Cours: Limites et Continuité

Niveau BAC Scientifique

Boris Kossi Koudaya

June 2025

1 Introduction

En analyse mathématique, les concepts de **limite** et de **continuité** sont fondamentaux pour l'étude des fonctions. Ce cours, conforme au programme du Baccalauréat Scientifique, présente ces notions avec rigueur tout en restant accessible. Les applications couvrent des domaines essentiels comme la physique, l'économie et les sciences informatiques.

2 Limites d'une fonction

2.1 Notion intuitive et définitions formelles

Définition 1 (Limite finie en un point)**.** *Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle. On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ (0 < |x-a| < \delta) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

Définition 2 (Limite infinie)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si :*

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ (0 < |x-a| < \delta) \implies f(x) > M$$

2.2 Opérations sur les limites

Opération	Forme	Résultat	Exemple
Somme	$\infty + \infty$	$+\infty$	$\lim(x^3 + e^x)$
	$\infty - \infty$	**F.I.**	$\lim(x - \ln x)$
Produit	$0 \times \infty$	**F.I.**	$\lim(x \ln x)$
	$\infty \times (-\infty)$	$-\infty$	$\lim(x \cdot (-x^2))$
Quotient	$\frac{\infty}{\infty}$	**F.I.**	$\lim \frac{2x^2+1}{x}$
	$\frac{0}{0}$	**F.I.**	$\lim \frac{\sin x}{x}$

F.I. = Forme Indéterminée (nécessite une méthode de résolution)

2.3 Limites fondamentales à connaître

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2.4 Techniques de résolution des FI

— **FI** $\frac{\infty}{\infty}$: Factoriser par le terme dominant

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{5}{x^2})} = 2$$

— **FI** $\infty - \infty$: Mettre sous forme fractionnaire

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

— **FI** 1^∞ : Utiliser la forme exponentielle

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}\right) = e^3$$

3 Continuité

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3 (Continuité en un point)**.** *f est continue en $a \in D_f$ si :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Théorème 1 (Opérations sur les fonctions continues)**.** *Si f et g sont continues en a, alors :*

— *$f+g$ continue en a*

— *$f \times g$ continue en a*

— *$\frac{f}{g}$ continue en a si $g(a) \neq 0$*

— *$f \circ g$ continue en a si g continue en a et f continue en $g(a)$*

3.2 Théorèmes fondamentaux

Théorème 2 (des valeurs intermédiaires (TVI))**.** *Soit f continue sur $[a,b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.*

Théorème 3 (de la bijection)**.** *Si f continue et* ***strictement monotone*** *sur $[a,b]$, alors :*

1. *f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$*
2. *f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens*

4 Applications et exercices

Exercice 1 : Calcul de limites (4 points)

Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+2x)^{3/x}$

Exercice 2 : Continuité et TVI (3 points)

Soit $f(x) = \frac{x^3-3x+1}{x-1}$ définie sur $]1,+\infty[$.

1. f est-elle prolongeable par continuité en $x=1$?
2. Montrer que $f(x)=4$ admet une solution dans $]1,2]$.

Exercice 3 : Bijection et réciproque (3 points)

Soit $g(x) = x^3 + x - 2$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $(g^{-1})'(0)$.

Corrigés détaillés

Exercice 1

1. **Rationalisation** :

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \xrightarrow{x\to 2} \frac{1}{4}$$

2. **Multiplication conjuguée** :

$$x(\sqrt{x^2+1}-x) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \xrightarrow{x\to +\infty} \frac{1}{2}$$

3. **Formule trigonométrique** :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\frac{-2\sin(2x)\sin(x)}{x^2} = -2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} -2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = -4$$

4. **Forme exponentielle** :

$$(1+2x)^{3/x} = \exp\left(\frac{3\ln(1+2x)}{x}\right) \xrightarrow{x\to 0} \exp\left(3\cdot 2\cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x}\right) = e^6$$

Exercice 2

1. En $x = 1$: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+1}{x-1}$.
   Par factorisation : $x^3 - 3x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) - 1$
   $\Rightarrow$ Forme $\frac{-1}{0}$, limite infinie. Non prolongeable.
2. $f(1^+) = -\infty$, $f(2) = \frac{8-6+1}{2-1} = 3 < 4$.
   Comme f continue sur $]1, 2]$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty < 4$ et $f(2) = 3 < 4$,
   mais $f(3) = \frac{27-9+1}{3-1} = 9.5 > 4$.
   D'après TVI sur $[2, 3]$, $\exists c \in [2, 3]$ tel que $f(c) = 4$.

Exercice 3

1. $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ strictement croissante.
   $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$
   Bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. g^{-1} dérivable car $g'(x) \neq 0$ partout.
   $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$
   Résoudre $g(a) = 0$: $a^3 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ (solution évidente).
   $g'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$ donc $(g^{-1})'(0) = 1/4$.