Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра теории функций

В.Г.Кротов

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ТФКП

Минск 2021

Оглавление

Глава 1

Теория функций комплексного переменного

Производная от функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана

1.1. Производная и ее геометрический смысл

Определение 1.1. *Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует конечный предел*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется ***производной*** *функции f в точке z_0.*

Если ввести обозначения

$$h = z - z_0, \quad \alpha(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0),$$

то условие существования производной легко переписать в виде

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \alpha(h), \quad \text{где} \quad \alpha(h) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Определение 1.2. *Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-****дифференцируемой***[1] *в этой точке, если существует такое комплексное число $D \in \mathbb{C}$, что*

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Dh + o(h), \quad h \to 0. \tag{1.1}$$

Таким образом, замечание перед этим определением говорит нам о том, что существование производной функции f в точке z_0 равносильно ее $\mathbb{C}$-дифференцируемости в этой точке. При этом число D в определении 1.2 совпадает с $f'(z_0)$.

[1] Мы используем этот термин для того, чтобы отличить рассматриваемое понятие дифференцируемости от того, которое рассматривается в действительном анализе (на последнее мы будем ссылаться как на $\mathbb{R}$-дифференцирование).

1.1.1. Геометрический смысл аргумента производной

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее гладкая параметризация, то, исходя из уравнения

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)},$$

уравнение касательной к Γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ можно записать в виде

$$z = z_0 + t(\cos \arg \gamma'(t_0) + i \sin \arg \gamma'(t_0)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом $\arg \gamma'(t_0)$ — **угловой коэффициент касательной**.

Пусть задана функция $f \in C(G)$ ($G \subset \mathbb{C}$ — область), которая дифференцируема в точке $z_0 \in G$, причем $f'(z_0) \neq 0$. Проведем через z_0 гладкую жорданову кривую Γ и пусть $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $z_0 = \gamma(t_0)$. Тогда ее образ $f(\Gamma)$ — кривая с параметризацией $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

В силу правила дифференцирования композиции справедливо равенство

$$\arg \widetilde{\gamma}'(t_0) = \arg(f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0) \tag{1.2}$$

или

$$\arg \widetilde{\gamma}'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) = \arg f'(z_0).$$

Возьмем теперь две гладкие жордановы кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0 с параметризациями γ_1 и γ_2 (можно считать, что $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$). Под действием функции f они отобразятся в кривые $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ с параметризациями $\widetilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ и $\widetilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ соответственно. Вычисляя угловые коэффициенты касательных к этим кривым в точке z_0 с помощью равенства (1.2) находим, что

$$\arg \widetilde{\gamma}_1{}'(t_0) - \arg \widetilde{\gamma}_2{}'(t_0) = \arg \gamma_1'(t_0) - \arg \gamma_2'(t_0).$$

Это означает, что угол между касательными в точке z_0 к образам $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ кривых Γ_1 и Γ_2 равен углу между прообразами (как по величине, так и по направлению отсчета).

Таким образом, мы приходим к пониманию геометрического смысла аргумента производной функции $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который поворачиваются касательные к кривым в точке z_0 после отображения с помощью функции непрерывной функции f, имеющей в точке z_0 отличную от нуля производную.

1.1.2. Геометрический смысл модуля производной

Смысл модуля производной легко усмотреть из равенства

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Если модуль $|z - z_0|$ мал, то

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|.$$

Таким образом, модуль производной $|f'(z_0)|$ — это предельный коэффициент гомотетии, показывающий насколько изменяется расстояние между образами точек z и z_0 (при малых $|z - z_0|$) при отображении f.

1.1.3. Условия Коши–Римана

Запишем значения функции f в алгебраической записи

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy. \tag{1.3}$$

Запись (1.3) будет систематически использоваться ниже.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы функция f была $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы действительная $u = \operatorname{Re} f$ и мнимая $v = \operatorname{Im} f$ части были $\mathbb{R}$-дифференцируемы, и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.4}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.5}$$

Определение 1.3. *Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется **аналитической** в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.*

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

Элементарные аналитические функции (экспоненциальная, логарифмическая, степенная, тригонометрические и гиперболические и обратные к ним)

1.2. Элементарные аналитические функции

1.2.1. Экспоненциальная функция

Определение 1.4. *Для* $z \in \mathbb{C}$ *положим*[2]

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

В частности, при $x = 0$ мы получаем **формулу Эйлера**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

которая приводит к **экспоненциальной форме** записи комплексных чисел

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}. \tag{1.7}$$

Запишем действительную и мнимую части для e^z

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Они имеют частные производные любого порядка. В частности, непосредственное вычисление дает нам равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

которые показывают, что условия Коши-Римана (1.4) выполнены, поэтому по теореме 1.1 функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости, то есть целой. Кроме того, из соотношений (1.5) следует, что

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x e^{iy}) = e^{iy} e^x = e^z.$$

Так как очевидно, что $\left|e^{iy}\right| = 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то $|e^z| = e^x \neq 0$. Следовательно, экспоненциальная функция осуществляет конформное отображение в любой точке $z \in \mathbb{C}$.

Важнейшее свойство экспоненциальной функции

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \tag{1.8}$$

[2]Иногда мы пишем $\exp z$ вместо e^z.

известное нам для действительных значений $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, остается справедливым и для любых комплексных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$e^{z+2\pi ik} = e^x[\cos(y + 2\pi ik) + i\sin(y + 2\pi ik)] = e^z,$$

поэтому $w = 2\pi ik$ является периодом экспоненциальной функции. Обратно, если w — период, то есть $e^{z+w} = e^z$ для любого z, то при $z = 0$ получаем $e^w = 1$, отсюда $w = 2\pi ik$. Таким образом мы описали множество всех периодов функции e^z, это $\{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$. Простейший ненулевой период $2\pi i$ называется **основным периодом** экспоненциальной функции.

1.2.2. Тригонометрические и гиперболические функции

Из формулы Эйлера (1.6) следует, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}.$$

Это дает нам возможность распространить определения синуса и косинуса на комплексные значения аргумента.

Определение 1.5. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{1.9}$$

*Эти функции называются **синусом** и **косинусом** соответственно.*

С помощью синуса и косинуса вводится еще одна пара тригонометрических функций — тангенс и котангенс.

Определение 1.6. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Эти функции называются **тангенсом** и **котангенсом** соответственно.*

С тригонометрическими функциями тесно связаны так называемые гиперболические функции.

Определение 1.7. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

*Эти функции называются соответственно **гиперболическими синусом** и **косинусом**.*

1.2.3. Логарифмическая функция

Здесь мы впервые столкнемся с многозначной функцией. Для любого $w \neq 0$ множеством решений уравнения $e^z = w$ является

$$\{\ln|w| + i(2\pi k + \arg w) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w. \tag{1.10}$$

Определение 1.8. ***Логарифмической*** *(с основанием e) называется многозначная функция*

$$\mathrm{Ln}\,z = \{\ln|z| + i(2\pi k + \arg z) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z.$$

Главным значением *логарифма называется*

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Для любого значения $\mathrm{Ln}\,z$ справедливы равенства $e^{\mathrm{Ln}\,z} = z$ (при $z \neq 0$) и $\mathrm{Ln}\,e^z = z$. Это показывает, что логарифмическая функция является в некотором смысле обратной к экспоненциальной. Хотя в обычном понимании термина «обратная функция» это не так, потому что экспоненциальная функция не является взаимно однозначной.

В силу основного свойства экспоненциальной функции (1.8) справедливы равенства

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

и

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2,$$

если последнее равенство понимать как совпадение множества слева и множества сумм элементов из слагаемых справа.

Выделение однозначной ветви логарифмической функции можно произвести, рассматривая сужение экспоненциальной функции, на какое-либо множество ее однолистности, к примеру на полосу

$$S(a,k) = \{z \in \mathbb{C} : a + (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\,z \leqslant a + (2k+1)\pi\}.$$

Однако можно поступить другим способом. Зафиксируем числа $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$, задавая тем самым значение логарифмической функции

$$\ln_k z_0 = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi k).$$

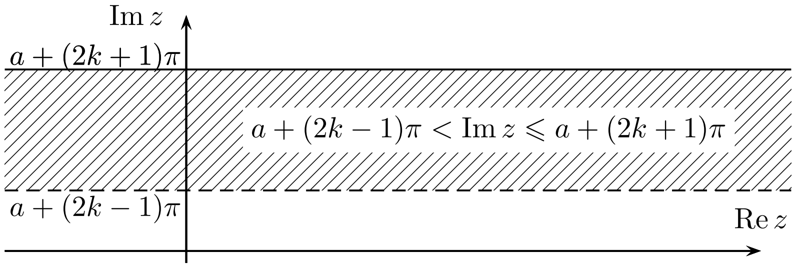

Рис. 1.1. Полоса однолистности логарифмической функции

При обходе вокруг начала координат 0 с возвратом в z_0 мы придем к другому значению логарифмической функции. Поэтому 0 называется точкой ветвления логарифмической функции.

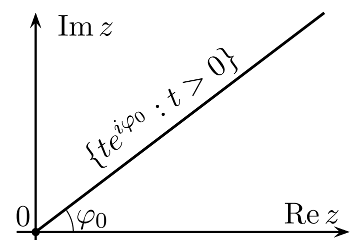

Рис. 1.2: Разрез для однозначности логарифма

Чтобы избежать этого, проведем разрез комплексной плоскости, соединяя 0 с бесконечно удаленной точкой ∞, например, лучом

$$\left\{te^{i\varphi_0} : t \in [0, +\infty)\right\},$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ фиксировано. Тогда, переходя по любому пути из любой точки $0 \neq z \in \mathbb{C}$, мы не сможем вернуться в нее, пересекая этот луч. Поэтому мы возвращаемся в точку z, не изменяя значения функции в этой точке.

Таким образом, фиксация значения логарифмической функции в какой-либо точке $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ и проведение разреза, соединяющего точку ветвления с бесконечно удаленной точкой, позволяет выделить однозначную ветвь логарифмической функции.

Производная логарифмической функции, вычисляется независимо от выбора ветви по формуле

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

1.2.4. Степенная функция

Определение 1.9. ***Степенной*** *функцией с показателем* $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *называется многозначная функция*

$$z^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^\mu e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k\mu}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Неоднозначность степенной функции обусловлена множителем $e^{2\pi k i\mu}$. Характер этой неоднозначности зависит от структуры показателя степени

μ и мы рассмотрим подробнее некоторые частные случаи выбора μ в определении.

Если $\mu = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (см. (1.7))

$$e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \ln |z|} e^{ni \operatorname{Arg} z} = (|z| e^{i \arg z})^n = z^n.$$

В этом случае степенная функция имеет единственное значение, совпадающее с привычным.

Если $\mu = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — рациональное число (считаем, что дробь p/q несократима), то $e^{2\pi i k \mu}$ принимает q различных значений, получаемых при $k = 0, \ldots, q-1$. Поэтому сейчас степенная функция в каждой точке имеет q различных значений.

В частности, при $\mu = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$, корень q-й степени из числа $0 \neq z \in \widehat{\mathbb{C}}$ имеет q значений

$$\sqrt[q]{|z|} \exp i \left(\frac{\arg z + 2\pi k}{q} \right), \quad k = 0, \ldots, q.$$

Если $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — иррациональное число, то все значения $e^{2\pi k i \mu}$ различны при различных $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, в случае иррационального μ степенная функция z^μ имеет счетное множество значений.

Выделение однозначной ветви степенной функции осуществляется как и выше для логарифмической (см. раздел 1.2.3): фиксируем значение в какой-либо точке $z_0 \neq 0$ и производим разрез в комплексной плоскости, соединяя с его помощью $z = 0$ и $z = \infty$.

1.2.5. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим

Рассмотрим теперь определения «обратных» функций к тригонометрическим и гиперболическим. Кавычки обусловлены тем, что эти функции выражаются через экспоненциальную (см. определения 1.5–1.7) и, естественно, не являются взаимно однозначными. Поэтому, как и в случае логарифмической функции, мы придем к многозначным функциям.

Пусть задано число $w \in \mathbb{C}$. Решим уравнение $\sin z = w$. В силу равенства (1.9) оно сводится к уравнению

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

откуда $e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2}$. Таким образом, множеством решений уравнения $\sin z = w$ является (см. (1.10)) $-i \operatorname{Ln}(iw + \sqrt{1 - w^2})$. Это приводит нас к определению многозначной функции **арксинуса**

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

Действуя аналогично, мы получим определения обратных к другим тригонометрическим функциям — **арккосинуса**

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

арктангенса

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

арккотангенса

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1}.$$

Точно так же нетрудно придти к следующим определениям обратных функций к гиперболическим — **ареасинуса гиперболического**

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

и **ареакосинуса гиперболического**

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Подчеркнем, что эти функции являются многозначными.

Интегральная теорема Коши. **Интегральная формула Коши**

1.3. Интегральные теорема и формула Коши

1.3.1. Интегральная теорема

Следующая теорема является одним из центральных фактов теории функций комплексного переменного, лежащим в основе ее важнейших результатов.

Теорема 1.2 (Коши (интегральная)). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любого спрямляемого контура $\Gamma \subset D$*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Следующая теорема является обобщением интегральной теоремы Коши 1.2. Существенным отличием в новой формулировке будет то, что в ней не требуется аналитичности функции в точках контура.

Теорема 1.3 (обобщенная теорема Коши). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, границей которой является спрямляемый контур, функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

Интегральная теорема Коши 1.3 допускает распространение на случай конечносвязных областей.

Пусть $D_0, D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ — односвязные области, границы которых ∂D_k, $k = 0, \ldots, m$, являются спрямляемыми контурами, причем выполнены условия

$$\overline{D}_k \subset D_0;\ \overline{D}_k \cap \overline{D}_j \neq \varnothing, \quad (k \neq j)$$

Область

$$D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D}_k$$

будем называть **стандартной** $(m+1)$**-связной областью**. Ее границей является объединение границ $\bigcup_{k=0}^{m} \partial D_k$. Положительно **ориентированной границей** $(\partial D)^+$ будем называть

$$(\partial D_0)^+ \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (\partial D_k)^- \right).$$

При таком соглашении при обходе границы в выбранном направлении область D останется слева.

Принятая только что терминология позволяет, в частности, упростить выражение «односвязная область, границей которой является спрямляемый контур», заменив его на «стандартная односвязная область».

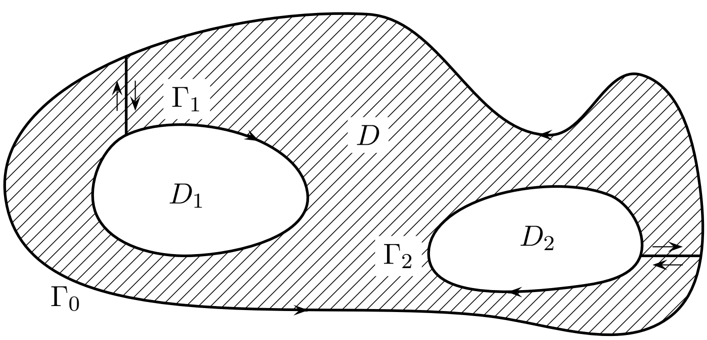

Рис. 1.3. К теореме 1.4

Теорема 1.4 (случай многосвязной области)**.** *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{(\partial D)^+} f(z)\, dz = 0.$$

1.3.2. Интегральная формула Коши

Здесь мы докажем важнейшее из следствий интегральной теоремы Коши. Это — замечательная формула Коши, которая количественно закрепляет удивительное свойство аналитических функций: ее значения в области можно восстановить по ее значениям на границе этой области.

Введем **модуль непрерывности** функции f на множестве A

$$\omega(\delta, f, A) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta, \quad x, y \in A\}. \tag{1.11}$$

Это — удобная количественная характеристика функции, так как ее поведение при $\delta \to +0$ отвечает за свойство равномерной непрерывности. Действительно, если A — компакт, то условие $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$ равносильно тому, что функция f равномерно непрерывна на A.

Теорема 1.5 (формула Коши)**.** *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1.12}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ выбрано так, что $\overline{B}_0 = \overline{B}(z, \varepsilon_0) \subset D$. Тогда для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ по интегральной теореме Коши 1.4, применяемой к функции $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ в стандартной многосвязной области $D \setminus \overline{B}(z, \varepsilon)$,

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

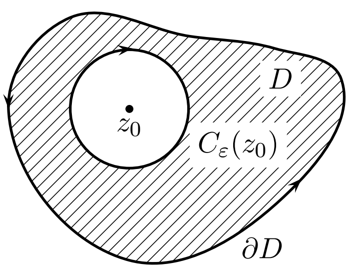

Рис. 1.4: К теореме 1.5

или

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1.13}$$

С другой стороны, используя равенство

$$\oint\limits_{\Gamma} (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при} \quad n = -1, \end{cases}$$

мы видим, что

$$\left| 2\pi i f(z) - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\zeta \in C_\varepsilon^+(z)} |f(z) - f(\zeta)| \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant 2\pi\omega(\varepsilon, f, \overline{B}_0) \to 0$$

(определение модуля непрерывности ω см. в (1.11)) при $\varepsilon \to 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\oint_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \to 2\pi i f(z).$$

Учитывая (1.13), получаем требуемое равенство. □

Интеграл в формуле (1.12) называется **интегралом Коши**, функция f — **плотностью** интеграла Коши, а функция $(\zeta - z)^{-1}$ — **ядром Коши**.

Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Свойства аналитических функций

1.4. Ряды Тейлора

1.4.1. Степенные ряды

Определение 1.10. ***Степенным рядом*** *будем называть ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1.14}$$

при этом c_k — ***коэффициенты*** *степенного ряда, а z_0 — его* ***центр****.*

Областью сходимости ряда (1.14) называется множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых он сходится.

Следующие утверждения показывают, что область сходимости степенного ряда не может быть произвольной и имеет специфическую структуру.

Лемма 1.1 (Абеля). *Если степенной ряд сходится при некотором $z^* \neq z_0$, то он сходится абсолютно в круге*

$$B(z_0 : |z^* - z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z^* - z_0|\}$$

и равномерно в любом круге $\overline{B}(z_0, r)$, $0 < r < |z^* - z_0|$.

Теорема 1.6 (Коши–Адамара). *Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ и*

$$l = \varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Тогда при

1) $l = \infty$ ряд (1.14) расходится при всех $z \neq z_0$,

2) $l > 0$ ряд (1.14) сходится при всех z с $|z - z_0| < 1/l$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > 1/l$,

3) $l = 0$ ряд (1.14) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$.

Формулировка теоремы 1.6 делает естественным следующее понятие.

Определение 1.11. *Число $R \in \mathbb{R}$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда (1.14), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.*

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

*называется **кругом сходимости**.*

Если ряд (1.14) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (1.14) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$.

Теорема 1.6 доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления.

Теорема 1.7 (формула Коши–Адамара)**.** *Радиус сходимости R степенного ряда (1.14) вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \tag{1.15}$$

Конечно, формула (1.15) справедлива и в случаях $R = 0$ и $R = \infty$, если считать, что $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$.

Теорема 1.8. *Сумма степенного ряда (1.14) с положительным радиусом сходимости аналитична в круге сходимости и его коэффициенты вычисляются по формулам*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где f — сумма ряда.

1.4.2. Разложение в степенной ряд

Определение 1.12. ***Рядом Тейлора** функции f в точке z_0 называется степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{1.16}$$

Из теоремы 1.8 сразу следует, что степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Конечно, чтобы записать ряд (1.16) мы должны потребовать существования производных любого порядка в точке z_0, а для этого на самом деле нужно, чтобы все производные существовали в некоторой окрестности z_0, т.е. функция f должна быть аналитичной в некоторой окрестности точки z_0 (см.

определение 1.3). Кроме того, подчеркнем, что в этом определении ничего не говорится о сходимости ряда (1.16).

Таким образом, возникают следующие естественные вопросы:

— сходится ли ряд Тейлора,

— чему равна его сумма в случае сходимости?

Теорема 1.9 (Тейлора). *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $0 < r < d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда степенной ряд (1.14), коэффициенты которого вычислены по формулам*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k = 0, 1 \ldots, \tag{1.17}$$

сходится в круге $B(z_0, d)$ к функции f.

Следующее утверждение дает нам возможность различными способами выражать свойство аналитичности.

Теорема 1.10. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда следующие условия равносильны аналитичности f в точке z_0:*

1) f дифференцируема в некоторой окрестности z_0,

2) f есть сумма степенного ряда с центром в z_0 с положительным радиусом сходимости,

3) f непрерывна в некоторой окрестности z_0 и интеграл от нее по границе любого треугольника равен нулю.

Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация

1.5. Ряды Лорана

1.5.1. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{-k}$$

по отрицательным степеням разностей $z - z_0$. С помощью замены $z - z_0 = \frac{1}{\zeta}$ легко видеть, что это ряд сходится в области

$$|z - z_0| > \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R$$

и его сумма аналитична в этой области.

Определение 1.13. ***Рядом Лорана*** *будем называть ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\,, \tag{1.18}$$

Часть ряда Лорана (1.18) с отрицательными индексами называется его ***главной частью****, а часть с неотрицательными индексами —* ***правильной*** *или аналитической.*

Сумму ряда Лорана (1.18) будем понимать как

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{-1} c_k(z-z_0)^k + \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} c_k(z-z_0)^k$$

(конечно, если эти пределы существуют).

Из теоремы 1.7 Коши–Адамара получаем, что областью сходимости ряда Лорана является кольцо

$$K(z_0,r,R) \equiv \{z\in\mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}\,,$$

радиусы которого определяются равенствами

$$r = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}; \qquad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

Конечно, если $r \geqslant R$, то это кольцо пусто.

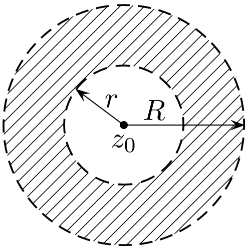

Рис. 1.5: $K(z_0,r,R)$

1.5.2. Формулы для коэффициентов разложения

Следующая теорема показывает, что аналитическая в кольце функция может быть разложена в ряд Лорана, а также позволяет вычислить коэффициенты этого ряда.

Теорема 1.11 (Лорана). *Пусть $0 \leqslant r < R$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Если функция f аналитична в кольце $K(z_0,r,R)$, $0 \leqslant r < R$, то она является суммой сходящегося ряда Лорана (1.18), причем*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho(z_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta, \quad r<\rho<R. \tag{1.19}$$

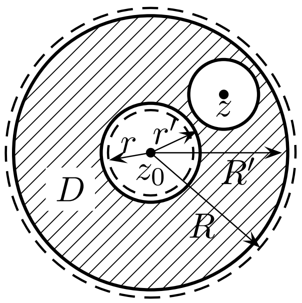

Рис. 1.6: К теореме 1.11

Доказательство. Пусть $z \in K(z_0, r, R)$, выберем числа r' и R' так, чтобы

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R,$$

а число $\delta > 0$ возьмем настолько малым, чтобы $\overline{B}(z, \delta) \subset K(z_0, r', R')$.

Теперь к функции $\zeta \to f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ применим интегральную формулу Коши (теорема 1.5) в области (заштрихованная область на рис. 1.6)

$$D = K(z_0, r', R') \setminus \overline{B}(z, \delta),$$

получая равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (1.20)$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

А так как $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{R'}(z_0)$. Поэтому первый интеграл в (1.20) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Аналогично

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

В силу условия $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ ряд сходится равномерно по ζ на $C_{r'}(z_0)$. Поэтому второй интеграл в (1.20) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta.$$

Для доказательства того, что формулы коэффициентов не зависят от ρ, воспользуемся обобщенной теоремой Коши (теорема 1.3), применяя ее к двусвязной области $K(z_0, \rho, \rho')$ к функции $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$, где $r < \rho < \rho' < R$.
□

Определение 1.14. *Ряд Лорана (1.18), коэффициенты которого вычисляются по формулам (1.19), будем называть* ***рядом Лорана функции*** f *в кольце* $K(z_0, r, R)$.

1.6. Классификация изолированных особых точек

1.6.1. Правильные точки функции

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$. Тогда либо найдется такое число $c_0 \in \mathbb{C}$, что переопределение нашей функции в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитичной также и в точке z_0, либо такого числа нет.

Определение 1.15. *В первом случае* z_0 *называют* ***правильной точкой*** *для* f *(часто используется также термин «устранимая особая точка»). Во втором случае, говорят, что* z_0 *—* ***изолированная особая точка*** *для* f.

Простой способ проверки того, что точка является правильной для функции, дает следующее утверждение.

Теорема 1.12. *Пусть функция* f *аналитична в проколотом круге* $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. *Тогда* z_0 *является для нее правильной точкой тогда и только тогда, когда* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности* z_0.

1.6.2. Полюсы

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда из теоремы 1.12 вытекает, что z_0 является изолированной особой точкой для f в том и только том случае, когда

$$\varlimsup_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Определение 1.16. *Изолированная особая точка* z_0 *функции* f *называется ее* ***полюсом****, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{1.21}$$

Самый простой пример полюса — точка z_0 для функции $f(z) = (z - z_0)^{-n}$, где $n \in \mathbb{N}$. По существу, этот пример показывает, как устроена функция в окрестности любого полюса, так как следующая теорема утверждает, что эта ситуация вполне типична.

Теорема 1.13. *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее полюсом тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что разложение f в ряд Лорана имеет вид*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_{-n} \neq 0. \tag{1.22}$$

Теорема 1.13 делает естественной следующую классификацию полюсов.

Определение 1.17. *Будем говорить, что изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее* ***полюсом порядка (кратности)*** *$n \in \mathbb{N}$, если разложение Лорана для f имеет вид (1.22)*

Полюс кратности $n = 1$ называется ***простым****.*

1.6.3. Существенно особые точки

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ и z_0 не является ни правильной точкой, ни полюсом. Такие изолированные особенности называются существенно особыми точками для f.

Определение 1.18. *Изолированная особая точка z_0 функции f называется* ***существенно особой точкой*** *для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.*

Как и в случае полюса (см. теорему 1.13) судить о том, является ли изолированная особенность существенно особой точкой, можно по ряду Лорана.

Теорема 1.14. *Изолированная особая точка функции f является существенно особой тогда и только тогда, главная часть ряда Лорана в этой точке содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.*

Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычеты бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов.

1.7. Вычеты и основная теорема о вычетах

1.7.1. Вычеты

Пусть функция f аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ изолированной особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 1.19. ***Вычетом функции*** *f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r^+(z_0)} f(z)\, dz, \quad 0 < r < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Значение интеграла в (1.23) не зависит от $r \in (0, \varepsilon)$. В частности, это показывает, что для вычисления вычета в (1.23) можно брать достаточно малое $r > 0$.

1.7.2. Формулы для вычисления вычетов

Поскольку представлением аналитической функции в изолированной особой точке является ряд Лорана, то естественно использовать этот ряд для вычисления вычета. Равенство (1.19) в теореме 1.11 при $k = 0$ показывает, это действительно возможно.

Теорема 1.15. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{z_0} f$ равен коэффициенту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана для f в этой точке.*

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вычетов.

Пример 1.1. Рассмотрим функцию

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}, \quad z \neq 0.$$

Это разложение сходится в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и потому является ее рядом Лорана для точки $z_0 = 0$. В силу теоремы 1.15 $\operatorname*{Res}_0 \exp(1/z) = 1$.

Пример 1.2. Если особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является правильной, то вычет в этой точке равен нулю, так как в этом случае ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора — все коэффициенты Лорана с отрицательными индексами равны нулю.

В связи с последним примером отметим, что из того, что вычет в особой точке равен нулю, не следует, что эта особенность является устранимой. Другие лорановские коэффициенты с отрицательными индексами могут быть неравными нулю. Пример $f(z) = z^{-2}$ показывает это.

Пример 1.3. Если z_0 — простой (кратности 1) полюс для f, то

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

В самом деле, ряд Лорана в таком случае имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{или} \quad f(z)(z - z_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$ получим требуемое.

1.7.3. Теорема Коши о вычетах

Своим появлением вычеты обязаны Коши. Одним из основных назначений вычетов является возможность вычислять интегралы по кривым. Как реализуется эта возможность — показывает следующая важная теорема.

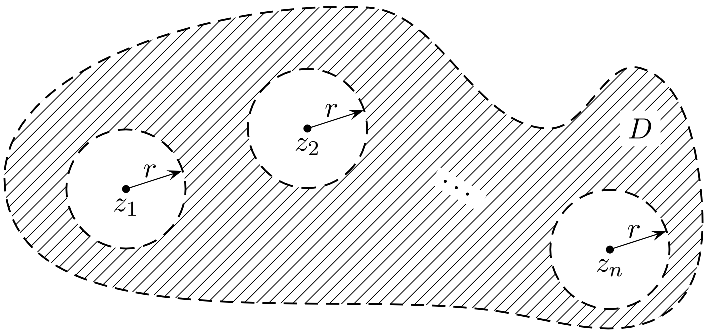

Рис. 1.7. К теореме 1.16

Теорема 1.16 (Коши, о вычетах)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$ изолированных особых точек, и непрерывна в $\overline{D} \setminus S$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f.$$

1.7.4. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция f аналитична во внешности круга $\overline{B}(0, r)$ достаточно большого радиуса и $z_0 = \infty$ является изолированной особой точкой для f.

Определение 1.20. ***Вычетом функции*** *f в изолированной особой точке ∞ называется число*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\, dz, \quad r > R.$$

Как и в случае конечной изолированной особой точки, интеграл в определении 1.20 не зависит от r (его надо брать достаточно большим).

Теорема 1.17. *Если ∞ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{\infty} f$ равен $-c_{-1}$ — коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана для f в бесконечно удаленной точке, взятому с противоположным знаком.*

1.7.5. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 1.18. *Пусть функция f аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ изолированных особых точек. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f + \operatorname*{Res}_{\infty} f = 0.$$

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений