Формулировка теоретических вопросов в билетах 2024

1 модуль

1. Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня. Комплексная плоскость, модуль, аргумент. Формула Эйлера. Формула Муавра.
2. Линейные пространства. Определение, примеры. Базис и размерность пространства. Линейная оболочка системы векторов. Способы задания и переход между разными способами задания. Дать определение базиса и размерности линейного пространства. Связь между этими понятиями. Доказать теорему о единственности разложения вектора по базису. Привести пять примеров различных линейных пространств.
3. Линейные подпространства. Определения, теоремы, примеры и контрпримеры. Базис и размерность. Привести примеры задания пространств и подпространств без использования матриц и СЛАУ.
4. Сумма и пересечение линейных подпространств. Доказать, что указанные множества являются линейными подпространствами. Нахождение базисов для суммы и пересечения подпространств. Теорема о размерностях подпространств, суммы и пересечения.
5. Прямая сумма подпространств. Критерий прямой суммы.
6. Линейное многообразие. Вектор сдвига. Пересечение линейных аффинных многообразий.
7. Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига. Представление k-мерного линейного аффинного многообразия. Решения неоднородной СЛАУ.
8. Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига. Пересечение линейного аффинного многообразия с

подпространством, дополнительным к его направляющему подпространству.

9. Скалярное произведение, примеры (привести три примера). Косинус. Евклидовы пространства. Понятие метрики и нормы, способы задания норм (привести три примера).
10. Евклидово пространство. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта, вывод формулы. Ортогональное дополнение. Построение ортонормированного базиса.
11. Матрица Грама. Свойства матрицы.
12. Проекция вектора на подпространство вдоль другого подпространства. Расстояние от вектора до подпространства и угол между вектором и подпространством (для случая евклидовых пространств).
13. Прямое дополнение. Ортогональное дополнение.
14. Метод наименьших квадратов, обоснование, подробное описание, пример решения.
15. Псевдообратная матрица. Алгоритм нахождения.
16. Псевдорешение, алгоритм нахождения. Нормальное псевдорешение, алгоритм нахождения. Определение, смысл. Рассмотреть случаи для совместных и несовместных систем.
17. Матрица перехода от базиса к базису, вывод формулы для преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Обратный переход. Работа с тремя и более базисами.
18. Евклидовы и унитарные пространства. Три примера. Неравенство Коши-Буняковского (Шварца).
19. Матрица Грама для системы векторов. Определитель и ранг матрицы Грама. Как изменится грамиан, если один из векторов заменить его ортогональной проекцией?

20. Норма вектора в евклидовом пространстве. Привести три примера задания нормы. Свойства нормы (с доказательством).

2 модуль

21. Линейный оператор, определение, три примера. Матрица линейного оператора. Вывести формулу для вычисления значений линейного оператора (с помощью его матрицы). Произведение линейных операторов. Матрица для произведения линейных операторов.
22. Линейный оператор, определение, три примера. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису (вывести формулу).
23. Линейный оператор, определение, три примера. Ранг и дефект, ядро и образ линейного оператора. Теорема про размерности. Инвариантное подпространство линейного оператора.
24. Операции с линейными операторами. Ранг произведения операторов. Линейное пространство линейных операторов.
25. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Нахождение собственных значений линейного оператора (вывести характеристическое уравнение). Геометрическая и алгебраическая кратность. Жорданова нормальная форма.
26. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен линейного оператора. Формулировка теоремы Гамильтона – Кэли*. След линейного оператора. Инварианты.
27. Формулировка теоремы про ЖНФ. Алгоритм построения ЖНФ. Определение количества клеток. Нахождение базиса.

28. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Доказать независимость характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора от выбора базиса.
29. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих одному и тому же собственному значению (с доказательством).
30. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).
31. Дать определение сопряженного и самосопряженного линейного оператора. Доказать, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.
32. Дать определение самосопряженного линейного оператора. Свойство собственных векторов самосопряженного линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям (с доказательством).
33. Ортогональные матрицы и их свойства.
34. Ортогональное преобразование евклидова пространства. Свойства ортогональных преобразований (с доказательством).
35. Дать определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы и ее преобразование при переходе к новому базису (вывести формулу).
36. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Закон инерции квадратичных форм (с доказательством).
37. Знакоопределенность квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства). Примеры.

38. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием (обосновать возможность такого приведения).
39. Метод Лагранжа для приведения квадратичной формы к диагональному виду. Описать алгоритм для разных случаев и обосновать возможность применения.
40. Теоремы Фредгольма для систем линейных уравнений*.