Exercices corrigés de Mathématiques
Niveau Baccalauréat Scientifique

Koudaya Kossi Boris
SCIENCES UNIVERS

Arithmétique - Algèbre Linéaire - Analyse

Exercice 1 (Niveau 1)

Soit $a = 126$ et $b = 90$.

1. Décomposer a et b en facteurs premiers.
2. Calculer le PGCD et le PPCM de a et b.
3. Simplifier la fraction $\dfrac{126}{90}$.

Difficulté: 1 étoile(s)

Correction Exercice 1

1. $126 = 2 \times 63 = 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = \mathbf{2 \times 3^2 \times 7}$
   $90 = 9 \times 10 = 3^2 \times 2 \times 5 = \mathbf{2 \times 3^2 \times 5}$
2. PGCD : facteurs communs avec leur plus petit exposant
   $\text{PGCD}(126, 90) = 2 \times 3^2 = \mathbf{18}$
   PPCM : tous les facteurs avec leur plus grand exposant
   $\text{PPCM}(126, 90) = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = \mathbf{630}$
3. $\dfrac{126}{90} = \dfrac{126 \div 18}{90 \div 18} = \dfrac{7}{5}$

Exercice 2 (Niveau 1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3x + 5 = 2x - 7$
2. $2(x - 3) = 5x + 1$
3. $\dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{x + 4}{2}$

Difficulté: 1 étoile(s)

Correction Exercice 2

1. $3x + 5 = 2x - 7 \iff 3x - 2x = -7 - 5 \iff x = -12$
2. $2x - 6 = 5x + 1 \iff 2x - 5x = 1 + 6 \iff -3x = 7 \iff x = -\frac{7}{3}$
3. $2(2x - 1) = 3(x + 4) \iff 4x - 2 = 3x + 12 \iff 4x - 3x = 12 + 2 \iff x = 14$

Exercice 3 (Niveau 2)

Soit le système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

1. Résoudre (S) par la méthode de substitution.
2. Résoudre (S) par la méthode des combinaisons.
3. Vérifier avec la méthode du déterminant.

Difficulté: 2 étoile(s)

Correction Exercice 3

1. De la 2ème équation : $y = 3x - 1$
   Substituer dans la 1ère : $2x + 3(3x - 1) = 7 \iff 2x + 9x - 3 = 7 \iff 11x = 10 \iff x = \frac{10}{11}$
   $y = 3 \times \frac{10}{11} - 1 = \frac{30}{11} - \frac{11}{11} = \frac{19}{11}$
2. $(L1) : 2x + 3y = 7$
   $(L2) : 3x - y = 1$
   $3L1 + L2 : 6x + 9y + 3x - y = 21 + 1 \iff 9x + 8y = 22$
   $2L2 : 6x - 2y = 2$
   $(9x + 8y) - (6x - 2y) = 22 - 2 \iff 3x + 10y = 20$
   Résoudre le nouveau système...
3. Déterminant principal : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 3 = -2 - 9 = -11$
   $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \times (-1) - 3 \times 1 = -10$
   $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 7 \times 3 = 2 - 21 = -19$
   $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-11} = \frac{10}{11}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-19}{-11} = \frac{19}{11}$

Exercice 4 (Niveau 2)

Soient les vecteurs $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(3; 4)$. Calculer :

1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $3\vec{u} - 2\vec{v}$
3. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$
4. La norme de $\vec{u}$

Difficulté: 2 étoile(s)

Correction Exercice 4

1. $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 3; -1 + 4) = (5; 3)$
2. $3\vec{u} = (6; -3), \quad 2\vec{v} = (6; 8) \quad \Rightarrow \quad 3\vec{u} - 2\vec{v} = (6 - 6; -3 - 8) = (0; -11)$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$
4. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Exercice 5 (Niveau 3)

Montrer que pour tout entier naturel n, $7^{2n} - 1$ est divisible par 48. **Difficulté:** 3 étoile(s)

Correction Exercice 5

On utilise les congruences modulo 48.
$7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{48}$ donc $7^{2n} = (7^2)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{48}$
Ainsi $7^{2n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{48}$, donc divisible par 48.

Exercice 6 (Niveau 3)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Difficulté: 3 étoile(s)

Correction Exercice 6

1. $u_1 = 3 \times 1 - 4 = -1$
   $u_2 = 3 \times (-1) - 4 = -7$
   $u_3 = 3 \times (-7) - 4 = -25$

2. $v_n = u_n - 2$
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = (3u_n - 4) - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$
   Donc (v_n) est géométrique de raison 3.
3. $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$
   $v_n = v_0 \times 3^n = -1 \times 3^n = -3^n$
   $u_n = v_n + 2 = 2 - 3^n$

Exercice 7 (Niveau 4)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne :

$$15x + 21y = 60$$

Difficulté: 4 étoile(s)

Correction Exercice 7

PGCD(15,21)=3 et 3|60 donc solutions existent.
Simplifier par 3 : $5x + 7y = 20$.
Solution particulière : $x_0 = 4, y_0 = 0$ (car $5 \times 4 + 7 \times 0 = 20$)
Solutions générales :
$x = 4 + 7k$
$y = 0 - 5k = -5k$ pour $k \in \mathbb{Z}$
Vérification : $5(4 + 7k) + 7(-5k) = 20 + 35k - 35k = 20$

Exercice 8 (Niveau 4)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. Calculer le noyau et l'image de f.

Difficulté: 4 étoile(s)

Correction Exercice 8

1. $f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2)$ (vérification directe)
2. Matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
3. Noyau : résoudre $f(x, y) = (0, 0)$
   $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$
   Solution : $x = 0, y = 0$ donc $\ker f = \{(0, 0)\}$
   Image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(2, 1), (1, -3)\}$ qui est $\mathbb{R}^2$ car det(A) = -7 0

Exercice 9 (Niveau 5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Difficulté: 5 étoile(s)

Correction Exercice 9

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-1 & 3+1 \\ -3-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
   $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-4 & 8+4 \\ -12+0 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$
2. Polynôme caractéristique :
   $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - (1)(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$
   Valeur propre double : $\lambda = 2$
   Sous-espace propre : $(A - 2I)X = 0$
   $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x + y = 0$
   Vecteurs propres : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Non, car la dimension du sous-espace propre (1) < multiplicité algébrique (2)
4. $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ où P est une matrice de passage

Exercice 10 (Niveau 2)

Factoriser l'expression : $x^2 - 5x + 6$ **Difficulté:** 2 étoile(s)

Correction Exercice 10

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Exercice 11 (Niveau 3)

Résoudre : $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3)$ **Difficulté:** 3 étoile(s)

Correction Exercice 11

Conditions : $x > 1$
$\ln((x+1)(x-1)) = \ln(3) \iff \ln(x^2-1) = \ln(3) \iff x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ (car $x > 1$)

Exercice 12 (Niveau 4)

Déterminer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Difficulté: 4 étoile(s)

Correction Exercice 12

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 3 \times 1 = 3$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Exercice 13 (Niveau 1)

Résoudre : $x^2 - 4x + 3 = 0$ **Difficulté:** 1 étoile(s)

Correction Exercice 13

Discriminant : $\Delta = 16 - 12 = 4$
Solutions : $x = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ donc $x = 3$ ou $x = 1$

Exercice 14 (Niveau 3)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **Difficulté:** 3 étoile(s)

Correction Exercice 14

Par récurrence :
Initialisation : $n = 1$, $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1$
Hérédité : Supposons vrai au rang n, alors
$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$
$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Exercice 15 (Niveau 4)

Calculer l'intégrale : $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx$ **Difficulté:** 4 étoile(s)

Correction Exercice 15

Intégration par parties :
$u = x, v' = \cos(x)$
$u' = 1, v = \sin(x)$
$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi/2}$
$= \frac{\pi}{2} - (0 - (1 - 0)) = \frac{\pi}{2} - 1$

Exercice 16 (Niveau 2)

Résoudre : $|x-2| = |3x+1|$ **Difficulté:** 2 étoile(s)

Correction Exercice 16

Deux cas :
1. $x - 2 = 3x + 1 \iff -2x = 3 \iff x = -\frac{3}{2}$
2. $x - 2 = -(3x+1) \iff x - 2 = -3x - 1 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$

Exercice 17 (Niveau 5)

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Difficulté:** 5 étoile(s)

Correction Exercice 17

Polynôme caractéristique : $\det(B - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
Vecteurs propres :
Pour $\lambda = 2$: $(B-2I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 2x \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Pour $\lambda = 3$: $(B-3I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = x \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 18 (Niveau 3)

Résoudre : $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **Difficulté:** 3 étoile(s)

Correction Exercice 18

Poser $X = e^x$: $X^2 - 3X + 2 = 0 \iff (X-1)(X-2) = 0$
$X = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$
$X = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

Exercice 19 (Niveau 4)

Déterminer la nature de la série : $\sum \frac{1}{n^2}$ **Difficulté:** 4 étoile(s)

Correction Exercice 19

Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente (par comparaison ou théorème de Riemann)

Exercice 20 (Niveau 1)

Calculer : $\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$ **Difficulté:** 1 étoile(s)

Correction Exercice 20

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

Exercice 21 (Niveau 2)

Développer : $(2x-3)^3$ **Difficulté:** 2 étoile(s)

Correction Exercice 21

$(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Exercice 22 (Niveau 5)

Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ **Difficulté:** 5 étoile(s)

Correction Exercice 22

Solution homogène : $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \rightarrow y_h = (Ax+B)e^{2x}$
Solution particulière : $y_p = Cx^2e^{2x}$
Substitution : $y_p' = (2Cx^2 + 2Cx)e^{2x}$, $y_p'' = (4Cx^2 + 8Cx + 2C)e^{2x}$
Substituer : $[4Cx^2 + 8Cx + 2C - 4(2Cx^2 + 2Cx) + 4Cx^2]e^{2x} = e^{2x}$
$\Rightarrow (4Cx^2 + 8Cx + 2C - 8Cx^2 - 8Cx + 4Cx^2)e^{2x} = e^{2x}$
$\Rightarrow (0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2C)e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
Solution générale : $y = (Ax + B + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$

Exercice 23 (Niveau 3)

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **Difficulté:** 3 étoile(s)

Correction Exercice 23

C'est une matrice triangulaire : produit des éléments diagonaux $= 1 \times 4 \times 6 = 24$

Exercice 24 (Niveau 4)

Trouver les coordonnées du point d'intersection des plans :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

Difficulté: 4 étoile(s)

Correction Exercice 24

Résolution par combinaisons :
$L1 + L2 : 3x + y = 4$
$L3 : 3x + y - 2z = 4$
Soustraire : $(3x + y) - (3x + y - 2z) = 4 - 4 \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$
De $3x + y = 4$ et $x + 2y = 3$ (car z=0 dans L1)
Résoudre : $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$
Solution : $x = 1, y = 1, z = 0$

Exercice 25 (Niveau 5)

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ **Difficulté:** 5 étoile(s)

Correction Exercice 25

Poser $Z = z^2$: $Z^2 + 4Z + 16 = 0$
Discriminant : $\Delta = 16 - 64 = -48 = 48i^2$
$Z = \dfrac{-4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = -2 \pm 2i\sqrt{3}$
Résoudre $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$
Forme trigonométrique : $-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\text{cis}\dfrac{2\pi}{3}$
Racines : $z = 2\text{cis}\dfrac{\pi}{3}, 2\text{cis}\dfrac{4\pi}{3}$
Pareil pour l'autre : $z = 2\text{cis}\dfrac{-\pi}{3}, 2\text{cis}\dfrac{-4\pi}{3}$