Integrering

$\int 5x^7 dx = \frac{5}{8}x^8 + C$ ← Når man integrerer en haug med summer, så integreres de hver for seg.

Integrasjonsmetoder

$Kjerneregel$: $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = g(x) \cdot f'^{(g(x))}$ ← For derivering

$\int g'(x) \cdot f'(g(x))dx = f(g(x))$

Eksempel:

$\int (\cos x)(\sin x)^3 dx = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + C$

Substitusjon:

$\int ((\sin x)^3 \cdot \cos x)dx$ ← Setter u = sin x og $\frac{du}{dx} = \cos x$

$= \int u^3 \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx = \int u^3 \cdot du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + C$ ← Løser ut for u, og setter inn igjen på slutten.

Produktregelen:

$\int f(x) \cdot g'^{(x)}\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'^{(x)} \cdot g(x)dx$

Delvis integrering:

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$ ← Her er det best å delvis integrere igjen.

$= x^2e^x - (2xe^x - \int 2e^x dx) = x^2e^x - (2\int e^x dx) = \int e^x x^2 dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

* Om man finner en kjerne er substitusjon tingen. F.eks $\sin(x^2)$ er x^2en kjerne i $\sin(x^2)$.
* Om man ser produktregelen er også substitusjon fin.
* Delvis integrering er siste utvei om noe annet er håpløst.

Første ordens *møkka* differensialligninger

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$

Substituerer: $y = x \; og \; y = xv \; og \; \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Setter inn:

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v \rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1$ | deler på x

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$ → integrerer begge sider → $\int dv = \int \frac{1}{x} x$

$v = x \ln|x| + C$

Separable differensialligninger

Målet her er i første omgang å skille x og y til hver sin side av =.

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ | ganger med 2(y-1)

$2(y-1)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 2$ | ganger med dx

$\int (2y-2)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)\, dx$ | her integreres begge sidene

$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$

Løser for initialbetingelse y(0) = -1.

$-1^2 - 2(1) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C$

$1 + 2 = C \rightarrow C = 3$

Komplekse tall ♥

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho\sin\theta$

Polarform: $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

Fra polarform til kartetisk:

$\rho = 2 \; og \; \theta = \frac{\pi}{3}$

$z = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot 2\sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}i$

Kartetisk til polarform:

Gitt $z = a + bi$ → finn $\rho \; og \; \theta$.

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow \sin\theta = \frac{b}{\rho}$

$z = 1 + i \rightarrow a = 1 \; og \; b = 1$

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$z = 2\sqrt{3} + 2i$

$\rho = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}^2\right) + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3 + 4} = 4$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\theta = 150° = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2. ordens lineære homogene differensialligninger

To reelle røtter:

Ay'' +By' + Cy = 0

Eksempel:

$4y'' - 8y' + 3y = 0$

Karakteristisk ligning: $4r^2 - 8r + 3 = 0$

Finner røttene: $r = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}$

Gir røttene: $r_1 = \frac{2}{3} og \; r_2 = \frac{1}{2}$

Generell løsning: $y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

Og så må man finne y': $y' = \frac{3}{2}C_1 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

Løser for initialbetingelsene $y(0) = 2 \; og \; y'(0) = \frac{1}{2}$

$L_1: C_1 + C_2 = y(0) = 2$

$L_2: \frac{3}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = y'(0) = \frac{1}{2}$

Løser ligningssystemet for å finne $C_1 \; og \; C_2$.

Ganger $L_1 med \frac{3}{2}$.

$L_1: \frac{3}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 3$ ← Trekker fra L_2.

$-C_2 = -\frac{5}{2} \qquad C_2 = \frac{5}{2}$

$C_1 + \frac{5}{2} = 2 \qquad C_1 = \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Spesiell løsning:

$y = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

Komplekse røtter:

Når man har komplekse røtter $a \pm bi$, gir dette generell løsning: $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Eksempel:

$y'' + 4y' + 5y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 1 \; og \; y'(0) = 0$

Dette gir karakteristisk ligning $r^2 + 4r + 5 = 0$ og dette gir $a = -2 \; og \; b = 1$.

Generell løsning: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

Verdt å huske på! Noe opphøyd i 0 er 1, $\sin 0 = 0 \; og \; \cos 0 = 1$.

$y(0) = 1 = 1(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)$ →Den generelle løsningen må også deriveres:

$y' = -2e^{-2x}(\cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(-\sin x + C_2 \cos x)$

Da kan vi løse for y'(0): $y'(0) = 0 = -2(1 + 0) + 1(0 + C_2)$

$0 = -2 + C_2 \rightarrow C_2 = 2$

Spesiell løsning:

$y(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$

Én reell rot:

Eksempel:

$y'' - y' + 0.25y = 0$ med initialbetingelser $y(0) = 2 \; og \; y'(0) = \frac{1}{3}$

Karakteristisk ligning: $r^2 - r + 0.25 = 0$ Dette gir én rot: $\frac{1}{2}$

Generell løsning: $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}$

Må finne y': $y' = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2\left(e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}\right)$

$y' = e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) + \frac{C_2}{2}xe^{\frac{1}{2}x}$

Finner for initialbetingelsene:

$y(0) = 2 = C_1$

$y'(0) = \frac{1}{3} = (1 + C_2)e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{C_2}{2}xe^{\frac{1}{2}x}$

$\frac{1}{3} = 1 + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{2}{3}$

Gir spesiell løsning: $y = 2e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3}xe^{\frac{1}{2}x}$

Kort fortalt:

To reelle røtter gir generell løsning: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Én reell rot gir generell løsning: $y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$

Komplekse røtter gir generell løsning: $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Inhomogene:

$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

Må gjette på en spesiell løsning: $y_s = Ax^2 + Bx + C$

Deriverer dette: $y' = 2Ax + B \rightarrow y'' = 2A$

Setter dette inn i ligninga:

$2A - 6Ax - 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2(+0x + 0)$

$-4Ax^2 + (-6A - 4B)x + 2A - 3B - 4C = 4x^2$

Løser for x^2: $-4A = 4 \rightarrow A = -1$

Løser for x: $6 - 4B = 0 \rightarrow 4B = 6 \rightarrow B = \frac{3}{2}$

Løser for konstantene: $-2 - \frac{9}{2} - 4C = 0 \rightarrow \frac{-4-9}{2} = 4C \rightarrow C = -\frac{13}{8}$

Spesiell løsning: $y = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$

Generell løsning: $y_h^s = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + (-x^2) + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$

Generell løsning består av homogen løsning + spesiell løsning.

Komplekse tall forts.

Kompleks eksponesialfunksjon

$e^{ib} = \cos b + i \sin b$

$e^{z} = e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$

z på polarform – kompakt polarform

$z = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta = \rho(\cos\theta + i \sin\theta = \rho e^{i\theta})$

Differensligninger

Dette rælet er tallfølger. For **homogene** er det sådan:

$Finn\ en\ følge\ x_n\ slik\ at{:}\ x_{n+1} = rx_n\ hvorav\ r\ \neq 0$

Eksempel: Ola setter inn 10 000kr i banken med 4% rente.

Hvor mye har han etter *n* år?

$x_1 = 10000\ og\ x_{n+1} = 1.04 \cdot x_n$

$Løsning{:}\ x_n = 10000 \cdot (1.04)^n$

Hvor lang tid tar det før han har 20 000?

$10000 \cdot (1.04)^n = 20000$ | deles med 10000

$(1.04)^n = 2 \rightarrow n \ln(1.04) = \ln 2$

$n = \frac{\ln 2}{\ln 1.04} \approx 17.7$ Svar: ca. 18 år.

Hvis Ola satte inn et ukjent beløp, men har 15 000 etter 10 år.

Hvor mye satte han inn?

$x_n = C \cdot (1.04)^n$

$C \cdot (1.04)^{10} = 15000 \rightarrow C = \frac{15000}{(1.04)^{10}} = 10133$

Grensen for løsningen for n → ∞:

$\lim_{n\to\infty} xn = \frac{\lim Cr^n}{n\to\infty}$

{0 hvis |r| < 1, C hvis r = 1, divergerer r = -1, divergerer |r| > 1}

Inhomogene

Ola har ei lue full av blekk. Hver gang han vrir opp lua heller Lisa på 1 dl. Hva er den minste mengden blekk Ola kan oppnå? (Når han vrir så forsvinner 1.2 dl væske ut av lua).

$x_{n+1} = 0.4x_n + 0.1$

Må løse homogen: $C \cdot (0.4)^n$

Partikulær: $x_{n+1} - 0.4x_n = 0.1$

Prøver med $x_n = A\ for\ alle\ n.$

$A - 0.4A = 0.1 \rightarrow 0.6A = 0.1 \rightarrow A = \frac{1}{6}$

Generell løsning:

$x_n = C \cdot (0.4)^n + \frac{1}{6}$

$x_0 = 1\ gir\ C + \frac{1}{6} = 1 \rightarrow C = \frac{5}{6}$

$x_n = \frac{5}{6} \cdot (0.4)^n + \frac{1}{6} \rightarrow \lim_{n\to\infty} xn = \frac{1}{6}$

Andre ordens:

Homogene.

$x_{n+2} + bx_n + cx_n = 0$

$x_{n+2} = -bx_{n+1} - cx_n$

Prøver med $x_n = r^n$

$r^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = 0\ for\ alle\ n\ \geq 0.$

$r^2 + br + c = 0$

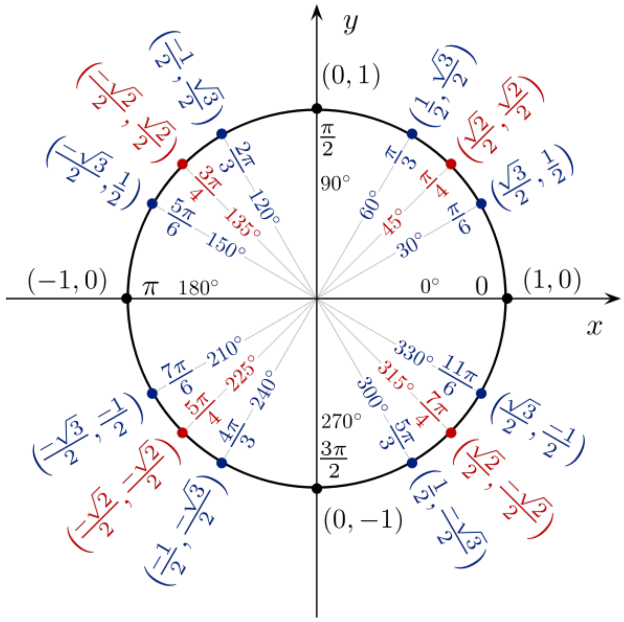
Tilfeller og løsninger:

$To\ reelle\ røtter{:}\ x_n = C_1 r^n + C_2 r^n$

$Én\ reell\ rot{:}\ x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$

$Komplekse\ røtter{:}\ x_n = C_1 \rho^n \cos\theta + C_2 \rho^n \sin n\theta$

Vinkler, grader og radianer ♥
cos, sin



Formler ved speiling for $\sin\theta\ og\ \cos\theta$.

X-aksen: $\sin -\theta = -\sin\theta\ |eller|\ \cos -\theta = \cos\theta$

Y-aksen: $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta\ \ |eller|\ \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$Origo{:}\ \sin(\pi + \theta) = \sin\theta\ \ |eller|\ \ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

Matriser

Determinant:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$detM = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1(2 \cdot 3 - 2) + 3(2 - 5 \cdot 3 - 4)$$

$$= -2 + 9 = 7$$

Egenverdier

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 & 4 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad dette\ gir\ \lambda_1 = 2\ og\ \lambda_2 = 1\ som\ egenverdier.$$

Egenvektorer

$$M - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} Setter\ inn\ for\ \lambda_1 = 2\ og\ finner\ egenvektor\ \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Good to know

Logaritmer:

$e^{\ln a} = a\ \ hvis\ a > 0$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log a^t = t \log a$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Identiteter:

$a^x a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

Trigonometriske funksjoner:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

Identiteter:

$sin^2 x + cos^2 x = 1$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$