



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMÍA

**STUDY OF THE ROLE OF GAS IN THE FORMATION OF SMBH SEED,
THROUGH SIMULATIONS OF NSC WITH GAS EMBEDDED**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN
ASTRONOMÍA

BORIS CUEVAS GOMEZ

PROFESOR GUÍA:
Andrés Escala

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PROFESOR 2
PROFESOR 3

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
NOMBRE INSTITUCIÓN

SANTIAGO DE CHILE
2025

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA
POR: BORIS CUEVAS GOMEZ
FECHA: 2025
PROF. GUÍA: NOMBRE PROFESOR

**STUDY OF THE ROLE OF GAS IN THE FORMATION OF SMBH SEED,
THROUGH SIMULATIONS OF NSC WITH GAS EMBEDDED**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

*Una frase de dedicatoria,
pueden ser dos líneas.*

Saludos

Acknowledgments

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Table of Contents

1. Introducción	1
1.1. SMBH background	1
1.1.1. Una breve introducción	1
1.2. Aims and objectives	2
1.3. Previous work	3
2. Mathematical model	4
2.1. density criterion	4
2.2. Stars and gas in equilibrium	4
3. A method for coupling gas and stars	5
3.1. N-body code: Ph4	5
3.1.1. Hermite integrator	5
3.1.2. Block time steps	6
3.1.3. Collisions and mergers	6
3.1.4. Escaping stars	6
3.2. Smoothed particles hydrodynamics: Fi	6
3.3. Coupling strategy: Bridge	6
4. Results and analysis	7
5. El desarrollo de la tesis	8
5.1. Aquí una nueva sección	8
5.1.1. Haciendo una tesis como un profesional	8
5.1.2. Otros párrafos más normales	9
5.1.3. Ejemplos de inserción de código fuente	10
5.1.4. Agregando múltiples imágenes	11
Más ejemplos	12
Listas y Enumeraciones	12
6. Conclusions	13
References	14
Appendices	15
A. Hermite 4th order	15
A.1. Step 1: Particle selection	15
A.2. Step 2: Calculate the predicted position and velocities for all particles	15

A.3.	Step 3: Calculate acceleration and jerk for particle i	16
A.4.	Step 4: Second and third time derivative of acceleration, using Hermite interpolation	16
A.5.	Step 5: Add corrections	17
A.6.	Step 6: Time step update	18
B.	Cálculos realizados	18
B.1.	Metodología	18
B.2.	Resultados	19

List of Tables

1.1.	Ejemplo de tablas.	2
1.2.	Ejemplo de tablas con colores de filas.	2
B.1.	Tabla de cálculo.	20

List of Figures

1.1.	Título de la imagen en el índice.	1
3.1.	Codes scheme	5
5.1.	Apolo flotando a la izquierda.	8
5.2.	Ejemplo de imagen múltiple.	11
B.1.	Imagen en anexo.	19

Chapter 1

Introducción

1.1. SMBH background

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

1.1.1. Una breve introducción

Este es un párrafo, puede contener múltiples ‘Expresiones’ así como fórmulas o referencias¹ como (1.1). A continuación se muestra un ejemplo de inserción de imágenes (como la Figura 1.1) con el comando `\insertimage`:



Figure 1.1: Where are you? de ‘Internet’.

A continuación² se muestra un ejemplo de inserción de ecuaciones simples con el comando `\insertequation`:

$$a^k = b^k + c^k \quad \forall k > 2 \quad (1.1)$$

¹ Las referencias se hacen utilizando la expresión `\label{etiqueta}`.

² Como se puede observar las funciones `\insert...` añaden un párrafo automáticamente.

Este template ha sido diseñado para que sea completamente compatible con editores \LaTeX para escritorio y de manera online^(Overleaf, 2024). La compilación es realizada siempre usando las últimas versiones de las librerías, además se incluyen los parches oficiales para corregir eventuales *warnings*.

Este es un nuevo párrafo. Para crear un nuevo párrafo basta con usar `\` en el anterior, lo que fuerza una nueva línea. También se insertar un nuevo párrafo con el comando `\newp` si el compilador de latex arroja una alerta del tipo *Underfull \hbox (badness 10000) in paragraph at lines ...*

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

1.2. Aims and objectives

También puedes usar tablas, ¡Crearlas es muy fácil!. Puedes usar el plugin [Excel2Latex](#) (Excel2Latex, 2017) de Excel para convertir las tablas a \LaTeX o bien utilizar el ‘creador de tablas online’ (Generator, 2024).

Table 1.1: Ejemplo de tablas.

Columna 1	Columna 2	Columna 3
ω	ν	δ
Φ	Θ	Σ
\mathbb{R}	\mathbb{E}	ψ

Table 1.2: Ejemplo de tablas con colores de filas.

Valor A	Valor B	Valor C	Valor Esperado
1	a	$3x$	Cumple
2	b	$6x$	No cumple
3	c	$3x + y$	Quizás
4	d	$5 \sin x$	No
5	e	0	Sí

1.3. Previous work

El template por defecto está configurado para trabajar con citas de la librería **natbib**, y se configuró al estilo *ieeetr*. Puedes usar otros estilos cambiando la configuración `\natbibrefstyle` si es que usas natbib. También se da soporte a las librerías **bibtex** y **apacite**, para ello puedes cambiar la configuración `\stylecitereferences`. Una completa guía de estilos la puedes consultar en <https://latex.ppizarror.com/doc/bibstylescompared.pdf>.

A continuación se detallan algunos links de ayuda para el uso de las referencias:

- [Galería de estilos numéricos por corchetes](#)
- [Galería de estilos por autor/fecha](#)
- [Guía básica referencias Mendeley](#)
- [Guía completa de estilos](#)

Chapter 2

Mathematical model

2.1. density criterion

2.2. Stars and gas in equilibrium

Chapter 3

A method for coupling gas and stars

In this work, we investigate the effect of gas in the process of seeds for SMBH formation. In contrast with other works, we do not take into account gas accretion by stars, since we are interested in the gravitational effect of gas over stars and vice versa.

We need, in principle, three codes: one for the stars, one for the gas and a coupling code that make gravitational interactions between gas and stars.

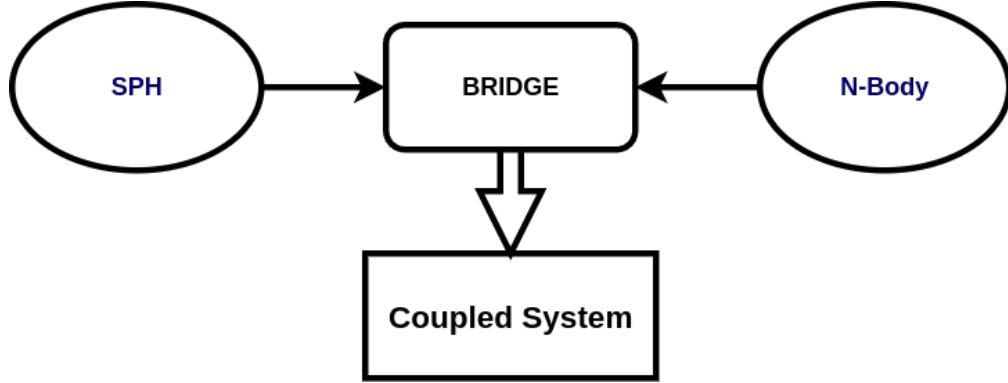


Figure 3.1: Codes scheme

The N-Body and SPH codes are used through the AMUSE interface, and are coupling with an external code.

3.1. N-body code: Ph4

The proposed scenarios presented in (referencia a capitolo) require the modeling of dense stellar clusters. And as we need to consider close encounters and collisions, is necessary a precise code.

We use the PH4 code from the AMUSE interface. In the present section, we include a description of the code, as some external routines.

3.1.1. Hermite integrator

The Ph4 code uses an fourth-order Hermite integrator (Makino & Aarseth, 1992) for calculating the position and velocities of stars due to gravity. This is a predictor-corrector method.

The fourth-order Hermite scheme is based in a precise calculation of the individual time step. Considering the particle i with own time t_i , time step Δt_i , position x_i , velocity v_i , acceleration a_i and jerk \dot{a}_i , calculated at time t_i . The algorithm of integration process proceeds as:

1. Select the particle with minimum $t_i + \Delta t_i$. Set the global time as $t = t_i + \Delta t_i$.
2. Calculate the predicted positions (x_p) and velocities (v_p) for all particles, using the actual values for x , v , a , \dot{a} .
3. Calculate the acceleration (a_i) and jerk (\dot{a}_i) for particle i at time $t_i + \Delta t_i$ using the predicted positions and velocities.
4. Calculate the second and third time derivative of acceleration ($a_i^{(2)}$ and $a_i^{(3)}$), using an Hermite interpolation.
5. Add the corrections to position and velocities of particle i .
6. Calculate and update the time step Δt_i .
7. Repeat the algorithm.

3.1.2. Block time steps

3.1.3. Collisions and mergers

3.1.4. Escaping stars

3.2. Smoothed particles hydrodynamics: Fi

3.3. Coupling strategy: Bridge

Chapter 4

Results and analysis

Chapter 5

El desarrollo de la tesis

5.1. Aquí una nueva sección

5.1.1. Haciendo una tesis como un profesional



Figure 5.1: Apolo flotando a la izquierda.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Proin sit amet augue. Praesent lacus. Donec a leo. Ut turpis ante, condimentum sed, sagittis a, blandit sit amet, enim.

Integer sed elit. In ultricies blandit libero. Proin molestie erat dignissim nulla convallis ultrices. Aliquam in magna. Etiam sollicitudin, eros a sagittis pellentesque, lacus odio volutpat elit, vel tincidunt felis dui vitae lorem. Etiam leo. Nulla et justo.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\partial^\eta f(x)}{\partial x^\eta} \cdot \sum_{x=a}^b f(x) \left(1 + \Delta x\right)^{1+\frac{\epsilon}{k}} \quad (5.1)$$

Ecuación sin sentido.

Definition 5.1 (ver (Einstein, 1905)) *Definición definitiva*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x)$$

Proin sit amet augue. Praesent lacus. Donec a leo. Ut turpis ante, condimentum sed, sagittis a, blandit sit amet, enim. Integer sed elit. In ultricies blandit libero. Proin molestie erat dignissim nulla convallis ultrices. Aliquam in magna. Etiam sollicitudin, eros a sagittis pellentesque, lacus odio volutpat elit, vel tincidunt felis dui vitae lorem. Etiam leo. Nulla et

justo.

5.1.2. Otros párrafos más normales

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

$$\Lambda_f = \frac{L \cdot f}{W} \cdot \frac{Q_e^2}{8\pi^2 W^4 g} + \sum_{i=1}^l \frac{f \cdot (M - d)}{l \cdot W} \cdot \underbrace{\frac{(Q_e - i \cdot Q)^2}{8\pi^2 W^4 g}}_{\sim \mathcal{A}} \quad (5.2)$$

$$Q_e = 2.5Q \cdot \int_0^e V(x) dx + \sin^{-1} \left(1 + \frac{1}{1 - e} \right)$$

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

$$\boxed{f(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (5.3)$$

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mol-

lis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus

eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

5.1.3. Ejemplos de inserción de código fuente

El template permite la inserción de los siguientes lenguajes de programación de forma nativa: ABAP, Ada, Assembler x64, Assembler x86[masm], Awk, Bash, Basic, C, Caml, CMake, Cobol, C++, C#, CSS, CSV, CUDA, Dart, Docker, Emacs, Elixir, Erlang, Fortran, F#, GLSL, Gnuplot, Go, Haskell, HTML, INI, Java, Javascript, JSON, Julia, Kotlin, LaTeX, Lisp, LLVM, Lua, Make, Maple, Mathematica, Matlab, Mercury, Modula-2, Objective-C, Octave, OpenCL, OpenSees, Pascal, Perl, PHP, Texto plano, PostScript, Powershell, Prolog, Promela, Pseudocódigo, Python, Q#, R, Racket, Reil, Ruby, Rust, Scala, Scheme, Scilab, Simula, SPARQL, SQL, Swift, TCL, VBScript, Verilog, VHDL y XML.

Para insertar un código fuente se debe usar el entorno `sourcecode`, o el entorno `sourcecodep` si es que se quiere utilizar parámetros adicionales. A continuación se presenta un ejemplo de inserción de código fuente en Python (Código 5.1), Java y Matlab:

Code 5.1: Ejemplo en Python.

```
1 import numpy as np
2 def incmatrix(genl1, genl2):
3     m = len(genl1)
4     n = len(genl2)
5     M = None # Comentario 1
6     VT = np.zeros((n*m, 1), int) # Comentario 2
```

Code 5.2: Ejemplo en Java.

```
1 import java.io.IOException;
2 import javax.servlet.*;
3
4 public class Hola extends GenericServlet { // Hola mundo
5     public void service(ServletRequest request, ServletResponse response)
6         throws ServletException, IOException{
7         response.setContentType("text/html");
8         PrintWriter pw = response.getWriter();
9         pw.println("Hola, mundo!");
10    }
11 }
```

Code 5.3: Ejemplo en Matlab.

```
1 % Se crea gráfico
2 f = figure(1);
3 title('Espectro de pulso de desplazamiento');
4
5 for j = 1:length(BETA)
6     fad = ones(1, NDATOS); % Arreglo para el FAD
7     for i = 1:NDATOS
8         [t, u_t, ~, ~] = main(BETA(j), r(i), M, K, F0, 0);
9         fad(i) = max(abs(u_t)) / uf0;
```

```

10 end
11 end

```

5.1.4. Agregando múltiples imágenes

El template ofrece el entorno `images` que permite insertar múltiples imágenes de una manera muy sencilla. Para crear imágenes múltiples se deben usar las siguientes instrucciones:

```

1 \begin{images}[\label{imagenmultiple}]{Ejemplo de imagen múltiple.}
2   \addimage[\label{ciudadfoto}]{ejemplos/test-image}{width=6.5cm}{Ciudad}
3   \addimageanum{ejemplos/test-image-wrap}{height=4cm}
4   \imagesnewline
5   \addimage{ejemplos/test-image}{width=11cm}{Ciudad más grande}
6 \end{images}

```

Obteniendo así:



(a) Ciudad



(b) Ciudad más grande

Figure 5.2: Ejemplo de imagen múltiple.

Más ejemplos

Listas y Enumeraciones

Hacer listas enumeradas con \LaTeX es muy fácil con el `template`³, también puedes revisar el manual (Pizarro, 2024), para ello debes usar el comando `\begin{enumerate}`, cada elemento comienza por `\item`, resultando así:

1. Grecia
2. Abracadabra
3. Manzanas

También se puede cambiar el tipo de enumeración, se pueden usar letras, números romanos, entre otros. Esto se logra cambiando el **label** del objeto `enumerate`. A continuación se muestra un ejemplo usando letras con el estilo `\alph`⁴, números romanos con `\roman`⁵ o números griegos con `\greek`⁶:

- | | | |
|-------------|-------------|------------------------|
| a) Peras | i) Rojo | α) Matemáticas |
| b) Manzanas | ii) Café | β) Lenguaje |
| c) Naranjas | iii) Morado | γ) Filosofía |

Para hacer listas sin numerar con \LaTeX hay que usar el comando `\begin{itemize}`, cada elemento empieza por `\item`, resultando:

- | | | |
|------------|----------|-----------|
| – Peras | * Rojo | • Árboles |
| – Manzanas | * Café | • Pasto |
| – Naranjas | * Morado | • Flores |

³ También puedes revisar el manual de las enumeraciones en <https://latex.ppizarro.com/doc/enumitem.pdf>.

⁴ Con `\Alph` las letras aparecen en mayúscula.

⁵ Con `\Roman` los números romanos salen en mayúscula.

⁶ Una característica propia del `template`, con `\Greek` las letras griegas están escritas en mayúscula.

Chapter 6

Conclusions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

References

- Aarseth, S. J. (1985). Direct methods for n-body simulations. In J. U. Brackbill & B. I. Cohen (Eds.), *Multiple Time Scales* (pp. 377–418). Academic Press.
- Einstein, A. (1905). Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 322(10), 891–921.
- Excel2Latex (2017). Plugin para hacer tablas con excel.
- Generator, T. (2024). Creador de tablas online para latex.
- Makino, J. & Aarseth, S. J. (1992). On a hermite integrator with ahmad-cohen scheme for gravitational many-body problems. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 44(2), 141–151.
- Overleaf (2024). Editor online para latex.
- Pizarro, P. (2024). Template informe en latex.

Appendices

Appendix A. Hermite 4th order

The N-body code used in this work, ph4, uses an Hermite fourth order integrator. The next subsections describe in detail the algorithm and calculations in the main integration cycle.

A.1. Step 1: Particle selection

The first step is to select the particle to be advanced. Considering that at current time the particles have their own time t_j , time step Δt_j , coordinates x_j and v_j , acceleration a_j and jerk \dot{a}_j (with $\dot{a}_j = \partial a_j / \partial t$). The particle selected is the one that has the minimum $t + \Delta t$:

$$i = \arg \min_j (t_j + \Delta t_j) \quad (\text{A.1})$$

Note that always $t_j \leq t_i + \Delta t_i$, for all j . Now, we set the current time as $t = t_i + \Delta t_i$.

A.2. Step 2: Calculate the predicted position and velocities for all particles

From Taylor expansion for position, we have the expression:

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{x^{(2)}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

Using that $\dot{x} = v$, $x^{(2)} = \dot{v} = a$, $x^{(3)} = v^{(2)} = \dot{a}$..., we make predictions over position and velocity of order \dot{a} :

$$x_{p,j} = x_j + v_j(t - t_j) + \frac{a_j}{2!}(t - t_j)^2 + \frac{\dot{a}_j}{3!}(t - t_j)^3 \quad (\text{A.3})$$

$$v_{p,j} = v_j + a_j(t - t_j) + \frac{\dot{a}_j}{2!}(t - t_j)^2 \quad (\text{A.4})$$

The acceleration is due only to gravitational force. The expression for each particle j is:

$$a_{0,j} = \sum_{k \neq j} Gm_k \frac{r_{0,jk}}{(r_{0,jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (\text{A.5})$$

Where ϵ is the softening parameter, and

$$r_{0,jk} = r_k - r_j \quad (\text{A.6})$$

Deriving A.5 respect time, we have the jerk:

$$\dot{a}_{0,j} = \frac{\partial a_j}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

$$= \sum_{k \neq j} Gm_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{r_{0,jk}}{(r_{0,jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{a}_{0,j} = \sum_{k \neq j} Gm_k \left[\frac{v_{0,jk}}{(r_{0,jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{0,jk} \cdot r_{0,jk})r_{0,jk}}{(r_{0,jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \quad (\text{A.9})$$

where

$$v_{0,jk} = v_k - v_j \quad (\text{A.10})$$

A.3. Step 3: Calculate acceleration and jerk for particle i

Similar to equations A.5 and A.9, we calculate the acceleration and jerk, using the predicted positions and velocity:

$$a_{1,i} = \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{r_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{a}_{1,i} = \sum_{j \neq i} Gm_j \left[\frac{v_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{ij} \cdot r_{ij})r_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$r_{ij} = r_{p,j} - r_{p,i} \quad (\text{A.13})$$

$$v_{ij} = v_{p,j} - v_{p,i} \quad (\text{A.14})$$

Note that for all particles we have the velocity and jerk. Now, we calculate the predicted acceleration and jerk, just for particle i .

A.4. Step 4: Second and third time derivative of acceleration, using Hermite interpolation

In order to have a precise estimation of the next step, the second and third time derivative are calculated, using Hermite interpolation. First, begin with a model of acceleration as a polynome of time:

$$a(t) = \alpha t^3 + bt^2 + ct + d \quad (\text{A.15})$$

We can easily calculate the time derivatives:

$$\dot{a}(t) = 3\alpha t^2 + 2bt + c \quad (\text{A.16})$$

$$a^{(2)}(t) = 6\alpha t + b \quad (\text{A.17})$$

$$a^{(3)}(t) = 6\alpha \quad (\text{A.18})$$

But from step 2 and 3, we have the acceleration and jerk, evaluated in t_i and $t_i + \Delta t_i$ (predicted). Replacing in A.15 and A.16, we have 4 equations:

$$a(t_i) = a_{0,i} = \alpha t_i^3 + b t_i^2 + c t_i + d \quad (\text{A.19})$$

$$a(t) = a_{1,i} = \alpha t^3 + b t^2 + c t + d \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{a}(t_i) = \dot{a}_{0,i} = 3\alpha t_i^2 + 2b t_i + c \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{a}(t) = \dot{a}_{1,i} = 3\alpha t^2 + 2b t + c \quad (\text{A.22})$$

where $t = t_i + \Delta t_i$ is the current time. Note that for the second and third time derivative of acceleration, is enough to get α and b . From A.22:

$$c = \dot{a}_{1,i} - 3\alpha t^2 - 2b t \quad (\text{A.23})$$

using this expression in A.20 – A.19, we have:

$$b = \frac{(\dot{a}_{1,i} - \dot{a}_{0,i}) - \alpha 3(t^2 - t_i^2)}{2(t - t_i)} \quad (\text{A.24})$$

now we use A.24 in A.20 – A.19:

$$\alpha = \frac{(\dot{a}_{1,i} + \dot{a}_{0,i})(t - t_i) - 2(a_{1,i} - a_{0,i})}{(t - t_i)^3} \quad (\text{A.25})$$

replacing A.25 in A.24:

$$b = \frac{-\dot{a}_{1,i}(t + 2t_i) - \dot{a}_{0,i}(2t + t_i)}{(t - t_i)^2} + \frac{3(a_{0,i} - a_{1,i})(t + t_i)}{(t - t_i)^3} \quad (\text{A.26})$$

With this, we can evaluate the second and third time derivative of acceleration in t_i . For the equation A.18, and using $t - t_i = \Delta t_i$:

$$a_{0,i}^{(3)} = a^{(3)}(t_i) = 6\alpha \quad (\text{A.27})$$

$$a_{0,i}^{(2)} = 6 \frac{(\dot{a}_{1,i} + \dot{a}_{0,i})\Delta t_i - 2(a_{1,i} - a_{0,i})}{\Delta t_i^3} \quad (\text{A.28})$$

$$a_{0,i}^{(3)} = \frac{12(a_{0,i} - a_{1,i}) + 6(\dot{a}_{0,i} + \dot{a}_{1,i})\Delta t_i}{\Delta t_i^3} \quad (\text{A.29})$$

Evaluating the second time derivative in t_i , and replacing the obtained for α and b :

$$a_{0,i}^{(2)} = a^{(2)}(t_i) = 6\alpha t_i + b \quad (\text{A.30})$$

$$a_{0,i}^{(2)} = \frac{-6(a_{0,i} - a_{1,i}) - \Delta t_i(4\dot{a}_{0,i} + 2\dot{a}_{1,i})}{\Delta t_i^2} \quad (\text{A.31})$$

A.5. Step 5: Add corrections

First, we begin with the Taylor expansion for the position of particle i , at the time $t = t_i$:

$$x_i(t_i + \Delta t_i) = x_i(t_i) + \dot{x}_i(t_i)\Delta t_i + \frac{x_i^{(2)}(t_i)\Delta t_i^2}{2!} + \dots + \frac{x_i^{(5)}(t_i)\Delta t_i^5}{5!} \quad (\text{A.32})$$

$$= x_i + v_i\Delta t_i + \frac{a_{0,i}\Delta t_i^2}{2} + \frac{\dot{a}_{0,i}\Delta t_i^3}{6} + \frac{a_{0,i}^{(2)}\Delta t_i^4}{24} + \frac{a_{0,i}^{(3)}\Delta t_i^5}{120} \quad (\text{A.33})$$

From (A.3) we replace $x_{p,i}$ in the first four terms in the equation:

$$x_i(t_i + \Delta t_i) = x_{p,i} + \frac{a_{0,i}^{(2)}\Delta t_i^4}{24} + \frac{a_{0,i}^{(3)}\Delta t_i^5}{120} \quad (\text{A.34})$$

In a similar way, we have an expression for the velocity:

$$v_i(t_i + \Delta t_i) = v_{p,i} + \frac{a_{0,i}^{(2)}\Delta t_i^3}{6} + \frac{a_{0,i}^{(3)}\Delta t_i^4}{24} \quad (\text{A.35})$$

The goal of this method is that for updating the position and velocity with high precision (order $\mathcal{O}(a^{(3)})$), is only necessary to calculate the actual acceleration and jerk for all particles, and predicted acceleration and jerk for particle i .

A.6. Step 6: Time step update

Now that particle i has been changed his position and velocity, is necessary to calculate a new time step. The importance of this step is that controls the energy error. An proved and stable criteria is the standard formula from (Aarseth, 1985):

$$\Delta t_i = \sqrt{\eta \frac{|a_{1,i}||a_{1,i}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,i}|^2}{|\dot{a}_{1,i}||a_{1,i}^{(3)}| + |a_{1,i}^{(2)}|^2}} \quad (\text{A.36})$$

The values for $a_{1,i}$ and $\dot{a}_{1,i}$ are known, since are directly calculated. The value of $a^{(3)}(t)$ is constant, because is used a third-order interpolation. We only calculate $a_{1,i}^{(2)}$:

$$a_{1,i}^{(2)} = a_{0,i}^{(2)} + \Delta t_i a_{0,i}^{(3)} \quad (\text{A.37})$$

In the beginning of simulation, the high order derivatives of acceleration are not available, so an alternative formula for time step can be used in the startup:

$$\Delta t = \eta_s \frac{|a|}{|\dot{a}|} \quad (\text{A.38})$$

In (Makino & Aarseth, 1992) suggest $\eta_s \sim 0.01$

Appendix B. Cálculos realizados

B.1. Metodología

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque ha-

bitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.



Figure B.1: Imagen en anexo.

B.2. Resultados

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Table B.1: Tabla de cálculo.

Elemento	ϵ_i	Valor	Descripción
A	10	$3,14\pi$	Valor muy interesante ^a
B	20	6	Segundo elemento
C	30	7	Tercer elemento ¹
D	150	10	Sin descripción
E	0	0	Cero

^a Este elemento tiene una descripción debajo de la tabla

¹ Más comentarios