Нютонов бином

$\binom{n}{k}$ са комбинациите на n ел от k-ти клас. Това е броят на k-елементните подмножества на едно n-елементно множество

* Пермутации на n ел. Това са всички редици от вида $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ за които $i_k \in M$ и също $i_k \neq i_j$, $\forall j \neq k$

$M = \{1 \dots n\}$

Броят на всички пермутации е $n!$

* Вариации са всички редици от вида $\{i_1, \dots, i_k\}$ където $i_j \in M$ $i_j \neq i_s$, $\forall j \neq s$ Броят е $\frac{n!}{(n-k)!}$

* Комбинации на n ел. от k-ти клас са всички k-елементни подмножества $(i_1, \dots, i_k)$ на множеството M

$i_j \neq i_s$, $j \neq s$ всички комб са $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

* Теорема) за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Д-во чрез индукция:

1 База за $n=1$ $(1+x)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k \iff 1+x = \binom{1}{0}x^0 + \binom{1}{1}x^1$

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = \frac{1!}{0!\cdot 1!} = 1 \qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$$

$\Leftrightarrow 1+x = 1.1+1x$ ✓

2 Допускаме че е вярно за някое $n \geq 1$

3 Проверяване верността за $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = \underset{(\text{стъпка } 2)}{(1+x)^1(1+x)^n} = (1+x)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}$$

Полагаме $k+1 = s \Leftrightarrow k = s-1$

$$= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}x^s = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\cdot x^0 + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s-1}x^s + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1}\cdot x^{n+1} = !!$$

- $\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \binom{n}{0}x^0 + \underbrace{\binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots \binom{n}{n}x^n}_{\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}x^s}$
- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$
- $\binom{n}{n}$ — " — $= 1$

$$!! = 1 + \sum_{s=1}^{n}\left[\binom{n}{s}+\binom{n}{s-1}\right]x^s + x^{n+1} = 1 + \sum_{s=1}^{n}\binom{n+1}{s}x^s + x^{n+1} = !!$$

- $\binom{n}{s}+\binom{n}{s-1} = \frac{n!}{s!(n-s)!} + \frac{n!}{(s-1)!(n-(s-1))!} = n!\left[\frac{1}{s!(n-s)!} + \frac{1}{(s-1)!(n-(s-1))!}\right] =$

$$= \frac{n!}{s!(n-s+1)!}\left[(n-s+1)+s\right] = \frac{n!}{s!(n-s+1)!}(n+1) = \frac{(n+1)!}{s!(n-s+1)!} = \binom{n+1}{s}$$

- $(n-s+1)! = \overbrace{1.2\ldots(n-s)}^{(n-s)!}(n-s+1)$

- $(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$ • $\binom{n+1}{0}x^0 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}x^0 = 1$ • $\binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}x^{n+1} = x^{n+1}$

$$!! = \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_{s=1}^{n}\binom{n+1}{s}x^s + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}x^s$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n = \overset{1}{\binom{n}{0}} + \overset{n}{\binom{n}{1}} + \dots + \binom{n}{k} + \dots \overset{1}{\binom{n}{n}}$$

(Индукцията е завършена

Редици

*Деф (Безкрайна) редица наричаме всяко изображение от $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ ще означаваме редиците с $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n\}$

*Деф Казваме че една редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към число $a \in \mathbb{R}$ ако $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$: ако $k \geq n$, то тогава е изпълнено $|a_k - a| < \varepsilon$

С други думи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} a$, ако $\forall \varepsilon > 0$ всички освен краен брой елементи на редицата са в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\iff$ в интервалите $(-\infty, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, +\infty)$ има краен брой елементи на $\{a_n\}$

*Пример $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty}$ Нека $\varepsilon > 0$ Търсим $n \in \mathbb{N}$ ако $k \geq n$ то $\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{k} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < k$ Нека изберем (прилагайки принципа на Архимед) число $n \in \mathbb{N}$, за което $\frac{1}{\varepsilon} < n$ Тогава за $\forall k \geq n$ имаме $k \geq n \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow k > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{k} \iff \varepsilon > \left|\frac{1}{k} - 0\right| \Rightarrow$ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

*Деф: Ако редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща то тя
тя се нарича разходяща

*Деф: Казваме че редица е разходяща към $+\infty$, ако $\forall C \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}:$ $\forall k \geq n$
е изпълнено $a_k \geq C$

*Пример $\{n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ нека $C \in \mathbb{R}$ Тогава по принц. на Архимед
$\exists n \in \mathbb{N}: n > C$. Тогава $\forall k \geq n$ имаме $k \geq n > C \Rightarrow \{n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща към $+\infty$

*Деф: Редица е ограничена ако $\exists C > 0: |a_n| < C, \forall n \in \mathbb{N}$

Да допуснем че $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към числото $a \in \mathbb{R}$ Нека $\varepsilon = 1$
Тогава $n \in \mathbb{N}: \forall k \geq n \Rightarrow |(-1)^k - a| < 1 \Leftrightarrow (-1)^k \in (a-1, a+1)$ Ясно е че
ако $a \geq 0$ то -1 не е елем на интервала и ако $a < 0$ то $1 \notin (a-1, a+1)$
1-ви слу $a \geq 0$ за четни числа $k \geq n$ имаме
$\Rightarrow$ противоречие с , а ако $a < 0$ за четни числа $-1 = (-1)^k \notin (a-1, a+1)$,
същото противоречие с . Противоречия $k \geq n$ $\Rightarrow 1 = (-1)^k \notin (a-1, a+1)$ има
че редицата е сходяща $\Rightarrow \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща редица, защото допуснахме!

Свойства: Ако към сходяща редица прибавим краен брой членове или извадим краен брой членове, то получаваме редица, която е сходяща към същата граница

*D-во:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ Добавяме $b_1, \ldots b_m \to b_1, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots$

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon . \Rightarrow$ Вътре освен евентуално краен брой членове се намират в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ Това означава че редицата е сходяща към a

Аналогично ако премахнем краен брой членове редицата отново клони към a

Свойства на сходящите редици

2) Всс сходящи редици с ограничена

Д-во Нека $\{a_n\}_{n}^{\infty}$ тогава $\exists n \in \mathbb{N} . \forall m \geq n \Rightarrow |a_m - a| < 1$ $\Rightarrow a_m \in (a-1, a+1), \forall m \geq n \Rightarrow$ $l = \min\{a-1, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и $L = \max\{\max\{a-1, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ то тогава $\forall k \in \mathbb{N}, l \leq a_k \leq L$

3) Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи съответно с граници a и b да предположим че $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава $a \leq b$

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

Дво да приемем противоположното, че $a > b$ и да фиксираме $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ от сходимостта на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва че $\exists m \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_1 \Rightarrow$

Монотонни редици

Деф Една редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича монотонно растяща ако $a_1 \le a_2 \le a_3 \dots$ и строго ако $a_1 < a_2 < a_3$
монотонно намаляваща ако $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \dots$ и строго ако $a_1 > a_2 > a_3$

$\{a_n\}$ е монотонна ако е моно. растяща или намаляваща

Теорема Всяка монотонно растяща и ограничена редица е сходяща

Д-во Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монот. растяща и ограничена отгоре
Нека дефинираме $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

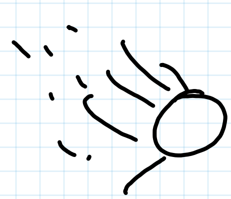
Ще докажем че -||- е сходяща към L. Нека $\varepsilon > 0$

Твърдим че $\exists n \in \mathbb{N} . a_n > L - \varepsilon$ Ако такова n $\nexists$ то тогава $L - \varepsilon \ge a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ че $L - \varepsilon$ ще е горна граница, по-малка от L
което е противоположно на дефиницията на $L \Rightarrow$ такова n същ.
Нека $m \ge n$ Тогава от монотонността и ограничеността отгоре
имаме $L - \varepsilon < a_n \le a_m \le L \Rightarrow \forall m \ge n \Rightarrow a_m \in (L-\varepsilon, L]$.
Следователно $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към L

Деф-Теорема Редицата $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща и ограничена
Нейната граница се нарича Неперово число и се бележи с e.

Д-во: Прилагаме формула за Нютонов бином

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k!)$$



$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_n = q^n$

Твър $\sum_{k=0}^{n} a_k = 1 + q + q^2 + \quad q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Д-во

1) $n=1 \quad 1+q = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q)}{(1-q)} = 1+q$

2) Допускаме че е вярно за някое $n \geq 1$

3) за $n+1$: $\underbrace{1+q+\dots+q^n}_{\text{прилагане}} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$

$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

– с което е завършено

3. $q = \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow{n \to \infty}$

$2 - 0 = 2$

$\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ защото $2^n \to \infty$

$|q| < 1$, то $2^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \frac{1}{|q|} > 1$

Да запишем $\frac{1}{|q|} = 1+\delta$, където $\delta > 0$

Твър $(1+\delta)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ при $\delta > 0$

Д-во Прил. Нютонов бином

$$(1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k = 1 + \binom{n}{1}\delta + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\delta^k =$$

$$= 1 + \underbrace{n.\delta}_{\to +\infty} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\delta^k}_{0} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$a_n \to \infty$, $a_n > 0 \ \forall n$, $\frac{1}{a_n} \to 0$

Твър $|q| < 1$, то $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Д-во: Да разг. $\{|q|\}_{n=1}^{\infty}$

Представяйки $\frac{1}{|q|} = 1+\delta$

и прилагайки предходното твърдение получаваме, че

$\frac{1}{|q|^n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ от това $\Rightarrow |q|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}.\ \forall m \geq n \Rightarrow ||q|^m - 0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |q|^m < \varepsilon \Leftrightarrow |q^m| < \varepsilon \Leftrightarrow |q^m - 0| < \varepsilon$, $\forall m \geq n$

От дсф $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Тв. При $|q|<1$ имаме $1+q+q^2\dots = \frac{1}{1-q}$

Д-во $1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

от $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,\ k\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = -''-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = -''-\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = -''-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n = -''-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\downarrow\ e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}_{\downarrow\ 1}$$

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = -''-\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n =$$

$$= -''-\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\ e^{-1}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\ e} = e^{-1}e = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+5}{n^2+4n+10}\right)^n = \left(1+\frac{n^2-3n+5-n^2-4n-10}{n^2+4n+10}\right)^n = \left(1+\frac{-7n-5}{n^2+4n+10}\right)^n =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{7n+5}{n^2+4n+1}\right)^{\frac{n^2+4n+10}{7n+5}}}_{e^{-1}}\Bigg]^{\underbrace{\frac{7n+5}{n^2+4n+10}}_{7}}$$

$$e^{-7}$$

Числови редове

Деф Числов ред се нарича израз от вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, където $a_n \in \mathbb{R}$. Парциални (частични) суми на реда се наричат изразите $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Можем да образуваме редицата от парциалните суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича сходящ, ако редицата от парциалните суми е сходяща и той се нарича разходящ, ако редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то границата $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ се нарича сума на реда и се означава $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Примери 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Това е ред с положителни членове $\Rightarrow$ редицата от парциалните суми $S_n = \frac{1}{1!} + \dots$ е строго растяща. За да докажем, че $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща (еквивалентно, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ) е достатъчно за да докажем че $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре: Използваме неравенството $\underbrace{2^{n-1} \le 2 \cdot 3 \cdots n = n!}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \ge \frac{1}{n!} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Получихме, че $S_n \le 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща (растяща и ограничена отгоре)

Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ е сходящ. Ще докажем (някога), че $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Нека $x \in \mathbb{R}$. Разглеждаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. За парциалните суми имаме. $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, при $x \ne 1$

От дефиницията следва, че $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ е сходящ $\Leftrightarrow$ редицата

$\left\{\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща. Да направим граничен преход

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x}\left(1-x^{n+1}\right) = \frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}\left(1-x^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(1-\lim_{n\to\infty} x^{n+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x|<1 \\ \text{не сх.}, & |x|>1 \\ \text{не сх.}, & x=-1 \end{cases}$$

При $x=1$ имаме $S_n = n+1$. Тогава $\lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$

Следователно редът $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ е сходящ $\Leftrightarrow |x|<1$. В този случай сумата му е равна на $\frac{1}{1-x}$

* Теорема Условие на Коши за сходимост

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}:$

$\forall m>k\geq N$ е в сила $\boxed{\left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\right|} < \varepsilon$

Д-во Следва непосредствено от условието на Коши за сходимост от парциалните суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}:$

$\forall m>k\geq N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$

Еквивалентно $\left|\sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n\right| < \varepsilon \iff \left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon$

Пример Хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ

Да вземем отрицанието на условието на Коши

$\neg\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > k \geq N \Rightarrow \left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon\right)$

$= \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists m > k \geq N \Rightarrow \left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\right| \geq \varepsilon$

$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \ln k$

$\sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{n} \sim \ln m - \ln k = \ln \frac{m}{k}$

да изберем $\varepsilon \simeq \ln 2$, нека $N \in \mathbb{N}$ е произволно, търсим числа $m > k \geq N$ за които $\sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{n} \geq \varepsilon$?

Можем да изберем $k = N$ и $m = 2N$. Тогава $\sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{n} =$

$= \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} > \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$

Да изберем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ тогава за $\forall N \in \mathbb{N}$ изберете числата $m = 2N > k = N$. При този избор имаме $\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

По критерия на Коши получаваме че хармоничният ред е разходящ. Казваме че хармоничният ред е разходящ към $+\infty$.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ Парциалните суми са $S_1=-1$, $S_2=-1+1=0$, $S_3=-1$, $S_4=0$.

$S_n=\begin{cases}-1, & n \text{ е нечетно}\\ 0, & n \text{ е четно}\end{cases}$

Редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, защото има две точки на сгъстяване: -1, 0

* Теорема Необходимо условие за сходимост

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Д-во Имаме $a_n = S_n - S_{n-1}$. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща (например границата S).

Следователно можем да вземем граница $n\to\infty$ в тъждеството $a_n = S_n - S_{n-1}$. Получаваме $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

$= S - S = 0$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ е разходящ, защото не удовлетворява необходимото условие за сходимост, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща към 0

Редицата $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ от членовете на хармоничния ред клони към нула, но хармоничният ред е разходящ

$\Rightarrow$ условието $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не е достатъчно за сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Твърдение. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с неотрицателни членове, то редицата от парциалните суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща. Следователно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\iff$ редицата от парциалните суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре.

Д-во: за $n \in \mathbb{N}$ имаме $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$.

Ако $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена отгоре $\forall n \in \mathbb{N}$, то тя е разходяща към $+\infty$. Ако $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, то тя е сходяща, защото е монотонно растяща.

* Теорема (Принцип за сравняване). Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са редове с неотрицателни членове.

Да предположим, че $a_n \leq b_n$ $\forall n$.

1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то тогава $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ също е сходящ; 2 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ също е разходящ.

Д-во: 1 Според предходното твърдение редицата от парциалните суми $\{S_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е монотонно растяща. Остава да докажем че тя е ограничена отгоре. За да редицата $\{S_n^b\}_{n=1}^{\infty}$ от парциалните суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ знаем че тя е монотонно растяща (от предходното твърдение) и е сходяща. Например $\lim_{n\to\infty} S_n^b = S$. Следователно $S_n^b \le S$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Приемаме $a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \le b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^b \le S$

Следователно $S_n^a \le S$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \{S_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица

2 Ако допуснем че $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то ще следва че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е също сходящ според (1)

Това е противоречие с условието че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Противоречието се дължи на допускането че $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ

*Теорема (Друга форма на принцип за сравняване)

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ да са редове от положителни членове

Да предположим че $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ (или за достатъчно големи n)

Тогава

1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е също сходящ

2 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е също разходящ

Д-во 1) Прибавяйки или изваждайки краен брой членове към/от един ред запазва неговата сходимост/разходимост. Следователно можем да считаме че неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ е изпълнено за $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогава

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leq \underbrace{\frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1}_{b_n} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$$

Следователно получаваме че редът $\frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ доминира $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Умножавайки даден ред с ненулево число запазва неговата сходимост / разходимост

Следователно ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ то следва и $\frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е също сходящ и то от предходния критерий за сравняване следва че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

2) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то ако допуснем че $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ тогава от (1) ще следва че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, което е противоречие

Следователно $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ

* Теорема (Критерий на Коши)

Нека $\sum_{n=1} a_n$ е ред с неотрицателни членове. Да допуснем, че $\exists q < 1$, такова че за всички достатъчно големи n е изпълнено $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Тогава редът е сходящ. Ако за всички достатъчно големи n е изпълнено $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то тогава редът е разходящ.

Коментар: За всички достатъчно големи n е изпълнено твърдението $P(n)$ означава $\exists N \in \mathbb{N} . \forall n \geq N \Rightarrow$ твърдението $P(n)$ е изпълнено.

Д-во: Прибавяйки или премахвайки краен брой членове от реда получаваме ред със същото поведение.

Следователно можем да считаме, че съответното неравенство е изпълнено за $\forall n \in \mathbb{N}$. Ако $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то $a_n \leq q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, където $q < 1$. Следователно сходящият ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ доминира реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ по критерия за сравняване на редовете.

Ако $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то следва, че $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава $\lim_{n \to \infty} a_n$ не е нула $\Rightarrow$ по необходимото условие за сходимост следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

* Теорема (критерий на Даламбер) Нека $\sum_{n=1} a_n$ е ред с положителни членове. Да допуснем, че $\exists q < 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, за всички достатъчно големи n. Тогава редът е сходящ.

Да допуснем че за всички -||- е изпълнено $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Тогава редът е разходящ

Д-во Можем да приемем без ограничение, че съответното неравенство е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$

то $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q \cdot a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогава $a_n \leq q \cdot a_{n-1}$ Прилагаме това неравенство $n-1$ пъти

$$a_n \leq q \cdot a_{n-1} \leq q\, q \cdot a_{n-2} = q^2 a_{n-2} \leq q^2 q \cdot a_{n-3} = q^3 \cdot a_{n-3}$$

$$\leq q^{n-1} a_1$$

Следователно сходящия ред $a_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ мажорира реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Следователно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Алтернативно $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$ и можем да приложим другата форма на критерие за сравнение

Ако $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ то $a_n \geq a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \ldots \geq a_1 > 1$,

т. е. $a_n \geq a_1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не може да клони към нула Според необходимото условие $\Rightarrow$ редът е разходящ

*Теорема (Гранична формула за критериите на Коши и Даламбер)
Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове Ако $\sqrt[n]{a} \to q$ (или ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} q$)
то при $q < 1$ редът е сходящ. При $q > 1$ редът е разходящ

Д-во Ако $q < 1$, то за $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ ще имаме за всички дост. голям. членовете на редицата $\sqrt[n]{a_n}$ $\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ ще бъдат в интервал

$(q-\varepsilon, q+\varepsilon) = \left(\frac{3q-1}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$ и $\Rightarrow$ за вс. д. гол. n $\qquad q - \frac{1-q}{2} = \frac{3q-1}{2}$

ще бъде изпълнено $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1+q}{2} < 1$ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1+q}{2} < 1\right)$ $\qquad q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$

От предходните критерии $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Ако $q > 1$ също избираме $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$ Тогава за вс дос. гол. n членовете на редицата $\sqrt[n]{a_n}$ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ще бъдат в интервал

$(q-\varepsilon, q+\varepsilon) = \left(\frac{1+q}{2}, \frac{3q-1}{2}\right) \Rightarrow$ за вс дос. гол. n $\qquad q - \frac{q-1}{2} = \frac{1+q}{2}$

изпълнено $\sqrt[n]{a_n} \ge \frac{1+q}{2} > 1$ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{1+q}{2} > 1\right)$ $\qquad q + \frac{q-1}{2} = \frac{3q-1}{2}$

Прилагайки предходните критерии получаваме че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Задачи

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ Прилагаме критерия на Даламбер за $a_n = 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

Тогава $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin\frac{\pi}{3^n}} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3^n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} = 1$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^{n+1}}}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{3^n}}{\sin\frac{\pi}{3^n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 < 1$ $\qquad \cdot \frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}$

$$\downarrow_{n\to\infty} \quad \downarrow_{n\to\infty}$$

$1 \qquad 1 \quad \Rightarrow$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ е сходяща

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} \cdot 3^{-n}$ Прилагаме критерие на Коши

за реда с общ член $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} \cdot 3^{-n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)n} \cdot 3^{-n}} =$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 3^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e}{3} < 1 \qquad \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\Rightarrow$ според критерие на Коши $\Rightarrow$ че редът е сходящ

Пример

Да се опитаме да приложим критериите на Коши и Даламбер към хармоничен ред

Даламбер $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \frac{n}{n+1} < 1$ (т.е. не е вярно че $\frac{n}{n+1} \geq 1$

$\Rightarrow$ критерие на Даламбер е неприложим

Коши $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \sqrt[n]{n} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ критерие на Коши още не е приложим $\Rightarrow$ не е вярно че $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq 1$ за ке да е n

* Критерий на Рабе - Дюамел

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове $\exists$ всяко $n \in \mathbb{N}$ да дефинираме $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ Тогава ако $\exists\, p > 1$ и $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow R_n \geq p$, то редът е сходящ

Ако $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad R_n \leq 1$ то редът е разходящ

Доказ. (2) $R_n \le 1 \iff n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1 \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ Следователно от втората версия на критерия за сравняване $\Rightarrow$ че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ доминира хармоничния ред, който е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

(1) $R_n \ge p > 1 \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \ge \frac{p}{n} \iff a_n - a_{n+1} \ge \frac{p a_{n+1}}{n} \iff$

$\iff \frac{n}{p}(a_n - a_{n+1}) \ge a_{n+1} \iff \frac{1}{p}(n a_n - n a_{n+1}) \ge a_{n+1}$

$\frac{1}{p}(n a_n - n a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+1}) \ge a_{n+1} \iff \frac{1}{p}(n a_n - (n+1) a_{n+1}) \ge a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{p} = \frac{(p-1)a_{n+1}}{p} \Big/ \cdot \frac{p}{p-1} \;(>0)$

$\frac{1}{p-1}(n a_n - (n+1) a_{n+1}) \ge a_{n+1}, \forall n \ge N \oplus$

За парциалните суми. Нека $m > N$. Да означим $S = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Тогава $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{m} = S + \sum_{n=N+1}^{m} a_n$

$\Rightarrow S_m = S + \sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{p-1}\left(n a_n - (n+1) a_{n+1}\right) =$ Прилагаме $\oplus$ за всяко от събираемите a_n, $n \ge N+1$

$= S + \frac{1}{p-1}\Big[(N a_N - \underline{(N+1) a_{N+1}}) + (\underline{(N+1) a_{N+1}} - \underline{\underline{(N+2) a_{N+2}}}) + (\underline{\underline{(N+2) a_{N+2}}} - (N+3) a_{N+3}) +$

$+ \dots + ((m-1) a_{m-1} - \underline{\underline{m a_m}}) + (\underline{\underline{\underline{m a_m}}} - (m+1) a_{m+1}) \Big] = S + \frac{1}{p-1}\left[N a_N - (m+1) a_{m+1} \right]$

$< S + \frac{N a_N}{p-1} < \infty$

Следователно редицата от парциалните суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре от числото $S + \frac{N a_N}{p-1}$. Понеже членовете на реда са положителни то следва че $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща

Следователно $\{S_n\}$ е сходяща и е редът $\sum_{n=1} a_n$ е сходящ

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$ $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} - 1\right) =$

$= n\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = n\frac{1}{n} = 1 \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Да пробваме Даламбер $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Също $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow \nexists$ естествено число $q < \frac{n^2}{(n+1)^2} \leq q$ отдакъде нататък

$\Rightarrow$ Даламбер е неприложим

Раабе - Дюамел $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right) = n\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2} - 1\right)$

$= n\left(\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right) = n\frac{2n+1}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2 > 1$

следователно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ

* Теорема (Гранична форма на критерия на Раабе-Дюамел)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Да предположим че съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = p$

1) Ако $p > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

2) Ако $p < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Д-во 1) Ако $R_n \xrightarrow{n\to\infty} p > 1$ то $\exists N \in \mathbb{N} . \forall n \geq N \Rightarrow R_n \geq \frac{p+1}{2} > 1$ - редът е сходящ

2) Ако $R_n \xrightarrow{n\to\infty} p < 1$ то $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \Rightarrow R_n \leq \frac{p+1}{2} < 1 \Rightarrow$ разходящ

Редове с алтерниращи знаци на членовете

Нека $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Въпросните редове са от вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 \dots$.

*Теорема (Критерий на Лайбниц) Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, която е монотонно намаляваща и клони към нула

$a_n \searrow 0$ $\begin{pmatrix} a_n \nearrow 1 \\ a_n \searrow 1 \end{pmatrix}$ Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ е сходящ.

Д-во Да разгледаме редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ от парциалните суми

$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$

$S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$

$S_{2n-1} \geq S_{2n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \Rightarrow (1)\ S_{2n} \leq S_{2n-1}$. Също $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$

Понеже $a_{2n} \geq a_{2n+1} \Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ (2). Аналогично за четните членове имаме $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$. Понеже $a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \Rightarrow S_{2n+2} \geq S_{2n}$ (3)

От (1), (2), (3) следва че за $\forall n \in \mathbb{N}$ имаме $S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq S_{2n-1} \geq S_{2n-2} \geq S_4 \geq S_2$

От последната редица от неравенства следва че подредицата $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и е ограничена отдолу от S_2 и $\Rightarrow$ е сходяща. Аналогично подредицата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и е ограничена отгоре от $S_1 \Rightarrow$ тя също е сходяща. Да означим $S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ и $S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$

Остава да докажем че $S' = S''$. Вземайки граничен преход в неравенството получаваме $S' \geq S''$

Знаем че $S_{2n-1} \searrow S' \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{2n-1} \geq S'$. Също знаем че $S_{2n} \nearrow S'' \Rightarrow S_{2n} \leq S''$. Всичко това можем да запишем във вида

$$S_{2n-1} \geq S' \geq S'' \geq S_{2n} \Rightarrow 0 \leq S' - S'' \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Прилагайки лемата в двамата случая получаваме че $0 \le S' - S'' \le a_{2n}$
с това доказахме че $S' = S''$ $\qquad \underset{0}{\downarrow} \Rightarrow \underset{0}{\downarrow} \Leftarrow \underset{0}{\downarrow}$

Пример Ред на Лайбниц $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ членове $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$
$\dots \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ По критерия на Лайбниц $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.
редът на Лайбниц е сходящ

Получихме, че хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ а редът на Лайбниц $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ. Казваме че редът на Лайбниц е условно сходящ

Припомняне $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ. Доказахме че ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ то следва че той е сходящ. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ но $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ казваме че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ

Пример $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $x < 0$ $x \ge 1$ - разходящ
$0 < x < 1$ - сходящ

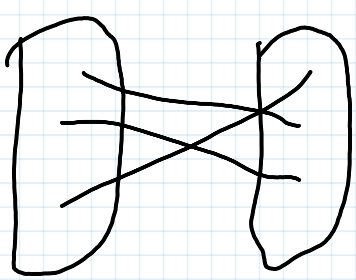
$\sum (-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$ - абсолютно сходящ $\qquad -1 < x < 0 - \quad 0 > y = -x > 0$

$x \le -1$ - е ясно че редът е разходящ

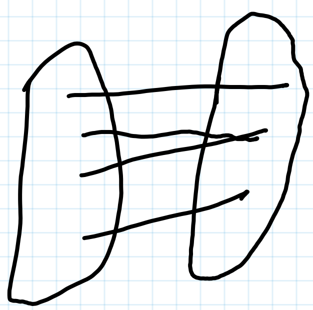
Функции

* Деф. Нека M и N са множества. Изображение $f: M \to N$ е съпоставяне на всеки елемент от M към елемент от N.
Записва се $m \mapsto f(m)$

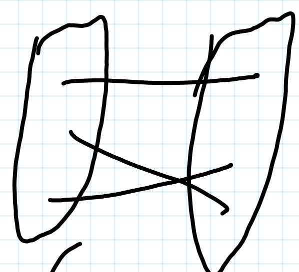
- $f: M \to N$ се нарича инективно ако за всеки два елем $m_1, m_2 \in M$ $m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$
- $f: M \to N$ се нарича сюрективно ако $f(M) = N$ т.е. $\forall n \in N$, $\exists\, m \in M : f(m) = n$
- $f: M \to N$ се нарича биективно ако f е инективно и сюрективно



инективно



сюрективно



биективно

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
е инективно но не е сюрективно

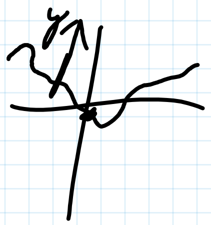
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(2n-1) = f(2n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
сюрективно но не е инективно

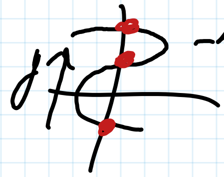
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(2n) = 2n-1$ и $f(2n-1) = 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
биективно, което не е иденти...я

$Id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$Id(n) = n$

* Def Функция е изображение от вида $f: M \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$, или $\mathbb{R}$, или F_p)

За функция от вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можем да дефинираме множеството $\{x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Това множество наричаме графика на f





Примери: $f(x) = x^2$ $\quad f(x) = \sin x$ $\quad f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

* Def Казваме че ф-я $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е ограничена отгоре (отдолу) ако $\exists C \in \mathbb{R}$ $f(x) \le C$ $(f(x) \ge C)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. f се нарича ограничена ако е ограничена отгоре и отдолу

Пример $f(x) = \sin x$ и $\mathrm{sgn}(x)$ са ограничени

$f(x) = x^2$ е неограничена

* Def $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се нарича растяща (намаляваща) ако $\forall x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Строго растяща/намаляваща ако съответните неравенства са строги

$f(x) = x^3$ е строго растяща; $\mathrm{sgn}(x)$ е растяща

$\sin(x)$ и x^2 не са нито растящи нито намаляващи

Друг начин за дефиниране на реалните числа са чрез класове на еквивалентност на редици на Коши. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на Коши ако $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall k, m \ge N \Rightarrow |a_k - a_m| < \varepsilon$. За две редици на Коши $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ казваме че са еквивалентни ако

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$

Реалните числа могат да бъдат дефинирани като всички класове на еквивалентност на редици на Коши

Да дефинираме функцията a^x, $a > 0$ или по-конкретно e^x. За естествени числа дефинираме $e^n = \underbrace{e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ пъти}}$. Корен m-ти дефинираме като единственото число c задоволяващо $c^m = e$, където $c > 0$. По този начин дефинираме $e^{\frac{n}{m}}$, $n, m \in \mathbb{N}$ ($e^0 = 1$)

$e^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{n}{m}}}$ Така дефинираме e^q, $q \in \mathbb{Q}$

Да забележим, че ако $q_1 = \frac{n_1}{m_1} < q_2 = \frac{n_2}{m_2}$, то $e^{q_1} < e^{q_2}$, защото

$q_1 = \frac{m_2 n_1}{m_1 m_2} < q_2 \frac{m_1 n_2}{m_1 m_2} \Rightarrow m_2 n_1 < m_1 n_2$

$e^{q_1} = e^{\frac{m_2 n_1}{m_1 m_2}}$ и $e^{q_2} = \frac{m_1 n_2}{m_1 m_2} \Rightarrow \left(e^{q_1}\right)^{m_1 m_2} = e^{m_2 n_1}$ и $\left(e^{q_2}\right)^{m_1 m_2} = e^{m_1 n_2}$

$\Rightarrow \frac{\left(e^{q_2}\right)^{m_1 m_2}}{\left(e^{q_1}\right)^{m_1 m_2}} = e^{\underset{\vee}{\overset{}{m_1 n_2 - n_1 m_2}}} > 1 \Rightarrow \frac{e^{q_2}}{e^{q_1}} > \sqrt[m_1 m_2]{1} = 1 \Rightarrow e^{q_2} > e^{q_1}$

(под степенния показател: 0)

Сега ако $q_n \nearrow r \in \mathbb{R}$, където $q_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то можем да дефинираме $e^r = \lim_{n \to \infty} e^{q_n}$

Понеже $\{q_n\}$ е растяща $\Rightarrow \{e^{q_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е също растяща. $\{e^{q_n}\}$ е ограничена отгоре от всяко число число от вида e^q, където $q \in \mathbb{R} : q \geq r$. Следователно $\{e^{q_n}\}$ е сходяща и границата ѝ (означаваме с e^r) е ограничена отгоре от e^q, и отдолу от e^{q_n}, $\forall n \in \mathbb{N}$. Така деф. ф-я е растяща

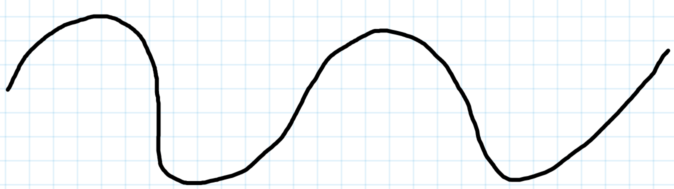
* Деф Ако $f: M \to N$ е биективно изображение то f има обратно изображение $g: N \to M$ което удовлетворява условията: $\forall m \in M \Rightarrow g(f(m)) = m$ и $\forall n \in N \Rightarrow f(g(n)) = n$

Означаваме $g = f^{-1}$

Ако $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е биекция и g е нейната обратна то графиките на f и g са симетрични спрямо ъглополовящата на Iви и IIIти квадрант

Упр: Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две еквивалентни редици на Коши от рационални числа. Сходящи към $r \in \mathbb{R}$ то докажете че $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^r = \lim_{n\to\infty} e^{b_n}$

$\sin x$



* Деф Композицията на изображенията $f: M \to N$ и $g: N \to S$ с наричаме изображението $g(f(x))$ или $g \circ f(x)$ $x \in M$ $x \mapsto g(f(x))$

* Деф Елементарни функции са всички ф-ии които могат да да се представят като суми, произведения, частни, корени и композиции на рационалните, тригонометричните, обратните кръгови ф-ии, експоненциалната ф-я и логаритмичната ф-я

Пример Упр Представете ф-ята $f(x) = \frac{\arcsin(x) + 3(\arcsin(x))^2}{\cos x - 2(\cos x)^3}$ чрез горните операции

Граници на фии

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+8}{x^3+3x^2+2} = -\text{"}- \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{1-\overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}+\overset{\to 0}{\frac{8}{x^3}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{3}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}} = 1$$

$$\in\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \in (1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon)$$

$$\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} = \frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} > 1-2\varepsilon$$

*Деф Нека $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е ф-я. Казваме че f има граница C при $x\to\infty$, ако $\forall\varepsilon>0$, $\exists A\in\mathbb{R}$

$$\forall x \geq A \Rightarrow f(x)\in(C-\varepsilon, C+\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$|f(x)-C|<\varepsilon$$

Аналогично за $x\to-\infty$
(заменям $x\geq A$ с $x\leq A$)

Казваме че $f(x)$ има граница $+\infty$ при $x\to+\infty$ ако $\forall B\in\mathbb{R}, \exists A\in\mathbb{R}, \forall x\geq A \Rightarrow f(x)\geq B$

Аналогично за $x\to-\infty$ и $f(x)\to-\infty$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2} = -3$$

ДО $\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ е $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

$$\in(-3-\varepsilon, -3-\varepsilon)$$

* Едно число x се нарича точка на сгъстяване за 1 мн-во $M \subseteq \mathbb{R}$ ако за $\forall \delta > 0$, $[(x-\delta, x+\delta) \cap M] \setminus \{x\}$ е непразно

* Твърдение Числото $x \in \mathbb{R}$ е точката на сгъстяване за едно мн-во $M \subseteq \mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато има редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{x\}$ с граница на x

Д-во Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{x\}$. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ и от деф. за след. че $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \delta$, т.е $x_n \in (x-\delta, x+\delta)$.

$\Rightarrow$ според деф. x е точка на сгъстяване за M

$\Rightarrow$ По индукция деф редицата. От деф $\Rightarrow$ и можем да намерим критерий

В деф за точка на сгъстяване избираме $\delta = 1$. Ди предположим че сме деф $x_1, \dots x_n$.

$x \in [(x-1, x+1) \cap M] \setminus \{x\}$

$x_k \in [(x-\frac{1}{k}, x+\frac{1}{k}) \cap M] \setminus \{x\}$

За $n+1$ деф (полагайки в деф за сгъстяване $\delta = \frac{1}{n+1}$)

$x_n \in [(x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}) \cap M] \setminus \{x\}$

Така деф редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{x\}$ за която

$x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ Ясно че тази редица клони към x

* Деф Нека $M \subset \mathbb{R}$ нека $f: M \to \mathbb{R}$ е ф-я и нека $y \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване за M. Казваме че $f(x)$ има граница $c \in \mathbb{R}$ при $x \to y$ ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$.

$|f(x) - c| < \varepsilon, \forall x \in [(y-\delta, y+\delta) \cap M] \setminus \{y\}$ Казваме

че $f(x)$ клони към $+\infty$ когато x клони към y,
ако $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ $\forall x \in [(y-\delta, y+\delta) \cap M] \setminus \{y\} \Rightarrow f(x) \geq A$

Аналогично за $f(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$

Искаме явно за произволно $\varepsilon > 0$ да намерим съответна $\delta > 0$,
което е от деф. за граница: $? x \in (1-\delta, 1+\delta)$ $\Rightarrow f(x) \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)x-2} = \frac{x+2}{x-2}$

$-3-\delta < \frac{x+2}{x-2} < -3+\delta, \forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$
?

БОО $0 < \delta < 1$ Тогава $x - 2 < 0 \Rightarrow \Leftrightarrow$

$(-3-\varepsilon)(x-2) > x+2 > (-3+\varepsilon)(x-2)$

$\in (-3-\varepsilon, -3+\varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $6 + 2\varepsilon - (3+\varepsilon)x > x+2 >$

$\Leftrightarrow$

$6 - 2\varepsilon + x(-3+\varepsilon)$

$4 + 2\varepsilon > x(4+\varepsilon)$

$\frac{4+2\varepsilon}{4+\varepsilon} > x$

$1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} > x$ $\qquad \delta_1 = \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}$

* Деф. Прободена околност на точка $x \in \mathbb{R}$ се нарича всяко множество от вида $(x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\} = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$

* Деф. Хайне Нека $M \subset \mathbb{R}$ нека $y \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване за M и нека $f: M \to \mathbb{R}$ е ф-я. Казваме че $F(x)$ има граница C при $x \to y$ ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ и за

която $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = y$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = C$

Примери. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $x \neq 0$ и $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $x \neq 0$

$x_n = \frac{1}{n\pi} \Rightarrow \sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \Rightarrow$ редицата $\{\sin\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin(\frac{1}{x_n})\}_{n=1}^{\infty}$ е стационарни всички членове са равни на 0

$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ Тогава $\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

* Теорема Деф за граница на фун. на Коши и Хайне са еквивалентни

Д-во (Коши $\Rightarrow$ Хайне) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ е произволна редица с граница y. Остава да докажем че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = C$

Нека $\varepsilon > 0$. От деф. на Коши $\Rightarrow$ че $\exists \delta > 0$: Ако $x[(y-\delta, y+\delta)\setminus\{y\}]$ $\Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$. От факта че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} y$ следва че ПМ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (y-\delta, y+\delta)$. $\Rightarrow$ от горните две съображения имаме че $\forall n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - C| < \varepsilon$ От деф на граница следва че $\lim f(x_n) = C$ Понеже $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ беше произволна редица клоняща към

(Хайне $\Rightarrow$ Коши) Да допуснем че усл на Хайне е изп. но усл на Коши не е: Отрицанието на условието на Коши е $\neg(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 . \forall x \in (y-\delta, y+\delta)$ $\Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x[(y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}]$ ПМ $: |f(x) - C| \geq \varepsilon$

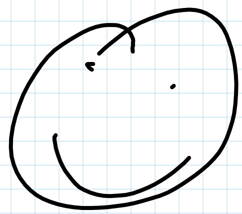
За да получим противоречие остава да намерим редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ и $f(x_n) \to c$

От условието x за $\delta = 1$ избираме $x_1 \in [(y-1, y+1) \setminus \{y\}] \cap M$ $: |f(x_1) - L| = \varepsilon$

Да допуснем че сме избрали член...

$x_1 \dots x_k$ $\quad x_k \in (y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k}) \setminus \{y\} \cap M$ - $|f_x$ ..

$\delta_1 \quad \frac{1}{k}$?



Свойства на границите на ф-ции

Нека $f: M \to \mathbb{R}$ и $g: M \to \mathbb{R}$ където $M \subset \mathbb{R}$ и нека y е точка на сгъстяване за M

Да предположим че същ. границите $\lim_{x \to y} f(x) = A$ $\lim_{x \to y} g(x) = B$

Тогава

1) $\lim_{x \to y}(a f(x) + b g(x)) = aA + b.B$ където $a, b \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to y} [f(x) g(x)] = A B$

3) ако $B \neq 0$ то $\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

4) ако $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in M \Rightarrow A \leq B$

Д-во Всички тези свойства следват непосредствено от съответните свойства за границите на редиците, прилагайки дефиницията на Хайне

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ е произволна редица за която $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

1) $\lim_{x \to y}(a f(x) + b g(x)) = \lim_{n \to \infty}(a f(x_n) + b\, g(x_n)) \xrightarrow[\text{свойство}]{\text{от лимито}} = aA + b.B$

2) $\lim_{x \to y}[f(x) g(x)] = \lim_{n \to \infty}[f(x_n) g(x_n)] = A B$

3) от $B \neq 0 \Rightarrow$ (прилагайки Коши) $\Rightarrow \exists \delta : \forall x \in (y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}$

$\Rightarrow |g(x) - B| < \frac{B}{2} \Leftrightarrow g(x) \in \left(\frac{B}{2}, \frac{3B}{2}\right)$ т.е $g(x) \neq 0$

може да се огранича само в множеството $[(y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}] \cap M$

Сега ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [(y-\delta, y-\delta) \setminus \{y\}] \cap M$ за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ то $g(x) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и съответно свойство за границите на редиците ще следва $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$

4) $f(x_n) \leq g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и всяка редица $\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$
Следователно от условието на Хайне следва че $A \leq B$

*Лема за двамата полицая: Нека f, g и h са ф-ии с обща дефиниционна област $M \subset \mathbb{R}$ за която точката y е точка на сгъстяване. Да предположим че $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in M$ и $\lim\limits_{x\to y} f_x = C = \lim\limits_{x\to y} h(x)$ тогава и границата $\lim\limits_{x\to y} g(x)$ и тя е равна на C

Д-во. Нека $\varepsilon > 0$. От $f(x) \xrightarrow[x\to y]{} C \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$: $\forall x \in [(y-\delta_1, y+\delta_1) \setminus \{y\}] \cap M$
$\Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$ т.е $f(x) \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$
Аналогично от
$h(x) \xrightarrow[x\to y]{} C \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$: $\forall x \in [(y-\delta_2, y+\delta_2) \setminus \{y\}] \cap M \Rightarrow$
$|h(x) - C| < \varepsilon$, т.е. $h(x) \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$ Тогава ако изберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ то за $\forall x \in [(y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}] \cap M$ ще бъдат изпълнени неравенствата

$$C - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < C + \varepsilon \Rightarrow g(x) \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$$

т. е. $|g(x) - C| < \varepsilon$

От деф на Коши за граница на ф-я $\Rightarrow \lim\limits_{x\to y} g(x) = C$

Съставна ф-я $g(f(x))$ $f\ M \to S$ $g\ S \to \mathbb{R}$

y е точка на сгъстяване за M $f(x) \neq z, \forall x \in M$

$\lim\limits_{x\to y} f(x) = z$ и z е точка на сгъстяване на S

* Твърдение Граница на съставна ф-я

Нека $f\ M \to S \subset \mathbb{R}$ нека y е точка на сгъстяване за M нека $\lim\limits_{x\to y} f(x) = z$ Нека $g\ S \to \mathbb{R}$ е ф-я като z е точка на сгъстяване на S $z \notin S$ и $\lim\limits_{t\to z} g(t) = C$ Тогава същ.

$$\lim_{x\to y} g(f(x)) = C$$

D-во Да приложим условието на Хайне. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ е произволна редица От усл $\lim\limits_{x\to y} f(x) = z \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = z$ $f(x_n) \in S, \forall n$ и Понеже S не съдържа z

$\Rightarrow f(x_n) \neq z\ \forall n \in \mathbb{N}$ Следователно $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset S = S \setminus \{z\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = z$
Сега използване $\lim\limits_{t\to z} g(t) = C$ и заключаване: $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = C$
От произволността на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ и $x_n \in M \setminus \{y\}$, прилагайки условието на Коши получаване че $\lim\limits_{x\to y} g(f(x)) = C$

* Твърдение Нека $f.\ M \to \mathbb{R}$ и $g\ M \to \mathbb{R}$ са ф-ии и нека y е точка на сгъстяване за M. Тогава ако $\lim\limits_{x\to y} f(x) = 0$ и ако $g(x)$ е ограничена в M, то същ границата $\lim\limits_{x\to y} f(x)\,g(x)$ и тя е равна на нула

D-во Да използваме изображението че $f(x)\,g(x) \xrightarrow{x\to y} 0$

$|f(x)\,g(x)| \xrightarrow{x\to y} 0$ Тогава от ограничеността на $g(x) \Rightarrow$

$\exists c > 0 : |g(x)| \le c,\ \forall x \in M$ Тогава $|f(x)g(x)| \le |f(x)| . c$

Следователно $0 \le |f(x)g(x)| \le c|f(x)|$ От лемата за двамата полицаи и от неравенствата получаваме че $\lim\limits_{x \to y} |f(x)g(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x \to y} f(x)g(x) = 0$

*Твърдение Нека $f : M \to \mathbb{R}$ е ф-я нека y е точка на сгъстяване на M и нека f има граница при $x \to y$. Тогава f е ограничена в околност на точката y

Д-во Да приложим условието на Коши за $\varepsilon = 1$ Тогава $\exists \delta > 0 :$

$\forall x \in [(y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}] \cap M \Rightarrow |f(x) - c| < 1$ където $c = \lim\limits_{x \to y} f(x)$

Т.е. $f(x) \in (c-1, c+1)$ Следователно $f(x)$ е ограничена за $x \in [(y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}] \cap M$

Ако $y \in M$ то $f(y) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ ще бъде ограничена и в точката y $f(x)$ ще бъде ограничена $\forall x \in [(y-\delta, y+\delta)] \cap M$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ - не щу

* Деф Нека $f: M \to \mathbb{R}$ е ф-я y е точка на сгъстяване за $(y,+\infty)\cap M$

Тогава казваме че същ. дясна граница при $x \to y$ от $f(x)$ и записваме $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x>y}} f(x)$ и тази граница е равна на C ако

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \cdot \forall x\in(y, y+\delta)\cap M \Rightarrow |f(x)-C|<\varepsilon$

Ако $f: M\to\mathbb{R}$ е ф-я и ако y е точка на сгъстяване за $(-\infty,y)\cap M$ то казваме че същ лявата граница при $x\to y$ и записваме $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} f(x)$ и тази граница е C ако $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \cdot \forall x\in(y-\delta, y)\cap M \Rightarrow |f_x - C|<\varepsilon$

Казваме че $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x>y}} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} f(x)=\infty\right)$ ако $\forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0: \forall x\in (y, y+\delta)\cap M$ $(\forall x\in(y-\delta, y)\cap M)$

$\Rightarrow f(x)\geq A$

Искаме да докажем че $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$ (аналогично $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$)

Нека $A\in\mathbb{R}$. Искаме да намерим $\delta>0. \forall x(0, 0+\delta)=(0,\delta) \Rightarrow \frac{1}{x}\geq A$

Ако $A\leq 0 \Rightarrow$ условието е изпълнено $\forall x\in(0,+\infty)$

Нека $A>0 \Rightarrow \frac{1}{x}\geq A \Leftrightarrow \frac{1}{A}\geq x$ избирайки $\delta=\frac{1}{A}$ ще имаме

$\forall 0<x<\delta=\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)}=A \Rightarrow$ о е дефинидоказана $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$

Мною снимки

* Твърдение Ако $f: M \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $y \in M$ и $f(y) > 0$ ($f(y) < 0$), то $\exists \delta > 0 : \forall x \in M \cap (y-\delta, y+\delta)$

$\Rightarrow f(x) > \frac{f(y)}{2} > 0$ ($f(x) < \frac{f(y)}{2} < 0$)

Д-во. Ще док. за $f(y) > 0$. Случаят $f(y) < 0$ е аналогичен.
БОО ще считаме че y е точка на сгъстяване за M
От условието $\Rightarrow \lim\limits_{x \to y} f x = f(y)$. Според усл. на Коши $\Rightarrow$
Избираме $\varepsilon = \frac{f(y)}{2}$ следва че $\exists \delta > 0 \; \forall x \in [M \setminus \{y\}] \cap (y-\delta, y+\delta) \Rightarrow$
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon = \frac{f(y)}{2}$ т.е. $f(x) \in \left(f(y) - \frac{f(y)}{2}, f(y) + \frac{f(y)}{2}\right) = \left(\frac{f(y)}{2}, \frac{3f(y)}{2}\right)$
$\Rightarrow f(x) > \frac{f(y)}{2}$ същото е изпълнено в точка y

* Твърд. Нека $f: M \to P$ и $g: P \to \mathbb{R}$ са непрек. ф-ии, където $M \subset \mathbb{R}$ и $P \subset \mathbb{R}$.
Тогава съставната ф-я $g(f(x))$ е непрекъсната
Д-во. Нека $y \in M$. БОО можем да считаме че y е точка на сгъст. на M
Прилагаме усл. на Хайне: Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ е редица
сходяща към y. Тогава от непрекъснатостта на $f \Rightarrow \lim f(x_n) = f(y)$. Но тогава
$f(x_n) \in P$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $f(y) \in P$. Тогава $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е редица сходяща към $f(y)$ и
от непрекъснатостта на g и от условието на Хайне следва че $\lim\limits_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(f(y))$
Тук може $f(x_n) = f(y)$ за някои $n \in \mathbb{N}$, но изключението $\lim g(f(x_n)) = g(f(y))$
от произволността на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{y\}$ с $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$ от условието остава в сила на Хайне
$\Rightarrow$ че gf е непрекъсната във всяка точка $y \in M$

* Теорема: Вс. рационална ф-я е непрекъсната във всяка т. от деф. област

Д-во Нека $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ е рац. ф-я където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми на x. Деф. област на f се състои от всички $x \in \mathbb{R}$ които не са корени на $Q(x)$. Ако докажем че всеки полином е непрекъсната ф-я то от св-во 3) ще следва че всяка рац. ф-я е непрекъсната за всички x за които знаменателят е $\neq 0$. Остава да док. че всеки полином е непрекъсната ф-я. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Искаме да приложим свойство 1) $n-1$ пъти. Следва че ако $f_1, \dots, f_n$ са непрекъснати ф-ии и ако $b_1, \dots, b_n$ са реални числа то ф-ята $b_1f_1 + \dots + b_nf_n$ е непрекъсната $\Rightarrow$ ще док. че $P(x)$ е непрекъсната ф-я на x следва да док. че ф-ите 1 и x^k за $\forall k \in \mathbb{N}$ са непрекъснати.

Ясно е че $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ ф-ята $f(x) = 1$ приема ст-ти в интервала $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ от усл. на Коши $\Rightarrow$ всяка константна ф-я е непрекъсната. Ако докажем че $f(x) = x$ е непрекъсната, то ще следва че (прилагаме свойство 2) $k-1$ пъти) ф-ята x^k е непрекъсната $\Rightarrow$ остава да док. че ф-ята $f(x) = x$ е непрекъсната за $\forall x \in \mathbb{R}$

Непрекъснати ф-ии в компактен интервал

Компактен интервал се нарича всеки затворен и ограничен интервал

* Теорема Болцано Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната ф-я и нека да предположим че $f(a)f(b)<0$ Тогава $\exists c\in(a,b)$: $f(c)=0$

Д-во Без ограничение можем да предположим че $f(a)<0$ и $f(b)>0$ (Ако $f(b)<0$ $f(a)>0$ еквивалентно) Да разгледаме следното мн-во $M=\{x\in[a,b] \mid f(x)<0\}$. Тогава $M\neq\emptyset$ защото $a\in M$ и M е ограничено защото $M\subset[a,b]$ Да забележим че $b\notin M$

Нека $c=\sup M<\infty$

Ще док че $f(c)=0$ Да допуснем че $f(c)\neq0$ Ако $f(c)<0$ то предходното твърдение че $\exists\delta>0: \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(x)<\frac{f(c)}{2}<0$

Оттук следва че $M\supset(c-\delta,c+\delta)$ и след. $\sup M\geq c+\delta>c$

Това е противоречие с деф на c Ако $f(c)>0$ то $\exists\delta>0: \forall x\,(c-\delta,c+\delta)$ $\Rightarrow f(x)>\frac{f(c)}{2}>0$ $\Rightarrow$ никоя точка от $(c-\delta,c+\delta)$ не се съдържа в M. $\Rightarrow\sup M\leq c-\delta$ което е противоречие с избора на c. $\Rightarrow$ $f(c)=0$

* Теорема за междинните стойности

Нека снимка

Пример следствие Искаме да обосновем съществуването на n-ти корен в интервала $[0,+\infty)$

По подобен начин можем да обосн съд. на n-ти корен за вс. реално число при n-нечетно

Ф-цията $f(x) = x^n$ е непрекъсната и строго растяща в интервала $[0, +\infty)$. Нека $y \in (0, +\infty)$ дефинираме $\sqrt[n]{0} = 0$

Забелязваме че $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n}{2} y^2 + \dots > ny \geq y$ => ако разгл. интервала $[0, 1+y]$ то $0^n < y < (1+y)^n$. Прилагайки теоремата за междинните ст-ти на ф-цията $f(x) = x^n$ за интервала $[0, 1+y]$ и за междинната стойност $y \in (f(0), f(1+y))$ то получаваме че $\exists\, x \in (0, 1+y) : f(x) = y$ т.е. $x^n = y$. Тогава ще дефинираме $\sqrt[n]{y} = x$. Точката x, която получихме единствена защото x^n е строго растяща в интервала $[0, +\infty)$