Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вычислительный практикум

Приближенное вычисление интеграла по составным квадратурным формулам и их уточнение

Борис Мельников
b.melnikov17@gmail.com

под руководством Алцыбеева Глеба Олеговича
Преподаватель & Ассистент

май, 2023

Содержание

1 Введение

В данной работе снова затронем важнейший вопрос – приближенное вычисление интегралов. Ранее мы уже рассмотрели способы их вычисления при помощи квадратурных формул и установили, что АСТ "лучших"вычислений не превышала 3. Однако порой такой гарантированной точности недостаточно и требуется нахождение более точных значений. Рассмотрим новые способы работы с квадратурными формулами и методы уточнения уже полученных значений.

Целью работы ставилось знакомство с методами приближенных вычислений интегралов на заданном промежутке и анализ полученных результатов. В ходе работы были сделаны попытки реализовать удобный для использования интерфейс между пользователем и компьютером через встроенное в Windows 11 решение PowerShell.

2 Постановка задачи

Пусть задана вещественная функция $y = \varphi(x)$. Требуется вычислить значение

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

.

3 Необходимая теория

3.1 Составные квадратурные формулы

Мы желаем вычислить значение $\int\limits_a^b \phi(x)dx$, однако подход, когда мы используем формулу $\int_a^b g(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \cdot g(x_k) + r_N(g)$ не позволит нам повысить точность больше, чем на АСТ КФ из предыдущей работы, использующих данный подход. Поступим иначе: разобъем промежуток a, b на m промежутков, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \int\limits_{y_j}^{y} {}_{j+1} f(x)dx \overset{[2]}{\approx} h \sum\limits_{j=0}^{m-1} \sum\limits_{k=1}^{N} A_K \cdot f(y_j + hx_k) \equiv G_m(f)$.

Квадратурную формулу вида $\int\limits_a^b f(x)dx = G_m(f) + r_N(f)$ будем называть составной квадратурной формулой.

Одна из теорем в [2] декларирует, что АСТ КФ и АСТ СКФ совпадают.

3.2 Формулы СКФ

1) СКФ левых прямоугольников: $\int\limits_A^B f(x)dx = h\sum\limits_{j=0}^{m-1} f(A+jh) + r_N^{(1)}$;

АСТ = 0;

2) СКФ правых прямоугольников: $\int\limits_A^B f(x)dx = h\sum\limits_{j=0}^{m-1} f(A+(j+1)h) + r_N^{(2)}$;

АСТ = 0;

3) СКФ средних прямоугольников: $\int\limits_A^B f(x)dx = h\sum\limits_{j=0}^{m-1} f(A+(j+\frac{1}{2})h) + r_N^{(3)}$;

АСТ = 1;

4) СКФ трапеций: $\int\limits_A^B f(x)dx = \frac{h}{2}\cdot\big(f(A) + 2f(A+h) + \ldots + 2f(B-h) + f(B)\big) + r_N^{(4)}$;

АСТ = 1;

5) СКФ Симпсона: $\int\limits_A^B f(x)dx \approx \frac{h}{6}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\big(f(y_j) + 4f(y_{j+\frac{1}{2}}) + f(y_{j+1})\big) + r_N^{(5)}$;

АСТ = 3;

3.3 Уточнение вычисленных значений методом Рунге-Ромберга

Утверждается, что повысить точность вычисленного значения J исходного интеграла можно, применив формулу $J* \approx \frac{l^r \cdot J\left(\frac{h}{l}\right) - J}{l^r - 1}$, где l - новый ранг разбиения уже имеющихся промежутков, r - (АСТ + 1) используемой СКФ.

4 Практическая реализация

Итак, теперь опишем данные для задачи, которую предстоит решить. Будем решать задачу из варианта #10 со следующими начальными данными:
$f(x) = exp(1.5 * x)$;
$A = 0$;
$B = 1$;
$m = 1000$;

Поскольку нам известны АСТ применяемых формул, то можем делать предположения:
1) Для многочленов степеней 1, 2 и 3 значения, получаемые КФ среднего прямоугольника, КФ трапеции, КФ Симпсона и КФ $\frac{3}{8}$, будут точными;
2) Для функции $f(x)$ самые близкие значения будут получены с помощью КФ Симпсона и КФ $\frac{3}{8}$, менее точными с применением КФ среднего прямоугольника и КФ трапеции;
3) Для многочлена степени 0 также будет точное значение, полученное из КФ левого и правого прямоугольников;
Как видно в логе ниже, данные предположения верны.
Ссылка на репозиторий: `https://github.com/BoriskaCat/-CM-Projects.git`

```
Output:
#4.2; #4.3 Approximate calculation of the integral from composite QF
@@ #ID: 10

@@ Parameters:
   f_id (x) = cos(x) + 2x
   f_0 = 1
   f_1 = 5x + 1
   f_2 = 5x + x^2
   f_3 = 5x + x^3

   A = 0
   B = 1
   m = 1000
   h = 0.001

@@ Results:
   f(x) = 1

   Exact value of the integral J(h) = 1

   CQF of the left rectangle: 1.0000000000000
   |J* - J|: 6.6613381477509e-16
   Theoretical error t = 0

   CQF of the right rectangle: 1.0000000000000
   |J* - J|: 6.6613381477509e-16
   Theoretical error t = 0

   CQF of the middle rectangle: 1.0000000000000
   |J* - J|: 6.6613381477509e-16
   Theoretical error t = 0

   CQF trapezoid: 1.0000000000000
   |J* - J|: 6.6613381477509e-16
   Theoretical error t = 0

   Simpson's CQF: 1.0000000000000
   |J* - J|: 6.6613381477509e-16
   Theoretical error t = 0

@@ Results:
   f(x) = 5x + 1

   Exact value of the integral J(h) = 3.5000000000000

   CQF of the left rectangle: 3.4975000000000
   |J* - J|: 2.4999999999986e-03
   Theoretical error t = 1.5000000000000e-03

   CQF of the right rectangle: 3.5025000000000
   |J* - J|: 2.5000000000008e-03
   Theoretical error t = 1.5000000000000e-03

   CQF of the middle rectangle: 3.5000000000000
```

```
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00
   Theoretical error t = 0

   CQF trapezoid: 3.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00
   Theoretical error t = 0

   Simpson's CQF: 3.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00
   Theoretical error t = 0

@@ Results:
   f(x) = 5x + x^3

   Exact value of the integral J(h) = 2.7500000000000

   CQF of the left rectangle: 2.7470002500000
   |J* - J|: 2.9997500000016e-03
   Theoretical error t = 3.9970015000000e-03

   CQF of the right rectangle: 2.7530002500000
   |J* - J|: 3.0002499999982e-03
   Theoretical error t = 3.9970015000000e-03

   CQF of the middle rectangle: 2.7499998750000
   |J* - J|: 1.2499999968441e-07
   Theoretical error t = 2.4975000000000e-07

   CQF trapezoid: 2.7500002500000
   |J* - J|: 2.5000000025699e-07
   Theoretical error t = 4.9950000000000e-07

   Simpson's CQF: 2.7500000000000
   |J* - J|: 3.5527136788005e-15
   Theoretical error t = 0

@@ Results:
   f(x) = cos(x) + 5x

   Exact value of the integral J(h) = 1.8414709848079

   CQF of the left rectangle: 1.8407007635324
   |J* - J|: 7.7022127551851e-04
   Theoretical error t = 1.0000000000000e-03

   CQF of the right rectangle: 1.8422410658382
   |J* - J|: 7.7008103034970e-04
   Theoretical error t = 1.0000000000000e-03

   CQF of the right rectangle: 1.8414710198692
   |J* - J|: 3.5061290981631e-08
   Theoretical error t = -2.2547646106732e-08

   CQF trapezoid: 1.8414709146853
   |J* - J|: 7.0122581519172e-08
```

```
   Theoretical error t = -4.5095292213464e-08

   Simpson's CQF: 1.8414709848079
   |J* - J|: 1.3322676295502e-15
   Theoretical error t = 3.4722222222222e-16


?? Change the value of A, B? [y / n]
n
%%%%%-----------------------------------------------------------------------------------------
@@ Increase the rank of the partition
   Hint: The rank will be increased 'l' times
   l = 100000
   h = 1.0000000000000e-08

@@ Results:
   f(x) = 1

   Exact value of the integral J(h/l) = 1.0000000000000e+00

   mCQF of the left rectangle:
   J(h/l) = 1.0000000022899
   |J(h/l) - J| = 2.2898671847571e-09
   J*_r = 1.0000000022899e+00
   |J*_r - J| = 2.2898900553514e-09

   mCQF of the left rectangle:
   J(h/l) = 1.0000000022899
   |J(h/l) - J| = 2.2898671847571e-09
   J*_r = 1.0000000022899e+00
   |J*_r - J| = 2.2898900553514e-09

   mCQF of the right rectangle:
   J(h/l) = 1.0000000022899
   |J(h/l) - J| = 2.2898671847571e-09
   J*_r = 1.0000000022899e+00
   |J*_r - J| = 2.2898671847571e-09

   mCQF trapezoid:
   J(h/l) = 1.0000000022899
   |J(h/l) - J| = 2.2898671847571e-09
   J*_r = 1.0000000022899e+00
   |J*_r - J| = 2.2898671847571e-09

   Simpson's mCQF:
   J(h/l) = 1.0000000022899
   |J(h/l) - J| = 2.2898671847571e-09
   J*_r = 1.0000000022899e+00
   |J*_r - J| = 2.2898671847571e-09


@@ Results:
   f(x) = 5x + 1

   Exact value of the integral J(h) = 3.5000000000000
```

```
   mCQF of the left rectangle:
   J(h/l) = 3.4999999750000
   |J(h/l) - J| = 2.4999997627617e-08
   J*_r = 3.5000000000000e+00
   |J*_r - J| = 2.2204460492503e-15

   mCQF of the right rectangle:
   J(h/l) = 3.5000000250000
   |J(h/l) - J| = 2.5000002512598e-08
   J*_r = 3.5000000000000e+00
   |J*_r - J| = 2.2204460492503e-15

   mCQF of the middle rectangle:
   J(h/l) = 3.5000000000000
   |J(h/l) - J| = 1.7763568394003e-15
   J*_r = 3.5000000000000e+00
   |J*_r - J| = 1.3322676295502e-15

   mCQF trapezoid:
   J(h/l) = 3.5000000000000
   |J(h/l) - J| = 1.7763568394003e-15
   J*_r = 3.5000000000000e+00
   |J*_r - J| = 1.3322676295502e-15

   Simpson's mCQF:
   J(h/l) = 3.5000000000000
   |J(h/l) - J| = 1.7763568394003e-15
   J*_r = 3.5000000000000e+00
   |J*_r - J| = 1.7763568394003e-15


@@ Results:
   f(x) = 5x + x^3

   Exact value of the integral J(h) = 2.7500000000000

   mCQF of the left rectangle:
   J(h/l) = 2.7499999699999
   |J(h/l) - J| = 3.0000094408678e-08
   J*_r = 2.7499999999974e+00
   |J*_r - J| = 2.5943691639441e-12

   mCQF of the right rectangle:
   J(h/l) = 2.7500000299999
   |J(h/l) - J| = 2.9999905670763e-08
   J*_r = 2.7499999999974e+00
   |J*_r - J| = 2.5948132531539e-12

   mCQF of the middle rectangle:
   J(h/l) = 2.7500000000005
   |J(h/l) - J| = 4.6140868903422e-13
   J*_r = 2.7500000000005e+00
   |J*_r - J| = 4.6140868903422e-13
```

```
mCQF trapezoid:
J(h/l) = 2.7500000000005
|J(h/l) - J| = 4.6140868903422e-13
J*_r = 2.7500000000005e+00
|J*_r - J| = 4.6140868903422e-13

Simpson's mCQF:
J(h/l) = 2.7500000000005
|J(h/l) - J| = 4.6140868903422e-13
J*_r = 2.7500000000005e+00
|J*_r - J| = 4.6140868903422e-13


@@ Results:
f(x) = cos(x) + 2x

Exact value of the integral J(h) = 1.8414709848079

mCQF of the left rectangle:
J(h/l) = 1.8414709771065
|J(h/l) - J| = 7.7013808663651e-09
J*_r = 1.8414709848087e+00
|J*_r - J| = 8.3200113465409e-13

mCQF of the right rectangle:
J(h/l) = 1.8414709925095
|J(h/l) - J| = 7.7016417687759e-09
J*_r = 1.8414709848087e+00
|J*_r - J| = 8.3133500083932e-13

mCQF of the middle rectangle:
J(h/l) = 1.8414709848076
|J(h/l) - J| = 2.9309887850104e-13
J*_r = 1.8414709848076e+00
|J*_r - J| = 2.9332092310597e-13

mCQF trapezoid:
J(h/l) = 1.8414709848076
|J(h/l) - J| = 2.9309887850104e-13
J*_r = 1.8414709848076e+00
|J*_r - J| = 2.9332092310597e-13

Simpson's mCQF:
J(h/l) = 1.8414709848076
|J(h/l) - J| = 2.9309887850104e-13
J*_r = 1.8414709848076e+00
|J*_r - J| = 2.9287683389612e-13
```

Список литературы

[1] Лебедева А.В., Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 1. СПб., СПбГУ. 2021. 156 - стр.

[2] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб., СПбГУ. 1998. 463 - стр.