Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра теории функций

В.Г.Кротов

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Минск 2021

Оглавление

Глава 1

Математический анализ

Множество вещественных чисел. Важнейшие подмножества в R и их мощность.
Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел

1.1. Множество действительных чисел

1.1.1. Аксиоматика множества действительных чисел

Условимся говорить, что на некотором множестве X задана **бинарная операция** R, если задана функция

$$R : X \times X \to X$$

из декартового квадрата $X \times X$ в X. Для результата $R(x, y)$ операции R с элементами x и y будем использовать обозначение xRy вместо $R(x, y)$.

Определение 1.1. ***Множеством действительных чисел*** *будем называть любое множество* $\mathbb{R}$, *подчиняющееся следующей системе условий, называемых* ***аксиомами действительных чисел*** *(которые разделены на естественные группы).*

Аксиомы сложения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция сложения*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$ *(существование нуля — нейтрального элемента для сложения);*

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = 0$ *(существование противоположного элемента);*

3) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность сложения);*

4) $x + y = y + x$ *(коммутативность сложения).*

Аксиомы умножения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция умножения*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

5) $\exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$ *(существование единицы — нейтрального элемента для умножения);*

6) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = 1$ *(существование обратного элемента);*

7) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность умножения);*

8) $x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность умножения).*

Аксиома связи умножения и сложения:

9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(дистрибутивность).*

Аксиомы порядка: *на $\mathbb{R}$ определено отношение порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим условиям:*

10) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$;

11) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$;

12) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$;

13) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$ *(транзитивность порядка).*

Аксиомы связи порядка и операций умножения и сложения:

14) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$;

15) $(x \leqslant y) \wedge (z \geqslant 0) \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Аксиома полноты:

16) *для любых непустых подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию*

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y,$$

существует такое $c \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant c \leqslant y.$$

Если эта совокупность аксиом выполняется на каком-либо множестве, то оно называется **моделью** (конкретной реализацией) множества действительных чисел.

Приведенная система аксиом является непротиворечивой, т. е. существует множество, удовлетворяющее этой системе аксиом. Построение таких моделей можно доказать, исходя из аксиом теории множеств.

1.1.2. Понятие о мощности множества

Следующее важное понятие лежит в основе обобщения представлений о количестве элементов множества.

Определение 1.2. *Два непустых множества X и Y называются* ***равномощными****, если существует биекция X на Y.*

Пустое множество равномощно самому себе и не равномощно никакому другому множеству.

Другими словами, равномощность множеств можно трактовать как тот факт, что они имеют одинаковое число элементов.

1.1.3. Важнейшие множества и их мощности

Для мощностей некоторых часто встречающихся множеств имеются специальные названия:

1) класс, содержащий пустое множество $\varnothing$, не содержит других множеств; эта мощность называется нулевой или нулем;

2) пусть $n \in \mathbb{N}$, все множества, состоящие ровно из n элементов, попадают в одну мощность — она называется n и совпадает с привычным понятием числа элементов в конечном множестве;

3) класс, содержащий $\mathbb{N}$, называется счетностью; другими словами, множество называется **счетным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$;

4) класс, содержащий $\mathbb{R}$, называется **мощностью континуума**.

Теорема 1.1 (Кантора). $\operatorname{card}\mathbb{N} < \operatorname{card}\mathbb{R}$.

Числовые множества и их границы. Теорема Дедекинда о существовании точных границ

1.1.4. Границы числовых множеств

Число $M \in X$ из множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **максимальным** для X, если

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Обозначение для максимального элемента — $\max X$.

Аналогично элемент $m \in X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **минимальным** для X, если

$$\forall x \in X \quad x \geqslant m.$$

Обозначение для минимального элемента — $\min X$.

Если множество конечно, то оно имеет минимальный и максимальный элементы. Если же множество бесконечно, то это уже не всегда так, в чем легко убедиться на примере интервала. Далее определим подходящие аналоги этих понятий для бесконечных множеств.

Определение 1.3. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется* ***верхней границей или гранью множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным сверху****, если оно имеет верхнюю границу.*

Подчеркнем, что в определении верхней границы множества не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Легко убедиться, что если $M \in \mathbb{R}$ — верхняя граница множества $X \subset \mathbb{R}$, то любое число $M' > M$ также является верхней границей для X. Интерес представляет наименьшая из верхних границ: она ближе всех ко множеству.

Определение 1.4. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется **точной верхней границей множества** $X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:*
1) $\forall\, x \in X \quad x \leqslant M$;
2) $\forall\, M' < M \quad \exists\, x \in X \quad x > M'$.

В определении точной верхней границы множества также не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Точная верхняя граница обозначается $\sup X$, и для нее используется термин **супремум** (лат. supremum).

Первое условие в определении 1.4 означает, что $\sup X$ — верхняя граница для X. Второе же означает, что любое меньшее число верхней границей уже не является. Таким образом, супремум — это наименьшая верхняя граница множества.

Аналогично можно дать определение точной нижней границы.

Определение 1.5. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется **нижней границей или гранью множества** $X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall\, x \in X \quad x \geqslant m.$$

*Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным снизу** , если оно имеет нижнюю границу.*

Определение 1.6. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется **точной нижней границей множества** $X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:*
1) $\forall\, x \in X \quad x \geqslant m$;
2) $\forall\, m' > m \quad \exists\, x \in X \quad x < m'$.

Точная нижняя граница обозначается $\inf X$, и для нее используется термин **инфимум** (лат. infimum).

Первое условие в определении 1.6 означает, что $\inf X$ является нижней границей для X. Второе же означает, что любое большее число нижней границей уже не является. Таким образом, инфимум — это наибольшая нижняя граница множества.

Теорема 1.2 (Дедекинда). *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху (снизу), то существует точная верхняя (соответственно нижняя) граница для X.*

Предел последовательности и его свойства (единственность, операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах). Теорема о пределе монотонной последовательности. Число Эйлера

1.2. Теория предела

1.2.1. Предел последовательности

Определение 1.7. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом последовательности*** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, *если (рис. 1.1)*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

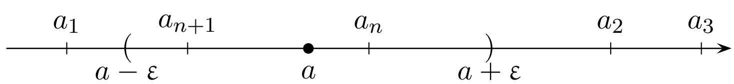

Рис. 1.1

Для краткой записи этого используем обозначения

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**, в противном случае последовательность называется **расходящейся**.

Теорема 1.3. 1) *Предел последовательности определяется однозначно.*
2) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Следующая теорема устанавливают связи между понятием предела и арифметическими операциями над последовательностями.

Теорема 1.4. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогда*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
3) *если $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $b \neq 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Следующая теорема устанавливают связи между понятием предела и порядком во множестве действительных чисел.

Теорема 1.5. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*
1) *Если $a < b$, то, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $a_n < b_n$, т. е.*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad a_n < b_n.$$

2) *Если, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $a_n \leqslant b_n$, то $a \leqslant b$.*

1.2.2. Предел монотонной последовательности

Определение 1.8. *Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей (убывающей)****, если*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Если эти неравенства строгие, то $\{a_n\}$ называется ***строго возрастающей*** *(соответственно* ***строго убывающей****).*

Теорема 1.6. *Пусть $\{a_n\}$ — возрастающая (убывающая) последовательность. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\{a_n\}$ сходится;

2) $\{a_n\}$ ограничена сверху (снизу).

При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right). \tag{1.2}$$

Доказательство. Утверждение 1) $\Longrightarrow$ 2) справедливо и без предположения о монотонности (см. часть 2) теоремы 1.3).

Утверждение 2) $\Longrightarrow$ 1) докажем для возрастающих $\{a_n\}$. Для убывающих оно такое же (проведите его самостоятельно).

Пусть $M = \sup\{a_n\}$. Тогда по определению точной верхней границы для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что $a_{N_\varepsilon} > M - \varepsilon$. Поэтому в силу монотонности при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$M - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant M \quad \text{и} \quad 0 \leqslant M - a_n < \varepsilon. \quad \square$$

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.3}$$

При возрастании n основание степени становится все ближе к единице, а показатель степени n неограничен. Поэтому асимптотическое поведение этой последовательности непредсказуемо, по крайней мере с первого взгляда.

Теорема 1.7. *Последовательность (1.3) сходится.*

Для доказательства этой теоремы устанавливается, что последовательность (1.3) возрастает и ограничена сверху.

Теорема Кантора о стягивающейся последовательности отрезков. Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами

1.3. Различные формы полноты

Последовательность сегментов $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **вложенной**, если (рис. 1.2)

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность вложенных сегментов называется **стягивающейся**, если дополнительно

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

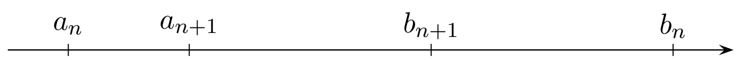

Рис. 1.2. Вложенные сегменты

Лемма 1.1 (Кантора о вложенных сегментах). *Если $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов, то существует число, принадлежащее всем сегментам, т. е.*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing.$$

Если $\{I_n\}$ — последовательность стягивающихся сегментов, то это число единственно.

Пусть $S = \{X\}$ — некоторая система множеств. Будем говорить, что S покрывает множество Y, если

$$Y \subset \bigcup_{X\in S} X.$$

Другими словами, это означает, что каждая точка множества Y принадлежит по крайней мере одному из множеств системы S. В этом случае S также называется **покрытием множества** Y.

Лемма 1.2 (Бореля – Лебега). *Из любой системы интервалов, покрывающей сегмент, можно выделить конечную подсистему интервалов, покрывающую этот сегмент.*

Доказательство. Пусть S — система интервалов, покрывающая сегмент $I = [a, b]$. Допустим, что I не покрывается конечным числом интервалов из S. Тогда одна из его половин — $[a, (a+b)/2]$ или $[(a+b)/2, b]$ — также не покрывается конечным числом интервалов из S. Обозначим эту половину $I_1 = [a_1, b_1]$. Одна из половин I_1 также не покрывается конечным числом интервалов из S — пусть это $I_2 = [a_2, b_2]$. Продолжая процесс по индукции, Критерий Коши сходимости последовательности. Предельная точка множества в R, лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки

получим последовательность сегментов $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ со следующими свойствами:

1) $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов;

2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$;

3) I_n не покрывается конечным числом множеств из S.

По лемме Кантора существует точка c, принадлежащая всем I_n. Так как $c \in I$, то найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c. Обозначим $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\} > 0$, тогда $b_n - a_n < \varepsilon$ для достаточно больших n. Отсюда $I_n \subset (\alpha, \beta)$ для таких n и I_n покрывается одним (!) интервалом из S. Это противоречит тому, что каждый I_n не покрывается конечным числом интервалов из покрытия. □

Определение 1.9. *Число $x \in \mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой*** *множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности x находится бесконечно много элементов множества X.*

Лемма 1.3 (Больцано – Вейерштрасса). *Каждое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Использование определения 1.7 предела последовательности для проверки ее сходимости не всегда удобно. Если с его помощью пытаться доказать сходимость, то необходимо заранее знать, чему равен предполагаемый предел. Если же нужно доказать расходимость, то придется доказывать, что никакое число не является пределом. Поэтому возникает необходимость в отыскании «внутренних условий», позволяющих судить о сходимости, основываясь только на информации о поведении элементов последовательности.

Определение 1.10. *Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется* ***фундаментальной (последовательностью Коши)****, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\,n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Условие фундаментальности можно переписать в эквивалентном виде:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\,n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\,p \in \mathbb{N} \quad |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Очевидно, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. Гораздо важнее то, что справедливо обратное утверждение.

Теорема 1.8 (критерий Коши). *Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Предел функции в точке и непрерывность. Основные теоремы о непрерывных функциях (две теоремы Больцано-Коши, две теоремы Вейерштрасса)

1.4. Свойства непрерывных функций

1.4.1. Предел функции и непрерывность

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка ее области определения D. Следующее определение обычно называют определением **предела функции по Коши**.

Определение 1.11. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *функции f в точке a, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Краткая запись этого:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{D \ni x \to a} f(x) = b.$$

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in D$. В отличие от определения предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, где точка a могла не принадлежать области определения D, здесь требование $a \in D$ необходимо.

Определение 1.12. *Будем говорить, что функция f* ***непрерывна в точке*** *a, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Определение 1.13. *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Будем говорить, что f* ***непрерывна на множестве*** *X, если она непрерывна в каждой точке множества X.*

Символом $C(D)$ обозначим класс всех функций, непрерывных на множестве D.

1.4.2. Теоремы Вейерштрасса

Теорема 1.9 (Вейерштрасса). *Если функция $f \in C[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$ (рис. 1.3, а).*

Доказательство. Для каждой точки $x \in [a, b]$ существует такая окрестность U_x этой точки, что $f(U_x \cap [a, b])$ — ограниченное множество. В силу леммы 1.2 из покрытия $\{U_x\}_{x \in [a,b]}$ сегмента $[a, b]$ интервалами можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Итак,

$$f([a, b]) \subset \bigcup_{k=1}^{n} f(U_{x_k} \cap [a, b]),$$

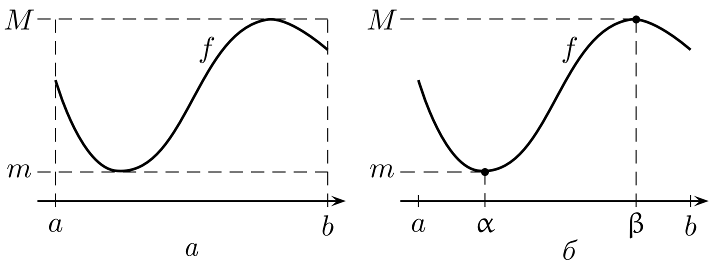

Рис. 1.3

а объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено. □

В следующей теореме используется стандартное обозначение

$$m = \inf f([a,b]), \quad M = \sup f([a,b]).$$

Теорема 1.10 (Вейерштрасса). *Если $f \in C[a,b]$, то существуют такие точки $\alpha, \beta \in [a,b]$, что $f(\alpha) = m$ и $f(\beta) = M$ (рис. 1.3, б).*

Доказательство. По определению точной нижней границы для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_n \in [a,b]$, что

$$m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n},$$

откуда $f(x_n) \to m$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по лемме Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to \alpha \in [a,b]$. В силу непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$. В силу единственности предела $f(\alpha) = m$.

Существование β доказывается аналогично. □

1.4.3. Теоремы о промежуточных значениях

Общий смысл следующих двух теорем состоит в точном выражении интуитивно ясного свойства непрерывных функций на отрезке: принимать вместе с любыми двумя значениями все промежуточные.

Теорема 1.11 (Больцано – Коши). *Если функция $f \in C[a,b]$ и на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, то существует точка $x_0 \in (a,b)$, для которой $f(x_0) = 0$ (рис. 1.4, а).*

Теорема 1.12 (Больцано – Коши). *Если $f \in C[a,b]$, то для любого $y \in [m,M]$ существует $x \in [a,b]$ со свойством $f(x) = y$ (рис. 1.4, б).*

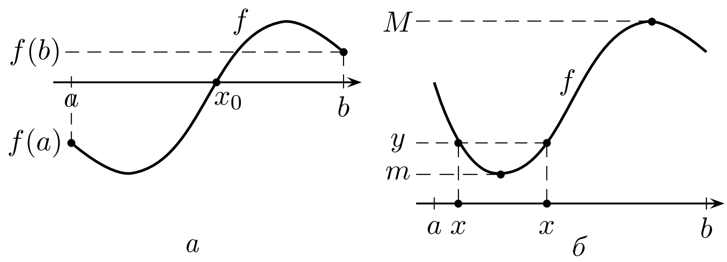

Рис. 1.4

Производная и дифференцируемость, правила дифференцирования. Производная композиции, производная обратной функции.

1.5. Производная и дифференцируемость

1.5.1. Производная и правила ее вычисления

Определение 1.14. *Пусть функция f задана в окрестности точки a. Если существует предел*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{1.7}$$

то он называется производной функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Геометрически выражение под знаком предела равно тангенсу угла наклона между прямой, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $A_h(a+h, f(a+h))$ графика функции f, и осью Ox (рис. 1.5). Таким образом, существование предела (1.7) означает, что указанная прямая при $h \to 0$ стремится занять некоторое предельное положение — прямой, проходящей через точку $(a, f(a))$ на графике функции, с угловым коэффициентом $f'(a)$. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Ее принято называть **касательной** к графику функции f в точке $(a, f(a))$.

Определение 1.15. *Функция f, заданная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(h), \quad h \to 0. \tag{1.8}$$

Теорема 1.13. *Следующие условия равносильны:*

1) *f дифференцируема в точке a;*

2) *существует производная $f'(a)$.*

Если выполнено одно из этих условий, то число A в определении дифференцируемости совпадает с $f'(a)$.

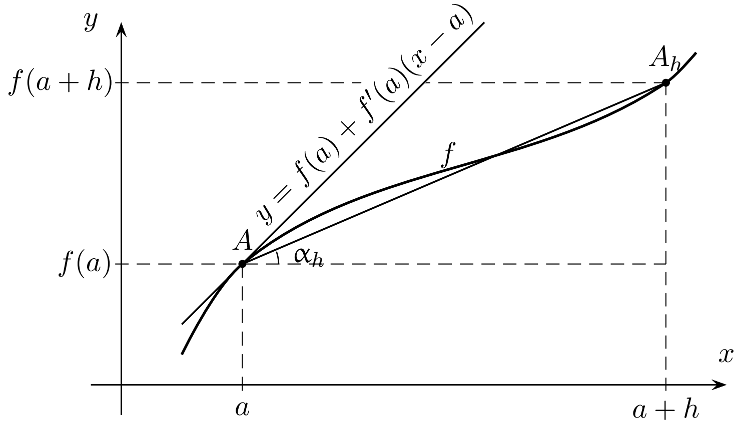

Рис. 1.5

Теорема. Пусть функции $f, g : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции λf, $f+g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при дополнительном условии $g(a) \neq 0$) дифференцируемы в точке a и справедливы равенства

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Теорема 1.14. *Пусть функции $f, g : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции λf, $f+g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при дополнительном условии $g(a) \neq 0$) дифференцируемы в точке a и справедливы равенства*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Теорема 1.15. *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in D_f$, а функция $g : D_g \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем $f(D_f) \subset D_g$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \tag{1.9}$$

Теорема 1.16. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет обратную, непрерывна в некоторой окрестности точки $a \in D$ и дифференцируема в точке $a \in D$, причем $f'(a) \neq 0$.*

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа (о конечных приращениях), Коши (об отношении приращений)

Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

1.5.2. Основные тероемы о дифференцируемых функциях

Определение 1.16. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки a. Тогда a называется точкой*

локального максимума*, если $\exists U_a \quad \forall x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$;*
локального минимума*, если $\exists U_a \quad \forall x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$;*
строгого локального максимума*, если $\exists U_a \quad \forall x \in U_a^\circ \quad f(x) < f(a)$;*
строгого локального минимума*, если $\exists U_a \quad \forall x \in U_a^\circ \quad f(x) > f(a)$.*

Лемма 1.4 (Ферма). *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда если a является точкой экстремума, то $f'(a) = 0$.*

Теорема 1.17 (Ролля). *Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на интервале (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Теорема 1.18 (Лагранжа). *Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{1.10}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 1.17. Поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad \square$$

Геометрически утверждение теоремы 1.18 означает, что на интервале (a, b) найдется такая точка ξ, что касательная к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна отрезку, соединяющему точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика (рис. 1.6).

Теорема 1.19 (Коши). *Пусть функции $f, g \in C[a, b]$ дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.*

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1.11}$$

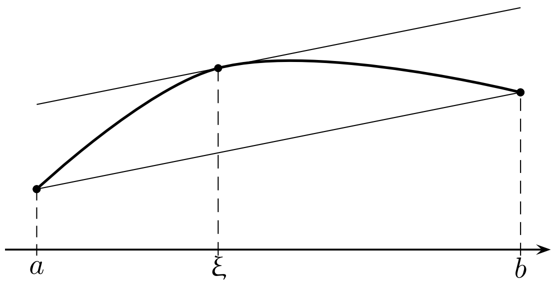

Рис. 1.6

1.5.3. Правила Лопиталя

Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Теорема 1.20 (0/0-правило Лопиталя). *Пусть функции f и g дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, причем $g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0. \tag{1.12}$$

Тогда если существует предел отношения производных в точке a, то в этой точке существует предел отношения функций и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке a равенством $f(a) = g(a) = 0$ и применим к ним теорему 1.19 для каждого $x \in U_a^\circ$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

где $\xi_x \in (a, x)^*$. Так как $\lim\limits_{x \to a} \xi_x = a$, то утверждение следует из теоремы о пределе композиции. □

Теорема 1.21 (∞/∞-правило Лопиталя). *Теорема 1.20 сохраняет силу при замене условия (1.12) на*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty. \tag{1.13}$$

Формула Тейлора с остатками в форме Пеано и Лагранжа

1.5.4. Формула Тейлора

Полином

$$T_n(x, a; f) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \tag{1.14}$$

будем называть (1.14) **полиномом Тейлора** n-го порядка для функции f в точке a.

Для того чтобы записать полином Тейлора n-го порядка, необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (тогда производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ должны существовать в некоторой окрестности точки a).

Разность

$$r_n(x) := f(x) - T_n(x, a\,; f) \tag{1.15}$$

будем называть n-м **остатком Тейлора** для f в точке a.

Теорема 1.22 (остаток Пеано). *Если функция f дифференцируема n раз в точке a, то*

$$r_n(x) = o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a.$$

Теорема 1.23 (остаток Лагранжа). *Если функция $f \in C^n[a, x]^*$ имеет $(n+1)$-ю производную на интервале $(a, x)^*$.*

Тогда для некоторого $\xi \in (a, x)^*$ выполнено

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.16}$$

Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства, критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций

1.6. Интеграл Римана

1.6.1. Определение интеграла

Пусть задан отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, причем $a < b$. Прежде чем ввести понятие интеграла, договоримся о нескольких новых терминах, которые будут использоваться систематически.

Разбиением отрезка называется любой упорядоченный набор различных точек из этого отрезка, включающий его концы (рис. 1.7):

$$\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}. \tag{1.17}$$

Рангом разбиения называется число

$$\lambda = \lambda_\Pi := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1}),$$

характеризующее степень измельчения отрезка при его разбиении.

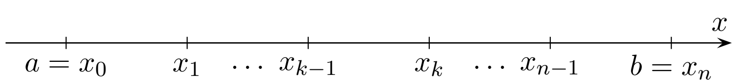

Рис. 1.7. Разбиение

Разбиение Π отрезка $[a,b]$ дает его представление в виде объединения

$$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}\left[x_{k-1},x_{k}\right].$$

Отрезки $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\,\ldots,n$, будем называть **частичными**. Ранг разбиения характеризует степень измельчения отрезка точками разбиения.

Если задано разбиение Π отрезка $[a,b]$ и на каждом частичном отрезке зафиксирована точка

$$\xi_k\in\left[x_{k-1},x_k\right],\quad k=1,\,\ldots,n,$$

то обозначим $\xi=(\xi_1,\,\ldots,\xi_n)$ и пару (Π,ξ) назовем **разбиением с отмеченными точками** (рис. 1.8).

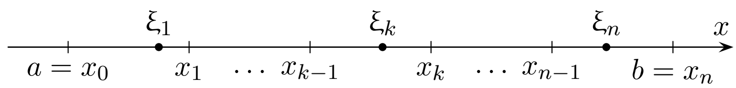

Рис. 1.8. Разбиение с отмеченными точками

Если задана функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и разбиение (Π,ξ) отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками, то сумма

$$s=s\left(\Pi,\xi\right)=s_f\left(\Pi,\xi\right):=\sum_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)\tag{1.18}$$

называется **интегральной суммой** Римана функции f, соответствующей разбиению (Π,ξ) с отмеченными точками.

Определение 1.17. *Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$. Число I называется **пределом интегральных сумм**, если*

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0\quad\forall\,(\Pi,\xi)\quad\lambda_\Pi<\delta\Longrightarrow|s_f(\Pi,\xi)-I|<\varepsilon.\tag{1.19}$$

*Краткая запись этого: $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}s$. Число I называется **определенным интегралом Римана** функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается*

$$I=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f\,dx.\tag{1.20}$$

В случае существования интеграла будем говорить также, что функция f **интегрируема (по Риману)** на $[a,b]$. Класс всех интегрируемых на $[a,b]$ функций обозначим $R[a,b]$.

В обозначении определенного интеграла (1.20) a называется **нижним пределом интегрирования**, b — **верхним пределом интегрирования**, f — **подынтегральной функцией** и $f(x)\,dx$ — **подынтегральным выражением**.

1.6.2. Критерий интегрируемости

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a, b]$.

Определение 1.18. *Если* Π *— произвольное разбиение отрезка* $[a, b]$*, то величины*

$$s_*(\Pi) := \inf_{\xi} s(\Pi, \xi), \quad s^*(\Pi) := \sup_{\xi} s(\Pi, \xi) \tag{1.21}$$

называются соответственно ***нижней*** *и* ***верхней суммами Дарбу*** *для функции* f*, отвечающими заданному разбиению* Π*.*

В определении 1.18 точные грани берутся по всевозможным наборам ξ отмеченных точек. При заданном разбиении Π суммы Дарбу показывают возможную степень разброса интегральных сумм, получаемую за счет свободы в выборе отмеченных точек ξ_k (ниже этому высказыванию будет придан точный смысл). Подчеркнем, что суммы Дарбу определены корректно лишь для ограниченных функций.

Суммы Дарбу можно записать в виде, близком к интегральным суммам:

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right), \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right), \tag{1.22}$$

где

$$m_k := \inf f\left([x_{k-1}, x_k]\right), \quad M_k := \sup f\left([x_{k-1}, x_k]\right). \tag{1.23}$$

Лемма 1.5. *Пусть функция* f *ограничена на* $[a, b]$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого разбиения с отмеченными точками* (Π, ξ) *выполнены неравенства* $s_*(\Pi) \leqslant s(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi)$*;*

2) *если* $\Pi \subset \Pi'$*, то* $s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi')$ *и* $s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi)$*;*

3) *для любых разбиений* Π *и* Π' *выполнены неравенства*

$$s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi'). \tag{1.24}$$

Определение 1.19. *Если* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция, то числа*

$$I_* := \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* := \inf_{\Pi} s^*(\Pi) \tag{1.25}$$

называются соответственно ***нижним*** *и* ***верхним интегралами Дарбу*** *функции* f *на отрезке* $[a, b]$*.*

Лемма 1.6. *Если* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция, то для любых разбиений* Π *и* Π' *выполнены неравенства*

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле

Теорема 1.24 (критерий интегрируемости). *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то следующие условия равносильны:*

1) *f интегрируема на $[a, b]$;*
2) $\lim\limits_{\lambda \to 0} (s^*(\Pi) - s_*(\Pi)) = 0$;
3) $I_* = I^*$.

Теорема 1.25 (классы интегрируемых функций). 1) *Если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

2) *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$.*

3) *Функция, монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$.*

1.6.3. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда определен интеграл с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Лемма 1.7. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда ее интеграл с переменным верхним пределом F имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Теорема 1.26. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то у нее существует первообразная на (a, b). Любая первообразная для f имеет вид*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [a, b],$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство вытекает непосредственно из леммы 1.7 и описания класса первообразных. □

Теорема 1.27 (формула Ньютона – Лейбница). *Если $f \in C[a, b]$, то для любой ее первообразной Φ справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)\Big|_a^b. \tag{1.26}$$

Доказательство. По теореме 1.26 для любой первообразной Φ найдется такая постоянная C, что

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [a,b].$$

Для определения значения C положим $x = a$, тогда $C = \Phi(a)$ и

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \Phi(a), \quad x \in [a,b].$$

Положим здесь $x = b$ и получим (1.26). $\square$

1.6.4. Основные методы интегрирования

Теорема 1.28 (интегрирование по частям). *Если функции u и v непрерывны и имеют непрерывные производные на $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{1.27}$$

Теорема 1.29 (замена переменной). *Пусть функция $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, причем $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция f непрерывна на $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.28}$$

Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов (Коши с корнем, Даламбера, Гаусса)

1.7. Числовые ряды

1.7.1. Основные понятия теории рядов

Если $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ — последовательность чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.29}$$

называют **рядом**.

Чисто формальное восприятие знака суммы в (1.29) означает, что необходимо складывать бесконечное число слагаемых. Такая операция нуждается в дополнительном определении.

С каждым рядом (1.29) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1.30}$$

которые называются его **частичными суммами**.

Определение 1.20. *Ряд (1.29) называется* ***сходящимся****, если сходится последовательность его частичных сумм, т. е. существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае s называется ***суммой ряда*** *и используется запись $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется ***расходящимся****.*

Теорема 1.30 (критерий Коши). *Сходимость ряда (1.29) равносильна условию*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n > m \geqslant N_\varepsilon \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon. \tag{1.31}$$

1.7.2. Признаки сходимости положительных рядов

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0, \tag{1.32}$$

которые будем называть положительными или неотрицательными. Для них сходимость проверяется достаточно просто.

Сходимость ряда (1.32) равносильна ограниченности последовательности частичных сумм сверху, так как эта последовательность возрастает.

Следующие утверждения дают количественные выражения этого принципа.

Теорема 1.31 (признак Коши с корнем). *Если*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} = C, \tag{1.33}$$

то

1) *при $C < 1$ ряд (1.32) сходится;*
2) *при $C > 1$ ряд (1.32) расходится;*
3) *при $C = 1$ признак не работает.*

Теорема 1.32 (признак Даламбера). *Пусть существует предел*

$$D = \lim_{k\to\infty} D_k, \quad D_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Тогда

1) *при $D < 1$ ряд (1.32) сходится;*
2) *при $D > 1$ ряд (1.32) расходится;*
3) *при $D = 1$ признак не работает.*

Теорема 1.33 (признак Гаусса). *Пусть*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^2},$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и θ_k — ограниченная последовательность.

Тогда ряд (1.32)

1) *сходится в случаях $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$;*
2) *расходится в случаях $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \leqslant 1$.*

Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Признаки Дирихле и Абеля

1.7.3. Абсолютная и условная сходимость

Определение 1.21. *Ряд (1.29) называется* ***сходящимся абсолютно****, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| . \tag{1.34}$$

Если ряд (1.29) сходится, а ряд (1.34) расходится, то говорят, что ряд (1.29) ***сходится условно****.*

Из очевидного неравенства

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

и критерия Коши сходимости числовой последовательности (см. (1.31) или теорему 1.8) немедленно вытекает, что из абсолютной сходимости ряда (1.29) следует его сходимость. Обратное утверждение неверно, это показывает ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \tag{1.35}$$

который сходится условно.

Для проверки условной сходимости рядов (см. определение 1.21) исследования поведения одних абсолютных величин слагаемых ряда уже недостаточно. Нужно учитывать распределение знаков у слагаемых. Рассмотрим сходимость рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{1.36}$$

где $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$. Множители b_k будут играть роль знаков.

Теорема 1.34 (признак Дирихле). *Пусть последовательности* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) a_k *монотонно убывает к нулю;*

2) *последовательность* $\sum_{i=1}^{k} b_i$ *ограничена.*

Тогда ряд (1.36) *сходится.*

Доказательство. Сначала докажем вспомогательное тождество. Пусть $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, тогда при $n > m \geqslant 1$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k.$$

Итак, получено тождество

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k, \tag{1.37}$$

которое называется **преобразованием Абеля**.

Переходим к доказательству признака Дирихле. По условию 2) для некоторого числа $M > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $|B_k| \leqslant M$. Поэтому, используя преобразование Абеля (1.37), получим

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k\right| \leqslant a_n \left|B_n\right| + a_{m+1} \left|B_m\right| + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) \left|B_k\right| \leqslant 2M a_{m+1}.$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из критерия Коши сходимости ряда. □

Доказательство показывает также, что при условиях теоремы Дирихле справедливы следующие оценки для остатков ряда (1.36):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant 2M a_{n+1}, \tag{1.38}$$

Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости

где M — число, удовлетворяющее условию $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leqslant M$.

Следующее утверждение, близкое к теореме 1.34, несколько отличается от нее условиями.

Теорема 1.35 (признак Абеля). *Пусть последовательности* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена;*
2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд (1.36) *сходится.*

Доказательство сводится к применению признака Дирихле. Запишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a)\, b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

где $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. К первому ряду справа применима теорема 1.34, а второй сходится по условию. □

1.8. Функциональные последовательности и ряды

Пусть $D \subset \mathbb{R}$ и $f_n : D \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на D. Предположим, что предел существует на D, т. е.

$$\forall\, x \in D \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{\varepsilon,x} \quad \forall\, n \geqslant N_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.39}$$

Это условие называют обычно поточечной сходимостью (на D) последовательности функций f_n..

1.8.1. Определение равномерной сходимости

Рассмотрим понятие, играющее важную роль в различных задачах математического анализа, в частности при изучении вопроса о том, когда предел последовательности функций наследует такие структурные свойства функций последовательности, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Определение 1.22. *Последовательность функций* $\{f_n\}$ *называется* ***сходящейся равномерно*** *на множестве* D *к функции* f*, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{\varepsilon} \quad \forall\, n \geqslant N_{\varepsilon} \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.40}$$

Ряд называется ***сходящимся равномерно*** *на множестве* D*, если этим свойством обладает последовательность его частичных сумм.*

Замена (1.39) на (1.40) означает устранение зависимости $N_{\varepsilon,x}$ от $x \in D$. В какой-то степени это напоминает переход от непрерывности функции в каждой точке множества к ее равномерной непрерывности на этом множестве.

Теорема 1.36 (критерий Коши). *Следующие условия равносильны:*

1) *последовательность функций* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно на множестве* D *к некоторой функции* f*;*

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

1.8.2. Признаки равномерной сходимости рядов

Приведем важнейшие достаточные условия равномерной сходимости ряда, в которых D — произвольное множество.

Теорема 1.37 (признак Вейерштрасса). *Если последовательности чисел* $a_k \geqslant 0$ *и функций* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям*

1) $|f_k(x)| \leqslant a_k$ *(*$x \in D$, $k \in \mathbb{N}$*);*

2) *ряд* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *сходится,*

то ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Теорема 1.38 (признак Дирихле). *Пусть последовательности чисел* a_k *и функций* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_k \downarrow 0$*;*

2) $\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in D \quad \left| \sum\limits_{k=1}^n f_k(x) \right| \leqslant M.$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k f_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Теорема 1.39 (признак Абеля). *Пусть последовательности* $a_k \subset \mathbb{R}$ *и* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена;*

2) *ряд* $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k f_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости рядов Фурье (в точке и равномерной)

1.9. Ряды Фурье

Все рассматриваемые функции будем считать заданными на отрезке $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и продолженными с периодом 2π на все множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Отметим, что свойство непрерывности при таком продолжении может нарушиться, поэтому сейчас вместо класса $C[-\pi, \pi]$ более естественно рассматривать класс

$$C_{2\pi} := \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}, \tag{1.41}$$

элементы которого — 2π-периодические функции, непрерывные на $\mathbb{R}$.

1.9.1. Тригонометрические ряды

Тригонометрическим рядом будем называть ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.42}$$

где a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — некоторые действительные числа, которые называются коэффициентами ряда (1.42).

Если предположить, что ряд (1.42) сходится равномерно на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ (или на любом другом отрезке длины 2π), то его сумма f является непрерывной функцией. Умножая обе части равенства

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

на $\cos nx$ или на $\sin nx$ и интегрируя полученное равенство почленно, получим, что его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.43}$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.44}$$

которые называются **формулами Фурье**.

Ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx, \tag{1.45}$$

коэффициенты которого заданы формулами (1.43), (1.44), можно записать для любой интегрируемой функции $f \in R(\mathbb{T})$, не делая предположений о его сходимости. Этот ряд называется **рядом Фурье** функции f, а числа $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — **коэффициентами Фурье** функции f.

1.9.2. Интегральное представление для частных сумм

Для изучения вопроса о сходимости для ряда Фурье более подробно изучим частные суммы ряда Фурье, которые понимаются как

$$S_n f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \tag{1.46}$$

(под знаком суммы находятся оба слагаемых, но сложилась традиция не ставить скобки, показывающие это). Для начала получим так называемое интегральное представление для сумм (1.46).

Лемма 1.8. *Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(y) D_n(x-y) dy, \tag{1.47}$$

где функция D_n определяется равенством

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}. \tag{1.48}$$

1.9.3. Лемма Римана – Лебега

Введем **интегральный модуль непрерывности** функции $f \in R(\mathbb{T})$:

$$\omega_1(h, f) = \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|\, dx, \quad h \in (0, \pi]. \tag{1.49}$$

Лемма 1.9. *Для любой функции $f \in R(\mathbb{T})$*

$$\lim_{h \to 0} \omega_1(h, f) = 0. \tag{1.50}$$

Далее изучим поведение коэффициентов Фурье.

Лемма 1.10 (Римана – Лебега). *Если $f, g \in R(\mathbb{T})$, то*

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y) g(y) \sin ky\, dy = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y) g(y) \cos ky\, dy = 0$$

равномерно по x.

Доказательство. Докажем утверждение леммы только для синуса, так как для косинуса оно такое же. Отметим очевидное тождество

$$f(x+y)g(y) =$$

$$= \left[f(x+y)g(y) - f\left(x + y + \frac{\pi}{k}\right) g\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \right] + f\left(x + y + \frac{\pi}{k}\right) g\left(y + \frac{\pi}{k}\right).$$

Умножим обе части на $\sin ky$ и проинтегрируем по $y \in \mathbb{T}$. Затем выполним сдвиг переменной во втором слагаемом справа, тогда это слагаемое будет отличаться от левой части проинтегрированного равенства лишь знаком. Таким образом, придем к равенству

$$2\int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left[f(x+y)g(y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\right]\sin ky\,dy.$$

Преобразуем выражение под знаком последнего интеграла с помощью тождества

$$f(x+y)g(y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right) =$$
$$= f(x+y)\left[g(y) - g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\right] + g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\left[f\left(x+y\right) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)\right]$$

и получим неравенство

$$2\left|\int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy\right| \leqslant M_f\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, g\right) + M_g\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, f\right). \tag{1.51}$$

Здесь

$$M_f = \sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|, \quad M_g = \sup_{x\in\mathbb{T}}|g(x)|$$

(напомним, что интегрируемая функция ограничена). Нужное утверждение вытекает теперь из леммы 1.9. $\square$

Отметим, что если в неравенстве (1.51) (и аналогичном неравенстве с косинусом) положить $f(x) \equiv 1$, то получим оценки для коэффициентов Фурье:

$$|a_k(g)|, |b_k(g)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, g\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.52}$$

1.9.4. Принцип локализации

Покажем, что сходимость ряда Фурье является локальным свойством функции. Более того, сходимость или расходимость ряда Фурье в некоторой точке определяется лишь поведением функции f в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Теорема 1.40 (принцип локализации Римана). *Если $f \in R(\mathbb{T})$, то для любого фиксированного $\delta > 0$*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x), \tag{1.53}$$

где ε_n *сходится к нулю равномерно по* $x \in \mathbb{T}$ *при* $n \to \infty$.

В частности, если две функции совпадают на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{T}$*, то ряд Фурье их разности сходится к нулю равномерно на любом отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$.

1.9.5. Условия сходимости ряда Фурье в точке

Для краткости введем следующее обозначение для функции

$$\varphi_x(y) := f(x+y) + f(x-y) - 2s, \quad y \in \mathbb{T}, \tag{1.54}$$

которое будет использоваться ниже. В качестве числа s чаще всего выбирается $c = f(x)$.

Теорема 1.41 (признак Дини). *Пусть* $f \in R(\mathbb{T})$ *и* $x \in \mathbb{T}$. *Если несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^\pi \frac{|\varphi_x(y)|}{y}\, dy \tag{1.55}$$

сходится, то ряд Фурье функции f *в точке* x *сходится к* s.

Условию (1.55) можно придать другую форму. Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{T}$. Доказать, что условие (1.55) выполнено в каждом из следующих случаев:

1) при некотором $a > 0$ выполнено

$$\varphi_x(y) = O\left(\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{-1-a}\right) \quad \text{при} \quad y \to 0;$$

2) при некотором $a > 0$ выполнено $\varphi_x(y) = O\left(|y|^a\right)$ при $y \to +0$;

3) интеграл $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left|\dfrac{f(x+y)-s}{y}\right| dy$ сходится;

4) при некотором $a > 0$ выполнено

$$f(x+y) - s = O\left(\left(\ln\frac{1}{|y|}\right)^{-1-a}\right) \quad \text{при} \quad y \to 0;$$

5) при некотором $a > 0$ выполнено $f(x+y) - s = O\left(|y|^a\right)$ при $y \to 0$.

Пусть

$$\omega(y, f) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| < y\}$$

— модуль непрерывности функции f. Условие $\omega(y, f) \to 0$ при $y \to +0$ выполнено для любой функции $f \in C_{2\pi}$. Однако не для любой функции $f \in C_{2\pi}$ ряд Фурье сходится во всех точках. Для того, чтобы обеспечить равномерную сходимость ряда Фурье нужно потребовать, чтобы $\omega(y, f)$ стремился к нулю с определенной скоростью.

Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости рядов Фурье (в точке и равномерной)

Теорема 1.42 (признак Дини – Липшица). *Пусть $f \in C_{2\pi}$ и*

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(y, f)}{y}\, dy < \infty, \tag{1.56}$$

то ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{T}$.

1.10. Дифференцирование функций многих переменных

1.10.1. Евклидовы пространства

Определение 1.23. *Если $d \in \mathbb{N}$, то d-**мерным евклидовым пространством** называется множество*

$$\mathbb{R}^d := \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, d\} \tag{1.57}$$

всех упорядоченных наборов из d действительных чисел, являющееся векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно операций

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)\,, \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d)\,.$$

Конечно, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ в случае $d = 1$.

Евклидово пространство является нормированным, если норму ввести следующим равенством:

$$|x| := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{1/2}. \tag{1.58}$$

Определение 1.24. *Набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^d$, где*

$$(e_i)_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = k, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq k, \end{cases}$$

*называется **стандартным базисом** в $\mathbb{R}^d$.*

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^d$ однозначно представим в виде линейной комбинации элементов базиса

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k. \tag{1.59}$$

Линейные отображения $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ будем называть **линейными формами** на $\mathbb{R}^d$ и множество всех таких линейных форм обозначать $L(\mathbb{R}^d)$. Общий вид элемента $A \in L(\mathbb{R}^d)$ такой:

$$A = \sum_{k=1}^{d} c_k \pi_k,$$

где линейное отображение π_k определяется равенством

$$\pi_k(x) = x_k, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.60}$$

и называется k-й **проекцией** (проекцией на k-ю координату).

1.10.2. Производные

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 1.25. *Функция f **дифференцируема** в точке a, если существует такое $A \in L(\mathbb{R}^d)$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{1.61}$$

*Отображение A называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Определение 1.26. *Если $1 \leqslant k \leqslant d$, то предел (рис. 1.9)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} \tag{1.62}$$

*называется **частной производной** функции f по k-й координате.*

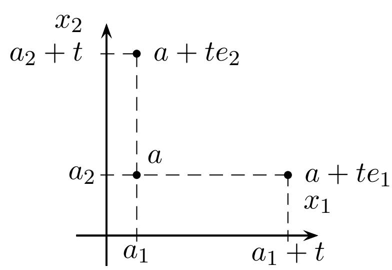

Рис. 1.9

Проще говоря, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ — производная функции f по k-й переменной x_k в точке a_k при фиксированных значениях $x_i = a_i$, $i \neq k$ (понимаемая как обычная производная функции одной переменной).

Для частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ могут еще использоваться обозначения $D_k f(a)$ или $f'_{x_k}(a)$.

1.10.3. Производные по направлению и градиент

Определение 1.27. *Пусть задан $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$ единичный вектор (рис. 1.10). **Производной по направлению** v функции f в точке a называется*

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}. \tag{1.63}$$

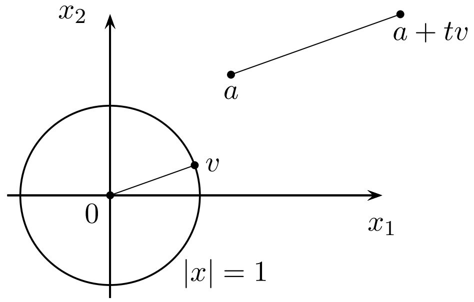

Рис. 1.10

Определение 1.28. *Если функция f имеет в точке a все частные производные, то вектор*

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right) \tag{1.64}$$

*называется **градиентом** этой функции в точке a.*

Если функция f дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке производную по любому направлению v и

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)v = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) v_k. \tag{1.65}$$

Равенство (1.65) можно переписать в терминах градиента

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (\nabla f(a), v)\,. \tag{1.66}$$

Следующая лемма раскрывает геометрический смысл градиента.

Лемма 1.11. *Пусть функция f имеет в точке a производную по любому направлению и $v_0 = \nabla f(a) \, |\nabla f(a)|^{-1}$. Тогда*

$$D_{v_0} f(a) = \sup_{|v|=1} D_v f(a) = |\nabla f(a)|\,. \tag{1.67}$$

1.10.4. Производные высших порядков

Определение 1.29. *Пусть задан набор* $\{i_l\}_{l=1}^n$, $1 \leqslant i_l \leqslant d$. ***Частная производная*** *функции* f *в точке* a *порядка* n *по переменным* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ *определяется индуктивно:*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right)(a), \tag{1.68}$$

при этом предполагается, что все предыдущие производные $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}}(x)$, $j = 1, \ldots, n-1$, *существуют в некоторой окрестности точки* a.

Частная производная зависит, вообще говоря, от порядка, в котором выполняется дифференцирование, т. е. от порядка индексов в наборе $\{i_j\}_{j=1}^n$.

Теорема 1.43 (Шварца). *Пусть* $1 \leqslant i, j \leqslant d$ *и для функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *в некоторой окрестности точки* $a \in \operatorname{int} D$ *существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, *причем две последние непрерывны в точке* a. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума функции

1.10.5. Экстремумы

Определение 1.30. *Пусть функция* f *задана в некоторой окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^d$. *Тогда* a *называется точкой*

локального максимума, *если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$;

локального минимума, *если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$;

строгого локального максимума, *если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < f(a)$;

строгого локального минимума, *если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) > f(a)$.

Общее название для всех видов максимума и минимума — **экстремумы**.

Следующая лемма дает необходимые условия экстремума и аналогична лемме Ферма (см. лемму 1.4).

Лемма 1.12. *Пусть функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *и* $a \in \operatorname{int} D$ *— точка локального экстремума. Тогда*

1) *если* f *имеет производную* $D_v f(a)$ *по некоторому направлению* v, $|v| = 1$, *то* $D_v f(a) = 0$;

2) *если* f *дифференцируема в точке* a, *то* $\nabla f(a) = 0$ *и* $f'(a) = 0$.

Для получения достаточных условий рассмотрим квадратичную форму:

$$Q_{f,a}(h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^d. \tag{1.69}$$

Теорема 1.44 (достаточное условие экстремума). *Пусть a — стационарная точка функции $f \in C^2(U_a)$. Тогда*

1) *если форма $Q_{f,a}$ отрицательно определена, то a — точка строгого максимума;*

2) *если форма $Q_{f,a}$ положительно определена, то a — точка строгого минимума;*

3) *если $Q_{f,a}$ не является знакоопределенной, то a — не точка экстремума.*

Проверку знакопостоянства квадратичной формы можно провести с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.45 (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$.*

Квадратичная форма Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$.

Здесь Δ_i — главные миноры матрицы квадратичной формы — определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

1.11. Векторные функции

Теоремы о неявной и обратной функциях, условия их дифференцируемости и формулы для производных

1.11.1. Дифференцируемые отображения

Введем обозначение $L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ для множества всех линейных отображений из $\mathbb{R}^{d_0}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$.

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$. Для $k = 1, \ldots, d_1$ будем стандартно обозначать

$$f_k = \pi_k \circ f \tag{1.70}$$

и называть f_k k-й **компонентой** (координатной функцией) функции f.

Определение 1.31. *Функция f называется* ***дифференцируемой*** *в точке $a \in \operatorname{int} D$, если существует такое $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{1.71}$$

Отображение $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ называется ***производной*** *функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Определение 1.32. ***Матрицей Якоби*** *функции f, дифференцируемой в точке $a \in \operatorname{int} D_f$, называется матрица ее производной $f'(a)$:*

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i=1,\dots,d_1, j=1,\dots,d_0}.$$

Если $d_0 = d_1$, то матрица Якоби является квадратной, в этом случае ее определитель называется ***якобианом*** *(определителем Якоби) для f в точке a и обозначается $\mathbf{J}f(a)$.*

1.11.2. Теорема об обратной функции

Теорема 1.46. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $a \in G$ и функция $f : G \to \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^1(G)$ и*

$$\mathbf{J}f(a) \neq 0. \tag{1.72}$$

Тогда существует окрестность U точки a со следующими свойствами:
1) *$f|_U$ — биекция;*
2) *$V = f(U)$ — открытое множество;*
3) *$f^{-1} \in C^1(V)$ и для любого $y \in V$*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\right)^{-1}(x), \qquad \text{где} \qquad x = f^{-1}(y). \tag{1.73}$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.46 носит локальный характер: оно справедливо в некоторой окрестности точки a. По аналогии с одномерным случаем, где соответствующее утверждение имело глобальный характер может создаться впечатление, что, налагая ограничение (1.72) на всей области G, можно утверждать существование обратной функции на образе $f(G)$.

Следующий пример показывает, что это не так. Для функции

$$f(x,y) = \left(e^x \cos y, e^x \sin y\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

якобиан

$$\mathbf{J}f(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

невырожден на всем $\mathbb{R}^2$. В то же время эта функция не является глобально взаимно однозначной.

1.11.3. Теорема о неявной функции

Если $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, $y \in \mathbb{R}^{d_1}$, то через (x, y) будем обозначать $(d_0 + d_1)$-мерный вектор $(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1})$. Рассмотрим векторное уравнение относительно y:

$$f(x, y) = 0, \tag{1.74}$$

где f — отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$. Это векторное уравнение равносильно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1}) = 0, \\ \cdots \\ f_{d_1}(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1}) = 0 \end{cases} \tag{1.75}$$

относительно $y_1, \ldots, y_{d_1}$.

Ниже будет использоваться определитель

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_{d_1})}{\partial (y_1, \ldots, y_{d_1})}(x, y) := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{d_1}}(x, y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_{d_1}}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Будем его называть якобианом функций $f_1, \ldots, f_{d_1}$ по переменным $y_1, \ldots, y_{d_1}$ в точке (x, y).

Теорема 1.47. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ — открытое множество, функция $f : G \to \mathbb{R}^{d_1}$ принадлежит классу $C^1(G)$ и для некоторой точки $(a, b) \in G$*

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial (f_1, \ldots, f_{d_1})}{\partial (y_1, \ldots, y_{d_1})}(a, b) \neq 0. \tag{1.76}$$

Тогда существуют окрестности U_a точки a и V_b точки b, удовлетворяющие следующим условиям:

1) *для любого $x \in U_a$ существует единственная точка $y = g(x) \in V_b$, для которой $f(x, g(x)) = 0$;*

2) *отображение $g : U_a \to V_b$ принадлежит классу $C^1(U_a)$.*

Производную и частные производные неявной функции можно найти, применяя правило дифференцирования композиции (производная композиции равна композиции производных) к равенству $f(x, g(x)) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d_1} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_k} \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \\ \\ i = 1, \ldots, d_1, \quad j = 1, \ldots, d_0. \end{cases} \tag{1.77}$$

Из этой системы уравнений можно определить частные производные компонент неявной функции $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_j}$.

Мера Жордана в Rn и ее свойства: монотонность, аддитивность, субад-дитивность

1.12. Мера Жордана

1.12.1. Мера сегмента

Напомним, что d-мерным сегментом (порожденным парой $a \in \mathbb{R}^d$ и $b \in \mathbb{R}^d$) называется множество

$$\overline{I} = \overline{I}_{a,b} = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \quad k = 1, \ldots, d\Big\}.$$

Пустое множество также будем считать сегментом.

Два сегмента $\overline{I}$ и $\overline{J}$ будем называть **неналегающими**, если их внутренности не пересекаются, т. е. $I \cap J = \varnothing$. Конечный набор сегментов называется **дизъюнктным**, если любые два из них являются неналегающими.

Определение 1.33. ***Мерой сегмента*** $\overline{I} = \overline{I}_{a,b}$ *называется число*

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k), \quad \mu(\varnothing) = 0. \tag{1.78}$$

1.12.2. Фигура и ее мера

Определение 1.34. ***Фигурой*** *или элементарным множеством будем называть любое конечное объединение сегментов (рис. 1.11).*

Класс всех фигур обозначим $\mathcal{F}$.

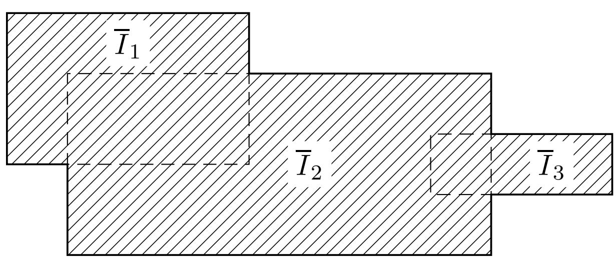

Рис. 1.11. Фигура

Ясно, что любой сегмент является фигурой, в частности, $\varnothing \in \mathcal{F}$.

Термин «неналегающий» и «дизъюнктный» мы будем использовать и для фигур.

Для любой фигуры $X \in \mathcal{F}$ существует дизъюнктное разложение

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i.$$

Определение 1.35. ***Мерой фигуры*** *$X \in \mathcal{F}$ называется*

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right),$$

где $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i$ — любое дизъюнктное разложение фигуры X.

Мера фигуры не зависит от выбора ее дизъюнктного разложения.

1.12.3. Мера Жордана

Определение 1.36. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда величины (рис. 1.12)*

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(X) : X \subset E, \quad X \in \mathcal{F}\}, \tag{1.79}$$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(Y) : E \subset Y, \quad Y \in \mathcal{F}\}, \tag{1.80}$$

называются соответственно ***внутренней и внешней мерами Жордана*** *для E.*

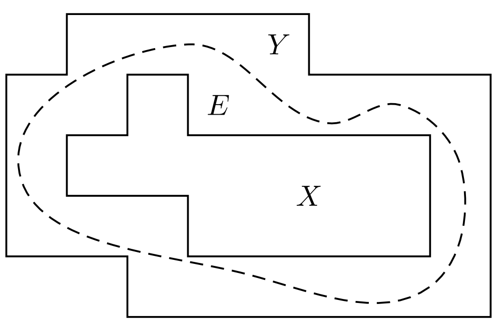

Рис. 1.12. К определению внутренней и внешней меры

Определение 1.37. *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***измеримым по Жордану****, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. В таком случае общее значение внутренней и внешней мер множества называется* ***мерой Жордана*** *и обозначается*

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Интеграл Римана в Rn и его свойства. Сведение интеграла к повторному (теорема Фубини), замена переменной в кратном интеграле

Теорема 1.48 (критерий измеримости). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *E измеримо;*
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists X \subset E \subset Y \quad \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$;
3) $\mu(\partial E) = 0$.

Теорема 1.49 (свойства меры Жордана). 1) *Для любого конечного набора измеримых множеств $\{E_k\}_{k=1}^n$*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \textit{(субаддитивность).}$$

2) *Если множества $E_1, \ldots, E_n$ измеримы и попарно не пересекаются, то*

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \textit{(аддитивность).}$$

3) *Если множества E_1, E_2 измеримы и $E_1 \subset E_2$, то $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$ (монотонность).*

1.13. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$

1.13.1. Определение интеграла Римана

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество, причем $\mu(E) > 0$. Система непустых множеств $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется **разбиением множества** E, если выполнены следующие условия:

1) E_k измеримы и $\mu(E_k) > 0$, $k = 1, \ldots, n$;
2) $E_k \cap E_i = \varnothing$ при $k \neq i$;
3) $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$.

Число

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{diam} E_k$$

называется **рангом разбиения** Π.

Если для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксировать точку $\xi_k \in E_k$ и обозначить набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то пара (Π, ξ) называется **разбиением множества E с отмеченными точками**.

Если на множестве E задана функция f, то для любого разбиения (Π, ξ) с отмеченными точками определим **интегральную сумму** (Римана), соответствующую разбиению (Π, ξ):

$$s = s(\Pi, \xi) = s_f(\Pi, \xi, E) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \mu(E_k). \tag{1.81}$$

Определение 1.38. *Будем говорить, что число* I *является* ***пределом интегральных сумм****, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,(\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{1.82}$$

Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$.

Если такой предел существует, то он называется ***интегралом Римана*** *функции* f *по множеству* E *и обозначается*

$$I = \int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E f\,d\mu. \tag{1.83}$$

В этом случае говорим также, что функция f ***интегрируема по Риману*** *на* E*. Класс всех интегрируемых на* E *функций обозначим* $R(E)$*.*

Удобно дополнить определение 1.38 таким соглашением: если $\mu(E) = 0$, то положим

$$\int\limits_E f\,dx = 0.$$

1.13.2. Свойства интеграла

Теорема 1.50 (свойства интеграла). 1) *Если* $\mu\,(E) = 0$*, то на* E *интегрируема любая функция и* $\int\limits_E f\,dx = 0$*.*

2) *Если* E *измеримо по Жордану, то* $\int\limits_E dx = \mu\,(E)$*.*

3) *Если* $f \in R(E)$ *и* $A \subset E$ *— измеримое по Жордану подмножество, то* $f \in R(A)$*.*

4) *Если функция* f *интегрируема на каждом из множеств* E_1 *и* E_2*,* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$*, то она интегрируема на* $E_1 \sqcup E_2$ *и*

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f\,dx = \int\limits_{E_1} f\,dx + \int\limits_{E_2} f\,dx.$$

5) *Пусть функции* f *и* g *заданы на множестве* E*, измеримом по Жордану, и жорданова мера множества* $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ *равна нулю. Тогда если* $f \in R(E)$*, то* $g \in R(E)$ *и их интегралы Римана совпадают.*

6) *Если функции* $f, g \in R(E)$*, то* $fg \in R(E)$*, кроме того, при* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *линейная комбинация* $\alpha f + \beta g \in R(E)$ *и*

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int\limits_E f\,dx + \beta \int\limits_E g\,dx.$$

7) *Если* $f, g \in R(E)$ *и* $f(x) \leqslant g(x)$ *на* E, *то*

$$\int\limits_E f\,dx \leqslant \int\limits_E g\,dx.$$

8) *Если* $f \in R(E)$, *то* $|f| \in R(E)$ *и*

$$\left|\int\limits_E f\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f|\;dx.$$

9) *Если* $f \in R(E)$ *и* $M = \sup f(E)$, $m = \inf f(E)$, *то*

$$m\mu\,(E) \leqslant \int\limits_E f\,dx \leqslant M\mu\,(E)\,.$$

1.13.3. Теорема Фубини

Для того чтобы отличать меры для разных пространств $\mathbb{R}^d$, будем писать в случае необходимости μ_d вместо μ.

Теорема 1.51. *Если множества* $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ *измеримы по Жордану, то* $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ *также измеримо по Жордану и*

$$\mu_{d_1+d_2}\,(E_1 \times E_2) = \mu_{d_1}(E_1) \cdot \mu_{d_2}(E_2). \tag{1.84}$$

Точки из $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ будем записывать в виде (x, y), где $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Теорема 1.52. *Если множества* $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$, *измеримы по Жордану и функция* f *равномерно непрерывна на* $E_1 \times E_2$, *то*

$$\int\limits_{E_1\times E_2} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{E_2}\left(\int\limits_{E_1} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Следствие 1.1. *Если* $f \in C(I)$, *где* $I = \prod_{k=1}^{d}\,[a_k, b_k]$, *то*

$$\int\limits_I f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1}\cdots\int\limits_{a_d}^{b_d} f(x)\,dx_d \ldots\, dx_1.$$

1.13.4. Замена переменной в интеграле Римана

Определение 1.39. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^d$ *— открытое множество. Функция* $f : G \to \mathbb{R}^d$ *называется* ***диффеоморфизмом*** *на* G, *если*

1) $f \in C^1(G)$;
2) f *— биекция;*
3) $f^{-1} \in C^1\,(f(G))$.

Напомним, что $\mathbf{J}f(a)$ обозначает определитель матрицы Якоби дифференцируемой функции (см. (1.32)). Отметим, что якобиан $\mathbf{J}f(x)$ диффеоморфизма отличен от нуля для любого $x \in G$.

Теорема 1.53 (замена переменной). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм, $f \in C(\varphi(G))$.*

Тогда для любого измеримого по Жордану компакта $K \subset G$ его образ $\varphi(K)$ измерим по Жордану и справедливо равенство

$$\int\limits_{\varphi(K)} f\,dx = \int\limits_K (f \circ \varphi) \cdot |\mathbf{J}\varphi|\,dt. \tag{1.85}$$

Криволинейные интегралы и их основные свойства. Формула Грина

1.14. Криволинейные интегралы. Формула Грина

1.14.1. Жордановы кривые и контуры

Мы ограничиваемся для упрощения записей рассмотрением кривых на плоскости

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Определение 1.40. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется* ***кривой****, если существует непрерывная функция $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, для которой*

$$\Gamma = \gamma\left([\alpha, \beta]\right).$$

Отображение γ называется ***параметризацией*** *кривой.*

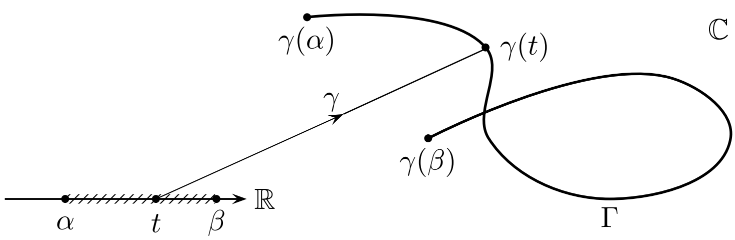

Рис. 1.13. Кривая и ее параметризация

Точки $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\beta)$ называются **концами** кривой Γ. В этом случае также говорят, что кривая Γ соединяет точки $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\beta)$.

Определение 1.41. *Кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется* ***жордановой****, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.*

Для жорданой кривой точки «самопересечения» (как на рис. 1.13) невозможны.

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — жорданова кривая и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ — ее параметризация, то для любого разбиения

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$$

ее области определения положим

$$l(\Pi) := \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \,.$$

Геометрический смысл $l(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в кривую Γ в точках $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, n$ (см. рис. 1.14).

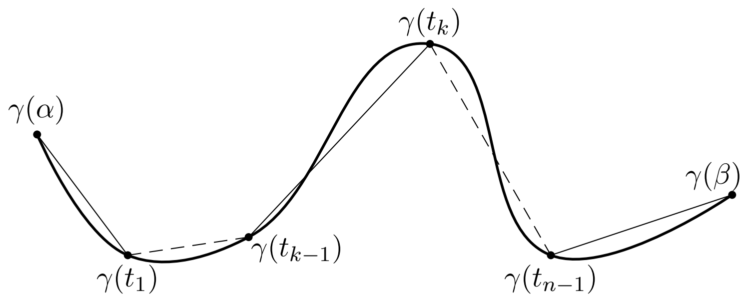

Рис. 1.14. Ломаная, вписанная в кривую

Определение 1.42. *Если множество $\{l(\Pi)\}$ ограничено, то жорданова кривая Γ называется* ***спрямляемой****. В таком случае* ***длиной кривой*** *называется число*

$$l_\Gamma := \sup_\Pi l(\Pi).$$

Задать **ориентацию** жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется **ориентированной**. Другими словами, задание ориентации кривой задает направление ее обхода.

Определение 1.43. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется* ***контуром*** *(замкнутой жордановой кривой) в $\mathbb{R}^2$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{R}^2$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$ — единичная окружность).*

Если γ — функция из определения 1.43 и $\eta(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, то композиция $\gamma \circ \eta : [0, 2\pi) \to \Gamma$ называется **параметризацией** контура Γ.

Длина контура определяется точно так же, как и для жордановой кривой в определении 1.42.

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — контур, то ориентацию его можно задать «порядком прохождения» трех его точек

$$x^1 \to x^2 \to x^3 \to x^1 \quad \text{или} \quad x^1 \to x^3 \to x^2 \to x^1 + .$$

Одну из ориентаций можно назвать положительной, а другую — отрицательной.

Принято в качестве **положительной** выбирать ту, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»). Положительно и отрицательно ориентированный контур Γ будем обозначать соответственно Γ^+ и Γ^-.

1.14.2. Определение интеграла Стилтьеса

Пусть заданы две функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Зададим разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$, введем его ранг

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})$$

(см. определение 1.17). На каждом частичном отрезке отметим точки

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, n,$$

и составим **интегральные суммы Стилтьеса**:

$$s = s(\Pi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right].$$

Определение 1.44. *Число $I \in \mathbb{R}$ называется **пределом интегральных сумм Стилтьеса**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

*Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s(\Pi, \xi)$. Если этот предел существует, то он называется **интегралом Стилтьеса** функции f по функции g на $[a, b]$ и обозначается*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^b f\, dg.$$

В частном случае $g(x) = x$, конечно, получим интеграл Римана, изученный ранее.

Следующая теорема показывает, что при достаточно широких условиях интеграл Стилтьеса можно вычислять как интеграл Римана.

Теорема 1.54. *Если $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f\,dg$ существует и*

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

1.14.3. Криволинейные интегралы

Определение 1.45. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая или контур, $f \in C(\Gamma)$, то* ***криволинейным интегралом первого рода*** *от f по Γ называется интеграл Стилтьеса*

$$\oint\limits_\Gamma f\,dl = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \gamma)\,dl,$$

где $\gamma : [\alpha,\beta] \to \Gamma$ — параметризация кривой Γ и $t \mapsto l_\gamma[\alpha,t]$ — функция длины, т.е. длина части кривой Γ от точки $\gamma(\alpha)$ до точки $\gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$.

Определение 1.46. *Если Γ — спрямляемая ориентированная жорданова кривая или контур, $f \in C(\Gamma,\mathbb{R}^2)$, то криволинейным* ***интегралом второго рода*** *от функции f по Γ называется*

$$\oint\limits_\Gamma f\,dx = \int\limits_\alpha^\beta (f_1 \circ \gamma)\,d\gamma_1 + \int\limits_\alpha^\beta (f_2 \circ \gamma)\,d\gamma_2$$

где $\gamma : [\alpha,\beta] \to \Gamma$ — параметризация кривой Γ, сохраняющая ориентацию.

1.14.4. Формула Грина

Теорема 1.55 (формула Грина). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $D \subset G$ — компакт, граница которого ∂D — спрямляемый контур. Пусть также задана функция $f \in C^1\left(G,\mathbb{R}^2\right)$.*

Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \oint\limits_{(\partial D)^+} f\,dx, \tag{1.86}$$

где $(\partial D)^+$ — положительно ориентированная граница D.

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений