Андрій Оленко, Борис Кликавка

Властивості зображень вагових функцій у тауберових теоремах. I

1. Вступ

Абелеві та тауберові теореми знаходять численні застосування при отриманні різних асимптотичних властивостей випадкових процесів та полів, доведенні граничних теорем. Більшість відомих результатів у цьому напрямку (див. наприклад [1]-[4]) стосується зв'язку асимптотичної поведінки спектральної і кореляційної функцій (функції розподілу та характеристичної функції у одновимірному випадку) однієї в нулі а іншої на нескінченності. Для полів з сильною залежністю такий зв'язок асимптотик не завжди існує. Тому у роботах [5],[6] був запропонований підхід на основі вивчення зв'язку поведінки спектральної функції в нулі і деякого функціоналу від випадкового поля на нескінченності. Цей функціонал відігрaв роль кореляційної функції у класичних тауберових теоремах і визначався як дисперсія від середнього випадкового поля по кулі чи сфері. Його можна було обчислити як деякий інтеграл від кореляційної функції.

У роботах [7],[8] дослідження у цьому напрямку були продовжені. Отримано результати про зв'язок локальної поведінки спектральної функції в довільній точці (не обов'язково нулі) з асимптотикою деякого функціоналу від випадкового поля. Вдалось отримати вираз для цього функціоналу у вигляді дисперсії зваженого середнього випадкового поля. Різні результати про вагові функції у такому зображенні були отримані в роботах [7]-[10]. Дана робота продовжує ці дослідження.

Нехай $\mathbf{R}^n$– евклідів простір вимірності $n \geq 2$, $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ – дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле (див. [11]) з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$B_n(r) = B_n(\|t\|) = E\xi(0)\xi(t), \quad t \in \mathbf{R}^n.$$

Відомо, що існує така обмежена неспадна функція $\Phi(x), x \geq 0$, яку називають спектральною функцією поля $\xi(t), t \in \mathbf{R}^n$ ([11]), що має місце зображення

$$B_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rx)}{(rx)^{\frac{n-2}{2}}} d\Phi(x),$$

де $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку $\nu > -\frac{1}{2}$ (див.[12]).

Нехай

$$\tilde{b}^a(r) := (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(rx)}{(rx)^n} d\Phi^a(x),$$

де, для довільної точки $a \in [0, +\infty)$,

$$\Phi^a(\lambda) := \begin{cases} \Phi(a+\lambda) - \Phi(a-\lambda), & 0 \le \lambda < a; \\ \Phi(a+\lambda), & \lambda \ge a. \end{cases}$$

У роботі [8] було показано, що існує дійснозначна функція $f_{r,a}(|t|)$ така, що

$$\tilde{b}^a(r) = D\left[\int_{\mathbf{R}^n} f_{r,a}(|t|)\xi(t)dt\right].$$

Причому значення функції можуть бути обчислені так

$$f_{r,a}(|t|) = \frac{1}{|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \underbrace{\lambda^{n/2} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r(\lambda-a))}{(r(\lambda-a))^{n/2}} J_{\frac{n}{2}-1}(|t|\lambda)}_{F(\lambda)} \, d\lambda, \quad |t| \ne r. \tag{1}$$

2. Постановка проблеми.

Надалі будемо використовувати позначення C для сталих, точні значення яких неважливі і можуть змінюватись у процесі доведень.

З асимптотичної поведінки функцій Бесселя (див. §7.21,[12])

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \to \infty \tag{2}$$

випливає, що підінтегральна функція $F(\lambda)$ у визначенні $f_{r,a}(|t|)$ має таку асиптотичну поведінку

$$F(\lambda) \sim \frac{C}{\lambda} \cos\left(r(\lambda-a) - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(|t|\lambda - \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) - \frac{\pi}{4}\right) \sim$$
$$\frac{C}{\lambda}\left(\cos\left((r+|t|)\lambda - ra - \frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left((r-|t|)\lambda - ra\right)\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Отже, у визначенні $f_{r,a}(|t|)$ інтеграл збіжний умовно.

Тому виникає проблема обчислення значень функції $f_{r,a}(|t|)$ із заданою точністю та вивчення її властивостей.

Один із стандартних методів, який застосовують при обчисленні таких інтегралів, полягає у використанні формули Пуассона (§3.3,[12]):

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} \cos(zx)dx.$$

За її допомогою можемо записати функцію $f_{r,a}(|t|)$ так

$$f_{r,a}(|t|) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{\pi}\,|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(|t|\lambda) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cos(r(\lambda-a)x)dxd\lambda.$$

Далі стандартний прийом полягає у зміні порядку інтегрування:

$$f_{r,a}(|t|)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,|t|^{\frac{n}{2}-1}}\left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\cos(rax)\int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(|t|\lambda)\cos(r\lambda x)d\lambda dx+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\sin(rax)\int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(|t|\lambda)\sin(r\lambda x)d\lambda dx\right)$$

і обчисленні внутрішніх інтегралів.

На жаль таку зміну порядку інтегрування у нашому випадку робити не можна. Внутрішні інтеграли по λ при $n \in \mathbb{N}$ не є збіжним, що випливає з асимптотичної формули (2). Тому для обчислення (1) та вивчення властивостей $f_{r,a}(|t|)$ потрібно застосувати інші методи.

У роботі [8] був запропонований один корисний підхід, який грунтується на зображенні функції $f_{r,a}(|t|)$ у вигляді суми функціонального ряду:

$$f_{r,a}(|t|)=\begin{cases}\left(\frac{2}{ar^3}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}d_m(n,r,a,|t|), & |t|<r,\\ \left(\frac{2}{ar|t|^2}\right)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}s_m(n,r,a,|t|), & |t|>r,\end{cases} \tag{3}$$

де

$$d_m(n,r,a,|t|)=\frac{\left(\frac{n}{2}+m\right)C_{n+m-1}^{m}\Gamma(\frac{n+m}{2})J_{\frac{n}{2}+m}(ra)\,{}_2F_1\ \ \frac{n+m}{2},-\frac{m}{2},\frac{n}{2};\left(\frac{|t|}{r}\right)^2}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}, \tag{4}$$

$$s_m(n,r,a,|t|)=\frac{r^{2m+1}C_{n+2m}^{2m+1}\Gamma(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2})J_{\frac{n}{2}+2m+1}(ra)\,{}_2F_1\ \ \frac{n}{2}+m+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2},\frac{n}{2}+2m+2;\left(\frac{r}{|t|}\right)^2}{|t|^{2m+1}\Gamma(-m-\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+1\right)}, \tag{5}$$

${}_2F_1(a,b,c;z)-$ гіпергеометрична функція Гауса (див. [13]).

Важливим питанням для чисельних обчислень є швидкість збіжності ряду (3). Дослідженню цього питання і присвячена дана робота.

3. Асимптотичні властивості гіпергеометричної функції.

Для одержання швидкості збіжності нам будуть потрібні деякі властивості гіпергеометричної функції ${}_2F_1$ із зображень (4) та (5).

Функція ${}_2F_1(a,b,c;z)$ визначається так

$${}_2F_1(a,b,c;z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_l(b)_l\ z^l}{(c)_l\ l!}, \tag{6}$$

$$(a)_0=1 \ \text{ і } \ (a)_l=a(a+1)...(a+l-1), \text{ якщо } \ l\in\mathbb{N},$$

для тих значень аргумента, для яких ряд (6) збіжний і як аналітичне продовження на інші значення аргументів (із комплексної площини) якщо таке продовження існує.

Зауважимо, що у випадках (4), (5) функція ${}_2F_1$ може бути коректно визначена за формулою (6). Дійсно, для парних $m = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup 0$:

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+k, -k, \frac{n}{2}; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\left(\frac{n}{2}+k\right)_l (-k)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!} z^l \tag{7} $$

перетворюється у многочлен степені k.

Використаємо результат із §2.1.1, [14]: при $a, b \neq \{0, -1, -2, ...\}$

$$ \frac{(a)_l (b)_l}{(c)_l\ l!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ l^{a+b-c-1}[1 + \mathrm{O}(l^{-1})], $$

і ряд (6) абсолютно збіжний для $|z| < 1$. Тому для $m \neq 2k,\ k \in N \cup \{0\},\ |t| < r$ функція ${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ коректно визначена рядом (6), і у випадку $|t| > r$, ${}_2F_1\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2m+2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)$ також коректно визначена за формулою (6).

Вивчимо асимптотичну поведінку ${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ при $m \to \infty$.

Надалі ми будемо використовувати формулу Стірлінга (див. §540, [15])для Гамма функції

$$ \Gamma(k+1) \sim \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k} e^{\frac{\theta_k}{k}}, $$

де $\theta_k \in (0; \frac{1}{12})$. Зокрема

$$ k! \sim \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k} e^{\frac{\theta_k}{k}}. $$

Для отримання асимптотичних формул можна було б скористатись результатом Ватсона, див. §2.3.2 [14]:

$$ {}_2F_1\left(a+\lambda, b-\lambda, c, 1/2 - z/2\right) = \frac{\Gamma(1-b+\lambda)\Gamma(c)}{\Gamma(1/2)\Gamma(c-b+\lambda)} 2^{a+b-1} (1-e^{-\xi})^{-c+1/2} \times $$

$$ (1+e^{-\xi})^{c-a-b-1/2} \lambda^{-1/2} \left(e^{(\lambda-b)\xi} + e^{\pm i\pi(c-1/2)} e^{-(\lambda+a)\xi}\right)\left(1 + O(|\lambda^{-1}|)\right), \tag{8} $$

де $z \pm \sqrt{z^2-1} = e^{\pm\xi}$, верхній або нижній знак береться за умови $\mathrm{Im} z \gtrless 0$.

Вибравши

$$ a = c = \frac{n}{2},\ b = 0,\ \lambda = \frac{m}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{z}{2} = \left(\frac{|t|}{r}\right)^2 $$

одержуємо

$$ {}_2F_1\left(\frac{n+m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) \sim \frac{\Gamma(m/2+1)\Gamma(n/2) 2^{n/2-1/2}}{\Gamma(n/2+m/2)\Gamma(1/2) m^{1/2}} \times $$

$$\times\left(\tfrac{2|t|}{r}\right)^{1/2-n/2}\left(\tfrac{|t|}{r}+\sqrt{\left(\tfrac{|t|}{r}\right)^2-1}\right)^{1/2-n/2}2^{-1/2}\left(1-\left(\tfrac{|t|}{r}\right)^2-\tfrac{|t|}{r}\sqrt{\left(\tfrac{|t|}{r}\right)^2-1}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\left(\left(\tfrac{|t|}{r}+\sqrt{\left(\tfrac{|t|}{r}\right)^2-1}\right)^{m/2}+\left(\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\pm i\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right)\left(\tfrac{|t|}{r}+\sqrt{\left(\tfrac{|t|}{r}\right)^2-1}\right)^{m/2+n/2}\right)=$$

$$=\mathrm{O}\left(\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})m^{\frac{1}{2}}}\right)\sim\mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-1}}\right).$$

при $\quad m\to\infty.$

На жаль формула (8) виконується лише у області $z\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,1)$, (див. [16], [17]), тобто не може бути безпосередньо застосована до нашого випадку. Проте ми покажемо, що асимптотична поведінка $\mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-1}}\right)$ має місце і для значень параметрів, які ми розглядаємо.

Лема 1 *Для* $|t|<r$:

$${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2},-\frac{m}{2},\frac{n}{2};\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)=O\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}\right),\ \ m\to\infty.$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок парних $m=2k,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Із (7) випливає:

$$\left|{}_2F_1\left(\frac{n}{2}+k,-k,\frac{n}{2};z\right)\right|=\left|\sum_{l=0}^{k}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k+l)\Gamma(\frac{n}{2})(-1)^l k!z^l}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)\Gamma(\frac{n}{2}+l)(k-l)!l!}\right|\le$$

$$\le\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\sum_{l=0}^{k}C_k^l z^l\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k+l)}{\Gamma(\frac{n}{2}+l)}\le\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2k)\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma^2(\frac{n}{2}+k)}(1+z)^k,\tag{9}$$

оскільки

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k+l)}{\Gamma(\frac{n}{2}+l)}\le\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2k)}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)},\ l=\overline{0,k}.$$

За формулою Стірлінга

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2k)}{\Gamma^2(\frac{n}{2}+k)}\sim\frac{e^{-\frac{n}{2}-2k+1}\left(\frac{n}{2}+2k-1\right)^{\frac{n}{2}+2k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}e^{-n-2k+2}\left(\frac{n}{2}+k-1\right)^{n+2k-1}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{n}{2}-1}2^{\frac{n}{2}+2k-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}{k}\right)^{\frac{k}{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{n}{2}+2k-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{\frac{n}{2}-1}{k}\right)^{\frac{k}{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{\frac{n}{2}-1}{k}\cdot(n+2k-1)}\cdot k^{n+2k-1}}k^{\frac{n}{2}+2k-\frac{1}{2}}\sim\frac{2^{\frac{n}{2}+2k-1}}{\sqrt{\pi}k^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}.\tag{10}$$

Із (9) та (10) випливає, що

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+k,-k,\frac{n}{2};\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)=\mathrm{O}\left(\frac{C^k}{k^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}\right), m=2k\to\infty. \quad (11) $$

Нехай $m-$ непарне. Покажемо, що і в цьому випадку ${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2},-\frac{m}{2};\frac{n}{2};\left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ має таку саму асимптотичну поведінку. Подамо ${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2},-\frac{m}{2},\frac{n}{2};z\right)$ у вигляді суми 2-х доданків:

$$ {}_2F_1\left(\tfrac{n+m}{2},-\tfrac{m}{2};\tfrac{n}{2};z\right)=\sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)_l\left(-\frac{m}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!}z^l+\sum_{l=\left[\frac{m}{2}\right]+2}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)_l\left(-\frac{m}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!}z^l. \quad (12) $$

Оскільки для $l=0,...,\left[\frac{m}{2}\right]+1:$

$$ \left|\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m}{2}\right)_l\left(-\tfrac{m}{2}\right)_l\right|=\left|\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m}{2}\right)\cdot...\cdot\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m}{2}+l-1\right)\cdot\tfrac{m}{2}\cdot...\cdot\left(\tfrac{m}{2}-l+1\right)\right|\le $$
$$ \left|\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\cdot...\cdot\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m}{2}+l-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\tfrac{m+1}{2}\cdot...\cdot\left(\tfrac{m+1}{2}-l+1\right)\right|= $$
$$ \left|\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{m+1}{2}\right)_l\left(-\tfrac{m+1}{2}\right)_l\right|,\ \text{то} $$

$$ \left|\sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)_l\left(-\frac{m}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!}z^l\right|\le\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}}\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m+1}{2}\right)_l\left|\left(-\frac{m+1}{2}\right)_l\right|}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!}z^l=\mathrm{O}\left(\frac{C^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}\right), \quad (13) $$

де остання рівність випливає з оцінок (9) і (10) для парного випадку.

Вивчимо асимптотику другого доданку в (12).

$$ \sum_{l=\left[\frac{m}{2}\right]+2}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)_l\left(-\frac{m}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l l!}z^l=\sum_{l=\left[\frac{m}{2}\right]+2}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+l)\Gamma(\frac{n}{2})\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)\left(-\frac{m}{2}+1\right)\cdot...\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot...\cdot\left(-\frac{m}{2}+l-1\right)z^l}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+l)\Gamma(l+1)}= $$

$$ \left|\begin{array}{l} k=l-\left[\frac{m}{2}\right]-1 \\ l=k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\end{array}\right|=\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma(\frac{n}{2})z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}}{\pi\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}+k)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)z^k}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+k)\Gamma(k+\frac{m}{2}+\frac{3}{2})}. \quad (14) $$

За формулою Стірлінга з $\theta_{k,j}\in\left(0,\frac{1}{12}\right)$, $\ j=\overline{1,4}$ отримуємо:

$$ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}+k)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)z^k}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+k)\Gamma(k+\frac{m}{2}+\frac{3}{2})}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{2}-m-k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}+m+k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+m+k}e^{\frac{\theta_{k,1}}{\frac{n}{2}+m+k-\frac{1}{2}}}}{e^{-\frac{n}{2}-\frac{m}{2}-k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k}e^{\frac{\theta_{k,2}}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}}}}\times $$

$$ \frac{e^{-k+\frac{1}{2}}\left(k-\frac{1}{2}\right)^k e^{\frac{\theta_{k,3}}{k-\frac{1}{2}}}}{e^{-k-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\left(k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)^{k+\frac{m}{2}+1}e^{\frac{\theta_{k,4}}{k+\frac{m}{2}+1}}}z^k\le C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+m+k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+m+k}\left(k-\frac{1}{2}\right)^k z^k}{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k}\left(k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)^{k+\frac{m}{2}+1}}= $$

$$= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\frac{m}{2}}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}}{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k\right)}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}}} \left(1+\frac{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-1}{k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} z^k}{\left(1+\frac{\frac{m}{2}+1}{k-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{k-\frac{1}{2}}{\frac{m}{2}+1} \cdot \frac{\frac{m}{2}+1}{k-\frac{1}{2}} \cdot k} \left(k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)} := \Sigma.$$

Для оцінювання останньої суми нам буде потрібне таке твердження:

Лема 2 *Для будь-яких значень* $x \in (0, \infty) : 0 < a \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq b < +\infty.$

Доведення. Твердження леми випливає з того, що додатня функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ є неперервною і не дорівнює ні 0 ні $+\infty$ на $x \in (0; +\infty)$, причому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1.$ $\square$

Застосувавши Лему 2 до виразу Σ отримаємо:

$$\Sigma \leq C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k\right)}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}}} \left(1+\frac{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-1}{k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} z^k}{a^{\frac{\frac{m}{2}+1}{k-\frac{1}{2}}\cdot k} \left(k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)} \leq C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1^{\frac{m}{2}} C_3^{\frac{m}{2}} z^k}{C_2^{\frac{m}{2}+1}\left(k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

оскільки

$$\left(1+\frac{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-1}{k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \left(1+\frac{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-1}{\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} = \left(2+\frac{\frac{n}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \left(\frac{n+3}{4}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Отже,

$$\Sigma \leq C^{\frac{m}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} < C^{\frac{m}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}.$$

Тому із зображення (14) і формули Стірлінга випливає:

$$\left| \sum_{l=\left[\frac{m}{2}\right]+2}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)_l \left(-\frac{m}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}\right)_l \; l!} z^l \right| = \mathrm{O}\left(\frac{C^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-1}}\right), m \to \infty. \quad (15)$$

Із (12), (13) та (15) отримуємо, що для непарного m:

$${}_2F_1\left(\frac{n+m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}\right), \quad m \to \infty.$$

Із останньої асимптотики і (11) випливає твердження леми 1. $\square$

Вивчимо тепер асимптотичну поведінку

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2m+2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right), \quad |t|>r, \text{ при } \ m\to\infty. $$

Для цього знову можна було б скористатись результатом Ватсона, див. §2.3.2 [14]:

$$ \left(\tfrac{z}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^{-a-\lambda} {}_2F_1\left(a+\lambda, a-c+1+\lambda, a-b+1+2\lambda; 2(1-z)^{-1}\right)= $$

$$ \frac{2^{a+b}\Gamma(a-b+1+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(a-c+1+\lambda)\Gamma(c-b+\lambda)} e^{-(a+\lambda)\xi}(1-e^{-\xi})^{-c+\frac{1}{2}}\times $$

$$ (1+e^{-\xi})^{c-a-b-\frac{1}{2}}\left(1+\mathrm{O}\left(|\lambda|^{-1}\right)\right), \tag{16} $$

де ξ визначено так як і у (8).

Вибравши

$$ a=\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{n}{2},\ \lambda=m,\ \frac{2}{1-z}=\left(\frac{r}{|t|}\right)^2 $$

одержуємо

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2m+2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)\sim \frac{2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma(\frac{n}{2}+2m+2)\sqrt{\pi}m^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+m\right)}\times $$

$$ \left(\frac{r}{|t|}\right)^{n+1+2m}\mathrm{O}\left(C^m\right)\sim \mathrm{O}\left(C^m\right), $$

при $m\to\infty$. Так як і у випадку (8) ми не можемо безпосередньо застосувати (16). Проте асимптотична поведінка $\mathrm{O}\left(C^m\right)$ має місце і для наших значень параметрів.

Лема 3 *Для* $|t|>r$:

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2m+2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)=O\left(C^m\right),\ m\to\infty. $$

Доведення. Використавши зображення (2), отримуємо:

$$ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2m+2; z\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)_l\left(m+\frac{3}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+2m+2\right)_l l!}z^l= $$

$$ \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+2\right)\Gamma\left(m+l+\frac{3}{2}\right)z^l}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+l+2\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(l+1\right)}= $$

$$1+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+l+\frac{3}{2}\right)z^{l}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+l+2\right)\Gamma\left(l+1\right)} \tag{17}$$

За формулою Стірлінга при $m\to\infty$:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+2\right)\sim\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}+2m+1\right)^{\frac{n}{2}+2m+\frac{3}{2}}e^{-\frac{n}{2}-2m-1}\sim\sqrt{2\pi}\,(2m)^{\frac{n}{2}+2m+\frac{3}{2}}e^{-2m},$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\sim\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+m}e^{-\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2}}\sim\sqrt{2\pi}m^{\frac{n}{2}+m}e^{-m}, \tag{18}$$

$$\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\sim\sqrt{2\pi}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+1}e^{-m-\frac{1}{2}}\sim\sqrt{2\pi}m^{m+1}e^{-m}.$$

Отже, перший множник у другому доданку (17) має таку асимптотичну поведінку

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\sim\frac{2^{\frac{n}{2}+2m+\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{19}$$

Використавши формулу Стірлінга з $\theta_{l,j}\in(0,\frac{1}{12}),\ j=\overline{1,4}$, перетворимо ряд у (17):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+l+\frac{3}{2}\right)z^{l}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2m+l+2\right)\Gamma\left(l+1\right)}=$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+m+l}e^{-\frac{n}{2}-m-l+\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta_{l,1}}{\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}}}\left(m+l+\frac{1}{2}\right)^{m+l+1}}{\left(\frac{n}{2}+2m+l+1\right)^{\frac{n}{2}+2m+l+\frac{3}{2}}e^{-\frac{n}{2}-2m-l-1}e^{\frac{\theta_{l,2}}{\frac{n}{2}+2m+l+1}}}\times$$

$$\frac{e^{-m-l-\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta_{l,3}}{m+l+\frac{1}{2}}}}{l^{l+\frac{1}{2}}e^{-l}e^{\frac{\theta_{l,4}}{l}}}z^{l}\le C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+m+l}\left(m+l+\frac{1}{2}\right)^{m+l+1}}{\left(\frac{n}{2}+2m+l+1\right)^{\frac{n}{2}+2m+l+\frac{3}{2}}l^{l+\frac{1}{2}}}z^{l}=$$

$$=C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{m+\frac{1}{2}}{l}\right)^{\frac{l}{m+\frac{1}{2}}\cdot\left(m+\frac{1}{2}\right)}z^{l}}{\left(1+\frac{m+\frac{3}{2}}{\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}}{m+\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+m+l\right)}{\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{\left(m+l+\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{l^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}+2m+l+1\right)^{m+\frac{3}{2}}}=\Sigma_{1}.$$

Використавши Лему 2 отримуємо оцінку

$$\Sigma_{1}\le C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{b^{m+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+2m+l\right)}{\frac{n}{2}+m+l-\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{z^{l}}{l^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}+2m+l+1\right)^{\frac{1}{2}}}\le C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{C_{1}^{m}z^{l}}{l^{\frac{1}{2}}\ m^{\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

Із (17), (19) та (20) випливає, що

$$_{2}F_{1}\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2},\frac{n}{2}+2m+2;\left(\frac{r}{|t|}\right)^{2}\right)=\mathrm{O}\left(C^{m}\right),\quad m\to\infty. \qquad \square$$

4. Швидкість збіжності.

Оцінимо швидкість збіжності ряду (3). Для цього вивчимо асимптотику $d_m(n,r,a,|t|)$ та $s_m(n,r,a,|t|)$ при $m \to \infty$.

4.1 Випадок $|t| < r$.

Розглянемо вираз (3) для $f_{r,a}(|t|)$ при $|t| < r$. Дослідимо асимптотику множників у формулі (4) при $m \to \infty$.

Лема 4 *При* $|t| < r$

$$d_m(n,r,a,|t|) = O\left(\frac{C^m}{m^{m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\right),\ m \to \infty. \tag{21}$$

Доведення. За формулою Стірлінга

$$C^m_{m+n-1} \sim \frac{(m+n-1)^{m+n-1/2}e^{-m-n+1}}{m^{m+1/2}e^{-m}(n-1)!} \sim \frac{m^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Для Гамма функції

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \sim \sqrt{2\pi}e^{-\frac{m}{2}}(m/2)^{\frac{m+1}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi}e^{-\frac{m}{2}}(m/2)^{\frac{m+n-1}{2}}.$$

Таким чином

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+m\right)C^m_{n+m-1}\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \sim \frac{m^n}{(n-1)!}\left(\frac{m}{2}\right)^{n/2-1}.$$

Із зображення функцій Бесселя у вигляді ряду, див. §8.1 [12], для $\nu > 0,\ z > 0$ випливає:

$$|J_\nu(z)| = \left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\right| = \left|\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{m!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+m)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2m}}{m!\nu^m}. \tag{22}$$

За формулою Стірлінга

$$\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2m}}{m!\nu^m} \sim \frac{(z/2)^\nu e^\nu}{\sqrt{2\pi}\nu^{\nu+1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{z^2}{4\nu})^m}{m!} = \frac{e^{\frac{z^2}{4\nu}+\nu}}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{z}{2\nu}\right)^\nu. \tag{23}$$

Отже при великих значеннях m :

$$J_{\frac{n}{2}+m}(ra) < \frac{1}{\sqrt{(n+2m)\pi}} e^{\frac{(ra)^2+(n+2m)^2}{2n+4m}} \left(\frac{ra}{n+2m}\right)^{\frac{n}{2}+m} = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{m+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\right). \qquad (24)$$

Застосувавши всі попередні асимптотики до (4) і використавши Лему 1 одержуємо:

$$d_m(n,r,a,|t|) = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{m-\frac{n}{2}+1}}\right), \quad m \to \infty. \qquad \square$$

Розглянемо залишок ряду (3) при $|t| < r$.

Теорема 1 *Для* $|t| < r$

$$\sum_{m=N}^{\infty} d_m(n,r,a,|t|) = O\left(\sum_{m=N}^{\infty} \frac{C^m}{m^{m-\frac{n}{2}+1}}\right), \; N \to \infty. \qquad (25)$$

Для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{m=N}^{\infty} d_m(n,r,a,|t|) = O\left(\frac{C^N}{N^{N(1-\varepsilon)}}\right), \; N \to \infty. \qquad (26)$$

Доведення. Асимптотична формула (25) є безпосереднім наслідком Леми 4. Нерівність (26) отримуємо за допомогою наступної послідовності оцінок, які виконуються для достатньо великих N :

$$\sum_{m=N}^{\infty} \frac{C^m}{m^{m-\frac{n}{2}+1}} \le \sum_{m=N}^{\infty} \frac{C^m}{m^{m(1-\varepsilon)}} \le \sum_{m=N}^{\infty} \left(\frac{C}{N^{1-\varepsilon}}\right)^m = \frac{C^N \, N^{1-\varepsilon}}{N^{N(1-\varepsilon)}(N^{1-\varepsilon}-C)} = \mathrm{O}\left(\frac{C^N}{N^{N(1-\varepsilon)}}\right). \square$$

4.2 Випадок $|t| > r$.

Розглянемо вираз (3) для $f_{r,a}(|t|)$ при $|t| > r$. Дослідимо асимптотику множників у формулі (5) при $m \to \infty$.

Лема 5 *При* $|t| > r$

$$s_m(n,r,a,|t|) = O\left(\frac{C^m}{m^{2m-\frac{n}{2}+2}}\right), \; m \to \infty. \qquad (27)$$

Доведення. За формулою Стірлінга

$$C_{n+2m}^{2m+1} \sim \frac{(n+2m)^{n+2m+\frac{1}{2}} e^{2m+1}}{e^{n+2m}(2m+1)^{2m+\frac{3}{2}}(n-1)!} \sim \frac{(2m)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\Gamma\left(n/2+2m+1\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-2m} (2m)^{\frac{n}{2}+2m+\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо асимптотику виразу $(2m+1)!!$:

$$(2m+1)!! = 2^{m+1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) \dots \left(\frac{1}{2}+m\right) =$$

$$= 2^{m+1}\frac{\Gamma(1/2+m+1)}{\Gamma(1/2)} \sim \sqrt{2}(2m+1)^{m+1}e^{-m-1/2}.$$

Використовуючи властивості Гамма функції та формулу Стірлінга отримуємо (див. §538, [15]):

$$\Gamma\left(-m-\tfrac{1}{2}\right) = (-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\tfrac{2^{m+1}}{(2m+1)!!} \sim (-1)^{m+1}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\tfrac{e^{m+\frac{1}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+1}} \sim (-1)^{m+1}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\tfrac{e^{m}}{m^{m+1}}.$$

Використовуючи формулу (23) вивчимо асимптотичну поведінку функції Бесселя $J_{\frac{n}{2}+2m+1}(ra)$. При великих значеннях m :

$$J_{\frac{n}{2}+2m+1}(ra) < \frac{e^{\frac{(ra)^2}{2n+8m+4}+\frac{n}{2}+2m+1}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2}+2m+1\right)}}\left(\frac{ra}{n+4m+1}\right)^{\frac{n}{2}+2m+1} = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{\frac{n}{2}+2m+\frac{3}{2}}}\right).$$

Застосувавши всі попередні асимптотики і (18) до (5) та використавши Лему 3 одержуємо:

$$s_m(n,r,a,|t|) = \mathrm{O}\left(\frac{C^m}{m^{2m-\frac{n}{2}+2}}\right),\ m\to\infty. \qquad \square$$

Розглянемо залишок ряду (3) при $|t|>r$.

Теорема 2 *Для* $|t|>r$

$$\sum_{m=N}^{\infty} s_m(n,r,a,|t|) = O\left(\sum_{m=N}^{\infty}\frac{C^m}{m^{2m-\frac{n}{2}+2}}\right),\ N\to\infty \tag{28}$$

Для довільного $\varepsilon>0$:

$$\sum_{m=N}^{\infty} s_m(n,r,a,|t|) = O\left(\frac{C^N}{N^{2N(1-\varepsilon)}}\right),\ N\to\infty. \tag{29}$$

Доведення. Асимптотична формула (28) є безпосереднім наслідком Леми 5. Нерівність (29) отримуємо за допомогою наступної послідовності оцінок, які виконуються для достатньо великих N :

$$\sum_{m=N}^{\infty}\frac{C^m}{m^{2m-\frac{n}{2}+2}} \le \sum_{m=N}^{\infty}\frac{C^m}{m^{2m(1-\varepsilon)}} \le \sum_{m=N}^{\infty}\left(\frac{C}{N^{2(1-\varepsilon)}}\right)^m =$$

$$\frac{C^N N^{2(1-\varepsilon)}}{N^{2N(1-\varepsilon)}(N^{2(1-\varepsilon)}-C)} = \mathrm{O}\left(\frac{C^N}{N^{2N(1-\varepsilon)}}\right). \qquad \square$$

5. Чисельні приклади.

У цьому розділі ми наведемо деякі чисельні приклади, які ілюструють отримані результати.

Для $n = 3$ $f_{r,a}(|t|)$ може бути записана у явному вигляді за допомогою елементарних функцій $Si(z), Ci(z)$ (див. §5, [8]). Тому будемо розглядати саме цей випадок.

На рисунках 1 та 2 зображено графіки функцій $f_{r,a}(|t|)$ для $r = 1,\ a = 1.2$ та 15. Для побудови вибрано формулу (3) зі скінченою кількістю доданків $N = 100$.

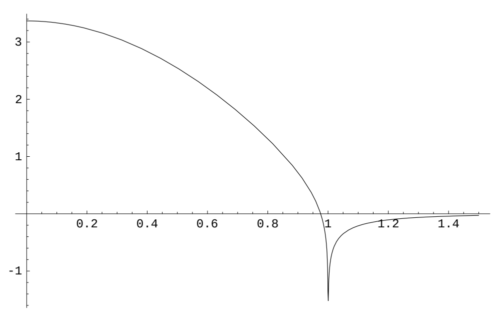

Рис.1. Графік $f_{1,1.2}(|t|)$

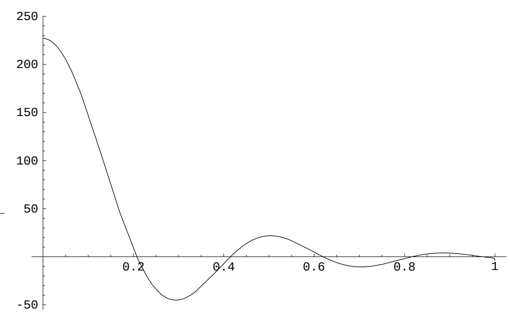

Рис.2. Графік $f_{1,15}(|t|)$

При порівнянні з відповідними графіками з §5 [8] бачимо, що вони ідентичні. Наступна таблиця дає чисельні значення функції $f_{r,a}(|t|)$ за формулами §5 [8] і їх наближень $\widehat{f}^N_{r,a}(|t|)$ за формулою (3) зі скінченною кількістю доданків N.

t	$f_{1,1.2}(t)$	$\widehat{f}^5_{1,1.2}(t)$	$\widehat{f}^{10}_{1,1.2}(t)$	$\widehat{f}^{25}_{1,1.2}(t)$
0.1	3.3346	3.33328	3.3346	3.3346
0,5	2.54618	2.54648	2.54618	2.54618
0.99	-0.327282	-0.326829	-0.327282	-0.327282
1.01	-0.759792	-0.759792	-0.759792	-0.759792
3	-0.0012482	-0.0012482	-0.0012482	-0.0012482
10	-9.256×10^{-6}	-9.256×10^{-6}	-9.256×10^{-6}	-9.256×10^{-6}

Проаналізувавши таблицю бачимо, що починаючи вже з $N = 10$ ми можемо знайти значення функції з досить високою точністю. Важливо відмітити, що при наближенні t до r точність обчислення погіршується у зв'язку з розривом 2-го роду фукції $f_{r,a}(|t|)$ у точці $|t| = r$.

На рисунках 3, 4, 5, 6 зображено послідовність $\lg\left(g_N(t)\right)$, де

$$g_N(t) := \left| f_{1,\,1.2}(t) - \widehat{f}^N_{1,\,1.2}(t) \right| \cdot \begin{cases} N^{\frac{3N}{4}}, & t < 1, \\ N^{\frac{3N}{2}}, & t > 1, \end{cases}$$

для різних значень t.

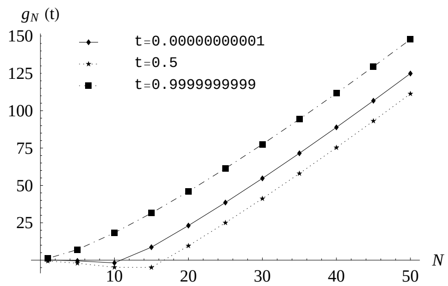

Рис.3. Графік $\lg(g_N(t)), t < 1$

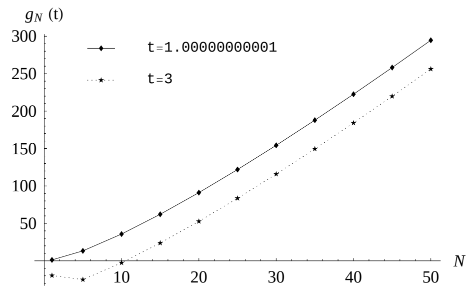

Рис.4. Графік $\lg(g_N(t)), t > 1$

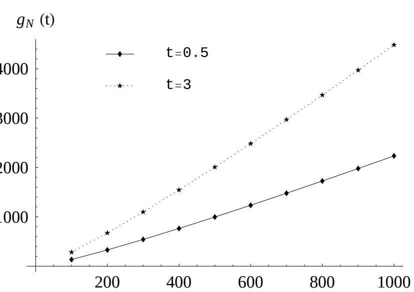

Рис.5. Графік $\lg(g_N(t))$

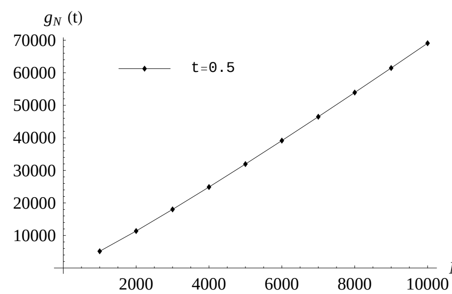

Рис.6. Графік $\lg(g_N(t))$

Бачимо що чисельні результати зображені на графіках 3-6 узгоджуються з оцінками швидкості збіжності в Теоремах 1 та 2 (розглянуто випадок $\varepsilon = \frac{1}{4}$).

Висновки.

Отримано швидкість збіжності рядів у зображеннях вагових функцій у тауберових теоремах. Наведено чисельны результати, які показують, що часткові суми таких рядів добре апроксимують вагові функції і мають потрібну швидкість збіжності.

Як допоміжні твердження отримані нові асимптотичні властивості гіпергеометричних функцій.

Bibliography

1. Bingham, N.H., *A tauberian theorem for integral transforms of Hankel type*, Journal London Math. Soc., **5, N 3**, (1972), 493-503.
2. Laue, G., *Tauberian and Abelian theorems for characteristic functions,* Theory Probab. and Math. Stat., **37**, (1987), 78-92.
3. Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L., *Regular variation,* Cambridge University Press, Cambridge, (1989).

4. Yakymiv, A.L., *Probabilistic applications of Tauberian theorems,* Fizmatlit, Moskow, (2005). (in Russian)
5. Leonenko, N.N., Olenko, A.Ya., *Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields,* Random Oper. Stoch. Eqs., **1, N 1**, (1993), 57-67.
6. Olenko, A.Ya., *Tauberian and Abelian theorems for strongly dependent random fields,* Ukrainian Math. Journal, **48, N 3**, (1996), 368-383.
7. Olenko, A.Ya., *Tauberian theorems for random fields with OR asymptotics I,* Theory Probab. and Math. Statistics, **73**, (2005), 120-133.
8. Olenko, A.Ya., *Tauberian theorems for random fields with OR asymptotics II,* Theory Probab. and Math. Statistics, **74**, (2006), 81-97.
9. Olenko, A.Ya., Klykavka, B.M., *Tauberian theorem for random fields on plane,* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, **6**, (2006), 19-25. (in Ukrainian)
10. Klykavka, B.M., *An correlation functions of Polya type,* Bulletin of Kyiv Univ., Series: Phys. and Math., **1**, (2007). (will be published)
11. Yadrenko, M.I., *Spectral theory of random fields*, Optimization Software Inc., New York (distributed by Springer-Verlag), (1983).
12. Watson, G.N., *A treatise on the theory of Bessel functions,* Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
13. Abramowitz, M., Stegun, I., (Eds.), *Handbook of mathematical functions,* National Bureau of Standarts, Applied Mathematics Series, US Government Printing Office, Washington, DC, **55**, (1964).
14. Bateman, G., Erdelyi, A., *Higher transcendental functions,* Vol. **1**, Mc Grow-Hill, New York, (1953).
15. Fihtengolts, G.M., *Course of differential and integral calculus,* Vol. **2**, Nauka, Moskow, (1970). (in Russian)
16. Temme, N.M., *Large parameter cases of the Gauss hypergeometric function,* Journal of Comp. and Appl. Math., **153**, (2003), 441-462.
17. Jones, D.S., *Asymptotics of the hypergeometric function,* Math. Methods Appl. Sci., **24**, (2001), 369-389.

Key worlds: tauberian theorems, random fields, correlation function, spectral function, weight function, speed of convergence, OR, asymptotics.

AMS 2000: 60G60, 62E20, 40E05, 26A12, 44A15, 33C05.