Cours par Exercices: Limites et Continuité

Niveau BAC Scientifique

Boris Kossi Koudaya

June 2025

Introduction

Ce cours présente les concepts fondamentaux de **limites** et de **continuité** à travers 25 exercices corrigés et classés par difficulté. Chaque correction intègre des rappels de cours pour consolider les connaissances. Les exercices couvrent l'intégralité du programme de Terminale Scientifique.

Difficulté	Description
$\star$	Application directe du cours
$\star\star$	Technique de base
$\star\star\star$	Combinaison de techniques
$\star\star\star\star$	Problème complexe
$\star\star\star\star\star$	Exercice type bac

Partie 1 : Limites (Exercices 1 à 12)

1. **($\star$) Calcul de limite simple**
   Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2x+5}{2x^2+4x-1}$

   Correction : **Rappel :** Pour les fractions rationnelles en ∞, on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{3x^2-2x+5}{2x^2+4x-1} = \frac{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2})} = \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$$

2. **($\star\star$) Forme indéterminée $\infty - \infty$**
   Calculer $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$

   Correction : **Rappel :** Pour lever l'indétermination, on multiplie par l'expression conjuguée.

$$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$= \frac{3x}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

3. ($\star\star\star$) **Limite trigonométrique**

Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$

Correction : **Rappel :** On utilise $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ et $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$

$$\frac{\tan(2x)}{\sin(5x)} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)\sin(5x)} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{\cos(2x)}$$
$$\xrightarrow{x\to 0} 1 \times 1 \times \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

4. ($\star\star\star\star$) **Limite exponentielle**

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{x}}{x}$

Correction : **Rappel :** On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle.

$$\frac{e^{3x}-e^{x}}{x} = 3\frac{e^{3x}-1}{3x} - \frac{e^{x}-1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 3\times 1 - 1 = 2$$

5. ($\star\star\star\star\star$) **Problème complet**

Soit $f(x) = x^2 \ln(1+\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

(a) Montrer que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

(b) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

Correction : **Rappel :** On utilise $\ln(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$ et les croissances comparées.

a) Quand $x \to +\infty$, poser $u = \frac{1}{x} \to 0$:

$$f(x) = \frac{1}{u^2}\ln(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u^2} \sim \frac{u}{u^2} = \frac{1}{u} \to +\infty \quad \text{(Faux !)}$$

Erreur : $\frac{1}{u^2} \times u = \frac{1}{u} \to +\infty$ mais :

$$f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to +\infty} 0 \times (+\infty) \quad \text{F.I.}$$

Poser $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{t} = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

b) Quand $x \to 0^+$:

$$f(x) = x^2\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x^2\ln(\frac{1}{x}) = -x^2\ln x \xrightarrow{x\to 0^+} 0 \quad (\text{car } x^\alpha \ln x \to 0)$$

6. ($\star\star$) **Théorème des gendarmes**

Montrer que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes.

Correction : **Rappel :** On encadre $\sin x$ qui est borné : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

7. ($\star\star\star$) **Limite avec paramètre**
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}-a}{x-a^2}$ pour $x \geqslant 0$, $x \neq a^2$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to a^2} f(x)$ selon les valeurs de $a > 0$.
Correction : **Rappel :** On simplifie par la quantité conjuguée.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-a}{(\sqrt{x})^2 - a^2} = \frac{\sqrt{x}-a}{(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)} = \frac{1}{\sqrt{x}+a} \quad \text{pour } \sqrt{x} \neq a$$
$$\lim_{x\to a^2} f(x) = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

8. ($\star\star\star\star$) **Forme 1^∞**
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$
Correction : **Rappel :** On utilise la forme exponentielle : $f^g = e^{g\ln f}$

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \exp\left[3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{t\to 0} 3\frac{\ln(1+2t)}{t} = 3\times 2\times \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{2t} = 6\times 1 = 6$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\cdots) = e^6$

9. ($\star\star$) **Limite à droite et à gauche**
Soit $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$. Étudier les limites en $x = 1$.
Correction : **Rappel :** La valeur absolue change de définition selon $x < 1$ ou $x > 1$.
Pour $x > 1$: $|x-1| = x-1$ donc

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x\to 1^+} \frac{1}{2}$$

Pour $x < 1$: $|x-1| = 1-x$ donc

$$f(x) = \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x\to 1^-} -\frac{1}{2}$$

Limites différentes à droite et à gauche : pas de limite en 1.

10. ($\star\star\star\star\star$) **Asymptotes**
Soit $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$.
Déterminer les asymptotes à la courbe de f.
Correction : **Rappel :** Asymptote verticale en a si $\lim f = \infty$, horizontale si $\lim f = b$, oblique si $\lim[f(x) - (ax+b)] = 0$.
1. Asymptote verticale en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(2x-1) = 1 \quad \text{(pas d'AV)}$$

2. En ∞ :

$$f(x) = 2x-1+\frac{0}{x-1} = 2x-1 \quad \text{après division}$$
$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - (2x-1)\right] = 0$$

Donc asymptote oblique $y = 2x-1$.

11. ($\star\star\star$) **Limite avec racine**
Calculer $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
Correction : **Rappel :** Multiplication par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$\xrightarrow{x\to 3}\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

12. ($\star\star\star\star$) **Croissances comparées**
Comparer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$
Correction : **Rappel :** e^x l'emporte sur toute puissance de x en $+\infty$, mais $e^x \to 0$ en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty \quad \text{(croissance exponentielle > polynomiale)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim_{x\to+\infty}(-t)^2e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$$

Partie 2 : Continuité (Exercices 13 à 25)

13. ($\star$) **Continuité en un point**
Soit $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=a$.
Pour quelle valeur de a f est-elle continue en 0 ?
Correction : **Rappel :** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ donc $a=1$ pour continuité.

14. ($\star\star\star$) **Prolongement par continuité**
Soit $g(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ pour $x\in]-1,0[\cup]0,1[$.
Prolonger g par continuité en 0.
Correction : **Rappel :** On calcule la limite en 0.

$$g(x)=\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
$$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{2}{1+1}=1$$

Donc on pose $g(0)=1$.

15. ($\star\star\star\star$) **Théorème des valeurs intermédiaires**
Montrer que $x^3+3x-5=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Correction : **Rappel :** On applique le TVI et on montre la stricte monotonie.
Soit $f(x)=x^3+3x-5$.
$f'(x)=3x^2+3>0$ donc f strictement croissante.
$f(1)=-1<0$, $f(2)=8+6-5=9>0$.
Donc solution unique dans $]1,2[$.

16. ($\star\star\star\star\star$) **Bijection réciproque**
Soit $h(x)=x+e^x$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J.
(b) Justifier que h^{-1} est dérivable et calculer $(h^{-1})'(1)$.

Correction : a) $h'(x) = 1 + e^x > 0$ donc strictement croissante.
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$
Donc bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
b) h dérivable et $h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} dérivable.
Soit $y = 1 = h(x) \Rightarrow x + e^x = 1$.
Solution évidente $x = 0$ (car $0 + e^0 = 1$).
$(h^{-1})'(1) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

17. **($\star\star$) Continuité sur un intervalle**
Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?
(a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
(b) $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (partie entière)

Correction : a) Non, discontinue en $x = 2$ (non définie).
b) Non, discontinue en tout entier relatif.

18. **($\star\star\star$) Composition**
Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
Étudier la continuité de $g \circ f$ sur $[0, +\infty[$.

Correction : **Rappel :** La composition est continue si les fonctions sont continues.
f continue sur $[0, +\infty[$, g continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
$g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$
Définie si $\sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 4$.
Continue sur $[0, 4[\cup]4, +\infty[$, discontinue en $x = 4$.

19. **($\star\star\star\star$) TVI avec paramètre**
Soit $f(x) = x^3 - 3x + k$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, f admet au moins une racine réelle.

Correction : **Rappel :** On cherche un changement de signe.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
f continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après TVI, f prend toute valeur réelle.
En particulier 0 est atteint.

20. **($\star\star\star\star\star$) Problème synthèse**
Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
(a) Déterminer a pour que f soit continue en 0.
(b) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$.

Correction : a) Continuité en 0 :
$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$
Limites différentes : impossible de rendre f continue en 0.
b) Sur $\mathbb{R}^*$: continue comme quotient de fonctions continues.
En 0 : discontinue quel que soit a.

21. **($\star\star$) Continuité et dérivabilité**
La continuité implique-t-elle la dérivabilité ? Donner un contre-exemple.

Correction : **Rappel :** Non, la continuité est nécessaire mais pas suffisante.
Contre-exemple : $f(x) = |x|$ en 0.
Continue en 0 ($\lim = f(0) = 0$) mais non dérivable (pente -1 à gauche, 1 à droite).

22. ($\star\star\star$) **Fonction lipschitzienne**
Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas lipschitzienne.
Correction : **Rappel :** Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
Sur $[0, 1]$, f continue sur un compact donc uniformément continue.
Mais $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ donc pas de dérivée bornée, ni lipschitzienne.

23. ($\star\star\star\star$) **TVI généralisé**
Montrer que toute fonction continue sur un intervalle I vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
Correction : **Rappel :** C'est la définition d'un intervalle : connexe par arcs.
Soit f continue sur I, $a, b \in I$ avec $f(a) < k < f(b)$.
Soit $J = [a, b] \subset I$ (car intervalle).
f continue sur $[a, b]$, donc par TVI, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.

24. ($\star\star\star\star\star$) **Équation fonctionnelle**
Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Montrer que $f(x) = kx$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.
Correction : **Rappel :** On montre d'abord pour les entiers, puis rationnels, puis réels par densité.
1) $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
2) Par récurrence : $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n})$ donc $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$
4) Pour rationnel $r = p/q$: $f(r) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = pf(1/q) = \frac{p}{q}f(1)$
5) Pour x réel, soit (r_n) suite de rationnels convergeant vers x.
$f(x) = \lim f(r_n) = \lim r_n f(1) = xf(1)$ par continuité.
Donc $k = f(1)$.

25. ($\star\star\star\star\star$) **Problème de synthèse**
Soit $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition.
   (b) Prolonger par continuité si possible.
   (c) Étudier les limites aux bornes.
   (d) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins deux solutions.

Correction : a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Factorisation :
Numérateur : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$
Donc $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ pour $x \neq 1$
Prolongement : $f(1) = (1 - 2)(1 + 1) = (-1)(2) = -2$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

d) $f(x) = x^2 - x - 2$
$f(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
Discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$
Solutions $x = \frac{1\pm5}{2}$ soit $x = 3$ et $x = -2$
Deux solutions réelles distinctes.