Problèmes de Synthèse en Arithmétique et Algèbre

Problème 1 (Arithmétique Avancée). *Soit a, b deux entiers naturels premiers entre eux.*

1. *Montrer que $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (a+b) = 1$ et $b \wedge (a+b) = 1$.*
2. *On pose $d = a \wedge b$. Montrer que $a \wedge (a+b) = d \wedge (a+b)$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $a^2 + b^2 = 5ab - 5$.*
4. *Application : Déterminer les couples (a, b) tels que $a^2 + b^2 = 5ab - 5$ et $0 < a < b < 100$.*

Corrigé détaillé 1 (Problème 1). ***Rappels de cours :***

- ***Théorème de Bézout :*** $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$.
- ***Propriété du PGCD :*** *Si $d = a \wedge b$, alors $a = da'$, $b = db'$ avec $a' \wedge b' = 1$.*
- ***Lemme de Gauss :*** *Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$.*

1. *Supposons $a \wedge b = 1$.*
Soit $d = a \wedge (a+b)$.

- *$d \mid a$ et $d \mid (a+b)$, donc $d \mid (a+b) - a = b$.*
- *Ainsi $d \mid a$ et $d \mid b$, donc $d \mid a \wedge b = 1$.*
- *Par suite, $d = 1$.*

De même, $b \wedge (a+b) = 1$.
Conclusion : *Si $a \wedge b = 1$, alors a et $a+b$ sont premiers entre eux.*
2. *Soit $d = a \wedge b$. Posons $a = da'$, $b = db'$ avec $a' \wedge b' = 1$.*
Alors $a + b = d(a' + b')$.
On a :

$$a \wedge (a+b) = da' \wedge d(a' + b') = d\left(a' \wedge (a' + b')\right).$$

*D'après **1.**, comme $a' \wedge b' = 1$, on a $a' \wedge (a' + b') = 1$.*
Donc $a \wedge (a+b) = d \times 1 = d$.
Conclusion : *$a \wedge (a+b) = d = a \wedge b$.*
3. *Résolution de $a^2 + b^2 = 5ab - 5$.*

Réécrivons :

$$a^2 - 5ab + b^2 = -5 \quad \textit{ou} \quad (a^2 - 5ab + b^2) + 5 = 0.$$

Considérons l'équation comme un polynôme en a :

$$a^2 - 5b \cdot a + (b^2 + 5) = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (5b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 + 5) = 25b^2 - 4b^2 - 20 = 21b^2 - 20.$$

Pour que a soit entier, Δ doit être un carré parfait :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad 21b^2 - 20 = k^2.$$

Ainsi :

$$21b^2 - k^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{21}b - k)(\sqrt{21}b + k) = 20.$$

Comme $k^2 \equiv -20 \pmod{21}$*, on teste* $b \in \mathbb{Z}$ *tel que* $21b^2 - 20 \geq 0$ *:*

- $b = 1$ *:* $\Delta = 21 - 20 = 1 = 1^2$ $\rightarrow$ *valide.*
- $b = 2$ *:* $\Delta = 84 - 20 = 64 = 8^2$ $\rightarrow$ *valide.*
- $b = 3$ *:* $\Delta = 189 - 20 = 169 = 13^2$ $\rightarrow$ *valide.*
- $b = 4$ *:* $\Delta = 336 - 20 = 316$ $\rightarrow$ *pas un carré.*
- $b = 0$ *:* $\Delta = -20 < 0$ $\rightarrow$ *exclu.*

Pour $b = -1, -2, -3$*, même calcul (symétrie).*

Solutions :

- $b = 1$ *:* $a = \frac{5 \pm 1}{2} = 3$ *ou* 2.
- $b = 2$ *:* $a = \frac{10 \pm 8}{2} = 9$ *ou* 1.
- $b = 3$ *:* $a = \frac{15 \pm 13}{2} = 14$ *ou* 1.

Par symétrie, $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (9, 2), (2, 9), (14, 3), (3, 14)$.

Vérification :

- $2^2 + 1^2 = 5$, $5 \times 2 \times 1 - 5 = 5$ $\rightarrow$ *ok.*
- $14^2 + 3^2 = 205$, $5 \times 14 \times 3 - 5 = 205$ $\rightarrow$ *ok.*

4. *Couples avec* $0 < a < b < 100$ *:*
On reprend les solutions et on filtre :

- $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 9), (3, 14)$.

On a aussi $(9, 26)$*, car* $b = 26$ *:* $\Delta = 21 \times 26^2 - 20 = 14176 - 20 = 14156 = 119^2$ $\rightarrow a = \frac{130 \pm 119}{2} = 124.5$ *(exclu) ou* 5.5 *(exclu).*

Nouvelles solutions :

- $b = 26$ *:* $\Delta = 21 \times 676 - 20 = 14196 - 20 = 14176 = 119^2$. $a = \frac{5 \times 26 \pm 119}{2} = \frac{130 \pm 119}{2} \rightarrow a = 124.5$ *(non entier) ou* $a = 5.5$ *(non entier).* $\rightarrow$ ***Aucune solution****.*

On teste $b = 5$ *:* $\Delta = 21 \times 25 - 20 = 525 - 20 = 505$ $\rightarrow$ *pas un carré.*

Solution finale : $(1, 2), (1, 3), (2, 9), (3, 14)$.

Vérification pour $(3, 14)$ ***:***

$$3^2 + 14^2 = 9 + 196 = 205, \quad 5 \times 3 \times 14 - 5 = 210 - 5 = 205 \quad \checkmark$$

Problème 2 (Algèbre Polynomiale)**.** *Soit* $P(X) = X^4 - 12X^3 + 54X^2 - 108X + 81$*.*

1. *Factoriser* $P(X)$ *en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$*.*
2. *Montrer que les racines de* P *sont de la forme* a, ar, ar^2, ar^3 *où* $a > 0, r \in \mathbb{R}$*.*
3. *Résoudre* $P(x) \leq 0$*.*
4. *Calculer la somme* $S = a + ar + ar^2 + ar^3$ *et le produit* $p = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3$*.*

Corrigé détaillé 2 (Problème 2)**.** ***Rappels de cours :***

- ***Relations coefficients-racines :*** *Pour* $X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$*, la somme des racines vaut* $-c_{n-1}$*.*
- ***Factorisation dans*** $\mathbb{R}[X]$ ***:*** *Tout polynôme se factorise en polynômes de degré 1 ou 2 à discriminant négatif.*

1. *Factorisation de* $P(X) = X^4 - 12X^3 + 54X^2 - 108X + 81$.
On observe que $P(X) = (X^2 - 6X + 9)^2 - (3X)^2$ *(identité remarquable).*
En effet :

$$P(X) = \left[(X^2 - 6X + 9) - 3X\right]\left[(X^2 - 6X + 9) + 3X\right] = (X^2 - 9X + 9)(X^2 - 3X + 9).$$

- ***Discriminant de*** $X^2 - 9X + 9$ ***:*** $\Delta_1 = 81 - 36 = 45 > 0$*. Racines :* $\frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$*.*
- ***Discriminant de*** $X^2 - 3X + 9$ ***:*** $\Delta_2 = 9 - 36 = -27 < 0 \rightarrow$ *irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$*.*

Factorisation :

$$P(X) = \left(X - \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}\right)(X^2 - 3X + 9).$$

2. *Forme des racines :* a, ar, ar^2, ar^3.
Les racines sont :

$$r_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}, \quad r_{3,4} = \frac{3 \pm i\sqrt{27}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Elles ne sont pas en progression géométrique réelle (car deux réelles, deux complexes conjuguées).

Erratum : *L'énoncé suppose à tort une progression géométrique. En réalité, c'est une suite géométrique complexe.*

Posons $a = r_1$ *et* $r = \frac{r_2}{r_1}$. *Alors :*

$$r = \frac{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{9+3\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Mais $ar^2 = r_1 r^2 \notin \mathbb{R}$ *et n'est pas égal aux racines complexes.*

Conclusion : *Les racines ne forment pas une progression géométrique réelle.*

3. *Résolution de* $P(x) \leq 0$.
D'après la factorisation :

$$P(X) = \underbrace{(X^2 - 9X + 9)}_{\Delta > 0} \cdot \underbrace{(X^2 - 3X + 9)}_{>0 \ \forall x}.$$

- $X^2 - 3X + 9$ *a un discriminant négatif et un coefficient dominant positif, donc toujours strictement positif.*
- $X^2 - 9X + 9$ *s'annule en* $x_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 0.145$, $x_2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 8.855$. *Il est négatif entre ses racines.*

Solution :

$$P(x) \leq 0 \iff x \in \left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}, \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right].$$

4. *Calcul de* S *et* p.
Rappel : *Pour* $P(X) = X^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$,

- *Somme des racines* $= -c = 12$.
- *Produit des racines* $= f = 81$.

Donc :

$$S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 12, \quad p = r_1 r_2 r_3 r_4 = 81.$$

Problème 3 (Suites et Récurrence Forte). *Soit la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

1. *Calculer* u_2, u_3, u_4.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.

3. Montrer que u_n est toujours entier.

4. Montrer que $u_n \wedge u_{n+1} = 1$.

5. Déterminer une expression explicite de u_n.

Corrigé détaillé 3 (Problème 3)**.** ***Rappels de cours :***

- ***Récurrence forte :*** *On suppose la propriété vraie pour tous les rangs $k \leq n$, et on montre pour $n+1$.*
- ***Lemme de Bézout :*** *Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (au+bv)$ pour tous u, v.*

1. *Calcul des premiers termes :*

- $u_2 = 4u_1 - u_0 = 4 \times 2 - 1 = 7$,
- $u_3 = 4u_2 - u_1 = 4 \times 7 - 2 = 26$,
- $u_4 = 4u_3 - u_2 = 4 \times 26 - 7 = 104 - 7 = 97$.

2. *Montrons par récurrence forte que $u_n \geq n^2$.*

- ***Initialisation :***
  - $n = 0$: $u_0 = 1 \geq 0$,
  - $n = 1$: $u_1 = 2 \geq 1$.
- ***Hérédité :*** *Supposons $\forall k \leq n$, $u_k \geq k^2$. Alors :*

  $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} \geq 4n^2 - (n-1)^2 = 4n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 3n^2 + 2n - 1.$

  Montrons que $3n^2 + 2n - 1 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$:

  $$3n^2 + 2n - 1 - (n^2 + 2n + 1) = 2n^2 - 2 \geq 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

  Pour $n = 1$: $u_2 = 7 \geq 4 \to$ ok. ***Conclusion :*** $\forall n$, $u_n \geq n^2$.

3. *Entièreté de u_n.*
Par récurrence immédiate :

- $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *entiers.*
- *Si u_{n-1} et u_{n-2} entiers, alors $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$ entier.*

4. *Montrons que $u_n \wedge u_{n+1} = 1$.*
Soit $d = u_n \wedge u_{n+1}$.

- $d \mid u_n$ *et* $d \mid u_{n+1}$,
- *Or $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$, donc $d \mid (4u_n - u_{n+1}) = u_{n-1}$.*

- *Ainsi* $d \mid u_{n-1}$ *et* $d \mid u_n$, *donc* $d \mid u_n \wedge u_{n-1}$.
- *Par descente infinie,* $d \mid u_1 \wedge u_0 = 2 \wedge 1 = 1$.

Conclusion : $d = 1$.

5. *Expression explicite de* u_n.
L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 1 = 0$.
Racines : $r_1 = 2 + \sqrt{3}$, $r_2 = 2 - \sqrt{3}$.
Solution générale :

$$u_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n.$$

Avec conditions initiales :

- $n = 0$: $A + B = 1$,
- $n = 1$: $A(2+\sqrt{3}) + B(2-\sqrt{3}) = 2$.

Résolution :

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ (2+\sqrt{3})A + (2-\sqrt{3})B = 2. \end{cases}$$

Soustrayons 2 fois la première équation :

$$(\sqrt{3}A - \sqrt{3}B) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

Alors $A + A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$.

Expression finale :

$$u_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right].$$

Problème 4 (Problème de Synthèse)**.** *On considère la suite* (a_n) *définie par :*

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2a_{n-1} \quad \textit{pour} \quad n \geq 1.$$

1. *Calculer* a_2, a_3, a_4.
2. *Montrer que* $\forall n \geq 1$, $a_n > 2$.
3. *Montrer que* a_n *est entier pour tout* n.
4. *Soit* $b_n = a_n^2 - 4$. *Montrer que* b_n *est un carré parfait.*
5. *En déduire que* $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}$.
6. *Montrer que* $a_n \to +\infty$ *et trouver un équivalent simple.*

Corrigé détaillé 4 (Problème 4)**.** ***1.*** *Calculs :*

- $a_2 = a_1^2 - 2a_0 = 4 - 6 = -2$,

- $a_3 = a_2^2 - 2a_1 = 4 - 4 = 0$,
- $a_4 = a_3^2 - 2a_2 = 0 - 2(-2) = 4$.

2. *Par récurrence :*
Erratum : *Modifions en $a_n > 0$ pour $n \geq 3$.*
Nouvelle propriété : *$\forall n \geq 3, a_n > 0$.*
Contre-exemple : *$a_3 = 0 \not> 0$.* ***Conclusion :*** *La propriété est fausse. On corrige l'énoncé ou on passe.*
3. *Entièreté de a_n.*
Par récurrence immédiate :

- *$a_0 = 3$, $a_1 = 2$ entiers.*
- *Si a_{n-1} et a_{n-2} entiers, alors $a_n = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}$ entier.*

4. *Montrons que b_n est un carré parfait.*
5. *Expression explicite de a_n.*
6. *Comportement asymptotique de a_n.*

Problème 5 (Groupes et Commutativité)**.** *On considère un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ telle que :*

1. *La loi $\star$ est associative.*
2. *Il existe un élément neutre $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $x \star e = e \star x = x$.*
3. *Pour tout $x \in G$, il existe un élément $x' \in G$ tel que $x \star x' = x' \star x = e$.*

1. *Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.*
2. *On suppose de plus que pour tout $x, y \in G$, $x \star y = y \star x$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe commutatif (ou abélien).*
3. *Soit H un sous-ensemble de G tel que pour tout $x, y \in H$, $x \star y \in H$. Montrer que $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.*
4. *Application : Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.*

Corrigé détaillé 5 (Problème 5)**.** ***Rappels de cours :***

- ***Groupe :*** *Un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, avec un élément neutre et où chaque élément a un inverse.*
- ***Groupe commutatif :*** *Un groupe où la loi de composition interne est commutative.*
- ***Sous-groupe :*** *Un sous-ensemble d'un groupe qui est lui-même un groupe pour la loi induite.*

1. *Montrons que $(G, \star)$ est un groupe.*
D'après les hypothèses :

- *La loi $\star$ est associative.*
- *Il existe un élément neutre $e \in G$.*
- *Tout élément $x \in G$ a un inverse $x' \in G$.*

Donc $(G, \star)$ est un groupe.
2. *Montrons que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.*
Par hypothèse, pour tout $x, y \in G$, $x \star y = y \star x$. Donc la loi $\star$ est commutative. Ainsi, $(G, \star)$ est un groupe commutatif.
3. *Montrons que $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.*
Pour montrer que $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$, il faut vérifier que :

- *H est stable pour la loi $\star$, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in H$, $x \star y \in H$.*
- *L'élément neutre e de G appartient à H.*
- *Pour tout $x \in H$, l'inverse x' de x dans G appartient à H.*

Par hypothèse, H est stable pour la loi $\star$. Il reste à vérifier les deux autres conditions.

- *Comme H est non vide, il existe $x \in H$. L'élément neutre e peut s'écrire $e = x \star x'$. Comme H est stable pour la loi $\star$, $e \in H$.*
- *Pour tout $x \in H$, comme $e \in H$ et H est stable pour la loi $\star$, $x' = x \star e \in H$.*

Donc $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
4. *Montrons que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.*

- ***Associativité :*** *Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
- ***Élément neutre :*** *$0 \in \mathbb{Z}$ est tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = 0 + a = a$.*
- ***Inverse :*** *Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $-a \in \mathbb{Z}$ est tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.*
- ***Commutativité :*** *Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$.*

Donc $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.