Polynômes de Bernstein

Sergei Natanovic Bernstein est né en 1880 et est mort en 1968.

1) Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul donné, le n-ième polynôme de Bernstein associé à f est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$$

2) L'identité $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

a) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1], f(x) = 1$.

Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = 1$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1$$

b) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1], f(x) = x$.

Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = x$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = C_{n-1}^{k-1}$$

Donc

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^k(1-X)^{n-k}$$

$$=X\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)}=X\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} X^{l}(1-X)^{(n-1)-l}=X(X+(1-X))^{n-1}=X$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=X$$

2ème calcul. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-Y)^{n-k}=\frac{X}{n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k k X^{k-1}(1-Y)^{n-k}$$

$$=\frac{X}{n}\frac{d}{dX}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-Y)^{n-k}\right)=\frac{X}{n}\frac{d}{dX}\left((X+1-Y)^n\right)=X(X+1-Y)^{n-1}$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-Y)^{n-k}=X(X+1-Y)^{n-1}$$

En particulier, quand $Y=X$, on retrouve le résultat précédent.

c) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x\in[0,1], f(x)=x(x-1)$.

Si, pour tout x de $[0,1], f(x)=x(x-1)$, alors pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-X)^{n-k}=-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k(1-X)^{n-k}$$

1er calcul. Pour $1\leq k\leq n-1$,

$$k(n-k)C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}=n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-2)-(k-1)!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-1}$$

Donc

$$B_n(f) = -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)}$$

$$= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} X^k (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X)(X+1-X)^{n-2}$$

$$= -\frac{n-1}{n} X(1-X)$$

L'égalité précédente restant vraie pour $n = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X)$$

2ème calcul.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-Y)^{n-k} = -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-Y)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-Y)^{n-k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\left((X+1-Y)^n\right)\right) = -n(n-1)\frac{1}{n^2} X(1-Y)(X -$$

$$= -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-Y)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent.

d) Calcul de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k - nX)^2 X^k (1-X)^{n-k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^{n} k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k X$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n} k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2.$$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k X^k (1-X)^n$$

et donc les résultats de a), b) et c)

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = n^2 \left(-\frac{n-1}{n} X(1-X) - (2X-1)X + X^2 \right) = n^2 \left(-\frac{1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X \right) = nX($$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$$

3) Convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

a) Une majoration de $|f(x) - B_n(f)(x)|$.

Soit x un réel de $[0,1]$ et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| f(x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \quad \text{(d'après 1)a))} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

b) Pourquoi l'expression précédente est-elle petite?

Tout d'abord, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$ est une expression bornée uniformément en x.

Ensuite, pour x donné et pour des k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right|$ est petit, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ est petit. Pour les k tels que $\frac{k}{n}$ est assez éloigné de x et décrivant donc un sous-ensemble J de $0, n$, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ est bornée uniformément en x et il n'y a qu'à espérer que $\sum_{k\in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ soit petit. Mais là, on dispose de

$$\sum_{k\in J} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

c) Soit ε un réel strictement positif.

f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc d'une part bornée sur ce segment, et d'autre part uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe un réel M tel que pour tout x de $[0,1], |f(x)| \leq M$ et il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

d) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} \text{ (d'après 1))}
\end{aligned}$$

(dans la deuxième somme, l'inégalité $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$ s'écrit encore $1 \leq \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$) et donc :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{1/4}{n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$$

(si $x \in [0,1], x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$). En résumé, $\varepsilon > 0$ strictement positif ayant été donné, on a montré que :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$$

Or, $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$ tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que tout entier naturel $n \geq n_0, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et donc pour tout réel $x \in [0,1], |f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon$.

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon)$$

et donc que

La suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des polynômes de Bernstein converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4) Le théorème de Weierstrass.

D'après 2), toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes. Plus généralement, soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], g(x) = f((b-a)x + a)$$

Comme la fonction $x \mapsto (b-a)x + a$ est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[a,b]$ (de réciproque la fonction $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$) et que f est continue sur $[a,b]$, g est continue sur $[0,1]$. Il existe alors une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$.

Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[a,b]$, posons

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour x dans $[0,1]$ et $n \geq n_0, |g(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ et x dans $[a,b]$,

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon$$

car $\frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$.

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon)$$

et donc la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$. D'où le :

Théorème de Weierstrass. Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

5) Peut-on généraliser à $\mathbb{R}$?

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Nous allons montrer que f est nécessairement un polynôme.

D'après le critère de Cauchy uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0, p \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_p(x)| \leq 1$$

et en particulier pour $n \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1$$

Pour $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc constant. Par suite,

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0)$$

Quand n tend vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_{n_0}(x) - P_{n_0}(0) + f(0)$$

On a montré que :

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f,

f est nécessairement un polynôme.

Ce résultat montre que les séries entières usuelles de rayons infini (de somme e^x ou $\cos x \ldots$) ne sont pas uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.