Problèmes de Synthèse : Limites et Continuité

Baccalauréat Scientifique

Problème 1 : Étude complète d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

1. **Domaine de définition**
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Factoriser le numérateur et le dénominateur.
2. **Limites et asymptotes**
   (a) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
   (b) Déterminer les éventuelles asymptotes verticales, horizontales et obliques.
   (c) Étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
3. **Continuité et prolongement**
   (a) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.
   (b) Peut-on prolonger f par continuité aux points exclus ? Si oui, définir ce prolongement.
   (c) Étudier la dérivabilité du prolongement.
4. **Théorème des valeurs intermédiaires**
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions réelles.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 0.01 de la solution dans $]2, +\infty[$.
5. **Bijection réciproque**
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-2, 0[$ sur un intervalle J à préciser.
   (b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Problème 2 : Fonction avec paramètres et exponentielle

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} ae^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ bx + c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

où a, b, c sont des réels.

1. **Continuité en 0**
   (a) Déterminer les relations entre a, b, c pour que g soit continue en 0.
   (b) Montrer que si g est continue en 0, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. **Dérivabilité en 0**

(a) Donner les conditions pour que g soit dérivable en 0.

(b) Montrer que si g est dérivable en 0, alors $b = c = 0$.

3. **Étude pour** $b = c = 0$ On suppose $b = c = 0$ et $a = 1$.

   (a) Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Démontrer que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **Théorème de la bijection**

   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. item Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1}.

5. **Limites et croissance comparée**

   (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 g(x)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3 : Fonction trigonométrique et périodicité

Soit la fonction $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 1$.

1. **Continuité et dérivabilité**

   (a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Étudier la dérivabilité de h en 0.

2. **Variations et extremums**

   (a) Calculer la dérivée de h sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Dresser le tableau de variations sur $[0, 2\pi]$.

   (c) Déterminer les extremums locaux de h.

3. **Intégrale et aire** On pose $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.

   (a) Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x)$.

   (c) Montrer que $|H(x)| \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. **Équation fonctionnelle**

   (a) Montrer que h n'est pas périodique.

   (b) Résoudre l'équation $h(x) = h(2x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

5. **Théorème de Rolle**

   (a) Montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.

   (b) En appliquant le théorème de Rolle à $xh(x)$, montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une solution dans chaque intervalle $]k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[$ pour $k \geq 1$.

Problème 4 : Problème de synthèse avec valeur absolue

Soit la fonction $k(x) = \frac{|x^2-1|}{x-2}$.

1. **Domaine et expression**

   (a) Déterminer le domaine de définition.

   (b) Donner une expression de k sans valeur absolue.

2. **Limites et continuité**
   (a) Étudier les limites aux bornes du domaine.
   (b) Étudier la continuité sur $\mathcal{D}_k$.
   (c) Prolonger par continuité si possible.
3. **Asymptotes**
   (a) Déterminer les asymptotes à la courbe.
   (b) Étudier la position relative par rapport aux asymptotes.
4. **Dérivabilité**
   (a) Étudier la dérivabilité en $x = 1$.
   (b) Calculer la dérivée sur chaque intervalle.
5. **Théorème des valeurs intermédiaires généralisé**
   (a) Montrer que k réalise une bijection de $]-\infty, -1[$ sur un intervalle à déterminer.
   (b) Montrer que l'équation $k(x) = m$ admet toujours au moins une solution pour $m > 0$.
   (c) Pour quelles valeurs de m y a-t-il exactement trois solutions ?
6. **Étude de fonction composée** Soit $m(x) = k(e^x)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x)$.
   (c) Étudier la continuité et la dérivabilité de m.