

Problème de Synthèse - Électromagnétisme

Boris KOUDAYA

Août 2025

Problème : Station météo autonome

Une station météo autonome est alimentée par un système combinant éolienne et panneaux solaires. Le système électrique comprend plusieurs composants étudiés ci-dessous.

Partie 1 : Champ magnétique terrestre

Le capteur magnétique utilise le champ magnétique terrestre $B_t = 50 \mu\text{T}$ orienté à 60° sous l'horizontale.

1. Calculer les composantes horizontale et verticale du champ.
2. Un fil rectiligne vertical de longueur $L = 1.5 \text{ m}$ parcouru par $I = 2 \text{ A}$ est placé dans ce champ. Calculer la force magnétique subie.
3. Déterminer le moment de cette force par rapport à la base du fil.
4. Calculer le champ magnétique créé par ce fil à 10 cm de distance.
5. Comparer ce champ au champ terrestre.
6. Proposer un dispositif pour mesurer le champ terrestre.
7. Établir l'expression du couple sur une bobine de surface S avec N spires.
8. Calculer le courant nécessaire pour équilibrer le champ terrestre avec une bobine de 100 spires de 5 cm de diamètre.

Partie 2 : Panneau solaire photovoltaïque

Le panneau solaire a les caractéristiques suivantes :

- Tension à vide : $V_{oc} = 22 \text{ V}$
- Courant de court-circuit : $I_{sc} = 6 \text{ A}$
- Surface : $A = 0.5 \text{ m}^2$

1. Modéliser le panneau par un modèle à une diode.
2. Calculer la puissance maximale délivrable.
3. Déterminer le rendement énergétique sous éclairement $E = 1000 \text{ W/m}^2$.
4. Calculer la résistance série optimale.
5. Le panneau charge une batterie 12 V avec un régulateur MPPT. Calculer le courant de charge.
6. La batterie a une capacité de 100 Ah . Calculer le temps de charge complet.
7. L'énergie produite en une journée est $E_j = 0.8 \text{ kWh}$. Calculer l'ensoleillement équivalent.
8. Tracer la caractéristique I-V du panneau.

Partie 3 : Éolienne à induction

L'éolienne utilise un alternateur triphasé :

- Fréquence de rotation : $n = 300$ tr/min
 - Nombre de pôles : $p = 8$
 - Tension ligne-ligne : $U = 48$ V
 - Résistance stator : $R_s = 0.2 \Omega$
 - Réactance synchrone : $X_s = 1.5 \Omega$
1. Calculer la fréquence du courant produit.
 2. Déterminer le couple mécanique pour une puissance électrique de 500 W.
 3. Calculer le courant de ligne (supposer $\cos \phi = 0.8$).
 4. Déterminer la force électromotrice interne.
 5. Calculer le rendement de l'alternateur.
 6. Modéliser le circuit équivalent par phase.
 7. La charge est un redresseur avec condensateur. Calculer la capacité pour une ondulation de 10%.
 8. Étudier l'effet d'une variation de vitesse de $\pm 20\%$ sur la tension.

Partie 4 : Circuit de régulation

Le circuit de régulation comprend :

- Inductance : $L = 10$ mH
 - Condensateur : $C = 1000$ μ F
 - Résistance : $R = 5 \Omega$
1. Établir l'équation différentielle du circuit RLC série.
 2. Calculer la fréquence propre et le facteur de qualité.
 3. Déterminer le régime de fonctionnement.
 4. Résoudre pour une tension d'entrée $e(t) = 12 \cos(100\pi t)$.
 5. Calculer l'impédance complexe à $f = 50$ Hz.
 6. Tracer le diagramme de Bode d'amplitude.
 7. Calculer la puissance dissipée dans la charge.
 8. Étudier la réponse à un échelon de tension 12 V.

Partie 5 : Transmission des données

Les données sont transmises par onde radio à $f = 433$ MHz avec une puissance $P_t = 100$ mW.

1. Calculer la longueur d'onde.
2. Déterminer l'intensité à 1 km (modèle isotrope).
3. Calculer le champ électrique maximal à cette distance.
4. L'antenne réceptrice a un gain $G_r = 2$ et une surface effective $A_{eff} = 0.1$ m². Calculer la puissance reçue.
5. Le récepteur a une sensibilité de -100 dBm. Vérifier si la liaison est possible.
6. Calculer l'atténuation due à la pluie (10 mm/h) pour une distance de 5 km (supposer 0.1 dB/km).
7. Proposer un système de modulation numérique.
8. Calculer le débit maximal selon Shannon avec un SNR de 20 dB.

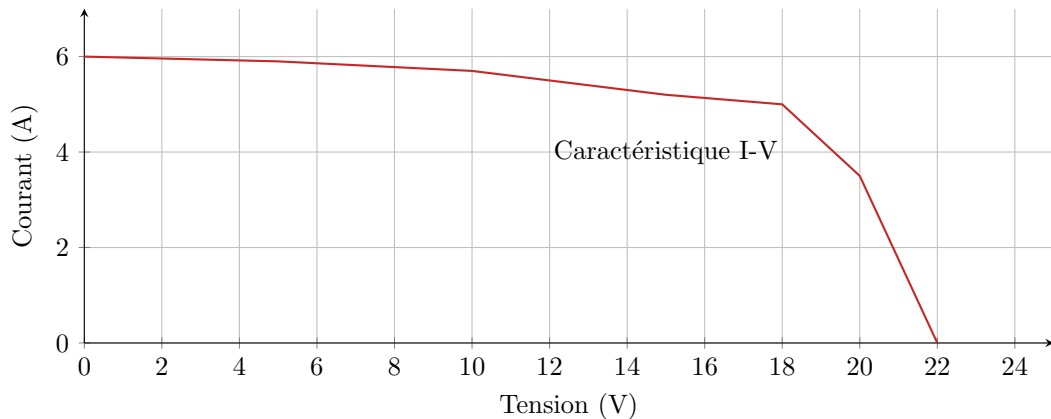
Corrigé du Problème

Partie 1 : Champ magnétique terrestre

1. $B_h = B_t \cos 60^\circ = 25 \mu\text{T}$, $B_v = B_t \sin 60^\circ = 43.3 \mu\text{T}$
2. $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, $F = ILB \sin \theta = 2 \times 1.5 \times 50 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 7.5 \mu\text{N}$
3. Moment $M = F \times \frac{L}{2} = 5.625 \mu\text{N m}$ (bras de levier $L/2$)
4. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times 0.1} = 4 \mu\text{T}$
5. $B/B_t = 4/50 = 8\%$ (non négligeable)
6. Utiliser une bobine de Helmholtz ou un magnétomètre à fluxgate
7. $\Gamma = NISB \sin \theta$
8. $B_{\text{bob}} = \frac{\mu_0 NI}{2R}$, égal à B_t : $I = \frac{2RB_t}{\mu_0 N} = \frac{2 \times 0.025 \times 50 \times 10^{-6}}{4\pi \times 10^{-7} \times 100} = 0.2 \text{ A}$

Partie 2 : Panneau solaire

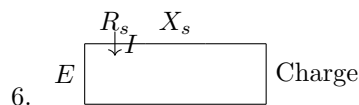
1. Modèle : $I = I_{ph} - I_0(e^{V/(nV_T)} - 1)$ où $V_T = 26 \text{ mV}$ à 25°C
2. $P_{\text{max}} \approx 0.75 \times V_{oc} \times I_{sc} = 0.75 \times 22 \times 6 = 99 \text{ W}$
3. $\eta = \frac{P_{\text{max}}}{E \cdot A} = \frac{99}{1000 \times 0.5} = 19.8\%$
4. $R_s = \frac{V_{mp}}{I_{mp}} \approx \frac{18}{5.5} = 3.27 \Omega$ (pour $V_{mp} \approx 18 \text{ V}$, $I_{mp} \approx 5.5 \text{ A}$)
5. $I_{\text{charge}} = \frac{P_{\text{max}}}{V_{\text{bat}}} = \frac{99}{12} = 8.25 \text{ A}$
6. $t = \frac{\text{Capacité}}{I} = \frac{100}{8.25} = 12.12 \text{ h}$
7. $H = \frac{E_j}{A} = \frac{0.8 \times 1000}{0.5} = 1600 \text{ Wh/m}^2$



8.

Partie 3 : Éolienne à induction

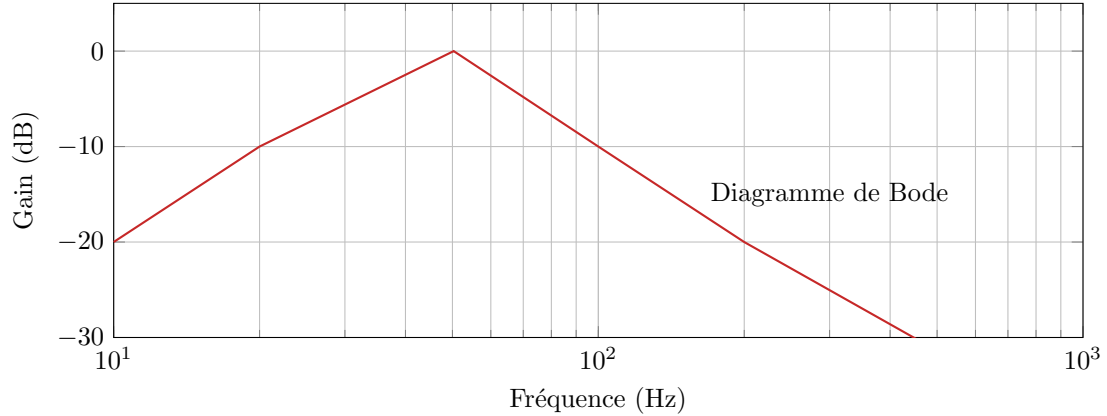
1. $f = \frac{p \cdot n}{120} = \frac{8 \times 300}{120} = 20 \text{ Hz}$
2. $\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.4 \text{ rad/s}$, $T = \frac{P}{\Omega} = \frac{500}{31.4} = 15.9 \text{ N} \cdot \text{m}$
3. $I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \phi} = \frac{500}{\sqrt{3} \times 48 \times 0.8} = 7.5 \text{ A}$
4. $E = \sqrt{(U \cos \phi + R_s I)^2 + (U \sin \phi + X_s I)^2} \approx \sqrt{(38.4 + 1.5)^2 + (28.8 + 11.25)^2} \approx 55 \text{ V}$ (où $\sin \phi = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$)
5. Pertes Joule = $3R_s I^2 = 3 \times 0.2 \times (7.5)^2 = 33.75 \text{ W}$, $\eta = \frac{500}{500 + 33.75} \approx 93.7\%$



7. $\Delta V = \frac{I}{Cf} \Rightarrow C = \frac{I}{\Delta V \cdot f} = \frac{7.5}{0.1 \times 48 \times 20} = 78.125 \text{ mF}$
8. $U \propto n$ donc $\Delta U/U = \pm 20\%$

Partie 4 : Circuit de régulation

1. $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}$
2. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.01 \times 0.001}} = 316.2 \text{ rad/s}$, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50.3 \text{ Hz}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{0.01}{0.001}} = 0.632$
3. $Q < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ donc régime apériodique
4. Solution : $i(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t + \phi)$ avec $\alpha = \frac{R}{2L} = 250$, $\omega = 100\pi = 314 \text{ rad/s}$
5. $Z = 5 - j0.04 \Omega$ (Real part : 5Ω , Imaginary part : -0.04Ω)



- 6.
7. $P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{(12/\sqrt{2})^2}{5} = \frac{72}{5} = 14.4 \text{ W}$
8. Solution : $i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = L/R = 0.01/5 = 2 \text{ ms}$

Partie 5 : Transmission des données

1. $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{433 \times 10^6} = 0.693 \text{ m}$
2. $I = \frac{P_t}{4\pi d^2} = \frac{0.1}{4\pi \times 1000^2} = 7.96 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$
3. $E_{\max} = \sqrt{2Z_0 I} = \sqrt{2 \times 377 \times 7.96 \times 10^{-9}} = 0.077 \text{ V/m}$
4. $P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 = 0.1 \times 1 \times 2 \times \left(\frac{0.693}{4\pi \times 1000} \right)^2 = 4.2 \times 10^{-10} \text{ W}$
5. $P_r(\text{dBm}) = 10 \log_{10} \left(\frac{4.2 \times 10^{-10}}{0.001} \right) = -93.8 \text{ dBm} > -100 \text{ dBm}$ donc liaison possible
6. $A = \gamma \cdot d = 0.1 \times 5 = 0.5 \text{ dB}$ (hypothèse)
7. Modulation FSK (Frequency Shift Keying) ou LoRa (Long Range)
8. $\text{SNR} = 20 \text{ dB} = 100$, $C = B \log_2(1 + \text{SNR}) = 433 \times 10^6 \times \log_2(101) \approx 2.89 \text{ Gbps}$