 6x - 4;\ -8x^3 + 2x^2 - 3;\ 7x^2 - 9x + 1.$

Resp.

El resultado es $(5x^3 - 3x^2 - 6x - 4) + (-8x^3 + 2x^2 - 3) + (7x^2 - 9x + 1) = -3x^3 + 6x^2 - 15x - 6$

Suma los siguientes polinomios:

$$(2x - 7y - 3z + 6) + (-9x + 4z) + (-x + 4y + z - 8).$$

Resp. El resultado es:

$$(2x - 9x - x) + (-7y + 4y) + (-3z + 4z + z) + (6 - 8) = -8x - 3y + 2z - 2$$

Álgebra elemental

Polinomios

Efectúa la siguiente operación: $(2x-7y-3z+6)+(-9x+4z)+(-x+4y+z-8)$.

Solución

Con un fi n más práctico, se ordenan los polinomios haciendo coincidir los términos semejantes en columnas; asimismo, se reducen los coeficientes término a término:

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x & -7y & -3z & +6 \\ + & -9x & & +4z & \\ & -x & +4y & +z & -8 \\ \hline & -8x & -3y & +2z & -2 \end{array}$$

El resultado de la suma es: $-8x-3y+2z-2$

Álgebra elemental

Polinomios

Realiza la siguiente operación: $\left(\frac{1}{2}x^{a+1}-\frac{3}{4}y^{b-1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{2}x^{a+1}+\frac{1}{3}y^{b-1}+\frac{1}{4}\right).$

Solución

Se acomodan en forma vertical los términos semejantes y se realiza la operación columna por columna:

$$\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{2}x^{a+1}-\frac{3}{4}y^{b-1}-\frac{1}{6} \\
+ & \\
 & \frac{3}{2}x^{a+1}+\frac{1}{3}y^{b-1}+\frac{1}{4} \\
\hline
 & 2x^{a+1}-\frac{5}{12}y^{b-1}+\frac{1}{12}
\end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $2x^{a+1}-\frac{5}{12}y^{b-1}+\frac{1}{12}$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo.
Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
3. Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
6. $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7. $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo.
Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
3. Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
6. $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7. $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$

Álgebra elemental

Resta de Polinomios: En esta operación es importante identificar el minuendo y el sustraendo, para posteriormente realizar la reducción de términos semejantes.

Ejemplo:
Realiza la siguiente operación:$(4a-2b-5c)-(3a-5b-7c)$
Solución:
En el ejemplo 4a-2b-5c es el minuendo y 3a-5b-7c es el sustraendo. El – afecta todo que está en el sustraendo y nos queda: $4a-2b-5c-3a+5b+7c=a+3b+2c$
Por consiguiente, el resultado de la resta es:

$$a+3b+2c$$

Álgebra elemental

Ejemplo:

Realiza la siguiente resta: $16x^2 - 7x - 8$ y $6x^2 - 3x + 6$

Solución:

El minuendo es $16x^2 - 7x - 8$ y el sustraendo es $6x^2 - 3x + 6$. Cambiamos los signos al sustraendo y nos queda:

$$\begin{array}{r} 16x^2 - 7x - 8 \\ -6x^2 + 3x - 6 \\ \hline 10x^2 - 4x - 14 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $10x^2 - 4x - 14$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo:

Realice las siguientes operaciones:

1. De $5a^2 - 3a + 2$ resta $8a^2 - 5a + 7$
2. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3 - 5x^2 - 6x + 3) - (2x^3 + 4x - 8)$?
3. De $4a^4 - 10a^3 + 2a^2 - 3a - 4$ resta $5a^5 - 3a^3 + 6a - 3$
4. Efectúa $(4x^3y^2 - 5x^2y^3 + 6x^4y - 8xy^4) - (12x^2y^3 - 3xy^4 + 4x^3y^2 - 9x^4y)$
5. De $7 - 8a^5b + 3a^3b^3 - 6a^4b^2 + 2ab^5$ resta $5a^3b^3 - 3ab^5 + 8 - 7a^5b - 2a^4b^2$
6. Realiza $(3x^{a+2} - 7x^{a+1} - 8x^a + 3x^{a-1}) - (4x^{a+2} + 6x^{a+1} - 7x^a - 9x^{a-1})$
7. De $5a^{2m-1} + 6a^{2m} - 8a^{m+1} - 3a^{m-3}$ resta $12a^{2m} - 5a^{2m-1} - 3a^{m+1} - 4a^{m-3}$
8. ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)$?
9. De $\frac{1}{6}m^2n^3 + 6mn^4 + m^4n - \frac{2}{5}m^3n^2$ resta $\frac{1}{3}m^4n + \frac{3}{2}m^2n^3 + 8mn^4 - m^3n^2$
10. De $\frac{2}{5}x^2y^2 + 3x^3y - 4x^4 + \frac{1}{6}y^4$ resta $-\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^3y + \frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2$

Álgebra elemental

Multiplicación de polinomios

a) Multiplicación de monomios: al multiplicar monomios, primero se multiplican los coeficientes y después las bases.

Ejemplo 1: Multiplique los siguientes polinomios: $(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z)$

Resp: $(-5)(3)x^4y^5zx^2y^6z = -15x^{(4+2)}y^{(5+6)}z^{(1+1)} - 15x^6y^{11}z^2$

Ejemplo 2: Multiplique los siguientes polinomios: $\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right)$

Resp: Se aplica el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, no importa que los exponentes de las bases sean expresiones algebraicas

$(3x^{2a-1}$ $(5x^5y^4 - 3x^4y^3z + 4xz^4)(-3x^4y)$= $3(-2)x^{2a-1+4a-3}y^{3a+2a} = -6x^{6a-4}y^{5a}$

Álgebra elemental

Multiplicación de polinomios

b) Multiplicación de un polinomio por un monomio: Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio o viceversa. Ejemplo: Resuelve la siguiente multiplicación: $(5x^5y^4 - 3x^4y^3z + 4xz^4)(-3x^4y)$

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio:

$$(5x^5y^4 - 3x^4y^3z + 4xz^4)(-3x^4\mathrm{y}) = (5x^5y^4)(-3x^4\mathrm{y}) + (-3x^4y^3z)(-3x^4\mathrm{y}) + (4xz^4)(-3x^4\mathrm{y})$$

$$(5x^5y^4 - 3x^4y^3z + 4xz^4)(-3x^4\mathrm{y}) = -15x^{5+4}y^{4+1} + 9x^{4+4}y^{3+1}z - 12x^{1+4}z^4y$$

$$(5x^5y^4 - 3x^4y^3z + 4xz^4)(-3x^4\mathrm{y}) = -15x^9y^5 9x^8y^4z - 12x^5z^4y$$

c) Multiplicación de un polinomio por un polinomio: Para multiplicar polinomios por polinomios, se siguen los pasos $(5x^2 - 3x - 2)(4x - 3x^2 - 6)$.uiente ejemplo:

Realice la siguiente operación:

Resp. Realice la multiplicación escalonada como en las multiplicaciones aritméticas

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times \quad -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline \end{array}$$

Álgebra elemental

Multiplicación de polinomios

c) Multiplicación de un polinomio por un polinomio: Para multiplicar polinomios por polinomios, se siguen los pasos indicados en el siguiente ejemplo:

Realice la siguiente operación: $(5x^2 - 3x - 2)(4x - 3x^2 - 6)$.

Resp. Realice la multiplicación escalonada como en las multiplicaciones aritméticas, multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo (ordenándolos de manera decreciente). Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados), de esta manera:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 5x^2 & -\,3x & -\,2 \\
 & * & -3x^2 & +\,4x & -\,6 \\
\hline
 & & -30x^2 & +\,18x & +\,12 \\
 & 20x^3 & -\,12x^2 & & -\,8 \\
-15x^4 & +\,9x^3 & +\,6x^2 & & \\
\hline
-15x^4 & +\,29x^3 & -\,36x^2 & +\,10x & +\,12
\end{array}
$$

Álgebra elemental

Multiplicación de polinomios

c) Multiplicación de un polinomio por un polinomio:

Ejemplo 2: Multiplique $x^3 + 3x - 1$ y $2x^2 - 4x + 5$

Multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los términos del segundo monomio, luego sumamos algebraicamente:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & x^3 & & +\ 3x & -\ 1 & \\
 & & & 2x^2 & -\ 4x & +\ 5 & \\
\hline
 & & 5x^3 & & +\ 15x & -\ 5 & \leftarrow 5(x^3 + 3x - 1) \\
 & -\ 4x^4 & & -\ 12x^2 & +\ 4x & & \leftarrow -4x(x^3 + 3x - 1) \\
2x^5 & & +\ 6x^3 & -\ 2x^2 & & & \leftarrow 2x^2(x^3 + 3x - 1) \\
\hline
2x^5 & -\ 4x^4 & +\ 11x^3 & -\ 14x^2 & +\ 19x & -\ 5. &
\end{array}
$$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo

Realizar el producto de:

$(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

$(2a^2 - 1)(4a^4 - 4a^2 + 1)$

$(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

$(2 - y)(4 + 2y + y^2)$

$(9 + y)(81 - 9y + y^2)$

$(x + z^2)(x^2 - xz^2 + z^4)$

$(5x - y)(5x + y)(25x^2 + y^2)$

$(2 - x + y)(2 - x - y)$

$(x^{a+2} - 2x^a + 3x^{a+1})(x^a + x^{a+1})$

$(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 - 7x + 4)$

$(4x - 6x^2 - 9)(3x^2 + 2x + 1)$

Álgebra elemental

División de polinomio: Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases. Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente

Ejemplo 1: Realice la siguiente operación: $\dfrac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c}$

Se dividen los coeficientes y las bases para obtener: $\dfrac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \dfrac{-16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$

Polinomio entre monomio: se divide cada término del polinomio entre el monomio

Ejemplo: Dividir $\dfrac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$

Solución: Se divide cada término del polinomio entre el monomio:

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2} = \frac{2x^4}{-x^2} - \frac{5x^3}{-x^2} + \frac{x^2}{-x^2} = -2x^{4-2} + 5x^{3-2} - x^{2-2}$$

$$= -2x^2 + 5x - x^0 = -2x^2 + 5x - 1$$

Álgebra elemental

Polinomio entre otro polinomio: para dividir un polinomio entre otro polinomio se deben seguir los siguientes pasos:

Ejemplo: Realice la división $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - x^2}{x - 2}$

1. Se colocan los polinomios como en la división con números reales, y se ordenan según convenga con respecto a los exponentes:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +3x^3 & -x^2 & & & x-2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 \quad \text{Cociente} \\
\hline
 & 7x^3 & -x^2 & & & \\
 & -7x^3 & +14x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 13x^2 & & & \\
 & & -13x^2 & +26x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 26x & & \\
 & & & -26x & +52 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 52 & \text{Resto}
\end{array}
$$

Álgebra elemental

Trabajo autónomo:

Determine el cociente de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$

3. $\dfrac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$

4. $\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}$

5. $\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}$

6. $\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}$

7. $\dfrac{27m^4n^6-15m^3n^6+3mn^2}{3mn^2}$

8. $\dfrac{32a^7b^5+48a^6b^4-a^4b^3}{8ab^3}$

9. $\dfrac{28x^9y^6-49x^7y^3-7x^2y}{7x^2y}$

10. $\left(\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{5}{2}a\right)\div\dfrac{1}{2}a$

11. $\dfrac{12x^{10a-4}y^{5b-2}}{-6x^{3a+2}y^{2b+1}}$

12. $\dfrac{-10a^{5n-5}b^{4n+2}}{-2a^{4n+1}b^{2n-5}}$

13. $\dfrac{48a^{2x+3}b^{3x-2}c^x}{-16a^{x+1}b^{2x-5}c^3}$

14. $\dfrac{-20x^{5m-2}y^{9n}z^{2m}}{-6x^3y^5z^2}$

Álgebra elemental

Producto notable

Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de efectuar el producto.

Cuadrado de un binomio:

El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo; esta regla general se expresa con la fórmula:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo:

Desarrollar el binomio $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$

Desarrollar el binomio $(3m+5n)^2 = 9m^2 + 30mn + 25n^2$

Desarrollar: $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$

Álgebra elemental

Producto notable

Cuadrado de un trinomio

El desarrollo de la expresión: $(a + b + c)^2$es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ejemplo:

Desarrollar: $(x\ + 2y + 3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$

Desarrollar: $(4m - 7n - 5)^2 = 16m^2 + 49n^2 + 25 - 56mn - 40m + 70n$

Binomios conjugados

Son de la forma $(a + b)(a - b)$ y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades, como se ilustra en la fórmula: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Desarrollar:$(x\ +\ 6)(x\ -\ 6) = x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$

Álgebra elemental

Producto notable

Binomios conjugados

Ejemplos:

Desarrollar: $(m-4)(m+4) = m^2 + 4m - 4m - 16 = m^2 - 16$

Desarrollar: $(-2x^3+7)(-2x^3-7) = [(-2x^3)+7][(-2x^3)-7] = (-2x^3)^2 - 7^2 = 4x^6 - 49$

Resolver: $(m+n+p)(m+n-p) = [(m+n)+p]\big((m+n)-p\big] = (m+n)^2 - p^2 = m^2 + 2mn + n^2 - p^2$

Binomios con término común

Son de la forma (x + a) (x + b), su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los no comunes:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Álgebra elemental

Producto notable

Binomios con término común

Ejemplos

Resolver: $(x-6)(x+4)=x^2+(-6+4)x+(-6)(4)=x^2-2x-24$

Resolver: $(m-3)(m-5)=m^2+(-3-5)m+(-3)(-5)=m^2-8m+15$

Resolver: $(n^4+10)(n^4-8)=(n^4)^2+(10-8)n+(10)(-8)=n^8+2n^4-80$

Trabajo autónomo

Resolver los siguientes productos:

21. $(x^4+6)(x^4-12)$
22. $(x^5-1)(x^5+2)$
23. $(a^3-5)(a^3-2)$
24. $(x^{2m-1}+7)(x^{2m-1}-5)$

7. $(m-n)(m+n)$
8. $(xy-z)(xy+z)$
9. $(3x+5y)(3x-5y)$
10. $(4m-9n)(4m+9n)$

17. $\left(\frac{3}{5}m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m-\frac{1}{2}\right)$
18. $\left(\frac{7}{6}x^3-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3+\frac{3}{2}\right)$
19. $\left(\frac{1}{3}xy-z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy+z^6\right)$

Álgebra elemental

Producto notable

Trabajo autónomo

Resolver los siguientes productos:

51. $(4m + 5n + p)^2$

52. $(3x^2 + 2y^2 - 1)^2$

53. $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + c\right)^2$

12. $(x - 12)^2$

13. $(p + 15)^2$

14. $(2a - 1)^2$

15. $\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2$

32. $(a^x - b^y)^2$

33. $(3x^{4a-5} + 2y^{2a+1})^2$

34. $(m^{3a+6} - 4n^{3b})^2$

Álgebra elemental

Producto notable

Cubo de un binomio: es de la forma $(a+b)^3$ su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Demostración:

La expresión $(a+b)^3$ es equivalente al producto $(a+b)^2(a+b)$, entonces:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Álgebra elemental

Producto notable

Cubo de un binomio: es de la forma $(a+b)^3$ su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ejemplos

Desarrollar: $(m+5)^3$

Solución

Se obtiene cada uno de los términos que conforman al cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(m)^3 = m^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(m)^2(5) = 15m^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(m)(5)^2 = 3(m)(25) = 75m$
- El cubo del segundo: $(5)^3 = 125$

Estos resultados se suman y se obtiene:

$$(m+5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125$$

Álgebra elemental

Producto notable

Cubo de la diferencia: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo

Desarrollar: $(3x^4 - 2y^3)^3$

Solución Se aplica la fórmula y se determina que:

$$\begin{aligned}(3x^4 - 2y^3)^3 &= (3x^4)^3 - 3(3x^4)^2(2y^3) + 3(3x^4)(2y^3)^2 - (2y^3)^3\\ &= 27x^{12} - 3(9x^8)(2y^3) + 3(3x^4)(4y^6) - 8y^9\\ &= 27x^{12} - 54x^8y^3 + 36x^4y^6 - 8y^9\end{aligned}$$

Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables

Ejemplos:

Desarrolla el siguiente producto: $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

Solución

Se eligen los factores $(x+2)(x-2)$, los que se resuelven como un producto de binomios conjugados:

$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ Entonces el producto inicial se representa como:

$(x+2)(x-2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3)$ Por último, se aplica el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x^2-4)(x^2+3) &= (x^2)^2 + (-4+3)(x^2) + (-4)(3)\\ &= x^4 - x^2 - 12\end{aligned}$$

Por tanto: $(x+2)(x-2)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

Álgebra elemental

Producto notable

Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables

Ejemplos:

Desarrolla el siguiente producto: $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Solución

De acuerdo con la elección de los factores es como se procede a aplicar el producto notable, en este caso reagruparemos los factores de la siguiente manera: $(x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2)$

Al desarrollar mediante binomios conjugados, se obtiene: $(x+1)\,(x-1) = x^2 - 1$ $\quad (x+2)\,(x-2) = x^2 - 4$

La expresión se transforma en: $(x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2) = (x^2-1)\,(x^2-4)$

Por último se aplican binomios con término común: $= (x^2)^2 + (-1-4)x^2 + (-1)(-4)$

$= x^4 - 5x^2 + 4$

Álgebra elemental

Producto notable

Trabajo autónomo

Resolver:

1. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
2. $(m+8)(m-8)(m+1)\ (m-1)$
3. $(3x-5)(3x+2)(9x^2-9x-10)$
4. $(5x-6)^2\ (5x+6)^2$
5. $(m+2)^3\ (m-2)^3$

6. $(x+3)^3$
7. $(1-x)^3$
8. $(10-m)^3$

14. $(5m^2+2n^5)^3$
15. $(3x^3y-2z^4)^3$
16. $(4x^2+2xy)^3$

22. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right)^3$
23. $\left(\frac{1}{3}x^4+y\right)^3$
24. $\left(2x^{2a-3}-3y^{4a+1}\right)^3$

Álgebra elemental

Factorización

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Factor común: Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $x^6 - x^5 + x^2$. Solución: $x^6 - x^5 + x^2 = x^2\left(x^4 - x^3 + 1\right)$

b) $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$ Solución: $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2\left(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8\right)$

c) $18x^2 - 12x + 54$. Solución: $18x^2 - 12x + 54 = 6\left(3x^2 - 2x + 9\right)$

d) $(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2$ Solución:

$$(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[(5a-7b)-(2a-3b)\right]$$

Se reducen los términos semejantes del último factor:

$$= (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[5a-7b-2a+3b\right]$$

$$= (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[3a-4b\right]$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[3a-4b\right]$

Álgebra elemental

Factorización

Factor común por agrupación de términos: Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse.

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $am + bm + a^2 + ab$. Solución: Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza "m" y de los segundos "a".

$$am + bm + a^2 + ab = (am + bm) + (a^2 + ab) = m(a + b) + a(a + b$$

La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $a + b$ y se obtiene como resultado: $= (a + b)(m + a)$

b) $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$ ión: Agrupamos términos semejantes:

$$6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab = (6ax + 3a^2) + (-4bx - 2ab) = 3a\,(2x + a) - 2b\,(2x + a)$$

$$= (2x + a)(3a - 2b)$$

Álgebra elemental

Factorización

Diferencia de cuadrados: La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es (a+b)(a-b).

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $x^2 - 9$ Solución: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

b) $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$. Solución: $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^{2a-4} - y^{6b}$ Solución:

Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = \left(x^{a-2} + y^{3b}\right)\left(x^{a-2} - y^{3b}\right)$$

Álgebra elemental

Factorización

Trabajo autónomo:

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $m^2 + mn + mx + nx$
2. $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$
3. $ax - bx + ay - by$
4. $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
5. $am - 2bm - 3an + 6bn$
6. $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
7. $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$
8. $5m^2n + 5mp^2 + n^2p^2 + mn^3$
9. $9x^2 + 6x + 3$
10. $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$
11. $6x^2 - 6xy - 6x$
12. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
13. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
14. $x^2 - \frac{4}{81}$
15. $x^2 - \frac{16}{49}$
16. $x^4 - \frac{1}{16}$
17. $49x^2 - \frac{16}{25}$
18. $x^{6a} - y^{4b}$
19. $a^{2x+6} - 9b^{6y}$
20. $m^{4a+8} - 25$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto:

1. Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.

2. Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{b^2}$ =b

3. Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces: Comprobación = 2ab

4. Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos:

$$a^2 \mp 2ab + b^2 = (a \mp b)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Ejemplos

Factorizar:

$$x^2 + 6x + 9.$$

Solución:

Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

$\sqrt{x^2} = x$ $\qquad$ $\sqrt{9} = 3$ $\qquad$ Comprobación $= 2(x)(3) = 6x$

Al tomar el signo del segundo término, la factorización es:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Ejemplos

Factorizar:

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy$$

Solución:

Se ordenan los términos de la siguiente manera:

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio es cuadrado perfecto:

$\sqrt{4x^2} = 2x$ $\qquad$ $\sqrt{9y^2} = 3y$ $\qquad$ Comprobación $= 2(2x)(3y) = 12xy$

Finalmente, el resultado de la factorización es:

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Ejemplos

Factorizar:

$$(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}$$

Solución:

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba el doble producto:

$$\sqrt{(m+n)^2}=m+n \qquad \sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \qquad \text{Comprobación } =2(m+n)\left(\frac{1}{2}\right)=m+n$$

Por tanto, la factorización de la expresión propuesta es:

$$(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}=\left((m+n)+\frac{1}{2}\right)^2=\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Ejemplos

Factorizar:

$$3a - 2\sqrt{15ab} + 5b$$

Solución:

Las raíces de los extremos y la comprobación de que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto es:

$\sqrt{3a}$ y $\sqrt{5b}$ Comprobación $= 2\left(\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{5b}\right) = 2\sqrt{(3a)(5b)} = 2\sqrt{15ab}$

Por tanto:

$$3a - 2\sqrt{15ab} + 5b = \left(\sqrt{3a} - \sqrt{5b}\right)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto: Se conoce de la forma $a^2 \mp 2ab + b^2$.

Ejemplos

Factorizar:

$$x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}} + 4$$

Solución:

$$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{(4)(2)}} = x^{\frac{1}{8}} \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \text{Comprobación } = 2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2) = 4x^{\frac{1}{8}}$$

Por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}} + 4 = \left(x^{\frac{1}{8}} + 2\right)^2$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $x^2 + xb + c$. Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo 1

Factorizar: $x^2 + 11x + 24$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $x^2 + xb + c$. Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo 2

Factorizar: $m^2 - 13m + 30$

Solución:

La raíz cuadrada del término cuadrático es "m"; el primer factor va acompañado del signo del segundo término $(-13m)$ y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer términos $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m - \quad)(m - \quad)$$

Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $x^2 + xb + c$. Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo 3

Factorizar: $x^2 - 18 - 7x$

Solución:

Se ordenan los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 7x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer factor se coloca el signo del término lineal ($-7x$) y en el segundo se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos del término lineal ($-7x$) y el independiente (-18)

$$x^2 - 7x - 18 = (x - \quad)(x + \quad)$$

Se buscan dos números cuyo producto sea igual a 18 y cuya resta sea 7. En este caso los números que cumplen esta condición son 9 y 2; es importante señalar que el número mayor va en el primer factor y el menor en el segundo.

$$x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $x^2 + xb + c$. Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo 4

Factorizar: $x^4 - x^2 - 6$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicarse den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea:

$$x^4 - x^2 - 6 = \left(x^2 - 3\right)\left(x^2 + 2\right)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman (ejemplos 1 y 2), pero si los signos de los factores son diferentes (ejemplos 3 y 4), entonces los números buscados se restan.

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $x^2 + xb + c$. Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo 5

Factorizar: $21 - 4x - x^2$.

Solución:

Se ordena el trinomio y se factoriza el signo del término cuadrático:

$$21 - 4x - x^2 = -x^2 - 4x + 21 = -\left(x^2 + 4x - 21\right)$$

Al factorizar la última expresión:

$$-\left(x^2 + 4x - 21\right) = -(x+7)(x-3)$$

Se multiplica el segundo factor por el signo negativo y se ordena para que el resultado sea:

$$-(x+7)(x-3) = (x+7)(-x+3) = (x+7)(3-x)$$

Álgebra elemental

Factorización

Trabajo autónomo

Factorizar:

4. $x^2 - 6x + 9$
5. $x^2 + 12x + 36$
6. $9a^2 - 30a + 25$
7. $36 + 121c^2 - 132c$
8. $16a^2 + 24ab + 9b^2$
9. $4a^2 - 20ab + 25b^2$
10. $y^2 + 4y + 3$
11. $x^2 - 5x + 4$
12. $n^2 + 6n + 8$
13. $a^2 - 16a - 36$
14. $y^2 + y - 30$
15. $x^2 - 18 - 7x$
16. $x^2 - 18xy + 80y^2$
17. $a^2 - 5ab - 50b^2$
18. $m^2 - 7mn - 30n^2$
19. $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$
20. $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$
21. $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$
22. $n^4 - 20n^2 + 64$
23. $a^4 - 37a^2 + 36$
24. $x^4 - x^2 - 90$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $ax^2 + xb + c$. En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

Ejemplos

Factorizar: $6x^2 - 7x - 3$.

Solución

Se ordenan los términos según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción:

$$\frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{6} = \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(2x - 3)(3x + 1)$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $ax^2 + xb + c$. En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

Ejemplos

Factorizar: $3x^2 - 5x - 2.$

Solución

Se multiplica y divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma: $x^2 + bx + c$

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

$$= \frac{(3x-6)(3x+1)}{3} = \frac{3(x-2)(3x+1)}{3} = (x-2)(3x+1)$$

Por consiguiente: $3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $ax^2 + xb + c$. En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

Ejemplos

Factorizar: $6a^2x^2 + 5ax - 21$.

Solución

Se aplican los pasos descritos en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x^2 + 5ax - 21 = \frac{6\left(6a^2x^2 + 5ax - 21\right)}{6} = \frac{36a^2x^2 + 5(6ax) - 126}{6} = \frac{(6ax)^2 + 5(6ax) - 126}{6}$$

$$= \frac{(6ax + 14)(6ax - 9)}{6} = \frac{2(3ax + 7)3(2ax - 3)}{6} = \frac{6(3ax + 7)(2ax - 3)}{6} = (3ax + 7)(2ax - 3)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $6a^2x^2 + 5ax - 21 = (3ax + 7)(2ax - 3)$

Álgebra elemental

Factorización

Trinomio de la forma: $ax^2 + xb + c$. En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

Ejemplos

Factorizar: $5+11x-12x^2$.

Solución

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5+11x-12x^2 = -12x^2+11x+5 = -\left(12x^2-11x-5\right)$$

Se realiza la factorización y se obtiene:

$$= -\frac{12\left(12x^2-11x-5\right)}{12} = -\frac{144x^2-11(12x)-60}{12} = -\frac{(12x)^2-11(12x)-60}{12}$$

$$= -\frac{(12x-15)(12x+4)}{12} = -\frac{3(4x-5)4(3x+1)}{12} = -\frac{12(4x-5)(3x+1)}{12} = -(4x-5)(3x+1)$$

Se multiplica el signo por el primer factor y se ordenan los términos:

$$-(4x-5)(3x+1) = (-4x+5)(3x+1) = (5-4x)(3x+1)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(5-4x)(3x+1)$

Álgebra elemental

Factorización

Por agrupación de términos.

Ejemplos

Factorizar: $6x^2+13x+5.$

Solución

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente: $(6)(5)=30$

Se buscan dos números que multiplicados den 30 y sumados 13, en este caso los números son 10 y 3, por tanto, el segundo término del trinomio se expresa como: $13x=10x+3x$ y se procede a factorizar agrupando términos:

$$6x^2+13x+5=6x^2+10x+3x+5=2x(3x+5)+1(3x+5)=(3x+5)(2x+1)$$

Finalmente, la factorización es: $6x^2+13x+5=(3x+5)(2x+1)$

Factorizar: $8x^4-19x^2+6.$

Se multiplican los coeficientes de los extremos de la expresión: $(8)(6)=48$

Los números que multiplicados dan 48 y sumados -19 son -16 y -3, por consiguiente, se expresa como: $-19x^2=-16x^2-3x^2$ y se procede a factorizar:

$$8x^4-19x^2+6=8x^4-16x^2-3x^2+6=(8x^4-16x^2)+(-3x^2+6)$$
$$=8x^2(x^2-2)-3(x^2-2)=(x^2-2)(8x^2-3)$$

Finalmente: $8x^4-19x^2+6=(x^2-2)(8x^2-3)$

Álgebra elemental

Factorización

Por agrupación de términos.

Ejemplos

Factorizar: $15x^2 - 2xy - 8y^2$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos del trinomio: $(15)(-8) = -120$

Se descompone -120 en dos factores, de tal manera que restados den como resultado el coeficiente del término central -2, estos números son: -12 y 10

La expresión se descompone de la siguiente manera:

$$15x^2 - 2xy - 8y^2 = 15x^2 - 12xy + 10xy - 8y^2 = 3x(5x - 4y) + 2y(5x - 4y)$$
$$= (5x - 4y)(3x + 2y)$$

Se concluye que: $15x^2 - 2xy - 8y^2 = (5x - 4y)(3x + 2y)$

Álgebra elemental

Factorización

Por agrupación de términos: Casos especiales: algunos coeficientes son fraccionarios o tienen raíz cuadrada

Ejemplos

Factorizar: $2p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}$

Solución

En este caso se incluyen fracciones, entonces los extremos deben expresarse como una fracción que contenga el mismo denominador, por tanto:

$$2p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}=\frac{2(12)}{12}p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}=\frac{24}{12}p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}$$

Se multiplican los coeficientes numeradores de los extremos del trinomio: $(24)(1)=24$

Se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumados 11, en este caso los números son 3 y 8, por tanto el trinomio se expresa como:

$$2p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}=\frac{24}{12}p^2+\frac{3}{12}p+\frac{8}{12}p+\frac{1}{12}=2p^2+\frac{1}{4}p+\frac{2}{3}p+\frac{1}{12}$$

Se procede a realizar la factorización del polinomio resultante:

$$2p^2+\frac{1}{4}p+\frac{2}{3}p+\frac{1}{12}=p\left(2p+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(2p+\frac{1}{4}\right)=\left(2p+\frac{1}{4}\right)\left(p+\frac{1}{3}\right)$$

Entonces, se concluye que: $2p^2+\frac{11}{12}p+\frac{1}{12}=\left(2p+\frac{1}{4}\right)\left(p+\frac{1}{3}\right)$

Álgebra elemental

Factorización

Por agrupación de términos: Casos especiales: algunos coeficientes son fraccionarios o tienen raíz cuadrada

Ejemplos

Factorizar: $6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10}$

Solución

Se convierten los coeficientes del trinomio en una fracción con denominador común:

$$6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10} = \frac{6(20)}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3(2)}{10(2)} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20}$$

Se multiplican los numeradores de los extremos: $(120)(6) = 720$, entonces se buscan dos números que multiplicados den 720 y restados 29, los cuales son: 45 y 16, por tanto, la expresión se representa como:

$$\frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{45}{20}x + \frac{16}{20}x - \frac{6}{20} = 6x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{6}{20} =$$

Al factorizar se obtiene como resultado:

$$6x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{6}{20} = 3x\left(2x - \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{5}\left(2x - \frac{3}{4}\right) = \left(2x - \frac{3}{4}\right)\left(3x + \frac{2}{5}\right)$$

Álgebra elemental

Factorización

Trabajo autónomo

Factorizar

1. $5m^2 + 13m - 6$
2. $3a^2 - 5a - 2$
3. $6y^2 + 7y + 2$
4. $2x^2 + 3x - 2$
5. $4n^2 + 15n + 9$
6. $20x^2 + x - 1$
7. $7a^2 - 44a - 35$
8. $2y^2 + 5y + 2$
9. $20x^2 + 13x + 2$
10. $15m^2 - 8m - 12$

1. $3x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{8}$
2. $2x^2 + \frac{7}{15}x - \frac{2}{15}$
3. $6x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{3}{8}$
4. $5m^2 + \frac{23}{6}m + \frac{1}{3}$
5. $4m^2 + \frac{17}{15}m - \frac{1}{15}$

Álgebra elemental

Factorización

Suma o diferencia de cubos: Las expresiones de la forma $a^3 + b^3$y $a^3 - b^3$, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos

Factorizar: $27x^3 + 8.$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$\sqrt[3]{27x^3} = 3x$ $\sqrt[3]{8} = 2$

Se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$27x^3 + 8 = (3x+2)\left((3x)^2 - (3x)(2) + (2)^2\right)$$

$$= (3x+2)(9x^2 - 6x + 4)$$

Álgebra elemental

Factorización

Suma o diferencia de cubos: Las expresiones de la forma a^3+b^3y a^3-b^3, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ejemplos

Factorizar: m^6-216

Solución

Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituyen en la fórmula para obtener:

$$m^6-216=(m^2-6)\left((m^2)^2+(m^2)(6)+(6)^2\right)$$

$$=(m^2-6)(m^4+6m^2+36)$$

Álgebra elemental

Factorización

Suma o diferencia de cubos: Las expresiones de la forma $a^3 + b^3$y $a^3 - b^3$, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ejemplos

Factorizar: $(x+y)^3+(x-y)^3.$

Solución

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos y se sustituyen en la respectiva fórmula:

$$\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y \qquad \sqrt[3]{(x-y)^3}=x-y$$

Al aplicar la factorización de la suma de cubos, desarrollar y simplificar se obtiene:

$$(x+y)^3+(x-y)^3=((x+y)+(x-y))\left((x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right)$$

$$=(x+y+x-y)\left(x^2+2xy+y^2-x^2+y^2+x^2-2xy+y^2\right)$$

$$=2x\left(x^2+3y^2\right)$$

Álgebra elemental

Factorización

Suma o diferencia de potencias impares iguales: Las expresiones de la forma $a^n + b^n$y $a^n - b^n$, siendo n un número impar, su factorización es de la siguiente forma

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Ejemplos

Factorizar: $x^7 + y^7$.

Solución

Se extrae la raíz séptima de ambos términos:

$$\sqrt[7]{x^7} = x \qquad \sqrt[7]{y^7} = y$$

Se sustituye en su fórmula y se obtiene como resultado:

$$x^7 + y^7 = (x+y)(x^{7-1} - x^{7-2}y + x^{7-3}y^2 - x^{7-4}y^3 + x^{7-5}y^4 - x^{7-6}y^5 + y^6)$$

$$= (x+y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$$

Álgebra elemental

Factorización

Suma o diferencia de potencias impares iguales: Las expresiones de la forma $a^n + b^n$y $a^n - b^n$, siendo n un número impar, su factorización es de la siguiente forma

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Ejemplos

Factorizar: $x^5 - 32.$

Solución

Se descompone 32 en sus factores primos y se aplica la fórmula:

$$\begin{aligned} x^5 - 32 = x^5 - 2^5 &= (x-2)\left(x^{5-1} + x^{5-2}(2) + x^{5-3}(2)^2 + x^{5-4}(2)^3 + (2)^4\right) \\ &= (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que: $x^5 - 32 = (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$

Álgebra elemental

Factorización

Trabajo autónomo

Factorizar:

1. $8x^3 - 1$
2. $x^3 + 27$
3. $8x^3 + y^3$
4. $27a^3 - b^3$
5. $8a^3 + 27b^6$
6. $64a^3 - 729$
7. $512 - 27a^9$
8. $x^6 - 8y^{12}$

18. $x^{\frac{3}{2}} + 125y^{\frac{9}{2}}$
19. $x^{3a+3} - y^{6a}$
20. $(x+2y)^3 - (2x-y)^3$

2. $a^7 - 128$
3. $243 - 32x^5$
4. $x^7 + 1$
5. $m^5 - n^5$
6. $x^7 - a^7b^7$
7. $1 - a^5$
8. $x^5y^5 + 3125$