Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

SCIENCES UNIVERS

2025

Table des matières

Plan du chapitre

I - Rappels de maths sup et compléments

1. Matrices semblables
2. Matrices diagonales. Matrices triangulaires
   (a) Matrices diagonales
   (b) Matrices triangulaires
3. Rappels sur les sommes de plusieurs sous-espaces

II - Sous-espaces stables

1. Cas général
   (a) Définition
   (b) Interprétation matricielle
2. Droites stables
3. Réduire un endomorphisme ou une matrice carrée

III - Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

1. Valeurs et vecteurs propres
2. Sous-espaces propres

IV - Endomorphismes ou matrices diagonalisables

1. Définition
2. Premières caractéristiques de la diagonalisabilité en dimension finie

V - Polynôme caractéristique

1. Polynôme caractéristique d'une matrice
2. Ordre de multiplicité d'une valeur propre
3. Degré et coefficients du polynôme caractéristique
4. Propriétés du polynôme caractéristique
5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

VI - Diagonalisation

1. Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité
2. Diagonalisation explicite

Introduction

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Chapitre 1

Rappels de maths sup et compléments

1.1 Matrices semblables

Définition 1.1.1. *Soit* $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. *La matrice* A *est semblable à la matrice* B *si et seulement si il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $B = P^{-1}AP$.

Théorème 1.1.2. *La relation « A est semblable à B » est une relation d'équivalence sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Réflexivité, symétrie et transitivité sont démontrées par les calculs standards. □

Théorème 1.1.3. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$. *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ *et* $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. *Alors* $B = P^{-1}AP$.

Théorème 1.1.4. *Si* A *et* B *sont semblables, alors :*

- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$
- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ *et* $\det(A) = \det(B)$
- A *inversible ssi* B *inversible*

1.2 Matrices diagonales et triangulaires

1.2.1 Matrices diagonales

Définition 1.2.1. *Une matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonale si* $\forall i \neq j,\ a_{ij} = 0$. *On note* $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *la matrice diagonale de coefficients* λ_i.

Théorème 1.2.2. *L'ensemble* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *des matrices diagonales est :*

- *Un sous-espace vectoriel de dimension* n
- *Une sous-algèbre commutative de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.2.2 Matrices triangulaires

Définition 1.2.3. *A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si* $\forall i > j$ *(resp.* $i < j$*),* $a_{ij} = 0$. *On note* $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ *(resp.* $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$*) cet ensemble.*

Théorème 1.2.4. *Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Théorème 1.2.5. *L'ensemble* $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ *(resp.* $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$*) est :*

- *Un sous-espace vectoriel de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$
- *Une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.3 Rappels sur les sommes de sous-espaces

Définition 1.3.1. *La somme* $F_1 + \cdots + F_p$ *est l'ensemble* $\{x_1 + \cdots + x_p \mid x_i \in F_i\}$.

Définition 1.3.2. *La somme est directe si tout vecteur s'écrit de manière unique comme somme. On note* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Théorème 1.3.3 (Caractérisation des sommes directes)**.** *La somme* $\sum F_k$ *est directe ssi* $\forall i,\ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

Théorème 1.3.4 (Dimension finie)**.** *Si* $\dim E < +\infty$ *:*

1. $\dim(\bigoplus F_i) = \sum \dim(F_i)$
2. $\dim(\sum F_i) \leq \sum \dim(F_i)$ *avec égalité ssi somme directe*
3. $E = \bigoplus F_i \iff \dim E = \sum \dim F_i$

Chapitre 2

Sous-espaces stables

2.1 Cas général

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1. *Un sous-espace F est stable par f si $f(F) \subset F$.*

Théorème 2.1.2. *Si F est stable par f, alors f induit un endomorphisme de F.*

Théorème 2.1.3. *Si f et g commutent, alors g laisse stable* $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

2.1.2 Interprétation matricielle

En dimension finie, si $E = F \oplus G$ avec F stable, la matrice de f dans une base adaptée est triangulaire supérieure par blocs. Si G est aussi stable, elle est diagonale par blocs.

2.2 Droites stables

$D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable ssi $f(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.3 Réduire un endomorphisme

Objectif : trouver une base où la matrice est simple (diagonale, triangulaire). Applications au calcul de puissances matricielles.

Chapitre 3

Valeurs propres, vecteurs propres

3.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 3.1.1. λ *est valeur propre de* f *ssi* $\exists x \neq 0,\ f(x) = \lambda x$. x *est alors vecteur propre.*

Définition 3.1.2. *Spectre* $\mathrm{Sp}(f)$ *: ensemble des valeurs propres.*

Théorème 3.1.3. λ *valeur propre ssi* $f - \lambda \mathrm{Id}$ *non injectif. En dimension finie : ssi* $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$.

Théorème 3.1.4. *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Théorème 3.1.5. *Tout endomorphisme en dimension finie sur* $\mathbb{C}$ *admet au moins une valeur propre.*

3.2 Sous-espaces propres

Définition 3.2.1. $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

Théorème 3.2.2. *La somme des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.*

Chapitre 4

Endomorphismes diagonalisables

4.1 Définition

Définition 4.1.1. *f est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres.*

4.2 Caractérisations

Théorème 4.2.1. *f diagonalisable ssi $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(f)$.*

Théorème 4.2.2. *f diagonalisable ssi χ_f scindé et* $\dim E_\lambda = \text{multiplicit}(\lambda)$.

Chapitre 5

Polynôme caractéristique

5.1 Définition

Définition 5.1.1. *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

5.2 Propriétés

— $\deg \chi_A = n$, coefficient dominant 1

— $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$

— Valeurs propres = racines de χ_A

— En dimension finie : $\chi_f = \chi_A$ où A matrice de f

Chapitre 6

Diagonalisation

6.1 Condition nécessaire et suffisante

Voir théorème précédent.

6.2 Diagonalisation explicite

Méthode pratique : résoudre $(A - \lambda I)X = 0$ pour chaque valeur propre, construire la matrice de passage.

Chapitre 7

Endomorphismes trigonalisables

7.1 Définition

Définition 7.1.1. *f est trigonalisable ssi il existe une base où sa matrice est triangulaire supérieure.*

7.2 Condition nécessaire et suffisante

Théorème 7.2.1. *f trigonalisable ssi χ_f scindé sur $\mathbb{K}$.*

Chapitre 8

Polynômes d'endomorphismes

8.1 Algèbre $\mathbb{K}[f]$

Définition 8.1.1. *Pour* $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(f) = \sum a_k f^k$.

Théorème 8.1.2. *L'application* $P \mapsto P(f)$ *est un morphisme d'algèbres.*

8.2 Commutant

Définition 8.2.1. *Le commutant* $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

Théorème 8.2.2. *Si* f *diagonalisable,* $\dim C(f) = \sum (\dim E_{\lambda_i})^2$.