

Chapitre 2 : Nombres complexes

KOUDAYA KOSSI BORIS
SCIENCES UNIVERS

2025

Table des matières

Chapitre 2 : Nombres complexes	5
0.1 I Écriture algébrique	5
0.1.1 1) L'ensemble des complexes	5
0.1.2 2) Partie réelle, partie imaginaire	5
0.1.3 3) Conjugué d'un nombre complexe	6
0.2 II Module d'un nombre complexe	6
0.2.1 1) Définition	6
0.2.2 2) Équation du second degré	7
0.3 III Forme trigonométrique	8
0.3.1 1) Le groupe unité	8
0.3.2 2) Exponentielle d'un imaginaire pur	8
0.3.3 3) Argument d'un nombre complexe	9
0.3.4 4) Racines n -ièmes d'un nombre complexe	10
0.4 IV Exponentielle complexe	11
0.4.1 1) Définition	11
0.4.2 2) Formules d'Euler et de Moivre	12
0.5 V Représentation géométrique des complexes, applications	12
0.5.1 1) Affixe	13
0.5.2 2) Distances	13
0.5.3 3) Angles orientés	14
0.5.4 4) Similitudes directes	14
0.6 VI Solution des exercices	15

Chapitre 2 : Nombres complexes

Sommaire

- I. Écriture algébrique
- II. Module d'un nombre complexe
- III. Forme trigonométrique
- IV. Exponentielle complexe
- V. Représentation géométrique des complexes, applications
- VI. Solution des exercices

On suppose connu l'ensemble \mathbb{R} des réels, les propriétés de ses deux opérations que sont l'addition et la multiplication, et la notion de valeur absolue d'un réel.

0.1 I Écriture algébrique

0.1.1 1) L'ensemble des complexes

On admet l'existence d'un ensemble, que l'on notera \mathbb{C} , contenant \mathbb{R} et tel que :

- \mathbb{C} possède une addition et une multiplication, **prolongeant celles** de \mathbb{R} et vérifiant les mêmes propriétés, c'est-à-dire :
 - L'addition est interne ($\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' \in \mathbb{C}$), commutative ($\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$), associative ($\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$), 0 est élément neutre ($\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z$), chaque complexe admet un opposé dans \mathbb{C} (l'opposé de $z \in \mathbb{C}$ est noté $-z$).
 - La multiplication est interne ($\forall z, z' \in \mathbb{C}, zz' \in \mathbb{C}$), commutative ($\forall z, z' \in \mathbb{C}, zz' = z'z$), associative ($\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'')$), 1 est élément neutre ($\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z$), chaque complexe **autre que** 0 admet un inverse dans \mathbb{C} (l'inverse de $z \in \mathbb{C}$ est noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$).
 - La multiplication est distributive sur l'addition à gauche et à droite ($\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''$, et $(z' + z'')z = z'z + z''z$).

On résume toutes ses propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

- Il existe un complexe, que l'on notera i , qui vérifie $i^2 = -1$.

Exercice 1. 1/ Montrer que si $z \in \mathbb{C}$, alors $z \times 0 = 0 \times z = 0$.
2/ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $zz' = 0$, montrer que $z = 0$ ou $z' = 0$.

0.1.2 2) Partie réelle, partie imaginaire

Définition 1 (2.1). Soit $z \in \mathbb{C}$, on sait qu'il existe un réel a unique et un réel b unique tel que $z = a + ib$. Le réel a est appelé *partie réelle* de z , notée $a = \operatorname{Re}(z)$, et b la *partie imaginaire* de z , notée $b = \operatorname{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* de z . L'ensemble des complexes dont la partie réelle est nulle, est appelé *ensemble des imaginaires purs* et noté $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

À retenir : quelques propriétés

- a) $z = z' \implies \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$
- b) $z \in \mathbb{R} \implies \operatorname{Im}(z) = 0$
- c) $z \in i\mathbb{R} \implies \operatorname{Re}(z) = 0$
- d) $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$
- e) Si α est un réel, alors $\operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re}(z)$, et $\operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im}(z)$

Exercice 2 (2.2). 1/ Démontrer les propriétés ci-dessus.
2/ Déterminer la forme algébrique du produit zz' .

Attention ! La dernière propriété est fausse lorsque α n'est pas réel.

0.1.3 3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2 (2.2). Soit $z = x + iy$ un complexe sous forme algébrique, on appelle conjugué de z , le complexe noté \bar{z} et défini par $\bar{z} = x - iy$. On a donc $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Théorème 1 (2.1 (propriétés de la conjugaison)). Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $\overline{\bar{z}} = z$

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice.

À retenir

- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \implies z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

0.2 II Module d'un nombre complexe**0.2.1 1) Définition**

Soit $z = x + iy$ un complexe sous forme algébrique, on a $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ et cette quantité est un réel positif.

Définition 3 (2.3). Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de z , le réel positif noté $|z|$ et défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

À retenir : propriétés du module

- a) $|z|^2 = z\bar{z}$
- b) $|z| = 0 \iff z = 0$
- c) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- d) Si z est réel, alors son module coïncide avec sa valeur absolue
- e) $|zz'| = |z||z'|$, en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$ (ceci reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$)
- f) $|z| = |\bar{z}|$ et $|-z| = |z|$
- g) Pour mettre le complexe $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, il suffit de multiplier en haut et en bas par \bar{z}' :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{|z'|^2} = \frac{\operatorname{Re}(z\bar{z}')}{|z'|^2} + i \frac{\operatorname{Im}(z\bar{z}')}{|z'|^2}$$

Théorème 2 (2.2 (inégalité triangulaire)). Soient z et z' deux complexes : $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Preuve : Pour l'inégalité de droite :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{z}')| \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque les deux expressions sont des réels positifs.

Pour l'inégalité de gauche, on écrit $|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'|$ d'où $|z| - |z'| \leq |z + z'|$, en inversant les rôles on a $|z'| - |z| \leq |z + z'|$, ce qui entraîne la première inégalité. \square

Remarque 1 (2.1). En remplaçant z' par $-z'$, on a $||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$.

Théorème 3 (2.3 (cas d'égalité)). Soient z et z' deux complexes non nuls, $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si il existe un réel α strictement positif tel que $z = \alpha z'$.

Preuve : Si on a $z = \alpha z'$, alors $|z + z'| = |\alpha z' + z'| = |(1 + \alpha)z'| = (1 + \alpha)|z'| = |z'| + \alpha|z'| = |z'| + |z|$. Réciproquement, si $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors $|z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$, ce qui donne en développant, $|z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$, on en déduit que $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z||z'|$ ce qui prouve que $z\bar{z}'$ est un réel positif. Il suffit alors de prendre $\alpha = \frac{z\bar{z}'}{|z|^2}$, c'est bien un réel strictement positif, et on a la relation voulue. \square

0.2.2 2) Équation du second degré

Théorème 4 (2.4). Soit $a \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = a$ admet dans \mathbb{C} deux solutions opposées (toutes deux nulles lorsque $a = 0$).

Preuve : Il reste à montrer l'existence d'une solution z_0 . Posons $a = u + iv$ et $z = x + iy$, l'équation $z^2 = a$ est équivalente à $x^2 - y^2 = u$ et $2xy = v$. On doit avoir également $|z|^2 = |a|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = |a|$, par conséquent on a :

$$x^2 = \frac{|a| + u}{2}, \quad y^2 = \frac{|a| - u}{2}, \quad 2xy = v$$

Une solution $z_0 = x_0 + iy_0$ s'obtient en prenant : $x_0 = \sqrt{\frac{|a| + u}{2}}$, et $y_0 = \varepsilon \sqrt{\frac{|a| - u}{2}}$ avec $\varepsilon = 1$ si $v > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $v < 0$, car on a $2x_0y_0 = \varepsilon|v| = v$. \square

Exemple 1. — Si a est un réel strictement positif, alors $v = 0$ et $u > 0$ d'où $|a| = u$ et donc $x_0 = \sqrt{a}$ et $y_0 = 0$, les deux solutions sont $\pm\sqrt{a}$, elles sont réelles.

— Si a est un réel strictement négatif, alors $v = 0$ et $u < 0$ d'où $|a| = -u$ et donc $x_0 = 0$ et $y_0 = \sqrt{-a}$, les deux solutions sont $\pm i\sqrt{-a}$, ce sont des imaginaires purs.

Théorème 5 (2.5). Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes qui sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

avec $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant). De plus, lorsque les coefficients a, b, c sont réels et que le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement négatif, ces deux solutions sont complexes non réelles et conjuguées.

Preuve : L'équation est équivalente à :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Posons $Z = z + \frac{b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$, on sait que Δ admet deux racines carrées dans \mathbb{C} , soit δ l'une d'elles ($\delta^2 = \Delta$), l'équation est équivalente à : $Z^2 = \frac{\delta^2}{4a^2}$, on en déduit que $Z = \pm \frac{\delta}{2a}$ et donc $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$. Lorsque les trois coefficients sont réels, le discriminant Δ est lui aussi un réel, s'il est strictement négatif, alors on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et les solutions sont dans ce cas $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, on voit que celles-ci sont complexes non réelles et conjuguées. \square

À retenir : somme et produit de racines d'une équation du second degré

- Si z_1 et z_2 sont racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on a les relations : $z_1 + z_2 = S = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = P = \frac{c}{a}$.
- De plus on a la factorisation : $\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

0.3 III Forme trigonométrique

0.3.1 1) Le groupe unité

Définition 4 (2.4). On note \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, c'est une partie de \mathbb{C}^* .

Il est facile de vérifier que l'ensemble \mathbb{U} :

- est stable pour la multiplication : $\forall z, z' \in \mathbb{U}, zz' \in \mathbb{U}$
- est stable pour le passage à l'inverse : $\forall z \in \mathbb{U}, z \neq 0$ et $z^{-1} \in \mathbb{U}$
- contient 1

De plus, la multiplication dans \mathbb{U} est associative (car elle l'est dans \mathbb{C}), on dit alors que (\mathbb{U}, \times) est un **groupe multiplicatif**. Comme la multiplication est en plus commutative, on dit que (\mathbb{U}, \times) est un groupe **abélien** (ou commutatif), ce groupe est parfois appelé groupe unité de \mathbb{C} .

Théorème 6 (2.6). Tout complexe de module 1 peut se mettre sous la forme $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ avec θ un réel, plus précisément :

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i \sin(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve : Soit $z = x + iy$ un complexe de module 1, on a $x^2 + y^2 = 1$, donc il existe un réel θ (unique à 2π près) tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$, c'est-à-dire $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. La réciproque est immédiate. \square

0.3.2 2) Exponentielle d'un imaginaire pur

Pour tout réel x , on pose $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. On a les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$ et $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x) = \overline{e^{ix}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$, donc $e^{ix} \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = z$
- Soit $x, y \in \mathbb{R}, e^{ix} = e^{iy} \iff \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases} \iff x = y + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Théorème 7 (2.7). $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= [\cos(x)+i\sin(x)][\cos(y)+i\sin(y)] = [\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)]+i[\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)] \\ &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} \end{aligned}$$

d'après les formules d'addition du sinus et du cosinus. \square

Ce théorème permet de retrouver les formules trigonométriques.

À retenir

- $\cos(x+y) = \operatorname{Re}(e^{i(x+y)}) = \operatorname{Re}(e^{ix}e^{iy}) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \operatorname{Im}(e^{i(x+y)}) = \operatorname{Im}(e^{ix}e^{iy}) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

En posant $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$ on obtient :

- $\cos(x) + \cos(y) = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, donc

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

- $\cos(x) - \cos(y) = \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$, donc

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

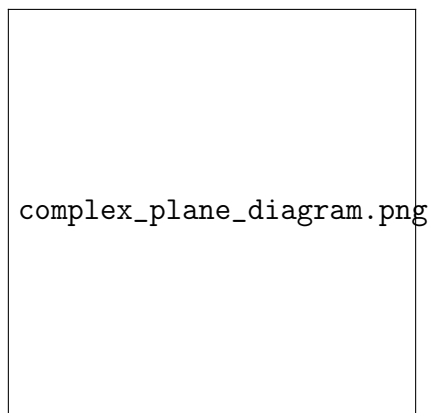
- $\sin(x) + \sin(y) = \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$, donc

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

0.3.3 3) Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{U}$, on sait qu'il existe un réel θ (unique à 2π près) tel que $z = e^{i\theta}$. Si maintenant z est un complexe non nul quelconque alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et donc il existe un réel θ (unique à 2π près) tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = |z|e^{i\theta}$.

Définition 5 (2.5). Soit z un complexe non nul, on appelle argument de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$, cette égalité est appelée forme trigonométrique de z . L'ensemble des arguments de z est noté $\arg(z)$, on a donc $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\theta}\}$, et si θ_0 est un argument de z , alors $\arg(z) = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



Définition 6 (2.6). Soit $z \in \mathbb{C}^*$, z possède un unique argument dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$, par définition cet argument est appelé argument principal de z et noté $\operatorname{Arg}(z)$.

Exemple 2. — $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$

- si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\operatorname{Arg}(x) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $\operatorname{Arg}(x) = \pi$

Attention ! Si $z = re^{i\theta}$ avec r et θ réels, alors c'est la forme trigonométrique de z lorsque $r > 0$. Mais lorsque $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $z = -re^{i(\theta+\pi)}$.

À retenir : factorisation par l'arc moitié

— Si $z = e^{ix} + e^{iy}$, alors

$$z = e^{i\frac{x+y}{2}} \left[e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}} \right] = 2 \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) e^{i\frac{x+y}{2}}$$

D'où $|z| = 2 \left| \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \right|$ et $\text{Arg}(z) = \frac{x+y}{2} \pmod{\pi}$.

— Si $z = e^{ix} - e^{iy}$, alors

$$z = e^{i\frac{x+y}{2}} \left[e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}} \right] = 2i \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) e^{i\frac{x+y}{2}}$$

D'où $|z| = 2 \left| \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \right|$ et $\text{Arg}(z) = \frac{x+y+\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Théorème 8 (2.8 (propriétés)). Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta = \text{Arg}(z)$ et $\theta' = \text{Arg}(z')$:

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \end{cases}$$

- $z \in \mathbb{R}^* \implies \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$
- $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$ donc $\text{Arg}(\bar{z}) \equiv -\theta \pmod{2\pi}$
- $-z = |z|e^{i(\theta+\pi)}$ donc $\text{Arg}(-z) \equiv \theta + \pi \pmod{2\pi}$
- $zz' = |zz'|e^{i(\theta+\theta')}$ donc $\text{Arg}(zz') \equiv \theta + \theta' \pmod{2\pi}$
- $\frac{z}{z'} = \left| \frac{z}{z'} \right| e^{i(\theta-\theta')}$ donc $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \theta - \theta' \pmod{2\pi}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, z^n = |z^n|e^{in\theta}$ donc $\text{Arg}(z^n) \equiv n\theta \pmod{2\pi}$

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice.

À retenir

Soient a, b deux réels non tous deux nuls et soit $x \in \mathbb{R}$, en posant $z = a + ib = |z|e^{i\theta}$ on obtient :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \text{Re}(ze^{ix}) = |z| \cos(x - \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$$

0.3.4 4) Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 7 (2.7). Soit a, z deux complexes et $n \in \mathbb{N}$, z est une racine n -ième de a lorsque $z^n = a$.

Cas particuliers des racines n -ièmes de l'unité

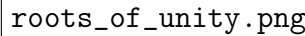
Définition 8 (2.8). Soit n un entier supérieur ou égal à deux, l'équation $z^n = 1$ possède exactement n solutions qui sont les complexes $e^{2ik\pi/n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. On note \mathbb{U}_n l'ensemble de ces solutions (appelées racines n -ièmes de l'unité), on a donc :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{U} \mid z^n = 1\} = \{e^{2ik\pi/n} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

Preuve : Résolution trigonométrique : on pose $z = re^{i\theta}$ avec r réel positif et $\theta \in [0; 2\pi[$, alors $z^n = r^n e^{in\theta}$, donc $z^n = 1$ si et seulement si $r^n = 1$ (égalité des modules) et $n\theta = 0 + 2k\pi$ (égalité des arguments avec k entier), ce qui équivaut encore à $r = 1$ (r étant réel positif) et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. Le choix de l'intervalle $[0; 2\pi[$ pour l'argument θ entraîne que l'entier k est dans l'intervalle $[0; n-1]$, donc $z^n = 1 \implies \exists k \in [0; n-1], z = e^{2ik\pi/n}$, cela fait exactement n solutions distinctes (car tout complexe non nul possède un unique argument dans l'intervalle $[0; 2\pi[$). \square

Exercice 3 (2.4). 1/ Décrire $\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$.

2/ Montrer que (\mathbb{U}_n, \times) est un groupe commutatif (résultat important à connaître).



roots_of_unity.png

Cas général : résolution de l'équation $z^n = a$ ($a \neq 0$)

Considérons la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta_0}$, il est facile de voir alors que le complexe $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta_0/n}$ est une solution particulière de l'équation $z^n = a$, par conséquent, comme $z_0 \neq 0$, on a :

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$

On est ainsi ramené aux racines n -ièmes de l'unité, on en déduit que $z = z_0 e^{i2k\pi/n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, d'où :

$$z^n = a \iff z = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}} \quad \text{avec } 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{et } \theta_0 = \text{Arg}(a) \pmod{2\pi}$$

Tout complexe non nul a donc exactement n racines n -ièmes distinctes.

0.4 IV Exponentielle complexe

0.4.1 1) Définition

Définition 9 (2.9). Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle exponentielle de z le complexe noté $\exp(z)$ et défini par :

$$\exp(z) = e^x [\cos(y) + i \sin(y)],$$

c'est-à-dire $\exp(z) = e^x e^{iy}$ (forme trigonométrique).

Remarque 2 (2.2). — Si z est réel ($y = 0$), alors l'exponentielle de z correspond à l'exponentielle réelle de z . De même, si z est imaginaire pur ($x = 0$), alors $\exp(z) = \exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y)$.

- $\exp(0) = 1$
- $\text{Re}(\exp(z)) = e^{\text{Re}(z)} \cos(\text{Im}(z))$ et $\text{Im}(\exp(z)) = e^{\text{Re}(z)} \sin(\text{Im}(z))$
- $|\exp(z)| = e^{\text{Re}(z)}$ et $\text{Arg}(\exp(z)) \equiv \text{Im}(z) \pmod{2\pi}$
- $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

Théorème 9 (2.9 (propriété fondamentale)). La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est $2i\pi$ -périodique, vérifie :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z').$$

Et tout complexe non nul a , il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $a = \exp(z)$.

Preuve : Il est clair d'après la définition que $\exp(z)$ ne peut pas être nul, donc $\exp(z) \in \mathbb{C}^*$. Posons $z = x + iy$,

$$\exp(z + 2i\pi) = e^x [\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)] = \exp(z).$$

Soit a un complexe non nul, l'équation $\exp(z) = a$ équivaut à $|a| = e^x$ et $\text{Arg}(a) \equiv y \pmod{2\pi}$ (résolution trigonométrique), donc les complexes $z = \ln(|a|) + i(y + 2k\pi)$ (où k parcourt \mathbb{Z}) sont

les antécédents de a , en particulier les solutions de l'équation $\exp(z) = 1$ sont les complexes $z = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$. Soit $z' = x' + iy'$ un autre complexe,

$$\exp(z + z') = e^{x+x'}[\cos(y + y') + i \sin(y + y')],$$

et

$$\exp(z) \exp(z') = e^{x+x'}[\cos(y) \cos(y') - \sin(y) \sin(y') + i(\cos(y) \sin(y') + \sin(y) \cos(y'))] = e^{x+x'}[\cos(y+y') + i \sin(y+y')]$$

On peut déduire de cette propriété le calcul suivant :

$$\exp(z) = \exp(z') \iff \frac{\exp(z)}{\exp(z')} = 1 \iff \exp(z) \exp(-z') = 1 \iff \exp(z - z') = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$$

□

Remarque 3 (2.3). La propriété fondamentale de l'exponentielle complexe : $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$, est la même que celle de l'exponentielle réelle. On convient alors de noter $\exp(z) = e^z$. La propriété fondamentale devient :

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

Il découle également de cette relation que :

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Exercice 4 (2.5). Résoudre $e^z = 1 + i$.

0.4.2 2) Formules d'Euler et de Moivre

Formule de Moivre¹ : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, e^{nz} = (e^z)^n$. En particulier pour $z = ix$ avec x réel, on a $e^{inx} = [\cos(x) + i \sin(x)]^n$. On en déduit que :

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}[(\cos(x) + i \sin(x))^n] \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \operatorname{Im}[(\cos(x) + i \sin(x))^n].$$

À l'aide du binôme de Newton ces formules permettent d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exemples :

- $\cos(4x) = \operatorname{Re}[(\cos(x) + i \sin(x))^4] = \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x)$. En remplaçant $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$, on pourrait obtenir $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
- $\sin(4x) = \operatorname{Im}[(\cos(x) + i \sin(x))^4] = 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x)$.

Formules d'Euler² : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ces formules permettent la linéarisation de $\cos^p(x) \sin^q(x)$.

Exemples :

- $\cos^3(x) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$
- $\sin^3(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{-8i} = \frac{e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}}{-8i} = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$

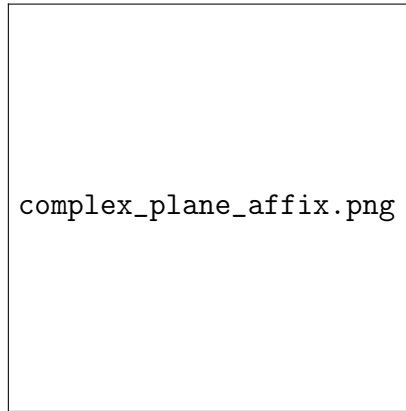
0.5 V Représentation géométrique des complexes, applications

Le plan complexe est un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct que l'on note $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. MOIVRE Abraham DE (1667 – 1754) : mathématicien français, il s'expatria à Londres à l'âge de dix-huit ans.
2. EULER Léonhard (1707 – 1783) : grand mathématicien suisse.

0.5.1 1) Affixe

Chaque point M du plan complexe est repéré par ses coordonnées : une abscisse x et une ordonnée y , c'est-à-dire par le couple de réels (x, y) . Autant dire que M est repéré par le complexe $z = x + iy$. Par définition, ce complexe est l'affixe du point M .



Réciproquement, tout complexe z est l'affixe d'un point M du plan que l'on appelle image de z . Les axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) sont appelés respectivement axe des réels et axe des imaginaires.

Par exemple, l'image de \bar{z} est le symétrique de l'image de z par la réflexion d'axe (O, \vec{u}) .

De la même façon, chaque vecteur du plan a des coordonnées dans la base (\vec{u}, \vec{v}) . Si \vec{w} a pour coordonnées (x, y) , cela signifie que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, là encore le vecteur \vec{w} peut être représenté par le complexe $x + iy$, ce complexe est appelé affixe du vecteur \vec{w} . Réciproquement, tout complexe z est l'affixe d'un vecteur du plan. On remarquera que l'affixe d'un point M n'est autre que l'affixe du vecteur \overrightarrow{OM} .

- L'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme des affixes. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si \vec{w} est le vecteur d'affixe z , alors l'affixe du vecteur $\alpha\vec{w}$ est αz .
- Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' , l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

0.5.2 2) Distances

Le module d'un complexe z représente dans le plan complexe la distance de l'origine O au point M d'affixe z , c'est-à-dire $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Si \vec{w} est un vecteur d'affixe z , alors la norme de \vec{w} est $\|\vec{w}\| = |z|$.

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' , la distance de M à M' est $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = |z' - z|$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on définit dans le plan complexe :

- le disque fermé de centre a et de rayon R : $\{M \in \mathcal{P} \mid |z - a| \leq R\}$
- le disque ouvert de centre a et de rayon R : $\{M \in \mathcal{P} \mid |z - a| < R\}$
- le cercle de centre a et de rayon R : $\{M \in \mathcal{P} \mid |z - a| = R\}$

Définition 10 (2.10).

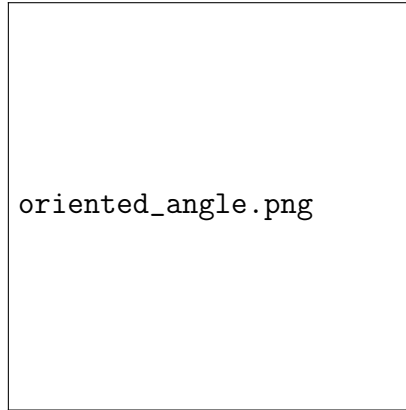
Exemples :

- La représentation géométrique du groupe unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 : le cercle trigonométrique.
- Un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. La longueur du côté est $2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, et la longueur du centre au milieu d'un côté (l'apothème) est $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

0.5.3 3) Angles orientés

Soit z un complexe non nul et M le point du plan d'affixe z , l'argument principal de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, ce que l'on écrit $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \text{Arg}(z) \pmod{2\pi}$.

$$x + iy = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$$



Soient \vec{u} et \vec{w} deux vecteurs non nuls d'affixes respectifs z et z' . Désignons par M et M' les points d'affixes respectifs z et z' , l'angle orienté entre les deux vecteurs \vec{u} et \vec{w} est :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \pmod{2\pi} = \text{Arg} \left(\frac{z'}{z} \right)$$

Conséquence : Soient A , B et C trois points distincts d'affixes respectifs a , b et c . L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $b - a$ et celui du vecteur \overrightarrow{AC} est $c - a$, par conséquent l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donné par :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \text{Arg} \left(\frac{c - a}{b - a} \right) \pmod{2\pi}.$$

Les points A , B , C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ce qui équivaut donc à $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

0.5.4 4) Similitudes directes

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, on note $S_{a,b} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'application qui au point d'affixe z fait correspondre le point d'affixe $z' = az + b$, c'est la similitude directe de paramètres a et b . On vérifie en appliquant la définition, les propriétés suivantes :

- $S_{a,b}$ est une bijection et sa réciproque est aussi une similitude directe, plus précisément $S_{a,b}^{-1} = S_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$
- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, plus précisément, $S_{c,d} \circ S_{a,b} = S_{ac, cb+d}$ avec $c \neq 0$
- Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points avec $A \neq B$ et $C \neq D$, alors il existe une unique similitude directe $S_{a,b}$ qui transforme A en C et B en D , celle-ci se détermine en résolvant le système

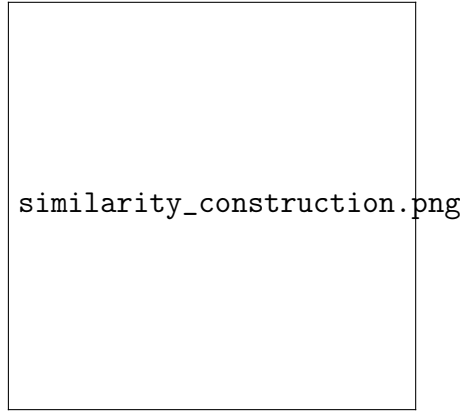
$$\begin{cases} az_A + b = z_C \\ az_B + b = z_D \end{cases}$$

pour déterminer a et b

- Lorsque $a = 1$, la similitude $S_{1,b}$ est la translation de vecteur \vec{w} d'affixe b

Étude lorsque $a \neq 1$

- Il existe un unique point fixe $\Omega(z_0)$ avec $z_0 = \frac{b}{1-a}$, on a alors pour tout $z : az+b = a(z-z_0)+z_0$. Ce point est appelé centre de la similitude.
- Soit $M(z)$ un point différent du centre Ω , et soit $M'(z')$ son image par $S_{a,b}$, alors : $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = a$, on en déduit que : $\left| \frac{z'-z_0}{z-z_0} \right| = |a|$, c'est-à-dire $\Omega M' = |a| \cdot \Omega M$, et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \text{Arg}(a) \pmod{2\pi}$, ce qui permet une construction géométrique de M' partant de M :



- Cas particulier où $\text{Arg}(a) = 0$: on a alors $z' = |a|(z - z_0) + z_0$ d'où $\Omega M' = |a| \cdot \Omega M$, on dit que la similitude est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, on la note $h_{\Omega,|a|}$.
- Cas particulier où $|a| = 1$: on a alors $z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ d'où $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \text{Arg}(a) \pmod{2\pi}$, on dit que la similitude est la rotation de centre Ω et d'angle $\text{Arg}(a)$, on la note $r_{\Omega, \text{Arg}(a)}$.
- Dans le cas général, on vérifie par le calcul que $S_{a,b}$ est la composée commutative :

$$S_{a,b} = h_{\Omega,|a|} \circ r_{\Omega, \text{Arg}(a)} = r_{\Omega, \text{Arg}(a)} \circ h_{\Omega,|a|}$$

On dit que $S_{a,b}$ est la similitude de centre Ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$. On remarquera que la bijection réciproque est la similitude de centre Ω , de rapport $\frac{1}{|a|}$ et d'angle $-\text{Arg}(a)$.

0.6 VI Solution des exercices

Solution 2.1

- 1) Soit z un complexe, alors $z = z \times 1 = z \times (1 + 0) = z \times 1 + z \times 0 = z + z \times 0$, ce qui entraîne que $0 = z \times 0$. La démonstration est valable dans tout corps.
- 2) Soient z et z' deux complexes tels que $zz' = 0$, supposons z non nul, alors z a un inverse, d'où $z^{-1}(zz') = z^{-1} \times 0 = 0$, ce qui donne $z' = 0$ par associativité.

Solution 2.2

- 1)
 - a) Si deux complexes sont égaux, alors ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Réciproquement, si les parties réelle et imaginaire sont identiques, alors les deux complexes ont la même écriture algébrique et sont donc égaux.
 - b) Si la partie imaginaire est nulle alors le complexe est réel car égal à sa partie réelle. Si le complexe est réel, alors l'unicité des parties réelle et imaginaire entraîne que cette dernière est nulle.
 - c) Même type d'argument que la question précédente.
 - d) $z + z' = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') + i[\text{Im}(z) + \text{Im}(z')]$, c'est la forme algébrique de $z + z'$, donc par unicité, $\text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$.

e) $\alpha z = \alpha \operatorname{Re}(z) + i\alpha \operatorname{Im}(z)$, c'est la forme algébrique de αz , donc par unicité, $\operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im}(z)$.

2) Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les deux formes algébriques, alors après développement, on a $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$, c'est la forme algébrique de zz' , donc $\operatorname{Re}(zz') = aa' - bb'$ et $\operatorname{Im}(zz') = ab' + ba'$.

Solution 2.3

On effectue le produit $\bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}} = z \times \frac{1}{z} = 1$, d'où $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ (deux nombres sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit vaut 1).

Solution 2.4

1) $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$, $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

2) Si z et z' sont dans \mathbb{U}_n alors $(zz')^n = z^n \times (z')^n = 1 \times 1 = 1$, donc zz' est dans \mathbb{U}_n : la multiplication est donc interne dans \mathbb{U}_n . Elle est associative et commutative dans \mathbb{C} , donc en particulier dans \mathbb{U}_n . L'élément neutre de la multiplication est dans \mathbb{U}_n car $1^n = 1$. Si z est dans \mathbb{U}_n alors z est non nul (sinon $z^n = 0 \neq 1$), et $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$, donc $\frac{1}{z}$ est dans \mathbb{U}_n : tout élément de \mathbb{U}_n a un symétrique dans \mathbb{U}_n pour la multiplication. En conclusion (\mathbb{U}_n, \times) est un groupe commutatif.

Solution 2.5

On écrit $z = x + iy$ avec x, y réels, on a alors $e^z = e^x e^{iy}$ et $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Résolution trigonométrique : l'équation équivaut alors à $e^x = \sqrt{2}$ (égalité des modules) et $y \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ (égalité des arguments à 2π près), l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \ln(\sqrt{2}) + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \ln(2) + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$