25 Exercices sur les nombres complexes

Niveau Baccalauréat Scientifique

Koudaya Kossi Boris
SCIENCES UNIVERS

Exercices de base (à)

1. $\star$ Donner la forme algébrique de $(2+3i)+(5-2i)$.

   Correction :
   $$(2+3i)+(5-2i)=(2+5)+(3-2)i=7+i$$

2. $\star$ Calculer le module de $z=4-3i$.

   Correction :
   $$|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

3. $\star$ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+9=0$.

   Correction :
   $$z^2=-9\Rightarrow z=\pm 3i$$
   Solutions : $3i$ et $-3i$

4. $\star\star$ Déterminer le conjugué de $z=(1+i)(3-2i)$.

   Correction : Développons d'abord z :
   $$z=1\times 3+1\times(-2i)+i\times 3+i\times(-2i)=3-2i+3i-2i^2=3+i+2=5+i$$
   Donc $\overline{z}=5-i$

5. $\star\star$ Mettre sous forme trigonométrique $z=1+i\sqrt{3}$.

   Correction :
   $$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$$
   $$\cos\theta=\frac{1}{2}\ \text{et}\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$
   Forme trigonométrique :
   $$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

6. $\star\star$ Calculer $(1+i)^4$ en utilisant la forme exponentielle.

   Correction :
   $$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
   $$(1+i)^4=(\sqrt{2})^4e^{i4\times\frac{\pi}{4}}=4e^{i\pi}=4(-1+0i)=-4$$

7. ⋆⋆ Déterminer les racines carrées de $z = -5 + 12i$.

Correction : On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a + ib)^2 = -5 + 12i$.

Système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \end{cases}$$

En additionnant les équations 1 et 3 : $2a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$

Pour $a = 2$: $b = 3$ (car $2 \times 2 \times b = 12$) Pour $a = -2$: $b = -3$

Racines carrées : $2 + 3i$ et $-2 - 3i$

Exercices intermédiaires ()

8. ⋆⋆⋆ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Correction :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$$

Solutions :

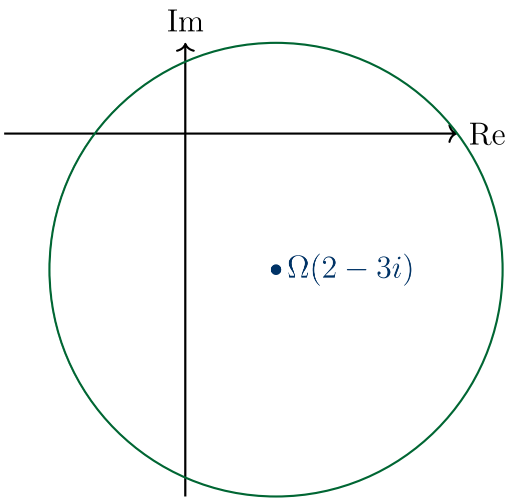
$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

9. ⋆⋆⋆ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2 + 3i| = 5$.

Correction :

$$|z - (2 - 3i)| = 5$$

C'est le cercle de centre $\Omega(2 - 3i)$ et de rayon 5.



10. ⋆⋆⋆ Soit $z = \frac{1+i}{2-i}$. Calculer z sous forme algébrique.

Correction :

$$z = \frac{1+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{4-i^2} = \frac{2+i+2i+i^2}{5} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

11. ⋆⋆⋆ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\overline{z}$.

Correction : Soit $z = a + ib$:

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

12. ⋆⋆⋆ Déterminer la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3} + i$.

Correction :

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Forme exponentielle :

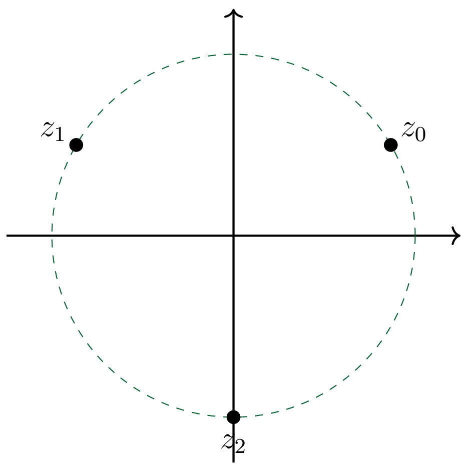
$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

13. ⋆⋆⋆ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 8i$.

Correction : On écrit $8i$ sous forme exponentielle : $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Solutions :

$$z_k = 2\exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \text{ pour } k = 0, 1, 2$$



Exercices avancés ()

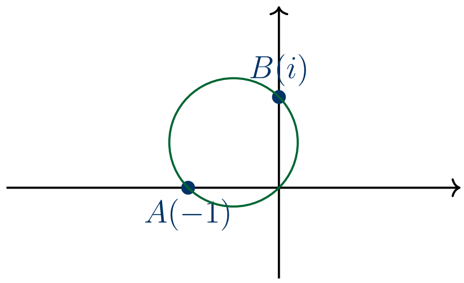
14. ⋆⋆⋆⋆ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Correction :

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

15. ⋆⋆⋆⋆ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Correction : Posons $A(-1)$ et $B(i)$. La condition signifie que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.



16. $\star\star\star\star$ On considère les points $A(1)$, $B(i)$ et $M(z)$. Montrer que M est sur la médiatrice de $[AB]$ ssi $|z-1| = |z-i|$.

    Correction : La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B, donc exactement l'ensemble des $M(z)$ tels que $|z-1| = |z-i|$.

17. $\star\star\star\star$ Soit $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

    Correction : Comme $|z| = 1$, on a $z\overline{z} = 1$ donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

    Calculons le conjugué de l'expression :

    $$\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z+1}{z-1} = -\frac{1+z}{1-z}$$

    Ainsi, $\frac{1+z}{1-z} = -\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$, ce qui signifie que c'est un imaginaire pur.

18. $\star\star\star\star$ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

    Correction : Posons $Z = z^3$:

    $$Z^2 + 7Z - 8 = 0$$

    Solutions : $Z = 1$ ou $Z = -8$

    Pour $Z = 1$: $z^3 = 1 \Rightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ pour $k = 0, 1, 2$

    Pour $Z = -8$: $z^3 = -8 \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$ pour $k = 0, 1, 2$

    Total : 6 solutions distinctes.

Exercices très avancés ()

19. $\star\star\star\star\star$ Soit $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Déterminer l'image par f de la droite $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$.

    Correction : Soit $z = x + i$ avec $x \in \mathbb{R}$.

    $$f(z) = \frac{x+i-i}{x+i+i} = \frac{x}{x+2i} \times \frac{x-2i}{x-2i} = \frac{x^2-2xi}{x^2+4}$$

    Partie réelle : $\frac{x^2}{x^2+4}$

    Partie imaginaire : $\frac{-2x}{x^2+4}$

    On montre que $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = (\frac{1}{2})^2$ où $w = u + iv$.

    C'est donc le cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point (0,0).

20. ⋆⋆⋆⋆⋆ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 2(1+|z|^2)$. Interpréter géométriquement.

Correction :

$$|1+z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) = 1 + z + \overline{z} + |z|^2$$
$$|1-z|^2 = (1-z)(1-\overline{z}) = 1 - z - \overline{z} + |z|^2$$

En additionnant : $2 + 2|z|^2 = 2(1+|z|^2)$

Interprétation : Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés (théorème du parallélogramme).

21. ⋆⋆⋆⋆⋆ Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Correction : On considère $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$

En prenant la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}(S) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

22. ⋆⋆⋆⋆⋆ Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

Correction : Condition $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

Donc $z = e^{i\theta}$.

La condition $|1-z| = 1$ donne :

$$|1-e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 1$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Solutions : $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Finalement : $z = e^{i\pi/3}$ ou $z = e^{-i\pi/3}$

23. ⋆⋆⋆⋆⋆ Soit U_n la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1+i}{2}U_n$. Étudier la convergence de (U_n).

Correction : Suite géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$:

$$|q| = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Donc (U_n) converge vers 0.

Problèmes synthétiques

24. ⋆⋆⋆⋆ On considère la transformation $f : z \mapsto \frac{(1+i)z+2}{z+1-i}$.

(a) Déterminer les points fixes de f.

Correction : Résoudre $f(z) = z$:

$$(1+i)z + 2 = z^2 + (1-i)z$$

$$z^2 - iz - 2 = 0$$

Solutions : $z = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2+8}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{7}}{2}$

(b) Montrer que f est une similitude directe.

Correction : On peut écrire f sous la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ qui est une transformation de Möbius, donc une similitude directe.

25. ⋆⋆⋆⋆⋆ Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère l'équation $(E) : z^3 = (z+1)^3$.

(a) Montrer que $z = -\frac{1}{2}$ est solution.

Correction : En substituant :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow -\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Faux ! En fait, $z = -\frac{1}{2}$ n'est pas solution. Correction :

Développons (E) :

$$z^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 \Rightarrow 3z^2 + 3z + 1 = 0$$

Solutions :

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{6} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{6}$$

(b) Résoudre complètement (E).

Correction : Solutions trouvées ci-dessus : $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{6}$

(c) Placer les solutions dans le plan complexe.

Correction :