OOPython

Задача 4. Функциональные пространства.

Создать иерархии классов для реализации следующих функциональных пространств:

Часть 1:

- классы, реализующие 4 различных нормированных пространства со следующими правилами вычисления норм:
    - $\|f\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$ (C[a; b])
    - $\|f\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ (C^1[a; b])
    - $\|f\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$ (C^2[a; b])
    - $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$ (L_2[a; b])

- классы, реализующие 4 различных метрических пространства, с правилами вычисления метрик, порождаемых нормами соответствующих нормированных пространств

Часть 2:

- класс, реализующий 1 предгильбертово пространство со стандартным правилом вычисления скалярного произведения: $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$
- класс, реализующий 1 нормированное пространство с нормой, порождаемой скалярным произведением предгильбертова пространства E
- класс, реализующий 1 метрическое пространство с метрикой, порождаемой нормой нормированного пространства

Тестирование на следующих функциях**:**

- $f(x) = \dfrac{5}{2+3x^2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{5+\cos(x)}$
- $f(x) = \sqrt[3]{3+4x^2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$

1. В 4-х нормированных пространствах $\mathbf{C^0[0; 2]}$, $\mathbf{C^1[0; 2]}$, $\mathbf{C^2[0; 2]}$, $\mathbf{L_2[0; 2]}$ вычислить нормы всех функций;
2. В 4-х реализованных соответствующих метрических пространствах вычислить попарные расстояния между всеми функциями
3. В реализованном предгильбертовом пространстве вычислить попарные скалярные произведения между всеми функциями
4. В реализованном предгильбертовом пространстве попарно вычислить углы между всеми функциями

Примечания по реализации:
Шаг сетки на отрезке задать равным $h = 10^{-3}$.
Для реализации функций, их производных 1-го и 2-го порядков, операции интегрирования – использовать функторы из Задач 2 и 3 (если задачи не сделаны – реализовать все вышеописанное любым образом, но за задачу снимется **0.2/1** балла).

Вычисление производных:
При вычислении 1-ых производных использовать задействовать функторы (любой на ваше усмотрение), реализованные вами в **Задаче 2**:

- в крайних точках сетки использовать формулы 1-го порядка точности (конечные разности вперед и назад для левой и правой производной, соответственно)
- во всех остальных точках – использовать формулу 2-го порядка точности (центральная разность)

При вычислении 2-ых производных задействовать функторы вычисления 1-х производных:

- в крайних точках сетки воспользоваться формулами 1-го порядка точности (для левых и правых 2-ых производных)
- во всех остальных точках - со 2-м порядком точности, при этом сохраняя минимально возможный размер шаблона формулы численного дифференцирования в 3 соседние точки (при этом потребуется изменить значение шага численного дифференцирования $h=10^{-3}$):

Вычисление интегралов со 2-м порядком точности по методу трапеций реализовать через функтор, реализованный вами в **Задаче 3**.