Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вычислительный практикум

Приближенное вычисление интеграла по квадратурным формулам

Борис Мельников
b.melnikov17@gmail.com

под руководством Алцыбеева Глеба Олеговича
Преподаватель & Ассистент

май, 2023

Содержание

1 Введение

В очередной раз рассмотрим важную практическую задачу, которую в повседневной жизни часто приходится решать студенту математического факультета. Часто бывает необходимо посчитать значение определенного интеграла заранее известной функции на некотором промежутке a, b. Конечно, нахождение точного значения – довольно непростая задача даже для опытных студентов, поэтому в данной работе рассмотрим основные способы приближенного вычисления интегралов.

Целью работы ставилось знакомство с методами приближенных вычислений интегралов на заданном промежутке и анализ полученных результатов. В ходе работы были сделаны попытки реализовать удобный для использования интерфейс между пользователем и компьютером через встроенное в Windows 11 решение PowerShell.

2 Постановка задачи

Пусть задана вещественная функция $y = \varphi(x)$. Требуется вычислить значение

$$\int\limits_a^b \phi(x)\,dx$$

.

3 Необходимая теория

3.1 Квадратурные формулы

Бывает так, что подынтегральная функция $\varphi(x)$ имеет особенность на промежутке интегрирования a, b. Тогда можно имеющийся промежуток разбить на два таким образом, чтобы точка, в которой функция $\varphi(x)$ имеет особенность, оказалась на концах новых промежутков, т. е. разбить интеграл на два так, что на концах промежутков каждого из получившихся интегралов имеется особенность. Но мы поступим иначе – разобъем подынтегральную функцию $\varphi(x)$ на 2 множителя – $f(x) = \rho(x) \cdot f(x)$, где функция $\rho(x) \not\equiv 0$ на a, b и для которой известно, что любой интеграл вида $\int\limits_a^b x^k \cdot \rho(x) dx$ сходится. Такую функцию $\rho(x)$ будем называть весовой.

<u>Опр.</u> Квадратурной формулой будем называть формулу вида $\int\limits_a^b f(x) \cdot \rho(x) dx \approx \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \cdot f(x_k)$.

<u>Замеч.</u>: 1) КФ точна, если $\int\limits_a^b x^k \cdot \rho(x) dx = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \cdot f(x_k)$;

2) a, b могут равняться ∞;

3) Узлы x_k обязательно различны, но необязательно лежат в промежутке интегрирования

a, b;
4) Если $\varphi(x)$ не имеет особенностей на промежутке интегрирования a, b, то $\rho(x) \equiv 1$;

3.2 Квадратурные формулы прямоугольника и трапеции

Пусть известно, что $\varphi(x) = \rho(x) \cdot f(x)$ и $f(x) = \sum_{k=1}^{N} l_{kN}(x) + r_{N-1}(x)$. Тогда КФ, для которой $A_K = \int_a^b \rho(x) \cdot l_{kN}(x) dx$, будем называть интерполяционной.

КФ прямоугольника будем называть формулу $\int_a^b f(x)dx \approx A_1 \cdot f(x_1)$ – очевидно, она является ИКФ, а значит для констант данная формула является точной.

1) КФ левого прямоугольника: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f(a)$;
2) КФ правого прямоугольника: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f(b)$;
3) КФ среднего прямоугольника: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f(\frac{a+b}{2})$;
4) КФ трапеции: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot (f(a) + f(b))$;

В [2] объясняется, что АСТ формул 1 и 2 равна 0, а формул 3 и 4 – 1 – наивысшая для КФ с одним узлом.

3.3 Квадратурная формула Симпсона

КФ Симпсона дается следующей формулой:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot \big(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\big);$$

Для оценки АСТ данной формулы не подойдет метод интерполяции, использовавшийся в [2] для оценки АСТ КФ прямоугольника. Используется метод построения многочлена Эрмита, который показывает, что АСТ КФ Симпсона равна 3.

3.4 Квадратурная формула $\frac{3}{8}$

КФ $\frac{3}{8}$ дается формулой:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot \big(\frac{1}{8}f(a) + \frac{3}{8}f(a+h) + \frac{3}{8}f(a+2h) + \frac{1}{8}f(b)\big)$$

где $h = \frac{b-a}{3}$.
АСТ КФ $\frac{3}{8}$ также равна 3.

4 Практическая реализация

Итак, теперь опишем данные для задачи, которую предстоит решить. Будем решать задачу из варианта #10 со следующими начальными данными:
$f(x) = exp(1.5 * x)$;
$A = 0$;
$B = 1$;

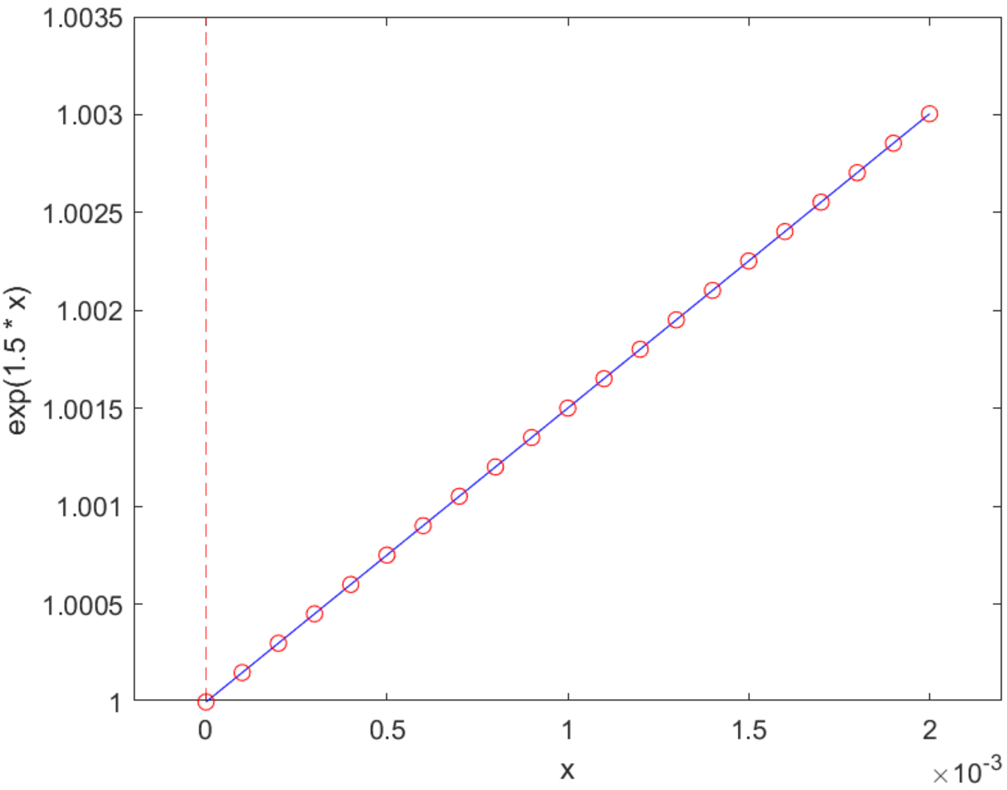

Рис. 1: График $f(x)$ на отрезке и соответствующие $m+1$ узлы

Но помимо заданной функции будем анализировать, насколько точные значения получаются при вычислении интегралов от следующих многочленов:
1) deg = 0: $f_0(x) = 5$;
2) deg = 1: $f_1(x) = 5x$;
3) deg = 2: $f_2(x) = 5x + x^2$;
4) deg = 3: $f_3(x) = 5x + x^3$;

Поскольку нам известны АСТ применяемых формул, то можем делать предположения:
1) Для многочленов степеней 1, 2 и 3 значения, получаемые КФ среднего прямоугольника, КФ трапеции, КФ Симпсона и КФ $\frac{3}{8}$, будут точными;
2) Для функции $f(x)$ самые близкие значения будут получены с помощью КФ Симпсона и КФ $\frac{3}{8}$, менее точными с применением КФ среднего прямоугольника и КФ трапеции;
3) Для многочлена степени 0 также будет точное значение, полученное из КФ левого и правого прямоугольников;

Как видно в логе ниже, данные предположения верны.

Ссылка на репозиторий: `https://github.com/BoriskaCat/-CM-Projects.git`

```
Output:
@@ #4.1. Calculation of integrals by quadrature formulas
@@ #ID: 10

@@ Parameters:
   f_id (x) = cos(x) + 2x
   A = 0
   B = 1

@@ Results:
   f(x) = f_id (x)

   Exact value of the integral J = 1.841470984808

   QF of the left rectangle: 1
   |J* - J|: 8.4147098480790e-01

   QF of the right rectangle: 2.5403023058681
   |J* - J|: 6.9883132106024e-01

   QF of the middle rectangle: 1.8775825618904
   |J* - J|: 3.6111577082476e-02

   QF trapezoid: 1.7701511529341
   |J* - J|: 7.1319831873827e-02

   Simpson's QF: 1.8417720922383
   |J* - J|: 3.0110743037537e-04

   QF 3/8: 1.8416043658929
   |J* - J|: 1.3338108500305e-04


@@ Results:
   f(x) = 5

   Exact value of the integral J = 5.0000000000000e+00

   QF of the left rectangle: 5.0000000000000e+00
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF of the right rectangle: 5.0000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF of the middle rectangle: 5.0000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF trapezoid: 5.0000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   Simpson's QF: 5.0000000000000
   color|J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF 3/8: 5.0000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00
```

```
@@ Results:
   f(x) = 5x

   Exact value of the integral J = 2.5000000000000e+00

   QF of the left rectangle: 0.0000000000000e+00
   |J* - J|: 2.5000000000000e+00

   QF of the right rectangle: 5.0000000000000
   |J* - J|: 2.5000000000000e+00

   QF of the middle rectangle: 2.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF trapezoid: 2.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   Simpson's QF: 2.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF 3/8: 2.5000000000000
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00


@@ Results:
   f(x) = 5x + x^2

   Exact value of the integral J = 2.8333333333333e+00

   QF of the left rectangle: 0.0000000000000e+00
   |J* - J|: 2.8333333333333e+00

   QF of the right rectangle: 6.0000000000000
   |J* - J|: 3.1666666666667e+00

   QF of the middle rectangle: 2.7500000000000
   |J* - J|: 8.3333333333333e-02

   QF trapezoid: 3.0000000000000
   |J* - J|: 1.6666666666667e-01

   Simpson's QF: 2.8333333333333
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00

   QF 3/8: 2.8333333333333
   |J* - J|: 0.0000000000000e+00


@@ Results:
   f(x) = 5x + x^3

   Exact value of the integral J = 2.7500000000000e+00
```

```
    QF of the left rectangle: 0.0000000000000e+00
    |J* - J|: 2.7500000000000e+00

    QF of the right rectangle: 6.0000000000000
    |J* - J|: 3.2500000000000e+00

    QF of the middle rectangle: 2.6250000000000
    |J* - J|: 1.2500000000000e-01

    QF trapezoid: 3.0000000000000
    |J* - J|: 2.5000000000000e-01

    Simpson's QF: 2.7500000000000
    |J* - J|: 0.0000000000000e+00

    QF 3/8: 2.7500000000000
    |J* - J|: 0.0000000000000e+00

?? Change the value of A, B? [y / n]
n
```

Список литературы

[1] Лебедева А.В., Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 1. СПб., СПбГУ. 2021. 156 - стр.

[2] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб., СПбГУ. 1998. 463 - стр.