cartesius.png

Cours complet sur les nombres complexes

Niveau Baccalauréat Scientifique

Koudaya Kossi Boris
SCIENCES UNIVERS

Introduction historique

Les nombres complexes sont apparus au XVI^{e} siècle pour résoudre des équations polynomiales qui n'avaient pas de solutions réelles. Le mathématicien **René Descartes** les qualifia de "**nombres imaginaires**" car ils semblaient ne pas exister dans la nature.

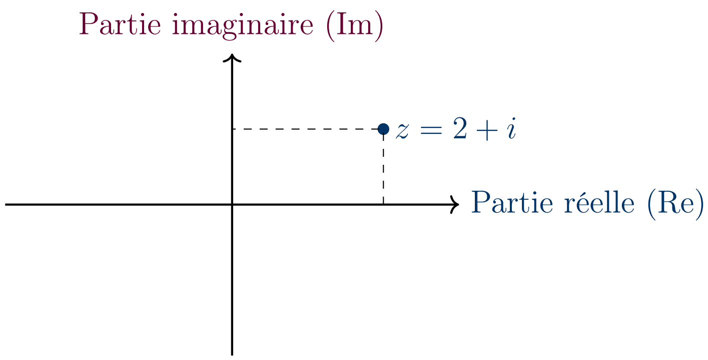
1. Définition et notation

Un **nombre complexe** z s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib$$

où :

— a et b sont des nombres réels
— i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$



2. Opérations sur les nombres complexes

Addition et soustraction

Pour $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$
$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

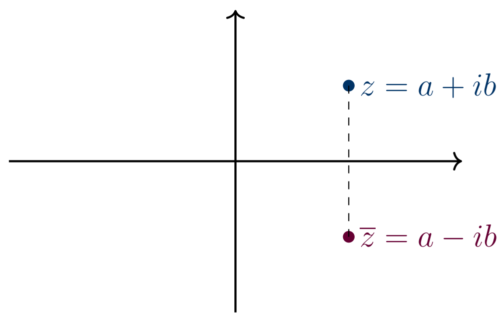
Multiplication

$$z_1 \times z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Exemple : $(1 + 2i)(3 - 4i) = 3 - 4i + 6i - 8i^2 = 11 + 2i$

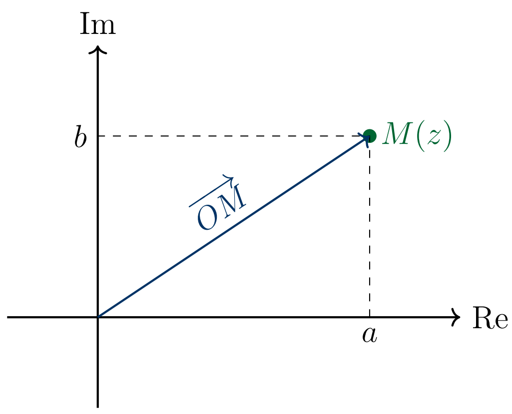
Conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$.



3. Représentation géométrique

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté par un point M dans le plan complexe (ou plan d'Argand) de coordonnées (a, b).



4. Module et argument

Module

Le module de $z = a + ib$ est noté $|z|$ et vaut :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

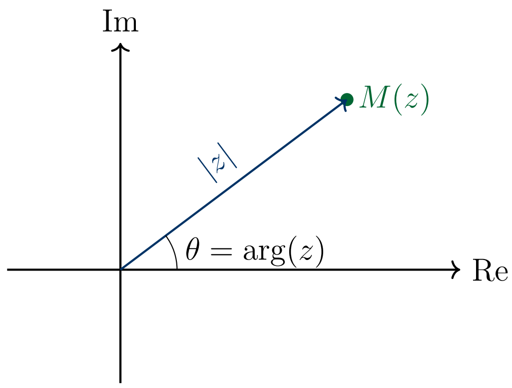
C'est la distance entre l'origine et le point M dans le plan complexe.

Argument

L'argument de $z \neq 0$ est noté $\arg(z)$ et est l'angle :

$$\theta = \arg(z) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$$

mesuré en radians.



5. Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous forme trigonométrique :

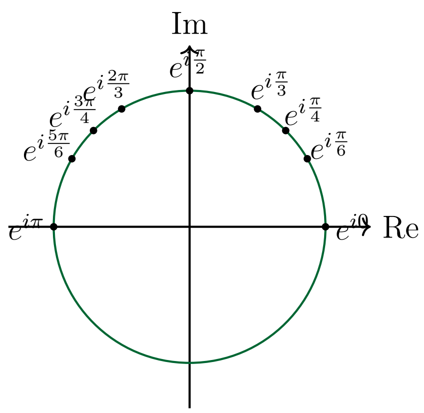
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
Exemple : $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6. Forme exponentielle

En utilisant la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, on obtient la forme exponentielle :

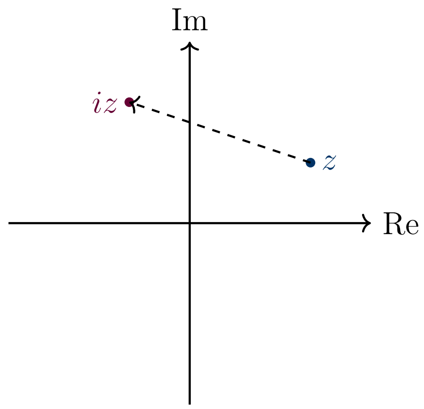
$$z = re^{i\theta}$$



7. Applications géométriques

Transformations

— Multiplication par i : rotation de $\frac{\pi}{2}$
— Multiplication par $re^{i\theta}$: homothétie de rapport r et rotation d'angle θ



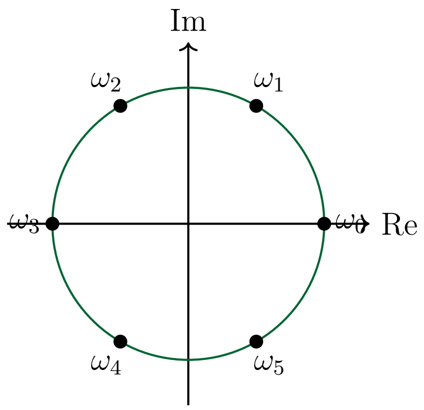
Équations de cercles et droites

— Cercle de centre z_0 et rayon R : $|z - z_0| = R$
— Droite passant par z_1 et z_2 : $\arg\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0\ [\pi]$

8. Racines n-ièmes de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont :

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, ..., n-1$$



Racines 6-ièmes de l'unité

Conclusion

Les nombres complexes sont un outil puissant en mathématiques et en physique. Ils permettent de :

— Résoudre toutes les équations polynomiales
— Simplifier les calculs trigonométriques
— Modéliser des phénomènes physiques (électricité, mécanique quantique)

À retenir :
1. $i^2 = -1$
2. Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle
3. Interprétation géométrique avec module et argument
4. Applications en géométrie et en sciences physiques