Problèmes de Synthèse : Limites et Continuité
Corrigés Complets

Baccalauréat Scientifique
Koudaya Kossi Boris

Problème 1 : Étude complète d'une fonction rationnelle - Corrigé

Rappel de cours 1. *Pour une fonction rationnelle* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *:*

- *Le domaine est* $\mathbb{R}$ *privé des racines de* $Q(x)$
- *Les limites à l'infini se calculent en comparant les degrés*
- *Les asymptotes verticales correspondent aux racines du dénominateur*

1. Domaine de définition

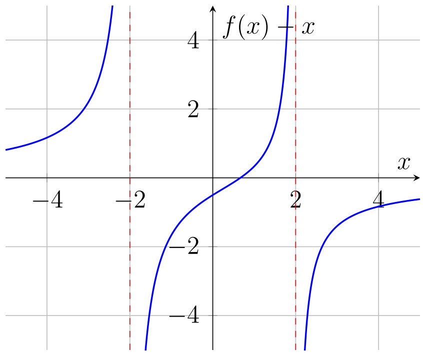
1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ car $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$.
2. Factorisation :

$$\text{Numérateur : } x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$
$$\text{Dénominateur : } x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

2. Limites et asymptotes

1. Limites :
   - En 2 : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} = \begin{cases} +\infty & x > 2 \\ -\infty & x < 2 \end{cases}$
   - En -2 : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \frac{(-3)^2}{-4} = -\frac{9}{4}$
   - En $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty$
2. Asymptotes :
   - Asymptote verticale en $x = 2$
   - Asymptote oblique $y = x$ (car $f(x) - x \to 0$)
3. Position relative :

$$f(x) - x = \frac{-3x+2}{x^2-4}$$



3. Continuité et prolongement

1. Continue sur $\mathcal{D}_f$
2. Prolongement en $x = -2$: $f(-2) = -\frac{9}{4}$
3. Dérivabilité en -2 :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2-4x+7)}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{57}{16}$$

4. Théorème des valeurs intermédiaires

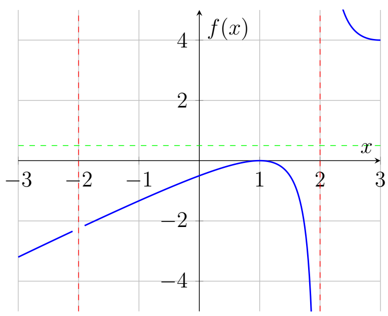
1. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 6 = 0$
   Solutions : $x \approx -1.5$, $x = 1$, $x \approx 2.5$ (3 solutions)
2. Sur $]2, +\infty[$: solution dans $]2.5, 2.51[$ ($f(2.5) < 1$, $f(2.51) > 1$)

5. Bijection réciproque

1. f strictement croissante sur $]-2, 0[$ de $f(-2^+) = +\infty$ à $f(0) = -\frac{1}{2}$
   Bijection sur $J =]-\frac{1}{2}, +\infty[$
2. f^{-1} dérivable sur J et :

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1/2))}$$

   Trouver x tel que $f(x) = \frac{1}{2}$: $x \approx -1$ puis calculer $f'(-1) = \cdots$



Problème 2 : Fonction avec paramètres et exponentielle - Corrigé

Rappel de cours 2. *Continuité en a :* $\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$

Dérivabilité : existence de $\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$

1. Continuité en 0

1. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} ae^{-1/x^2} = 0$
   $\lim_{x\to 0^-} g(x) = b\cdot 0 + c = c$
   $g(0) = c$
   Pour continuité : $c = 0$
2. Si $c = 0$, alors g continue partout

2. Dérivabilité en 0

1. Taux d'accroissement :
   $\frac{g(h)-g(0)}{h} = \begin{cases} \frac{ae^{-1/h^2}}{h} & h > 0 \\ b & h < 0 \end{cases}$
2. Si dérivable : $\lim_{h\to 0^+} \frac{ae^{-1/h^2}}{h} = 0$ et $b = 0$

3. Étude pour $b = c = 0, a = 1$

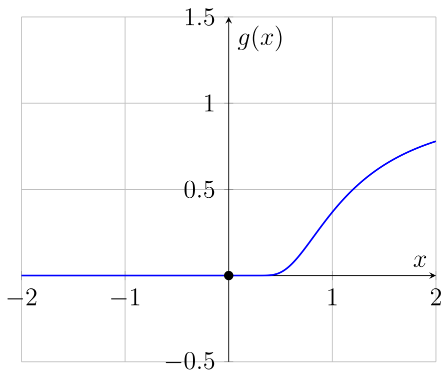
1. $g'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$
2. Par récurrence : $g^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$ où P_n polynôme
3. $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout n

4. Théorème de la bijection

1. g strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $g'(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et continue en 0) Bijection sur $]0, 1[$
2. g^{-1} continue et dérivable sur $]0, 1[$

5. Limites

1. $\lim_{x\to+\infty} x^5e^{-1/x^2} = +\infty \cdot 1 = +\infty$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0$ par croissances comparées



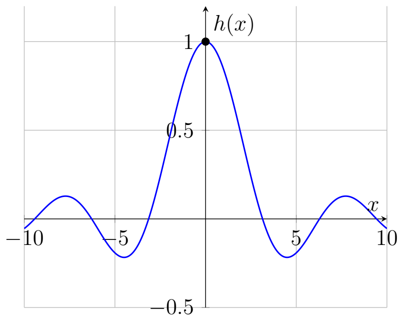
Problème 3 : Fonction trigonométrique - Corrigé

1. Continuité et dérivabilité

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = h(0)$ donc continue
2. Dérivée en 0 : $\lim_{h\to 0} \frac{h(h)-h(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = 0$

2. Variations et extremums

1. $h'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
2. Signe de h' : positif sur $[0, \pi]$, négatif sur $[\pi, 2\pi]$
3. Maximum en $x = 0$ ($h(0) = 1$), minimum en $x = \pi$ ($h(\pi) = 0$)



3. Intégrale et aire

1. H bien définie car h continue
2. $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet)
3. $|H(x)| \leq \int_0^x |h(t)|dt \leq \int_0^x dt = x$ mais meilleure borne : $|H(x)| \leq 2$

4. Équation fonctionnelle

1. Si périodique de période T, alors $h(T) = h(0) = 1$ mais $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, contradiction
2. $h(x) = h(2x) \iff \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 2x}{2x} \iff 2\sin x = \sin 2x = 2\sin x\cos x$
   Solutions : $\cos x = 1$ ou $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

5. Théorème de Rolle

1. $h'(x) = 0 \iff x\cos x = \sin x \iff \tan x = x$ (infinies solutions)
2. Appliquer Rolle à $\varphi(x) = xh(x) = \sin x$ sur $[k\pi, (k+1/2)\pi]$

Problème 4 : Fonction avec valeur absolue - Corrigé

1. Domaine et expression

1. $\mathcal{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
2. $k(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-2} & x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ \frac{1-x^2}{x-2} & x \in]-1, 1[\end{cases}$

2. Limites et continuité

1. Limites en 2 : $\pm\infty$, en $\pm\infty$: $\pm\infty$
2. Continue sur $\mathcal{D}_k$
3. Non prolongeable en $x = 2$ (limite infinie)

3. Asymptotes

— Asymptote verticale en $x = 2$

— Asymptote oblique $y = x + 2$ (après division)

4. Dérivabilité

1. En $x = 1$: dérivées à gauche et à droite différentes
2. $k'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} & |x| > 1 \\ \frac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2} & |x| < 1 \end{cases}$

5. TVI généralisé

1. Sur $]-\infty, -1[$, k strictement croissante de $-\infty$ à $k(-1) = 0$
   Bijection sur $]-\infty, 0[$
2. Pour $m > 0$, toujours au moins une solution (limite $+\infty$ en $+\infty$)
3. Trois solutions quand $m > k(1) = 0$

6. Fonction composée

1. $m(x) = k(e^x)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} m(x) = \lim\limits_{t\to 0} k(t) = \frac{1}{2}$
3. Continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$