ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОЛІВ З OR СПЕКТРОМ. I

А. Я. ОЛЕНКО

Анотація. Получены абелевы и тауберовы теоремы, дающие связь асимптотического поведения спектра в нуле и среднеарифметических функционалов по сфере и шару от случайных полей на бесконечности. Рассмотрен случай однородных изотропных полей со спектром имеющим сингулярные свойства в нуле. Асимптотическое поведение описано в терминах функциональных классов OR.

1. Вступ

Абелеві та тауберові теореми (надалі скорочено – тауберові теореми) становлять не лише самостійний інтерес, але знаходять численні застосування при отриманні різних асимптотичних властивостей випадкових процесів та полів, див., наприклад, [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15]. Більшість відомих результатів такого типу стосується зв'язку асимптотичної поведінки спектральних характеристик на нескінченності та кореляційних в нулі.

У цій роботі отримані тауберові теореми, які дають зв'язок асимптотичної поведінки спектра в нулі та середньоарифметичних функціоналів по сфері та кулі від випадкових полів на нескінченності. Асимптотична поведінка описана в термінах функціональних класів OR. У роботах [7, 8, 9, 12] були отримані аналогічні результати для функцій, які змінюються регулярно. У порівнянні з цими роботами розширено клас функцій для яких виконуються тауберові теореми, запропоновані простіші методи доведення і більш детально досліджено асимптотику спектральних щільностей.

Тауберові теореми для перетворень Лапласа OR-функцій були розглянуті в роботах [2, 13, 14]. Для загального випадку інтегральних перетворень з невід'ємними ядрами, які є спадними до нуля функціями, такі теореми одержані в [4]. На відміну від цих результатів у статті розглянуто перетворення з ядрами, які не є монотонними функціями.

У § 2 наведено необхідні означення та властивості функціонального класу OR. У наступному параграфі ми вводимо функціонали від випадкових полів, асимптотику яких будемо вивчати. Потім наведено деякі потрібні в подальшому технічні твердження про властивості функцій Бесселя. Основні результати сформульовані і доведені в § 5 та § 6.

Надалі будемо використовувати позначення C та R з різними індексами для сталих, точні значення яких несуттєві. Одне і те ж позначення може відповідати різним числовим значенням сталих, які виникають у процесі доведення.

Надійшла 01/02/2005.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 62E20, 40E05; Secondary 60F05, 26A12, 44A15.

Ключові слова і фрази. Тауберова теорема, абелева теорема, функції з повільною зміною, функціональний клас OR , випадкові поля, однорідні поля, ізотропні поля, функціонал від випадкового поля, спектральна функція, кореляційна функція, асимптотика, сильна залежність.

Дослідження виконані за сприяння NATO grant # SA(PST.CLG.976361)5437.

2. Функціональний клас OR та його властивості

В цьому параграфі ми наводимо основні означення та необхідні для доведення результати з теорії OR функцій. Детальний огляд теорії функцій, які змінюються повільно, та їх різноманітних узагальнень можна знайти в [2].

При отриманні тауберових теорем, вивченні асимптотичної поведінки важливе значення відіграє функціональний клас R_ρ, який вводять таким чином:

Означення 1. *Додатна вимірна функція f змінюється регулярно на нескінченності, якщо існує таке число $\rho \in \mathbb{R}$, що для довільного $\lambda > 0$:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho.$$

Ми будемо розглядати більш широкий клас функцій з O-регулярною зміною.

Позначимо

$$f^*(\lambda) := \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}, \quad f_*(\lambda) := \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}, \quad \lambda > 0.$$

Означення 2. *Додатна вимірна функція f належить до класу OR, якщо*

$$0 < f_*(\lambda) \leq f^*(\lambda) < +\infty, \ \forall \lambda \geq 1.$$

Для перевірки того, чи належить функція до класу OR застосовують таку теорему Феллера:

Теорема 1. *Якщо для додатної незростаючої функції f величина $f_*(\lambda_0)$ ненульова для деякого значення $\lambda_0 > 1$, то $f \in OR$.*

Означення 3. *Нехай f - додатна вимірна функція. Верхнім індексом Матушевської $\alpha(f)$ її називають інфімум тих α, для яких існують такі $C = C(\alpha)$, що для будь-якого $\Lambda > 1$, при $x \to \infty$:*

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq C\,\{1 + o(1)\}\lambda^\alpha \quad \textit{рівномірно в } \lambda \in [1, \Lambda];$$

нижнім індексом Матушевської $\beta(f)$ називають супремум тих β, для яких існують такі $D = D(\beta) > 0$, що для будь-якого $\Lambda > 1$, при $x \to \infty$:

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \geq D\,\{1 + o(1)\}\lambda^\beta \quad \textit{рівномірно в } \lambda \in [1, \Lambda].$$

Теорема 2. *$f \in OR$ тоді і тільки тоді, коли обидва її індекси Матушевської $\alpha(f)$ та $\beta(f)$ скінченні. Для таких функцій:*

a) $f_*(\lambda) \leq \lambda^{\beta(f)} \leq \lambda^{\alpha(f)} \leq f^*(\lambda), \ \forall \lambda \geq 1$;

b) *для будь-якого $\alpha > \alpha(f)$ існують додатні сталі C та X такі, що*

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq C\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha, \quad y \geq x \geq X;$$

c) *для будь-якого $\beta < \beta(f)$ існують додатні сталі C' та X' такі, що*

$$\frac{f(y)}{f(x)} \geq C'\left(\frac{y}{x}\right)^\beta, \quad y \geq x \geq X'.$$

Означення 4. *Будемо позначати $OR(\beta, \alpha)$ клас OR - функцій, які мають індекси Матушевської $\alpha(f) \leq \alpha$ та $\beta \leq \beta(f)$.*

Наступна теорема дає зручне зображення функцій класу OR.

Теорема 3. (Карамата, Альянчич та Аранделович) *$f \in OR$ тоді і тільки тоді, коли*

$$f(x) = exp\left\{\eta(x) + \int_1^x \frac{\zeta(t)}{t}dt\right\}, \quad x \geq 1, \tag{1}$$

де функції $\eta(\cdot)$ та $\zeta(\cdot)$ вимірні та обмежені на деякому проміжку $[X, \infty)$.

Для довільних α та β, що задовольняють умову $\beta < \beta(f) \leq \alpha(f) < \alpha$ існує зображення (1) *з інтегровною функцією $\zeta(\cdot)$, яка набуває значень лише з проміжку* $[\beta; \alpha]$.

Зауваження 1. Нехай функція $f(\cdot)$ набуває лише скінчених значень і не дорівнює нулю при $x \in [1, X]$. Оскільки в доведенні Теореми 3 з [2, §2.2.3] фактично показано, що $\zeta(\cdot)$ обмежена на $[1, \infty)$, то і функція $\eta(\cdot)$ має бути обмеженою на $[1, X]$. Тому можемо вважати, що $\eta(\cdot)$ та $\zeta(\cdot)$ обмежені на проміжку $[1, \infty)$.

3. Функціонали від випадкових полів

Нехай $\mathbb{R}^n$– евклідів простір вимірності $n \geq 2$, $s(r) = \{t \in \mathbb{R}^n,\ \|t\| = r\}$ – сфера, $v(r) = \{t \in R^n : ||t|| \leq r\}$ - куля в $\mathbb{R}^n$, $|s(1)| = 2\pi^{n/2}/\,\Gamma(n/2)$ – площа поверхні сфери $s(1)$ в R^{n-1}. $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ – дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле (див. [6, 16]) з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$\mathsf{B}_n(r) = \mathsf{B}_n(\|t\|) = \mathsf{E}\,\xi(0)\xi(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Відомо (див., наприклад, [6, 16]), що існує така обмежена неспадна функція $\Phi(x), x \geq 0$, яку називають спектральною функцією поля $\xi(t), t \in \mathbb{R}^n$, що має місце зображення

$$\mathsf{B}_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rx)}{(rx)^{\frac{n-2}{2}}}d\Phi(x) \tag{2}$$

де $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку $\nu > -\frac{1}{2}$. Якщо існує функція $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$ така, що

$$x^{n-1}f(x) \in L([0, \infty)), \quad \Phi(x) = |s(1)|\int_0^x z^{n-1}f(z)dz,$$

то її називають ізотропною спектральною щільністю поля $\xi(t)$.

В роботах [6, 16] показано, що

$$\begin{aligned}
l_n(r) &= \mathsf{D}\left[\int_{s(r)}\xi(t)dm(t)\right] = \int_{s(r)}\int_{s(r)}\mathsf{B}_n(||t-s||)dtds \\
&= \frac{2^n\pi^{n-1}}{(n-2)!}r^{n-1}\int_0^{2r} z^{n-2}\Big(1-\Big(\frac{z}{2r}\Big)^2\Big)^{\frac{n-3}{2}}\mathsf{B}_n(z)dz \qquad (3)\\
&= (2\pi)^n r^{2(n-1)}\int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n-2}{2}}(rx)}{(rx)^{n-2}}d\Phi(x), \quad n \geq 2, \qquad (4)
\end{aligned}$$

де $m(\cdot)$– міра Лебега на сфері $s(r)$;

$$\begin{aligned}
b_n(r) &= \mathsf{D}\left[\int_{v(r)}\xi(t)dt\right] = \int_{v(r)}\int_{v(r)}\mathsf{B}_n(||t-s||)dtds \\
&= \frac{4\pi^n}{n\Gamma^2(\frac{n}{2})}r^n\int_0^{2r} z^{n-1}I_{1-(\frac{z}{2r})^2}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\mathsf{B}_n(z)dz \qquad (5)\\
&= (2\pi)^n r^{2n}\int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(rx)}{(rx)^n}d\Phi(x), \qquad (6)
\end{aligned}$$

де

$$I_\mu(p,q)=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^\mu t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ p>0,\ q>0,\ \mu\in[0,1]$$

- неповна бета-функція.

Зауважимо, що формула (2) - це інтегральне перетворення ганкелевого типу. Якщо кореляційна функція $\mathsf{B}_n(r)$ неінтегровна, то маємо випадок поля з сильною залежністю. З іншого боку, такі поля можуть визначатися властивостями сингулярності в нулі їхнього спектра (наприклад необмеженості або збіжності до нуля спектральної щільності). Саме для такого класу випадкових полів нас буде цікавити зв'язок поведінки функції $\Phi(x)$ при $x\to+0$ та функції $l_n(r)$, $b_n(r)$ при $r\to+\infty$.

Для зручності будемо надалі використовувати такі позначення:

$$\tilde{l}_n(r):=\frac{l_n(r)}{r^{2(n-1)}},\qquad \tilde{b}_n(r):=\frac{b_n(r)}{r^{2n}};$$

$$G_n(x):=(2\pi)^n\frac{J^2_{\frac{n-2}{2}}(x)}{x^{n-2}}. \tag{7}$$

Вживатимемо ці позначення без індексу n, якщо буде зрозуміло про простір якої вимірності іде мова.

4. Властивості функції $G_n(\cdot)$.

Надалі нам будуть потрібні деякі асимптотичні властивості функції $G(x)$ та її похідної. Сформулюємо їх як леми. При обґрунтуванні використані властивості функцій Бесселя з [1].

Лема 1.

1) $G(\cdot)$ *неперервна на проміжку* $(0,1]$;
2) *існує скінчена границя* $\lim_{x\to0}G(x)\neq0$;
3) $G_n(\cdot)$ *не дорівнює нулю на проміжку* $(0;j_{\frac{n-2}{2},1})$, *де* $j_{\nu,1}$ *– найменший додатній корінь функції Бесселя порядку* $\nu>-1$. *Більш того,* $j_{\frac{n-2}{2},1}>1$, *бо* $j_{\nu,1}$ *має такі властивості:* $j_{-\frac12,1}=\frac{\pi}{2}$, $j_{0,1}\approx2,4048$, $j_{\nu,1}<j_{\nu+1,1}$.

Доведення. Твердження 1), 3) отримуємо за властивостями функцій Бесселя $J_\nu(x)$. Твердження 2) випливає із (7) та зображення функції Бесселя у вигляді ряду

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \tag{8}$$

де $\Gamma(\cdot)$ - Гама функція. □

Лема 2. *Нехай* $g(\cdot):=-G_n'(\cdot)$. *Тоді*

$$g(u):=(2\pi)^n\frac{2J_{\frac{n-2}{2}}(u)J_{\frac{n}{2}}(u)}{u^{n-2}}. \tag{9}$$

Функція $g(\cdot)$ *має таку асимптотичну поведінку:*

1) $g(z)=O(z)$, *при* $z\to0$;
2) $g(z)=O\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right)$, *при* $z\to\infty$.

Доведення. За формулою похідної $J_\nu'(z)=\frac12\left(J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)\right)$ і рекурентним співвідношенням $\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)=\left(J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)\right)$ для функцій Бесселя одержуємо:

$$G'(u)\quad=\quad-(2\pi)^n\left[\frac{(n-2)J^2_{\frac{n-2}{2}}(u)}{u^{n-1}}-\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(u)}{u^{n-2}}\left(J_{\frac{n-2}{2}-1}(u)-J_{\frac{n-2}{2}+1}(u)\right)\right]$$

$$= \quad -(2\pi)^n \frac{2J_{\frac{n-2}{2}}(u)J_{\frac{n}{2}}(u)}{u^{n-2}}.$$

Тому за (8) отримуємо твердження 1).

З асимптотичної поведінки функцій Бесселя

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \to \infty \tag{10}$$

випливає

$$g(z) \sim \frac{2^{n+2}\pi^{n-1}}{z^{n-1}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{2^{n+1}\pi^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - 2z\right)}{z^{n-1}}.$$

Звідси отримуємо твердження 2). □

5. Тауберова теорема для спектральних функцій

У цьому розділі ми отримаємо тауберові теореми, які дають зв'язок асимптотичної поведінки функціоналів від випадкових полів на нескінченності та спектра в нулі.

Будемо писати $f \asymp g$, якщо $f = O(g)$ і $g = O(f)$.

Теорема 4. *Нехай $0 > \alpha \geq \beta > 2 - n$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$;

(ii) $\tilde{l}(\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$;

(iii) $\tilde{l}(r) \asymp \Phi(1/r)$, $r \to \infty$ *та існують додатні сталі* C, C' *та* r_0 *такі, що*

$$C' \left(\frac{r_1}{r}\right)^\beta \leq \frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{l}(r)} \leq C \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha, \quad r_1 \geq r \geq r_0.$$

Доведення. **(i)⇒(iii)** Із зображення (4) для $\tilde{l}(\cdot)$ отримуємо

$$\tilde{l}(r) = \int_0^\infty G(rx) d\Phi(x) \geq \int_0^{\frac{1}{\lambda r}} G(rx) d\Phi(x) \geq \Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right) \cdot \min_{u \in [0, \frac{1}{\lambda}]} G(u). \tag{11}$$

Нехай $\lambda = 1$. За лемою 1 $\frac{\tilde{l}(r)}{\Phi(\frac{1}{r})} \geq \min_{u \in [0,1]} G(u) > 0$, а отже $\Phi\left(\frac{1}{r}\right) = O(\tilde{l}(r)), \ r \to \infty$.

Покажемо тепер, що $\tilde{l}(r) = O\left(\Phi\left(\frac{1}{r}\right)\right), \ r \to \infty$. За визначенням $\tilde{l}(r)$, інтегруючи частинами (4), отримуємо:

$$\tilde{l}(r) = \int_0^\infty G(u) \Phi\left(\frac{du}{r}\right) = G(u)\Phi\left(\frac{u}{r}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty G'(u)\Phi\left(\frac{u}{r}\right) du = -\int_0^\infty G'(u)\Phi\left(\frac{u}{r}\right) du,$$

оскільки при $u \to \infty$ має місце (10) і за пунктом b) теореми 2 при $\alpha < 0 : \lim_{u \to 0} \Phi(u) = 0$.

За лемою 2, отримуємо

$$\frac{\tilde{l}(r)}{\Phi(1/r)} = \underbrace{\int_0^1 g(u) \frac{\Phi(u/r)}{\Phi(1/r)} du}_{I_1} + \underbrace{\int_1^r g(u) \frac{\Phi(u/r)}{\Phi(1/r)} du}_{I_2} + \underbrace{\int_r^\infty g(u) \frac{\Phi(u/r)}{\Phi(1/r)} du}_{I_3}.$$

Оцінимо кожен з цих інтегралів окремо.

Оскільки $\Phi(\cdot)$ неспадна функція, то

$$|I_1| = \left| \int_0^1 g(u) \frac{\Phi\Big(u/r\Big)}{\Phi(1/r)} du \right| \leq \int_0^1 |g(u)| \, du. \tag{12}$$

За пунктом 1) леми 2 отримуємо $\int_0^1 |g(u)| \, du < \infty$.

За Теоремою 3 про зображення OR функцій, для $r \geq 1$:

$$|I_2| \leq \int_1^r |g(u)| \frac{\Phi(u/r)}{\Phi(1/r)} du = \int_1^r |g(u)| e^{\eta(r/u)-\eta(r)} \exp\left\{-\int_{r/u}^r \frac{\zeta(t)}{t} dt\right\} du.$$

З Теореми 3 та зауваження до неї випливає, що для довільного $\beta' < \beta$:

$$|I_2| \leq C \int_1^r |g(u)| e^{\max_{t \geq 1} |\zeta(t)| \ln(u)} du \leq C \int_1^r |g(u)| u^{-\beta'} du. \tag{13}$$

За пунктом 2) леми 2 якщо $\beta > \beta' > 2-n$, то для будь-якого $r \geq 1$, інтеграл в (13) обмежений зверху скінченою величиною $\int_1^\infty |g(u)| u^{-\beta'} du$.

За монотонністю і обмеженістю спектральної функції

$$|I_3| \leq \int_r^\infty |g(u)| \frac{\Phi(u/r)}{\Phi(1/r)} du \leq \frac{\Phi(+\infty) \int_r^\infty |g(u)| du}{\Phi(1/r)} = \frac{\mathsf{B}_n(0) \int_0^{1/r} |g(1/z)| \frac{dz}{z^2}}{\Phi(1/r)}.$$

Застосувавши Теорему 2 c) до $\Phi(1/\cdot)$ отримуємо, що для довільного $\beta' < \beta$ існує $R > 0$ таке, що для всіх $r \geq R$: $\frac{\Phi(1/r)}{\Phi(1/R)} \geq C' \left(\frac{r}{R}\right)^{\beta'}$. Тому можемо оцінити інтеграл I_3 так:

$$|I_3| \leq \frac{\mathsf{B}_n(0) R^{\beta'}}{C' \Phi(1/R)} \frac{\int_0^{1/r} |g(1/z)| \frac{dz}{z^2}}{r^{\beta'}}, \quad r \geq R. \tag{14}$$

За пунктом 2) леми 2 при $x \to 0$ отримуємо

$$\frac{\int_0^x |g(1/z)| \frac{dz}{z^2}}{x^{-\beta'}} \sim -\frac{|g(1/x)|/x^2}{\beta' x^{-\beta'-1}} = O\left(x^{n-2+\beta'}\right). \tag{15}$$

При $\beta > 2-n$ останній вираз обмежений в околі нуля. Тому за (14) отримуємо обмеженість $|I_3|$ при $r \geq R$, якщо $\beta > 2-n$.

Отже при достатньо великих значеннях r сума $|I_1| + |I_2| + |I_3|$ обмежена і тому $\tilde{l}(r) = O\left(\Phi\left(\frac{1}{r}\right)\right)$, $r \to \infty$, звідки отримуємо $\tilde{l}(r) \asymp \Phi(1/r)$, $r \to \infty$.

Отже існують сталі C_1, C_2 та R такі, що

$$0 < C_2 \leq \frac{\Phi\left(\frac{1}{r}\right)}{\tilde{l}(r)} \leq C_1 < +\infty, \quad \forall r \geq R. \tag{16}$$

Переписавши $\frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{l}(r)}$ як $\frac{\Phi(1/r_1)}{\Phi(1/r)} \cdot \frac{\Phi(1/r)}{\tilde{l}(r)}$ і використавши (16) та теорему 2, для достатньо великих r_1 та r $(r_1 \geq r)$ отримуємо

$$C_2 C' \left(\frac{r_1}{r}\right)^\beta \leq \frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{l}(r)} \leq C_1 C \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha,$$

що і завершує доведення частини **(i)**$\Rightarrow$**(iii)** теореми.

(iii)$\Rightarrow$**(i)** Використавши оцінку (11) отримуємо:

$$\frac{\Phi(1/r)}{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)} \geq \min_{u \in [0, \frac{1}{\lambda}]} G(u) \cdot \frac{\Phi(1/r)}{\tilde{l}(r)}.$$

Нехай $\frac{1}{j_{\frac{n-2}{2},1}} < \lambda < 1$, тоді за пунктом 3) леми 1 матимемо $\min_{u \in [0, \frac{1}{\lambda}]} G(u) > 0$. Отже із **(iii)** випливає, що для такого λ : $\liminf_{r \to \infty} \frac{\Phi(1/r)}{\Phi(\frac{1}{\lambda r})} > 0$. Тому за Теоремою 1 отримуємо, що $\Phi(1/\cdot) \in OR$.

Переписавши $\Phi(1/r_1)/\Phi(1/r)$ як

$$\frac{\Phi(1/r_1)}{\Phi(1/r)} = \frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{l}(r)} \cdot \frac{\tilde{l}(r)}{\Phi(1/r)}$$

і використавши **(iii)**, для достатньо великих r_1 та r ($r_1 \geq r$) отримуємо

$$\frac{C'}{C_1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\beta} \leq \frac{\Phi(1/r_1)}{\Phi(1/r)} \leq \frac{C}{C_2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha},$$

де C_1 та C_2 визначені в (16). За означенням 3 одержуємо, що індекси Матушевської функції $\Phi(1/r)$ не перевищують β та α, що і завершує доведення частини **(iii)⇒(i)** теореми.

(i)⇒(ii), (iii)⇒(ii) Оскільки **(i)** та **(iii)** рівносильні, то з $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta,\alpha)$ і $\tilde{l}(r) \asymp \Phi(1/r)$ очевидним чином випливає **(ii)**.

(ii)⇒(i) Подамо $\tilde{l}(r)$ у вигляді суми

$$\tilde{l}(r) = \underbrace{\int_0^c g(u)\Phi(u/r)du}_{I_1'} + \underbrace{\int_c^{r/K} g(u)\Phi(u/r)du}_{I_2'} + \underbrace{\int_{r/K}^{\infty} g(u)\Phi(u/r)du}_{I_3'},$$

де c, $K \geq 1$. Оцінимо кожен з цих інтегралів окремо.

Інтегруючи частинами отримуємо

$$|I_1'| = \left|G(u)\Phi(u/r)\Big|_0^c - \int_0^c G(u)\Phi(du/r)\right| \leq \Phi(c/r)\left(G(c) + \max_{[0,c]} G(u)\right).$$

Скориставшись (11) матимемо

$$|I_2'| \leq \int_{K/r}^{1/c} |g(1/z)|\Phi\left(\frac{1}{rz}\right)\frac{dz}{z^2} \leq \frac{1}{\min_{[0,1]} G(u)}\int_{K/r}^{1/c} \tilde{l}(zr)|g(1/z)|\frac{dz}{z^2}.$$

Застосувавши Теорему 3 до $\frac{\tilde{l}(zr)}{\tilde{l}(r)}$ отримаємо

$$|I_2'| \leq C\tilde{l}(r)\int_{K/r}^{1/c} e^{\eta(zr)-\eta(r)}\exp\left\{-\int_{zr}^{r}\frac{\zeta(t)}{t}dt\right\}|g(1/z)|\frac{dz}{z^2}.$$

Вибравши таке K, що η обмежене на $[K,+\infty)$, за Теоремою 3 одержуємо для довільного $\beta' < \beta$

$$|I_2'| \leq C\tilde{l}(r)\int_{K/r}^{1/c} |g(1/z)|e^{-\ln(z)\max_{t\geq 1}|\zeta(t)|}\frac{dz}{z^2} \leq C\,\tilde{l}(r)\int_c^{r/K}|g(u)|u^{-\beta'}du. \tag{17}$$

За пунктом 2) леми 2 для будь-якого $r \geq cK$ інтеграл в (17) обмежений зверху скінченою величиною $\int_c^{+\infty}|g(u)|u^{-\beta'}du < \infty$, якщо $\beta > \beta' > 2-n$.

Скориставшись (11) матимемо

$$|I_3'| \leq \int_0^{K/r} |g(1/z)|\Phi\left(\frac{1}{rz}\right)\frac{dz}{z^2} \leq \frac{1}{\min_{[0,1]} G(u)}\tilde{l}(r)\int_0^{K/r}\frac{\tilde{l}(zr)}{\tilde{l}(r)}|g(1/z)|\frac{dz}{z^2}.$$

Використавши зображення (3) отримаємо

$$\tilde{l}(r) = C\int_0^1 z^{n-2}\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\mathsf{B}_n(zr)dz \leq C < +\infty.$$

Тому

$$|I_3'| \leq C\,\tilde{l}(r)\frac{\int_0^{K/r}|g(1/z)|\frac{dz}{z^2}}{\tilde{l}(r)}.$$

Застосувавши Теорему 2 c) до $\tilde{l}(\cdot)$ отримуємо, що для довільного $\beta' < \beta$ існує $R > 0$ таке, що $\forall r \geq R:\quad \frac{\tilde{l}(r)}{\tilde{l}(R)} \geq C'\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta'}$. Тому можемо оцінити інтеграл I_3' так:

$$|I_3'| \leq C\,\tilde{l}(r)\frac{\int_0^{K/r}|g\left(1/z\right)|\frac{dz}{z^2}}{(r/K)^{\beta'}}. \tag{18}$$

За (15) отримуємо в (18) обмеженість $|I_3'|$ при $r \geq R$, якщо $\beta > \beta' > 2-n$.

Отже сума $|I_1'| + |I_2'| + |I_3'|$ обмежена і

$$\tilde{l}(r) \leq \Phi(c/r)\left(G(c) + \max_{[0,c]} G(u)\right) + C_1\,\tilde{l}(r)\int_c^{r/K} |g(u)|u^{-\beta'}du + C_2\,\tilde{l}(r)\frac{\int_0^{K/r}|g(1/z)|\,\frac{dz}{z^2}}{r^{\beta'}},$$

при достатньо великих r. Зауважимо, що сталі C_1 та C_2 не залежать ні від r ні від c. Тому існує таке достатньо велике значеннях c, що

$$C_1\int_c^{r/K}|g(u)|u^{-\beta'}du + C_2\,\frac{\int_0^{K/r}|g(1/z)|\,\frac{dz}{z^2}}{r^{\beta'}} < \frac{1}{2}, \quad \text{для всіх } r \geq cK.$$

Звідки отримуємо

$$\tilde{l}(r) \leq 2\Phi(c/r)\left(G(c) + \max_{[0,c]} G(u)\right). \tag{19}$$

Застосувавши оцінки (11) та (19) одержуємо

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)}{\Phi(1/r)} = \frac{\Phi\left(\frac{c}{\lambda rc}\right)}{\Phi(1/r)} \geq \frac{\min_{u\in[0,1]} G(u)}{2\left(G(c) + \max_{[0,c]} G(u)\right)} \cdot \frac{\tilde{l}(\lambda rc)}{\tilde{l}(r)}, \quad \lambda r > K.$$

Звідси, за **(ii)** та означенням 3 для довільного $\Lambda > 1$, при $r \to \infty$:

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)}{\Phi(1/r)} \geq C(1+o(1))\lambda^{\beta} \ \text{ рівномірно в } \lambda \in [1,\Lambda].$$

Застосувавши оцінки (11) та (19) одержуємо

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)}{\Phi(1/r)} \leq \frac{2\left(G(c) + \max_{[0,c]} G(u)\right)}{\min_{u\in[0,1]} G(u)} \cdot \frac{\tilde{l}(\lambda r)}{\tilde{l}(cr)}, \quad r > K.$$

Розглянемо два випадки: $\lambda \in [c,\Lambda]$ і $\lambda \in [1,c]$.

a) За **(ii)** та означенням 3 для будь-якого $\Lambda > 1$, при $r \to \infty$:

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)}{\Phi(1/r)} \leq C(1+o(1))\lambda^{\alpha} \ \text{ рівномірно в } \lambda \in [c,\Lambda].$$

b) Якщо $1 \leq \lambda \leq c$, то при $r \to \infty$:

$$\frac{\tilde{l}(\lambda r)}{\tilde{l}(cr)} = \frac{1}{\frac{\tilde{l}(cr)}{\tilde{l}(\lambda r)}} \leq \frac{1}{D(1+o(1))(c/\lambda)^{\beta}} \leq C(1+o(1))\lambda^{\alpha},$$

оскільки $\beta < \alpha$.

Отже,

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right)}{\Phi(1/r)} \leq C(1+o(1))\lambda^{\alpha} \ \text{ рівномірно в } \lambda \in [1,\Lambda].$$

Тому за означенням 3 отримуємо $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta,\alpha)$.

Це завершує доведення частини **(ii)⇒(i)**, а разом з тим і всієї теореми. □

Теорема 5. *Нехай* $0 > \alpha \geq \beta > -n$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta,\alpha)$;

(ii) $\tilde{b}(\cdot) \in OR(\beta,\alpha)$;

(iii) $\tilde{b}(r) \asymp \Phi(1/r)$, $r \to \infty$ *та існують додатні сталі* C, C' *та* r_0 *такі, що*

$$C'\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\beta} \leq \frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{b}(r)} \leq C\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha}, \quad r_1 \geq r \geq r_0.$$

Доведення. Отримуємо за Теоремою 4, зауваживши, що за (4) та (6) інтегральні перетворення пов'язані так

$$(2\pi)^2\,\tilde{b}_n(r) = \tilde{l}_{n+2}(r).$$

□

Зауваження 2. *В твердженні* **(iii)** *Теорем 4 та 5 умови* $\tilde{l}(r) \asymp \Phi(1/r)$ *та* $\tilde{b}(r) \asymp \Phi(1/r)$ *введені для зручності і можуть бути опущені, оскільки вони випливають з оцінок для* $\frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{l}(r)}$ *та* $\frac{\Phi(1/r_1)}{\tilde{b}(r)}$, *якщо взяти* $r_1 = r$.

Зауваження 3. Твердження **(i)⇒(ii)** називають абелевою теоремою, а **(ii)⇒(i)** тауберовою.

6. Тауберова теорема для спектральних щільностей

У цьому розділі ми обговоримо можливість отримання результатів аналогічних до попереднього параграфа в термінах ізотропних спектральних щільностей замість спектральних функцій. Виявляється, що отримати аналоги тауберової частини Теорем 4 та 5 без накладання додаткових умов неможливо. Покажемо це, навівши приклад спектральної функції $\Phi(\cdot)$ з такою щільністю $f(\cdot)$, що $\Phi(1/\cdot) \in OR$, але $f(1/\cdot) \notin OR$.

Приклад. Розглянемо ізотропну спектральну щільність визначену так:

$$f(x) = \frac{1}{|s(1)|x^{n-1}} \cdot \begin{cases} 2^{2k}x, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ 2^{3k}x^2, & \text{якщо } x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

У цьому випадку спектральна функція $\Phi(x)$ дорівнює

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{4^k}}^{x} 2^{2k} z dz + \sum_{m=k+1}^{\infty} \int_{\frac{1}{4^m}}^{\frac{2}{4^m}} 2^{2m} z dz + \sum_{m=k+1}^{\infty} \int_{\frac{2}{4^m}}^{\frac{1}{4^{m-1}}} 2^{3m} z^2 dz, & x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ \displaystyle\int_{\frac{2}{4^k}}^{x} 2^{3k} z^2 dz + \sum_{m=k+1}^{\infty} \int_{\frac{2}{4^m}}^{\frac{1}{4^{m-1}}} 2^{3m} z^2 dz + \sum_{m=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{4^m}}^{\frac{2}{4^m}} 2^{2m} z dz, & x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2. \end{cases}$$

Ввівши нову змінну замість $2^m z$ і об'єднавши проміжки інтегрування отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2^k x} z dz + \int_0^{\frac{2}{2^k}} z^2 dz, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ \displaystyle\int_0^{2^k x} z^2 dz + \int_0^{\frac{2}{2^k}} z dz, & \text{якщо } x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2; \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2^{2k-1}x^2 + \frac{8}{3\cdot 2^{3k}}, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ \frac{2^{3k}x^3}{3} + \frac{1}{2^{2k-1}}, & \text{якщо } x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

Розглянемо $\lambda = 2$, тоді

$$\frac{f(x/\lambda)}{\lambda^{n-1} f(x)} = \begin{cases} \frac{2^{3k+1}x^2}{2^{2k}x}, & x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ \frac{2^{2k-1}x}{2^{3k}x^2}, & x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2; \end{cases} = \begin{cases} 2^{k+1}x, & x \in \left(\frac{1}{4^k}, \frac{2}{4^k}\right], \ k \geq 1; \\ \frac{1}{2^{k+1}x}, & x \in \left(\frac{2}{4^k}, \frac{1}{4^{k-1}}\right], \ k \geq 2. \end{cases}$$

Тому одержуємо, що

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{\lambda x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = 0, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{\lambda x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty.$$

Отже, $f(1/\cdot) \notin OR$.

З іншого боку із (20) випливає, що $\Phi(x) \in \left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2x}\right); x\left(1+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\right]$, якщо $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Отже, на проміжку $(0;1/2]$ маємо оцінку $x/2 \le \Phi(x) \le 3x$ і тому

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda x}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{x}\right)} \ge \frac{1}{6\lambda} > 0, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1}{\lambda x}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{x}\right)} \le \frac{6}{\lambda} < +\infty.$$

Тому робимо висновок, що функція $\Phi(1/\cdot) \in OR$ і, більш того, нижній та верхній індекси Матушевської її однакові і дорівнюють -1. □

Отже, для того щоб отримати аналоги тауберових Теорем 4 та 5 в термінах спектральних щільностей нам потрібно накласти ще деякі додаткові умови. Ми наведемо два результати такого типу, але спочатку сформулюємо абелеву теорему для ізотропних спектральних щільностей та спектральних функцій, яка виконується без додаткових умов.

Теорема 6. *Нехай $\alpha < n$. Тоді із $f(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$ випливає, що $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta - n, \alpha - n)$ і $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$.*

Доведення. За означенням спектральної щільності

$$\frac{\Phi(1/r)}{f(1/r)} = \frac{|s(1)| \int_0^{1/r} x^{n-1} f(x)dx}{f(1/r)} = \frac{|s(1)|}{r^n} \int_1^\infty \frac{f\left(\frac{1}{zr}\right)}{f(1/r)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Застосувавши Теорему 2 до функції $f(1/\cdot)$ отримуємо, що існує деяке $r_0 > 0$ таке, що

$$C' \int_1^\infty \frac{dz}{z^{n+1-\beta}} \le \frac{r^n \Phi(1/r)}{f(1/r)} \le C \int_1^\infty \frac{dz}{z^{n+1-\alpha}}, \quad r \ge r_0.$$

Оскільки $\alpha < n$, то $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$, а звідси вже випливає твердження $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta - n, \alpha - n)$. □

Для формулювання тауберових теорем потрібно розглядати спектральні щільності, які можуть дорівнювати нулеві лише поза деяким околом початку координат, бо в іншому випадку функція $f(1/\cdot)$ не належатиме класу OR.

Означення 5. *Невід'ємну функцію $g(\cdot)$ називають суттєво додатною (в околі нуля), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $x \in (0; \varepsilon] : g(x) > 0$.*

Теорема 7. *Нехай $f(1/\cdot) \in OR$ – суттєво додатна ізотропна спектральна щільність, $\alpha < 0$. Тоді із $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$ випливає, що $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$ і $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$.*

Доведення. Оскільки $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$, то за Теоремою 2 існує таке $r_0 > 0$, що

$$C' \lambda^\beta \Phi\left(\frac{1}{r}\right) \le \Phi\left(\frac{1}{\lambda r}\right) \le C \lambda^\alpha \Phi\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \ge r_0, \ \lambda \ge 1. \tag{21}$$

За Теоремою 2 з $f(1/\cdot) \in OR$ випливає, що існують такі $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, C_1, C_2, $A > 0$ для яких

$$C_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{\tilde{\beta}} \le \frac{f(1/y)}{f(1/x)} \le C_2 \left(\frac{y}{x}\right)^{\tilde{\alpha}}, \quad y \ge x \ge A.$$

Тому

$$C_2 f(x) \left(\frac{x}{y}\right)^{\tilde{\alpha}} \ge f(y), \quad \frac{1}{y} \ge \frac{1}{x} \ge A;$$

$$C_2 x^{n-1} f(x) \int_{x/\lambda}^x \left(\frac{x}{y}\right)^{\tilde{\alpha}} \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} dy \ge \int_{x/\lambda}^x y^{n-1} f(y) dy = \frac{1}{|s(1)|} \left(\Phi(x) - \Phi(x/\lambda)\right).$$

Звідси, використавши (21), для достатньо малих x отримуємо:

$$C_2 x^n f(x) \int_{1/\lambda}^{1} y^{n-1-\tilde{\alpha}} dy \geq \frac{1}{|s(1)|} \Phi(x) \left(1 - C\lambda^{\alpha}\right).$$

Отже, для достатньо великого λ :

$$\frac{x^n f(x)}{\Phi(x)} \geq \frac{(1 - C\lambda^{\alpha})}{C_2 |s(1)| \int_{1/\lambda}^{1} y^{n-1-\tilde{\alpha}} dy} > 0. \tag{22}$$

Аналогічно,

$$C_1 f(x) \left(\frac{x}{y}\right)^{\tilde{\beta}} \leq f(y), \quad \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \geq A$$

$$C_1 x^{n-1} f(x) \int_{x/\lambda}^{x} \left(\frac{x}{y}\right)^{\tilde{\beta}} \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} dy \leq \int_{x/\lambda}^{x} y^{n-1} f(y) dy = \frac{1}{|s(1)|} \left(\Phi(x) - \Phi(x/\lambda)\right).$$

Звідси, використавши (21), для достатньо малих x отримуємо:

$$C_1 x^n f(x) \int_{1/\lambda}^{1} y^{n-1-\tilde{\beta}} dy \leq \frac{1}{|s(1)|} \Phi(x) \left(1 - C' \lambda^{\beta}\right).$$

Отже,

$$\frac{x^n f(x)}{\Phi(x)} \leq \frac{\left(1 - C'\lambda^{\beta}\right)}{C_1 |s(1)| \int_{1/\lambda}^{1} y^{n-1-\tilde{\beta}} dy} < +\infty. \tag{23}$$

Нарешті, із (22) і (23) отримуємо $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$, а отже і $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$. □

У наступній теоремі додаткові вимоги входять через монотонність спектральних щільностей в околі нуля.

Теорема 8. *Нехай $f(1/\cdot)$ – суттєво додатна ізотропна спектральна щільність, така що $x^{n-1} f(x)$ – монотонна в деякому околі нуля, $\alpha < 0$. Тоді із $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$ випливає, що $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$ і $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $x^{n-1} f(x)$ – неспадна. Покажемо, що $\Phi(x) \asymp x^n f(x)$, $x \to 0$. За визначенням спектральної щільності:

$$\Phi(x) = |s(1)| \int_0^x z^{n-1} f(z) dz \leq |s(1)| x^n f(x); \tag{24}$$

$$\Phi(\lambda x) \geq |s(1)| \int_x^{\lambda x} z^{n-1} f(z) dz \geq |s(1)| (\lambda - 1) x^n f(x), \quad \lambda \geq 1 \tag{25}$$

в околі нуля, у якому $x^{n-1} f(x)$ неспадна.

За (25) та $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$ отримуємо

$$\frac{\Phi(x)}{x^n f(x)} = \frac{\Phi(\lambda x)}{x^n f(x)} \frac{\Phi(x)}{\Phi(\lambda x)} \geq |s(1)| (\lambda - 1) C' \lambda^{\beta} > 0, \quad \lambda > 1. \tag{26}$$

Нарешті, із (24) та (26) випливає $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$, а отже і $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $x^{n-1} f(x)$ – незростаюча. Знову покажемо, що $\Phi(x) \asymp x^n f(x)$, $x \to 0$. За визначенням спектральної щільності:

$$\Phi(x) = |s(1)| \int_0^x z^{n-1} f(z) dz \geq |s(1)| x^n f(x); \tag{27}$$

$$\frac{\Phi(\lambda x) - \Phi(x)}{\Phi(x)} = \frac{|s(1)|}{\Phi(x)} \int_x^{\lambda x} z^{n-1} f(z) dz \leq \frac{|s(1)|}{\Phi(x)} (\lambda - 1) x^n f(x), \quad \lambda \geq 1 \tag{28}$$

в околі нуля, у якому $x^{n-1}f(x)$ незростаюча. За $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$ отримуємо

$$\frac{\Phi(\lambda x) - \Phi(x)}{\Phi(x)} \geq c\lambda^{-\alpha} - 1, \quad \lambda \geq 1.$$

Тому за (28) при деякому достатньо великому λ одержуємо

$$\frac{x^n f(x)}{\Phi(x)} \geq \frac{c\lambda^{-\alpha} - 1}{|s(1)|(\lambda - 1)} > 0. \tag{29}$$

Нарешті, із (29) та (27) випливає $\Phi(1/r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$, а отже і $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$. □

Зауваження 4. *Твердження теореми залишається правильним, якщо вимагати монотонність $f(x)$, а не $x^{n-1}f(x)$. Дійсно, якщо $f(x)$ неспадна, то $x^{n-1}f(x)$ також буде неспадною функцією. Проте з того, що $f(x)$ незростаюча, не випливає, що $x^{n-1}f(x)$ також незростаюча функція. Проте у цьому випадку можемо підкоректувати доведення, оскільки в околі нуля, у якому $f(x)$ незростаюча, замість (27) виконується*

$$\Phi(x) \geq \frac{|s(1)|}{n} x^n f(x),$$

а замість (28)

$$\frac{\Phi(\lambda x) - \Phi(x)}{\Phi(x)} \leq \frac{|s(1)|(\lambda^n - 1)}{n\Phi(x)} x^n f(x).$$

Як наслідок трьох попередніх теорем отримуємо таку тауберову теорему.

Теорема 9. *Нехай $f(1/\cdot)$ – суттєво додатна ізотропна спектральна щільність. Тоді із*

(i) $f(1/\cdot) \in OR(\beta + n, \alpha + n)$;

при $0 > \alpha \geq \beta > 2 - n$ випливають твердження

(ii) $\tilde{l}(\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$;

(iii) $\tilde{l}(r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$ *та існують додатні сталі C, C' та r_0 такі, що*

$$C' \left(\frac{r_1}{r}\right)^\beta \leq \frac{f(1/r_1)}{r_1^n \tilde{l}(r)} \leq C \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha, \quad r_1 \geq r \geq r_0,$$

а при $0 > \alpha \geq \beta > -n$ твердження

(iv) $\tilde{b}(\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$;

(v) $\tilde{b}(r) \asymp \frac{f(1/r)}{r^n}$, $r \to \infty$ *та існують додатні сталі C, C' та r_0 такі, що*

$$C' \left(\frac{r_1}{r}\right)^\beta \leq \frac{f(1/r_1)}{r_1^n \tilde{b}(r)} \leq C \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha, \quad r_1 \geq r \geq r_0.$$

Якщо крім того виконується будь-яка з умов:

(1) $f(1/\cdot) \in OR$;

(2) $x^{n-1}f(x)$ *– монотонна в деякому околі нуля,*

(3) $f(x)$ *– монотонна в деякому околі нуля,*

то **(i)** *є наслідком будь-якого з тверджень* **(ii)**, **(iii)**, **(iv)**, **(v)**.

Доведення. **(i)⇒(ii),(iii),(iv),(v)** За Теоремою 6 із **(i)** випливає $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$. Тому за Теоремами 4 та 5 отримуємо **(ii)** та **(iv)**. За Теоремою 6 із твердження **(iii)** Теорем 4 та 5 отримуємо твердження **(iii)** та **(v)** нашої теореми.

(ii)⇒(i), **(iv)⇒(i)** За Теоремою 4 із **(ii)** (або за Теоремою 5 із **(iv)**) випливає $\Phi(1/\cdot) \in OR(\beta, \alpha)$. Тому за Теоремами 7, 8 або зауваженням 4 отримуємо **(i)**.

(iii)$\Rightarrow$**(i)**, **(v)**$\Rightarrow$**(i)** Із **(iii)** отримуємо

$$\frac{C'}{z}\left(\frac{1}{zr}\right)^{\beta} \le \frac{z^{n-1}f(z)}{\tilde{l}(r)} \le \frac{C}{z}\left(\frac{1}{zr}\right)^{\alpha}, \quad 1/z \ge r \ge r_0,$$

та інтегруючи по z на проміжку $[0, x]$

$$C'\left(\frac{1}{xr}\right)^{\beta} \le \frac{\Phi(x)}{\tilde{l}(r)} \le C\left(\frac{1}{xr}\right)^{\alpha}, \quad 1/x \ge r \ge r_0,$$

що дає твердження **(iii)** Теореми 4 (аналогічно із **(v)** отримуємо твердження **(iii)** Теореми 5). Далі доведення аналогічне частині **(ii)**$\Rightarrow$**(i)** (**(iv)**$\Rightarrow$**(i)**). □

Зауваження 5. *Для ізотропної спектральної щільності у формулюванні теореми можемо стверджувати, що $x^{n-1}f(x)$ має такі властивості сингулярності:*

(1) *необмежена в нулі, якщо* $\beta > -1$;
(2) *прямує до* 0, *якщо* $\alpha < -1$.

7. Висновки

У роботі доведено абелеві та тауберові теореми для класів функцій, що узагальнюють функції, які змінюються регулярно. У більшості випадків такі теореми для OR-функцій легше доводити ніж для R_ρ-функцій. Це пояснюється тим, що незважаючи на те, що функціональний клас OR ширший ніж R_ρ, для визначення асимптотики і належності до нього не потрібно встановлювати точні значення сталих C та D, які фігурують в означенні 3. Проте, якщо б ми захотіли отримати теореми для R_ρ-функцій як наслідок OR-результатів, то нам не достатньо було б взяти $\alpha = \beta = \rho$, а потрібно було б ще показати, що $C = D$.

При порівнянні §5 та §6 з аналогічними результатами для R_ρ-функцій в [6, 9, 12, 16] виникає запитання: чи може бути меншою нижня межа для індексів α та β. Дослідження цього питання та асимптотичної поведінки спектральних та кореляційних характеристик полів з граничними значеннями індексів Матушевської буде проведене у наступних публікаціях. Також буде продемонстровано застосування отриманих тауберових теорем при вивченні граничної поведінки функціоналів від випадкових полів.

Література

[1] Ватсон Г. *Теория бесселевых функций.* Т.1. М.: ИЛ, 1949.
[2] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular variation.* Cambridge university press, 1989.
[3] Broniatowski M., Fuchs A. *Tauberian theorems, Chernoff inequality, and the tail behavior of finite convolutions of distribution functions.* Adv. in Math. **116** (1995), 12–33.
[4] Geluk J.L. *Abelian and Tauberian theorems for O-regularly varying functions.* Proc. Amer. Mat. Soc. **93 (2)** (1985), 235–241.
[5] Лауэ Г. *Тауберовы и абелевы теоремы для характеристических функций.* Теория вероятностей и математическая статистика. **37** (1987), 78–92.
[6] Леоненко Н.Н., Иванов А.В. *Статистический анализ случайных полей.* Вища школа, Киев, 1986.
[7] Леоненко Н.Н., Оленко А.Я. *Тауберова и абелева теоремы для корреляционных функций однородного изотропного случайного поля.* Укр. мат. журнал. **43 (12)** (1991), 1652–1664.
[8] Leonenko N.N., Olenko A.Ya. *Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields.* Random Oper. Stoch. Equ. **1 (1)** (1993), 57–67.
[9] Leonenko N.N. *Limit theorems for random fields with singular spectrum.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1999.
[10] Ma C. *Long-memory continuous-time correlation models.* J. Appl. Prob. **40** (2003), 1133–1146.
[11] Маляренко А.А. *Абелеві та тауберові теореми для випадкових полів на двоточкових однорідних просторах.* Теор. ймов. та мат. стат. **69** (2003), 106–118.
[12] Olenko A.Ya. *Tauberian and Abelian theorems for strongly dependent random fields.* Ukr. Math. Journal. **48 (3)** (1996), 368–383.

[13] Рогозин Б. А. *Тауберовская теорема для мажорируемо меняющихся возрастающих функций.* Сибирский Мат. Журнал. **43 (2)** (2002), 442–445.

[14] Rogozin B. A. *Tauberian theorems for decreasing functions of dominated variation.* Theory Probab. Appl. **47 (2)** (2002), 351–357.

[15] Rukhin A. L. *Statistical estimation of exponential-type functions: admissibility and tauberian theorems.* J. Math. Anal. and Appl. **191** (1995), 346–359.

[16] Yadrenko M.I. *Spectral theory of random fields.* Optimization Software Inc., New York (distributed by Springer-Verlag), 1983.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Володимирська, 64, Київ 01033, Україна

E-mail address: olenk@univ.kiev.ua