פתרון בשיטות רונגה-קוטה:

נעבוד עם המקטעים

$x_i = x_0 + i\,h\,, \quad i \in N$

נתרכז במציאת פתרון לבעיה $y'(x) = f(x, y)$

עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

מכאן והלאה, הסימול $y(x_i)$ יציין הערך האנליטי המדויק של הפונקציה בנקודה x_i, ואילו y_i יציין את הערך המקורב שחושב באמצעות השיטה. שימו לב כי במקרים מיוחדים יתכן שהערכים זהים, כלומר:

לפעמים $\boldsymbol{y(x_i) = y_i}$

שיטת אוילר היא שיטה מספרית לפתרון משוואה דיפרנציאלית ראשונה של סדר ראשון עם ערך התחלתי נתון. זה הכי בסיסי בשיטה מפורשת עבור אינטגרציה נומרית משוואות דיפרנציאליות רגילות ו הוא פשוטה שיטת ראנגה-קוטה .

פתרון בשיטות רונגה-קוטה

אלו הן קבוצה של שיטות רבות אשר נבדלות זו מזו בכמות החישובים שיש לבצע, ולכן גם בדיוק. שיטות אלה שימושיות במיוחד, עקב נחיותן בכך שאין מצריכות חישוב כל נגזרת של הפונקציה המדוברת, אלא רק חישוב ערכי הפונקציה עצמה.

כפי שראינו, לפי טור טיילור:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)$$

נשתמש בשיטה הבאה, אשר מזכירה מעט את משפט לגראנז':

$$y_{i+1} = y_i + \lambda_1 hf(x_i, y_i) + \lambda_2 hf\left[x_i + \mu_1 h, y_i + \mu_2 hf(x_i, y_i)\right]$$

ואת הקבועים $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ נמצא על ידי השוואת מקדמים. לשם כך נפתח את השיטה לטור טיילור סביב (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + \lambda_1 hf(x_i, y_i) + \lambda_2 h\left[f(x_i, y_i) + \mu_1 h\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \mu_2 hf(x_i, y_i)\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} + O(h^2)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} hf(x_i, y_i) & : & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ h^2 \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} & : & \lambda_2 \mu_1 = \frac{1}{2} \\ h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} & : & \lambda_2 \mu_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

- בשיטות רונגה קוטה מסדר שני אנו מגיעים לדיוק מסדר $O(h^2)$ באמצעות חישוב ערך הפונקציה f בשתי נקודות בלבד, לעומת שיטת טור-טיילור בה נדרשים שלושה חישובים: $f(x_i), \frac{\partial f(x_i)}{\partial x}, \frac{\partial f(y_i)}{\partial y}$

שיטת רונגה-קוטה מסדר 4

בשיטה זו לוקחים

$$\begin{array}{lcl} K_0 & = & f(x_i, y_i) \\ K_1 & = & f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_0) \\ K_2 & = & f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 & = & f(x_i + h, y_i + hK_2) \\ y_{i+1} & = & y_i + \frac{h}{6}\left(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3\right) \end{array}$$