Résumé Complet: Arithmétique et Algèbre Linéaire Niveau Baccalauréat

Koudaya Kossi Boris |SCIENCES-UNIVERS

Introduction

Ce résumé exhaustif présente l'ensemble des concepts clés d'arithmétique et d'algèbre linéaire au programme du Baccalauréat, incluant les structures algébriques fondamentales. Les notions sont illustrées par des schémas et exemples pour une compréhension approfondie.

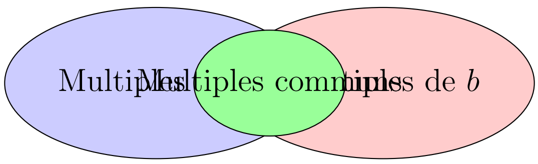
1 Arithmétique

1.1 Divisibilité et PGCD

Définition 1 (Divisibilité). *Un entier a divise un entier b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a \times k$. Notation : $a \mid b$*

Propriété 1.
- *Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid (b + c)$*
- *Si $a \mid b$ alors $a \mid b \times c$ pour tout c*

Définition 2 (PGCD). *Le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers a et b, noté $PGCD(a, b)$ ou $a \wedge b$, est le plus grand entier qui divise à la fois a et b.*



Le PGCD est le plus grand élément commun

1.2 Algorithme d'Euclide

Théorème 1 (Algorithme d'Euclide). *Pour calculer $PGCD(a, b)$ avec $a > b > 0$:*

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < b) \\
b &= r_1q_2 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1) \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2) \\
&\vdots \\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0
\end{aligned}$$

Alors $PGCD(a, b) = r_n$ (dernier reste non nul).

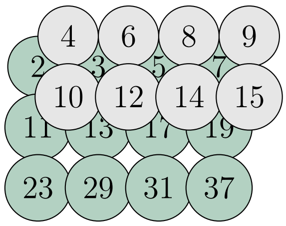
Exemple 1. *Calcul de $PGCD(78, 54)$:*

$$\begin{aligned} 78 &= 54 \times 1 + 24 \\ 54 &= 24 \times 2 + \mathbf{6} \\ 24 &= 6 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Donc $PGCD(78, 54) = 6$

1.3 Nombres premiers

Définition 3 (Nombre premier)**.** *Un entier $p \geq 2$ est premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.*



Nombres premiers en vert

1.4 Théorèmes fondamentaux

Théorème 2 (Théorème de Bézout)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On a :*

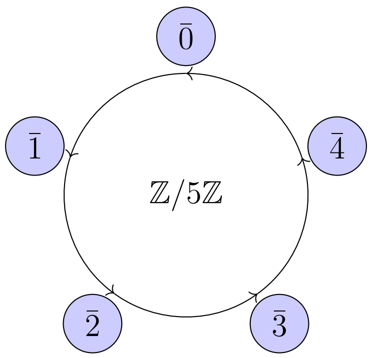
$$a \wedge b = d \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = d$$

Théorème 3 (Théorème de Gauss)**.** *Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a|c$.*

Définition 4 (Nombres premiers entre eux)**.** *a et b sont premiers entre eux ssi $a \wedge b = 1$.*

1.5 Arithmétique modulaire

Définition 5 (Congruence)**.** *$a \equiv b \pmod{n}$ si $n \mid (a - b)$*



Groupe cyclique d'ordre 5 pour l'addition

2 Structures Algébriques

2.1 Lois de composition

Définition 6 (Loi de composition interne)**.** *Une opération $\star$ sur E est une loi de composition interne si :*

$$\forall (a, b) \in E^2,\ a \star b \in E$$

Propriété 2 (Propriétés fondamentales)**.**

— *Commutativité* : $a \star b = b \star a$

— *Associativité* : $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

— *Élément neutre* : $\exists e \in E,\ a \star e = e \star a = a$

— *Élément symétrique* : $\forall a \in E,\ \exists b \in E,\ a \star b = b \star a = e$

2.2 Groupes et Anneaux

Définition 7 (Groupe)**.** *Un ensemble G muni d'une loi $\star$ est un groupe si :*

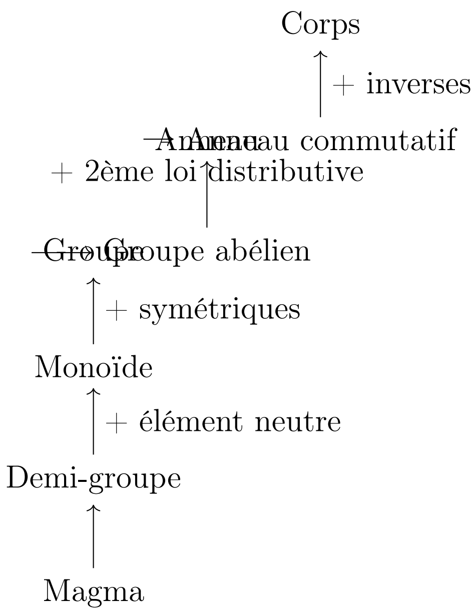
1. *$\star$ est associative*
2. *$\exists e \in G$ élément neutre*
3. *Tout élément admet un symétrique*

Groupe abélien *: groupe commutatif.*

Définition 8 (Anneau)**.** *$(A, +, \times)$ est un anneau si :*

1. *$(A, +)$ est un groupe abélien*
2. *$\times$ est associative et distributive sur $+$*
3. *$\exists 1_A \in A$ neutre pour $\times$*

Définition 9 (Corps)**.** *Anneau commutatif où tout élément non nul est inversible.*



3 Algèbre Linéaire

3.1 Vecteurs et espaces vectoriels

Définition 10 (Vecteur)**.** *Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :*

— *Sa direction*

— *Son sens*

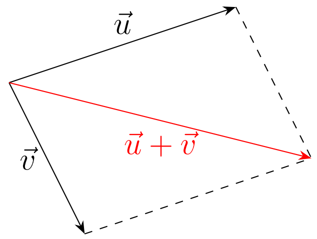
— *Sa norme (longueur)*

Définition 11 (Espace vectoriel)**.** *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de :*

— *Addition vectorielle :* $(E, +)$ *groupe abélien*

— *Multiplication scalaire :* $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

— *Distributivité :* $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$



3.2 Applications linéaires

Définition 12 (Application linéaire)**.** *Une application* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est linéaire si :*

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
2. $f(k\vec{u}) = kf(\vec{u})$ *pour tout* $k \in \mathbb{R}$

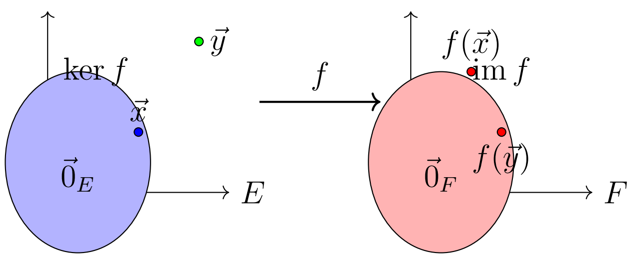
Définition 13 (Noyau et Image)**.** *Soit* $f : E \to F$ *linéaire :*

— $\ker(f) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ *(sous-espace de* E*)*

— $\mathrm{im}(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\}$ *(sous-espace de* F*)*

Théorème 4 (Théorème du rang)**.**

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im}\, f)$$



3.3 Matrices et opérations

Définition 14 (Matrice)**.** *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres qui représente une application linéaire.*

Définition 15 (Matrice associée)**.** *Toute application linéaire* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *admet une matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$f(\vec{X}) = A\vec{X}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

n colonnes
m lignes

$$\downarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.4 Systèmes d'équations

Définition 16 (Système linéaire)**.** *Un système de m équations à n inconnues :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

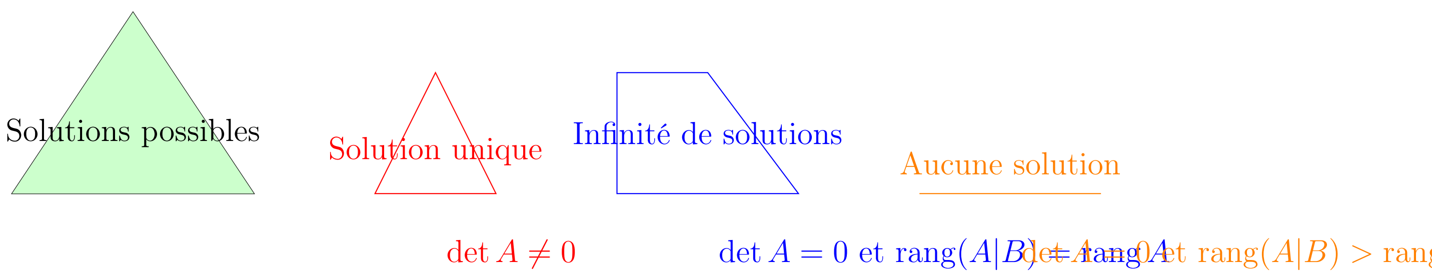
3.5 Déterminants

Définition 17 (Déterminant)**.** *Application multilinéaire alternée :*

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

Mesure du volume orienté et critère d'inversibilité :

$$\det A \neq 0 \iff A \textit{ inversible}$$



3.6 Diagonalisation

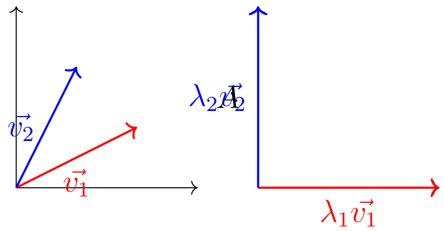
Définition 18 (Vecteur propre)**.** $\vec{v} \neq \vec{0}$ *est vecteur propre de A si :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

λ est la valeur propre associée.

Théorème 5 (Diagonalisation)**.** *A diagonalisable $\iff$ $\mathbb{R}^n$ base de V.P.*

$$A = PDP^{-1} \textit{ avec } D \textit{ diagonale}$$



Conclusion

Ce document exhaustif couvre l'ensemble des notions d'arithmétique et d'algèbre linéaire au programme du baccalauréat, incluant les structures algébriques fondamentales. La combinaison de définitions précises, de théorèmes essentiels et de visualisations graphiques offre une ressource complète pour la révision. Une maîtrise approfondie de ces concepts nécessite une pratique régulière d'exercices variés.