Problèmes de Synthèse sur les Nombres Complexes

Koudaya Kossi Boris
SCIENCES UNIVERS

Juin 2025

Problème 1 (Représentation Géométrique et Module)**.** *Soit le nombre complexe $z = 3 + 4i$.*

1. *Représenter géométriquement z dans le plan complexe.*
2. *Calculer le module de z et son argument.*
3. *Déterminer le complexe conjugué de z et le représenter dans le même plan.*
4. *Montrer que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.*

Solution 1. ***Rappels de cours :***

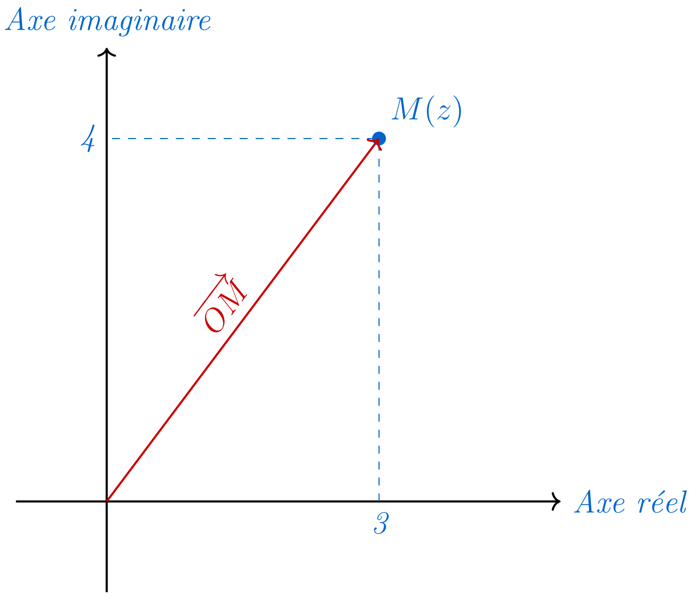
— *Un nombre complexe $z = a+bi$ est représenté par le point $M(a,b)$ dans le plan complexe.*

— *Module : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$*

— *Argument : $\theta = \arg(z)$ tel que $\tan\theta = \frac{b}{a}$*

— *Conjugué : $\overline{z} = a - bi$*

1. ***Représentation géométrique :***



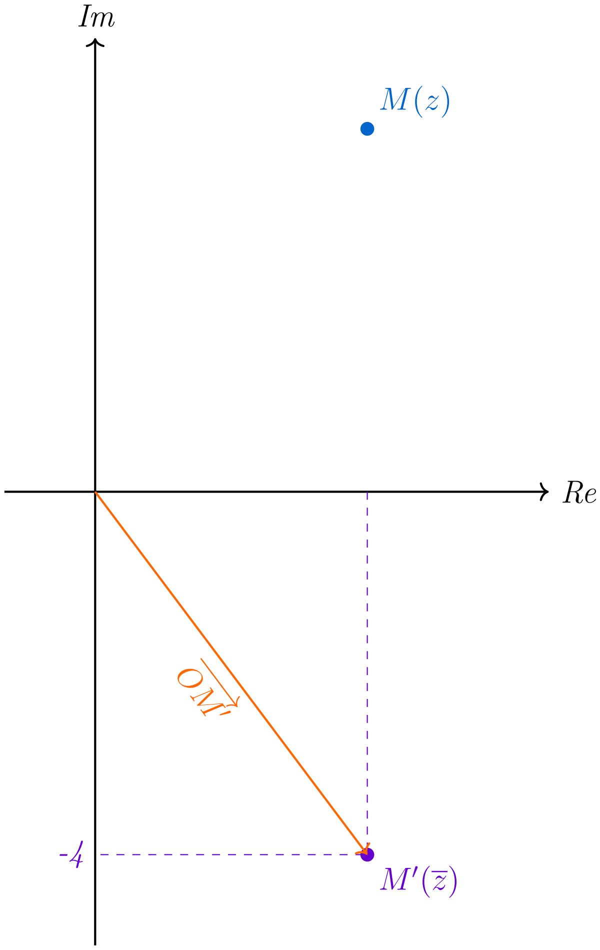
2. Module et argument :

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13°$$

3. Conjugué :

$$\overline{z} = 3 - 4i$$



4. Démonstration :

$$z \cdot \overline{z} = (3+4i)(3-4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

$$|z|^2 = 5^2 = 25$$

Problème 2 (Équations dans $\mathbb{C}$)**.** *Résoudre l'équation $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.*

Solution 2. ***Méthode :*** *On utilise la formule du discriminant pour les équations du second degré complexes.*

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-2(1+i)) \\ &= 1 - 6i + 9i^2 + 8(1+i)\end{aligned}$$

$$= 1 - 6i - 9 + 8 + 8i$$
$$= -6i$$

Racine carrée de Δ : *On cherche $\sqrt{-6i}$.*
Soit $(x+iy)^2 = -6i$, alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

Solution : $\sqrt{-6i} = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$
Solutions :

$$z = \frac{-(1-3i) \pm (\sqrt{3} - i\sqrt{3})}{2}$$

— $z_1 = \frac{-1+3i+\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2} =$

Problème 3 (Transformation Complexe)**.** *Soit la transformation f définie par $f(z) = (1+i)z + 2 - i$.*

1. *Montrer que f est une similitude directe.*
2. *Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.*
3. *Déterminer le point fixe de f.*

Solution 3. ***1. Similitude directe :***
Une transformation de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe.
2. Paramètres :

— *Rapport : $k = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$*
— *Angle : $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (45°)*

Trouver les racines cinquièmes de l'unité.

Représenter ces racines dans le plan complexe.

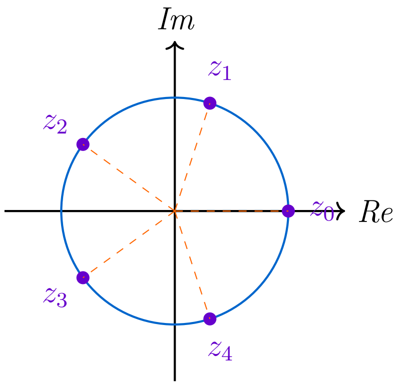
Calculer la somme $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Solution 4. ***1. Racines cinquièmes :***
Solutions de $z^5 = 1$:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \quad \textit{pour} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z_0 = 1$$
$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$
$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$$
$$z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$$
$$z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

2. Représentation :



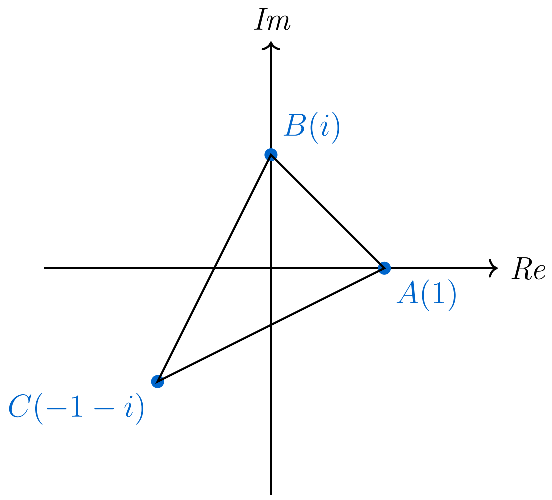
3. Somme des racines :

$$S = \sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

Problème 5 (Applications Géométriques)**.** *Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives $a = 1$, $b = i$, $c = -1 - i$.*

1. *Placer les points A, B, C dans le plan complexe.*
2. *Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.*
3. *Calculer l'aire du triangle ABC.*

Solution 5. *1. Représentation :*



2. Orthogonalité :

Vecteurs :

$$\overrightarrow{BA} = a - b = 1 - i$$
$$\overrightarrow{BC} = c - b = -1 - 2i$$

Produit scalaire complexe :

$$Re(\overrightarrow{BA} \cdot \overline{\overrightarrow{BC}}) = Re((1-i)(-1+2i))$$

$$= Re(-1 + 2i + i - 2i^2)$$

$$= Re(-1 + 3i + 2) = Re(1 + 3i) = 1 \neq 0$$

Correction : *Le triangle n'est pas rectangle en B. En fait, il est rectangle en A.*

3. Aire du triangle :

$$Aire = \frac{1}{2}|Im(\overrightarrow{AB} \cdot \overline{\overrightarrow{AC}})| = \frac{1}{2}|Im((-1+i)(-2-i))|$$
$$= \frac{1}{2}|Im(2 + i - 2i - i^2)| = \frac{1}{2}|Im(3 - i)| = \frac{1}{2}$$