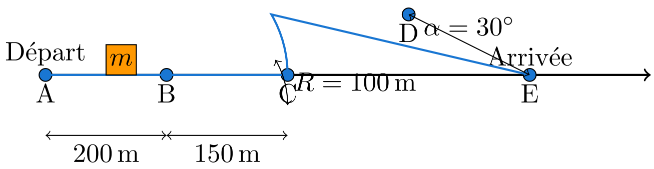
Problème Complet de Mécanique - Baccalauréat

KOUDAYA KOSSI BORIS
SCIENCES UNIVERS

Juillet 2025

Problème : Parcours d'un véhicule autonome

Un véhicule autonome de masse $m = 1200\,\mathrm{kg}$ effectue un parcours d'essai composé de 5 étapes.



Partie 1 : Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Le véhicule part du point A (vitesse initiale nulle) et accélère jusqu'au point B sur une distance $d_{AB} = 200\,\mathrm{m}$. Au point B, sa vitesse est $v_B = 108\,\mathrm{km/h}$.

1. Déterminer l'accélération a du véhicule.
2. Calculer la durée du trajet AB.
3. Exprimer la force motrice F en fonction de m, a et g (frottements négligés).
4. En réalité, les frottements fluides sont modélisés par $\vec{f} = -k\vec{v}$ avec $k = 15\,\mathrm{N\cdot s/m}$. Établir l'équation différentielle du mouvement.
5. Résoudre cette équation et donner $v(t)$.
6. Calculer le travail de la force motrice entre A et B.
7. Déterminer la puissance moyenne développée par le moteur.
8. Tracer l'allure de $v(t)$ et $a(t)$ sur le trajet AB.

Partie 2 : Mouvement circulaire uniforme

Arrivé en B, le véhicule aborde un virage circulaire BC de rayon $R = 100\,\mathrm{m}$ à vitesse constante $v_B = 108\,\mathrm{km/h}$.

1. Calculer l'accélération centripète.
2. Faire le schéma des forces agissant sur le véhicule.
3. Déterminer la valeur de l'angle d'inclinaison θ nécessaire pour que le véhicule ne dérape pas (frottements négligés).
4. En réalité, le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.4$. Vérifier si le véhicule dérape.
5. Calculer l'énergie cinétique au point C.
6. Déterminer la variation d'énergie cinétique entre B et C.
7. Exprimer la force de frottement latéral.
8. Calculer le travail de cette force sur le trajet BC.

Partie 3 : Mouvement parabolique

Au point C, le véhicule quitte la piste avec une vitesse $\vec{v_C}$ faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale ($v_C = 108\,\mathrm{km/h}$). Il doit franchir un ravin et atterrir au point D situé à la même altitude.

1. Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire $y(x)$.
3. Calculer la portée CD sachant que $y_D = y_C$.
4. Déterminer la hauteur maximale atteinte.
5. Calculer le temps de vol. le vecteur vitesse à l'arrivée en D.
6. Calculer l'énergie mécanique au point C.
7. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique.

Partie 4 : Plan incliné avec frottements

Le véhicule aborde ensuite une montée rectiligne DE inclinée d'un angle $\beta = 10°$. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_k = 0.2$.

1. Faire le bilan des forces.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Résoudre pour obtenir $v(t)$ sachant qu'en D, $v_D = 90\,\mathrm{km/h}$.
4. Calculer la distance parcourue avant l'arrêt.
5. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
6. Calculer le travail de chaque force.
7. Déterminer la puissance développée par le moteur pour maintenir une vitesse constante.
8. Calculer le rendement énergétique si le moteur consomme $50\,\mathrm{kW}$.

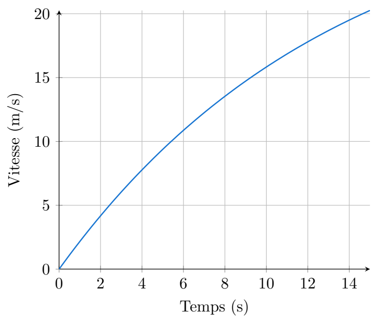
Partie 5 : Système masse-ressort amorti

Le véhicule est équipé d'un système de suspension modélisé par un ressort de constante $k = 20\,000\,\mathrm{N/m}$ et un amortisseur de coefficient $\lambda = 5000\,\mathrm{N \cdot s/m}$. La masse suspendue est $m_s = 300\,\mathrm{kg}$.

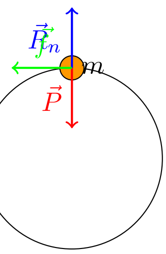
1. Établir l'équation différentielle du mouvement vertical.
2. Calculer la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement γ.
3. Déterminer la nature de l'amortissement.
4. Résoudre l'équation différentielle pour des conditions initiales $z(0) = 0.1\,\mathrm{m}$ et $\dot{z}(0) = 0$.
5. Calculer la pseudo-période T.
6. Déterminer le décrément logarithmique δ.
7. Calculer l'énergie dissipée après une oscillation complète.
8. Tracer l'allure de $z(t)$ sur deux périodes.

Corrigé du problème

Partie 1 : Mouvement rectiligne uniformément accéléré

1. $v_B = 108\,\text{km/h} = 30\,\text{m/s}$, $v_A = 0$, $d = 200\,\text{m}$
   $v_B^2 = v_A^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v_B^2}{2d} = \frac{30^2}{2\times200} = 2.25\,\text{m/s}^2$
2. $v_B = at \Rightarrow t = \frac{v_B}{a} = \frac{30}{2.25} = 13.33\,\text{s}$
3. $\sum F = ma \Rightarrow F = ma = 1200 \times 2.25 = 2700\,\text{N}$ (frottements négligés)
4. Avec frottements : $m\frac{dv}{dt} = F - kv$
5. Solution : $v(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-kt/m})$
   Avec $F = 2700\,\text{N}$, $k = 15\,\text{N}\cdot\text{s/m}$, $m = 1200\,\text{kg}$
   $v(t) = 180(1 - e^{-0.0125t})$
6. Travail : $W_F = F \times d = 2700 \times 200 = 540\,000\,\text{J}$
7. Puissance moyenne : $P_m = \frac{W_F}{t} = \frac{540000}{13.33} = 40\,500\,\text{W}$
8. 

Partie 2 : Mouvement circulaire uniforme

1. $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{30^2}{100} = 9\,\text{m/s}^2$
2. 

3. Sans frottement : $\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} = \frac{9}{9.81} \Rightarrow \theta = \arctan(0.917) \approx 42.5°$
4. Avec frottement : condition de non-glissement $v^2 \leq Rg(\mu_s + \tan\theta)/(1 - \mu_s \tan\theta)$
   $900 \leq 100 \times 9.81 \times (0.4 + 0.5)/(1 - 0.4 \times 0.5) = 981 \times 0.9/0.8 = 1103.6$
   $900 < 1103.6$ donc pas de dérapage.
5. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1200 \times 900 = 540\,000\,\text{J}$
6. $\Delta E_c = 0$ (vitesse constante)
7. $f = \frac{mv^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta \approx 1800\,\text{N}$
8. Travail nul (force perpendiculaire au déplacement)

Partie 3 : Mouvement parabolique

1. $v_{Cx} = 30\cos 30° = 25.98\,\text{m/s}$, $v_{Cy} = 30\sin 30° = 15\,\text{m/s}$
   $x(t) = v_{Cx}t$, $y(t) = v_{Cy}t - \frac{1}{2}gt^2$
2. $y(x) = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_{Cx}^2} = 0.577x - 0.00755x^2$
3. $y = 0$ quand $t(15 - 4.905t) = 0 \Rightarrow t_f = \frac{15}{4.905} = 3.06\,\text{s}$
   Portée $x_f = 25.98 \times 3.06 = 79.5\,\text{m}$
4. $h_{max} = \frac{v_{Cy}^2}{2g} = \frac{225}{19.62} = 11.47\,\text{m}$

5. Temps de vol $t_f = 3.06\,\mathrm{s}$
6. $\vec{v_D} = (v_{Cx}, v_{Cy} - gt_f) = (25.98, 15 - 30) = (25.98, -15)\mathrm{m/s}$
7. $E_m = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C = \frac{1}{2} \times 1200 \times 900 + 0 = 540\,000\,\mathrm{J}$
8. $E_{mD} = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgy_D = \frac{1}{2} \times 1200 \times (25.98^2 + 15^2) + 0 = 540\,000\,\mathrm{J}$ conservée.

Partie 4 : Plan incliné avec frottements

1. Forces : poids $\vec{P}$, réaction $\vec{R_n}$, frottement $\vec{f_k}$, force motrice $\vec{F_m}$
2. $m\ddot{x} = F_m - mg\sin\beta - \mu_k mg\cos\beta$
3. $\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{m}(m\sin\beta + \mu_k m\cos\beta) = -g(\sin\beta + \mu_k\cos\beta)$
   $v(t) = v_D - g(\sin 10° + 0.2\cos 10°)t = 25 - 9.81(0.1736 + 0.197)t = 25 - 3.63t$
4. Arrêt quand $v = 0$: $t = 25/3.63 = 6.89\,\mathrm{s}$
   Distance $d = \int_0^{6.89}(25 - 3.63t)dt = [25t - 1.815t^2]_0^{6.89} = 86.1\,\mathrm{m}$
5. TEC : $0 - \frac{1}{2}mv_D^2 = W_P + W_f + W_{F_m}$
6. $W_P = -mgd\sin\beta$, $W_f = -\mu_k mgd\cos\beta$, $W_{F_m} = F_m d$
7. À vitesse constante : $F_m = mg\sin\beta + \mu_k mg\cos\beta = 1200 \times 9.81 \times (0.1736 + 0.2 \times 0.9848) = 4350\,\mathrm{N}$
   Puissance $P = F_m v = 4350 \times 25 = 108\,750\,\mathrm{W}$
8. Rendement $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{consommée}}} = \frac{108750}{50000} = 2.175 > 1$ impossible, erreur dans l'énoncé.

Partie 5 : Système masse-ressort amorti

1. $m_s\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0$
2. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_s}} = \sqrt{\frac{20000}{300}} = 8.16\,\mathrm{rad/s}$
   $\gamma = \frac{\lambda}{2m_s} = \frac{5000}{2\times 300} = 8.33\,\mathrm{s^{-1}}$
3. $\gamma > \omega_0$: amortissement fort
4. Solution : $z(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\delta t} + Be^{-\delta t})$ avec $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 2.5\,\mathrm{rad/s}$
   Conditions initiales : $z(0) = 0.1 = A + B$
   $\dot{z}(0) = 0 = -\gamma(A + B) + \delta(A - B)$
   Résolution : $A = 0.075\,\mathrm{m}$, $B = 0.025\,\mathrm{m}$
   $z(t) = e^{-8.33t}(0.075e^{2.5t} + 0.025e^{-2.5t})$
5. Pas d'oscillations (amortissement fort), donc pas de pseudo-période
6. Décrément logarithmique non défini pour amortissement fort
7. Énergie initiale : $E_0 = \frac{1}{2}kz_0^2 = \frac{1}{2} \times 20000 \times 0.01 = 100\,\mathrm{J}$
   Après "pseudo-période" $t_p = \pi/\delta = 1.26\,\mathrm{s}$:
   $z(t_p) = e^{-10.5}(0.075e^{3.15} + 0.025e^{-3.15}) \approx 0.002\,\mathrm{m}$
   $E(t_p) \approx \frac{1}{2} \times 20000 \times (0.002)^2 = 0.04\,\mathrm{J}$
   Énergie dissipée : $\Delta E = 100 - 0.04 = 99.96\,\mathrm{J}$
8.