# Chapitre 1 : Éléments de logique

KOUDAYA KOSSI BORIS
SCIENCES UNIVERS

# Table des matières

# Chapitre 1 : Éléments de logique

## Sommaire



## 0.1 I Notions ensemblistes

### 0.1.1 1) Vocabulaire lié aux ensembles

**Définition 1** (1.1)**.** *Un ensemble $E$ est une collection d'objets*[1]*, ceux-ci sont appelés éléments de $E$. Si $x$ est un élément de $E$ on écrira $x \in E$ (se lit « $x$ appartient à $E$»), dans le cas contraire on écrira $x \notin E$. Si $E$ n'a pas d'éléments on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera $\varnothing$. Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments, on écrira alors $E = F$.*

**Exemple 1.**
- *Les ensembles de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*
- *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*
- *Ensembles définis en extension : $E = \{1; 8; 6; 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois)*
- *Ensembles définis en compréhension : $E = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est impair}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$*

**Remarque 1.** *L'écriture $E = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est impair}\}$ ne signifie pas que $E$ contient un seul élément qui s'appelle $p$, mais que $E$ est l'ensemble de tous les entiers naturels impairs.*

**Définition 2** (1.2)**.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles :*
- ***L'inclusion*** *: $A \subset B$ si tous les éléments de $A$ sont dans $B$*
- ***Ensemble des parties*** *: $\mathcal{P}(B)$ est l'ensemble des parties de $B$*
- ***Réunion*** *: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$*
- ***Intersection*** *: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$*
- ***Différence*** *: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$*
- ***Complémentaire*** *: Si $A \subset B$, $C_B(A) = B \setminus A$*
- ***Produit cartésien*** *: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$*

**Exercice 1** (1.1)**.** *Décrire $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$.*

**Remarque 2** (1.1)**.**
- *$A = B \iff (A \subset B)$ et $(B \subset A)$*
- *Produit cartésien généralisé : $E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}$*
- *$E^n = E \times \cdots \times E$ ($n$ fois)*

1. Cependant toute collection d'objets ne constitue pas forcément un ensemble. Par exemple, le paradoxe de Bertrand Russel a montré que l'ensemble des ensembles ne peut pas exister.

### 0.1.2 2) Propriétés

**Théorème 1** (1.1). *Soient $A, B, C$ trois ensembles :*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**Théorème 2** (1.2). *Si $A, B \subset E$ :*

$$\begin{aligned} A \cup C_E(A) &= E \\ C_E(E) &= \varnothing, \quad C_E(\varnothing) = E \\ C_E(C_E(A)) &= A \\ C_E(A \cup B) &= C_E(A) \cap C_E(B) \quad \textit{(loi de De Morgan)} \\ C_E(A \cap B) &= C_E(A) \cup C_E(B) \quad \textit{(loi de De Morgan)} \end{aligned}$$

## 0.2 II Notions de logique

### 0.2.1 1) Propositions

**Définition 3** (1.3). *Une proposition est une phrase mathématique qui est soit vraie (V) soit fausse (F). On note $\neg P$ la négation de $P$.*

**Exemple 2.** — *« 2 est pair » : V*

— *« 3 est pair » : F*

— *« $n$ est pair » : prédicat (dépend de $n$)*

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

### 0.2.2 2) Connecteurs logiques

**Définition 4** (1.4). *Soient $P$ et $Q$ deux propositions :*

— *Conjonction $P \wedge Q$ : V si les deux sont V*

— *Disjonction $P \vee Q$ : V si au moins une est V*

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

**Définition 5** (1.5). *Soient $P$ et $Q$ deux propositions :*

— *Implication $P \implies Q$ : F seulement si $P$ V et $Q$ F*

— *Équivalence $P \iff Q$ : V si même valeur de vérité*

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ | $P \iff Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | F |
| F | F | V | V |

**Définition 6** (1.6). — *Si $P \implies Q$ vraie : « $P$ implique $Q$ »*

— *Si $P \iff Q$ vraie : « $P$ équivaut à $Q$ »*

### 0.2.3 3) Propriétés

**Théorème 3** (1.3). — $\neg\neg P \iff P$
- — $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
- — $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- — $P \implies Q \iff (\neg P) \vee Q$
- — $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge (\neg Q)$
- — $P \iff Q \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$
- — $P \iff Q \iff (\neg P) \iff (\neg Q)$

**Exercice 2** (1.2). *Démontrer que* $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge (\neg Q)$.

**Définition 7** (1.7). *Soit* $P \implies Q$ *:*
- — *Réciproque :* $Q \implies P$
- — *Contraposée :* $(\neg Q) \implies (\neg P)$

**Théorème 4** (1.4). — $P \implies Q \iff (\neg Q) \implies (\neg P)$
- — $P \iff Q \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$

### 0.2.4 4) Quantificateurs

- — Universel : $\forall x \in E, P(x)$
- — Existentiel : $\exists x \in E, P(x)$
- — Existentiel unique : $\exists! x \in E, P(x)$

**Remarque 3.** — $\neg(\forall x, P(x)) \iff \exists x, \neg P(x)$
- — $\neg(\exists x, P(x)) \iff \forall x, \neg P(x)$
- — *L'ordre des quantificateurs est important*

**Exercice 3** (1.3). *1. Traduire : « la suite* $(u_n)$ *est majorée » et sa négation*

*2. Traduire :*

*(a)* $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$

*(b)* $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y \leq x$

### 0.2.5 5) Retour sur les ensembles

- — $A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- — $A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- — $C_E(A) = \{x \in E \mid \neg(x \in A)\}$
- — $A \setminus B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$
- — $A \subset B \iff \forall x \in E, (x \in A) \implies (x \in B)$
- — $A = B \iff \forall x \in E, (x \in A) \iff (x \in B)$

**Exercice 4** (1.4). *Démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2.*

## 0.3 III Le raisonnement

### 0.3.1 1) Raisonnement par l'absurde

Supposer $\neg P$ et aboutir à une contradiction.

### 0.3.2 2) Raisonnement par analyse-synthèse

1. Analyse : supposer une solution et déduire ses propriétés
2. Synthèse : vérifier quels objets satisfont ces propriétés

### 0.3.3 3) Démontrer une implication

— Méthode directe : supposer $P$ vraie et montrer $Q$

— Par l'absurde : supposer $P \wedge \neg Q$ et aboutir à contradiction

— Par contraposition : montrer $\neg Q \implies \neg P$

### 0.3.4 4) L'équivalence

— Par double implication : $P \implies Q$ et $Q \implies P$

— Méthode directe : transformations équivalentes

### 0.3.5 5) La récurrence

**Théorème 5** (1.5). *Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$ :*

— *Initialisation : $P(0)$*

— *Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$*

— *Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$*

**Théorème 6** (1.6 (récurrence forte)). — *Initialisation : $P(0)$*

— *Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, [P(0) \wedge \cdots \wedge P(n)] \implies P(n+1)$*

— *Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$*

**Exercice 5** (1.5). *Montrer par récurrence :*

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**Exercice 6** (1.6). *Soit $(u_n)$ la suite de Fibonacci ($u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$), montrer que :*

$$u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

## 0.4 IV Solution des exercices

*Solution 1.1.*

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

□

*Solution 1.2.*

$$\neg(P \implies Q) \iff \neg(\neg P \vee Q) \iff (\neg\neg P) \wedge (\neg Q) \iff P \wedge \neg Q$$

□

*Solution 1.3.* 1. « $(u_n)$ majorée » : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

2. Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$
3. (a) « L'ensemble $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément » (faux)
   (b) « L'ensemble $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément » (vrai)

$\square$

*Solution 1.4.* Tables de vérité à compléter (voir document original) $\square$

*Solution 1.5.* Récurrence standard (voir document original) $\square$

*Solution 1.6.* Récurrence forte avec initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$ $\square$