Линейная алгебра, Экзамен

Написано простым BIT-ом на основе лекций Гордеевой Н.М.,
учебника Канатникова А.Н., Крищенко А.П.,
методичек Власова П.А., Соболева С.К.,
записей одногруппников и старшекурсников,
некоторых методичек Мехмата МГУ и, конечно,
с помощью одного загадочного, вдохновляющего на
изучение математики путешественника по млечному пути,
приносящего умные мысли в процессе
нашего общего мозгового штурма.
GitHub.

> “Верю, что проникну в пространство, невидимое доселе, и буду творить в нем чудеса!!”.
>
> — BIT

МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1.

2024 — 2025

Содержание

1 Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня. Комплексная плоскость, модуль, аргумент. Формула Эйлера. Формула Муавра.

1.1 Комплексные числа.

Определение 1. ***Комплексным числом*** z называется пара (x, y) действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$, для которой определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
2. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$

Обозначение. $\mathbb{C}$.

Определение 2. ***Мнимой единицей*** называется число $i = (0, 1)$, причем ее квадратом, является пара $(-1, 0)$.

Определение 3. Комплексное число $\overline{z}$ называется ***сопряженным*** к z, если $\overline{z} = x - iy$, $z = x + iy$.

Свойства комплексного сопряжения.

1°. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
$\overline{z+w} = \overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i = (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) = \overline{z}+\overline{w}$.

2°. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i = \overline{zw}$.

3°. $\overline{\overline{z}} = z$.
$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$.

1.2 Арифметические действия над комплексными числами.

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \underbrace{\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})} + i\underbrace{\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})}$.

1.3 Возведение в степень и извлечение корня.

$z^n = w$
$w = |w|e^{i\varphi}$
$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

При нахождении корня n степени из комплексного числа получается ровно n чисел, лежащих на окружности радиусом $\sqrt[n]{|w|}$ и образующих правильный n-угольник.

1.4 Формула Эйлера.

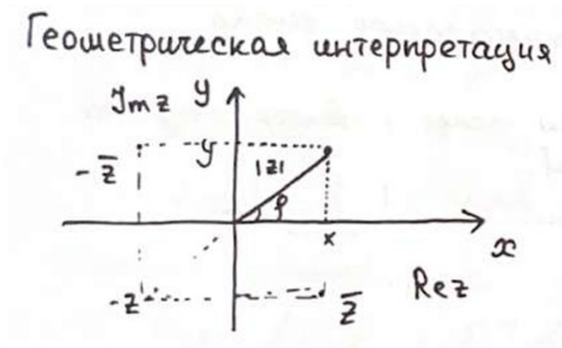
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи.
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ — **формула Эйлера**.
$z = |z|e^{i\varphi}$ — показательная форма записи.

1.5 Формула Муавра.

$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ — **формула Муавра**.

1.6 Комплексная плоскость, модуль, аргумент.

Определение 4. ***Комплексной плоскостью*** называется плоскость, образованная комплексными числами, у которой ось Ox образована действительными числами, а ось Oy - мнимыми числами.



Определение 5. ***Модулем числа*** $z = x + iy$ называется вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства.

1°. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.

2°. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
(a+c)^2 + (b+d)^2 &\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
(ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leqslant (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\
2acbd &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 \\
0 &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\
0 &\leqslant (ad - bc)^2
\end{aligned}$$

3°. $z\overline{z} = |z|^2$.
$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

4°. $|zw| = |z||w|$.
$|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Аргумент комплексного числа.

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
Тогда, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$.
Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 6. ***Аргументом числа*** $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется любое число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между положительным направлением оси Ox и вектором с началом в точке 0 и концом в точке z.

Замечание. Таких чисел бесконесно много, причем такие числа отличаются на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2 Линейные пространства. Определение, примеры. Базис и размерность пространства. Линейная оболочка системы векторов. Способы задания и переход между разными способами задания. Дать определение базиса и размерности линейного пространства. Связь между этими понятиями. Доказать теорему о единственности разложения вектора по базису. Привести пять примеров различных линейных пространств.

2.1 Линейные пространства. Определение, примеры.

Определение 7. Непустое множество $\mathcal{L}$ называется ***линейным пространством*** (афинным, векторным) над полем $\mathbb{P}$, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{L}$ выполнены линейность: $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \in \mathcal{L}$, и следующие аксиомы векторного пространства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\forall \vec{c} \in \mathcal{L}$: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\forall \vec{a}\ \exists \overrightarrow{0} \in \mathcal{L}$: $\vec{a} + \overrightarrow{0} = \vec{a}$.
4. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{a}' \in \mathcal{L}$: $\vec{a} + \vec{a}' = \overrightarrow{0}$.
5. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$.

Определение 8. ***Полем*** называется множество $\mathbb{P}$ произвольной природы, на котором заданы две бинарные операции ($+$ и $\cdot$) и которое подчиняется следующим аксиомам:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\forall \vec{c}$: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\forall \vec{a}\ \exists \overrightarrow{0} \in \mathbb{P}$: $\vec{a} + \overrightarrow{0} = \vec{a}$.
4. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{a}' \in \mathbb{P}$: $\vec{a} + \vec{a}' = \overrightarrow{0}$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
6. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.
7. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{e} \in \mathbb{P}$ (**единичный**): $\vec{a} \cdot \vec{e} = \vec{a}$.
8. $\forall \vec{a} \in \mathbb{P}, \vec{a} \neq \vec{0}\ \exists \vec{a}^{-1} \in \mathbb{P} : \vec{a} \cdot \vec{a}^{-1} = \vec{e}$.
9. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

Определение 9. Элементы линейного пространства называются (абстрактными) ***векторами***.

Пример.

- множество $\mathcal{V}_3(\mathcal{V}_2)$ всех *свободных векторов* в пространстве (на плоскости) с линейными операциями над векторами - линейное пространство.
- множество всех *геометрических векторов* в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости (рис. 2.1) с линейными операциями над векторами.

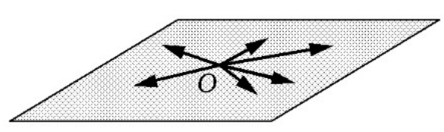


Рис. 1:

- множество $M_{mn}(\mathbb{R})$ матриц типа $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами.
- множество $K_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n, которые как функции можно складывать и умножать на действительные числа.
- множество всех решений данной ОСЛАУ (решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций).
- множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.
- $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

2.2 Базис и размерность пространства.

Определение 10. ***Базисом линейного пространства*** $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима.
2. каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 11. Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют ***размерностью линейного пространства***.

Обозначение. $n = \dim \mathcal{L}$, где n - размерность линейного пространства $\mathcal{L}$.

2.3 Связь между базисом и размерностью пространства.

Теорема 2.1. *Если* $\dim \mathcal{L} = n$*, то любая линейно независимая система из* n *векторов является его базисом.*

Доказательство.
Пусть система векторов $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n} \in \mathcal{L}$ линейно независима. Тогда для любого вектора $\vec{x} \in \mathcal{L}$ система векторов $\vec{x}, \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ линейно зависима, так как она содержит $n+1$ вектор, т.е. количество большее, чем размерность линейного пространства. Это значит, что существуют такие коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \vec{b_1} + \ldots + \alpha_n \vec{b_n} = \vec{0} \tag{1}$$

Заметим, что $\alpha_0 \neq 0$, так как в противном случае равенство (1) сводится к равенству

$$\alpha_1 \vec{b_1} + \ldots + \alpha_n \vec{b_n} = \vec{0},$$

причем среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ есть хотя бы один ненулевой (так как $\alpha_0 = 0$). Но это означало бы, что система векторов $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ линейно зависима.

Учитывая, что $\alpha_0 \neq 0$, из (1) находим

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{b_1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\vec{b_n}.$$

Так как вектор $\vec{x}$ был выбран произвольно, заключаем, что любой вектор в линейном пространстве $\mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации системы векторов $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$.

Поэтому эта система векторов, по предположению линейно независимая, является базисом в $\mathcal{L}$. ■

Теорема 2.2 (обратная)**.** *Если в линейном пространстве* $\mathcal{L}$ *существует базис из* n *векторов, то* $\dim \mathcal{L} = n$*.*

2.4 Теорема о единственности разложения вектора по базису.

Теорема 2.3. *В линейном пространстве разложение любого вектора по данному базису единственно.*

Доказательство. Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ произвольный базис $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ и предположим, что вектор $\vec{x}$ имеет в этом базисе два разложения

$$\vec{x} = x_1\vec{b_1} + \ldots + x_n\vec{b_n},$$
$$\vec{x} = x_1'\vec{b_1} + \ldots + x_n'\vec{b_n}.$$

Воспользуемся тем, что аксиомы линейного пространства позволяют преобразовывать линейные комбинации так же, как и обычные алгебраические выражения. Вычитая записанные равенства почленно, получим

$$(x_1 - x_1')\vec{b_1} + \ldots + (x_n - x_n')\vec{b_n} = 0$$

Так как базис - это линейно независимая система векторов, ее линейная комбинация равна 0, лишь если она тривиальная. Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю: $x_1 - x_1' = 0, \ldots, x_n - x_n' = 0$. Таким образом, $x_1 = x_1', \ldots, x_n = x_n'$ и два разложения вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ совпадают. ∎

2.5 Линейная оболочка системы векторов. Способы задания линейного подпространства и переход между разными способами задания.

Определение 12. ***Линейной оболочкой*** системы векторов $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ называется множество всех линейных комбинаций этой системы.

Теорема 2.4. *Линейная оболочка является линейным пространством.*

Обозначение. $\operatorname{span}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$.

Существует 2 способа задания линейного подпространства:

1. явное - $\mathcal{L} = \operatorname{span}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k})$.
2. неявное - $\mathcal{L}$ - решение однородной СЛАУ.

Переход между разными способами задания.

- Если подпространство задано неявно, то для перехода к явному способу достаточно решить однородную систему уравнений, выбрав какую-либо ФСР. Столбцы ФСР - это столбцы координат векторов некоторого базиса рассматриваемого подпространства. Следовательно, подпространство можно задать как линейную оболочку системы этих векторов.
- Опишем два способа перехода от явного описания к неявному.
  1. Выберем в линейном пространстве какой-либо базис и запишем векторы заданной системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ через координаты в выбранном базисе. Вектор $\vec{b}$ с координатами $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией заданной системы векторов тогда и только тогда, когда СЛАУ $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{pmatrix}$ совместна. Записывая условие совместности с помощью теоремы Кронекера-Капелли, получим уравнения, связывающие координаты вектора $\vec{b}$. Эти уравнения составляют СЛАУ, неявно описывающую подпространство $\mathcal{H} = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$.
  2. Пусть $\mathcal{H} = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$. Составим матрицу A из столбцов координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ в некотором базисе. Решим однородную СЛАУ $A^T\vec{x} = \vec{0}$, найдя какую-либо ФСР этой СЛАУ. Из столбцов ФСР составим матрицу F. Однородная СЛАУ $F^T\vec{x} = \vec{0}$ неявно описывает подпространство $\mathcal{H}$.

3 Линейные подпространства. Определения, теоремы, примеры и контрпримеры. Базис и размерность. Привести примеры задания пространств и подпространств без использования матриц и СЛАУ.

3.1 Линейные подпространства. Определения, теоремы, примеры и контрпримеры.

Определение 13. Подмножество $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$ называется ***линейным подпространством*** над полем $\mathbb{P}$, если $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{L}_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}\colon \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in \mathcal{L}$.

Теорема 3.1. *Линейное подпространство является линейным пространством.*

Пример.

1. В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого элемента. Эти подпространства называются ***несобственными***. Все остальные линейные пространства называются ***собственными***.

2. Множество всех свободных векторов, параллельных данной плоскости, образуют линейное подпространство пространства $\mathcal{V}_3$ всех свободных векторов трехмерного пространства.

3. В линейном пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют все симметрические матрицы.

Контрпример.

1. Множество всех векторов на плоскости, у которых первая координата положительна. Это множество не является подпространством, потому что оно не замкнуто относительно умножения на скаляр. Например, вектор $(1, 1)$ принадлежит этому множеству, но вектор $-1 \cdot (1, 1) = (-1, -1)$ — нет, так как первая координата отрицательна.

2. Множество всех векторов в $\mathbb{R}^3$, лежащих в первой октанте (где все координаты неотрицательны). Это множество не замкнуто относительно умножения на скаляр. Например, вектор $(1, 1, 1)$ принадлежит этому множеству, но вектор $-1 \cdot (1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$ не принадлежит.

3.2 Базис и размерность.

Определение 14. ***Базисом линейного подпространства*** $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима.
2. каждый вектор в линейном подпространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 15. Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном подпространстве называют ***размерностью линейного подпространства***.

3.3 Привести примеры задания пространств и подпространств без использования матриц и СЛАУ.

1. В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого элемента.

2. Множество всех свободных векторов, параллельных данной плоскости, образуют линейное подпространство пространства $\mathcal{V}_3$ всех свободных векторов трехмерного пространства.

3. Любая прямая, проходящая через начало координат $(0, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3$.

4. Линейное пространство - множество $P_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n. Для данного линейного пространства линейным подпространтсвом является множество $K_m[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей m, где $m \leqslant n$. При этом подпространством не является множество всех многочленов степени ровно m. Например, сумма двух многочленов степени m может иметь степень меньше m (например, x^2 + (-x^2) = 0).

5. Множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

4 Сумма и пересечение линейных подпространств. Доказать, что указанные множества являются линейными подпространствами. Нахождение базисов для суммы и пересечения подпространств. Теорема о размерностях подпространств, суммы и пересечения.

4.1 Сумма и пересечение линейных подпространств.

Определение 16. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - линейные подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Множество $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ всех векторов $\vec{x}$ вида $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, где $\vec{x_1} \in \mathcal{H}_1$, $\vec{x_2} \in \mathcal{H}_2$, называют ***суммой линейных подпространств*** $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

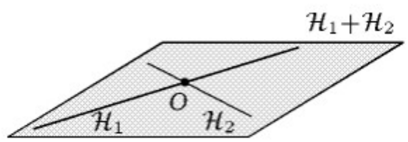


Рис. 2: Сумма линейных подпространств.

Определение 17. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - линейные подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Множество $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ всех векторов $\vec{x}$, где $\vec{x} \in \mathcal{H}_1$ и $\vec{x} \in \mathcal{H}_2$, называют ***пересечением линейных подпространств*** $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

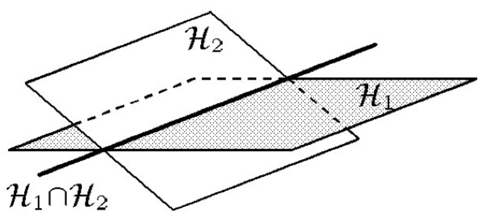


Рис. 3: Пересечение линейных подпространств.

4.2 Доказать, что указанные множества (сумма и пересечение ЛПП) являются линейными подпространствами.

Теорема 4.1. *Сумма линейных подпространств данного линейного пространства является линейным подпространством в том же линейном пространстве.*

Доказательство.

Проверим, выполняются ли условия определения линейного подпространства:

1. Рассмотрим два вектора $\vec{v}$ и $\vec{w}$ из множества $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Согласно определению суммы линейных подпространств, имеют место представления $\vec{v} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, $\vec{w} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$, где векторы $\vec{x_i}$, $\vec{y_i}$ принадлежат $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Складывая эти равенства, получаем
$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{x_1} + \vec{y_1}) + (\vec{x_2} + \vec{y_2}).$$
Сумма $\vec{x_1} + \vec{y_1}$ векторов $\vec{x_1}$ и $\vec{y_1}$ линейного подпространства $\mathcal{H}_1$ принадлежит $\mathcal{H}_1$. Точно так же сумма $\vec{x_2} + \vec{y_2}$ векторов $\vec{x_2}$ и $\vec{y_2}$ линейного подпространства $\mathcal{H}_2$ принадлежит $\mathcal{H}_2$. Поэтому вектор $\vec{v} + \vec{w}$ принадлежит множеству $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.
2. Произвольный вектор $\vec{v} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ имеет представление $\vec{v} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, где $\vec{x_1} \in \mathcal{H}_1$, $\vec{x_2} \in \mathcal{H}_2$. Для любого действительного числа λ получаем равенства
$$\lambda\vec{v} = \lambda(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \lambda\vec{x_1} + \lambda\vec{x_2}.$$
Так как вектор $\lambda\vec{x_1}$ принадлежит $\mathcal{H}_1$, а вектор $\lambda\vec{x_2}$ - $\mathcal{H}_2$, то вектор $\lambda\vec{u}$ является элементом множества $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Мы доказали, что множество $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ замкнуто относительно линейных операций объемлющего линейного пространства и поэтому, согласно определению линейного подпространства, оно является линейным подпространством. ■

Теорема 4.2. *Пересечение $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ двух линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$.*

Доказательство.

Проверим, выполняются ли условия определения линейного подпространства:

1. Если векторы $\vec{x_1}$ и $\vec{x_2}$ принадлежат $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, то каждый из этих векторов принадлежит как $\mathcal{H}_1$, так и $\mathcal{H}_2$. Поскольку $\mathcal{H}_1$ - линейное подпространство, то согласно определению линейного подпространства, заключаем, что вектор $\vec{x_1} + \vec{x_2}$, равный сумме векторов этого линейного подпространства, тоже принадлежит $\mathcal{H}_1$. Аналогично $\vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathcal{H}_2$, так как каждое из слагаемых является элементом линейного подпространства $\mathcal{H}_2$. Следовательно, $\vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.
2. Выберем произвольный вектор $\vec{x} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Тогда $\vec{x} \in \mathcal{H}_1$ и $\vec{x} \in \mathcal{H}_2$. Так как $\mathcal{H}_1$ является линейным подпространством, то произведение элемента $\vec{x}$ этого линейного подпространства на произвольное действительное число λ принадлежит $\mathcal{H}_1$. Но совершенно аналогично вектор $\lambda\vec{x}$ принадлежит и $\mathcal{H}_2$. Поэтому $\lambda\vec{x} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Итак, оба условия определения линейного подпространства выполнены. Следовательно, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ является линейным подпространством. ■

4.3 Нахождение базисов для суммы и пересечения подпространств.

Теорема 4.3. *Если* $\{e\}$ *- базис* $\mathcal{L}_1$, $\{f\}$ *- базис* $\mathcal{L}_2$, ..., $\{g\}$ *- базис* $\mathcal{L}_k$, *то* $\sum_{j=1}^k L_j = span(e, f, \dots, g)$.

Доказательство. $\vec{x} = \underbrace{\vec{x_1}}_{\text{расклад. по } e} + \underbrace{\vec{x_2}}_{\text{расклад. по } f} + \ldots + \underbrace{\vec{x_k}}_{\text{расклад. по } g}$ ■

Замечание. Набор $(e, f, \dots, g)$ может быть избыточен; нужны только ЛНЗ векторы.

Утверждение 4.4. $\dim \sum_{j=1}^k \mathcal{L}_j = rank(e, f, \dots, g)$.

Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ заданы с помощью СЛАУ. Базисом суммы подпространств $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_k$ будет любая её ФСР. Базисом пересечения подпространств $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{L}_k$ будет любая его ФСР.

4.4 Теорема о размерностях подпространств, суммы и пересечения.

Теорема 4.5. *Если $\mathcal{H}$ - линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$, то $\dim\mathcal{H} \leqslant \dim\mathcal{L}$. Если к тому же $\mathcal{H} \neq \mathcal{L}$, то $\dim\mathcal{H} < \dim\mathcal{L}$.*

Доказательство.
Любой базис линейного подпространства $\mathcal{H}$ является ЛНЗ системой векторов в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Если этот базис из $\mathcal{H}$ является базисом и в $\mathcal{L}$, то согласно теореме (2.2), $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}$ и ясно, что в этом случае $\mathcal{H} = \mathcal{L}$, так как у них общий базис. Если базис $\mathcal{H}$ не является базисом $\mathcal{L}$, то $\exists\vec{x} \in \mathcal{L}$, который не является линейной комбинацией векторов этого базиса $\implies$ $\mathcal{H} \neq \mathcal{L}$. Добавив вектор x к векторам базиса, получим ЛНЗ систему векторов. Значит, в $\mathcal{L}$ больше ЛНЗ векторов, чем в $\mathcal{H} \implies \dim\mathcal{H} < \dim\mathcal{L}$. ∎

Теорема 4.6. *Если $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$, то*

$$\dim(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = \dim\mathcal{H}_1 + \dim\mathcal{H}_2 - \dim(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2).$$

Доказательство.
В линейном подпространстве $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ выберем некоторый базис $\vec{e} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m})$. Множество $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ является линейным подпространством не только в $\mathcal{L}$, но и в его части $\mathcal{H}_1$. Поэтому выбранный базис можно дополнить некоторой системой векторов $f = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_l})$ до базиса (e, f) в линейном подпространстве $\mathcal{H}_1$. Аналогично систему e можно дополнить некоторым набором векторов $g = (\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_k})$ до базиса (e, g) в $\mathcal{H}_2$. Докажем, что система векторов

$$(e, f, g) = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m}, \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_l}, \vec{g_1}, \ldots, \vec{g_k})$$

является базисом в линейном пространстве $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Во-первых, установим, что указанная система линейно независима. Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1\vec{e_1} + \ldots + \alpha_m\vec{e_m} + \beta_1\vec{f_1} + \ldots + \beta_l\vec{f_l} + \gamma_1\vec{g_1} + \ldots \gamma_k\vec{g_k} = \vec{0}$$

Тогда для вектора

$$\vec{y} = \beta_1\vec{f_1} + \ldots + \beta_l\vec{f_l}. \tag{2}$$

выполнено равенство

$$\vec{y} = -\alpha_1\vec{e_1} - \ldots - \alpha_m\vec{e_m} - \gamma_1\vec{g_1} - \ldots - \gamma_k\vec{g_k}. \tag{3}$$

Согласно равенству (2) заключаем, что $\vec{y} \in \mathcal{H}_1$, а согласно (3) делаем вывод, что $\vec{y} \in \mathcal{H}_2$. Следовательно, $\vec{y} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ и потому имеет единственное разложение

$$\vec{y} = \delta_1\vec{e_1} + \ldots + \delta_m\vec{e_m}.$$

по базису e линейного пространства $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Рассмотрев разложение по (e, g) и (e, f), получим, что все коэффициенты равны нулю. Значит, система векторов (e, f, g) линейно независима.

Во-вторых, всякий вектор $\vec{y} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ есть линейная комбинация системы векторов (e, f, g). Действительно, такой вектор представим в виде $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$, где $\vec{y_1} \in \mathcal{H}_1$, $\vec{y_2} \in \mathcal{H}_2$. Вектор $\vec{y_1}$ представляется линейной комбинацией системы векторов (e, f), а $\vec{y_2}$ - линейной комбинацией системы векторов (e, g). Поэтому $\vec{y}$ разлагается по системе векторов (e, f, g).

Итак, система векторов (e, f, g) линейно независима и любой вектор из $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ разлагается по этой системе. Следовательно, (e, f, g) - базис $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Остается подсчитать размерности:

Линейное подпространство	базис	размерность
$\mathcal{H}_1$	(e, f)	$m + l$
$\mathcal{H}_2$	(e, g)	$m + k$
$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$	e	m
$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$	(e, f, g)	$m + l + k$

Таким образом, получаем утверждение теоремы. ∎

Следствие. $\dim(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \dim\mathcal{H}_1 + \dim\mathcal{H}_2$.

5 Прямая сумма подпространств. Критерий прямой суммы.

Определение 18. Сумма линейных подпространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_j$ данного пространства $\mathcal{H}$ называется ***прямой суммой***, если представление любого ее вектора $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_j, \vec{x}_j \in \mathcal{H}_j$ - единственно.

Обозначение. $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_j = \mathcal{H}$.

Теорема 5.1 (Критерий прямой суммы)**.** *Для линейных подпространств $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ конечномерного пространства $\mathcal{L}$ следующие утверждения равносильны:*

1. *Сумма $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ - прямая.*
2. *Совокупность их базисов линейно независима.*
3. *Совокупность базисов образует базис суммы.*
4. *Размерность суммы равна сумме размерностей $\mathcal{L}_j$.*
5. *В сумме существует хотя бы один вектор с единственным разложением по подпространствам.*
6. *Произвольная система $\vec{x}_j \in \mathcal{L}_j$, взятых по одному из любого $\mathcal{L}_j$, линейно независима.*
7. *Только для $k = 2$, т.е. $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \vec{0}$.*

Доказательство.

$1 \to 2$: Предположим, что линейно зависима $\Rightarrow$ разложение не единственно, т.е. $\vec{0} = \alpha_1(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) + \ldots + \alpha_n(\vec{x}_n - \vec{x}'_n)$, что противоречит определению прямой суммы.

$2 \to 3$: Совокупность базисов линейно независима и каждый вектор имеет единственное разложение, то есть совокупность базисов является базисом.

$3 \to 4$: суммируем базисы $\dim \Sigma \mathcal{L}_j = \Sigma \dim \mathcal{L}_j$.

$4 \to 5$: От противного $\Rightarrow$ линейная зависимость векторов базиса.

$5 \to 6$: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_k$, предположим линейную зависимость, т.е. $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$
$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ - не единственное.

$6 \to 1$: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ линейно независима $\Rightarrow$ сумма подпространств $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ прямая. Предположим обратное.
$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k$,
$\vec{x} = \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_k\vec{x}_k$
То есть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ линейно зависимы - противоречие.

$7 \leftrightarrow 4$: значит, $\dim \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \vec{0}$. ■

6 Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига. Пересечение линейных аффинных многообразий.

6.1 Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига.

Определение 19. Пусть $\mathcal{V}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $\mathcal{W}$ - это его подпространство. Зафиксируем вектор $\vec{a} \in \mathcal{V}$. Тогда множество $\vec{a}+\mathcal{W} = \{\, \vec{a}+\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathcal{W} \,\}$ называется ***линейным аффинным многообразием***.

При этом подпространство $\mathcal{W}$ называется ***направляющим подпространством***, а вектор $\vec{a}$ называется ***вектором сдвига***.

Заметим, что ЛАМ, вообще говоря, не является подпространством (например, потому что оно может не содержать $\vec{0} \in \mathcal{V}$.)

Доказательство.
Если $\vec{a} \notin \mathcal{W}$, то согласно аксиоме линейного пространства, и $(-\vec{a}) \notin \mathcal{W}$.

$$\text{Предположим, что } \underbrace{\vec{a}+(-\vec{a})}_{\vec{0}} \in \vec{a}+\mathcal{W}.$$

$$\exists \vec{w} \in \mathcal{W}(\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{a} + \underbrace{\vec{w}}_{\in \mathcal{W}}).$$

$$\exists \vec{w} \in \mathcal{W}((-\vec{a}) = \vec{w}).$$

$$\Downarrow$$

$$-\vec{a} \notin \mathcal{W}. \text{ Противоречие.}$$

Это и означает, что если $\vec{a} \notin \mathcal{W}$, то $\vec{a}+\mathcal{W}$ не является подпространством. ∎

Определение 20. ***Размерностью*** линейного аффинного многообразия $\vec{a}+\mathcal{W}$ называется размерность $\mathcal{W}$, т.е.

$$\dim(\vec{a}+\mathcal{W}) = \dim \mathcal{W}.$$

Определение 21. Пусть

1. $\mathcal{V}$ - линейное пространство,
2. $\dim \mathcal{V} = n$,
3. $\mathcal{W}$ - некоторое подпространство $\mathcal{V}$.

Тогда ***гиперплоскостью*** в нем будет называться ЛАМ вида $(\vec{a}+\mathcal{W})$, где $\dim \mathcal{W} = n-1$.

6.2 Пересечение линейных аффинных многообразий.

Теорема 6.1. *Пересечение двух линейных аффинных многообразий одного линейного пространства либо пусто, либо является линейным аффинным многообразием.*

Доказательство.

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{V}$, в нем есть некоторые линейные подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$. Зафиксируем $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$. Тогда возникают ЛАМ-я $(\vec{a}+\mathcal{U})$ и $(\vec{b}+\mathcal{W})$.

Рассмотрим их пересечение $(\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W})$.

1 случай: $(\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W}) = \emptyset$.

Тогда всё доказано. Достаточно привести пример, когда действительно $(\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W}) = \emptyset$.

2 случай: $(\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W}) \neq \emptyset$.

Зафиксируем некоторый вектор $\vec{c} \in \vec{a}+\mathcal{U}$ и $\vec{c} \in \vec{b}+\mathcal{W}$, т.е. $\vec{c} = \vec{a} + \underbrace{\vec{u}}_{\in\mathcal{U}} = \vec{b} + \underbrace{\vec{w}}_{\in\mathcal{W}}$.

Докажем, что $(\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W}) = \vec{c} + \underbrace{(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})}_{\text{явл. ЛПП } \mathcal{V}.}$.

$\subseteq$ Рассмотрим произвольный вектор $\vec{\varphi} = \vec{a} + \underbrace{\vec{x}}_{\in\mathcal{U}} = \vec{b} + \underbrace{\vec{y}}_{\in\mathcal{W}}$.

Докажем, что он лежит в $\vec{c} + (\mathcal{U}\cap\mathcal{W})$.

$$\vec{\varphi} = \vec{a} + \vec{x} = (\vec{a}+\vec{u}) + ((-\vec{u}) + \vec{x}) = \vec{c} + \underbrace{(\underbrace{(-\vec{u})}_{\in\mathcal{U}} + \underbrace{\vec{x}}_{\in\mathcal{U}})}_{\in\mathcal{U}} \in \vec{c}+\mathcal{U}.$$

Аналогично,

$$\vec{\varphi} = \vec{b} + \vec{y} = (\vec{b}+\vec{w}) + ((-\vec{w}) + \vec{y}) = \vec{c} + \underbrace{(\underbrace{(-\vec{w})}_{\in\mathcal{W}} + \underbrace{\vec{y}}_{\in\mathcal{W}})}_{\in\mathcal{W}} \in \vec{c}+\mathcal{W}.$$

Итак, $\vec{\varphi} - \vec{c} \in \mathcal{U}$ и $\vec{\varphi} - \vec{c} \in \mathcal{W}$. Значит, $\vec{\varphi} - \vec{c} \in \mathcal{U}\cap\mathcal{W} \Rightarrow \vec{\varphi} \in \vec{c} + (\mathcal{U}\cap\mathcal{W})$, ч.т.д.

$\supseteq$ Возьмем произвольный элемент $\vec{c}+\vec{z}$, где $\vec{z} \in \mathcal{U}$ и $\vec{z} \in \mathcal{W}$.

Докажем, что он лежит в $(\vec{a}+\mathcal{U})$. Действительно,

$$\vec{c}+\vec{z} = \vec{a} + \underbrace{(\underbrace{(-\vec{a})+\vec{c}}_{\vec{u}\in\mathcal{U}} + \underbrace{\vec{z}}_{\in\mathcal{U}})}_{\in\mathcal{U}} \in \vec{a}+\mathcal{U}.$$

Докажем, что он лежит в $(\vec{b}+\mathcal{W})$. Действительно,

$$\vec{c}+\vec{z} = \vec{b} + \underbrace{(\underbrace{(-\vec{b})+\vec{c}}_{\vec{w}\in\mathcal{W}} + \underbrace{\vec{z}}_{\in\mathcal{W}})}_{\in\mathcal{W}} \in \vec{b}+\mathcal{W}.$$

Таким образом, $\vec{c}+\vec{z} \in (\vec{a}+\mathcal{U}) \cap (\vec{b}+\mathcal{W})$.

∎

7 Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига. Представление k-мерного линейного аффинного многообразия. Решения неоднородной СЛАУ.

7.1 Представление k-мерного линейного аффинного многообразия.

Пусть даны $\mathcal{V}$ - линейное пространство над $\mathbb{P}$, $\mathcal{W}$ - его подпространство, $\vec{a} \in \mathcal{V}$ - некоторый вектор.

Определение 22. ***Аффинной линейной комбинацией*** произвольных s векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s \in \mathcal{V}$ называется вектор

$$\lambda_0\vec{a} + \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_s\vec{b}_s,$$

где числа λ_i удовлетворяют соотношению $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$.

Определение 23. ***Аффинной оболочкой заданных векторов*** $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s \in \mathcal{V}$ называется множество всех их аффинных линейных комбинаций.

Обозначение. $\mathrm{Aff}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s)$.

Теорема 7.1. *Всякое k-мерное ЛАМ $(\vec{a} + \mathcal{W})$ линейного пространства $\mathcal{V}$ может быть представлено как аффинная линейная оболочка $\leqslant k$ векторов.*

Доказательство.

$$(\vec{a} + \mathcal{W}) \text{ - это } k\text{-мерное ЛАМ.}$$
$$\Downarrow$$
$$\dim \mathcal{W} = k.$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Можно зафиксировать базис } \mathcal{W} \text{ - векторы } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k.$$
$$\text{Тогда рассмотрим векторы:}$$
$$\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{e}_1$$
$$\vec{v}_2 = \vec{a} + \vec{e}_2$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_k = \vec{a} + \vec{e}_k.$$
$$\text{И докажем, что } \vec{a} + \mathcal{W} = \mathrm{Aff}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k).$$

- $\subseteq$ Возьмем любой $\vec{a} + \vec{w} \in \vec{a} + \mathcal{W}$.
  Тогда
  $$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{w} &= \vec{a} + \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k = \\ &= \vec{a} + \lambda_1(\vec{v}_1 - \vec{a}) + \ldots + \lambda_k(\vec{v}_k - \vec{a}) = \\ &= \vec{a} + \lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_1\vec{a} + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k - \lambda_k\vec{a} = \\ &= (\underbrace{1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k}_{\lambda_0})\vec{a} + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \\ &= \lambda_0\vec{a} + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k, \end{aligned}$$
  при этом $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$.
  Значит, $\vec{a} + \vec{w} \in \mathrm{Aff}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$.
- $\supseteq$ Рассмотрим любой $\vec{x} \in \mathrm{Aff}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$.
  Тогда $\vec{x} = \lambda_0\vec{a} + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k$, где $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Выразим $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k$.
  Тогда
  $$\begin{aligned} \vec{x} &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k)\vec{a} + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \\ &= \vec{a} + \lambda_1(\vec{v}_1 - \vec{a}) + \ldots + \lambda_k(\vec{v}_k - \vec{a}) = \\ &= \vec{a} + \underbrace{\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k}_{\in\mathcal{W}} \in \vec{a} + \mathcal{W}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

7.2 Связь с решениями неоднородной СЛАУ.

Рассмотрим неоднородную СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Из курса Ан. Геом. известно, что если СЛАУ имеет бесконечно много решений, то они задаются так:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + c_1\vec{f}_1 + \ldots + c_k\vec{f}_k,$$

где $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ - вектор с постоянными коэффициентами, $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k \in \mathbb{R}^n$ - векторы, образующие ФСР, $c_1, \ldots, c_k$ - произвольные константы.

Если рассмотреть $\mathcal{W} = \mathrm{span}\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k\}$, то получится, что множество $\mathcal{U}$ всех решений СЛАУ будет представлять из себя ЛАМ:

$$\mathcal{U} = \vec{x}_0 + \mathcal{W}.$$

Представляете!

8 Линейное аффинное многообразие. Вектор сдвига. Пересечение линейного аффинного многообразия с подпространством, дополнительным к его направляющему подпространству.

8.1 Пересечение линейного аффинного многообразия с подпространством, дополнительным к его направляющему подпространству.

Теорема 8.1. *Пусть*

1. $\mathcal{V}$ *- линейное пространство.*
2. $\mathcal{W}$ *- его подпространство.*
3. $\mathcal{W}'$ *- прямое дополнение к* $\mathcal{W}$*.*
4. $\vec{a} \in \mathcal{V}$ *- фиксированный вектор.*

Тогда $(\vec{a} + \mathcal{W}) \cap \mathcal{W}'$ *- одноэлементное множество (т.е. множество, состоящее из одного вектора).*

Доказательство.
Рассмотрим произвольный вектор $\vec{\varphi} \in (\vec{a} + \mathcal{W}) \cap \mathcal{W}'$.
Тогда $\vec{\varphi} = \vec{a} + \vec{w}$, для некоторого $\vec{w} \in \mathcal{W}$ и $\vec{\varphi} \in \mathcal{W}'$.
Так как $\mathcal{W}'$ - прямое дополнение к $\mathcal{W}$, то вектор $\vec{\varphi}$ единственным образом раскладывается в сумму векторов из $\mathcal{W}$ и из $\mathcal{W}'$:

$$\underbrace{\vec{\varphi}}_{\in \mathcal{W}'} = \underbrace{\vec{0}}_{\in \mathcal{W}} + \underbrace{\vec{\varphi}}_{\in \mathcal{W}'} \text{ - вот оно, это единственное разложение.} \tag{4}$$

Такое же разложение рассмотрим для $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{z}}_{\in \mathcal{W}} + \underbrace{\vec{z'}}_{\in \mathcal{W}'} \text{ - оба вектора определены единственным образом} \tag{5}$$

Тогда

$$\vec{\varphi} = \vec{a} + \vec{w} = (\vec{z} + \vec{z'}) + \vec{w} = \underbrace{(\vec{z} + \vec{w})}_{\in \mathcal{W}} + \underbrace{\vec{z'}}_{\in \mathcal{W}'}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) имеем: $\vec{\varphi} = \vec{z'}$, а $\vec{z'}$ определяется единственным образом из (5). ■

9 Скалярное произведение, примеры (привести три примера). Косинус. Евклидовы пространства. Понятие метрики и нормы, способы задания норм (привести три примера).

9.1 Скалярное произведение, примеры (привести три примера). Евклидовы пространства.

Определение 24. Пусть дано линейное пространство $\mathcal{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots\}$. Множество вида $\{(\vec{a}, \vec{a}), (\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{a}, \vec{d}), \dots, (\vec{b}, \vec{a}), (\vec{b}, \vec{b}), (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{d}), \dots\}$ называется ***декартовым квадратом*** $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Определение 25. Отображение $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{V}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, называется ***скалярным произведением***, если выполнены 4 аксиомы:
1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ - аддитивность по первому аргументу.
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$ - однородность по первому аргументу.
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Определение 26. Вещественное линейное пространство с так введенным скалярным произведением называется ***евклидовым пространством***.

Обозначение. $\mathcal{E}$.

Определение 27. Отображение $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, где $\mathcal{V}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, называется ***скалярным произведением***, если выполнены 4 аксиомы:
1. $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$.
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ - аддитивность по первому аргументу.
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$ - однородность по первому аргументу.
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Определение 28. Комплексное линейное пространство с так введенным скалярным произведением называется ***унитарным пространством***.

Обозначение. $\mathcal{U}$.

Пример.
1. В линейных пространствах $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$: $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.
2. В арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^n$: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.
3. Линейное пространство $C[0, 1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ становится евклидовым, если в нем ввести скалярное произведение:
$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Свойства скалярного произведения.

1°. $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$.

$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{y} + \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$.

2°. $(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \overline{\lambda}(\vec{x}, \vec{y})$.

$(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \overline{(\lambda\vec{y}, \vec{x})} = \overline{\lambda \cdot (\vec{y}, \vec{x})} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(\vec{y}, \vec{x})} = \overline{\lambda}(\vec{x}, \vec{y})$.

3°. $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$.

$(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, 0 \cdot \vec{0}) = \overline{0} \cdot (\vec{x}, \vec{0}) = 0 \cdot (\vec{x}, \vec{0}) = 0$.

4°. $(\forall \vec{y} \colon (\vec{x}, \vec{y}) = 0) \implies \vec{x} = \vec{0}$.

Возьмем $\vec{y} = \vec{x}$. Тогда $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Значит, по определению $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

5°. Любое подпространство $\mathcal{E}$ $(\mathcal{U})$ само является евклидовым (унитарным).

Непосредственная проверка всех аксиом ленейного пространства и скалярного произведения.

9.2 Понятие нормы, способы задания норм (привести три примера).

Определение 29. Функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{V}$, которая каждому вектору ставит в соответствие вещественное число, называется ***нормой***, если выполнены 3 аксиомы:

1. $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, причем $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника).

Определение 30. Линейное пространство с заданной нормой называется ***нормированным***.

Теорема 9.1. *Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму* $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Доказательство.

Проверим норму с помощью трех аксиом:

1. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0 \implies$ заданная функция определена для любого вектора $\vec{x}$ евклидова пространства.
2. $\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x})} = \sqrt{\lambda^2(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.
3. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Используя это неравенство, получаем:

$$\begin{aligned} &\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \leqslant (\vec{x}, \vec{x}) + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + (\vec{y}, \vec{y}) = \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \implies \|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

■

Способы задания норм (привести три примера).

Определение 31. Норма вида $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ называется ***евклидовой*** (l_2)

Определение 32. Норма вида $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ называется ***октаэдрической*** (l_1)

Определение 33. Норма вида $\|\vec{x}\|_\infty = max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ называется ***кубической*** (l_∞)

9.3 Понятие метрики.

Определение 34. Пусть M - произвольное непустое множество. Отображение декартова квадрата $M \times M$ на поле $\mathbb{R}$ называется метрикой, если оно удовлетворяет трем аксиомам:

1. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$.
2. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \geqslant 0$, причем $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$.
3. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$ - неравенство треугольника.

Пример.

1. $M = \mathbb{R}, \rho(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$.
2. M - произвольное непустое множество. Тогда дискретная метрика:
   $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \neq \vec{y} \\ 0, & \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$.

9.4 Косинус.

Определение 35. ***Косинусом угла между*** $\vec{x}$ и $\vec{y} \in \mathcal{V}$ называется величина $\cos\widehat{(\vec{x},\vec{y})} = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$, $\varphi \in [0,\pi]$.

Определение 36. Пусть $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$. Тогда ***углом*** $\widehat{(\vec{x},\vec{y})}$ называется число $\arccos\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}}$.

9.5 *Полезные факты, которые тоже могут быть на экзамене.

Лемма 1.

Пусть

1. $\mathcal{E}$ - n-мерное евклидово пространство;
2. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - некоторый базис $\mathcal{E}$;
3. $\vec{x}_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$;
4. $\vec{y}_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - столбец координат $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$;

Тогда

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T \Gamma_e \vec{y}_e.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\vec{x}, \vec{y}) &= (\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j)) = \\ &= \vec{x}_e^T \Gamma_e \vec{y}_e,\end{aligned}$$

где Γ_e - матрица Грама для системы векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. ■

Следствие.

Пусть e - ОНБ $\mathcal{E}$. Тогда матрица Грама для этого базиса является единичной. Поэтому

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T E \vec{y}_e = \vec{x}_e^T \vec{y}_e = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

В частности,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_e^T x_e} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

10 Евклидово пространство. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, вывод формулы. Построение ортонормированного базиса.

10.1 Евклидово пространство.

Определение 37. Отображение $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{V}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, называется ***скалярным произведением***, если выполнены 4 аксиомы:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ - аддитивность по первому аргументу.
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$ - однородность по первому аргументу.
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Определение 38. Вещественное линейное пространство с так введенным скалярным произведением называется ***евклидовым пространством***.

10.2 Ортонормированный базис.

Определение 39. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ***ортогональными***, если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Определение 40. Система векторов называется ***ортогональной***, если все векторы в ней попарно ортогональны.

Определение 41. Система векторов называется ***ортонормированной***, если она ортогональна и норма каждого вектора равна 1.

10.3 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, вывод формулы. Построение ортонормированного базиса.

Построить ортонормированный базис можно, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, при помощи алгоритма, который называют процессом ортогонализации Грама-Шмидта:

Пусть $f = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ - некоторый базис в евклидовом n-мерном пространстве $\mathcal{E}$. Модифицируя этот базис, мы будем строить новый базис $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$, который будет ортонормированным. Последовательно вычисляем векторы $\vec{g_1}$ и $\vec{e_1}$, $\vec{g_2}$ и $\vec{e_2}$ и т.д. по формулам:

$$
\begin{aligned}
&\vec{g_1} = \vec{f_1}, && \vec{e_1} = \frac{\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|};\\
&\vec{g_2} = \vec{f_2} - (\vec{f_2}, \vec{e_1}) \cdot \vec{e_1}, && \vec{e_2} = \frac{\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|};\\
&\vec{g_3} = \vec{f_3} - (\vec{f_3}, \vec{e_1}) \cdot \vec{e_1} - (\vec{f_3}, \vec{e_2}) \cdot \vec{e_2}, && \vec{e_3} = \frac{\vec{g_3}}{\|\vec{g_3}\|};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\\
&\vec{g_n} = \vec{f_n} - (\vec{f_n}, \vec{e_1}) \cdot \vec{e_1} - \ldots - (\vec{f_n}, \vec{e}_{n-1}) \cdot \vec{e}_{n-1}, && \vec{e_n} = \frac{\vec{g_n}}{\|\vec{g_n}\|}.
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Рассмотрим индукцию по количеству векторов n.

1. При $n = 1$ утверждение очевидно.
2. Пусть это утверждение выполнено для количества векторов, равного n, докажем его для $n + 1$.

   Т.к. утверждение верно для n векторов, то мы можем считать, что векторы $\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n}$ с указанными свойствами уже построены. Построим вектор $\vec{g}_{n+1}$ в виде

   $$\vec{g}_{n+1} = \vec{f}_{n+1} + \lambda_1 \vec{g_1} + \ldots + \lambda_n \vec{g_n}.$$

   Линейная оболочка векторов $\vec{g_1}, \ldots, \vec{g}_{n+1}$ совпадает с $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f}_{n+1}$ при любых λ_i, поэтому мы будем подбирать коэффициенты λ_i так, чтобы выполнялось условие $(\vec{g}_{n+1}, \vec{g_i}) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим скалярное произведение

   $$0 = (\vec{g}_{n+1}, \vec{g_i}) = (\vec{f}_{n+1}, \vec{g_i}) + \lambda_1 (\vec{g_1}, \vec{g_i}) + \ldots + \lambda_n (\vec{g_n}, \vec{g_i}).$$

   Поскольку $(\vec{g_j}, \vec{g_i}) = 0$ при $j \neq i$ по предположению индукции, то

   $$0 = (\vec{f}_{n+1}, \vec{g_i}) + \lambda_i (\vec{g_i}, \vec{g_i}),$$

   следовательно

   $$\lambda_i = -\frac{(\vec{f}_{n+1}, \vec{g_i})}{(\vec{g_i}, \vec{g_i})} \text{ (знаменатель отличен от нуля).}$$

   Таким образом, чтобы получить вектор $\vec{g}_{n+1}$, надо из вектора $\vec{f}_{n+1}$ вычесть его ортогональные проекции на векторы $\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n}$:

   $$\vec{g}_{n+1} = \vec{f}_{n+1} - \frac{(\vec{f}_{n+1}, \vec{g_1})}{(\vec{g_1}, \vec{g_1})} \cdot \vec{g_1} - \ldots - \frac{(\vec{f}_{n+1}, \vec{g_n})}{(\vec{g_n}, \vec{g_n})} \cdot \vec{g_n}.$$

■

10.4 *Полезные факты, которые тоже будут на экзамене.

Определение 42. Линейные подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ называются ***ортогональными***, если $\forall \vec{x} \in \mathcal{L}_1, \forall \vec{y} \in \mathcal{L}_2 \colon \vec{x} \perp \vec{y}$.

Теорема 10.1. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m}$. Предположим, что для действительных коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \ldots + \alpha_m \vec{e_m} = \vec{0}. \tag{7}$$

Умножим это равенство скалярно на какой-либо вектор $\vec{e_i}$:

$$(\alpha_1 \vec{e_1} + \ldots + \alpha_m \vec{e_m}, \vec{e_i}) = (\vec{0}, \vec{e_i}).$$

$$\alpha_1 (\vec{e_1}, \vec{e_i}) + \ldots + \alpha_i (\vec{e_i}, \vec{e_i}) + \ldots + \alpha_m (\vec{e_m}, \vec{e_i}) = 0.$$

Так как система ортогональна, то все слагаемые слева, кроме одного, равны нулю, т.е.

$$\alpha_i (\vec{e_i}, \vec{e_i}) = 0. \tag{8}$$

Так как вектор $\vec{e_i}$ ненулевой, то $(\vec{e_i}, \vec{e_i}) \neq 0$. Поэтому из (8) следует, что $\alpha_i = 0$. Индекс i можно было выбирать произвольно, так что на самом деле все коэффициенты a_i являются нулевыми. Значит, равенство (7) возможно лишь при нулевых коэффициентах. Значит, система векторов $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m}$ линейно независима. ∎

Следствие. Ортонормированная система векторов линейно независима.

Следствие. В n-мерном пространстве ортогональная/ортонормированная система из n векторов является базисом.

Определение 43. Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то этот базис называют ***ортогональным***.

Определение 44. Ортогональный базис называется ***ортонормированным***, если каждый вектор этого базиса имеет норму (длину), равную единице.

Теорема 10.2. *В конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

11 Матрица Грама. Свойства матрицы.

Определение 45. Пусть даны векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ в некотором евклидовом пространстве. ***Матрицей Грама*** этой системы называется квадратная матрица Γ размера $m \times m$, элементы которой задаются скалярными произведениями:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & (\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_1, \vec{x}_m) \\ (\vec{x}_2, \vec{x}_1) & (\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_2, \vec{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{x}_m, \vec{x}_1) & (\vec{x}_m, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_m, \vec{x}_m) \end{pmatrix},$$

где $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ обозначает скалярное произведение векторов $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_j$.

Свойства матрицы.

1°. $\Gamma = \Gamma^T$ (матрица Грама симметрическая).

2°. Матрица Грама для ОНБ: $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

3°. $\det \Gamma = 0 \iff \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ - линейно зависимые.

4°. $\det \Gamma \geqslant 0$.

5°. $\det \Gamma$ равен квадрату объёма параллелепипеда, натянутого на векторы.

6°. Пусть $X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_m \end{pmatrix}$, тогда $X^T X = \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$.

12 Проекция вектора на подпространство вдоль другого подпространства. Расстояние от вектора до подпространства и угол между вектором и подпространством (для случая евклидовых пространств).

Рассмотрим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

12.1 Проекция вектора на подпространство вдоль другого подпространства.

Определение 46. ***Проекцией вектора $\vec{x}$ на подпространство $\mathcal{L}_1$ вдоль подпространства $\mathcal{L}_2$*** называется вектор x_1 из представления $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, $\vec{x_1} \in \mathcal{L}_1, \vec{x_2} \in \mathcal{L}_2$.

12.2 Расстояние от вектора до подпространства и угол между вектором и подпространством (для случая евклидовых пространств).

Определение 47. ***Расстоянием от вектора $\vec{a}$ до подпространства*** $\mathcal{L}_1$ называется норма вектора, опущенного из конца вектора $\vec{a}$ на линейное подпространство $\mathcal{L}$ и ортогонального ему, т.е. норма ортогональной составляющей вектора $\vec{a}$ относительно подпространства $\mathcal{L}$.

Определение 48. ***Углом между вектором $\vec{a}$ и подпространством*** $\mathcal{L}_1$ называется угол между вектором $\vec{a}$ и его ортогональной проекцией на подпространство $\mathcal{L}_1$. (имеется в виду векторной ортогональной проекцией, не скалярной, как в АГ).

$\varphi = \widehat{\vec{a}, \mathcal{L}} = \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \arccos(\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$, где $\vec{b}$ - ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на подпространство $\mathcal{L}_1$.

13 Прямое дополнение. Ортогональное дополнение.

13.1 Прямое дополнение.

Определение 49. Если линейные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ образуют прямую сумму, причем $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$, то говорят, что $\mathcal{H}_1$ является ***прямым дополнением*** для $\mathcal{H}_2$.

Теорема 13.1. *Любое линейное подпространство $\mathcal{H}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ имеет прямое дополнение.*

Доказательство.

Если линейное подпространство $\mathcal{H}$ совпадает со всем линейным пространством $\mathcal{L}$, то в качестве его прямого дополнения следует взять другое несобственное подпространство: $\mathcal{H}_1 = \{\vec{0}\}$. Точно так же прямым дополнением к нулевому подпространству $\{\vec{0}\}$ является само линейное пространство $\mathcal{L}$. Опуская эти два тривиальных случая, полагаем, что линейное подпространство $\mathcal{H}_1$ является собственным.

Выберем в $\mathcal{H}$ какой-либо базис $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})$ и дополним его системой векторов $f = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m})$ до базиса в $\mathcal{L}$. Положим, $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}(f)$. Тогда $\mathcal{H} + \mathcal{H}_1 = \mathcal{L}$, так как сумма $\mathcal{H} + \mathcal{H}_1$ содержит все векторы системы (e, f), являющейся базисом в $\mathcal{L}$, а значит, и любой другой вектор линейного пространства. Остается доказать, что сумма $\mathcal{H} + \mathcal{H}_1$ является прямой.

Выберем произвольный вектор $\vec{y} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1$. Тогда, с одной стороны, $\vec{y} = \alpha_1 \vec{e_1} + \ldots + \alpha_k \vec{e_k}$, так как $\vec{y}$ принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}$, а с другой стороны, $\vec{y} = \beta_1 \vec{f_1} + \ldots + \beta_m \vec{f_m}$, так как $\vec{y}$ принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}_1$. Эти две линейные комбинации есть два разложения вектора в базисе (e, f) линейного пространства $\mathcal{L}$ и, следовательно, должны совпадать:

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \ldots + \alpha_k \vec{e_k} = \beta_1 \vec{f_1} + \ldots + \beta_m \vec{f_m},$$

или

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \ldots + \alpha_k \vec{e_k} - \beta_1 \vec{f_1} - \ldots - \beta_m \vec{f_m} = \vec{0}.$$

Система векторов (e, f) линейно независима, так как является базисом. Поэтому из последнего равенства векторов следует, что в нем все коэффициенты нулевые. Значит, вектор $\vec{y}$ является нулевым, а так как он выбирался произвольно, то $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1 = \{\vec{0}\}$. Поэтому линейные подпространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ образуют прямую сумму. ■

13.2 Ортогональное дополнение.

Определение 50. ***Ортогональным дополнением*** линейного подпространства $\mathcal{H}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называют множество $\mathcal{H}^{\perp}$ всех векторов $\vec{x} \in \mathcal{E}$, ортогональных каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{H}$.

Теорема 13.2. *Ортогональное дополнение $\mathcal{H}^{\perp}$ линейного подпространства $\mathcal{H}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$, причем $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$ и $\dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{H}^{\perp} = \dim \mathcal{E}$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$, нужно проверить 2 условия определения линейного подпространства:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}^{\perp}$ умножим скалярно их сумму на произвольный вектор $\vec{h} \in \mathcal{H}$. Получим:
$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{h}) = (\vec{x}, \vec{h}) + (\vec{y}, \vec{h}) = 0 + 0 = 0,$$
т.е. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}^{\perp} : \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{H}^{\perp}$.

2. Теперь рассмотрим произведение $\vec{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$ на произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$. Для произвольного вектора $\vec{h} \in \mathcal{H}$
$$(\lambda \vec{x}, \vec{h}) = \lambda(\vec{x}, \vec{h}) = \lambda \cdot 0 = 0,$$
и поэтому $\lambda \vec{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$, если $\vec{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$.

Следовательно, $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$.

Отметим, что любой вектор $\vec{x} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp}$ ортогонален самому себе: $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, так как любой вектор из $\mathcal{H}^{\perp}$ ортогонален любому вектору подпространства $\mathcal{H}$. Но вектор ортогонален самому себе лишь в случае, когда он нулевой. Поэтому $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp} = \{\vec{0}\}$, а сумма $\mathcal{H} + \mathcal{H}^{\perp}$ рассматриваемых линейных подпространств является прямой. Докажем, что эта прямая сумма совпадает со всем евклидовым пространством $\mathcal{E}$.

Выберем некоторый ортонормированный базис $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}$ в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ и дополним его до базиса $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}, \vec{f}_{m+1}, \dots, \vec{f_n}$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}, \dim \mathcal{E} = n$. Исходя из этого базиса построим при помощи процесса Грама-Шмидта ортонормированный базис $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e_n})$ в $\mathcal{E}$. Так как первые m векторов $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}$ исходного базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину, процесс ортогонализации оставит их без изменения, т.е. $\vec{e_i} = \vec{f_i}, i = \overline{1, m}$. Векторы $\vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e_n}$ ортогональны каждому из векторов $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}$ базиса линейного подпространства $\mathcal{H}$ и, следовательно, ортогональны $\mathcal{H}$, так как $\mathcal{H} = \operatorname{span}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$. Поэтому все они попадают в ортогональное дополнение $\mathcal{H}^{\perp}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in \mathcal{E}$ и запишем его разложение по базису e:
$$\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_n \vec{e_n}.$$
Легко увидеть, что $\vec{x_1} = x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_m \vec{e_m}$ есть вектор из $\mathcal{H}$, а $\vec{x_2} = x_{m+1} \vec{e}_{m+1} + \ldots + x_n \vec{e_n}$ есть вектор из $\mathcal{H}^{\perp}$, при этом $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$. Следовательно, $\vec{x} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$, и так как вектор $\vec{x}$ выбирался произвольно, то $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{E}$.

Согласно следствию (4.4) из теоремы (4.6) о размерностях суммы и пересечения подпространств, из соотношения $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{E}$ вытекает следующее равенство для размерностей: $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{H}^{\perp}$. ■

Следствие. Каково бы ни было линейное подпространство $\mathcal{H}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, любой вектор $\vec{x} \in \mathcal{E}$ можно однозначно представить в виде
$$\vec{x} = \underbrace{\vec{h}}_{\text{ортогональная проекция}} + \underbrace{\vec{h}^{\perp}}_{\text{ортогональная составляющая}},$$
где $\vec{h} \in \mathcal{H}, \vec{h}^{\perp} \in \mathcal{H}^{\perp}$.

14 Метод наименьших квадратов, обоснование, подробное описание, пример решения.

14.1 Метод наименьших квадратов, обоснование, подробное описание.

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно k неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{k1}x_k = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{k2}x_k = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{kn}x_k = b_n \end{cases} \tag{9}$$

Каждому набору неизвестных сопоставим числа

$$d_i = b_i - (a_{1i}x_1 + \ldots + a_{ki}x_k), \quad i = \overline{1,n},$$

которые называют **невязками уравнений** системы.

Отметим, что функция

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{n} [b_i - (a_{1i}x_1 + \ldots + a_{ki}x_k)]^2$$

на решениях системы равна нулю и положительна в остальных случаях. Поэтому ее можно рассматривать как оценку отклонения набора значений неизвестных от точного решения системы. Если система несовместна, то часто возникает задача найти вместо отсутствующих решений такой набор значений неизвестных, который приводит к наименьшему значению функции f. Такой подход в решении задачи, не имеющей решения, называют **методом наименьших квадратов**, поскольку ищется минимум функции, являющейся суммой квадратов.

Будем трактовать столбцы коэффициентов при неизвестных, столбец свободных членов как столбцы координат векторов $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}, \vec{b}$ евклидова арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартном базисе. Тогда и набор невязок уравнений системы можно рассматривать в виде вектора $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{d} = \vec{b} - (x_1\vec{a_1} + \ldots + x_k\vec{a_k}).$$

Число $\|\vec{d}\|$ **назовем невязкой СЛАУ** (9). Вычислив скалярный квадрат вектора $\vec{d}$, находим

$$\|\vec{d}\|^2 = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Значит, задача сводится к нахождению таких действительных коэффициентов $x_1, \ldots, x_k$, при которых $\|\vec{d}\| \to \min$.

Введем линейное подпространство $\mathcal{H} = \operatorname{span}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k})$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$. Разложим вектор $\vec{b}$ на его ортогональную проекцию на линейное подпространство $\mathcal{H}$ и соответствующую ортогональную составляющую:

$$b = \underbrace{\vec{h}}_{\text{ортогональная проекция.}} + \underbrace{\vec{h}^\perp}_{\text{ортогональная составляющая.}}, \quad \vec{h} \in \mathcal{H},\ \vec{h}^\perp \in \mathcal{H}^\perp.$$

Тогда

$$\vec{d} = \vec{h} + \vec{h}^\perp - (x_1\vec{a_1} + \ldots + x_k\vec{a_k}) = \vec{h}^\perp + (\vec{h} - x_1\vec{a_1} - \ldots - x_k\vec{a_k}) = \vec{h}^\perp + \vec{d_0},$$

где

$$\vec{d_0} = \vec{h} - x_1\vec{a_1} - \ldots - x_k\vec{a_k} \in \mathcal{H}.$$

Так как $\vec{d_0} \perp \vec{h}^\perp$, то по теореме Пифагора заключаем, что

$$\|\vec{d}\|^2 = \|\vec{d_0}\|^2 + \|\vec{h}^\perp\|^2.$$

Ортогональная составляющая $\vec{h}^\perp$ вектора невязок постоянна и от выбора коэффициентов x_i не зависит. Поэтому минимизация величины $\|\vec{d}\|^2$ сводится к поиску минимума величины $\|\vec{d_0}\|^2$. Эта величина является неотрицательной и достигает минимума, если обращается в нуль, т.е. при условии, что $\vec{d_0} = \vec{0}$. А это равносильно тому, что $\vec{d} = \vec{h}^\perp$, т.е. вектор невязок принадлежит ортогональному дополнению $\mathcal{H}^\perp$ и поэтому является решением системы

$$(\vec{a_j}, \vec{d}) = 0, \quad j = \overline{1,k}, \tag{10}$$

или

$$(\vec{a_j}, \vec{b} - (x_1\vec{a_1} + \ldots + x_k\vec{a_k})) = 0, \quad j = \overline{1,k},$$

После преобразований получаем СЛАУ

$$\begin{cases} (\vec{a_1}, \vec{a_1})x_1 + \ldots + (\vec{a_1}, \vec{a_k})x_k = (\vec{a_1}, \vec{b}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\vec{a_k}, \vec{a_1})x_1 + \ldots + (\vec{a_k}, \vec{a_k})x_k = (\vec{a_k}, \vec{b}) \end{cases} \tag{11}$$

относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_k$. Матрица этой системы $\Gamma = ((\vec{a_i}, \vec{a_j}))$ - это квадратная матрица порядка k, представляющая собой матрицу Грама для системы векторов $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}$. (*При этом СЛАУ вида $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ называют **нормальной**.)

СЛАУ (11) всегда совместна: ее решениями являются коэффициенты разложения вектора $\vec{h} \in \mathcal{H} = \mathrm{span}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k})$ по системе векторов $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}$, так как в этом случае вектор $\vec{d} = \vec{b} - \vec{h} = \vec{h}^{\perp}$ - решение системы (10). Если система векторов $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}$ линейно независима, то матрица СЛАУ (11) невырождена и эта система имеет единственное решение $x_1, \ldots, x_k$, которое дает решение исходной задачи. Если же указанная система векторов линейно зависима, то матрица СЛАУ (11) вырождена. В этом случае квадратная СЛАУ (11), будучи совместной, имеет бесконечно много решений $x_1, \ldots, x_k$ (*псевдорешений исходной СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$) и каждое из них дает решение исходной задачи (т.е. $\|\vec{d}\| \to \min$). (*Среди этих решений можно выбирать те, которые удовлетворяют каким-то дополнительным условиям: минимальное по норме (нормальное псевдорешение) и др.).

Пусть $\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ - и есть то наилучшее приближение вектора $\vec{b}$, которое мы найдем.

Абсолютная ошибка приближения $= \left\|\vec{b} - \vec{x}\right\|$.

Относительная ошибка приближения $= \frac{\|\vec{b}-\vec{x}\|}{\|\vec{b}\|}$.

14.2 Пример решения.

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдем элементы матрицы Грама $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = A^T A$:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 1 + 4 + 4 = 9$$
$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 3 - 2 - 6 = -5$$
$$(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 9 + 1 + 9 = 19$$

Найдем элементы матрицы $A\vec{b}$:

$$(\vec{a}_1, \vec{b}) = 16 - 12 + 8 = 12$$
$$(\vec{a}_2, \vec{b}) = 48 + 6 - 12 = 42$$

Найдем решение СЛАУ $A^T A\vec{x} = A\vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 42 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 33 & 96 \\ 0 & -146 & -438 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -33 & -96 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$\vec{x} = 3\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ – наилучшее приближение вектора $\vec{b}$.

Абсолютная ошибка $= \left\|\vec{b} - \vec{x}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{146}$.

Относительная ошибка $= \frac{\|\vec{b}-\vec{x}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sqrt{146}}{\sqrt{308}} = \frac{\sqrt{11242}}{154}$.

15 Псевдообратная матрица. Алгоритм нахождения.

Определение 51. Для любой матрицы A существует такая матрица A^+, что нормальное псевдорешение СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с произвольным вектор-столбцом $\vec{b}$ имеет вид $\vec{x} = A^+\vec{b}$. Матрицу A^+ называют ***псевдообратной*** по отношению к матрице A.

15.1 Алгоритм нахождения, опираясь на нормальное псевдорешение.

Рассмотрим СЛАУ $A\vec{x} = \vec{e}_i$, в правой части которой записан i-й вектор стандартного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ее нормальное псевдорешение $A^+\vec{e}_i$ - это i-й столбец псевдообратной матрицы. Вычислив все n столбцов, получим A^+. Таким образом, i-й столбец псевдообратной матрицы a_i можно найти из системы

$$\begin{pmatrix} A^TA \\ F^T \end{pmatrix} a_i = \begin{pmatrix} A^T\vec{e}_i \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

где F - матрица, составленная из столбцов ФСР СЛАУ $A\vec{x} = \vec{0}$. Объединив по правилам действий с блочными матрицами n систем в одно матричное уравнение, получим

$$\begin{pmatrix} A^TA \\ F^T \end{pmatrix} A^+ = \begin{pmatrix} A^T \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

Итак, алгоритм состоит в следующем:

1. Найти F - матрицу, составленную из столбцов ФСР СЛАУ $A\vec{x} = \vec{0}$.
2. Транспонируем матрицу F, чтобы в дальнейшем добавить F^T как строки новой матрицы.
3. Найдем A^T.
4. Найдем A^TA.
5. Составим матричное уравнение ниже и решим его методом элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} A^TA \\ F^T \end{pmatrix} A^+ = \begin{pmatrix} A^T \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A^TA & A^T \\ F^T & \vec{0} \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{c|c} E & A^+ \end{array}\right).$$

15.2 *Алгоритм, основанный на понятии скелетного разложения.

Скелетное разложение заключается в представлении матрицы A типа $m \times n$ ранга k в виде $A = UV$, где матрица U имеет тип $m \times k$ и ранг k (матрица максимального столбцового ранга), а матрица V - тип $k \times n$ и ранг k (матрица максимального строчного ранга).

Итак, алгоритм состоит в следующем:

1. Матрицу A с помощью элементарных преобразований приводим к ступенчатому виду. Выбрав базисный минор, элементарыми преобразованиями строк приводим его к единичному виду. Отбросив в полученной матрице нулевые строки, получим матрицу V. Матрицу U составляют столбцы матрицы A, которые стоят на тех же местах, что и базисные столбцы матрицы ступенчатого вида.

2. Если U - матрица максимального столбцового ранга, то $U^+ = (U^TU)^{-1}U^T$.

3. Если V - матрица максимального строчного ранга, то $V^+ = V^T(VV^T)^{-1}$.

4. Если A - ненулевая матрица, а UV - ее скелетное разложение, то
$$A^+ = V^+U^+ = V^T(VV^T)^{-1}(U^TU)^{-1}U^T.$$

Пример.

A $= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1) $V_{k\times n}$ - матрица max строчного ранга.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = V.$$

$$VV^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем $(VV^T)^{-1}$ с помощью элементарых преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/14 & 6/14 \\ 0 & 1 & 6/14 & 10/14 \end{array}\right).$$

$$(VV^T)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$V^+ = V^T(VV^T)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $U_{m\times k}$ - матрица max столбцового ранга.

U $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$U^TU = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Найдем $(U^TU)^{-1}$ с помощью элементарых преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 10 & 1 & 0 \\ 10 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 12/8 & -10/8 \\ 0 & 1 & -10/8 & 9/8 \end{array}\right).$$

$$(U^TU)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$U^+ = (U^TU)^{-1}U^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = V^+U^+ = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -16 \\ -8 & 8 & -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -8 \\ -4 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

16 Псевдорешение, алгоритм нахождения. Нормальное псевдорешение, алгоритм нахождения. Определение, смысл. Рассмотреть случаи для совместных и несовместных систем.

16.1 Псевдорешение, алгоритм нахождения.

Рассмотрим СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где A - матрица размера $m \times n, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Каждому столбцу $\vec{x}$ можно сопоставить столбец $\vec{b} - A\vec{x}$, называемый *вектором невязок*. Евклидову норму этого столбца $\left\|\vec{b} - A\vec{x}\right\| = \sqrt{(\vec{b} - A\vec{x}, \vec{b} - A\vec{x})}$ называют *нормой невязки*.

Для любой СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ найдется хотя бы один столбец $\vec{x}$, на котором норма невязки $v(x) = \left\|\vec{b} - A\vec{x}\right\|$ принимает наименьшее значение v_0. Каждый такой столбец называется *псевдорешением* СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$. Итак,

Определение 52. Вектор-столбец $\vec{x}$, такой, что норма невязки $\left\|\vec{b} - A\vec{x}\right\|$ СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ принимает наименьшее значение, называется ***псевдорешением***.

Если система совместна, то минимальное значение нормы невязки равно нулю и множество псевдорешений совпадает с множеством решений системы. Множество псевдорешений СЛАУ совпадает с множеством решений соответствующей *нормальной системы* $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ (*см. 14 "билет").

16.2 Нормальное псевдорешение, алгоритм нахождения.

Среди всех псевдорешений СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ есть единственное псевдорешение, имеющее наименьшую норму. Оно называется *нормальным*. Итак,

Определение 53. Наименьшее по норме псевдорешение СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ называется ***нормальным псевдорешением***.

Нормальное псевдорешение СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ является решением системы уравнений, которая получается, если к нормальной системе $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ добавить уравнения СЛАУ $F^T\vec{x} = \vec{0}$, где F - матрица, составленная из столбцов ФСР СЛАУ $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} A^T A \\ F^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} A^T\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

16.3 Пример для несовместной системы.

Пример. Рассмотрим простейшую систему

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

двух уравнений с двумя неизвестными. Видно, что эта система несовместна. Последовательно вычисляем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, нормальная СЛАУ в этом случае состоит из двух одинаковых уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Множество решений нормальной системы, т.е. множество пар x, y, дающих минимальную невязку в исходной системе, на плоскости изображаются прямой $x + y = 0.5$ (рис. 4), а нормальным псевдорешением будет точка этой прямой, ближайшая к началу координат, т.е. точка с координатами $x = 0.25, y = 0.25$. Этой точке соответствует радиус-вектор с наименьшей нормой среди всех радиус-векторов точек прямой $x + y = 0.5$.

К слову, если одно из уравнений исходной системы умножить на коэффициент, то и множество решений нормальной системы, и нормальное псевдорешение данной системы изменятся, так как умножение на коэффициент, вообще говоря, меняет его невязку.

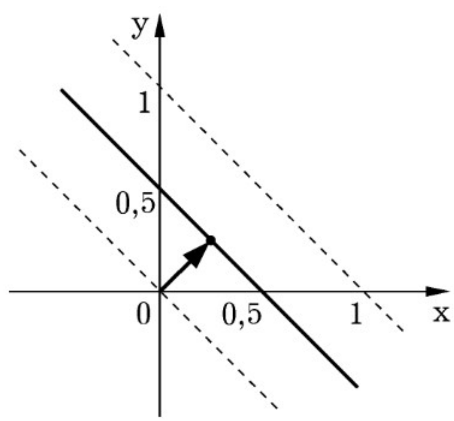


Рис. 4:

17 Матрица перехода от базиса к базису, вывод формулы для преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Обратный переход. Работа с тремя и более базисами.

17.1 Матрица перехода от базиса к базису.

Определение 54. ***Матрицей перехода*** от старого базиса к новому называется матрица, элементами ***столбцов*** которой являются координаты векторов нового базиса, разложенных по старому базису.

17.2 Вывод формулы для преобразования координат вектора при переходе к новому базису.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $b = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ и новый $c = (\vec{c_1}, \ldots, \vec{c_n})$. Разложим векторы базиса c по базису b:

$$\vec{c_i} = \alpha_{1i}\vec{b_1} + \ldots + \alpha_{ni}\vec{b_n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\vec{c_i} = b\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n},$$

или

$$c = bT_{b\to c},$$

где

$$T_{b\to c} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

17.3 *Полезное дополнение про преобразование координат вектора при переходе от старого базиса к новому.

Выберем произвольный вектор $\vec{x} \in \mathcal{L}$ и разложим его в старом базисе b:

$$\vec{x} = bx_b, \qquad x_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Разложение того же вектора в новом базисе c имеет вид:

$$\vec{x} = cx_c, \qquad x_c = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Найдем связь между старыми координатами x_b вектора $\vec{x}$ и его новыми координатами x_c. Из соотношений выше следует, что $bx_b = cx_c$. Учитывая, что $c = bT_{b\to c}$, получаем

$$bx_b = (bT_{b\to c})x_c,$$

или

$$bx_b = b(T_{b\to c}x_c).$$

Последнее равенство можно рассматривать как запись двух разложений одного и того же вектора $\vec{x}$ в базисе b. Разложениями соответствуют столбцы координат x_b и $T_{b\to c}x_c$, которые, согласно теореме 2.3 о единственности разложения вектора по базису, должны быть равны:

$$x_b = T_{b\to c}x_c, \qquad \text{или} \qquad x_c = T_{b\to c}^{-1}x_b.$$

17.4 Обратный переход. Работа с тремя и более базисами.

Свойства.

1°. Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

Доказательство.

Столбцы матрицы перехода - столбцы координат векторов нового **базиса** в старом. Следовательно, они, как и векторы базиса, линейно независимы. Значит, матрица T невырожденная и имеет обратную матрицу T^{-1}. ■

2°. Если в n-мерном линейном пространстве задан базис b, то для любой невырожденной квадратной матрицы T порядка n существует такой базис c в этом линейном пространстве, что T будет матрицей перехода то базиса b к базису c.

Доказательство.

Из невырожденности матрицы T следует, что ее ранг равен n, и поэтому ее столбцы, будучи базисными, линейно независимы. Эти столбцы являются столбцами координат векторов системы $c = bT_{b\to c}$. Линейная независимость столбцов матрицы T равносильна линейной независимости системы векторов c. Так как система c содержит n векторов, причем линейное пространство n-мерно, то согласно теореме (2.1), эта система является базисом. ■

3°. Если $T_{b\to c}$ - матрица перехода от старого базиса b к новому базису c линейного пространства, то $T^{-1}_{b\to c}$ - матрица перехода от базиса c к базису b.

Доказательство.

Матрица $T_{b\to c}$ невырождена, и поэтому из равенства $c = bT_{b\to c}$ следует, что $cT^{-1}_{b\to c} = b$. Последнее равенство означает, что столбцы матрицы $T^{-1}_{b\to c}$ являются столбцами координат векторов b относительно базиса c, т.е. согласно определению (54) $T^{-1}_{b\to c}$ - это матрица перехода от базиса c к базису b. ■

4°. Если в линейном пространстве заданы базисы b, c и d, причем $T_{b\to c}$ - матрица перехода от базиса b к новому базису c, а $T_{c\to d}$ - матрица перехода от базиса c к базису d, то произведение этих матриц $T_{b\to c}T_{c\to d}$ - матрица перехода от базиса b к базису d.

Доказательство.

Согласно определению (54) матрицы перехода, имеем равенства

$$c = bT_{b\to c}, \quad d = cT_{c\to d},$$

откуда

$$d = cT_{c\to d} = (bT_{b\to c}) \cdot T_{c\to d} = b(T_{b\to c} \cdot T_{c\to d}),$$

т.е. $T_{b\to c} \cdot T_{c\to d} = T_{b\to d}$ - матрица перехода от базиса b к базису d. ■

5°. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - это n базисов линейного пространства $\mathcal{V}$ $(n \geqslant 4)$. T_k - матрица перехода от b_k к b_{k+1}, $k = \overline{1, n-1}$. Тогда матрица перехода от b_1 к b_n равна $T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_{n-1}$.

Доказательство. Последовательное применение свойства 4°. ■

18 Евклидовы и унитарные пространства. Три примера. Неравенство Коши-Буняковского (Шварца).

18.1 Евклидовы и унитарные пространства. Три примера.

Примеры $\mathcal{E}$:

1. В линейных пространствах $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$: $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.
2. В арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^n$: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
3. Линейное пространство $C[0,1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ становится евклидовым, если в нем ввести скалярное произведение:
$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

Примеры $\mathcal{U}$:

1. $\mathbb{C}^n$: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \ldots + x_n \overline{y}_n$.

18.2 Неравенство Коши-Буняковского (Шварца).

Теорема 18.1. *Для любых векторов* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ *(или* $\mathcal{U}$*) справедливо неравенство Коши-Буняковского*

$$|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}),$$

причем $|(\vec{x}, \vec{y})|^2 = (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \iff \vec{x} \parallel \vec{y}$.

Следствие.

В случае линейного арифметического пр-ва $\mathbb{R}^n$ неравенство Коши-Буняковского трансформируется в **неравенство Коши**:

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Равенство достигается при линейной зависимости векторов, т.е. $\frac{a_i}{b_i} = const, \quad i = \overline{1, n}$.

Следствие.

В евклидовом пространстве $C[0, 1]$, скалярное произведение в котором выражается определенным интегралом, неравенство Коши-Буняковского превращается в неравенство Буняковского-Шварца:

$$\left(\int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx \right)^2 \leq \left(\int\limits_0^1 f(x)^2\, dx \right) \left(\int\limits_0^1 g(x)^2\, dx \right).$$

18.3 Неравенство Коши-Буняковского (доказательство для $\mathcal{U}$).

Доказательство.

При $\vec{y} = \vec{0}$ обе части неравенства равны нулю, значит, неравенство выполняется. Отбрасывая этот очевидный случай, будем считать, что $\vec{y} \neq \vec{0}$. Для любого комплексного числа t, в силу аксиомы 4 скалярного произведения, выполняется неравенство

$$(\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) \geqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя аксиомы и свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned}(\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) &= (\vec{x}, \vec{x}) + \underbrace{t(\vec{y}, \vec{x}) + \bar{t}(\vec{x}, \vec{y})}_{\star} + t \cdot \bar{t}(\vec{y}, \vec{y}) = \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + \underbrace{2\mathrm{Re}(t(\vec{y}, \vec{x}))}_{\star} + |t|^2(\vec{y}, \vec{y}) = \\ &= \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{\neq 0}|t|^2 + \underbrace{2|(\vec{x}, \vec{y})||t|}_{\star\star} + (\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Примечание $(\star)$: Пусть $t = p + iq$, $(\vec{y}, \vec{x}) = a + ib$, $\bar{t} = p - iq$, $\overline{(\vec{y}, \vec{x})} = a - ib$. Тогда

1. $$\begin{aligned}t(\vec{y}, \vec{x}) + \bar{t} \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = t(\vec{y}, \vec{x}) + \bar{t} \cdot \overline{(\vec{y}, \vec{x})} &= \\ = (p + iq)(a + ib) + (p - iq)(a - ib) &= \\ = pa + pib + aiq - qb + pa - pib - aiq - qb = 2pa - 2qb &= \\ = 2 \cdot (pa - qb).\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}2 \cdot \mathrm{Re}(t \cdot (\vec{y}, \vec{x})) &= 2 \cdot \mathrm{Re}((p + iq)(a + ib)) = \\ &= 2 \cdot \mathrm{Re}(pa - qb + i(pb + aq)) = \\ &= 2 \cdot (pa - qb).\end{aligned}$$

3. $$t(\vec{y}, \vec{x}) + \bar{t} \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = 2 \cdot \mathrm{Re}(t \cdot (\vec{y}, \vec{x})).$$

Примечание $(\star\star)$: Выберем t так, чтобы $\arg t = -\arg(\vec{y}, \vec{x})$, тогда $\arg(\vec{y}, \vec{x}) = -\arg t$.

$$t = |t|e^{i\varphi}$$

Так как $\arg(\vec{y}, \vec{x}) = -\arg t$, то

$$(\vec{y}, \vec{x}) = |(\vec{x}, \vec{y})|e^{i(-\varphi)}.$$

Итак,

$$2 \cdot \mathrm{Re}(t \cdot (\vec{y}, \vec{x})) = 2 \cdot \mathrm{Re}(|t|e^{i\varphi} \cdot |(\vec{x}, \vec{y})|e^{-i\varphi}) = 2|t||(\vec{x}, \vec{y})|.$$

Мы получили квадратным трехчлен относительно параметра $|t|$, неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$|(\vec{x}, \vec{y})|^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0.$$

∎

18.4 Неравенство Коши-Буняковского (доказательство для $\mathcal{E}$).

Теорема 18.2. *Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство Коши-Буняковского*

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}). \tag{12}$$

Доказательство.

При $\vec{x} = \vec{0}$ обе части неравенства (12) равны нулю согласно свойствам скалярного произведения, значит, неравенство выполняется. Отбрасывая этот очевидный случай, будем считать, что $\vec{x} \neq \vec{0}$. Для любого действительного числа, в силу аксиомы 4 скалярного произведения, выполняется неравенство

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя аксиомы и свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) &= \lambda(\vec{x}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) - (\vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \lambda^2 \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{\neq 0} - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Мы получили квадратным трехчлен относительно параметра λ, неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0.$$

■

19 Матрица Грама для системы векторов. Определитель и ранг матрицы Грама. Как изменится грамиан, если один из векторов заменить его ортогональной проекцией?

19.1 Матрица Грама для системы векторов.

Определение 55. Пусть даны векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ в некотором евклидовом пространстве. ***Матрицей Грама*** этой системы называется квадратная матрица Γ размера $m \times m$, элементы которой задаются скалярными произведениями:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & (\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_1, \vec{x}_m) \\ (\vec{x}_2, \vec{x}_1) & (\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_2, \vec{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{x}_m, \vec{x}_1) & (\vec{x}_m, \vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_m, \vec{x}_m) \end{pmatrix},$$

где $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ обозначает скалярное произведение векторов $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_j$.

Её определитель называется определителем Грама (или ***грамианом***).

19.2 Определитель и ранг матрицы Грама.

- $\det \Gamma \geqslant 0$ (всегда неотрицателен).
- $\det \Gamma = 0 \iff$ векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ линейно зависимы.
- Для линейно независимых векторов $\det \Gamma > 0$.
- Геометрический смысл: $\det \Gamma$ равен квадрату объёма параллелепипеда, натянутого на векторы.

Ранг матрицы Грама равен максимальному числу линейно независимых векторов в системе, т.е.
$\operatorname{rank} \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m) = \dim \operatorname{span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$.

19.3 Как изменится грамиан, если один из векторов заменить его ортогональной проекцией?

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{L} = \operatorname{span}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ и его подпространство
$\mathcal{H} = \operatorname{span}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n)$.

Представим вектор $\vec{e}_k \in \mathcal{L}$ в виде

$$\vec{e}_k = \vec{e}_k^{\parallel} + \vec{e}_k^{\perp},$$

где $\vec{e}_k^{\parallel} \in \mathcal{H}$ - ортогональная проекция, а $\vec{e}_k^{\perp} \in \mathcal{H}^{\perp}$ - ортогональная составляющая.
Значит,

$$\vec{e}_k^{\parallel} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \vec{e}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k^{\parallel}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n \text{ - линейно зависимы.}$$

$$\Downarrow$$

$$\det \Gamma(\underbrace{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k^{\parallel}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n}_{\text{Система векторов, полученная заменой } \vec{e}_k \text{ на } \vec{e}_k^{\parallel}.}) = 0$$

20 Норма вектора в евклидовом пространстве. Привести три примера задания нормы. Свойства нормы (с доказательством).

20.1 Норма вектора в евклидовом пространстве.

Определение 56. Функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{V}$, которая каждому вектору ставит в соответствие вещественное число, называется ***нормой***, если выполнены 3 аксиомы:
1. $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, причем $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$;
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника).

Теорема 20.1. *Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму* $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

20.2 Три примера задания нормы.

Определение 57. Норма вида $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ называется ***евклидовой*** (l_2)

Определение 58. Норма вида $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ называется ***октаэдрической*** (l_1)

Определение 59. Норма вида $\|\vec{x}\|_\infty = max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ называется ***кубической*** (l_∞)

20.3 Свойства нормы.

1°. $\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x} \pm \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

2°. $\|\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\| \leqslant \|\alpha\vec{x}\| + \|\beta\vec{y}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| + |\beta|\|\vec{y}\|$.

3°. $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$.

Доказательство.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}),$$
$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}),$$
$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{y}, \vec{y}) = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2).$$

■

4°. Если норма порождена скалярным произведением, т.е. $\|\vec{z}\| = \sqrt{(\vec{z}, \vec{z})}$, то для неё определено

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{y}, \vec{y})) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{y}, \vec{y})) = \\
&= (\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}$$

■

5°. В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.

Определение 60 (P.S.). Две нормы p и q на пространстве $\mathcal{V}$ называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 > 0 \colon C_1 p(\vec{x}) \leqslant q(\vec{x}) \leqslant C_2 p(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{V}.$$

21 Линейный оператор, определение, три примера. Матрица линейного оператора. Вывести формулу для вычисления значений линейного оператора (с помощью его матрицы). Произведение линейных операторов. Матрица для произведения линейных операторов.

21.1 Линейный оператор, определение, три примера.

Определение 61. Пусть $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$, $\dim \mathcal{V} = n, \dim \mathcal{W} = m$. Отображение $\mathscr{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называется ***линейным оператором***, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{P}$ выполнены следующие условия:

1. $\mathscr{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathscr{A}(\vec{x}) + \mathscr{A}(\vec{y})$,
2. $\mathscr{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathscr{A}(\vec{x})$,

где $\vec{x}$ - прообраз $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$, $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$ - образ $\vec{x}$.

Пример.

1. Нулевой: $\mathcal{O}\vec{x} = \vec{0}$.
2. Тождественный/единичный: $\mathcal{I}\vec{x} = \vec{x}$.
3. Оператор дифференцирования $\mathscr{D}\colon P_n(x) \to P_n(x)$, действующий по правилу $\mathscr{D}f = f'$.

21.2 Матрица линейного оператора.

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ - два линейных пространства.

Пусть $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ - некоторый базис в $\mathcal{V}$, $f = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m})$ - некоторый базис в $\mathcal{W}$.

Тогда $\mathscr{A}\vec{e_1}, \ldots, \mathscr{A}\vec{e_n}$ - это некоторые векторы в $\mathcal{W}$; значит, их можно, причем единственным образом, разложить по базису $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$:

$$\mathscr{A}\vec{e_1} = a_{11}\vec{f_1} + \ldots + a_{m1}\vec{f_m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathscr{A}\vec{e_n} = a_{1n}\vec{f_1} + \ldots + a_{mn}\vec{f_m},$$

где $(a_{ij} \in \mathbb{P})$.

Определение 62. Матрицу, составленную из координатных столбцов векторов $\mathscr{A}\vec{e_1}, \ldots, \mathscr{A}\vec{e_n}$ в базисе $f = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m})$, называют ***матрицей линейного оператора*** $\mathscr{A}$ в базисе f.

21.3 Вывести формулу для вычисления значений линейного оператора (с помощью его матрицы).

Теорема 21.1. *Пусть $\mathscr{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ - линейный оператор. Тогда столбец y_b координат вектора $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$ в данном базисе b линейного пространства $\mathcal{L}$ равен произведению $A_b x_b$ матрицы A_b оператора $\mathscr{A}$ в базисе b на столбец x_b координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе: $y_b = A_b x_b$.*

Доказательство. Выберем произвольный вектор $\vec{x} = x_1\vec{b_1} + \ldots + x_n\vec{b_n}$. Его образом будет вектор

$$\begin{aligned}\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x} = \mathscr{A}(x_1\vec{b_1} + \ldots + x_n\vec{b_n}) = x_1(\mathscr{A}\vec{b_1}) + \ldots + x_n(\mathscr{A}\vec{b_n}) = \\ = x_1(a_{11}\vec{b_1} + \ldots + a_{n1}\vec{b_n}) + \ldots + x_n(a_{1n}\vec{b_1} + \ldots + a_{nn}\vec{b_n}) = \\ = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{b_1} + \ldots + (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)\vec{b_n} = \\ = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Столбец координат вектора $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$ в базисе b имеет вид

$$y_b = (\mathscr{A}\vec{x})_b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_b x_b.$$

■

Следствие. $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x} = bA_b x_b$.

21.4 Произведение линейных операторов. Матрица для произведения линейных операторов.

Определение 63. ***Произведением операторов*** $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ и $\mathscr{B}: \mathcal{L} \to \mathcal{V}$ называется оператор $(\mathscr{A}\mathscr{B}): \mathcal{L} \to \mathcal{W}$, действующий по правилу $(\mathscr{A}\mathscr{B})\vec{x} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{L}$.

Этот оператор является линейным, так как $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})) = \mathscr{A}(\lambda\mathscr{B}\vec{x} + \mu\mathscr{B}\vec{y}) = \lambda\mathscr{A}(\mathscr{B}\vec{x}) + \mu\mathscr{A}(\mathscr{B}\vec{y}) = \lambda(\mathscr{A}\mathscr{B})\vec{x} + \mu(\mathscr{A}\mathscr{B})\vec{y}.$$

Теорема 21.2. *Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ действуют линейные операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, а A_b и B_b - матрицы этих линейных операторов в некотором базисе b. Тогда матрицей линейного оператора $\mathscr{B}\mathscr{A}$ в том же базисе b является матрица B_bA_b.*

Доказательство. $\vec{y} = (\mathscr{B}\mathscr{A})\vec{x} = \mathscr{B}(\mathscr{A}\vec{x}) = \mathscr{B}(bA_bx_b) = b(B_b(A_bx_b)) = b(B_bA_b)x_b$. ■

22 Линейный оператор, определение, три примера. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису (вывести формулу).

22.1 Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису (вывести формулу).

Теорема 22.1. *Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\mathscr{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, записанные в базисах b и e линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением*

$$A_e = T_{b\to e}^{-1} A_b T_{b\to e}.$$

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$. Обозначим координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в старом базисе b через x_b и y_b, а в новом базисе e - через x_e и y_e. Поскольку действие линейного оператора $\mathscr{A}$ в матричной форме в базисе b имеет вид $y_b = A_b x_b$ (*см. теорему 21.1), а координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в новом и старом базисах связаны между собой равенствами (*см. билет 17.)

$$x_b = T_{b\to e} x_e, \qquad y_b = T_{b\to e} y_e,$$

то получаем

$$y_e = T_{b\to e}^{-1} y_b = T_{b\to e}^{-1}(A_b x_b) = T_{b\to e}^{-1}(A_b T_{b\to e} x_e) = (T_{b\to e}^{-1} A_b T_{b\to e}) x_e.$$

Равенство $y_e = (T_{b\to e}^{-1} A_b T_{b\to e}) x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\mathscr{A}$ в базисе e и поэтому, согласно теореме 21.1, $T_{b\to e}^{-1} A_b T_{b\to e} = A_e$.

Изложенное доказательство теоремы хорошо иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
x_e \arrow[r, "A_e"] \arrow[d, swap, "T_{b\to e}"] & y_e \\
x_b \arrow[r, "A_b"] & y_b \arrow[u, swap, "T_{b\to e}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

■

23 Линейный оператор, определение, три примера. Ранг и дефект, ядро и образ линейного оператора. Теорема про размерности. Инвариантное подпространство линейного оператора.

23.1 Ранг и дефект, ядро и образ линейного оператора.

Пусть $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ - линейный оператор.

Определение 64. ***Образом*** оператора $\mathscr{A}$ называется множество всех векторов $\vec{y} \in \mathcal{W}$, представимых в виде $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$.

Обозначение. $\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

Определение 65. ***Ядром*** оператора $\mathscr{A}$ называется множество всех векторов $\vec{x} \in \mathcal{V}\colon \mathscr{A}\vec{x} = \vec{0}_{\mathcal{W}}$.

Обозначение. $\ker\mathscr{A}$.

Определение 66. Размерность образа линейного оператора $\mathscr{A}$ называется ***рангом*** линейного оператора $\mathscr{A}$.

Обозначение. $\operatorname{rank}\mathscr{A}$.

Определение 67. Размерность ядра линейного оператора $\mathscr{A}$ называется ***дефектом*** линейного оператора $\mathscr{A}$.

Обозначение. $\operatorname{def}\mathscr{A}$.

23.2 Теорема про размерности.

Теорема 23.1. *Пусть* $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *- линейный оператор,* $\dim \mathcal{V} = n$*. Тогда* $\operatorname{def} \mathscr{A} + \operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \mathcal{V}$*.*

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ - базис в $\ker \mathscr{A}$. Дополним его до базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n$ всего пространства $\mathcal{V}$. Докажем, что $\dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = n - r$. Для этого рассмотрим набор векторов $\mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_n)$ и докажем, что он является базисом в $\operatorname{Im} \mathscr{A}$.

$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{span}(\underbrace{\mathscr{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_r)}_{\vec{0}}, \mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_n)) = \operatorname{span}(\mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_n)).$

Предположим, что $\lambda_{r+1}\mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}) + \ldots + \lambda_n\mathscr{A}(\vec{e}_n) = \mathscr{A}(\lambda_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$.

Значит, $\lambda_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n \in \ker \mathscr{A}$, но тогда $\lambda_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \mu_1\vec{e}_1 + \ldots + \mu_r\vec{e}_r$, для некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Так как векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - линейно независимы, то все $\lambda_i = 0$ (и μ_j тоже), следовательно, векторы $\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n$ - линейно независимы.

При этом любой вектор $\vec{y} \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ является линейной комбинацией векторов $\mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_n)$.

Следовательно, $\mathscr{A}(\vec{e}_{r+1}), \ldots, \mathscr{A}(\vec{e}_n)$ - базис в $\operatorname{Im} \mathscr{A} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = n - r$.

Значит, $\dim \ker \mathscr{A} + \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{def} \mathscr{A} + \operatorname{rank} \mathscr{A} = r + n - r = n = \dim \mathcal{V}$. ■

Замечание. Можно ли утверждать, что если $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, то $\operatorname{Im} \mathscr{A} + \ker \mathscr{A} = \mathcal{V}$?

Ответ: нельзя.
Например, $\mathscr{D}: p \longmapsto p'$.
$p \in P_n(x)$
$\operatorname{Im} \mathscr{D} = P_{n-1}(x)$
$\ker \mathscr{D} = P_0(x)$
Но $P_0(x) + P_{n-1}(x) \neq P_n(x)$.

23.3 Инвариантное подпространство линейного оператора.

Определение 68. Пусть $\mathscr{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ - линейный оператор. Подпространство $\mathcal{V} \in \mathcal{L}$ называется ***инвариантным подпространством*** оператора $\mathscr{A}$, если оператор $\mathscr{A}$ отображает всякий вектор $\vec{x} \in \mathcal{V}$, в вектор, также принадлежащий подпространству $\mathcal{V}$, то есть $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}\colon \vec{y} = \mathscr{A}\vec{x} \in \mathcal{V}$.

Пример.

- Тривиальными примерами являются: само пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство (состоящее из единственного нулевого вектора).
- Любой собственный вектор оператора порождает его одномерное инвариантное подпространство.
- Ядро линейного оператора $\ker \mathcal{L}$.

24 Операции с линейными операторами. Ранг произведения операторов. Линейное пространство линейных операторов.

24.1 Операции с линейными операторами.

Определение 69. Операторы $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ и $\mathscr{B}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называются ***равными***, если $\mathscr{A}\vec{x} = \mathscr{B}\vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$.

Определение 70. ***Суммой операторов*** $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ и $\mathscr{B}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называется оператор $(\mathscr{A} + \mathscr{B}): \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, действующий по правилу $(\mathscr{A} + \mathscr{B})\vec{x} = \mathscr{A}\vec{x} + \mathscr{B}\vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$.

Определение 71. ***Произведением оператора*** $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ***на действительное число*** λ называется оператор $(\lambda\mathscr{A}): \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, действующий по правилу $(\lambda\mathscr{A})\vec{x} = \lambda(\mathscr{A}\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$.

Определение 72. ***Произведением операторов*** $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ и $\mathscr{B}: \mathcal{L} \to \mathcal{V}$ называется оператор $(\mathscr{A}\mathscr{B}): \mathcal{L} \to \mathcal{W}$, действующий по правилу $(\mathscr{A}\mathscr{B})\vec{x} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{L}$.

24.2 Ранг произведения операторов.

Для любых двух линейных операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, действующих в линейном пространстве $\mathcal{L}$, выполняется соотношение

$$\operatorname{rank}(\mathscr{A}\mathscr{B}) \leqslant \min\{\operatorname{rank}\mathscr{A}, \operatorname{rank}\mathscr{B}\}$$

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\mathscr{A}$ как линейный оператор $\mathscr{A}\colon \operatorname{Im}\mathscr{B} \to \mathcal{L}$. Размерность образа оператора не превосходит размерности линейного пространства, из которого он действует, так как сумма и дефекта и ранга совпадает с размерностью этого пространства.

$$\operatorname{rank}(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \dim\operatorname{Im}(\mathscr{A}\mathscr{B}) \leqslant \dim\operatorname{Im}\mathscr{B} = \operatorname{rank}\mathscr{B}.$$

Так как образ линейного оператора $\mathscr{A}\mathscr{B}$ является линейным подпространством образа линейного оператора $\mathscr{A}$, то

$$\operatorname{rank}(\mathscr{A}\mathscr{B}) \leqslant \operatorname{rank}\mathscr{A}.$$

■

Замечание.

Доказанное соотношение можно перенести на квадратные матрицы.

Получаем,

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}A, \operatorname{rank}B\}.$$

Пусть B - невырожденная. То есть ее ранг равен размерности матрицы.

Тогда $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}A$ и одновременно $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}((AB)B^{-1}) \leqslant \operatorname{rank}(AB)$.

То есть

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}A \leqslant \operatorname{rank}(AB).$$

Следовательно, при умножении матрицы A справа на невырожденную матрицу ее ранг не изменяется.

При умножении матрицы A слева на невырожденную матрицу ранг также не изменяется, что доказывается аналогично.

24.3 Линейное пространство линейных операторов.

Определение 73. Линейное пространство $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ линейных операторов из линейного пространства $\mathcal{V}$ в линейное пространство $\mathcal{W}$ называют ***линейным пространством линейных операторов***.

Проверка на линейность пространства $\mathcal{L}$.

Пусть даны линейные операторы $\mathscr{A}\mathscr{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Поскольку

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) &= \mathscr{A}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) + \mathscr{B}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \\
&= (\alpha\mathscr{A}\vec{x}+\beta\mathscr{A}\vec{y}) + (\alpha\mathscr{B}\vec{x}+\beta\mathscr{B}\vec{y}) = \\
&= \alpha(\mathscr{A}\vec{x}+\mathscr{B}\vec{x}) + \beta(\mathscr{A}\vec{y}+\mathscr{B}\vec{y}) = \\
&= \alpha(\mathscr{A}+\mathscr{B})\vec{x} + \beta(\mathscr{A}+\mathscr{B})\vec{y}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(\lambda\mathscr{A})(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) &= \lambda(\mathscr{A}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})) = \lambda(\mathscr{A}(\alpha\vec{x}) + \mathscr{A}(\beta\vec{y})) = \\
&= (\alpha\lambda)\mathscr{A}\vec{x} + (\beta\lambda)\mathscr{A}\vec{y} = \alpha(\lambda\mathscr{A}\vec{x}) + \beta(\lambda\mathscr{A}\vec{y}) = \\
&= \alpha((\lambda\mathscr{A})\vec{x}) + \beta((\lambda\mathscr{A})\vec{y})
\end{aligned}$$

отображения $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ и $\lambda\mathscr{A}$ действительно являются линейными операторами. Таким образом, относительно введенных нами операций множество $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ замкнуто. Проверив аксиомы линейного пространства, можно убедиться, что $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ относительно этих операций является линейным пространством. ■

25 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен линейного оператора. Нахождение собственных значений линейного оператора (вывести характеристическое уравнение). Геометрическая и алгебраическая кратность. Жорданова нормальная форма.

25.1 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Определение 74. Ненулевой вектор $\vec{x}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют ***собственным вектором*** линейного оператора $\mathscr{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $\mathscr{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. При этом число λ называют ***собственным значением*** линейного оператора $\mathscr{A}$.

25.2 Характеристическое уравнение и характеристический многочлен линейного оператора.

Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n рассмотрим определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

где E - единичная матрица, а λ - действительное переменное.

Определение 75. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — ***характеристическим уравнением*** матрицы A.

Определение 76. ***Характеристическим многочленом линейного оператора*** $\mathscr{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называют характеристический многочлен его матрицы A, записанной в некотором базисе, а ***характеристическим уравнением*** этого ***оператора*** - характеристическое уравнение матрицы A.

25.3 *Полезные факты, которые тоже могут быть на экзамене.

Определение 77. Квадратные матрицы A и B порядка n называются ***подобными***, если существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1}AP = B$.

Теорема 25.1. *Если матрицы A и B подобны, то* $\det A = \det B$.

Доказательство.
Если матрицы подобны, то согласно определению (77), существует такая невырожденная матрица P, что $B = P^{-1}AP$. Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, а $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$, то получаем

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det(P)^{-1} \det A \det P = \det A.$$

■

Следствие. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Действительно, возьмем матрицы A_b и A_e линейного оператора $\mathscr{A}$ в двух различных базисах b и e.

$$A_e = T^{-1}_{b \to e} A_b T_{b \to e}.$$

Согласно определению (77), матрицы A_b и A_e подобны. Поэтому $\det A_b = \det A_e$ по теореме 25.1. ■

25.4 Нахождение собственных значений линейного оператора (вывести характеристическое уравнение).

Теорема 25.2. *Для того чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.*

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Пусть число λ является собственным значением линейного оператора $\mathscr{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Это значит, что существует вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$, для которого

$$\mathscr{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Используя тождественный оператор $\mathscr{I}\vec{x} = \vec{x}$, преобразуем равенство: $\mathscr{A}\vec{x} = \lambda\mathscr{I}\vec{x}$, или

$$(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})\vec{x} = \vec{0}.$$

Запишем векторное равенство выше в каком-либо базисе b. Матрицей линейного оператора $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ будет матрица $A - \lambda E$, где A - матрица линейного оператора $\mathscr{A}$ в базисе b, а E - единичная матрица, и пусть x - столбец координат собственного вектора $\vec{x}$. Тогда $x \neq 0$, а векторное равентсво выше равносильно матричному

$$(A - \lambda E) = 0,$$

которое представляет собой матричную форму записи ОСЛАУ с квадратной матрицей $A - \lambda E$ порядка n. Эта система имеет ненулевое решение, являющееся столбцом координат x собственного вектора $\vec{x}$. Поэтому $\det(A - \lambda E) = 0$. А это означает, что λ является корнем характеристического уравнения линейного оператора $\mathscr{A}$.

($\Longleftarrow$) Приведенные рассуждения можно привести в обратном порядке. Если λ является корнем характеристического уравнения, то в заданном базисе b выполняется равенство $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, матрица ОСЛАУ, записанной в матричной форме, вырождена, и система имеет ненулевое решение x. Это ненулевое решение x представляет собой набор координат в базисе b некоторого ненулевого вектора $\vec{x}$, для которого выполняется равенство $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})\vec{x} = \vec{0}$. Значит, число λ - собственное значение линейного оператора $\mathscr{A}$.

∎

25.5 Геометрическая и алгебраическая кратность.

Определение 78. ***Геометрической кратностью*** собственного значения линейного оператора называется максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих данному собственному значению.

Определение 79. ***Алгебраической кратностью*** собственного значения линейного оператора называется его кратность как корня характеристического многочлена.

25.6 Жорданова нормальная форма.

Для произвольного действительного числа μ введем обозначение матрицы порядка s:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Для любого комплексного числа $\lambda = \alpha + i\beta(\beta \neq 0)$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$:

$$C_r(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(\alpha,\beta) & E \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где $C(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Все остальные блоки также являются квадратными матрицами порядка 2, где E - единичная матрица, 0 - нулевая.

Блочно-диагональную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & C_{r_m}(\alpha_m,\beta_m) & & & \\ & & & J_{s_1}(\mu_1) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix},$$

где $\alpha_j, \beta_j (j = \overline{1,m})$ и $\mu_l (l = \overline{1,k})$ - действительные числа, называют ***жордановой***, ее диагональные блоки - ***жордановыми клетками***. Жорданову матрицу A', подобную данной матрице A, называют ***жордановой нормальной формой*** матрицы A.

26 Формулировка теоремы Гамильтона – Кэли. След линейного оператора. Инварианты.

26.1 Формулировка теоремы Гамильтона – Кэли.

Квадратную матрицу можно использовать в качестве значения переменного в произвольном многочлене. Тогда значением многочлена от матрицы будет матрица того же порядка, что и исходная. Интерес представляют такие многочлены, значение которых от данной матрицы есть нулевая матрица. Их называют аннулирующими многочленами. Оказывается, что одним из таких аннулирующих многочленов для матрицы является ее характеристический многочлен.

Теорема 26.1. *Для любой квадратной матрицы характеристический многочлен является ее аннулирующим многочленом.*

26.2 След линейного оператора.

Определение 80. ***Следом линейного оператора*** $\mathscr{A}$ ***(матрицы*** A***)*** называется сумма диагональных элементов матрицы A линейного оператора $\mathscr{A}$.

Обозначение. $\operatorname{tr}\mathscr{A}$ или $\operatorname{sp}\mathscr{A}$.

26.3 Инварианты.

Коэффициенты характеристического многочлена не зависят от выбора базиса (если представить в виде $\sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k$), т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса.

Замечание. Наиболее просто выражается коэффициент $d_{n-1} = \operatorname{tr}\mathscr{A}$.

Замечание. Коэффициент d_0 характеристического многочлена совпадает со значением этого многочлена при $\lambda = 0$ и равен определителю линейного оператора $\mathscr{A}$.

27 Формулировка теоремы про ЖНФ. Алгоритм построения ЖНФ. Определение количества клеток. Нахождение базиса.

Теорема 27.1. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – все собственные числа (корни характеристического уравнения) оператора $\mathscr{A}$, действующего в n-мерном пространстве $\mathcal{L}$. Тогда в $\mathcal{L}$ существует базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид $A_J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_s$, т.е. является прямой суммой жордановых клеток (блоков), каждая из которых является квадратной матрицей, на главной диагонали которой стоят одинаковые числа λ_i, над диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю:*

$$A_J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}, \qquad J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

28 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Доказать независимость характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора от выбора базиса.

Теорема 28.1. *Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.*

Доказательство.

Пусть квадратные матрицы A и A' одного порядка подобны, т.е. существует такая невырожденная матрица P того же порядка, что $A' = P^{-1}AP$. Тогда в силу свойств определителей имеем

$$\begin{aligned}\chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \\ &= \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda).\end{aligned}$$

■

Теорема 28.2. *Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора не зависят от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть

1. $\mathscr{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ - линейный оператор,
2. A_b - матрица линейного оператора $\mathscr{A}$ в некотором "старом" базисе b,
3. A_e - матрица линейного оператора $\mathscr{A}$ в некотором "новом" базисе e.

Тогда

$$A_e = T_{b\to e}^{-1} A_b T_{b\to e},$$

где $T_{b\to e}$ - матрица перехода от базиса b к базису e.

A_e и A_b - две подобные матрицы.

Значит, по теореме 28.1 характеристические многочлены двух подобных матриц A_e и A_b равны. Следовательно, и характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса. ■

29 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих одному и тому же собственному значению (с доказательством).

29.1 Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих одному и тому же собственному значению (с доказательством).

Если $\vec{x}$ - собственный вектор оператора $\mathscr{A}$, отвечающий собственному значению, то для любого числа $k \neq 0$ вектор $k\vec{x}$ также является собственным вектором оператора $\mathscr{A}$, отвечающим собственному значению.

Доказательство.
$\mathscr{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$,
$\mathscr{A}(k\vec{x}) = k\mathscr{A}\vec{x} = k\lambda\vec{x}$. ■

Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ - собственные векторы оператора $\mathscr{A}$, отвечающие собственному значению, то вектор $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ также является собственным вектором, отвечающим собственному значению.

Доказательство.
$\mathscr{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$,
$\mathscr{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$,
$\mathscr{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathscr{A}\vec{x} + \mathscr{A}\vec{y} = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x} + \vec{y})$. ■

Следствие (свойство)**.**
Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, с добавлением $\vec{0}$ является линейным подпространством для данного пространства $\mathcal{L}$. Такое подпространство называется ***собственным подпространством*** $\mathcal{L}$.

30 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).

30.1 Свойство собственных векторов линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).

Теорема 30.1. *Пусть собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *линейного оператора* $\mathscr{A}$ *попарно различны. Тогда система соответствующих им собственных векторов* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ *линейно независима.*

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

При $r = 1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот вектор ненулевой, а собственный вектор, согласно его определению, является ненулевым.

Пусть утверждение верно при $r = m$, т.е. для произвольной системы из m собственных векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$. Добавим к системе векторов еще один собственный вектор $\vec{e}_{m+1}$, отвечающий собственному значению λ_{m+1}, и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы векторов и предположим, что она равна нулевому вектору:

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{e}_m + \alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}. \tag{13}$$

$$\alpha_1\mathscr{A}\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_m\mathscr{A}\vec{e}_m + \alpha_{m+1}\mathscr{A}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}.$$

$$\alpha_1\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m\vec{e}_m + \alpha_{m+1}\lambda_{m+1}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}. \tag{14}$$

Умножим равенство (13) на λ_{m+1} и вычтем из него равенство (14)

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\vec{e}_m = \vec{0}.$$

Так как система векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ по предположению, линейно независима, то у полученной линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0, k = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Поскольку все собственные значения λ_i попарно различны, то из равенств (15) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Значит, соотношение (13) можно записать в виде $\alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}$, а так как вектор $\vec{e}_{m+1}$ ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$. В итоге получаем, что равенство (13) выполняется лишь в случае тривиальной линейной комбинации. Тем самым мы доказали, что система векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}$ линейно независима. ■

31 Дать определение сопряженного и самосопряженного линейного оператора. Доказать, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.

31.1 Дать определение сопряженного и самосопряженного линейного оператора.

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пространство.

Определение 81. Линейный оператор $\mathscr{A}^*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называют сопряженным к линейному оператору $\mathscr{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ верно равенство

$$(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathscr{A}^*\vec{y}).$$

Пример.

Вектор $\vec{a} \in \mathcal{V}_3$ порождает линейный оператор $\mathscr{A}\colon \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ согласно формуле

$$\mathscr{A}\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

Найдем оператор, сопряженный оператору $\mathscr{A}$:

$$(\mathscr{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{a} \times \vec{x}, \vec{y}) = \vec{a}\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{a}\vec{x} = (\vec{y} \times \vec{a}, \vec{x}) = \\ = (\vec{x}, \vec{y} \times \vec{a}) = (\vec{x}, -\vec{a} \times \vec{y}) = (\vec{x}, -\mathscr{A}\vec{y}).$$

Значит, $\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}$.

Определение 82. Линейный оператор $\mathscr{A}$, действующий в евклидовом пространстве, называют самосопряженным, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. То есть для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ верно равенство

$$(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}).$$

Пример. Тождественный $\mathscr{I}$ и нулевой $\mathscr{O}$.

31.2 Доказать, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.

Теорема 31.1. *Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической.*

Теорема 31.2. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство.
Будем доказывать, что все корни характеристического уравнения симметрической матрицы действительны.

Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является корнем характеристического уравнения симметрической матрицы, т.е. $\det(A-\lambda E)=0$. Тогда СЛАУ $(A-\lambda E)x=0$ имеет некоторое ненулевое решение $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$, состоящее из комплексных чисел $x_k, k=\overline{1,n}$. Рассмотрим столбец $\overline{x}$, комплексно сопряженный к столбцу x. Умножим равенство $(A-\lambda E)x=0$ слева на строку $\overline{x}^T$. Тогда

$$\overline{x}^T(A-\lambda E)x=0,$$

или

$$\overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x.$$

Так как произведение комплексного числа на сопряженное к нему является действительным числом, равным квадрату модуля комплексного числа, а x - ненулевое решение, то

$$\overline{x}^T x = \overline{x}_1 x_1 + \ldots + \overline{x}_n x_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0,$$

То есть матричное произведение $\overline{x}^T x$ - действительное положительное число.

$$\lambda = \frac{\overline{x}^T Ax}{\overline{x}^T x},$$

причем знаменатель дроби справа является действительным числом. Следовательно, число λ будет действительным, если числитель этой дроби $w = \overline{x}^T Ax$ будет действительным.

В силу симметричности матрицы A

$$w = w^T = (\overline{x}^T Ax)^T = x^T A^T \overline{x} = x^T A \overline{x}.$$

С учетом свойств операции комплексного сопряжения матриц и благодаря тому, что элементами матрицы A являются действительные числа, получаем

$$\overline{w} = \overline{\overline{x}^T Ax} = (\overline{\overline{x}})^T \overline{A}\overline{x} = x^T A \overline{x} = w.$$

Комплексное число, самосопряженное себе - это действительное число. Следовательно, и w является действительным. ∎

32 Дать определение самосопряженного линейного оператора. Свойство собственных векторов самосопряженного линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям (с доказательством).

32.1 Свойство собственных векторов самосопряженного линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям (с доказательством).

Теорема 32.1. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство.
Рассмотрим самосопряженный оператор $\mathscr{A}$ и два его собственных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $\mathscr{A}\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ и $\mathscr{A}\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$. Поэтому

$$(\mathscr{A}\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda_1\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2). \tag{16}$$

Но так как $\mathscr{A}$ является самосопряженным оператором, то $(\mathscr{A}\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \mathscr{A}\vec{x}_2)$. Значит,

$$(\mathscr{A}\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \mathscr{A}\vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2). \tag{17}$$

Приравнивая правые части соотношений (16) и (17), получаем

$$\lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$, что и означает ортогональность векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. ∎

33 Ортогональные матрицы и их свойства.

Определение 83. Квадратную матрицу O называют ***ортогональной***, если она удовлетворяет условию

$$O^T O = E, \tag{18}$$

где E — единичная матрица.

Пример. Простейший пример - единичная матрица E, так как $E^T E = EE = E$.

Пример. $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Свойства ортогональных матриц.

Пусть O - ортогональная матрица.

1°. $\det O = \pm 1$.

Доказательство.
$\det(O^T O) = \det O^T \det O = (\det O)^2$.
Так как $\det E = 1$, то и $(\det O)^2 = 1$. Следовательно, $\det O = \pm 1$. ■

2°. $O^{-1} = O^T$.

Доказательство.
Согласно свойству 1, ортогональная матрица невырождена и поэтому имеет обратную O^{-1}. Умножая равенство (18) справа на O^{-1}, получаем

$$(O^T O)O^{-1} = EO^{-1},$$

откуда $O^T(OO^{-1}) = O^{-1}$. Но $OO^{-1} = E$, поэтому $O^T = O^{-1}$. ■

3°. $OO^T = E$.

Доказательство. Согласно свойству 2 и определению обратной матрицы, $OO^T = OO^{-1} = E$. ■

4°. O^T - тоже ортогональная.

Доказательство.
Нужно для произвольной ортогональной матрицы O доказать равенство

$$(O^T)^T O^T = E,$$

представляющее собой запись соотношения (18) для предполагаемой ортогональной матрицы O^T (*вместо O). Так как, согласно свойству операции транспонирования, $(O^T)^T = O$, равенство выше эквивалентно $OO^T = E$, которое верно в силу свойства 3. ■

5°. Произведение двух ортогональных матриц O и Q одного порядка является ортогональной матрицей.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить выполнение равенства (18) для матрицы OQ:

$$(OQ)^T(OQ) = (Q^T O^T)OQ = Q^T(O^T O)Q = Q^T EQ = Q^T Q = E.$$

■

6°. O^{-1} - тоже ортогональная.

Доказательство.

Согласно свойству 1, ортогональная матрица вырождена, а потому имеет обратную. Согласно свойству 2, матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Наконец, согласно свойству 4, матрица, транспонированная к ортогональной, является ортогональной. ■

34 Ортогональное преобразование евклидова пространства. Свойства ортогональных преобразований (с доказательством).

34.1 Ортогональное преобразование евклидова пространства.

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пространство, $\mathscr{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - некоторый линейный оператор.

Определение 84. Говорят, что $\mathscr{A}$ задает ***ортогональное преобразование (называется ортогональным оператором)***, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}\colon (\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$.

34.2 Свойства ортогональных преобразований.

1°. Сохраняет ортогональность, т.е. $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \mathscr{A}\vec{x} \perp \mathscr{A}\vec{y}$.

Доказательство. Очевидно. ■

2°. Сохраняет норму вектора, т.е. $\|\mathscr{A}\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

Доказательство. $\|\mathscr{A}\vec{x}\| = \sqrt{(\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{x})} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \|\vec{x}\|$. ■

3°. Сохраняет углы между ненулевыми векторами.

Доказательство. $(\widehat{\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}}) = \arccos \frac{(\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y})}{\|\mathscr{A}\vec{x}\| \cdot \|\mathscr{A}\vec{y}\|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = (\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$. ■

4°. Пусть $\mathscr{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - ОНБ в $\mathcal{E}$. Тогда $\mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n$ - ОНБ в $\mathcal{E}$.

Доказательство.

$(\mathscr{A}\vec{e}_i, \mathscr{A}\vec{e}_j) = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера).

$\|\mathscr{A}\vec{e}_i\| = 1$; $\mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n$ попарно ортогональны, а значит, ЛНЗ. К тому же, $\dim \mathcal{E} = n$, а $\mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n$ - тоже n. Значит, $\mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n$ - ОНБ. ■

5°. Пусть

- $\mathcal{E}$ - n-мерное евклидово пространство;
- $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - некоторый ОНБ $\mathcal{E}$;
- $\mathscr{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - некоторый линейный оператор.
- $\mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n$ - тоже ОНБ $\mathcal{E}$.

Тогда $\mathscr{A}$ - ортогональный оператор.

Доказательство.

Требуется доказать, что

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}\colon (\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Возьмем произвольные $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.

Разложим по базису $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \ldots + y_n\vec{e}_n$$

Найдем:

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}) &= (\mathscr{A}(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n), \mathscr{A}(y_1\vec{e}_1 + \ldots + y_n\vec{e}_n)) = \\
&= (x_1 \cdot \mathscr{A}\vec{e}_1 + \ldots + x_n \cdot \mathscr{A}\vec{e}_n, y_1 \cdot \mathscr{A}\vec{e}_1 + \ldots + y_n \cdot \mathscr{A}\vec{e}_n) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Получилось, что} \\ \text{у вектора } \mathscr{A}\vec{x} \\ \text{в базисе } \mathscr{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\vec{e}_n \\ \text{координаты } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \\ \text{у вектора } \vec{y} \text{ аналогично.} \end{array} \right\} \underbrace{=}_{\text{Следствие 9.5}} \\
&\underbrace{=}_{\text{Следствие 9.5}} x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = (\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}
$$

■

6°. Пусть

- $\mathcal{E}$ - n-мерное евклидово пространство;
- $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - некоторый ОНБ $\mathcal{E}$;
- $\mathscr{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.

Тогда матрица A_e линейного оператора $\mathscr{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - ортогональная.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}) \underbrace{=}_{\text{Лемма 1}} & (\mathscr{A}\vec{x})_e^T \cdot \Gamma_e \cdot (\mathscr{A}\vec{y})_e = \\
&= (A_e\vec{x}_e)^T \cdot \Gamma_e \cdot (A_e\vec{y}_e) = \\
&= \vec{x}^T \cdot A_e^T \Gamma_e A_e \vec{y}_e.
\end{aligned}
$$

При этом

$$
(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T \cdot \Gamma_e \cdot \vec{y}_e.
$$

Из этого ясно, что

$$
A_e^T \Gamma_e A_e = \Gamma_e.
$$

Так как e - ОНБ, то $\Gamma_e = E \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
И тогда $A_e^T \cdot A_e = E$. ■

7°. Справедлив и обратный факт свойству 6:
Если линейный оператор $\mathscr{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в ОНБ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ имеет ортогональную матрицу, то $\mathscr{A}$ задает ортогональное преобразование.

Доказательство.
Действительно,

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}\vec{x}, \mathscr{A}\vec{y}) \underbrace{=}_{\text{Лемма 1}} & (\mathscr{A}\vec{x})_e^T \cdot \Gamma_e \cdot (\mathscr{A}\vec{y})_e = \\
&= (A_e\vec{x}_e)^T \cdot E \cdot (A_e\vec{y}_e) = \\
&= \vec{x}^T \cdot \underbrace{A_e^T A_e}_{E} \vec{y}_e = \\
&= \vec{x}^T \vec{y}_e = \\
&= (\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}
$$

■

35 Дать определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы и ее преобразование при переходе к новому базису (вывести формулу).

Определение 85. ***Квадратичной формой*** называется сумма вида

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j,$$

где b_{ij} - заданные числа, $1\leqslant i<j<n$.

Ясно, что

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Столбец $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ можно рассматривать как координаты вектора $\vec{x}$ в некотором 'первичном' базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$, а полученную матрицу $\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$ - как матрицу квадратичной формы в этом 'первичном' базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$.

Как она изменится при переходе к новому базису?

Мы знаем, что если $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе e, а $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ - координаты того же вектора $\vec{x}$ в базисе f, то

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=T_{e\to f}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\quad (\text{см. } 17.3).$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}=\left(T_{e\to f}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\cdot T_{e\to f}^T.$$

Значит,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\underbrace{T_{e\to f}^T\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}T_{e\to f}}_{\text{матрица кв. формы в новом базисе.}}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\underbrace{B_f}_{\substack{\text{матр. кв.}\\ \text{формы}\\ \text{в новом}\\ \text{базисе } f.}}=T_{e\to f}^T\underbrace{B_e}_{\substack{\text{исх. матр.}\\ \text{кв. формы}\\ \text{(в старом}\\ \text{базисе } e).}}T_{e\to f}.$$

36 Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Закон инерции квадратичных форм (с доказательством).

36.1 Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса.

Определение 86. Ранг матрицы A квадратичной формы называют ***рангом квадратичной формы***.

При изменении базиса линейного пространства матрица A квадратичной формы преобразуется по формуле $A' = U^T AU$, где U - матрица перехода. Матрица U, как матрица перехода, является невырожденной, поэтому ранг A' совпадает с рангом A, так как при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется. (см. замечание 24.2).

То есть ранг квадратичной формы не зависит от выбора базиса.

36.2 Закон инерции квадратичных форм (с доказательством).

Теорема 36.1. *Пусть*

1. $\mathcal{V}$ *- n-мерное линейное пространство.*
2. $\mathscr{B}:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *- симметрическая билинейная форма.*
3. *КФ*$(\vec{x})=\mathscr{B}(\vec{x},\vec{x})$ *- соответствующий ей функционал, который может быть записан в виде различных квадратичных форм в зависимости от базиса.*

Тогда как бы мы ни выбирали канонический базис, количество положительных, количество отрицательных коэффициентов и количество нулевых коэффициентов в каноническом виде КФ будут всегда одними и теми же.

Доказательство.
Пусть $\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n$ и $\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_n$ - два канонических базиса, причем в первом базисе

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^{n}x_k\vec{f}_k \text{ и } \text{КФ}(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^2.$$

а во втором базисе

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^{n}y_k\vec{g}_k \text{ и } \text{КФ}(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}\mu_k y_k^2.$$

Будем считать, что:

1. Среди $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ первые p положительные, а остальные $\leqslant 0$.
2. Среди $\mu_1,\dots,\mu_n$ первые s положительные, а остальные $\leqslant 0$.

Отделим положительные слагаемые

$$\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\lambda_k}_{>0}x_k^2+\sum_{k=p+1}^{n}\underbrace{\lambda_k}_{\leqslant 0}x_k^2=\sum_{k=1}^{s}\underbrace{\mu_k}_{>0}y_k^2+\sum_{k=s+1}^{n}\underbrace{\mu_k}_{\leqslant 0}y_k^2.$$

Заметим, что любая из этих сумм может оказаться пустой.
Перенесем

$$\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\lambda_k}_{>0}x_k^2+\sum_{k=s+1}^{n}\underbrace{(-\mu_k)}_{\geqslant 0}y_k^2=\sum_{k=1}^{s}\underbrace{\mu_k}_{>0}y_k^2+\sum_{k=p+1}^{n}\underbrace{(-\lambda_k)}_{\geqslant 0}x_k^2. \tag{19}$$

Предположим, что $p\neq s$. Без ограничения общности будет считать, что $p<s$ (случай $p>s$ рассматривается аналогично).
Вопрос: можно ли для заданных базисов f и g найти такой ненулевой вектор $\vec{x}$, чтобы

$$x_1=x_2=\ldots=x_p=0,\ \text{и } \vec{y}_{s+1}=\ldots=\vec{y}_n=\vec{0}?$$

Мы знаем, что

$$\vec{x}_f=T_{f\to g}\vec{x}_g.$$

Наш вопрос переформулируется так:
Можно ли для заданных f и g найти такой ненулевой $\vec{x}$, чтобы

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\x_{p+1}\\x_{p+1}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=T_{f\to g}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_s\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Если справа домножить матрицу на вектор, записать равенство векторов как n уравнений и в них перенести все слагаемые в одну часть, то получим однородную систему из n уравнений с $(n-p)+s$ неизвестными.

Т.к. $p < s$, то количество уравнений (n) меньше числа неизвестных $(n + (s - p))$.

По теореме из 1-го семестра такая однородная система имеет нетривиальное решение, т.е.

$$\exists \underbrace{x_{p+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s}_{\text{не все равны } 0\,(\star\star\star).},$$

удовлетворяющее системе (20).

Если бы все $y_1, y_2, \ldots, y_s$ равнялись 0, то из (20) следовало бы, что $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$. Тогда бы мы получили противоречие с $(\star\star\star)$.

Следовательно, среди $y_1, y_2, \ldots, y_s$ обязательно есть хотя бы одно ненулевое.

Получается, что в (19) левая часть состоит сплошь из 0, а в правой части стоит отрицательное число. Противоречие.

Значит, $p = s$. Т.е. количество положительных коэффициентов в КФ не зависит от базиса.

Аналогично, умножив $\mathscr{B}(\vec{x}, \vec{x})$ на (-1), можно доказать, что количество отрицательных коэффициентов в КФ не зависит от базиса. ∎

37 Знакоопределенность квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства). Примеры.

37.1 Знакоопределенность квадратичной формы.

Определение 87. Квадратичная форма $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, называется:

- ***положительно (отрицательно) определенной***, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0\,(f(x) < 0)$;
- ***неотрицательно (неположительно) определенной***, если $f(x) \geqslant 0\,(f(x) \leqslant 0)$ для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$;
- ***знакопеременной (неопределенной)***, если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$;

37.2 Критерий Сильвестра (без доказательства).

1. Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.
2. Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, -\Delta_3 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$ (знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса).
3. Невырожденная квадратичная форма знакопеременная тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:
   - один из угловых миноров равен нулю;
   - один из угловых миноров четного порядка отрицателен;
   - два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

Пример.

$f(x,y) = 2xy$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - знакопеременная.

$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - положительная.

$f(x,y) = -x^2 - 2xy$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - отрицательная.

38 Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием (обосновать возможность такого приведения).

$A' = U^T AU$, где U - матрица перехода. Если рассматривается евклидово пространство, а старый и новый базис - ОНБ, то матрица U является ортогональной и мы имеем ортогональное преобразование КФ.

Теорема 38.1. *Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к диагональному виду.*

Доказательство.

Матрица A любой КФ - симметричная. Любая симметричная матрица подобна некоторой диагональной (*желательно уметь доказывать), т.е. существует такая невырожденная матрица P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Остается убедиться, что в качестве P можно выбрать ортогональную матрицу. Тогда $A' = P^T AP$ и диагональная A' является матрицей квадратичной формы, полученной из исходной при помощи ортогонального преобразования.

Рассмотрим произвольное n-мерное евклидово пространство $\mathcal{E}$ и некоторый ОНБ b в нем. Матрица A является матрицей некоторого самосопряженного оператора $\mathscr{A}$ в базисе b. Тогда существует такой ОНБ e, что матрица A' оператора $\mathscr{A}$ в этом базисе диагональна (*желательно знать формулировку теоремы). Согласно формуле преобразования матрицы линейного оператора, имеем $A' = P_{b\to e}^{-1} AP_{b\to e}$. Так как оба базиса являются ОНБ, то матрица P является ортогональной. ■

39 Метод Лагранжа для приведения квадратичной формы к диагональному виду. Описать алгоритм для разных случаев и обосновать возможность применения.

По определению, квадратичной формой называется сумма вида

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j,$$

где b_{ij} - заданные числа, $1\leqslant i<j<n$.
Таким образом, у нас есть упорядоченный набор переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$, причем каждая переменная одного из трех типов:

- **1 типа:** есть ненулевое слагаемое с квадратом это переменной и хотя бы одно слагаемое с первой степенью этой переменной;
- **2 типа:** нет слагаемого с квадратом этой переменной, но есть хотя бы одно ненулевое слагаемое с первой степенью этой переменной;
- **3 типа:** есть ненулевое слагаемое с квадратом этой переменной, но нет слагаемых с первой степенью этой переменной.

Суммарное количество переменных 1-го и 2-го типа назовем *дефектом КФ*.
Например,

1. $f(x,y,z)=2x^2-y^2+xz$.
   - x — 1-го типа.
   - z — 2-го типа.
   - y — 3-го типа.

   Дефект КФ равен 2.
2. $f(x,y,z,t)=4y^2-z^2-xy+3xt+2yt$.
   - y — 1-го типа.
   - x,t — 2-го типа.
   - z — 3-го типа.

   Дефект КФ равен 3.

Докажем, что если дефект КФ больше нуля (т.е. в КФ есть хотя бы одна переменная 1-го или 2-го типа), то его можно понизить, сделав подходящую линейную замену.
Случай 1: В КФ есть переменные 1-го типа.
Соберем все слагаемые с этой переменной в скобку и выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned}
\text{КФ} &= (\underbrace{a}_{\neq 0}x^2+\underbrace{2b_1xy_1+2b_2xy_2+\ldots+2b_kxy_k}_{\text{все эти слагаемые (их }\geqslant 1\text{) ненулевые.}})+\underbrace{\ldots}_{\star}=\\
&=a(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b_1}{a}y_1+2\cdot x\cdot\frac{b_2}{a}y_2+\ldots+2\cdot x\cdot\frac{b_k}{a}y_k)+\underbrace{\ldots}_{\star}=\\
&=a\left((x+\frac{b_1}{a}y_1+\ldots+\frac{b_k}{a}y_k)^2-\sum_{i=1}^{k}(\frac{b_i}{a}y_i)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}2\cdot\frac{b_i}{a}y_i\cdot\frac{b_j}{a}y_j\right)+\underbrace{\ldots}_{\star}=\\
&=a(x+\frac{b_1}{a}y_1+\ldots+\frac{b_k}{a}y_k)^2+\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\left(-\frac{b_i^2}{a}\right)}_{\lambda_i\neq 0}y_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\underbrace{\left(-\frac{2b_ib_j}{a}\right)}_{\mu_{ij}\neq 0}y_iy_j+\underbrace{\ldots}_{\star}=\\
&=\left\{\begin{array}{l}\text{Замена}\\ x'=x+\frac{b_1}{a}y_1+\ldots+\frac{b_k}{a}y_k\end{array}\right\}=\\
&=a(x')^2+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\lambda_iy_i^2}_{\star\star}+\underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\mu_{ij}y_iy_j}_{\star\star\star}+\underbrace{\ldots}_{\text{нет }x'}.
\end{aligned}$$

"$\star$ В этом месте:

1. нет x.
2. могут быть $Ay_iy_j, 1 \leqslant i < j \leqslant k$.
3. могут быть $Ay_i^2, 1 \leqslant i \leqslant k$.
4. могут быть слагаемые $Az_pz_q, 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$ целиком из незадействованных в скобке переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$.
5. могут быть $Ay_iz_j, 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant m$.

В новой квадратичной форме x' - переменная 3-го типа.
А что произошло с другими переменными - т.е. с $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и "незадействованными"переменными $z_1, z_2, \ldots, z_m$?

1. Если в исходной КФ y_1 была переменной 1-го типа, то она станет либо 1-го, либо 2-го, либо 3-го типа (в зависимости от результата сложения $\star\star$ и $\star\star\star$);
2. Если в исходной КФ y_1 была переменной 2-го типа, то она станет переменной либо 1-го, либо 3-го типа;
3. y_1 не могла быть переменной 3-го типа;
4. Если z_1 была переменной 1-го типа, то она ею и останется;
5. Если z_1 была переменной 2-го типа, то она ею и останется;
6. Если z_1 была переменной 3-го типа, то она ею и останется;

Получается, что наша процедура как минимум на 1 увеличило число переменных 3-го типа $\Rightarrow$ дефект КФ уменьшился на 1.

Случай 2: В КФ нет переменных 1-го типа.

Подслучай 2а: В КФ есть переменная 2-го типа.
В этом случае КФ содержит только слагаемые с разноименными переменными. Так как КФ $\neq 0$, то в ней есть хотя бы одно такое слагаемое; пусть, это в примеру, $ax_1x_2 (a \neq 0)$. Тогда КФ будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
\text{КФ} = {} & ax_1x_2 + \\
& + b_3x_1x_3 + b_4x_1x_4 + \ldots + b_nx_1x_n + \\
& + c_3x_2x_3 + c_4x_2x_4 + \ldots + c_nx_2x_n + \\
& + \underbrace{\ldots}_{\text{Здесь нет } x_1, x_2 \text{ но, возм., есть какие-то другие переменные.}} = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = v_1 + v_2 \\ x_2 = v_1 - v_2 \end{array} \right\} = \\
& = av_1^2 + (-a)v_2^2 + \\
& + b_3(v_1 + v_2)x_3 + \ldots + b_n(v_1 + v_2)x_n + \\
& + c_3(v_1 - v_2)x_3 + \ldots + c_n(v_1 - v_2)x_n + \\
& + \underbrace{\ldots}_{\text{ничего не изменится.}} = \\
& = av_1^2 + (-a)v_2^2 + \\
& + (b_3 - c_3)v_1x_3 + (b_4 - c_4)z_1x_4 + \ldots + (b_n - c_n)z_1x_n + \\
& + \underbrace{\ldots}_{\text{ничего не изменится.}}
\end{aligned}
$$

где b_i, c_j - любые (в том числе и нулевые)
Видим, что количество переменных 3-го типа выросло $\Rightarrow$ дефект КФ уменьшился.

Подслучай 2б: В КФ нет переменных 2-го типа.
Этот случай невозможен, т.к. по условию дефект КФ положителен.

Итак, мы предположили процедуру, благодаря которой в любой КФ с положительным дефектом можно уменьшить этот дефект. Последовательно применяя эту процедуру, можно получить КФ с нулевым дефектом, т.е. КФ канонического вида.

40 Теоремы Фредгольма для систем линейных уравнений*.

Сначала сформулируем и докажем теоремы Фредгольма для операторов в линейных пространствах:

40.1 Альтернатива Фредгольма.

Теорема 40.1 ("Альтернатива Фредгольма"). *Пусть*

1. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{V} \text{ - линейное пространство, } \dim\mathcal{V} = n \\ \mathcal{W} \text{ - линейное пространство, } \dim\mathcal{W} = m\end{array}\right\}$ *В обоих задано скалярное произведение.*
2. $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *- линейный оператор.*

Тогда справедливо ровно одно из двух:

- *либо уравнение $\mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}$ имеет решение при любом $\vec{w} \in \mathcal{W}$,*
- *либо уравнение $\mathscr{A}^*\vec{w} = \vec{0}$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение.*

Доказательство.

Обозначим $r = \operatorname{rank}(\mathscr{A})$.

1 случай:

$$r = m$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}) = m$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Т.к. } \operatorname{Im}\mathscr{A} \text{— } m\text{-мерное подпространство } m\text{-мерного пространства } \mathcal{W}, \text{то } \operatorname{Im}\mathscr{A} = \mathcal{W}.$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\vec{w} \in \mathcal{W}\exists\vec{v} \in \mathcal{V}\colon \mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}.$$
$$\text{Также заметим, что } \dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}^*) + \dim(\ker\mathscr{A}^*) = m$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}) + \dim(\ker\mathscr{A}^*) = m$$
$$\Downarrow$$
$$m + \dim(\ker\mathscr{A}^*) = m$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\ker\mathscr{A}^*) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\ker\mathscr{A}^* = \{\vec{0}\}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Уравнение } \mathscr{A}^*\vec{w} = \vec{0} \text{ имеет только тривиальное решение.}$$

Получается, что второе "либо"не выполнено!

2 случай:

$$r < m$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}) < \dim\mathcal{W}$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}^*) < \dim\mathcal{W}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Т.к. } \dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}^*) + \dim(\ker\mathscr{A}^*) = \dim\mathcal{W}, \ker\mathscr{A}^* \neq \{\vec{0}\}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\vec{w} \neq 0 \in \ker\mathscr{A}^*$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\vec{w} \neq 0\colon \mathscr{A}^*\vec{w} = \vec{0}$$

■

40.2 Теорема Фредгольма.

Теорема 40.2 (Фредгольма)**.** *Пусть*

1. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{V} \text{ - линейное пространство, } \dim \mathcal{V} = n \\ \mathcal{W} \text{ - линейное пространство, } \dim \mathcal{W} = m\end{array}\right\}$ *оба конечномерны, в обоих задано скалярное произведение.*
2. $\mathscr{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *- линейный оператор.*
3. $\vec{w} \in \mathcal{W}$ *- фиксированный элемент, причем* $\vec{w} \neq \vec{0}$.

Тогда уравнение $\mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}$ *имеет решение* $\iff$ *вектор* $\vec{w}$ *ортогонален всем решением уравнения* $\mathscr{A}^*\vec{u} = \vec{0}$.

Доказательство.

$(\implies)$

Пусть $\mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}$ имеет решение, т.е. $\exists \vec{v}_0 \in \mathcal{V}\colon \mathscr{A}\vec{v}_0 = \vec{w}$.

Рассмотрим произвольное решение $\vec{u}_0$ уравнения $\mathscr{A}^*\vec{u} = \vec{0}$ (т.е. $\mathscr{A}^*\vec{u}_0 = \vec{0}$).

Получим:

$$(\vec{w}, \vec{u}_0) = (\mathscr{A}\vec{v}_0, \vec{u}_0) = (\vec{v}_0, \mathscr{A}^*\vec{u}_0) = (\vec{v}_0, \vec{0}) = 0.$$

Значит, $\vec{w} \perp \vec{u}_0$, ч.т.д.

$(\impliedby)$

$(\star)$ Пусть $\forall \vec{u} \in \mathcal{W} \left(\mathscr{A}^*\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{w}) = 0\right)$.

Докажем, что $\mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}$ имеет хотя бы одно решение.

$(\star\star\star)$ Предположим, что $\mathscr{A}\vec{v} = \underbrace{\vec{w}}_{\substack{\text{фикс. в условии}\\\text{теоремы}\\\text{ненулевой}\\\text{элемент.}}}$ несовместна.

Так как $\mathcal{W}$ - конечномерное (пусть m-мерное), то в нем найдется некоторый базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$. Так как в $\mathcal{W}$ задано скалярное произведение, то базис e можно ортогонализовать, а потом нормировать, т.е. в $\mathcal{W}$ найдется ОНБ $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m$.

Рассмотрим какой-нибудь $\vec{u} \in \mathcal{W}$ такой, что $\mathscr{A}\vec{u} = \vec{0}$.

По условию $(\star)$ из этого будет следовать, что $(\vec{u}, \underbrace{\vec{w}}_{\substack{\text{фикс. в условии}\\\text{теоремы}\\\text{ненулевой}\\\text{элемент.}}}) = 0$.

Пусть в базисе $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ вектор $\vec{u}$, вектор $\vec{w}$ и оператор $\mathscr{A}^*$ имеют координаты $\vec{u}_f = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $\vec{w}_f = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ и матрицу

$$A_f^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathscr{A}^*\vec{u} = \vec{0}$, то $A_f^*\vec{u}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\star\star)\ u_1 \cdot A_1^T + u_2 \cdot A_2^T + \ldots + u_m \cdot A_m^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n}.$$

Так как $(\vec{u}, \vec{w}) = 0$, то в силу ортонормированности $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m$ имеем

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_m w_m = 0$$

Значит, соотношение $(\star\star)$ можно дополнить:

$$u_1 \cdot (A_1^T, \vec{w}_1) + u_2 \cdot (A_2^T, \vec{w}_2) + \ldots + u_m \cdot (A_m^T, \vec{w}_m) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n+1}.$$

Это можно переписать иначе

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} A_1^T & w_1 \\ A_2^T & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_m^T & w_m \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n+1}.$$

Вспомним, что $\mathscr{A}\vec{v} = \vec{w}$ несовместно (предположение $(\star\star\star)$ метода от противного). По т. Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} \neq \operatorname{rank} \left(\begin{array}{c|c} A_1^T & w_1 \\ A_2^T & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_m^T & w_m \end{array} \right).$$

Это означает, что если приводить обе матрицы одинаковыми преобразованиями над строками к ступенчатому виду, то количество "ступенек"у левой будет на 1 меньше, чем количество ступенек у правой. Это означает, что в ступенчатом виде правой матрицы будет строка

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right)}_{n \text{ нулей и одна единица.}}.$$

Мы знаем, что если над строками матрицы были совершены элементарные преобразования, то любую строку полученной матрицы можно представить в виде линейной комбинации строк исходной матрицы. Следовательно, найдутся такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что

$$\lambda_1 \cdot (A_1^T, \vec{w}_1) + \lambda_2 \cdot (A_2^T, \vec{w}_2) + \ldots + \lambda_m \cdot (A_m^T, \vec{w}_m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Откуда, беря только последний элемент строк, получим

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{w}_m = 1. \tag{22}$$

Возьмем $\vec{z}_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$. С одной стороны, из (21) следует, что $A_f^* \vec{z}_f = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n$, т.е. $A^* \vec{z} = \vec{0}$. А значит, согласно условию $(\vec{z}, \vec{w}) = 0$. С другой стороны, из (22) следует, что $(\vec{z}, \vec{w}) = 1$.

Противоречие.

■

40.3 Теоремы о СЛАУ, которые являются следствиями из теорем Фредгольма.

Теорема 40.3. *Пусть*

1. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *- некоторая матрица;*
2. $A^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *- сопряженная к ней.*

Тогда справедливо ровно одно из следующих двух утверждений:

- *либо СЛАУ* $A\vec{x} = \vec{b}$ *имеет решение при любом* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$,
- *ОСЛАУ* $A^*\vec{y} = \vec{0}$ *имеет нетривиальное решение* $\vec{y} = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 40.4. *Пусть*

1. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *- некоторая матрица;*
2. $A^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *- сопряженная к ней;*
3. $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ *- заданный вектор-столбец.*

Тогда СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ *совместна* $\iff$ *вектор* $\vec{b}$ *ортогонален всем решениям ОСЛАУ* $A^*\vec{y} = \vec{0}$.