УДК 519.21

Б.М. Кликавка,
А.Я. Оленко, к.ф.-м.н., доцент[1]

Асимптотичні властивості вагових функцій

При дослідженні зв'язку поведінки спектральних функції в довільній точці і певних функціоналів від випадкового поля на нескінченності, важливу роль відіграють вагові функції. У роботі досліджено асимптотичну властивість вагових функцій у Тауберових теоремах для випадкових полів.

Ключові слова: спектральна функція, вагова функція, гіпергеометрична функція, випадкове поле.

B.M. Klykavka,
A.Ya. Olenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.)

Asymptotic properties of weight functions

Weight functions play an important role to study relations of spectral functions behavior in arbitrary points and some functionals of random fields on infinity. Asymptotical property of weight functions in Tauberian theorems for random fields are investigated.

Key Words: spectral function, weight function, hypergeometric function, random field.

E-mail: bklykavka@yahoo.com, a.olenko@latrobe.edu.au
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Найбільш відомі абелеві і тауберові теореми (див., напр. [1]) встановлюють зв'язок асимптотичної поведінки спектральних і кореляційних функцій однієї в нулі а іншої на нескінченності. Для полів з сильною залежністю такий зв'язок асимптотик не завжди існує. Тому у роботах [2] та [3] був запропонований підхід на основі вивчення зв'язку поведінки спектральної функції в нулі і деякого функціоналу від випадкового поля на нескінченності. Цей функціонал відіграв роль кореляційної функції у класичних тауберових теоремах і визначався як дисперсія від середнього випадкового поля по кулі чи сфері.

Нехай $\mathbb{R}^n-$ евклідів простір вимірності $n \geqslant 2$, $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ – дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$\mathrm{B}_n(r) = \mathrm{B}_n(\|t\|) = \mathrm{E}\xi(0)\xi(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathsf{B}_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}}d\Phi(\lambda),$$

де $J_\nu(\lambda)$ – Бесселева функція першого роду.

Щоб описати локальну поведінку спектральної функції $\Phi(\cdot)$ в околі довільної точки $a \in [0, +\infty)$, нас цікавить асимптотична поведінка функції $\Phi_a(\lambda) := \Phi(a+\lambda) - \Phi(a)$ за умови $\lambda \to +0$.

Позначимо

$$\tilde{b}_a(r) := (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(rx)}{(rx)^n} d\Phi_a(x).$$

У роботі [4] отримано зображення інтегрального перетворення $\tilde{b}_a(r)$ у термінах дисперсії зважених інтегралів від випадкових полів.

Терема [4]. *Існує така дійснозначна функція $g_{n,r,a}(\cdot)$, що*

$$\tilde{b}_a(r) = \mathsf{D}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g_{n,r,a}(|t|)\xi(t)dt\right].$$

Причому

$$g_{n,r,a}(|t|) = \frac{1}{|t|^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^\infty (\lambda+a)^{n/2}\times$$

$$\times J_{\frac{n}{2}-1}(|t|(\lambda+a))\frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}d\lambda, \quad |t| \neq r.$$

[1]Research supported by La Trobe University Research Grant 501821

У випадку $n > 2$ функція $g_{n,r,a}(|t|)$ може бути визначена як сума функціонального ряду (див. [4], Теорема 6):

$$g_{n,r,a}(|t|) = \frac{a^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}|t|^{n/2}}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n}{2}+m-1\right)C_{n+m-3}^{m}\times$$
$$\times J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a)\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(\tfrac{2}{a}\right)^k\Gamma\left(\tfrac{m+k+1}{2}\right)\times \quad (1)$$
$$\begin{cases}\dfrac{{}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2},\frac{3+k-m-n}{2};\frac{n}{2}+1;\left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)}{|t|^k\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{m+n-k-1}{2})}, |t|>r;\\ \dfrac{{}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2},\frac{m+k+1-n}{2};\frac{n}{2}+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{|t|^{-m-1}r^{m+k+1}\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})}, |t|<r.\end{cases}$$

У випадку $n = 2$ функція $g_{2,r,a}(|t|)$ може бути визначена як сума такого функціонального ряду (див. [5]):

$$g_{2,r,a}(|t|) = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_m J_m(|t|a)\times$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{ar{}_2F_1(\frac{m+1}{2},\frac{1-m}{2};2;\left(\frac{r}{|t|}\right)^2)}{2|t|}+\\ +\dfrac{rm{}_2F_1(\frac{m}{2}+1,1-\frac{m}{2};2;\left(\frac{r}{|t|}\right)^2)}{2|t|^2}, \quad |t|>r;\\ \dfrac{a|t|^m\Gamma(\frac{m+1}{2}){}_2F_1(\frac{m+1}{2},\frac{m-1}{2};1+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2)}{2r^m m!\Gamma(\frac{3-m}{2})}+\\ +\dfrac{\Gamma(\frac{m}{2}+1){}_2F_1(\frac{m}{2}+1,\frac{m}{2};1+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2)}{|t|^{-m}r^{m+1}m!\Gamma(1-\frac{m}{2})}, |t|<r\end{cases} \quad (2)$$

де

$$\varepsilon_m = \begin{cases}1, \text{якщо } \ m=0,\\ 2, \text{якщо } \ m>0,\end{cases}$$

і вважаємо, що $\Gamma^{-1}(k) = 0$, якщо $k = 0,-1,-2,\ldots$.

Для подальшого дослідження дисперсії зважених інтегралів від випадкових полів і отримання граничних теорем нам потрібно дослідити асимптотичні властивоості вагових функцій $g_{n,r,a}(|t|)$.

Надалі використовуватимемо позначення C для сталих, точні значення яких не є суттєвими у доведенні.

2 Асимптотична властивість вагових функцій

За Теремою 9.2 [7] відомо, що $g_{n,r,a}(|t|) \to 0$, при $r \to \infty$. Для вивчення асимптотичних властивостей функцій типу $r^\alpha \cdot g_{n,r,a}(|t|)$ використаємо зображення $g_{n,r,a}(|t|)$ у вигляді суми нескінченного функціонального ряду.

Теорема. *При* $n \geqslant 2, a \geqslant 0$

$$\lim_{r\to\infty} rg_{n,r,a}(|t|) = \frac{\sqrt{\pi}a^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a)}{|t|^{\frac{n}{2}-1}2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Доведення. Щоб дослідити асимптотичну поведінку функції $rg_{n,r,a}(|t|)$ при $r \to \infty$ у зображенні (1) нас цікавитими лише випадок $|t| < r$.

За визначенням гіпергеометричної функції

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_l(b)_l\, z^l}{(c)_l\; l!}, \quad (3)$$

$(a)_0 = 1$ і $(a)_l = a(a+1)...(a+l-1)$, якщо $l \in \mathbb{N}$, для тих значень аргумента, для яких ряд (3) збіжний і як аналітичне продовження на інші значення аргументів (із комплексної площини) якщо таке продовження існує.

У нашому випадку функція ${}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2},\frac{m+k+1-n}{2};\frac{n}{2}+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ може бути коректно визначена за формулою (3)

$$ {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2},\frac{m+k+1-n}{2},\frac{n}{2}+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = $$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_l l!}\left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}. \quad (4)$$

Дійсно, зауважимо, що у правій частині рівності (4):

$$\frac{m+k+1}{2} > 0, \ \frac{n}{2}+m > 0$$

для всіх допустимих значень $m \geqslant 0$, $n > 2$, $k = \overline{0, n-1}$.

У випадку, коли $m+k+1-n > 0$ використаємо результат із §2.1.1, [9]: при $\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2} \neq \{0,-1,-2,...\}$

$$\frac{(\frac{m+k+1}{2})_l(\frac{m+k+1-n}{2})_l}{(\frac{n}{2}+m)_l\; l!} =$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m)}{\Gamma(\frac{m+k+1}{2})\Gamma(\frac{m+k+1-n}{2})}\; l^{k-n}[1+\mathrm{O}(l^{-1})], \quad (5)$$

і ряд (4) абсолютно збіжний, бо $|t| < r$.

Якщо $m+k+1-n < 0$ і непарне, то знову ж таки за §2.1.1, [9] можемо використати асимптотику (5), і ряд (4) абсолютно збіжний для $|t| < r$.

Розглянемо випадок, коли $m + k + 1 - n \leqslant 0$ і $m + k + 1 - n$ - парне. Тоді функція ${}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ перетворюється у многочлен степені $n - m - k - 1$:

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-m-k-1}{2}} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_l l!} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}.$$

Таким чином при $|t| < r$ ряд, визначений у (4) є абсолютно збіжним для всіх допустимих значень m, n та k.

Оскільки степеневий ряд (4) збіжний при $|t| < r$, то можемо перейти до границі почленно при $r \to \infty$. У результаті одержуємо

$$\begin{gathered} {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_l l!} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} \to \\ \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_0 \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_0}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_0} = 1, \end{gathered} \tag{6}$$

при $r \to \infty$.

Для знаходження $\lim_{r\to\infty} r g_{n,r,a}(|t|)$ перейдемо до границі почленно у зображенні (1), випадок $|t| < r$.

Для цього покажемо, що ряд у правій частині (1) збігається рівномірно як функція r.

Надалі будемо використовувати формулу Стірлінга (див. §540 [10]) для Гамма функцій:

$$\Gamma(k+1) = \sqrt{2\pi} k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} e^{\frac{\theta_k}{k}},$$

де $\theta_k \in (0, \frac{1}{12})$.

За формулою Стірлінга

$$C_{n+m-3}^m = \frac{(n+m-3)!}{m!(n-3)!} = \frac{\Gamma(n+m-2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-2)} \sim$$

$$\sim \frac{(n+m-3)^{n+m-\frac{5}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(n-2)} \sim C \cdot m^{n-3},$$

при $m \to \infty$.

За оцінкою із §3.1 [8] для функції Бесселя і за формулою Стірлінга

$$\begin{gathered} \left|J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a)\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}(|t|a)^{\frac{n-2}{2}+m}}{2^{\frac{n-2}{2}+m}\Gamma(\frac{n-2}{2}+m)} \sim \\ \sim C_1 \cdot \frac{(|t|a)^m}{2^m \left(\frac{n}{2}+m-2\right)^{m+\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}} \sim \\ \sim C_2 \cdot \frac{(|t|a)^m}{2^m m^{m+\frac{n-3}{2}}}, \end{gathered} \tag{7}$$

при $m \to \infty$.

Із зображення (4) та формули (5) випливає

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})} = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m) l^{k-n}}{\Gamma(\frac{m+k+1}{2})\Gamma(\frac{m+k+1-n}{2})} \times \\ \times \left(1 + O(l^{-1})\right) \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})} + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{k-n}\left(1+O(l^{-1})\right)}{\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})\Gamma(\frac{m+k+1-n}{2})} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}. \end{gathered}$$

Оскільки нас цікавить поведінка членів ряду при $m \to \infty$, то ми використовуємо (4) і (5) і не розглядаємо випадок $m + k + 1 - n \leqslant 0$.

Скориставшись тотожністю

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

отримуємо таке зображення:

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})} + \frac{\sin(\pi\frac{n-m-k+1}{2})}{\pi} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} l^{k-n} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} \left(1 + O(l^{-1})\right) = \\ = \frac{\sin(\pi\frac{n-m-k+1}{2})}{\pi} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} l^{k-n} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} \left(1 + O(l^{-1})\right)\right). \end{gathered} \tag{8}$$

За формулою Стірлінга, перший доданок

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)} \sim \\ \sim C \cdot \frac{\left(\frac{m+k-1}{2}\right)^{\frac{m+k}{2}} \left(\frac{m+k-1-n}{2}\right)^{\frac{m+k-n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}+m-1\right)^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}} \sim \\ \sim C \cdot \frac{m^{k-n+\frac{1}{2}}}{2^m}, \end{gathered}$$

при $m \to \infty$.

Другий доданок у (8) – це збіжний ряд, який взагалі від m не залежить.

Підсумовуючи вищесказане отримуємо

$$(-1)^m \left(\frac{n}{2}+m-1\right) C^m_{n+m-3}\times$$
$$\times J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a)\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)|t|^{m+1}\times$$
$$\times \frac{{}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2},\frac{m+k+1-n}{2};\frac{n}{2}+m;\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{r^{m+k}\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\frac{n-m-k+1}{2})} \quad (9)$$
$$= O\left(m^{n-2}\frac{(|t|a)^m|t|^{m+1}}{2^m m^{m+\frac{n-3}{2}}r^{m+k}}\left(\frac{m^{k-n+\frac{1}{2}}}{2^m}+1\right)\right)$$
$$= O\left(\frac{(|t|a)^m|t|^{m+1}}{2^m r^{m+k}m^{m-\frac{n-1}{2}}}\right),$$

оскільки $k\leqslant n-1$.

Тому ряд у зображенні (1), випадок $|t|<r$, збігається рівномірно і можемо перейти до границі почленно (див. [10], §433, Теорема 4).

Із (9) та (1) випливає, що лише член ряду з $m=k=0$ має ненульову границю, якщо $r\to\infty$.

Застосувавши (6) у результаті отримумо:

$$\lim_{r\to\infty} rg_{n,r,a}(|t|) = \frac{a^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}|t|^{n/2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)\times$$
$$\times J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{|t|}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}a^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a)}{|t|^{\frac{n}{2}-1}2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

що і доводить наше твердження для $n>2$.

Застосувавши повністю аналогічні міркування до зображення (2) отримаємо твердження теореми і для випадку $n=2$. □

3 Висновки

У роботі досліджено асимптотичну поведінку вагових функцій $g_{n,r,a,}(|t|)$ при $r\to\infty$. Показано, що швидкість збіжності до нуля $g_{n,r,a,}(|t|)$ еквівалентна $C/r,\ r\to\infty$. Одержані результати будуть використані при доведенні граничних теорем для вагових функціоналів від випадкових полів.

Список використаних джерел

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. – Cambridge university press, 1989.
2. *Leonenko N.N., Olenko A.Ya.* Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields. // Random Oper. Stoch. Eqs.–1993. – **1, N 1**. –P. 57-67.
3. *Olenko A.Ya.* Tauberian and Abelian theorems for strongly dependent random fields. // Ukrainian Math. Journal. –1996. –**48, N 3**. –P. 368-383.
4. *Оленко А.Я.* Тауберова теорема для полів з OR спектром II. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006. – **74**. – С. 81-97.
5. *Оленко А.Я., Кликавка Б.М.* Тауберова теорема для полів на площині. // Доповіді Національної Академії Наук України. – 2006. – **6**. –С. 19-25.
6. *Olenko A. Ya., Klykavka B. M.* Some properties of weight functions in Tauberian theorems I // Theory of Stoch. Proc. –2006. – Vol. 12 (28). – № 3-4. – C. 123-136.
7. *Кликавка Б.М.* Зображення і властивості вагових функцій у Тауберових теоремах. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2007. – **77**. – С. 64-81.
8. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. – Т.1. –М., 1949.
9. *Bateman G., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. –New York:Mc Grow-Hill, – Vol. **1**, 1953.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. -М.: Наука, –Т. **2**, 1970.

Надійшла до редколегії 29.12.2008