

# EXTENSIONS DE L'ALGORISME CLÀSSIC DE WHITEHEAD

Borja de Balle Pigem

Barcelona, desembre de 2009

**Extensions de l'Algorisme Clàssic  
de Whitehead**

*Borja de Balle Pigem*

`borja.balle@gmail.com`

Barcelona, desembre de 2009





# Pròleg

Aquesta memòria és una versió revisada i lleugerament ampliada de la que vaig presentar el gener de 2009 en qualitat de Treball de Fi de Màster a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya en el marc del programa de Màster en Matemàtica Aplicada.

Vaig realitzar aquest treball sota la direcció de n'Enric Ventura i Capell a qui vull agrair la seva paciència i dedicació, sense la qual probablement aquest projecte no hagués arribat a bon port.

També vull agrair a tota la meva família, especialment a la meva mare i a la meva germana, tot l'amor i el suport que m'han transmès des de sempre.



# Índex

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resum</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1 Introducció</b>   | <b>9</b>  |
| 1.1 Preliminars . . . . .  | 9         |
| 1.2 Equivalència orbital . . . . .                                   | 24        |
| <b>2 El primer problema de Whitehead</b>                             | <b>31</b> |
| 2.1 Automorfismes de Whitehead . . . . .                             | 31        |
| 2.2 El graf de Whitehead . . . . .                                   | 34        |
| 2.3 Lemes tècnics . . . . .  | 37        |
| 2.4 El lema de reducció de pics . . . . .                            | 42        |
| 2.5 Solució del primer problema de Whitehead . . . . .               | 47        |
| <b>3 El segon problema de Whitehead</b>                              | <b>53</b> |
| 3.1 Imatge d'un $X$ -graf per un automorfisme de Whitehead . . . . . | 53        |
| 3.2 L'hipergraf de Whitehead . . . . .                               | 59        |
| 3.3 Lemes tècnics . . . . .  | 62        |
| 3.4 Solució del segon problema de Whitehead . . . . .                | 67        |
| <b>4 Aplicacions</b>   | <b>73</b> |
| 4.1 Una presentació per a $Aut(F)$ . . . . .                         | 73        |
| 4.2 Acció per estabilitzadors . . . . .                              | 74        |
| 4.3 La complexitat dels problemes de Whitehead . . . . .             | 76        |
| <b>5 Conclusions</b>   | <b>79</b> |
| <b>A Les relacions de McCool</b>                                     | <b>81</b> |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>87</b> |





# Índex de figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Reducció i cor cíclic d'un $X$ -graf . . . . .  | 14 |
| 1.2 | Representació gràfica de $H$ i $[H]$ . . . . .  | 17 |
| 1.3 | Càlcul de la imatge d'un $X$ -graf per un automorfisme . . . . .  | 18 |
| 1.4 | Exemples de grafs capacitius . . . . .  | 21 |
| 1.5 | Exemple d'hipergraf capatiu . . . . .   | 22 |
| 2.1 | El graf de Whitehead de $w = \bar{b}a\bar{a}\bar{b}a\bar{b}c\bar{c}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$ . . . . . | 37 |
| 2.2 | Graf subjacent $K_4$ de la demostració del lema 2.7 . . . . .   | 41 |
| 3.1 | Reduccions elementals en la fase (a) . . . . .  | 55 |
| 3.2 | Reduccions elementals en la fase (b) . . . . .  | 56 |
| 3.3 | Fulles que apareixen en la fase (a) . . . . .   | 58 |
| 3.4 | Fulles que apareixen en la fase (b) . . . . .   | 58 |
| 3.5 | Particions dels conjunts de vèrtexs en el càlcul de $\Gamma\sigma$ . . . . .                                      | 59 |
| 3.6 | Hipergraf de Whitehead de l'exemple 3.3 . . . . .   | 61 |
| 3.7 | Representació gràfica del subgrup $H_i$ . . . . .   | 71 |



# Resum

Els problemes de Whitehead són una família de problemes decisionals que es plantegen en el camp de la teoria de grups. Aquests es divideixen en el primer i segon problema de Whitehead, cadascun amb les seves respectives variants. Els grups involucrats en aquests problemes són el grup lliure  $F$  i el seu grup d'automorfismes  $Aut(F)$ . En aquest context, un dels problemes de Whitehead consisteix en, donades dues paraules  $w_1, w_2 \in F$ , decidir si existeix un automorfisme  $\alpha \in Aut(F)$  de manera que  $w_2$  sigui la imatge per  $\alpha$  de  $w_1$ . Les diverses variants del problema consisteixen en prendre, enlloc de paraules de  $F$ , tuples de paraules, classes de conjugació, subgrups finitament generats i les variants que s'obtenen de combinar aquests objectes. En aquest treball provarem que tots els problemes d'aquesta família són decidibles i donarem algorismes per resoldre'ls. Per fer-ho combinarem diverses tècniques.

En primer lloc, desenvoluparem una estratègia general, la tècnica de reducció de pics, que permet resoldre aquests i d'altres problemes del mateix tipus quan es compleixen unes determinades condicions. Emprarem aquesta estratègia per resoldre tots els problemes de Whitehead, i per això caldrà veure que cadascun dels problemes de la família satisfà aquestes condicions. Aquest camí ens portarà a emprar tècniques de la teoria combinatòria i geomètrica de grups. Aquestes disciplines estudien els grups (discrets) infinits des de dos punts de vista complementaris. D'una banda, la teoria combinatòria, estudia els grups per mitjà de presentacions donades per un conjunt de generadors i un conjunt de relacions. D'aquesta manera, un grup és un conjunt de paraules sobre un alfabet de generadors on es satisfan unes determinades relacions donades per equacions entre paraules. En el nostre cas emprarem un determinat conjunt de generadors i relacions per presentar el grup  $Aut(F)$  i estudiar algunes propietats dels seus elements. Per altra banda, la teoria geomètrica, estudia els grups per mitjà d'objectes geomètrics que capturen en certs aspectes algunes de les seves propietats. Els objectes

geomètrics que emprarem aquí seran grafs que ens permetran representar subgrups finitament generats de  $F$  i analitzar el seu comportament sota l'acció d'un automorfisme de  $F$ .

Equipats amb aquestes tècniques, podem donar una solució completa i autocontinguda per cadascun dels problemes de Whitehead. Malgrat que aquestes solucions no són noves, no existeix en la literatura sobre el tema cap referència on es doni un tractament unificat, autocontingut i exhaustiu de les solucions completes per a tots els problemes de la família. El més proper que es pot trobar és el llibre [LS01] on hi apareixen solucions pel primer problema de Whitehead i totes les seves variants. No obstant, l'elevada quantitat d'errors tipogràfics i l'escassetat de detalls en les demostracions converteixen l'estudi d'aquests resultats en una tasca àrdua. Per al segon problema, no hi ha cap punt de la literatura que contingui de manera explícita i completa la solució. Gersten a [Ger84] presenta un programa per resoldre'l usant les mateixes tècniques que en el primer problema, però omet diversos detalls i demostracions. Per altra banda, es pot veure que la solució del segon problema es troba implícita en [Kal92], malgrat que l'autor no segueix el plantejament de Gersten i obté resultats molt més generals dels quals és difícil extreure una demostració completa i autocontinguda de la solució del segon problema de Whitehead. Un dels avantatges de comptar amb un tractat autocontingut sobre tots els problemes de Whitehead és que permet apreciar els paral·lelismes existents entre les diverses solucions i alhora recalcar les, a vegades, subtils diferències existents entre cadascuna d'elles.

Usant els resultats obtinguts sobre els problemes de Whitehead i les tècniques emprades en la seva solució, presentem tres aplicacions diferents. Aquestes estan relacionades amb el grup d'automorfismes  $Aut(F)$  i els seus subgrups, i amb l'estudi de la complexitat dels problemes de Whitehead.

La primera aplicació és un conegut teorema que dona una presentació del grup d'automorfismes del grup lliure. La segona és una contribució original d'aquest treball i consisteix en resoldre una nova variant dels problemes de Whitehead on, enlloc de prendre el grup d'automorfismes  $Aut(F)$ , es pren un subgrup seu d'una forma particular. L'última aplicació és a l'estudi de la complexitat computacional dels problemes de Whitehead, problema de recerca que no està resolt. En aquest àmbit, l'ús de les tècniques basades en el graf i l'hipergraf de Whitehead presentades en aquest treball permet reduir de manera substancial la complexitat de les solucions algorísmiques.

A continuació describim l'estructura d'aquesta memòria. La primera part

del capítol 1 presenta la notació, definicions i resultats preliminars que emprarem al llarg del treball. A continuació es descriu la tècnica de reducció de pics per resoldre problemes de Whitehead en un context abstracte i l'algorisme de Whitehead. El capítol 2 descriu la solució del primer problema de Whitehead i totes les seves variants. En el capítol 3, seguint el mateix esquema que l'anterior, es dóna una solució completa pel segon problema de Whitehead i les seves variants. Seguidament, el capítol 4 presenta les tres aplicacions mencionades. Per acabar, recollim les conclusions extretes d'aquest treball en el capítol 5. Les relacions de McCool que s'usen freqüentment en aquest treball estan demostrades a l'apèndix A.



# Capítol 1

## Introducció

### 1.1 Preliminars

En aquesta primera secció introduïrem diversos elements de notació que usarem al llarg d'aquest treball. També citarem alguns resultats estàndards i farem algunes observacions que ens seran útils més endavant. Pel què fa al grup lliure, els seus subgrups i els seus automorfismes, pràcticament tot el material presentat aquí és estàndard i es pot trobar en les referències clàssiques de teoria combinatòria de grups [MKS04, LS01]. La representació dels subgrups d'un grup lliure mitjançant grafs etiquetats fou explícitament establerta per primer cop per Stallings a [Sta83]; aquí fem la mateixa notació de [RVW07]. Els grafs i hipergrafs capacitius que apareixen en aquest treball són grafs i hipergrafs no dirigits amb capacitats positives a les seves arestes i hiperarestes. Vegeu [Die05] i [Ber89] per una introducció a la teoria de grafs i hipergrafs respectivament. La presentació que farem dels problemes computacionals de decisió i cerca serà de caràcter més aviat intuïtiu, sense aprofundir en les definicions formals. El lector interessat pot trobar les definicions en qüestió a [Rog87].

#### 1.1.1 Grup lliure, automorfismes i paraules cícliques

Sigui  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  un conjunt finit de cardinalitat  $r$ . Anomenarem els elements de  $X$  *símbols* i per cada  $x_i \in X$  definim un nou símbol  $\overline{x_i}$  anomenat *invers formal* de  $x_i$ . Denotem per  $X^{-1}$  el conjunt  $\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r}\}$  format pels inversos formals dels símbols de  $X$ . El *simetritzat* de  $X$  serà el conjunt  $X^\pm = X \cup X^{-1}$ . En  $X^\pm$  definim una involució  $\overline{\phantom{x}} : X^\pm \rightarrow X^\pm$ ,

que anomenarem *inversió*, i que envia un símbol al seu invers de manera que  $\overline{\overline{x_i}} = x_i$ . Una *paraula* sobre  $X^\pm$  és una seqüència finita de símbols de  $X^\pm$  de la forma  $w = a_1 \cdots a_k$  amb  $k \geq 0$ . La *longitud* de  $w$  és  $k$  i es denota per  $|w|$ . Si  $k = 0$  escriurem  $w = 1$  per denotar la paraula buida. Podem estendre la involució de  $X^\pm$  a les paraules sobre  $X^\pm$  definint l'invers d'una paraula  $w = a_1 \cdots a_k$  com  $\overline{w} = \overline{a_k} \cdots \overline{a_1}$ . Diem que la paraula  $w$  és *reduïda* si no hi apareixen de manera consecutiva un símbol i el seu invers. Si  $w = a_1 \cdots a_k$  és una paraula de longitud  $k$ , una *permutació cíclica* de  $w$  és qualsevol paraula de la forma  $w' = a_i \cdots a_k a_1 \cdots a_{i-1}$  amb  $1 \leq i \leq k$ . Direm que una paraula reduïda  $w$  és *cíclicament reduïda* si totes les seves permutacions cícliques són reduïdes. Això és equivalent a dir que la paraula  $ww$  és reduïda. Si  $w$  no és cíclicament reduïda, aleshores existeix un únic segment inicial de  $w$ ,  $u = a_1 \cdots a_j$  amb  $j < \frac{k}{2}$  tal que  $w = uv\overline{u}$  i  $v$  és cíclicament reduïda. La paraula  $v$  és la *reducció cíclica* de  $w$ .

El grup lliure sobre  $X$  es denota per  $F(X)$  i és el conjunt format per totes les paraules reduïdes sobre  $X^\pm$ , entre les quals la paraula de longitud 0 farà el paper d'element neutre. L'operació de multiplicació és la concatenació de dues paraules seguida de la reducció de la paraula resultant. L'operació d'inversió consisteix en prendre l'invers  $\overline{w}$  d'una paraula  $w \in F$ . La cardinalitat del conjunt  $X$  es correspon amb el rang de  $F(X)$ , la cardinalitat del conjunt més petit de generadors per a  $F(X)$ .

A menys que assenyallem el contrari, al llarg d'aquest treball suposarem que la base  $X$  està fixada i usarem  $F$  per denotar el grup lliure amb base  $X$  i  $r$  per denotar-ne el rang.

El grup d'automorfismes de  $F$  el denotarem per  $Aut(F)$ . És conegut que aquest grup és finitament presentat per mitjà dels anomenats automorfismes de Nielsen. Els automorfismes de Whitehead que presentarem més endavant contenen aquests automorfismes de Nielsen com a cas particular. Per a tot  $\alpha \in Aut(F)$  i  $w \in F$  usarem la notació  $w\alpha$  per denotar la imatge de  $w$  per  $\alpha$ . Per calcular-la només cal conèixer la imatge per  $\alpha$  de cadascun dels símbols de  $X$ . Aleshores, si  $w = a_1 \cdots a_k$  tindrem  $w\alpha = (a_1\alpha) \cdots (a_k\alpha)$ . D'aquesta manera, la composició d'automorfismes es correspon amb la multiplicació per la dreta en  $Aut(F)$ : si tenim  $w \in F$  i  $\alpha, \beta \in Aut(F)$ , aleshores aplicar  $\beta$  al resultat d'aplicar  $\alpha$  a  $w$  és el mateix que aplicar a  $w$  l'automorfisme  $\alpha\beta$ ,  $(w\alpha)\beta = w\alpha\beta$ . Donats  $x \in X$  i  $\alpha \in Aut(F)$ , direm que el símbol  $x$  és *invariant* per  $\alpha$  si es compleix que  $x\alpha = x$  i a més els símbols  $x$  i  $\overline{x}$  no apareixen en les imatges per  $\alpha$  de cap símbol de  $X^\pm \setminus \{x, \overline{x}\}$ . Si  $x$  és invariant



per  $\alpha$ , aleshores  $\alpha$  restringeix a un automorfisme del grup lliure  $F' = F(X')$  generat per  $X' = X \setminus \{x\}$ . Quan ens trobem en aquesta situació, podem pensar directament que  $\alpha$  és un automorfisme de  $F'$ .

Per a cada paraula  $u \in F$  existeix un automorfisme  $\gamma_u \in \text{Aut}(F)$  consistent en conjuguar per  $u$  tots els elements de  $F$ : si tenim  $w \in F$ , llavors  $w\gamma_u = \bar{u}wu$ . A  $\gamma_u$  l'anomenarem *conjugació* per  $u$ . El conjunt format per totes les conjugacions és un subgrup normal de  $\text{Aut}(F)$  anomenat grup d'*automorfismes interns* i es denota per

$$\text{Inn}(F) = \{\gamma_u | u \in F\}.$$

El grup quocient de  $\text{Aut}(F)$  per  $\text{Inn}(F)$  s'anomena el grup d'*automorfismes externs* de  $F$  i es denota per  $\text{Out}(F)$ .

De manera natural existeix una acció de  $\text{Aut}(F)$  sobre  $F$ . Si considerem la restricció d'aquesta acció a  $\text{Inn}(F)$  obtenim la partició de  $F$  en *classes de conjugació*. El conjunt format per totes les classes de conjugació de  $F$  el denotem per  $[F]$  i els seus elements per  $[w]$  on  $w \in F$  és un representant de la classe. Així doncs, donats  $[w], [v] \in [F]$ , tenim  $[w] = [v]$  si i només si existeix  $u \in F$  de manera que  $v = w\gamma_u$ . Si  $w \in F$  és cíclicament reduïda, aleshores  $w$  és un representant de  $[w]$  de longitud mínima; la resta de representants de longitud mínima de  $[w]$  són totes les possibles permutacions cícliques de  $w$ . Si  $v$  és la reducció cíclica d'una paraula  $w \in F$ , aleshores  $[v] = [w]$  ja que tenim  $w = uv\bar{u} = v\gamma_{\bar{u}}$  per algun segment inicial  $u$  de  $w$ . Una *paraula cíclica* és el conjunt format per totes les permutacions cícliques d'una paraula cíclicament reduïda. Cada classe de conjugació  $[w] \in [F]$  conté una única paraula cíclica que usarem com a representant distingit de la classe. Si  $w \in F$  és cíclicament reduïda, cometrem un abús de notació i usarem  $[w]$  per denotar la paraula cíclica que representa la classe de conjugació de  $w$ , és a dir, identificarem la classe amb el seu representant. Denotarem per  $||[w]||$  la longitud d'una paraula cíclica que definim com la longitud de qualsevol paraula cíclicament reduïda de  $[w]$ .

L'acció de  $\text{Aut}(F)$  sobre  $F$  indueix de manera natural una acció de  $\text{Out}(F)$  sobre  $[F]$ . Donada una paraula cíclica  $[w] \in [F]$  i un automorfisme extern  $\alpha \text{Inn}(F) \in \text{Out}(F)$  amb  $\alpha \in \text{Aut}(F)$ , aleshores  $[w]\alpha \text{Inn}(F) = [w\alpha] = [w']$ , on  $w'$  és la reducció cíclica de  $w\alpha$ . Si tenim  $\beta \in \alpha \text{Inn}(F)$ , aleshores  $\beta = \alpha\gamma$  amb  $\gamma \in \text{Inn}(F)$  i per tant  $[w\beta] = [w\alpha\gamma] = [w''] = [w']$ , on  $w''$  és la reducció cíclica de  $w\alpha\gamma$  i per tant és una permutació cíclica de

$w'$ . Per conveniències tècniques usarem tot el grup d'automorfismes  $Aut(F)$  per actuar sobre  $[F]$ , de manera que si tenim una paraula cíclica  $[w] \in [F]$  i  $\alpha \in Aut(F)$ , aleshores prendrem com a  $[w]\alpha$  la paraula cíclica  $[w']$ , on  $w'$  s'obté de reduir cíclicament la paraula  $w\alpha$ .

### 1.1.2 $X$ -grafs i subgrups

#### $X$ -grafs

Un  $X$ -graf és un graf finit dirigit amb les arestes etiquetades per  $X^\pm$ . Més concretament, un  $X$ -graf és una parella  $\Gamma = (V, E)$  on  $V$  és un conjunt finit de vèrtexs i  $E \subseteq V \times X^\pm \times V$ . Definim la *mida* d'un  $X$ -graf com el nombre de vèrtexs que conté i la denotem  $|\Gamma| = |V|$ . Direm que un  $X$ -graf és *dual* si es compleix que  $(v_1, x, v_2) \in E$  si i només si  $(v_2, \bar{x}, v_1) \in E$ , és a dir, si per cada aresta de  $\Gamma$  n'existeix una en sentit invers etiquetada amb l'invers del símbol de la primera aresta. A menys que especifiquem el contrari, suposarem que tots els  $X$ -grafs que considerem són duals. Diem que un  $X$ -graf és *connex* si ho és el graf no dirigit subjacent. Tots els  $X$ -grafs que usarem seran connexos, a menys que diguem el contrari. Usarem  $\alpha$ ,  $\lambda$  i  $\omega$  per denotar la primera, segona i tercera projecció de  $E$  en  $V$ ,  $X^\pm$  i  $V$  respectivament, que representen el vèrtex inicial, l'etiqueta i el vèrtex final de l'aresta respectivament. Amb aquesta notació podem definir el *link* d'un vèrtex  $v \in V$  com el conjunt de totes les arestes que el tenen com a vèrtex final:

$$\text{link}_\Gamma(v) = \{e \in E \mid \omega(e) = v\}.$$

Observem que quan el graf és dual el link d'un vèrtex conté també l'informació sobre les arestes sortints. Com és habitual, en els casos en què el context ho permeti obviarem el subíndex  $\Gamma$ .

Un  $X$ -graf es diu que és *reduït* si per a tot vèrtex  $v$  la projecció  $\lambda$  restringida a  $\text{link}(v)$  és injectiva. Això és el mateix que dir que per cada vèrtex  $v \in V$  i cada  $x \in X^\pm$  hi ha com a molt una aresta de  $\text{link}(v)$  etiquetada per  $x$ . Per tant, si  $\Gamma$  és reduït i tenim  $(u, x, v), (w, x, v) \in E$  aleshores és que  $u = w$ . En aquest cas podem establir una bijecció entre el link d'un vèrtex  $v$  i el seu *hyperlink* definit com

$$\text{hl}_\Gamma(v) = \{\lambda(e) \mid e \in \text{link}_\Gamma(v)\} = \lambda(\text{link}_\Gamma(v)).$$

Un vèrtex  $v \in V$  es diu que és una *fulla* si  $|\text{link}(v)| = 1$ . Un  $X$ -graf es diu que és *cíclicament reduït* si és reduït i sense fulles, és a dir, si per a tot  $v \in V$  es té  $|\text{link}(v)| \geq 2$ .

Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un  $X$ -graf i  $u, v \in V$  dos vèrtexs diferents. El  $X$ -graf que s'obté de  $\Gamma$  identificant  $u$  i  $v$  és  $\Gamma' = (V', E')$  amb  $V' = (V \cup \{w_{u=v}\}) \setminus \{u, v\}$  i  $E'$  el conjunt d'arestes que s'obté de substituir en  $E$  totes les aparicions de  $u$  i  $v$  per  $w_{u=v}$ . Observem que si  $\Gamma$  és dual, aleshores  $\Gamma'$  també és dual. Aquesta operació també preserva la connexió del graf. No obstant, és possible que  $\Gamma$  sigui reduït i en canvi  $\Gamma'$  no.

Si  $\Gamma$  no és reduït, una *reducció elemental* de  $\Gamma$  consisteix en identificar dos vèrtexs diferents  $u$  i  $v$  tals que existeixin arestes  $(u, x, w)$  i  $(v, x, w)$  en  $E$ . La *reducció* d'un  $X$ -graf  $\Gamma$  consisteix en practicar-li reduccions elementals de manera reiterada mentre sigui possible. El graf resultant serà reduït. Es pot demostrar que el resultat d'aquest procés no depèn de l'ordre en què s'efectuen les reduccions elementals. El graf que s'obté el denotarem  $\text{red}(\Gamma)$ .

Si  $\Gamma$  és reduït però no cíclicament reduït, una *poda elemental* de  $\Gamma$  consisteix en eliminar-ne una fulla juntament amb totes les arestes en les què apareix. La *reducció cíclica* d'un  $X$ -graf  $\Gamma$  consisteix en practicar-li podes elementals de manera reiterada mentre sigui possible. El graf resultat serà cíclicament reduït. El graf resultat d'aquest procés no depèn de l'ordre de les podes elementals, i s'anomena el *cor cíclic* de  $\Gamma$ , denotat  $\text{cc}(\Gamma)$ . És obvi que  $\text{cc}(\Gamma)$  és un subgraf de  $\Gamma$ .

Donat un vèrtex  $v$  de  $\Gamma$ , aleshores existeix un únic camí de longitud mínima en  $\Gamma$  des de  $v$  fins a un vèrtex de  $\text{cc}(\Gamma)$ . Anomenarem aquest camí la *branca* de  $\Gamma$  en  $v$ , usarem  $b(v)$  per denotar la paraula formada per les etiquetes de les arestes que componen el camí i  $\beta(v)$  per denotar el vèrtex final del camí pertanyent a  $\text{cc}(\Gamma)$ . Notem que si  $v$  és un vèrtex del subgraf  $\text{cc}(\Gamma)$  de  $\Gamma$ , llavors  $b(v) = 1$  i  $\beta(v) = v$ .

**Exemple 1.1.** Si prenem  $X = \{a, b, c\}$ , a la figura 1.1 es pot veure un  $X$ -graf  $\Gamma$  juntament amb la seva reducció  $\text{red}(\Gamma)$  i el cor cíclic d'aquesta,  $\text{cc}(\text{red}(\Gamma))$ . Malgrat que tots aquests  $X$ -grafs són duals, de cada parella d'arestes només representem la que està etiquetada per un símbol de  $X$ . Observem que per reduir  $\Gamma$  identifiquem els vèrtexs  $v_1$  i  $v_2$ . Per reduir cíclicament  $\text{cc}(\Gamma)$  primer podem la fulla  $v_6$  i després podem la nova fulla  $v_5$ . En  $\text{red}(\Gamma)$  tenim  $b(v_6) = \bar{b}\bar{a}$  i  $\beta(v_6) = v_4$ . En  $\text{cc}(\text{red}(\Gamma))$  tenim  $\text{hl}(v_3) = \{a, \bar{b}, c\}$ .

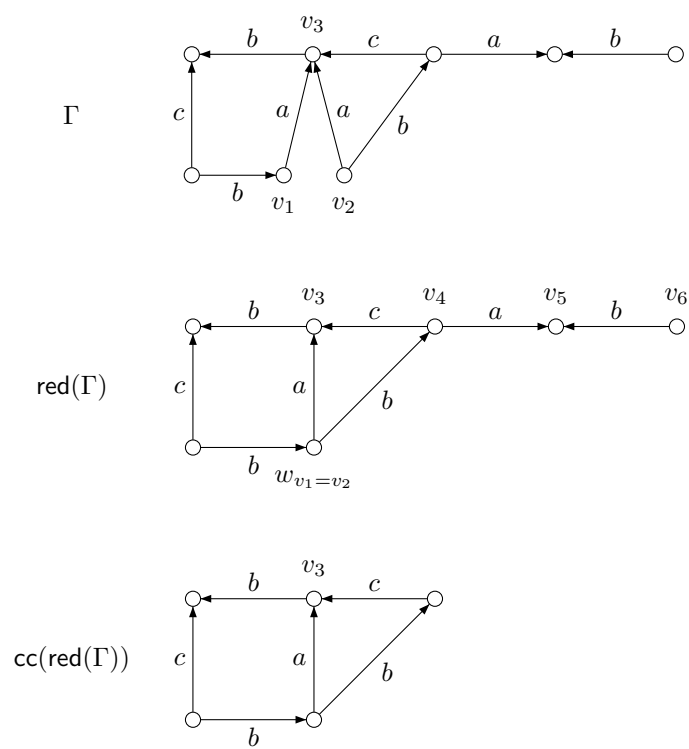


Figura 1.1: Reducció i cor cíclic d'un  $X$ -graf

## Subgrups

El teorema de Nielsen-Schreier és un resultat àmpliament conegut que diu que qualsevol subgrup  $H$  de  $F$  també és lliure. Un subgrup finitament generat  $H$  es pot representar mitjançant un conjunt de generadors que són elements de  $F$ :  $H = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$  amb  $w_i \in F$ .

Una altra representació de caràcter més “topològic” per representar els subgrups finitament generats d’un grup lliure consisteix en l’ús de  $X$ -grafs amb un vèrtex distingit. Sigui  $H$  un subgrup finitament generat de  $F$  i  $w_1, \dots, w_n \in F$  un conjunt de generadors per a  $H$ . Usarem la notació  $\Gamma_0(w_1, \dots, w_n)$  per representar el  $X$ -graf dual que s’obté de prendre un vèrtex distingit  $v_0$  i enganxar-li  $n$  llaços etiquetats per les paraules  $w_i$ . La reducció d’aquest graf la denotarem per  $\Gamma_H = \text{red}(\Gamma_0(w_1, \dots, w_n))$ . És un fet conegut que la parella  $(\Gamma_H, v_0)$  és independent del conjunt de generadors escollit per a  $H$ . Observem que  $\Gamma_H$  és un  $X$ -graf connex sense fulles, llevat, potser, de  $v_0$ . L’anomenarem la *representació gràfica* de  $H$ .

En l’altre sentit, donat un  $X$ -graf reduït connex  $\Gamma$  i un vèrtex distingit  $v_0$  de manera que  $\Gamma$  no té fulles llevat de, potser,  $v_0$ , aleshores existeix un únic subgrup finitament generat  $H$  de  $F$  de manera que  $\Gamma_H = \Gamma$ . De fet,  $H$  és el grup fonamental de  $\Gamma$  amb  $v_0$  com a punt base,  $H = \pi_1(\Gamma, v_0)$ . Per construir-lo, prenem un arbre generador  $T$  de  $\Gamma$  i per cada vèrtex  $v$  de  $\Gamma$  denotem per  $v_T$  la paraula reduïda formada per les etiquetes de les arestes que conformen l’únic camí de  $v_0$  a  $v$  en  $T$ . Per cada aresta positiva  $e = (u, x, v)$  de  $\Gamma$  amb  $x \in X$  definim la paraula reduïda  $e_T = u_T x \overline{v_T}$  de  $F$ . Aleshores una base per  $H$  consisteix en les paraules  $e_T$  per a totes les arestes positives  $e$  de  $\Gamma$  que no pertanyen a  $T$  [Sta83].

Els  $X$ -grafs també són útils per representar classes de conjugació de subgrups. Sigui  $S$  la col·lecció formada per tots els subgrups finitament generats de  $F$  i  $[S]$  la col·lecció de totes les classes d’equivalència de  $S$  mòdul conjugació. Donat  $H \in S$  diem que és *cíclicament reduït* si ho és  $\Gamma_H$ . Si  $H$  no és cíclicament reduït, aleshores  $v_0$  és una fulla de  $\Gamma_H$ . Sigui  $K \in S$  el grup fonamental de  $(\text{cc}(\Gamma_H), \beta(v_0))$ . És ben sabut que  $K$  és el subgrup que s’obté de conjuguar  $H$  per  $b(v_0)$ ,  $K = \overline{b(v_0)} H b(v_0) = H \gamma_{b(v_0)}$ . Així doncs,  $H, H' \in S$  pertanyen a la mateixa classe de conjugació si i només si  $\text{cc}(\Gamma_H) = \text{cc}(\Gamma_{H'})$ . Per tant prendrem el  $X$ -graf  $\Gamma_{[H]} = \text{cc}(\Gamma_H)$  com a *representació gràfica* de  $[H] \in [S]$ .

Usarem la mida de  $\Gamma_H$  per mesurar la mida de  $H \in S$  i la mida de  $\Gamma_{[H]}$

per mesurar la mida de  $[H] \in [S]$ , i esciurem  $|H| = |\Gamma_H|$  i  $|[H]| = |\Gamma_{[H]}|$ .

**Exemple 1.2.** Donades les paraules  $w_1 = acbaab\bar{c}\bar{a}$  i  $w_2 = ac\bar{b}ac\bar{a}$  de  $F(X)$  amb  $X = \{a, b, c\}$ , a la figura 1.2 podem veure el  $X$ -graf  $\Gamma_0(w_1, w_2)$ . Reduint aquest graf obtenim  $\Gamma_H$ , i per tant  $(\Gamma_H, v_0)$  és la representació gràfica del subgrup  $H = \langle w_1, w_2 \rangle$  de  $F(X)$ . Finalment tenim el graf  $\Gamma_{[H]} = \text{cc}(\Gamma_H)$  corresponent a la representació gràfica de  $[H]$ . A més, es pot comprovar que  $(\Gamma_{[H]}, v_1)$  és la representació gràfica del subgrup de  $F(X)$  donat per  $H\gamma_a = \langle cbaab\bar{c}, c\bar{b}ac \rangle$ .

### Acció d'un automorfisme

Ara descriurem el procediment que defineix la imatge d'un  $X$ -graf per un automorfisme de  $F$ . Sigui  $\sigma \in \text{Aut}(F)$  i  $\Gamma = (V, E)$  un  $X$ -graf reduït amb un vèrtex distingit  $v_0$ . Aleshores denotem per  $\Gamma\sigma$  el  $X$ -graf que s'obté després dels següents passos:

1. Substituïm cada aresta de  $E$  etiquetada per  $x$  per un camí etiquetat per  $x\sigma$  amb els mateixos vèrtexs inicial i final. És a dir, si tenim  $(u, x, v) \in E$  i  $x\sigma = a_1 \cdots a_n$ , aleshores eliminem les arestes  $(u, x, v)$  i  $(v, \bar{x}, u)$  de  $E$ , afegim  $n - 1$  nous vèrtexs a  $V$ ,  $w_1, \dots, w_{n-1}$  i afegim a  $E$  les arestes  $(w_{i-1}, a_i, w_i)$  i  $(w_i, \bar{a}_i, w_{i-1})$  per  $1 \leq i \leq m$ , amb  $w_0 = u$  i  $w_m = v$ .
2. Reduïm el graf resultant.
3. Podem de manera reiterada totes les fulles del graf resultant excepte  $v_0$ .

És fàcil comprovar que si tenim  $\sigma \in \text{Aut}(F)$  i  $H \in S$ , aleshores la representació gràfica de  $H\sigma$  és  $(\Gamma_H\sigma, v_0)$ . A més,  $[H]\sigma$  està representat per  $\text{cc}(\Gamma_{[H]}\sigma)$  (aquí no és necessari prendre vèrtexs distingits).

**Exemple 1.3.** Prenguem  $\Gamma = \Gamma_{[H]}$  el representant gràfic de la classe de conjugació del subgrup  $H$  de  $F(X)$  corresponent a l'exemple 1.2, i  $\alpha \in \text{Aut}(F(X))$  l'automorfisme tal que  $a\alpha = a$ ,  $b\alpha = \bar{a}ba$  i  $c\alpha = ca$ . Aleshores, a la figura 1.3 podem veure els  $X$ -graf  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$  que s'obtenen en el procés de càlcul de  $\Gamma\alpha$  després dels passos 1, 2 i 3 respectivament. Tenim  $\Gamma_{[H]}\alpha = \Gamma_3$ .

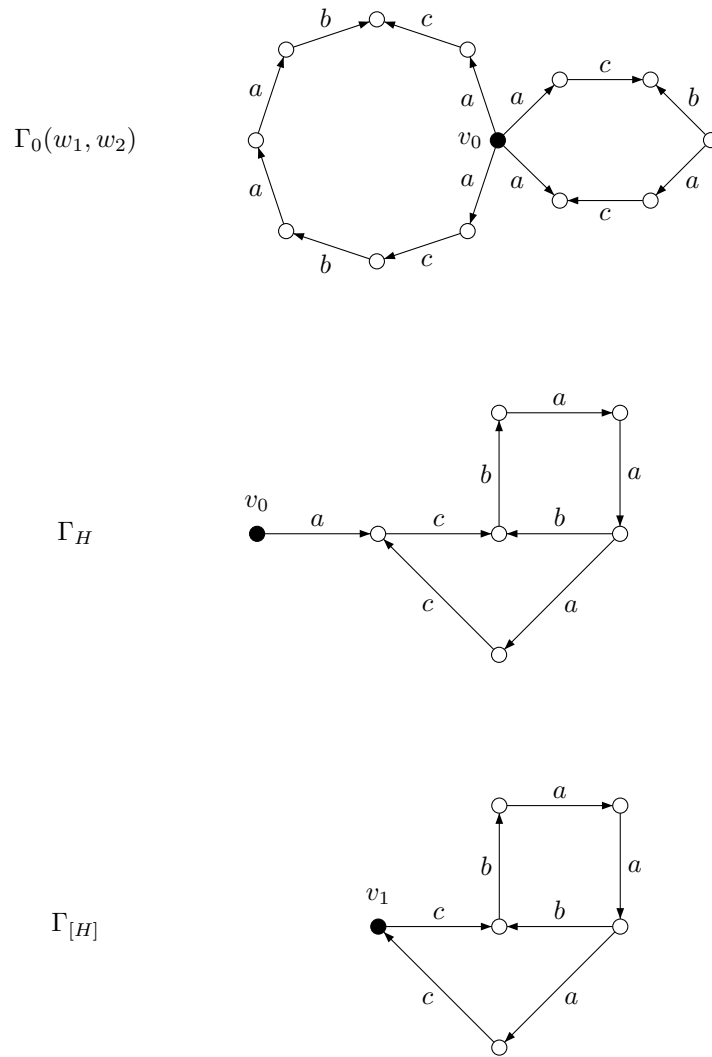


Figura 1.2: Representació gràfica de  $H$  i  $[H]$

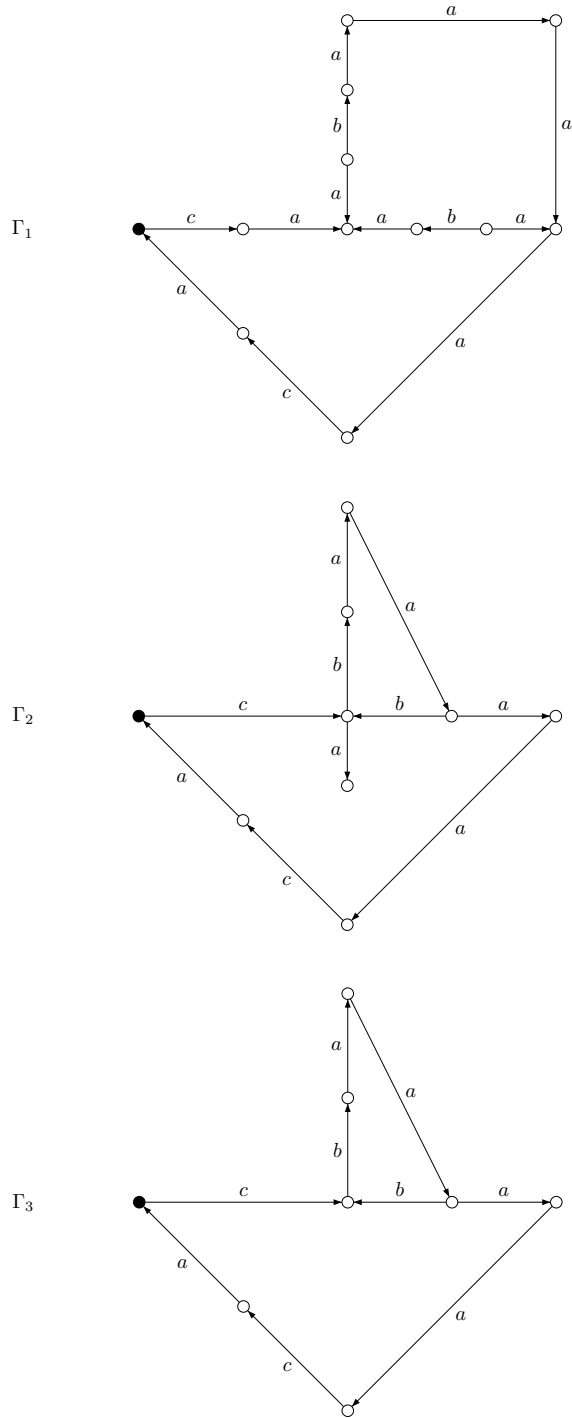


Figura 1.3: Càlcul de la imatge d'un  $X$ -graf per un automorfisme



### 1.1.3 Grafs capacitius

Un *graf capacitiu* és una tripleta  $\mathcal{G} = (V, E, c)$  de manera que  $V$  és un conjunt finit de vèrtexs,  $E$  està format per subconjunts de  $V$  de cardinalitat 2 i  $c$  és una funció de capacitat no negativa per a les arestes,  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Al graf no dirigit  $(V, E)$  l'anomenarem el *graf subjacent*.

Donat un graf capacitiu  $\mathcal{G} = (V, E, c)$ , per un vèrtex  $v \in V$  definim el seu *grau* com

$$\deg_{\mathcal{G}}(v) = \sum_{\substack{e \in E \\ v \in e}} c(e).$$

Si  $A, B \subseteq V$  són dos conjunts de vèrtexs disjunts, denotem per  $E(A, B)$  el conjunt d'arestes de  $E$  que tenen un vèrtex en  $A$  i un en  $B$ . Definim la *capacitat* del conjunt de vèrtexs  $A$  com

$$\text{cap}_{\mathcal{G}}(A) = \sum_{e \in E(A, \overline{A})} c(e).$$

Quan estigui clar a quin graf ens estem referint, prescindirem del subíndex. Observem que per a qualsevol vèrtex  $v \in V$  tenim  $\deg(v) = \text{cap}(\{v\})$  ja que el graf subjacent no té llaços.

Com que el nostre interès en aquests objectes se centrarà en l'estructura capacitiva, les arestes de capacitat zero no seran rellevants. En aquest sentit, en podem eliminar o afegir segons ens convingui a cada moment sense modificar l'estructura capacitiva del graf. Si al graf subjacent d'un graf capacitiu li afegim totes les arestes que li falten i els hi assignem capacitat 0, al graf que obtenim li direm *complet*. En particular, completar un graf capacitiu no altera el grau dels seus vèrtexs ni la capacitat de cap subconjunt dels seus vèrtexs.

**Observació 1.4.** Si  $\mathcal{G} = (V, E, c)$  és un graf capacitiu complet i  $A \subseteq V$  és un conjunt de vèrtexs, aleshores es compleix

$$\text{cap}(A) = \sum_{v \in A} \deg(v) - 2 \sum_{e \subset A} c(e),$$

on la segona suma és sobre totes les arestes de  $E$  que estan contingudes en  $A$ . Això és degut a què si sumem els graus de tots els vèrtexs de  $A$  estem sumant totes les arestes que tenen un vèrtex a  $A$ , però les que tenen dos vèrtexs a  $A$  les estem comptant dues vegades i cal restar-les per obtenir la

capacitat de  $A$ .

A continuació descriurem dues construccions per a grafs capacitius complets que ens seran útils. Sigui  $\mathcal{G} = (V, E, c)$  un graf capacitiu complet. Donada una partició  $\mathcal{P}$  del conjunt de vèrtexs  $V$  en  $k$  conjunts no buits disjunts dos a dos,

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\} \quad \text{amb} \quad V = P_1 \cup \dots \cup P_k,$$

el *conglomerat de  $\mathcal{G}$  respecte de  $\mathcal{P}$*  és un graf capacitiu complet  $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$  amb  $k$  vèrtexs i les capacitats definides de la manera següent. Si establim una bijecció entre els vèrtexs  $V(\mathcal{G}_{\mathcal{P}}) = \{v_{P_1}, \dots, v_{P_k}\}$  i els elements de  $\mathcal{P}$ , la capacitat d'una aresta de  $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$  ve donada per

$$c_{\mathcal{G}_{\mathcal{P}}}(\{v_{P_i}, v_{P_j}\}) = \sum_{e \in E(P_i, P_j)} c_{\mathcal{G}}(e) = \sum_{v \in P_i} \sum_{v' \in P_j} c_{\mathcal{G}}(\{v, v'\}).$$

Aquesta construcció consisteix en, per cada  $P_i \in \mathcal{P}$ , identificar tots els vèrtexs de  $P_i$  en un de sol i eliminar els possible llaços resultants, tot mantinguent les capacitats de les arestes que van de  $P_i$  a la resta de conjunts de  $\mathcal{P}$ .

Si  $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$  i  $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$  són dos grafs capacitius complets amb una bijecció entre els seus vèrtexs de manera que es té  $V = V_1 = V_2$ , aleshores podem construir el graf capacitiu suma  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ . Aquest graf serà complet amb  $V$  com a conjunt de vèrtexs i la capacitat de les arestes obtinguda a partir de la suma de la capacitat de les arestes de  $\mathcal{G}_1$  i  $\mathcal{G}_2$ :

$$c_{\mathcal{G}}(e) = c_{\mathcal{G}_1}(e) + c_{\mathcal{G}_2}(e).$$

Òbviamment, aquesta operació és associativa i commutativa. A més, observem que per definició, si tenim  $v \in V$  i  $A \subseteq V$ , aleshores

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{G}}(v) &= \deg_{\mathcal{G}_1}(v) + \deg_{\mathcal{G}_2}(v), \\ \text{cap}_{\mathcal{G}}(A) &= \text{cap}_{\mathcal{G}_1}(A) + \text{cap}_{\mathcal{G}_2}(A). \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.** En la figura 1.4 podem veure dos grafs capacitius,  $\mathcal{G}_1$  i  $\mathcal{G}_2$ , amb el mateix conjunt de vèrtexs, la seva suma  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ , i el conglomerat de  $\mathcal{G}$  respecte la partició  $\mathcal{P} = \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3\}\}$ . Observem que en  $\mathcal{G}$  tenim  $\deg(v_1) = 8$  i  $\text{cap}(\{v_1, v_2, v_4\}) = 12$ .

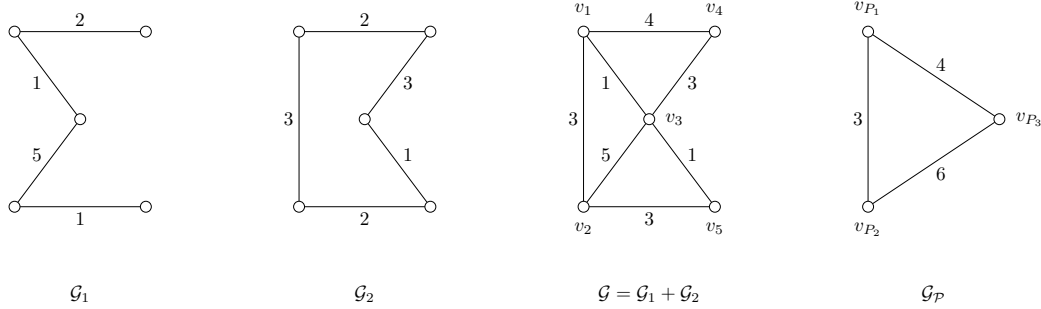


Figura 1.4: Exemples de grafs capacitius

### 1.1.4 Hipergrafs capacitius

Un *hipergraf capacitiu* és una tripleta  $\mathfrak{G} = (V, E, c)$  de manera que  $V$  és un conjunt finit de vèrtexs,  $E$  està format per subconjunts de  $V$  de cardinalitat major o igual que 2 i  $c$  és una funció de capacitat per a les hiperarestes,  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . A la parella  $(V, E)$  l'anomenarem l'*hipergraf subjacent*. Si  $\mathfrak{G}$  és un hipergraf capacitiu amb  $|V| = k$  vèrtexs aleshores podem partir  $E$  en  $k - 1$  conjunts (possiblement buits) segons la cardinalitat de les hiperarestes. Això ens donarà la següent partició que usarem més endavant:

$$E = E_2 \cup \dots \cup E_k \quad \text{amb} \quad E_i = \{e \in E \mid |e| = i\}.$$

Per a hipergrafs també podem definir la construcció de conglomerat. Sigui  $\mathfrak{G} = (V, E, c)$  un hipergraf capacitiu complet i  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$  una partició de  $V$ . Aleshores el conglomerat de  $\mathfrak{G}$  respecte  $\mathcal{P}$  és l'hipergraf capacitiu complet  $\mathfrak{G}_{\mathcal{P}}$  amb  $k$  vèrtexs i capacitat a les arestes donada per

$$c_{\mathfrak{G}_{\mathcal{P}}}(\{v_{P_{i_1}}, \dots, v_{P_{i_j}}\}) = \sum_{e \in E_{\mathfrak{G}}(P_{i_1}, \dots, P_{i_j})} c_{\mathfrak{G}}(e),$$

amb la definició

$$E_{\mathfrak{G}}(P_{i_1}, \dots, P_{i_j}) = \{e \in E \mid e \subseteq \cup_{l=1}^j P_{i_l}, e \cap P_{i_l} \neq \emptyset, 1 \leq l \leq j\}.$$

De la mateixa manera que pel cas de grafs capacitius, l'hipergraf que s'obté correspon a identificar en un de sol tots els vèrtexs de cada conjunt  $P_i$  tot eliminant els llaços i mantenint les capacitats entre els diferents conjunts que conformen la partició.

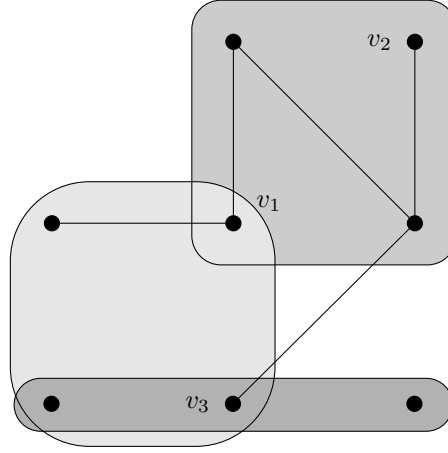


Figura 1.5: Exemple d'hipergraf capacitiu

Exactament igual que per a grafs capacitis, podem definir la suma d'hipergrafs capacitis complets amb una bijecció entre els seus conjunts de vèrtexs. Aquesta contrucció comparteix les mateixes propietats que la construcció anàloga per grafs.

**Exemple 1.6.** La figura 1.5 representa un hipergraf capacitiu. Les hiperarestes de cardinalitat 2 les representem com arestes en un graf capacitiu, les de cardinalitat major les representem com subconjunts ombrejats amb un color diferent cadascun. Assignant capacitat 1 a totes les hiperarestes obsevem que  $\deg(v_1) = 4$  i  $\text{cap}(\{v_1, v_2, v_3\}) = 7$ .

En aquest treball utilitzarem tres tipus d'objectes gràfics diferents. Tot i que pel context és senzill deduir quin tipus d'objecte estem manejant en tot moment, utilitzarem una notació pròpia per cada classe d'objectes per facilitar-ne la distinció. En particular, utilitzarem lletres gregues majúscules, com  $\Gamma$ , per denotar un  $X$ -graf. Utilitzarem lletres majúscules caligràfiques, com  $\mathcal{G}$ , per denotar grafs capacitis. Finalment, emprarem lletres majúscules gòtiques, com  $\mathfrak{G}$ , per denotar hipergrafs capacitis.

### 1.1.5 Problemes computacionals

En aquest treball apareixeran dos tipus de problemes computacionals: els de decisió i els de cerca.

De manera intuïtiva, un *problema decisonal* (o de decisió) consisteix en, donada una entrada d'entre un conjunt d'entrades possibles, decidir si aquesta entrada compleix una determinada propietat. Si  $D$  representa el conjunt de totes les entrades possibles, a vegades és convenient identificar el problema amb el conjunt  $L \subseteq D$  de totes les entrades que compleixen la propietat que es vol decidir. Un *algorisme* per decidir un problema decisonal  $L$  consisteix en un conjunt finit d'instruccions que, donat  $x \in D$ , es poden executar en un temps finit i permeten decidir si  $x \in L$ . En cas afirmatiu, diem que l'algorisme retorna el valor SÍ, altrament diem que retorna el valor NO. Si per a un problema  $L$  existeix un algorisme que el decideixi, aleshores diem que  $L$  és *decidable* o *resoluble*. Si no existeix cap algorisme per decidir  $L$ , aleshores diem que  $L$  és *indecidable*.

Per altra banda, un *problema de cerca* consisteix en, donada una entrada d'entre un conjunt d'entrades possibles, trobar, si existeix, una resposta que compleixi una propietat determinada respecte l'entrada. Més formalment, un problema de cerca consisteix en un predicat  $P(x, y)$  i dos conjunts  $D$  i  $D'$ , de manera que donat  $x \in D$  volem trobar, en cas que existeixi,  $y \in D'$  de manera que  $P(x, y)$  sigui cert. Identificarem el problema amb el predicat que es pot pensar com el subconjunt  $P \subseteq D \times D'$  de totes les parelles  $(x, y)$  que fan cert  $P(x, y)$ . Un algorisme per resoldre el problema de cerca  $P$  és un conjunt finit d'instruccions que, donat  $x \in D$ , es poden executar en un temps finit i permeten obtenir un  $y \in D'$  que satisfaci  $P(x, y)$  en cas que existeixi, o retornar NO en cas que no existeixi. Si existeix un algorisme amb aquestes propietats diem que el problema és decidable, altrament diem que és indecible.

**Exemple 1.7.** Un exemple de problema decisonal decidable és el de determinar si un nombre donat és primer. Un algorisme per resoldre'l és el garbell d'Eratòstenes. El desé problema de Hilbert consistent en, donada una equació diofàntica, decidir si existeix alguna solució entera per l'equació és un problema decisonal indecible. Un problema de cerca decidable és el que donat un graf no dirigit demana un subarbre generador.

Vegeu, per exemple, [Rog87] per a una definició formal d'algorisme i més exemples de problemes indecibles.

## 1.2 Equivalència orbital

En aquesta secció presentem el problema de l'equivalència orbital i els problemes de Whitehead, que des del nostre punt de vista són instàncies particulars d'aquest problema més general. Seguint les solucions clàssiques dels problemes de Whitehead, però des d'un punt de vista més abstracte i unificador, presentem la tècnica de reducció de pics que permet resoldre el problema de l'equivalència orbital quan els objectes involucrats satisfan unes determinades propietats.

Donat un conjunt  $M$  i un grup  $G$  actuant sobre  $M$ , el problema de l'*equivalència orbital* en  $M$  respecte  $G$  consisteix en, donats dos elements  $m_1, m_2 \in M$ , decidir si existeix algun  $\alpha \in G$  tal que  $m_1\alpha = m_2$ , és a dir, decidir si  $m_1$  i  $m_2$  pertanyen a la mateixa òrbita respecte l'acció per  $G$ . Denotarem aquest problema  $\text{EO}(M, G)$ .

### 1.2.1 Els problemes de Whitehead

El primer i el segon problema de Whitehead que pretenem resoldre en aquest treball són dos casos particulars de problemes d'equivalència orbital. Amb aquesta notació, el *primer problema de Whitehead* és  $\text{EO}([F], \text{Out}(F))$ , l'equivalència orbital de paraules cícliques de  $F$  respecte l'acció dels automorfismes (externs) de  $F$ . El *segon problema de Whitehead* és  $\text{EO}([S], \text{Out}(F))$ , l'equivalència orbital de classes de conjugació de subgrups de  $F$  finitament generats respecte l'acció dels automorfismes (externs) de  $F$ .

Existeixen diverses variants de cadascun d'aquests dos problemes, consistents en prendre, per una banda, les paraules i els subgrups finitament generats enlloc de les seves classes de conjugació; i per altra banda, en prendre tuples d'aquests objectes. En aquest treball resoldrem aquests problemes juntament amb totes les possibles variacions del tipus esmentat. Per fer-ho utilitzarem una tècnica general anomenada tècnica de reducció de pics, que a continuació presentem en un context abstracte.

Aquests problemes van ser plantejats per primer cop per J. H. C. Whitehead a [Whi36]. En aquest article, Whitehead va emprar la tècnica de reducció de pics per resoldre el primer dels problemes i alguna de les seves variants. La seva solució es basava en mètodes topològics sobre varietats de fins a dimensió 4. Una versió algebraica d'aquesta solució va aparèixer a [Rap58]. A [HL74] els autors van donar una simplificació d'aquesta solució

algebraica (vegeu també [LS01]). Hoare va provar una versió d'aquest resultat emprant teoria de grafs a [Hoa79]. Refinant totes aquestes solucions, McCool va estendre aquests resultats per resoldre l'última de les variants del primer problema de Whitehead i donar una aplicació interessant d'aquests mètodes que presentarem en el capítol 4. Els seus resultats es poden trobar a [McC74] i [LS01]. La solució que donem en aquest treball per resoldre totes les variants del primer problema de Whitehead consisteix en demostrar els resultats de McCool emprant tècniques similars a les de Hoare.

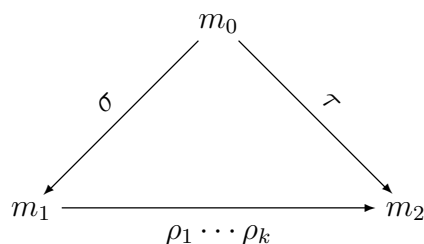
El segon dels problemes va ser plantejat a [Whi36] com una generalització del primer problema, però no en va donar una solució efectiva. Cap dels treballs posteriors al voltant del primer problema van aconseguir resoldre el segon, bàsicament degut al fet de representar els subgrups de  $F$  mitjançant una tupla de paraules corresponent als seus generadors. No fou fins que Stallings publicà el seu article [Sta83] sobre la representació dels subgrups de  $F$  mitjançant grafs etiquetats que es veié com aquest nou llenguatge era l'adequat per tractar el problema. La solució del segon problema de Whitehead i alguna de les seves variants fou donada per Gersten a [Ger84]. No obstant, aquest article no contenia tots els detalls ni demostracions de la solució, sinó indicacions de com aplicar les tècniques emprades en la solució del primer problema per resoldre el segon utilitzant el llenguatge dels grafs etiquetats. Finalment, una solució completa del segon problema i totes les seves variants es pot trobar de manera implícita a [Kal92]. Malgrat que aquesta solució segueix les línies generals de la proposada per Gersten, l'objectiu d'aquest autor es troba en les aplicacions del mètode més que no pas en la solució *per se*. Per aquesta raó es fa molt difícil extreure'n un argument clar i concís per a la solució del segon problema de Whitehead. En aquest treball donarem una solució completa pel segon problema de Whitehead i totes les seves variants basada en les indicacions de Gersten i mostrant els paral·lelismes existents amb la solució del primer problema.

### 1.2.2 La tècnica de reducció de pics

En general, un problema del tipus  $\text{EO}(M, G)$  pot no ésser decidible. Per exemple, els autors de [BV08] demostren que existeix un subgrup  $A \leq \text{Aut}(F_3)$  del grup d'automorfismes del grup lliure de rang 3 de manera que el problema  $\text{EO}([F_3], A)$  no és resoluble. No obstant, a continuació presentarem un conjunt de condicions suficients sobre  $M$  i  $G$  per tal que  $\text{EO}(M, G)$  sigui

decidable. La resta del treball el dedicarem a veure que aquestes condicions es satisfan pels problemes de Whitehead i les seves variacions. La tècnica que presentarem rep el nom de *reducció de pics*. Aquesta tècnica es basa en tres hipòtesis de caràcter general sobre  $M$ ,  $G$  i l'acció de  $G$  sobre  $M$ .

- (i) Existència d'una funció de longitud en  $M$  calculable i amb estrats finits. És a dir, tenim una funció de longitud definida per tots els elements de  $M$ ,  $|\cdot| : M \rightarrow \mathbb{N}$ , de manera que per a qualsevol  $l \in \mathbb{N}$  existeixen una quantitat finita d'elements  $m \in M$  amb  $|m| = l$  i a més, donat  $m \in M$ , existeix un procediment efectiu per calcular  $|m|$ .
- (ii) El grup  $G$  està finitament generat per un conjunt  $W$  donat de manera explícita,  $G = \langle W \rangle$ . A més, el conjunt  $W$  és tancat per inversos, de manera que si es té  $\sigma \in W$ , aleshores també es té  $\sigma^{-1} \in W$ .
- (iii) L'acció dels generadors de  $G$  sobre  $M$  compleix la propietat de reducció de pics respecte la funció de longitud de  $M$ . Un *pic* de  $M$  respecte  $W$  consisteix en un element de  $M$  i dos generadors de  $G$ ,  $m_0 \in M$  i  $\sigma, \tau \in W$ , de manera que  $m_1 = m_0\sigma$  i  $m_2 = m_0\tau$  amb  $|m_1| \leq |m_0|$  i  $|m_2| \leq |m_0|$  amb almenys una de les desigualtats estrictes. Diem que es compleix la *propietat de reducció de pics* si per qualsevol pic existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in W$  de manera que  $\sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$  a  $G$  i es té  $|m_1\rho_1 \cdots \rho_i| < |m_0|$  per a tot  $0 < i < k$ . El següent diagrama il·lustra aquesta situació.



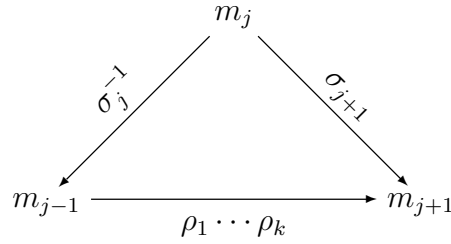
A continuació presentem tres resultats que són conseqüència d'aquestes propietats i que permeten resoldre de manera efectiva  $\text{EO}(M, G)$  quan  $M$  i  $G$  les compleixen.

**Proposició 1.8.** *Sigui  $m \in M$  i  $\alpha \in G$ , amb  $M$  i  $G$  complint (i), (ii) i (iii), de manera que  $m' = m\alpha$  i es té  $|m'| \leq |m|$ . Aleshores existeixen  $t \geq 1$  i*



$\sigma_1, \dots, \sigma_t \in W$  de manera que  $\alpha = \sigma_1 \cdots \sigma_t$  i  $|m\sigma_1 \cdots \sigma_i| < |m|$  per  $0 < i < t$  si  $|m'| < |m|$ , i  $|m\sigma_1 \cdots \sigma_i| \leq |m|$  per  $0 < i < t$  si  $|m'| = |m|$ .

*Demostració.* Com que  $W$  és un conjunt de generadors per  $G$ , existeixen  $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in W$  de manera que  $\alpha = \sigma_1 \cdots \sigma_t$ . Si aquesta descomposició no compleix les tesis de la proposició, aleshores definim  $l = \max \{|m\sigma_1 \cdots \sigma_i| \mid 0 < i < t\}$  i  $j = \max \{i \mid |m\sigma_1 \cdots \sigma_i| = l\}$ . Raonarem per inducció sobre  $(l, j)$  respecte l'ordre lexicogràfic. Prenent  $m_j = m\sigma_1 \cdots \sigma_j$  tenim  $|m_{j-1}| \leq |m_j| > |m_{j+1}|$ . Per tant podem aplicar la reducció de pics al pic



Substituint  $\sigma_j \sigma_{j+1}$  per  $\rho_1 \cdots \rho_k$  a la cadena per a  $\alpha$  obtenim una nova cadena amb  $(l', j') < (l, j)$  respecte l'ordre lexicogràfic. Per hipòtesi d'inducció aquesta nova descomposició de  $\alpha$  es pot transformar en una que compleix les tesis de la proposició.  $\square$

**Corol·lari 1.9.** *Siguin  $M$  i  $G$  satisfent (i), (ii) i (iii). Si  $m \in M$  no és de longitud mínima dins la seva òrbita per l'acció de  $G$ , aleshores existeix  $\sigma \in W$  tal que  $|m\sigma| < |m|$ .*

*Demostració.* Si  $m$  no és de longitud mínima, aleshores existeix  $\alpha \in G$  de manera que  $|m\alpha| < |m|$ . Llavors, per la proposició 1.8 tenim  $\alpha = \sigma_1 \cdots \sigma_t$  amb  $\sigma_i \in W$  i  $|m\sigma_1 \cdots \sigma_j| < |m|$  per  $0 < j < t$ . Per tant podem prendre  $\sigma = \sigma_1$ .  $\square$

**Corol·lari 1.10.** *Siguin  $M$  i  $G$  satisfent (i), (ii) i (ii). Suposem que tenim  $m, m' \in M$  de longitud mínima dins les seves respectives òrbites per l'acció de  $G$ , amb  $l = |m| = |m'|$ . Aleshores  $m$  i  $m'$  pertanyen a la mateixa òrbita si i només si existeixen  $t \geq 1$  i  $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in W$  tals que  $m' = m\sigma_1 \cdots \sigma_t$  i  $l = |m\sigma_1 \cdots \sigma_i|$  per  $1 \leq i \leq t$ .*

*Demostració.* Suposem que  $m$  i  $m'$  pertanyen a la mateixa òrbita. Aleshores existeix  $\alpha \in G$  tal que  $m' = m\alpha$ . Aplicant la proposició 1.8 obtenim  $t \geq 1$  i  $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in W$  complint les propietats desitjades. La implicació inversa és trivial.  $\square$

Essencialment, aquests resultats mostren que quan es compleix la propietat de reducció de pics els generadors  $W$  de  $G$  són “prou bons” per permetre estratègies de cerca local.

A continuació presentarem una solució per a  $\text{EO}(M, G)$  que es basa en aquests resultats i que funciona sempre que  $M$  i  $G$  satisfacin les propietats (i), (ii) i (iii). Per simplificar la solució presentarem un problema funcional addicional que emprarem en la solució de l'equivalència orbital. El problema de la *minimització orbital* de  $M$  respecte  $G$ ,  $\text{MinO}(M, G)$ , consisteix en, donat  $m \in M$ , trobar un element  $m' \in M$  de longitud mínima dins l'òrbita de  $m$  respecte de l'acció de  $G$  sobre  $M$ .

**Teorema 1.11.** *Si  $M$  i  $G$  compleixen (i), (ii) i (iii), llavors*

- (a) *El problema funcional  $\text{MinO}(M, G)$  és resoluble, i*
- (b) *El problema decisional  $\text{EO}(M, G)$  és resoluble.*

*Demostració.* En primer lloc demostrarem (a) donant un algorisme per resoldre  $\text{MinO}(M, G)$ . Donat  $m \in M$  hem de trobar un element de longitud mínima dins l'òrbita de  $m$ . Pel corol·lari 1.9, si  $m$  no és de longitud mínima dins la seva òrbita, llavors existeix un element  $\sigma \in W$  tal que  $|m\sigma| < |m|$ . Per tant, podem provar tots els elements de  $W$ , dels quals n'hi ha una quantitat finita per (ii), i veure si algun disminueix la longitud de  $m$ . En cas afirmatiu, prenem algun  $\sigma \in W$  tal que  $|m\sigma| < |m|$  i iterem el procediment amb  $m\sigma$ . Altrament,  $m$  és un element de longitud mínima dins la seva òrbita i ja hem acabat. Com que en cada pas d'aquest procés la longitud de l'element de  $M$  considerat disminueix, la finitud del procés està garantida.

Ara demostrarem (b) donant un algorisme per resoldre  $\text{EO}(M, G)$  que usa com a subrutina la solució de (a). Suposem que ens donen  $m_1, m_2 \in M$  i ens demanen que decidim si pertanyen a la mateixa òrbita. En primer lloc, resolem  $\text{MinO}(M, G)$  per  $m_1$  i  $m_2$ , i obtenim  $m'_1$  i  $m'_2$  de longitud mínima dins les òrbites de  $m_1$  i  $m_2$  respectivament. Si  $|m'_1| \neq |m'_2|$ , aleshores decidim NO, doncs la longitud mínima dins una òrbita és una quantitat única de l'òrbita. Per contra, si  $l = |m'_1| = |m'_2|$ , considerem el graf no dirigit que té per vèrtexs tots els elements de  $M$  de longitud  $l$  i en el qual existeix una aresta que connecta dos vèrtexs si i només si un és la imatge de l'altre per algun element de  $W$ . Aquest graf és finit ja que el nombre de vèrtexs és finit per (i) i el d'arestes ho és per (ii). Pel corol·lari 1.10,  $m'_1$  i  $m'_2$  estan a la mateixa òrbita si i només si pertanyen a la mateixa component connexa

d'aquest graf, doncs en cas de pertanyer a la mateixa òrbita aleshores existeix un camí dins del graf que els uneix. Per comprovar si  $m'_1$  i  $m'_2$  pertanyen a la mateixa component connexa sense construir tot el graf, comencem per  $m'_1$  i fem una cerca en amplada aplicant tots els elements de  $W$  a cada vèrtex que trobem en la component connexa de  $m'_1$ . Si en algun moment trobem  $m'_2$ , decidim SÍ. Per altra banda, si un cop explorada tota la component connexa no hem trobat  $m'_2$ , aleshores decidim NO.  $\square$

L'algorisme que hem donat en aquesta demostració per resoldre el problema de l'equivalència orbital es coneix com l'*algorisme de Whitehead*. Originalment aquest algorisme es va dissenyar per resoldre una variant del primer problema de Whitehead, que és un problema d'equivalència orbital concret. En els capítols següents veurem que aquest mateix algorisme serveix per resoldre totes les variants del primer i el segon problema de Whitehead.



## Capítol 2

# El primer problema de Whitehead

Dedicarem aquest capítol a donar una solució completa i autocontinguda de les quatre variants possibles del primer problema de Whitehead. Per fer-ho, a la secció 2.1 presentarem els automorfismes de Whitehead que són un conjunt finit de generadors particular de  $Aut(F)$ . Tot seguit, a la secció 2.2, associarem un graf capacitiu a cada paraula cíclica de  $[F]$ , el seu graf de Whitehead. La relació entre aquest graf, la longitud de la paraula cíclica associada i l'efecte que té sobre la longitud de la paraula l'aplicació d'un automorfisme de Whitehead seran l'objecte d'estudi de la secció 2.3. Aplicant els resultats obtinguts, a la secció 2.4 demostrarem que les paraules cícliques amb l'acció dels automorfismes de Whitehead satisfan la propietat de reducció de pics. Finalment, a la secció 2.5 presentarem la solució de totes les variants del primer problema de Whitehead basada en el teorema 1.11 i els resultat demostrats al llarg d'aquest capítol.

### 2.1 Automorfismes de Whitehead

Els automorfismes de Whitehead són un conjunt finit de generadors de  $Aut(F)$  que contenen com a subconjunt els automorfismes de Nielsen. Una de les particularitats d'aquest conjunt de generadors és que, com veurem, compleixen la propietat de reducció de pics quan actuen sobre diferents conjunts derivats del grup lliure  $F$ .

El conjunt format per tots els automorfismes de Whitehead del grup lliure

$F(X)$  el denotarem per  $\mathbb{W}(X)$ . Dins aquest conjunt distingim automorfismes de dues classes. D'una banda, els automorfismes de Whitehead de tipus I són permutacions del conjunt  $X^\pm$ . Per altra banda, els automorfismes de Whitehead de tipus II, donat un element  $a \in X^\pm$  fix anomenat *multiplicador*, deixen fixos  $a$  i  $\bar{a}$  i envien cadascun dels elements  $x \in X^\pm \setminus \{a, \bar{a}\}$  a algun de la forma:  $x, xa, \bar{a}x$  o  $\bar{a}xa$ . D'aquesta manera podem escriure  $\mathbb{W}(X) = \mathbb{W}_I(X) \cup \mathbb{W}_{II}(X)$ .

Per representar un automorfisme de Whitehead de tipus I, indicarem les imatges dels generadors de  $F$  que no deixa fixos. Per exemple, si  $\pi \in \mathbb{W}_I(X)$  és l'automorfisme que envia  $a$  a  $\bar{b}$ ,  $b$  a  $a$ , i per tant  $\bar{a}$  a  $b$  i  $\bar{b}$  a  $\bar{a}$ , i deixa la resta de generadors fixos, escriurem  $\pi = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)$ . Observem que els  $\mathbb{W}_I(X)$  no alteren la longitud.

Els automorfismes de Whitehead de tipus II es poden representar de forma compacta de la següent manera. Si tenim  $\sigma \in \mathbb{W}_{II}(X)$  amb multiplicador  $a$ , aleshores el podem representar com  $\sigma = (A, a)$  on  $A \subseteq X^\pm$  de manera que  $a \in A$ ,  $\bar{a} \notin A$ , i per a la resta de  $x \in X^\pm \setminus \{a, \bar{a}\}$  es compleix

$$x\sigma = \begin{cases} \bar{a}xa & \text{si } x, \bar{x} \in A, \\ xa & \text{si } x \in A \text{ i } \bar{x} \notin A, \\ \bar{a}x & \text{si } x \notin A \text{ i } \bar{x} \in A, \\ x & \text{si } x, \bar{x} \notin A. \end{cases}$$

A més tenim  $a\sigma = a$  i  $\bar{a}\sigma = \bar{a}$ . De manera intuïtiva, podem pensar que  $A$  indica quins símbols de  $X^\pm$  seran multiplicats a la dreta per  $a$ . Donat  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$ , els símbols  $x \in X$  que són invariants per  $\sigma$  són tots aquells tals que  $x, \bar{x} \notin A$ .

Ara comptarem quants automorfismes de Whitehead hi ha a  $\mathbb{W}(X)$  quan es pren un alfabet  $X$  de cardinalitat  $r$ . En primer lloc, els elements de  $\mathbb{W}_I(X)$  són permutacions de  $X^\pm$  que són alhora automorfismes. Això implica que si tenim  $\pi \in \mathbb{W}_I(X)$  i  $x\pi = y$ , aleshores  $\bar{x}\pi = \bar{y}$ . Per tant, donar  $\pi \in \mathbb{W}_I(X)$  consisteix en escollir una permutació de  $X$  entre les  $r!$  possibles i un vector  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \{+1, -1\}^r$  dels  $2^r$  possibles, de manera que per cada  $x_i \in X$  la seva imatge per  $\pi$  és  $x_j^{\epsilon_i}$  on  $x_j$  és la imatge de  $x_i$  per la permutació de  $X$ . Això ens dóna  $|\mathbb{W}_I(X)| = 2^r r!$ . En segon lloc, hem vist que els elements de  $\mathbb{W}_{II}(X)$  s'identifiquen amb parelles de la forma  $(A, a)$  on  $A$  és un subconjunt de  $X^\pm$  que conté  $a$  i no conté  $\bar{a}$ . Observem que per a tot  $a \in X^\pm$  tenim  $(\{a\}, a) = id$  i que aquestes són les úniques repeticions possibles dins dels automorfismes

de tipus II. Per tant veiem que  $|\mathbb{W}_{II}(X)| = 2r2^{2(r-1)} - 2r + 1$ . Com que l'automorfisme identitat és l'únic que tenen en comú  $\mathbb{W}_I(X)$  i  $\mathbb{W}_{II}(X)$ , al final obtenim

$$|\mathbb{W}(X)| = |\mathbb{W}_I(X)| + |\mathbb{W}_{II}(X)| - 1 = r!2^r + r2^{2r-1} - 2r.$$

Els automorfismes corresponents a la conjugació per un element de  $X^\pm$  són tots ells automorfismes de Whitehead de tipus II. De manera explícita, donat  $a \in X^\pm$  tenim  $\gamma_a = (X^\pm - \bar{a}, a)$ . La notació  $X^\pm - x$  denota el conjunt  $X^\pm$  sense l'element  $x$ . En general, donats  $A, B \subseteq X^\pm$ , usarem  $A + B$  per denotar  $A \cup B$  si  $A \cap B = \emptyset$  i  $A - B$  per denotar  $A \setminus B$  quan es té  $B \subseteq A$ .

A continuació llistem un conjunt de relacions que compleixen els automorfismes de Whitehead i que es coneixen com les relacions de McCool. La seva demostració es pot trobar a l'apèndix A.

$$(R1) \quad (A, a)^{-1} = (A - a + \bar{a}, \bar{a})$$

$$(R2) \quad (A, a)(B, a) = (A \cup B, a) \text{ si } A \cap B = \{a\}.$$

$$(R3) \quad (B, b)^{-1}(A, a)(B, b) = (A, a) \text{ si } A \cap B = \emptyset, \bar{a} \notin B \text{ i } \bar{b} \notin A.$$

$$(R4) \quad (B, b)^{-1}(A, a)(B, b) = (A + B - b, a) \text{ si } A \cap B = \emptyset, \bar{a} \notin B \text{ i } \bar{b} \in A.$$

$$(R5) \quad (A, a)(A - a + \bar{a}, b) = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)(A - b + \bar{b}, a) \text{ si } b \in A, \bar{b} \notin A \text{ i } a \neq b.$$

$$(R6) \quad \pi^{-1}(A, a)\pi = (A\pi, a\pi) \text{ si } \pi \in \mathbb{W}_I(X).$$

$$(R7) \quad (A, a) = (X^\pm - \bar{a}, a)(\bar{A}, \bar{a}) = (\bar{A}, \bar{a})(X^\pm - \bar{a}, a).$$

$$(R8) \quad (X^\pm - b, \bar{b})(A, a)(X^\pm - \bar{b}, b) = (A, a) \text{ si } b, \bar{b} \in \bar{A}.$$

$$(R9) \quad (X^\pm - b, \bar{b})(A, a)(X^\pm - \bar{b}, b) = (\bar{A}, \bar{a}) \text{ si } b \neq a, b \in A \text{ i } \bar{b} \in \bar{A}.$$

Una construcció que apareix en aquestes relacions i que usarem sovint és la següent. Donat  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$ , definim  $\bar{\sigma} = (\bar{A}, \bar{a})$ . Observem que  $\bar{\sigma}$  també és un automorfisme de Whitehead de tipus II, i també que per (R1) no es tracta de l'invers de  $\sigma$ . D'acord amb (R7), tenim la següent relació entre  $\sigma$  i  $\bar{\sigma}$ :

$$\sigma = \gamma_a \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \gamma_a.$$

En particular, si  $[w] \in [F]$  és una paraula cíclica es compleix que  $|[w]\sigma| = |[w]\bar{\sigma}|$  per a qualsevol  $\sigma \in \mathbb{W}_{II}(X)$ .

**Observació 2.1.** Els automorfismes de Whitehead  $\mathbb{W}(X)$  satisfan la propietat (ii) de la secció 1.2.2 con a conjunt de generadors de  $\text{Aut}(F)$ . Com hem vist, el conjunt  $\mathbb{W}(X)$  és finit,  $\mathbb{W}_I(X)$  és tancat per inversos per definició i  $\mathbb{W}_{II}(X)$  és tancat per inversos per (R1).

## 2.2 El graf de Whitehead

Com ja hem comentat, el mètode que usarem per resoldre els diversos problemes d'equivalència orbital plantejats consisteix en buscar, per cadascun dels elements, un representant orbital de longitud mínima i comprovar després si els dos representants pertanyen a la mateixa òrbita. Per tal de seguir aquest camí serà necessari controlar com es comporta la longitud a dins de l'òrbita quan apliquem diferents automorfismes de Whitehead. En aquesta secció presentarem el graf de Whitehead que permet controlar aquesta longitud per paraules cícliques.

Donada una paraula cíclica  $[w] \in [F]$  amb un representant  $w \in F$  cíclicament reduït, definim el seu *graf de Whitehead*  $\mathcal{W}_{[w]} = (V, E, c)$  de la següent manera. Com a graf no dirigit subjacent, prenem el graf complet amb  $2r$  vèrtexs identificant el conjunt de vèrtexs  $V$  amb  $X^\pm$ . Aleshores, per cadascuna de les arestes  $\{x, y\} \in E$ , definim la seva capacitat  $c(\{x, y\})$  com el total d'aparicions de les subparaules  $x\bar{y}$  i  $y\bar{x}$  en  $w$  de manera cíclica.

El graf de Whitehead d'una paraula cíclica  $[w]$  s'utilitzarà per controlar la influència d'un automorfisme de Whitehead de tipus II en la longitud de la paraula.

**Proposició 2.2.** *Sigui  $[w] \in [F]$  i  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$ . Si  $\mathcal{W}$  és el graf de Whitehead de  $[w]$ , aleshores es té*

$$|[w]\sigma| - |[w]| = \text{cap}_{\mathcal{W}}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}}(a).$$

*Demostració.* Per començar, veurem que la diferència de longitud entre  $[w]$  i  $[w]\sigma$  és deguda únicament a la diferència entre el nombre d'aparicions de  $a$  i  $\bar{a}$  a les dues paraules cícliques. Per fer-ho, prenem la paraula cíclicament reduïda  $w$  i denotem per  $w'$  la paraula que s'obté de substituir cada símbol  $x$  de  $w$  per  $x\sigma$ , sense reduir. A més, prenem  $w''$  el resultat de reduir cíclicament totes les subparaules de  $w'$  de la forma  $a\bar{a}$  i  $\bar{a}a$ . Veurem que  $w''$  ja és cíclicament reduïda. Observem que en passar de  $w$  a  $w'$  la lletra  $\bar{a}$  només apareixerà a



l'esquerra d'un lletra de  $w'$ , i la lletra  $a$  només apareixerà a la dreta d'una lletra de  $w'$ . En conseqüència,  $w'$  pot contenir subparaules de la forma  $a\bar{a}$ , però no de la forma  $\bar{a}a$ . Ara suposem que tenim la subparaula  $a\bar{a}$  en  $w'$ . Si aquesta prové d'una subparaula  $xy$  de  $w$ , aleshores tindrem  $xa\bar{a}y$  en  $w'$  i  $xy$  en  $w''$  altre cop. Si per contra, alguna de les dues lletres de  $a\bar{a}$  ja era present en  $w$ , per exemple  $a$ , aleshores teniem  $xay$  en  $w$ . Observem que això implica  $x, y \neq \bar{a}$ . Per tant, en  $w'$  tindrem  $xaa\bar{a}y$  o  $xa\bar{a}y$ , i en  $w''$  tindrem  $xay$  o  $xy$ , respectivament. A més, en el segon cas,  $x \notin A$  i  $\bar{y} \in A$  d'on deduíem  $x \neq \bar{y}$ . Per tant,  $w''$  és reduïda.

Ara podem calcular la diferència de longituds com

$$|[w]\sigma| - |[w]| = n_1 - n_2,$$

on  $n_1$  és el nombre de  $a$  i  $\bar{a}$  que apareixen noves en  $w'$  i no desapareixen en reduir cíclicament, i  $n_2$  és el nombre de  $a$  i  $\bar{a}$  presents en  $w$  que desapareixen en reduir cíclicament. Recordem que si  $\{x, y\} \in E$  és una aresta de  $\mathcal{W}$ , aleshores  $c(\{x, y\})$  és la quantitat de vegades que apareixen en  $w$  les subparaules  $x\bar{y}$  i  $y\bar{x}$  de manera cíclica.

Per una banda, si  $a$  apareix a  $w'$  és que prové de la imatge per  $\sigma$  de  $x \in A \setminus \{a\}$ . A més, si no desapareix al reduir és que inicialment en  $w$  tenim  $x\bar{y}$  amb  $y \in \bar{A}$  i per tant en  $w'$  tenim  $xa\bar{y}$ . En canvi, si  $\bar{a}$  apareix a  $w'$  és que prové de la imatge per  $\sigma$  de  $\bar{y}$  amb  $y \in A \setminus \{a\}$ . Si aquesta  $\bar{a}$  no desapareix al reduir és que a  $w$  tenim  $x\bar{y}$  amb  $x \in \bar{A}$ . Així doncs, tenim

$$\begin{aligned} n_1 &= |\{\text{subparaules } x\bar{y} \text{ de } [w] \text{ amb } x \in A \setminus \{a\} \text{ i } y \in \bar{A}\}| \\ &\quad + |\{\text{subparaules } x\bar{y} \text{ de } [w] \text{ amb } x \in \bar{A} \text{ i } y \in A \setminus \{a\}\}| \\ &= \sum_{e \in E(A \setminus \{a\}, \bar{A})} c(e). \end{aligned}$$

Per altra banda, si una ocurrència de  $a$  està present a  $w$  i en  $w''$  ha desaparegut és que a  $w$  tenim  $a\bar{x}$  amb  $x \in A \setminus \{a\}$ . En canvi, si tenim una ocurrència de  $\bar{a}$  en  $w$  que desapareix en  $w''$ , aleshores és que tenim  $x\bar{a}$  en  $w$

amb  $x \in A \setminus \{a\}$ . Per tant tenim

$$\begin{aligned} n_2 &= |\{\text{subparaules } a\bar{x} \text{ de } [w] \text{ amb } x \in A \setminus \{a\}\}| \\ &\quad + |\{\text{subparaules } x\bar{a} \text{ de } [w] \text{ amb } x \in A \setminus \{a\}\}| \\ &= \sum_{e \in E(\{a\}, A \setminus \{a\})} c(e). \end{aligned}$$

Finalment, observant que

$$\begin{aligned} E(A, \bar{A}) &= E(A \setminus \{a\}, \bar{A}) \cup E(\{a\}, \bar{A}), \\ E(\{a\}, X^\pm \setminus \{a\}) &= E(\{a\}, A \setminus \{a\}) \cup E(\{a\}, \bar{A}), \end{aligned}$$

on les dues unions són disjunts, tenim

$$\begin{aligned} |[w]\sigma| - |[w]| &= n_1 - n_2 = \sum_{e \in E(A \setminus \{a\}, \bar{A})} c(e) - \sum_{e \in E(\{a\}, A \setminus \{a\})} c(e) \\ &= \sum_{e \in E(A, \bar{A})} c(e) - \sum_{e \in E(\{a\}, \bar{A})} c(e) - \sum_{e \in E(\{a\}, A \setminus \{a\})} c(e) \\ &= \sum_{e \in E(A, \bar{A})} c(e) - \sum_{e \in E(\{a\}, X^\pm \setminus \{a\})} c(e) = \text{cap}_{\mathcal{W}}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}}(a). \end{aligned}$$

□

**Observació 2.3.** De la demostració anterior es desprèn que si tenim  $x \in X^\pm \setminus \{a, \bar{a}\}$ , aleshores la quantitat d'ocurrències de  $x$  en  $[w]$  i  $[w]\sigma$  amb  $\sigma = (A, a)$  és la mateixa. A més, com que la quantitat total d'ocurrències de  $x$  i  $\bar{x}$  en  $[w]$  és igual a  $\text{deg}_{\mathcal{W}_{[w]}}(x) = \text{deg}_{\mathcal{W}_{[w]}}(\bar{x})$ , aquests graus es mantenen constants quan apliquem  $\sigma$  a  $[w]$ .

**Exemple 2.4.** Considerem la paraula cíclicament reduïda  $w = \bar{b}a\bar{a}\bar{b}a\bar{b}c\bar{c}\bar{c}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$  de  $F(\{a, b, c\})$  i la paraula cíclica que representa,  $[w]$ . A la figura 2.1 podem veure el graf de Whitehead  $\mathcal{W}_{[w]}$ . Observem que a  $\mathcal{W}_{[w]}$  tenim  $\text{deg}(a) = \text{deg}(\bar{a}) = 7$ , que són el nombre total d'ocurrències de  $a$  ó  $\bar{a}$  en  $w$ . A més, el conjunt de vèrtexs  $\{a, b, c, \bar{c}\}$  té capacitat  $\text{cap}(\{a, b, c, \bar{c}\}) = 5$ . Ara prenem l'automorfisme de Whitehead de tipus II donat per  $\sigma = (\{a, b, c, \bar{c}\}, a)$ . Aleshores podem calcular  $w\sigma$  i obtenim

$$w\sigma = \bar{a}\bar{b}a\bar{a}\bar{b}a\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{c}a\bar{a}\bar{c}a\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a} = \bar{a}\bar{b}a\bar{b}\bar{b}a\bar{c}\bar{c}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$$

Com que  $w\sigma$  ja és cíclicament reduïda, aleshores tenim

$$|[w]\sigma| - |[w]| = 11 - 13 = -2 = \text{cap}(\{a, b, c, \bar{c}\}) - \deg(a).$$

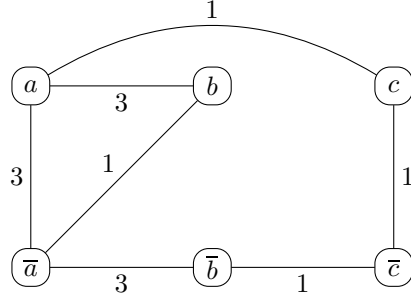


Figura 2.1: El graf de Whitehead de  $w = \bar{b}a\bar{a}b\bar{a}b\bar{c}c\bar{a}\bar{a}b\bar{a}\bar{a}$

És remarcable que el graf de Whitehead d'una paraula cíclica codifica de manera geomètrica els efectes que té en la longitud de la paraula qualsevol automorfisme de Whitehead. La següent secció demostra tres lemes tècnics que usen àmpliament aquest fet i que formen la base de la prova que donarem del lema de reducció de pics per a paraules cícliques.

## 2.3 Lemes tècnics

**Lema 2.5.** *Siguin  $\sigma = (A, a)$  i  $\tau = (B, b)$  dos automorfismes de Whitehead de tipus II tals que  $A \cap B = \emptyset$  i  $\bar{a} \notin B$ . Aleshores, per a qualsevol paraula cíclica  $[w]$  es compleix que  $|[w]\sigma\tau| - |[w]\sigma| = |[w]\tau| - |[w]|$ .*

*Demostració.* Siguin  $\mathcal{W}$  i  $\mathcal{W}'$  els grafs de Whitehead de les paraules cícliques  $[w]$  i  $[w'] = [w]\sigma$  respectivament. Aleshores, per la proposició 2.2, tenim que

$$\begin{aligned} |[w]\tau| - |[w]| &= \text{cap}_{\mathcal{W}}(B) - \deg_{\mathcal{W}}(b), \\ |[w]\sigma\tau| - |[w]\sigma| &= \text{cap}_{\mathcal{W}'}(B) - \deg_{\mathcal{W}'}(b). \end{aligned}$$

Observem que per les hipòtesis del lema tenim  $b \neq a, \bar{a}$ . Per tant, per l'observació 2.3 els dos graus dels termes de la dreta són iguals,  $\deg_{\mathcal{W}}(b) = \deg_{\mathcal{W}'}(b)$  doncs aplicar  $\sigma$  a  $[w]$  només altera el nombre d'aparicions dels símbols  $a$  i  $\bar{a}$  en  $[w]$ . Així doncs, si veiem que  $\text{cap}_{\mathcal{W}}(B) = \text{cap}_{\mathcal{W}'}(B)$  haurem acabat.

Aplicant l'observació 1.4 podem escriure

$$\text{cap}_{\mathcal{W}}(B) = \sum_{x \in B} \deg_{\mathcal{W}}(x) - 2 \sum_{e \subseteq B} c_{\mathcal{W}}(e).$$

Com que per hipòtesi tenim  $a, \bar{a} \notin B$ , aleshores el grau de qualsevol vèrtex  $x \in B$  és el mateix en  $\mathcal{W}$  i  $\mathcal{W}'$ .

Ara, sigui  $e = \{x, y\}$  una aresta de  $\mathcal{W}$  amb  $e \subseteq B$ . Aleshores,  $c_{\mathcal{W}}(e)$  és el nombre d'aparicions en  $[w]$  de  $x\bar{y}$  i  $y\bar{x}$ . Com que tenim  $x, y \in B \subseteq \bar{A}$ , en aplicar  $\sigma = (A, a)$  a  $[w]$  aquests segments es mantenen ja que ni  $x$  ni  $y$  es multipliquen per  $a$  a la dreta, ni  $\bar{x}$  ni  $\bar{y}$  es multipliquen per  $\bar{a}$  a l'esquerra. Així doncs, tenim  $c_{\mathcal{W}}(e) \leq c_{\mathcal{W}'}(e)$ .

De la mateixa manera, com que  $\sigma^{-1} = (A - a + \bar{a}, \bar{a})$ , aplicant el mateix argument a  $[w']$  quan li apliquem  $\sigma^{-1}$  obtenim  $c_{\mathcal{W}'}(e) \leq c_{\mathcal{W}}(e)$  per a qualsevol aresta de  $\mathcal{W}'$  continguda en  $B$ .

Per tant, per a qualsevol aresta  $e$  tal que  $e \subseteq B$  tenim  $c_{\mathcal{W}}(e) = c_{\mathcal{W}'}(e)$  i hem acabat.  $\square$

**Lema 2.6.** *Siguin  $\mathcal{G} = (V, E, c)$  un graf capacitiu complet amb  $|V| = 4$ ,  $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, F_2\}$  una partició de  $E$  en conjunts d'arestes disjunts i  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$  dos nombres no negatius tals que*

$$\sum_{e \in E \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E \setminus F_2} c(e) - p_1 - p_2 < 0.$$

*Aleshores, per a qualsevol aplicació  $f : F_1 \cup F_2 \longrightarrow V$  que satisfaci  $f(e) \in e$ , existeixen  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $e \in F_{\alpha}$  de manera que*

$$\deg(f(e)) - p_{\alpha} < 0.$$

*Demostració.* Convé remarcar que en aquest lema el graf subjacent  $(V, E)$  no és un graf abstracte, sinó simplement el graf complet de 4 vèrtexs  $K_4$ . Vegeu la figura 2.2. Com que el graf té 6 arestes, 4 vèrtexs i cada parella d'arestes que conformen un dels  $F_i$  és disjunta, aleshores  $|F_i| = 2$ . Així,  $|F_1 \cup F_2| = |V| = 4$  i distingim dos casos segons si l'aplicació  $f$  és o no bijectiva. Suposem, en primer lloc, que  $f$  és bijectiva. Per a cada vèrtex  $v \in V$  podem definir l'índex  $\alpha(v) \in \{1, 2\}$  de manera que  $f^{-1}(v) \in F_{\alpha(v)}$ .

Usant aquesta notació, considerem

$$S = \sum_{v \in V} (\deg(v) - p_{\alpha(v)}).$$

Si  $S$  és negatiu, aleshores algun dels sumands ha de ser negatiu, diguem  $\deg(v) - p_{\alpha(v)} < 0$ . Prenent  $\alpha = \alpha(v)$  i  $e = f^{-1}(v)$  haurem acabat. Vegem doncs que  $S < 0$ . Per la bijectivitat de  $f$  tenim

$$\sum_{v \in V} p_{\alpha(v)} = 2p_1 + 2p_2,$$

i per la definició de grau tenim

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \sum_{e \in E} c(e).$$

Substituint a la definició de  $S$  obtenim

$$S = 2 \left( \sum_{e \in E} c(e) - p_1 - p_2 \right).$$

Si ara hi sumem i restem la quantitat  $2 \sum_{e \in F_0} c(e)$  i reagrupem els termes de la suma adequadament tenim que

$$S = 2 \left( \sum_{e \in E \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E \setminus F_2} c(e) - p_1 - p_2 \right) - 2 \sum_{e \in F_0} c(e).$$

Així doncs, tenim  $S < 0$  ja que el primer terme és negatiu per hipòtesi i el segon és menor o igual que zero perquè  $c(e) \geq 0$  per a tot  $e \in E$ .

Suposem ara que  $f$  no és bijectiva i prenguem  $v \in V \setminus \text{Im } f$ . Aleshores, per tot  $i \in \{0, 1, 2\}$ , existeixen arestes  $e_i \in F_i$  tals que  $v \in e_i$ . Considerem la suma

$$S = (\deg(f(e_1)) - p_1) + (\deg(f(e_2)) - p_2).$$

Igual que en el cas anterior, si veiem que  $S < 0$  llavors algun dels sumands és negatiu i hem acabat. Observem que tenim

$$\deg(f(e_1)) + \deg(f(e_2)) = \sum_{e \in E \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E \setminus F_2} c(e) - 2c(e_0).$$

Per tant, substituint a  $S$ , obtenim

$$S = \left( \sum_{e \in E \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E \setminus F_2} c(e) - p_1 - p_2 \right) - 2c(e_0) < 0,$$

tal com volíem.  $\square$

**Lema 2.7.** *Siguin  $\sigma = (A, a), \tau = (B, b) \in \mathbb{W}_H(X)$  amb  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \not\subseteq B$ ,  $B \not\subseteq A$  i  $[w] \in [F]$  de manera que  $|[w]\sigma| \leq |[w]|$  i  $|[w]\tau| \leq |[w]|$  amb almenys una de les dues desigualtats estrictes. Aleshores, existeixen un conjunt  $C \in \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cup B\}$  i una lletra  $c \in C \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$  de manera que per a  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_H(X)$  es té  $|[w]\theta| < |[w]|$ .*

*Demostració.* En primer lloc, si tenim  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ , aleshores ampliïm  $X$  afegint un nou generador  $z$  de manera que tinguem  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z, \bar{z}\}$ . Observem que  $\sigma$  i  $\tau$  deixen  $z$  invariant i que  $z$  no apareix en  $[w]$  ni en les seves imatges per  $\sigma$  i  $\tau$ . Siguin  $\mathcal{W}$  el graf de Whitehead de  $[w]$  i  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$  el seu conglomerat respecte la partició  $\mathcal{P} = \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$  de  $X^{\pm}$  en conjunts disjunts no buits. El graf subjacent de  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$  apareix a la figura 2.2. Ara prenem la següent partició de  $E(\mathcal{W}_{\mathcal{P}})$  en conjunts d'arestes disjunts

$$\begin{aligned} F_0 &= \{\{v_{A \cap B}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}, \{v_{A \cap \overline{B}}, v_{\overline{A} \cap B}\}\}, \\ F_1 &= \{e_a, e_{\bar{a}}\}, \\ F_2 &= \{e_b, e_{\bar{b}}\}, \end{aligned}$$

on hem usat les definicions següents

$$\begin{aligned} e_a &= \{v_{A \cap B}, v_{A \cap \overline{B}}\}, & e_{\bar{a}} &= \{v_{\overline{A} \cap B}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}, \\ e_b &= \{v_{A \cap B}, v_{\overline{A} \cap B}\}, & e_{\bar{b}} &= \{v_{A \cap \overline{B}}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}. \end{aligned}$$

Agafant  $p_1 = \deg_{\mathcal{W}}(a)$  i  $p_2 = \deg_{\mathcal{W}}(b)$  veurem que  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$  compleix les hipòtesis del lema 2.6. D'entrada, per hipòtesi tenim que

$$|[w]\sigma| - |[w]| + |[w]\tau| - |[w]| < 0.$$

Per la proposició 2.2, això és equivalent a

$$\text{cap}_{\mathcal{W}}(A) - \deg_{\mathcal{W}}(a) + \text{cap}_{\mathcal{W}}(B) - \deg_{\mathcal{W}}(b) < 0.$$

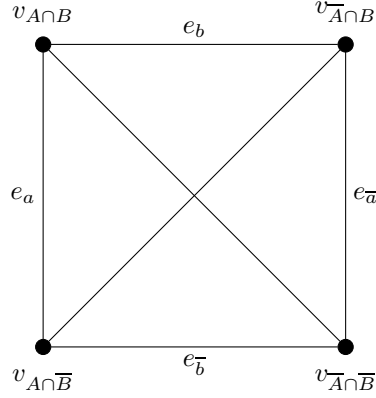


Figura 2.2: Graf subjacent  $K_4$  de la demostració del lema 2.7

Observem que per la definició de capacitat i del conglomerat tenim

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\mathcal{W}}(A) &= \sum_{e \in E(\mathcal{W}_{\mathcal{P}}) \setminus F_1} c_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}}}(e), \\ \text{cap}_{\mathcal{W}}(B) &= \sum_{e \in E(\mathcal{W}_{\mathcal{P}}) \setminus F_2} c_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}}}(e). \end{aligned}$$

Per tant, podem aplicar el lema 2.6 a la funció  $f : F_1 \cup F_2 \rightarrow V(\mathcal{W}_{\mathcal{P}})$  definida per  $f(e_x) = P \in \mathcal{P}$  de manera que  $x \in P$ . Així doncs, existeixen  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $e_c \in F_{\alpha}$  de manera que

$$\deg_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}}}(f(e_c)) - p_{\alpha} < 0.$$

Si  $f(e_c) = v_C$ , això implica que tenim

$$\text{cap}_{\mathcal{W}}(C) - \deg_{\mathcal{W}}(c) < 0,$$

i per tant  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  és l'automorfisme que volíem, llevat del cas en el qual tenim  $C = \overline{A} \cap \overline{B}$ . En aquest últim cas prendrem l'automorfisme  $\overline{\theta} = (\overline{C}, \overline{c}) = (A \cup B, \overline{c})$ . Observem que per (R7) tenim  $|[w]\overline{\theta}| = |[w]\theta\gamma_{\overline{c}}| = |[w]\theta| < |[w]|$  tal com volem.  $\square$

## 2.4 El lema de reducció de pics

Emprant els resultats de la secció anterior podem provar que l'acció dels automorfismes de Whitehead  $\mathbb{W}(X)$  sobre  $[F]$  compleix la propietat de reducció de pics.

**Lema 2.8.** *Siguin  $[w] \in [F]$  una paraula cíclica i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  amb  $[u] = [w]\sigma$  i  $[v] = [w]\tau$  de manera que  $|[u]| \leq |[w]|$  i  $|[v]| \leq |[w]|$  amb almenys una de les desigualtats estricta. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \quad \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$$

$$(b) \quad |[u]\rho_1 \cdots \rho_i| < |[w]| \text{ per a } 0 < i < k$$

$$(c) \quad \text{Si } x \in X \text{ és invariant per } \sigma \text{ i } \tau, \text{ aleshores també ho és per } \rho_i \text{ amb } 1 \leq i \leq k.$$

**Observació 2.9.** En la demostració del lema 2.8 podem intercanviar  $\sigma$  i  $\tau$ . Efectivament, si tenim  $\tau^{-1}\sigma = \rho_1 \cdots \rho_k$  amb  $\rho_i \in \mathbb{W}(X)$  per a tot  $1 \leq i \leq k$  i  $|[v]\rho_1 \cdots \rho_i| < |[w]|$  per a tot  $0 < i < k$ , aleshores  $\sigma^{-1}\tau = \rho_k^{-1} \cdots \rho_1^{-1}$  i es compleix

$$|[u]\rho_k^{-1} \cdots \rho_{i+1}^{-1}| = |[v]\rho_1 \cdots \rho_k \rho_k^{-1} \cdots \rho_{i+1}^{-1}| = |[v]\rho_1 \cdots \rho_i| < |[w]|,$$

per a tot  $0 < i < k$ .

**Observació 2.10.** Les hipòtesis del lema 2.8 sobre la longitud de les paraules cícliques  $[w]$ ,  $[u]$  i  $[v]$  impliquen que

$$|[u]| + |[v]| < 2|[w]|.$$

*Demostració del lema 2.8.* En primer lloc considerem el cas en què un dels automorfismes de Whitehead és de tipus I. Per l'observació 2.9 podem suposar que es tracta de  $\tau$ . Observem que aleshores hem de tenir  $\sigma \in \mathbb{W}_{II}(X)$  doncs altrament tindríem  $|[w]\sigma| = |[w]\tau| = |[w]|$  en contradicció amb les hipòtesis del lema. Així doncs, prenem  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \tau$  i  $\rho_2 = \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau$ . Òbviament tenim  $\rho_1 \in \mathbb{W}_I(X)$  i a més  $\rho_2 \in \mathbb{W}_{II}(X)$  per (R6). Els punts (a) i (c) es compleixen de manera trivial. Pel que fa a (b), com que  $|[v]| = |[w]\tau| = |[w]|$  aleshores hem de tenir  $|[u]\rho_1| = |[u]| < |[w]|$ .



D'aquí en endavant ja podem suposar que  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}_{II}(X)$ , i per tant escriurem  $\sigma = (A, a)$  i  $\tau = (B, b)$ . Aquí, aplicant, si cal, l'observació 2.9 i la reducció que presentem a continuació, podem suposar que ens trobem en una de les dues situacions següents.

$$(I) \quad A \cap B = \emptyset,$$

$$(II) \quad A \subseteq B,$$

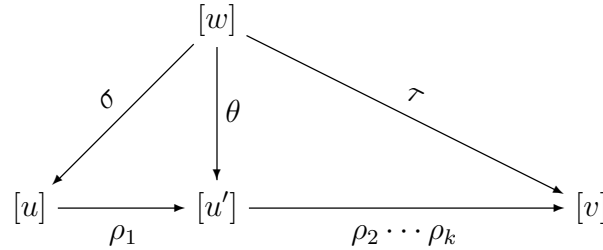
Abans de res, veurem que si tenim  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \not\subseteq B$  i  $B \not\subseteq A$ , aleshores ho podem reduir a una situació de tipus (I) o (II). Observem que ens trobem en les hipòtesis del lema 2.7 i per tant existeixen

$$C \in \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cup B\} \quad \text{i} \quad c \in C \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$$

de manera que  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  satisfà  $||w]\theta| < ||w]|$ . En cada cas, intercanviat  $\sigma$  per  $\tau$  si és necessari, podem suposar  $c \in \{a, \bar{a}\}$ . Això ens deixa amb les següents possibilitats per a  $\theta$ ,

$$\theta \in \{(A \cap B, a), (A \cap \overline{B}, a), (\overline{A} \cap B, \bar{a}), (A \cup B, a)\}.$$

Observem que per a cadascuna d'aquestes possibilitats, la relació entre  $\theta$  i  $\tau$  és de la forma (I) o (II). A més, si  $x \in X$  és invariant per  $\sigma$  i  $\tau$ , llavors tenim  $x, \bar{x} \in \overline{A} \cap \overline{B}$  i per tant  $x$  també és invariant per cadascun dels possibles  $\theta$ . Així doncs, quan ens trobem en aquesta situació, prendrem  $\rho_1 = \sigma^{-1}\theta$  i aplicarem el lema a la parella  $\theta$  i  $\tau$  tal com mostra el següent diagrama.



Els següents càlculs demostren, usant les relacions (R1) i (R2), com en cadascun dels casos tenim  $\rho_1 \in \mathbb{W}_{II}(X)$ .

Si  $\theta = (A \cap B, a)$ , aleshores

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\theta &\stackrel{(R1)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})(A \cap B, a) \stackrel{(R2)}{=} (A \cap \bar{B} + \bar{a}, \bar{a})(A \cap B - a + \bar{a}, \bar{a})(A \cap B, a) \\ &\stackrel{(R1)}{=} (A \cap \bar{B} + \bar{a}, \bar{a})\end{aligned}$$

Si  $\theta = (A \cap \bar{B}, a)$ , aleshores

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\theta &\stackrel{(R1)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})(A \cap \bar{B}, a) \stackrel{(R2)}{=} (A \cap B + \bar{a}, \bar{a})(A \cap \bar{B} - a + \bar{a}, \bar{a})(A \cap \bar{B}, a) \\ &\stackrel{(R1)}{=} (A \cap B + \bar{a}, \bar{a})\end{aligned}$$

Si  $\theta = (\bar{A} \cap B, \bar{a})$ , aleshores

$$\sigma^{-1}\theta \stackrel{(R1)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})(\bar{A} \cap B, \bar{a}) \stackrel{(R2)}{=} (A \cup B - a, \bar{a})$$

Si  $\theta = (A \cup B, a)$ , aleshores

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\theta &\stackrel{(R1)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})(A \cup B, a) \stackrel{(R2)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})(A, a)(\bar{A} \cap B + a, a) \\ &\stackrel{(R1)}{=} (\bar{A} \cap B + a, a)\end{aligned}$$

Ara considerarem les situacions (I) i (II) amb cinc casos cadascuna tal i com es mostra a la taula següent.

|      | 1             | 2                     | 3                     | 4                     | 5                     |
|------|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (I)  | $b = \bar{a}$ | $\bar{a} \in \bar{B}$ | $\bar{a} \in \bar{B}$ | $\bar{a} \in B$       | $\bar{a} \in B$       |
|      |               | $\bar{b} \in \bar{A}$ | $\bar{b} \in A$       | $\bar{b} \in \bar{A}$ | $\bar{b} \in A$       |
| (II) | $b = a$       | $\bar{a} \in B$       | $\bar{a} \in B$       | $\bar{a} \in \bar{B}$ | $\bar{a} \in \bar{B}$ |
|      |               | $b \in \bar{A}$       | $b \in A$             | $b \in \bar{A}$       | $b \in A$             |

Els casos s'han enumerat de manera que si  $\sigma$  i  $\tau$  es troben en un cas de la forma (II.i), aleshores  $\sigma$  i  $\bar{\tau}$  es troben en els cas (I.i). Usarem aquest fet i la relació (R7) que dóna  $\tau = \bar{\tau}\gamma_b$  per resoldre el cas (II.i) a partir del cas (I.i).

**(I.1)** Prenem  $k = 1$  i  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau = (A + B - a, \bar{a})$  per (R2). Les propietats (a) i (c) es compleixen per construcció i (b) es compleix vàcuament.

(II.1) Prenem  $k = 1$  i  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau = (A \cap \bar{B} + \bar{a}, \bar{a})(A \cap B - a + \bar{a}, \bar{a})(B, a) = (\bar{A} \cap B + a, a)$  per (R2) i (R1).

(I.2) En aquest cas podem prendre  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \tau$  i  $\rho_2 = \sigma^{-1}$  ja que per (R3) tenim  $\sigma^{-1}\tau = \tau\sigma^{-1}$ . Per tant (a) i (c) es compleixen. Per verificar (b) veiem que estem en les hipòtesis del lema 2.5 i per tant

$$|[u]\rho_1| = |[w]\sigma\tau| = |[u]| + |[v]| - |[w]| < |[w]|,$$

on la última desigualtat prové de l'observació 2.10.

(II.2) També prenem  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \tau$  i  $\rho_2 = \sigma^{-1}$ . Aleshores, usant (R7), el cas anterior, (R8) i (R7) altre cop tenim  $\sigma^{-1}\tau = \sigma^{-1}\bar{\tau}\gamma_b = \bar{\tau}\sigma^{-1}\gamma_b = \bar{\tau}\gamma_b\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-1}$ . La propietat (b) es compleix perquè  $|[u]\tau| = |[u]\bar{\tau}| < |[w]|$  per (I.2), (a) i (c) es compleixen per construcció.

(I.3) Aquí prendrem  $k = 2$  amb  $\rho_1 = \tau$  i  $\rho_2 = \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau = (A+B-b-a+\bar{a}, \bar{a})$  per (R4). Òbviament, (a) i (c) es verifiquen per construcció, i (b) és altre cop conseqüència del lema 2.5.

(II.3) També prenem  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \tau$  i  $\rho_2 = \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau$ . Emprant (R7), el cas anterior i (R9) tenim que  $\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau = \gamma_{\bar{b}}\bar{\tau}^{-1}\sigma^{-1}\bar{\tau}\gamma_b = \gamma_{\bar{b}}(A + \bar{B} - \bar{b} - a + \bar{a}, \bar{a})\gamma_b = (\bar{A} \cap B + \bar{b} + a - \bar{a}, a)$ . Les propietats (a) i (c) es segueixen complint per construcció, i (b) perquè  $|[u]\tau| = |[u]\bar{\tau}| < |[w]|$  per (I.3).

(I.4) Prenem  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau\sigma$  i  $\rho_2 = \sigma^{-1}$ . Llavors, per (R4) tenim  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau\sigma = (A + B - a, b)$ . A més, pel lema 2.5 i l'observació 2.10 tenim  $|[u]\rho_1| = |[w]\tau\sigma| = |[u]| + |[v]| - |[w]| < |[w]|$  i per tant es compleix (b).

(II.4) Aquí també prenem  $k = 2$ ,  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau\sigma$  i  $\rho_2 = \sigma^{-1}$ . Aleshores, usant (R7), (R8), el cas anterior i (R7) altre cop, veiem que  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^{-1}\bar{\tau}\gamma_b\sigma = \sigma^{-1}\bar{\tau}\sigma\gamma_b = (A + \bar{B} - a, \bar{b})\gamma_b = (\bar{A} \cap B + a, b)$ . A més hem vist que  $\rho_1 = \sigma^{-1}\bar{\tau}\sigma\gamma_b$  i per tant, pel cas anterior, tenim que  $|[u]\rho_1| = |[u]\sigma^{-1}\bar{\tau}\sigma\gamma_b| = |[u]\sigma^{-1}\bar{\tau}\sigma| < |[w]|$ , és a dir, es compleix (b).

En els casos de tipus 5 caldrà distingir dos subcasos diferents. Observem que per hipòtesis, en la situació (I.5) podem definir els següents automorfismes de Whitehead de tipus II:  $\sigma' = (A, \bar{b})$  i  $\tau' = (B, \bar{a})$ . A més, aplicant la

proposició 2.2 i l'observació 2.10 veiem que

$$\begin{aligned} |[w]\sigma'| - |[w]| + |[w]\tau'| - |[w]| &= \mathbf{cap}(A) - \mathbf{deg}(\bar{b}) + \mathbf{cap}(B) - \mathbf{deg}(\bar{a}) = \\ \mathbf{cap}(A) - \mathbf{deg}(a) + \mathbf{cap}(B) - \mathbf{deg}(b) &= |[w]\sigma| - |[w]| + |[w]\tau| - |[w]| < 0. \end{aligned}$$

Per tant, o bé  $|[w]\sigma'| < |[w]|$ , o bé  $|[w]\tau'| < |[w]|$ .

**(I.5.1)** Suposem que tenim  $|[w]\tau'| < |[w]|$ . Aleshores prenem  $k = 3$  amb  $\rho_1 = \sigma^{-1}\tau' = (A + B - a, \bar{a})$  per (R2),  $\rho_2 = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)$  i  $\rho_3 = (B + a - \bar{a} - b + \bar{b}, a)$  de manera que tenim  $\rho_2\rho_3 = \tau'^{-1}\tau$  per (R5). Així veiem que (a), (b) i (c) es compleixen.

**(I.5.2)** Ara suposem que  $|[w]\sigma'| < |[w]|$ . Llavors prenem  $k = 3$ ,  $\rho_1 = (A - a + \bar{a}, \bar{b})$ ,  $\rho_2 = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)$  i  $\rho_3 = (A + B - \bar{b}, b)$ . Observem que per simetria amb el cas anterior tenim  $\tau^{-1}\sigma = (A + B - b, \bar{b})(a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})(A + b - \bar{b} - a + \bar{a}, b)$  i per tant per (R1) es compleix que  $\sigma^{-1}\tau = \rho_1\rho_2\rho_3$ . A més, (b) es compleix pel mateix argument que l'emprat en l'observació 2.9.

Usant el mateix argument que en la situació (I.5) i el fet que en el graf de Whitehead de  $[w]$  es té  $\mathbf{cap}(B) = \mathbf{cap}(\bar{B})$ , llavors en la situació (II.5), o bé  $|[w](A, b)| < |[w]|$ , o bé  $|[w](\bar{B}, \bar{a})| < |[w]|$ .

**(II.5.1)** Suposem que es té  $|[w](\bar{B}, \bar{a})| < |[w]|$ . Llavors podem prendre  $k = 3$ ,  $\rho_1 = (\bar{A} \cap B + a, a)$ ,  $\rho_2 = (a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})$  i  $\rho_3 = (B - a + \bar{a} - b + \bar{b}, \bar{a})$  ja que

$$\begin{aligned} \rho_1\rho_2\rho_3 &= (\bar{A} \cap B + a, a)\rho_2(B - a + \bar{a} - b + \bar{b}, \bar{a}) \\ &\stackrel{(R7)}{=} (A + \bar{B} - a, \bar{a})\gamma_a\rho_2(B - a + \bar{a} - b + \bar{b}, \bar{a}) \\ &\stackrel{(R9)}{=} (A + \bar{B} - a, \bar{a})\gamma_a\rho_2\gamma_{\bar{b}}(\bar{B} + a - \bar{a} + b - \bar{b}, \bar{a})\gamma_b \\ &\stackrel{(R6)}{=} (A + \bar{B} - a, \bar{a})\rho_2\gamma_b\rho_2^{-1}\rho_2\gamma_{\bar{b}}(\bar{B} + a - \bar{a} + b - \bar{b}, \bar{a})\gamma_b \\ &= (A + \bar{B} - a, \bar{a})\rho_2(\bar{B} + a - \bar{a} + b - \bar{b}, \bar{a})\gamma_b \\ &\stackrel{(I.5.1)}{=} \sigma^{-1}\bar{\tau}\gamma_b \stackrel{(R7)}{=} \sigma^{-1}\tau. \end{aligned}$$

A més, com que  $\rho_1 = \sigma^{-1}(\bar{B}, \bar{a})$  per (R1) i (R2), llavors  $|[u]\rho_1| = |[w](\bar{B}, \bar{a})| < |[w]|$  i per tant es satisfà (b).

**(II.5.2)** Ara podem suposar que  $|[w](A, b)| < |[w]|$ . En aquest cas prenem

$k = 3$ ,  $\rho_1 = (A - a + \bar{a}, b)$ ,  $\rho_2 = (a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})$  i  $\rho_3 = (\bar{A} \cap B + b, b)$ . Aplicant (R7) i el cas (I.5.2) tenim

$$\begin{aligned}\rho_1 \rho_2 \rho_3 &= (A - a + \bar{a}, b)(a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})(\bar{A} \cap B + b, b) \\ &\stackrel{(R7)}{=} (A - a + \bar{a}, b)(a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})(A + \bar{B} - b, \bar{b})\gamma_b \\ &\stackrel{(I.5.2)}{=} \sigma^{-1} \bar{\tau} \gamma_b \stackrel{(R7)}{=} \sigma^{-1} \tau.\end{aligned}$$

Ara observem que aplicant primer (R5) i després (R6) tenim

$$\sigma \rho_1 = (A, a)(A - a + \bar{a}, b) = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)(A - b + \bar{b}, a) = (A, b)(a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a).$$

Per tant, es satisfà (b) ja que  $|[u]\rho_1| = |[w]\sigma\rho_1| = |[w](A, b)\rho_2^{-1}| = |[w](A, b)| < |[w]|$ .

□

**Observació 2.11.** Totes les asseveracions respecte la longitud de les paraules cícliques que apareixen en la demostració són conseqüència de les hipòtesis, de la proposició 2.2 i dels lemes 2.5 i 2.7. Per tant, qualsevol conjunt objectes en el qual hi hagui una acció de  $Aut(F)$  satisfent aquestes propietats respecte els automorfismes de  $\mathbb{W}(X)$  també tindrà la propietat de reducció de pics. De fet, convé notar que, en realitat, del lema 2.5 només és necessària la desigualtat  $|[w]\sigma\tau| - |[w]\sigma| \leq |[w]\tau| - |[w]|$ .

**Observació 2.12.** Tots els càlculs referents als automorfismes que apareixen en la demostració són conseqüència de les relacions de McCool (R1) – (R9) i per tant la relació  $\sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$  és conseqüència d'aquestes relacions. A més, si posem  $X = Y \cup Z$  on  $Y$  i  $Z$  són conjunts disjunts i  $Z$  està format només per símbols invariants per  $\sigma$  i  $\tau$ , aleshores tots els càlculs que apareixen a la demostració es poden dur a terme a  $Aut(F')$  amb  $F' = F(Y)$ , i són conseqüència de les respectives relacions entre els automorfismes de  $\mathbb{W}(Y)$ .

## 2.5 Solució del primer problema de Whitehead

A continuació donarem la solució de les quatre variants del primer problema de Whitehead utilitzant la tècnica de reducció de pics. Els tres primers

problemes que presentem ja van ser resolts pel mateix Whitehead a [Whi36]. La última variant en canvi, va ser resolta per primer cop a [McC74]. Això és degut a què aquesta solució passa per l'apartat (c) del lema 2.8, la primera demostració del qual va ser donada per McCool.

### 2.5.1 Paraules cícliques

El primer problema de Whitehead original és  $\text{EO}([F], \text{Out}(F))$ . Els resultats que hem demostrat en aquest capítol ens permeten aplicar el teorema 1.11 per veure que aquest problema és resoluble. A més, per resoldre'l podem emprar l'algorisme donat en la demostració d'aquest teorema.

En primer lloc, convé fer una puntualització tècnica i observar que el problema  $\text{EO}([F], \text{Out}(F))$  és equivalent al problema  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$ . Si tenim  $[w], [w'] \in [F]$  i  $\alpha \in \text{Aut}(F)$ , aleshores  $[w]\alpha = [w']$  si i només si  $[w]\alpha \text{Inn}(F) = [w']$ . Per tant, el problema que resoldrem en realitat és  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$  ja que estem treballant amb els automorfismes de Whitehead que són un conjunt de generadors per a  $\text{Aut}(F)$ .

Ara cal veure que es compleixen les condicions (i), (ii) i (iii) de la secció 1.2.2.

- (i) És evident que donat  $l \in \mathbb{N}$  només existeix una quantitat finita de paraules cícliques en  $[F]$  amb longitud  $l$ . A més, és possible enumerar-les de manera efectiva. Per exemple, llistant totes les paraules de longitud  $l$  sobre  $X^\pm$ , descartant totes les que no siguin reduïdes i cíclicament reduïdes i agrupant les restants en paraules cícliques.
- (ii) Això és l'observació 2.1.
- (iii) El lema 2.8 prova que l'acció dels automorfismes de Whitehead sobre  $[F]$  compleix la propietat de reducció de pics.

Per tant, en virtut del teorema 1.11, el problema  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$  és resoluble.

### 2.5.2 Paraules

La primera variació que presentem sobre el primer problema de Whitehead consisteix en prendre paraules de  $F$  enlloc de paraules cícliques. És a dir, el

problema  $\text{EO}(F, \text{Aut}(F))$ . A continuació veurem que aquest problema es redueix a l'anterior i per tant podem usar l'algorisme que resol  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$  per resoldre també aquest problema.

Suposem que tenim  $w_1, w_2 \in F$  donades i volem decidir si pertanyen a la mateixa òrbita respecte l'acció de  $\text{Aut}(F)$  sobre  $F$ . En primer lloc reduïm cíclicament les paraules  $w_1$  i  $w_2$  per obtenir dues paraules cíclicament reduïdes  $w'_1$  i  $w'_2$  amb  $w_1\gamma_{u_1} = w'_1$ ,  $w_2\gamma_{u_2} = w'_2$ , per a unes certes paraules  $u_1, u_2 \in F$ . Observem que tindrem  $|w'_1| \leq |w_1|$  i  $|w'_2| \leq |w_2|$ .

Ara preguntem a l'algorisme de Whitehead per a  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$  si  $[w'_1]$  i  $[w'_2]$  pertanyen a la mateixa òrbita. i mirem què passa en cadascun dels casos.

En cas que l'algorisme retorni SÍ, significa que existeix  $\alpha \in \text{Aut}(F)$  tal que  $[w'_2] = [w'_1]\alpha$  i per tant, per algun  $u \in F$  tenim  $w'_2 = w'_1\alpha\gamma_u$ . Així doncs, tenim  $w_2 = w_1\beta$  amb  $\beta = \gamma_{u_1}\alpha\gamma_u\gamma_{\overline{u_2}}$  i podem retornar SÍ.

En cas que l'algorisme retorni NO, significa que no existeix cap automorfisme de  $F$  que envii  $[w'_1]$  a  $[w'_2]$ . Per tant, no pot existir cap automorfisme de  $F$  que envii  $w_1$  a  $w_2$ , doncs si existís  $\alpha \in \text{Aut}(F)$  tal que  $w_2 = w_1\alpha$ , aleshores tindríem  $w'_2 = w'_1\gamma_{\overline{u_1}}\alpha\gamma_{u_2}$  i  $[w'_1]$  i  $[w'_2]$  estarien a la mateixa òrbita contradient la resposta de l'algorisme que decideix  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$ . Així doncs, retornem NO.

Per tant, hem vist que el problema  $\text{EO}(F, \text{Aut}(F))$  és resoluble reduint-lo a  $\text{EO}([F], \text{Aut}(F))$ .

### 2.5.3 Tuples de paraules cícliques

La següent variació sobre el primer problema de Whitehead que presentem aquí consisteix en prendre tuples de paraules cícliques. Per resoldre el problema  $\text{EO}([F]^n, \text{Aut}(F))$  usarem l'observació 2.11 per provar que les tuples de  $[F]^n$  amb els automorfismes de Whitehead  $\mathbb{W}(X)$  satisfan la propietat de reducció de pics amb la longitud donada per  $|\mathbf{w}| = |[w_1]| + \dots + |[w_n]|$ , on  $\mathbf{w} = ([w_1], \dots, [w_n]) \in [F]^n$ .

En primer lloc, donada  $\mathbf{w} = ([w_1], \dots, [w_n]) \in [F]^n$ , definim el *graf de Whitehead* de la tupla  $\mathbf{w}$  com el graf capacitiu que s'obté de sumar els grafs de Whitehead de les paraules cícliques  $[w_1], \dots, [w_n]$ :

$$\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = \mathcal{W}_{[w_1]} + \dots + \mathcal{W}_{[w_n]}.$$

Amb aquesta construcció podem demostrar els tres resultats següents, que són els anàlegs de la proposició 2.2 i els lemes 2.5 i 2.7 per a tuples de paraules cícliques.

**Proposició 2.13.** *Sigui  $[\mathbf{w}] \in [F]^n$  i  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$ . Si  $\mathcal{W}$  és el graf de Whitehead de  $[\mathbf{w}]$ , aleshores es té*

$$|[\mathbf{w}]\sigma| - |[\mathbf{w}]| = \text{cap}_{\mathcal{W}}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}}(a).$$

*Demostració.* Posem  $[\mathbf{w}] = ([w_1], \dots, [w_n])$  i denotem per  $\mathcal{W}_i$  el graf de Whitehead de  $[w_i]$  per  $1 \leq i \leq n$ . Aleshores, per les propietats del graf suma i la proposició 2.2, tenim

$$\begin{aligned} |[\mathbf{w}]\sigma| - |[\mathbf{w}]| &= |[w_1]\sigma| - |[w_1]| + \dots + |[w_n]\sigma| - |[w_n]| \\ &= \text{cap}_{\mathcal{W}_1}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}_1}(a) + \dots + \text{cap}_{\mathcal{W}_n}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}_n}(a) \\ &= \text{cap}_{\mathcal{W}}(A) - \text{deg}_{\mathcal{W}}(a) \end{aligned}$$

□

**Lema 2.14.** *Siguin  $\sigma = (A, a)$  i  $\tau = (B, b)$  dos automorfismes de Whitehead de tipus II tals que  $A \cap B = \emptyset$  i  $\bar{a} \notin B$ . Aleshores, per a qualsevol tupla de paraules cícliques  $[\mathbf{w}] \in [F]^n$  es compleix que  $|[\mathbf{w}]\sigma\tau| - |[\mathbf{w}]\sigma| = |[\mathbf{w}]\tau| - |[\mathbf{w}]|$ .*

*Demostració.* Si posem  $[\mathbf{w}] = ([w_1], \dots, [w_n])$  i apliquem el lema 2.5 tenim

$$\begin{aligned} |[\mathbf{w}]\sigma\tau| - |[\mathbf{w}]\sigma| &= |[w_1]\sigma\tau| - |[w_1]\sigma| + \dots + |[w_n]\sigma\tau| - |[w_n]\sigma| \\ &= |[w_1]\tau| - |[w_1]| + \dots + |[w_n]\tau| - |[w_n]| \\ &= |[\mathbf{w}]\tau| - |[\mathbf{w}]|. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.15.** *Siguin  $\sigma = (A, a), \tau = (B, b) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  amb  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \not\subseteq B$ ,  $B \not\subseteq A$  i  $[\mathbf{w}] \in [F]^n$  de manera que  $|[\mathbf{w}]\sigma| \leq |[\mathbf{w}]|$  i  $|[\mathbf{w}]\tau| \leq |[\mathbf{w}]|$  amb almenys una de les dues desigualtats estrictes. Aleshores, existeixen un conjunt  $C \in \{A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cup B\}$  i una lletra  $c \in C \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$  de manera que per a  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  es té  $|[\mathbf{w}]\theta| < |[\mathbf{w}]|$ .*

*Demostració.* Se segueix de la mateixa demostració emprada en el lema 2.7 usant com a  $\mathcal{W}$  el graf de Whitehead de  $[\mathbf{w}]$ . □



Com a conseqüència d'aquests tres resultats i l'observació 2.11, podem usar la mateixa demostració que en el lema 2.8 per demostrar el següent. Observem que això és factible perquè en la demostració en qüestió no es fa cap distinció sobre la paraula, només sobre els automorfismes.

**Lema 2.16.** *Siguin  $[\mathbf{w}] \in [F]^n$  una tupla de paraules cícliques i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  amb  $[\mathbf{u}] = [\mathbf{w}]\sigma$  i  $[\mathbf{v}] = [\mathbf{w}]\tau$  de manera que  $||[\mathbf{u}]|| \leq ||[\mathbf{w}]||$  i  $||[\mathbf{v}]|| \leq ||[\mathbf{w}]||$  amb almenys una de les desigualtats estrictes. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \quad \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$$

$$(b) \quad ||[\mathbf{u}]\rho_1 \cdots \rho_i|| < ||[\mathbf{w}]|| \text{ per a } 0 < i < k$$

$$(c) \quad \text{Si } x \in X \text{ és invariant per } \sigma \text{ i } \tau, \text{ aleshores també ho és per } \rho_i \text{ amb } 1 \leq i \leq k.$$

Així doncs, tindrem que  $[F]^n$  amb l'acció diagonal dels automorfismes de Whitehead compleix la propietat de reducció de pics. Per tant, de la mateixa manera que en els problemes anteriors, es compleixen les propietats (i), (ii) i (iii) i per tant, pel teorema 1.11 el problema  $\text{EO}([F]^n, \text{Aut}(F))$  és resoluble.

## 2.5.4 Tuples de paraules

Una variació interessant del problema anterior consisteix en prendre tuples de  $n$  paraules de  $F$  enlloc d'una sola paraula i considerar les òrbites respecte l'acció diagonal de  $\text{Aut}(F)$  en  $F^n$  donada per

$$\mathbf{w}\alpha = (w_1\alpha, \dots, w_n\alpha)$$

on  $\alpha$  és un automorfisme de  $F$  i  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  una tupla formada per  $n$  paraules de  $F$ . Aquest problema,  $\text{EO}(F^n, \text{Aut}(F))$ , el resoldrem emprant altre cop el teorema 1.11 i l'algorisme de Whitehead.

Per poder aplicar el teorema és necessari comprovar que l'acció de  $\text{Aut}(F)$  sobre  $F^n$  satisfà les propietats (i), (ii) i (iii). En primer lloc, prenem la longitud sobre  $F^n$  definida de manera que si tenim  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in F^n$  aleshores

$$|\mathbf{w}| = |w_1| + \cdots + |w_n|.$$

Amb aquesta longitud és obvi que els estrats de qualsevol longitud són finits i que donada una longitud  $l \in \mathbb{N}$  podem llistar de manera algorísmica totes

les tuples d'aquesta longitud. Per tant es compleix el punt (i). El punt (ii) és directe usant els generadors de Whitehead de  $\text{Aut}(F)$  com ja hem vist a 2.5.1. Finalment, el punt (iii) és conseqüència del següent resultat.

**Lema 2.17.** *Siguin  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in F^n$  tres tuples de  $n$  paraules de  $F$  i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  automorfismes de Whitehead tals que  $\mathbf{u} = \mathbf{w}\sigma$  i  $\mathbf{v} = \mathbf{w}\tau$ . Suposem que tenim  $|\mathbf{u}| \leq |\mathbf{w}|$  i  $|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{w}|$  amb almenys una de les desigualtat estrictes. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \quad \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k,$$

$$(b) \quad |\mathbf{u}\rho_1 \cdots \rho_i| < |\mathbf{w}| \text{ per a } 0 < i < k.$$

*Demostració.* Sigui  $F'$  el grup lliure de rang  $r + 1$  amb base  $X' = X \cup \{z\}$ . Com que tenim  $F \subseteq F'$ , aleshores  $u_i, v_i, w_i \in F'$  per  $1 \leq i \leq n$  i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X')$  pensant-los com a automorfismes que deixen  $z$  invariant. Considerem les següents paraules de  $F'$ :

$$u = u_1 z u_2 z \cdots z u_n z \quad v = v_1 z v_2 z \cdots z v_n z \quad w = w_1 z w_2 z \cdots z w_n z$$

Per hipòtesi tenim  $u = w\sigma$ ,  $v = w\tau$ . A més, com que tenim  $|u| = |\mathbf{u}| + n$ ,  $|v| = |\mathbf{v}| + n$  i  $|w| = |\mathbf{w}| + n$ , es compleix que  $|u| \leq |w|$  i  $|v| \leq |w|$  amb una de les desigualtats estrictes. Observem que les paraules  $u$ ,  $v$  i  $w$  són cíclicament reduïdes i apliquem el lema 2.8 a les paraules cícliques  $[u]$ ,  $[v]$  i  $[w]$ . Per tant, existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X')$  de manera que  $\sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$ ,  $|[u]\rho_1 \cdots \rho_i| < |[w]|$  per a  $0 < i < k$  i a més  $z$  és invariant per  $\rho_i$  amb  $1 \leq i \leq k$ . Així doncs, podem pensar que tenim  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  i, per l'observació 2.12, es segueix complint que  $\sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$ . Finalment, tenim que  $|\mathbf{u}\rho_1 \cdots \rho_i| = |[u]\rho_1 \cdots \rho_i| - n < |[w]| - n = |\mathbf{w}|$  per  $0 < i < k$ .  $\square$

Així doncs, hem vist que el problema  $\text{EO}(F^n, \text{Aut}(F))$  és resoluble.

Aquí conclou la solució de les quatre variants del primer problema de Whitehead. En el següent capítol veurem que tècniques molt similars a les emprades en aquest capítol es poden usar per resoldre també el segon problema de Whitehead. La similitud formal entre les dues solucions presentades en aquest treball indica que el graf i l'hipergraf de Whitehead, que introduïrem en el següent capítol, són els objectes més naturals per abordar aquests problemes, les solucions originals dels quals estan separades en el temps per casi 50 anys.

## Capítol 3

# El segon problema de Whitehead

En aquest capítol resoldrem el segon problema de Whitehead i totes les seves variants. Per fer-ho emprarem la tècnica de reducció de pics de la mateixa manera que en el capítol 2. A la secció 3.1 donem un procediment per obtenir la imatge d'un  $X$ -graf per un automorfisme de Whitehead. La secció 3.2 la dediquem a presentar l'hipergraf de Whitehead d'un  $X$ -graf cíclicament reduït i les seves propietats. A continuació, en la secció 3.3, provem un conjunt de lemes tècnics anàlegs als de la secció 2.3. Per acabar, a la secció 3.4 donem les solucions completes pel segon problema de Whitehead i les seves variants.

### 3.1 Imatge d'un $X$ -graf per un automorfisme de Whitehead

Sigui  $\Gamma$  un  $X$ -graf cíclicament reduït i  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  un automorfisme de Whitehead de tipus II. A continuació descriurem un procediment per computar la imatge de  $\Gamma$  per  $\sigma$ . Aquest procediment ens permetrà raonar sobre la transformació soferta per  $\Gamma$  en aplicar-li un automorfisme i serà usat més endavant en la prova d'alguns resultats.

Recordem que aplicar un automorfisme a un  $X$ -graf cíclicament reduït consisteix en prendre la reducció cíclica del graf resultat de substituir cada aresta per un camí amb la mateixa orientació etiquetat amb la imatge per l'automorfisme de l'etiqueta de l'aresta. El procés que descriurem és una

versió particular del procés general pel cas d'un automorfisme de Whitehead de tipus II.

De manera abreviada, tindrem  $\Gamma\sigma = \text{cc}(\text{red}(\Gamma'))$  on  $\Gamma'$  és el graf que resulta de fer una reducció parcial del graf que s'obté de substituir les arestes de  $\Gamma$  per camins etiquetats. Descriurem el procés en tres fases que anomenarem **(a)**, **(b)** i **(c)**:

$$\Gamma \xrightarrow{\text{(a)}} \Gamma' \xrightarrow{\text{(b)}} \Gamma'' \xrightarrow{\text{(c)}} \Gamma'''$$

amb  $\Gamma'' = \text{red}(\Gamma')$  i  $\Gamma''' = \text{cc}(\Gamma'') = \Gamma\sigma$ .

**(a)** En aquesta primera fase obtenim  $\Gamma'$  a partir de  $\Gamma$  aplicant-li l'automorfisme  $\sigma$  i practicant unes determinades reduccions elementals. Per aplicar  $\sigma$  a  $\Gamma$  cal substituir cada aresta de  $\Gamma$  etiquetada per  $x$  per un camí etiquetat per  $x\sigma$ , afegint els vèrtexs de grau 2 que siguin necessaris. En aquest cas, el camí serà com a molt de longitud 3, doncs per a tot  $x \in X^\pm$  tindrem  $x\sigma \in \{x, xa, \bar{a}x, \bar{a}xa\}$ . Des del punt de vista d'un vèrtex  $v \in V$ , les arestes  $e \in \text{link}_\Gamma(v)$  tals que  $\lambda(e) \in \bar{A} \cup \{a\}$  no es modificaran, doncs  $\sigma$  no multiplica  $\lambda(e)$  per res a la dreta. Aquestes arestes es corresponen amb  $\text{hl}_\Gamma(v) \cap (\bar{A} \cup \{a\})$ . Per altra banda, les arestes corresponents a  $\text{hl}_\Gamma(v) \cap (A \setminus \{a\})$  deixaran de ser incidents a  $v$ . L'etiqueta de cadascuna d'aquestes arestes serà multiplicada a la dreta per  $a$  en aplicar-li  $\sigma$  i per tant donarà lloc a un nou vèrtex adjacent a  $v$  a través d'una aresta etiquetada per  $a$ , i l'aresta original passarà a ser incident al nou vèrtex. Així doncs, per cadascuna d'aquestes arestes tindrem una aresta etiquetada per  $a$  incident a  $v$ . El graf  $\Gamma'$  és el resultat d'aplicar les reduccions elementals necessàries per identificar, per cada  $v \in V$  amb  $\text{hl}_\Gamma(v) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ , tots els vèrtexs de *nova creació* adjacents a  $v$  a través d'una aresta etiquetada per  $a$ . Vegeu la figura 3.1. Això donarà lloc en  $\Gamma'$  a un nou vèrtex  $v_*$  per cada vèrtex  $v \in V$  tal que  $\text{hl}_\Gamma(v) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ .

Formalment, si posem  $\Gamma = (V, E)$  i definim les següents particions de  $V$  i  $E$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid \text{hl}(v) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset\}, \\ V_2 &= \{v \in V \mid \text{hl}(v) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset\}, \\ E_1 &= \{e \in E \mid \lambda(e) \in \{a, \bar{a}\}\}, \\ E_2 &= \{e \in E \mid \lambda(e) \notin \{a, \bar{a}\}\}, \end{aligned}$$

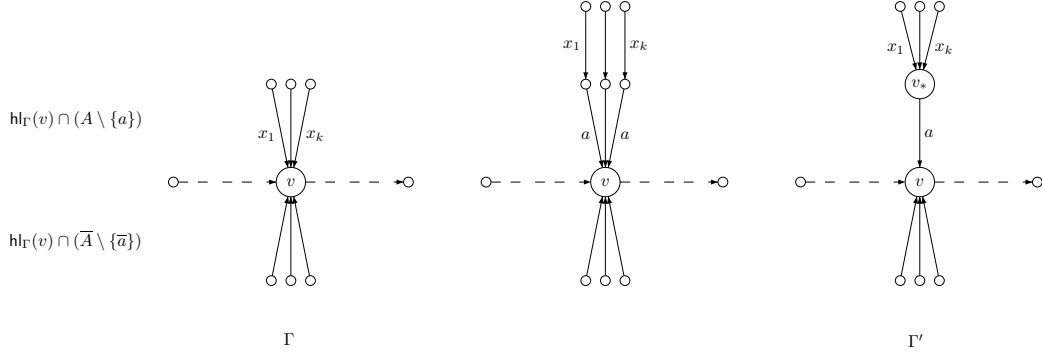


Figura 3.1: Reduccions elementals en la fase **(a)**

aleshores tindrem  $\Gamma' = (V', E')$  amb

$$V' = V_1' \cup V_2' \cup V_3' \quad \text{i} \quad E' = E_1' \cup E_2' \cup E_3'$$

a on  $V_1' = V_1$ ,  $V_2' = V_2$ ,  $V_3' = \{v_* \mid v \in V_2\}$ ,  $E_1' = E_1$ ,  $E_2'$  està definit com la imatge de  $E_2$  per la transformació

$$(u, x, v) \mapsto \begin{cases} (u_*, x, v_*) & \text{si } x, \bar{x} \in A, \\ (u, x, v_*) & \text{si } x \in A, \bar{x} \notin A, \\ (u_*, x, v) & \text{si } x \notin A, \bar{x} \in A, \\ (u, x, v) & \text{si } x, \bar{x} \notin A, \end{cases}$$

i finalment

$$E_3' = \{(v_*, a, v) \mid v_* \in V_3\} \cup \{(v, \bar{a}, v_*) \mid v_* \in V_3\}.$$

Notem que la transformació que envia  $E_2$  a  $E_2'$  està ben definida, en el sentit que l'aresta resultant només involucra  $u_*$  quan es té  $\bar{x} \in A$  i  $v_*$  quan es té  $x \in A$ , és a dir, quan els vèrtexs  $u_*$  i  $v_*$  existeixen.

**(b)** En aquesta fase aplicarem la resta de reduccions elementals necessàries per obtenir  $\Gamma'' = \text{red}(\Gamma')$ . Per fer-ho veurem que les úniques reduccions necessàries consisteixen en identificar vèrtexs  $v_* \in V_3'$  amb vèrtexs  $u \in V_1' \cup V_2'$  tals que  $(u, a, v) \in E'$ , on  $v$  denota el vèrtex de  $V_2$  que en la fase **(a)** ha originat  $v_*$ . Vegeu la figura 3.2.

Per començar veurem que  $\lambda'$  és injectiva en el link de qualsevol vèrtex de  $V'$

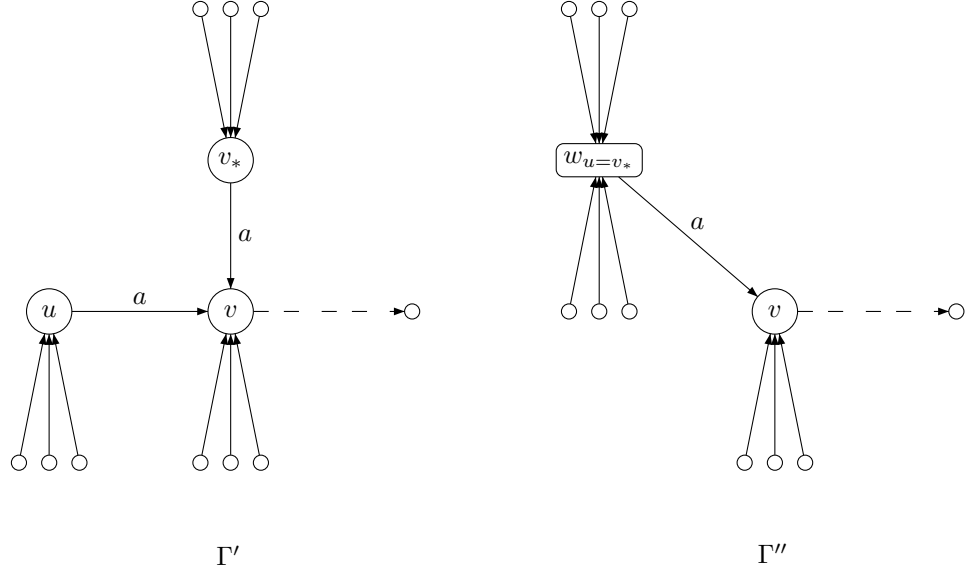


Figura 3.2: Reduccions elementals en la fase (b)

llevat d'aquells vèrtexs  $v \in V'_2$  pels quals existeix  $u \in V'_1 \cup V'_2$  i  $(u, a, v) \in E'$ . En primer lloc, si  $v \in V'_1$  aleshores  $\text{link}_{\Gamma'}(v)$  està en bijecció amb  $\text{link}_{\Gamma}(v)$  i per tant  $\lambda'$  és injectiva en  $\text{link}_{\Gamma'}(v)$ . En segon lloc, si  $v \in V'_2$  és tal que prové de  $v \in V_2$  amb  $a \notin \text{hl}_{\Gamma}(v)$ , aleshores  $\text{link}_{\Gamma'}(v)$  està format per una aresta  $(v_*, a, v)$  i un conjunt d'arestes en bijecció amb el subconjunt de  $\text{link}_{\Gamma}(v)$  corresponent de  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap \bar{A}$ . Per tant,  $\lambda'$  és injectiva en  $\text{link}_{\Gamma'}(v)$ . En tercer lloc, si  $v_* \in V'_3$ , aleshores  $\text{link}_{\Gamma'}(v_*)$  està format per una aresta  $(v, \bar{a}, v_*)$  i un conjunt d'arestes en bijecció amb  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap (A \setminus \{a\})$ .

Ara veurem que després d'aplicar les esmentades reduccions elementals, el graf que s'obté és reduït. D'una banda, si  $v \in V'_2$  és un dels vèrtexs considerats, la única obstrucció a la injectivitat de  $\lambda'$  en  $\text{link}_{\Gamma'}(v)$  és l'existència de dues arestes etiquetades per  $a$ . En  $\Gamma''$  només hi haurà una d'aquestes arestes i per tant  $\lambda''$  és injectiva en  $\text{link}_{\Gamma''}(v)$ . Per altra banda, considerem un vèrtex  $w_{u=v_*} \in V''$  que ha aparegut com a resultat de l'identificació dels vèrtexs  $u$  i  $v_*$  de  $\Gamma'$ . Com que  $u \in V'_1 \cup V'_2$  i  $v_* \in V'_3$ , aleshores tenim  $\text{hl}_{\Gamma'}(u) \setminus \{\bar{a}\} \subseteq (\bar{A} \cup \{a\} \setminus \{\bar{a}\})$  i  $\text{hl}_{\Gamma'}(v_*) \setminus \{\bar{a}\} \subseteq (A \setminus \{a\})$ . La identificació ha convertit les dues arestes etiquetades per  $\bar{a}$  de  $\text{link}_{\Gamma'}(u)$  i  $\text{link}_{\Gamma'}(v_*)$  en una de sola, i per tant  $\lambda''$  és injectiva en  $\text{link}_{\Gamma''}(w_{u=v_*})$ .

Això ens permet definir la següent partició dels vèrtexs de  $\Gamma''$ :

$$\begin{aligned} V_1'' &= V_1' \setminus \{v \in V_1' \mid \exists(u, \bar{a}, v) \in \text{link}_{\Gamma'}(v) \text{ amb } u \in V_2'\}, \\ V_2'' &= V_2' \setminus \{v \in V_2' \mid \exists(u, \bar{a}, v) \in \text{link}_{\Gamma'}(v) \text{ amb } u \in V_2'\}, \\ V_3'' &= V_3' \setminus \{v_* \in V_3' \mid \exists(u, a, v) \in \text{link}_{\Gamma'}(v) \text{ amb } u \in V_1' \cup V_2'\}, \\ V_4'' &= \{w_{u=v_*} \mid u \in (V_1' \setminus V_1'') \cup (V_2' \setminus V_2''), v_* \in V_3' \setminus V_3'' \text{ amb } (u, a, v) \in \text{link}_{\Gamma'}(v)\}. \end{aligned}$$

(c) En l'última fase aplicarem les podes elementals necessàries per obtenir  $\Gamma\sigma = \Gamma''' = \text{cc}(\Gamma'')$ . Per fer-ho identificarem quines són les fulles de  $\Gamma''$  i veurem que la poda d'aquestes fulles ens dóna un graf cíclicament reduït.

Començarem veient que les úniques fulles de  $\Gamma''$  són vèrtexs  $v \in V_2''$  amb  $\text{hl}_{\Gamma''}(v) = \{a\}$ . En primer lloc, si  $v \in V_1''$  aleshores  $\text{link}_{\Gamma''}(v)$  està en bijecció amb  $\text{link}_{\Gamma}(v)$  i per tant  $v$  no és una fulla. En segon lloc, si  $v_* \in V_3''$  aleshores  $\text{link}_{\Gamma''}(v_*)$  està format per una aresta etiquetada per  $\bar{a}$  i un conjunt d'arestes amb etiquetes en  $A \setminus \{a\}$  que es troba en bijecció amb les arestes corresponents a  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap (A \setminus \{a\})$ . Per tant  $v_*$  no és una fulla. En tercer lloc,  $w_{u=v_*} \in V_4''$  tampoc és una fulla doncs el seu link conté una aresta etiquetada per  $\bar{a}$  i les arestes que provenen del link de  $v_*$ . Finalment, resta considerar els vèrtexs  $v \in V_2''$ . Per construcció, tots aquests vèrtexs tenen  $a \in \text{hl}_{\Gamma''}(v)$  provinent de  $(u, a, v) \in \text{link}_{\Gamma''}(v)$  amb  $u \in V_3' \cup V_4''$ . Òbviament, si  $\text{hl}_{\Gamma''}(v) = \{a\}$ , aleshores  $v$  és una fulla, altrament tindrem  $|\text{link}_{\Gamma''}(v)| \geq 2$  i per tant  $v$  no serà una fulla. Els vèrtexs pels quals passa això provenen de vèrtexs  $v \in V_2$  amb  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \subseteq A$ , entre els quals podem distingir dos casos. Si es té  $a \notin \text{hl}_{\Gamma}(v)$ , aleshores  $v \in V_2'$  ja és una fulla (vegeu la figura 3.3). Si es té  $a \in \text{hl}_{\Gamma}(v)$ , aleshores  $v \in V_2''$  és una fulla després de la reducció elemental que identifica les dues arestes indicents a ell etiquetades per  $a$  (vegeu la figura 3.4). Finalment, si  $v \in V_2''$  prové d'un vèrtex  $v \in V_2$  amb  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ , aleshores aquestes arestes estaran en bijecció amb un subconjunt de  $\text{link}_{\Gamma''}(v)$  i per tant  $v$  no serà una fulla.

Així doncs, en aquesta última fase obtenim la partició dels vèrtexs de  $\Gamma'''$  donada per  $V_1''' = V_1''$ ,  $V_2''' = V_2'' \setminus \{v \in V_2'' \mid \text{hl}_{\Gamma''}(v) = \{a\}\}$ ,  $V_3''' = V_3''$  i  $V_4''' = V_4''$ .

El diagrama de la figura 3.5 representa el procés que acabem de descriure. Les fletxes marcades amb +1 signifiquen que apareixen nous vèrtexs, i les marcades amb -1 signifiquen que hi ha vèrtexs que desapareixen.

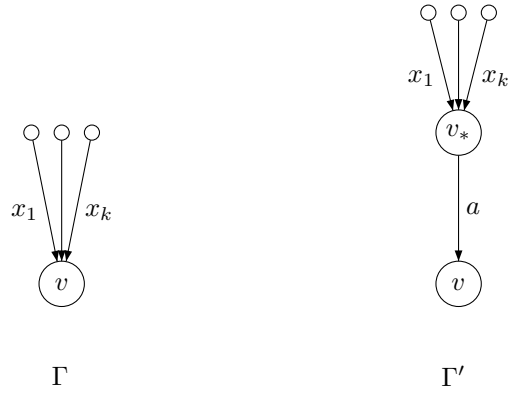


Figura 3.3: Fulles que apareixen en la fase **(a)**

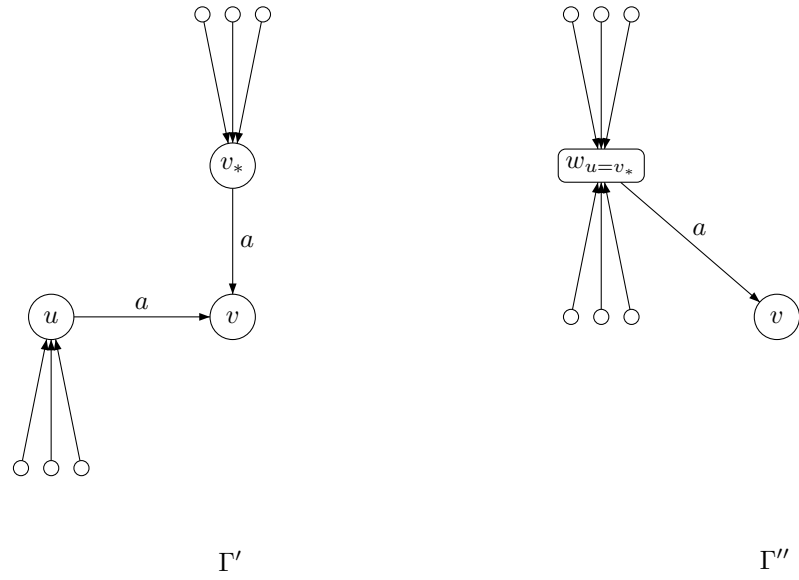


Figura 3.4: Fulles que apareixen en la fase **(b)**



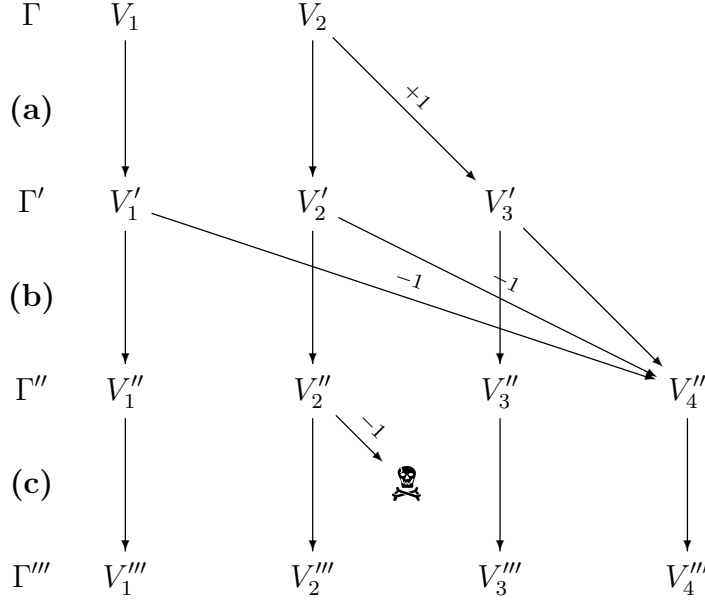


Figura 3.5: Particions dels conjunts de vèrtexs en el càlcul de  $\Gamma\sigma$

### 3.2 L'hipergraf de Whitehead

Donada una classe de conjugació  $[H] \in [S]$  de subgrups de  $F$  i  $\Gamma_{[H]}$  la seva representació gràfica, associarem al  $X$ -graf cíclicament reduït  $\Gamma_{[H]}$  un hipergraf capacitiu que ens permetrà controlar la variació de la mida del graf en aplicar-hi un automorfisme de Whitehead.

Donat un  $X$ -graf cíclicament reduït  $\Gamma$ , definim el seu *hipergraf de Whitehead*  $\mathfrak{W} = (V, E, c)$  de la manera següent. Com a hipergraf subjacent prenem l'hipergraf complet de  $2r$  vèrtexs amb  $V = X^\pm$ . Si  $e \in E$  és una hiperaresta de  $\mathfrak{W}$  definim la seva capacitat com

$$c(e) = |\{v \in V(\Gamma) \mid \text{hl}_\Gamma(v) = e\}|.$$

És a dir, com que  $e$  és un subconjunt de  $X^\pm$ , la capacitat  $c(e)$  serà equivalent al nombre de vèrtexs de  $\Gamma$  per als quals el conjunt format per les etiquetes de totes les arestes que hi entren és igual a  $e$ . Si tenim la representació gràfica  $\Gamma_{[H]}$  d'una classe de conjugació de  $[S]$ , aleshores denotarem per  $\mathfrak{W}_{[H]}$  el seu hipergraf de Whitehead.

Observem que, en el cas d'un grup cíclic generat per una paraula cíclicament

reduïda  $w$ , en el graf  $\Gamma_{[\langle w \rangle]}$  tots els vèrtexs tenen grau 2 i per tant  $\mathfrak{W}_{[\langle w \rangle]}$  és un graf. De fet, no és difícil comprovar que es té  $\mathfrak{W}_{[\langle w \rangle]} = \mathcal{W}_{[w]}$ .

**Proposició 3.1.** *Segui  $\Gamma$  un  $X$ -graf cíclicament reduït i  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  un automorfisme de Whitehead de tipus II. Si  $\mathfrak{W}$  és l'hipergraf de Whitehead de  $\Gamma$ , aleshores tenim*

$$|\Gamma\sigma| - |\Gamma| = \text{cap}_{\mathfrak{W}}(A) - \text{deg}_{\mathfrak{W}}(a).$$

*Demostració.* Posem  $\Gamma = (V, e)$ . Raonarem sobre el procediment descrit a la secció 3.1 per obtenir  $\Gamma\sigma$  a partir de  $\Gamma$ . En primer lloc observem que tenim

$$|\Gamma\sigma| - |\Gamma| = |\Gamma''| - |\Gamma| = (|\Gamma''| - |\Gamma'|) + (|\Gamma'| - |\Gamma|).$$

Ara calcularem aquestes tres diferències corresponents a cadascuna de les fases del procés descrit. En primer lloc, durant la fase **(a)** es crea un nou vèrtex  $v_*$  per cada vèrtex  $v \in V_2$ . Per tant,

$$|\Gamma'| - |\Gamma| = |V_2| = |\{v \in V \mid \text{hl}_{\Gamma}(v) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset\}|.$$

En segon lloc, en la fase **(b)** s'apliquen reduccions elementals per identificar parelles de vèrtexs de la forma  $u \in V'_1 \cup V'_2$  i  $v_* \in V'_3$  tals que  $(u, a, v) \in \text{link}_{\Gamma'}(v)$ , on  $v \in V'_2$  és el vèrtex que dona lloc a  $v_*$  en la fase **(a)**. Per tant, hi ha una d'aquestes identifications per cada vèrtex  $v \in V_2$  amb  $a \in \text{hl}_{\Gamma}(v)$ , i cadascuna d'aquestes identifications disminueix en un el nombre de vèrtexs en passar de  $\Gamma'$  a  $\Gamma''$ . Així doncs, tenim

$$|\Gamma''| - |\Gamma'| = -|\{v \in V_2 \mid a \in \text{hl}_{\Gamma}(v)\}|.$$

En tercer lloc, en la fase **(c)** es poden les fulles de  $\Gamma''$ . Com ja hem vist, aquestes provenen dels vèrtexs  $v \in V_2$  tals que  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \subseteq A$  i per tant

$$|\Gamma''| - |\Gamma''| = -|\{v \in V_2 \mid \text{hl}_{\Gamma}(v) \subseteq A\}|.$$

Usant aquestes tres equacions podem determinar quina és la contribució de cada vèrtex de  $V$  i escriure

$$|\Gamma\sigma| - |\Gamma| = \sum_{v \in V} \delta(v),$$

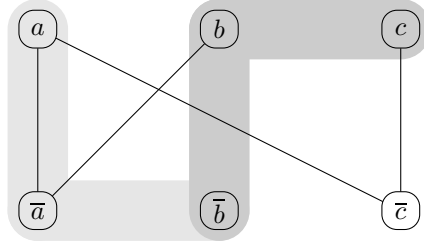


Figura 3.6: Hipergraf de Whitehead de l'exemple 3.3

a on

$$\delta(v) = \begin{cases} +1 & \text{si } v \in V_2 \text{ amb } a \notin \text{hl}_\Gamma(v) \text{ i } \text{hl}_\Gamma(v) \not\subseteq A, \\ -1 & \text{si } v \in V_2 \text{ amb } a \in \text{hl}_\Gamma(v) \text{ i } \text{hl}_\Gamma(v) \subseteq A, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que això és equivalent a

$$\delta(v) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \notin \text{hl}_\Gamma(v), \text{hl}_\Gamma(v) \cap A \neq \emptyset \text{ i } \text{hl}_\Gamma(v) \cap \bar{A} \neq \emptyset, \\ -1 & \text{si } a \in \text{hl}_\Gamma(v) \text{ i } \text{hl}_\Gamma(v) \subseteq A, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Finalment, recordant que

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\mathfrak{W}}(A) &= |\{v \in V \mid \text{hl}_\Gamma(v) \cap A \neq \emptyset \text{ i } \text{hl}_\Gamma(v) \cap \bar{A} \neq \emptyset\}|, \\ \text{deg}_{\mathfrak{W}}(a) &= |\{v \in V \mid a \in \text{hl}_\Gamma(v)\}|, \end{aligned}$$

obtenim el resultat desitjat.  $\square$

**Observació 3.2.** Observem que, de la mateixa manera com passava en el graf de Whitehead, si tenim  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_H(X)$  i  $x \in X^\pm \setminus \{a, \bar{a}\}$ , per tot  $\Gamma$  cíclicament reduït, el grau de  $x$  en l'hipergraf de Whitehead de  $\Gamma$  i  $\Gamma\sigma$  serà el mateix ja que en el procés descrit veiem que només es poden i identifiquen arestes etiquetades per  $a$  i  $\bar{a}$ .

**Exemple 3.3.** Sigui  $H = \langle cbaab\bar{c}, \bar{c}bac \rangle$  el subgrup cíclicament reduït de  $F(\{a, b, c\})$  de l'exemple 1.2. L'hipergraf  $\mathfrak{W}$  de la figura 3.6, on totes les hiperarestes que apareixen tenen capacitat 1, és l'hipergraf de Whitehead de

la classe de conjugació  $[H] \in [S]$  corresponent al  $X$ -graf cíclicament reduït de la figura 1.2. Denotarem aquest  $X$ -graf per  $\Gamma_{[H]}$ . Observem que tenim  $|\Gamma_{[H]}| = 6$ . A l'exemple 1.3 hem calculat la imatge de  $\Gamma_{[H]}$  per l'automorfisme  $\alpha = (\{a, b, \bar{b}, c\}, a) \in \mathbb{W}_{II}(\{a, b, c\})$ . Així doncs, el graf  $\Gamma_{[H]}\alpha$  és precisament el  $\Gamma_3$  de la figura 1.3 i per tant tenim  $|\Gamma_{[H]}\alpha| = 8$ . Observem que en  $\mathfrak{W}$  tenim  $\text{cap}(\{a, b, \bar{b}, c\}) = 5$  i  $\deg(a) = 3$ . Per tant podem comprovar que

$$|\Gamma_{[H]}\alpha| - |\Gamma_{[H]}| = 2 = \text{cap}(\{a, b, \bar{b}, c\}) - \deg(a).$$

### 3.3 Lemes tècnics

**Lema 3.4.** *Siguin  $\sigma = (A, a)$  un automorfisme de Whitehead de tipus II i  $B \subseteq X^\pm$  un subconjunt tals que  $A \cap B = \emptyset$  i  $\bar{a} \notin B$ . Aleshores, si  $\Gamma$  és un  $X$ -graf cíclicament reduït i  $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'$  són els hipergrafs de Whitehead de  $\Gamma$  i  $\Gamma\sigma$  respectivament, es té que*

$$\text{cap}_{\mathfrak{W}'}(B) \leq \text{cap}_{\mathfrak{W}}(B).$$

*Demostració.* Recordem que per definició de capacitat tenim

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\mathfrak{W}'}(B) &= \sum_{e \in E_{\mathfrak{W}'}(B, \bar{B})} c_{\mathfrak{W}'}(e) = \sum_{e \in E_{\mathfrak{W}'}(B, \bar{B})} |\{v \in V(\Gamma\sigma) \mid \text{hl}_{\Gamma\sigma}(v) = e\}| \\ &= |\{v \in V(\Gamma\sigma) \mid \text{hl}_{\Gamma\sigma}(v) \cap B \neq \emptyset \text{ i } \text{hl}_{\Gamma\sigma}(v) \cap \bar{B} \neq \emptyset\}|. \end{aligned}$$

Anàlogament, tenim

$$\text{cap}_{\mathfrak{W}}(B) = |\{v \in V(\Gamma) \mid \text{hl}_{\Gamma}(v) \cap B \neq \emptyset \text{ i } \text{hl}_{\Gamma}(v) \cap \bar{B} \neq \emptyset\}|.$$

Reseguint a l'inversa el procés descrit a la secció 3.1 per obtenir  $\Gamma\sigma = \Gamma''' = (V''', E''')$  a partir de  $\Gamma = (V, E)$ , veurem que per cada vèrtex  $v''' \in V'''$  tal que  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap B \neq \emptyset$  i  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap \bar{B} \neq \emptyset$ , existeix un vèrtex  $v \in V$  tal que  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap B \neq \emptyset$  i  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap \bar{B} \neq \emptyset$ , i a més l'aplicació  $v''' \mapsto v$  és injectiva.

En primer lloc, suposem que tenim  $v''' \in V_1'''$  complint les hipòtesis. Pel diagrama de la figura 3.5  $v'''$  prové de  $v \in V_1$  amb  $\text{hl}_{\Gamma}(v) = \text{hl}_{\Gamma'''}(v''')$ .

En segon lloc, suposem que tenim  $v''' \in V_2'''$ . Aleshores  $v'''$  prové d'un vèrtex  $v \in V_2$  i es satisfà que  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \setminus \{a\} \subseteq \text{hl}_{\Gamma}(v)$ . Per tant, com que  $a \notin B$ , si  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap B \neq \emptyset$ , aleshores  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap B \neq \emptyset$ . Per altra banda, com que  $v \in V_2$  tenim  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$  i per tant  $\text{hl}_{\Gamma}(v) \cap \bar{B} \neq \emptyset$  ja que

$A \subseteq \overline{B}$ .

En tercer lloc, suposem que tenim  $v''' \in V_3'''$ . Aquest cas no es pot donar, doncs es té  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \subseteq A \cup \{\bar{a}\}$  i per tant sempre tindrem  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap B = \emptyset$ .

En últim lloc, suposem que tenim  $v''' \in V_4'''$  complint les hipòtesis. Aleshores ha de ser  $v''' = w_{u'=v_*}$  amb  $u' \in V_1' \cup V_2'$  i  $v_* \in V_3'$ . D'aquesta manera, la part de  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''')$  corresponent a  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap (A \setminus \{a\})$  prové de  $\text{hl}_{\Gamma'}(v_*)$  i la part corresponent a  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap (\overline{A} \setminus \{\bar{a}\})$  prové de  $\text{hl}_{\Gamma'}(u')$ . Per tant, si  $\text{hl}_{\Gamma'''}(v''') \cap B \neq \emptyset$ , necessàriament tindrem  $\text{hl}_{\Gamma'}(u') \cap B \neq \emptyset$ . A més, tindrem  $\bar{a} \in \text{hl}_{\Gamma'}(u')$  i per tant  $\text{hl}_{\Gamma'}(u') \cap \overline{B} \neq \emptyset$ . Així doncs, ha d'existir  $u \in V_1 \cup V_2$  satisfent les condicions desitjades i per tant podem prendre  $v = u$ .

Observem que en cadascun dels casos considerats, vèrtexs de  $\Gamma'''$  diferents provenen de vèrtexs de  $\Gamma$  diferents i per tant l'aplicació  $v''' \mapsto v$  és injectiva. Això implica, d'acord amb les expressions obtingudes per  $\text{cap}_{\mathfrak{W}}(B)$  i  $\text{cap}_{\mathfrak{W}'}(B)$ , que es satisfà la desigualtat desitjada.  $\square$

**Lema 3.5.** *Siguin  $\sigma = (A, a)$  i  $\tau = (B, b)$  dos automorfismes de Whitehead de tipus II tals que  $A \cap B = \emptyset$  i  $\bar{a} \notin B$ . Aleshores, per a qualsevol  $X$ -graf cíclicament reduït  $\Gamma$  es compleix que  $|\Gamma\sigma\tau| - |\Gamma\sigma| \leq |\Gamma\tau| - |\Gamma|$ .*

*Demostració.* Siguin  $\mathfrak{W}$  i  $\mathfrak{W}'$  els hipergrafs de Whitehead de  $\Gamma$  i  $\Gamma\sigma$  respectivament. Aleshores, per la proposició 3.1 tenim

$$\begin{aligned} |\Gamma\tau| - |\Gamma| &= \text{cap}_{\mathfrak{W}}(B) - \text{deg}_{\mathfrak{W}}(b) \\ |\Gamma\sigma\tau| - |\Gamma\sigma| &= \text{cap}_{\mathfrak{W}'}(B) - \text{deg}_{\mathfrak{W}'}(b) \end{aligned}$$

Per l'observació 3.2 tenim  $\text{deg}_{\mathfrak{W}}(b) = \text{deg}_{\mathfrak{W}'}(b)$ . Per tant, aplicant el lema 3.4 obtenim el resultat desitjat.  $\square$

**Observació 3.6.** De fet, la desigualtat del lema 3.5 es pot demostrar que és una igualtat, obtinguent un resultat anàleg al lema 2.5. No obstant, en aquest cas la demostració és més pesada i no la donem ja que pels nostres propòsits aquesta desigualtat és suficient, d'acord amb l'observació 2.11.

**Lema 3.7.** *Siguin  $\mathfrak{G} = (V, E, c)$  un hipergraf capacitiu complet amb 4 vèrtexs i el conjunt d'hiperarestes particionat segons la seva cardinalitat  $E = E_2 \cup E_3 \cup E_4$ ,  $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, F_2\}$  una partició de  $E_2$  en conjunts d'hiperarestes disjunts i  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$  dos nombres no negatius tals que*

$$\sum_{e \in E_2 \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E_2 \setminus F_2} c(e) + 2 \sum_{e \in E_3} c(e) + 2 \sum_{e \in E_4} c(e) - p_1 - p_2 < 0.$$

Aleshores, per a qualsevol aplicació  $f : F_1 \cup F_2 \longrightarrow V$  que satisfaci  $f(e) \in e$ , existeixen  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $e \in F_\alpha$  de manera que

$$\deg(f(e)) - p_\alpha < 0.$$

*Demostració.* Com a la demostració del lema 2.6, observem que  $|F_1 \cup F_2| = |V| = 4$  i per tant distingim dos casos segons si l'aplicació  $f$  és o no bijectiva. Suposem, en primer lloc, que  $f$  és bijectiva. Per a cada vèrtex  $v \in V$  podem definir l'índex  $\alpha(v) \in \{1, 2\}$  de manera que  $f^{-1}(v) \in F_{\alpha(v)}$ . Usant aquesta notació, considerem

$$S = \sum_{v \in V} (\deg(v) - p_{\alpha(v)}).$$

Si  $S$  és negatiu, aleshores algun dels sumands ha de ser negatiu, diguem  $\deg(v) - p_{\alpha(v)} < 0$ . Prenent  $\alpha = \alpha(v)$  i  $e = f^{-1}(v)$  haurem acabat. Vegem doncs que  $S < 0$ . Per la bijectivitat de  $f$  tenim

$$\sum_{v \in V} p_{\alpha(v)} = 2p_1 + 2p_2,$$

i per la definició de grau tenim

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \sum_{e \in E_2} c(e) + 3 \sum_{e \in E_3} c(e) + 4 \sum_{e \in E_4} c(e).$$

Substituint a la definició de  $S$  obtenim

$$S = 2 \left( \sum_{e \in E_2} c(e) + 2 \sum_{e \in E_3} c(e) + 2 \sum_{e \in E_4} c(e) - p_1 - p_2 \right) - \sum_{e \in E_3} c(e).$$

Si ara hi sumem i restem la quantitat  $2 \sum_{e \in F_0} c(e)$  i reagrupem els termes de la suma adequadament tenim que

$$S = 2 \left( \sum_{e \in E_2 \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E_2 \setminus F_2} c(e) + 2 \sum_{e \in E_3} c(e) + 2 \sum_{e \in E_4} c(e) - p_1 - p_2 \right) - 2 \sum_{e \in F_0} c(e) - \sum_{e \in E_3} c(e).$$

Així doncs, tenim  $S < 0$  ja que el primer terme és negatiu per hipòtesi i el segon i tercer són menors o iguals que zero perquè  $c(e) \geq 0$  per a tot  $e \in E$ .

Suposem ara que  $f$  no és bijectiva i prenguem  $v \in V \setminus \text{Im } f$ . Aleshores, per tot  $i \in \{0, 1, 2\}$ , existeixen arestes  $e_i \in F_i$  tals que  $v \in e_i$ . A més, també existeixen arestes  $e'_1, e'_2 \in E_3$  de manera que  $f(e_i) \notin e'_i$  per  $i = 1, 2$ . Considerem la suma

$$S = (\deg(f(e_1)) - p_1) + (\deg(f(e_2)) - p_2).$$

Igual que en el cas anterior, si veiem que  $S < 0$  llavors algun dels sumands és negatiu i hem acabat. Observem que tenim

$$\begin{aligned} \deg(f(e_1)) + \deg(f(e_2)) &= \sum_{e \in E_2 \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E_2 \setminus F_2} c(e) - 2c(e_0) \\ &\quad + 2 \sum_{e \in E_3} c(e) - c(e'_1) - c(e'_2) + 2 \sum_{e \in E_4} c(e). \end{aligned}$$

Per tant, substituint a  $S$  i sumant i restant termes obtenim

$$\begin{aligned} S &= \left( \sum_{e \in E_2 \setminus F_1} c(e) + \sum_{e \in E_2 \setminus F_2} c(e) + 2 \sum_{e \in E_3} c(e) + 2 \sum_{e \in E_4} c(e) - p_1 - p_2 \right) \\ &\quad - 2c(e_0) - c(e'_1) - c(e'_2) < 0, \end{aligned}$$

tal com volíem.  $\square$

**Lema 3.8.** *Siguin  $\sigma = (A, a), \tau = (B, b) \in \mathbb{W}_H(X)$  amb  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \not\subseteq B$ ,  $B \not\subseteq A$  i  $\Gamma$  un  $X$ -graf cíclicament reduït de manera que  $|\Gamma\sigma| \leq |\Gamma|$  i  $|\Gamma\tau| \leq |\Gamma|$  amb almenys una de les dues desigualtats estrictes. Aleshores, existeixen un conjunt  $C \in \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cup B\}$  i una lletra  $c \in C \cap \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}$  de manera que per a  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_H(X)$  es té  $|\Gamma\theta| < |\Gamma|$ .*

*Demostració.* En primer lloc, si tenim  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ , aleshores ampliïm  $X$  afegint un nou generador  $z$  de manera que tinguem  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z, \overline{z}\}$ . Observem que  $\sigma$  i  $\tau$  deixin  $z$  invariant i que  $z$  no apareix en  $[w]$  ni en les seves imatges per  $\sigma$  i  $\tau$ . Sigui  $\mathfrak{W}$  l'hipergraf de Whitehead de  $\Gamma$  i  $\mathfrak{W}_{\mathcal{P}}$  el seu conglomerat respecte la partició  $\mathcal{P} = \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$  de  $X^\pm$  en conjunts disjunts no buits. Considerem la partició de les hiperarestes de  $\mathfrak{W}_{\mathcal{P}}$  segons la seva cardinalitat,

$$E(\mathfrak{W}_{\mathcal{P}}) = E_2 \cup E_3 \cup E_4,$$

i prenem la següent partició de  $E_2$  en conjunts de dues arestes disjunes

$$\begin{aligned} F_0 &= \{\{v_{A \cap B}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}, \{v_{A \cap \overline{B}}, v_{\overline{A} \cap B}\}\}, \\ F_1 &= \{e_a, e_{\overline{a}}\}, \\ F_2 &= \{e_b, e_{\overline{b}}\}, \end{aligned}$$

a on hem usat les definicions següents

$$\begin{aligned} e_a &= \{v_{A \cap B}, v_{A \cap \overline{B}}\}, & e_{\overline{a}} &= \{v_{\overline{A} \cap B}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}, \\ e_b &= \{v_{A \cap B}, v_{\overline{A} \cap B}\}, & e_{\overline{b}} &= \{v_{A \cap \overline{B}}, v_{\overline{A} \cap \overline{B}}\}. \end{aligned}$$

Agafant  $p_1 = \deg_{\mathfrak{M}}(a)$  i  $p_2 = \deg_{\mathfrak{M}}(b)$  veurem que  $\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}$  compleix les hipòtesis del lema 3.7. D'entrada, per hipòtesi tenim que

$$|\Gamma\sigma| - |\Gamma| + |\Gamma\tau| - |\Gamma| < 0.$$

Per la proposició 3.1, això és equivalent a

$$\text{cap}_{\mathfrak{M}}(A) - \deg_{\mathfrak{M}}(a) + \text{cap}_{\mathfrak{M}}(B) - \deg_{\mathfrak{M}}(b) < 0.$$

Observem que per la definició de capacitat i del conglomerat tenim

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\mathfrak{M}}(A) &= \sum_{e \in E_2 \setminus F_1} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e) + \sum_{e \in E_3} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e) + \sum_{e \in E_4} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e), \\ \text{cap}_{\mathfrak{M}}(B) &= \sum_{e \in E_2 \setminus F_2} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e) + \sum_{e \in E_3} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e) + \sum_{e \in E_4} c_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(e). \end{aligned}$$

Per tant, podem aplicar el lema 3.7 a la funció  $f : F_1 \cup F_2 \rightarrow V(\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})$  definida per  $f(e_x) = P \in \mathcal{P}$  de manera que  $x \in P$ . Així doncs, existeixen  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $e_c \in F_{\alpha}$  de manera que

$$\deg_{\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}}(f(e_c)) - p_{\alpha} < 0.$$

Si  $f(e_c) = v_C$ , això implica que tenim

$$\text{cap}_{\mathfrak{M}}(C) - \deg_{\mathfrak{M}}(c) < 0,$$

i per tant  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  és l'automorfisme que volíem, llevat del cas en el qual tenim  $C = \overline{A} \cap \overline{B}$ . En aquest últim cas prendrem l'automorfisme



$\bar{\theta} = (\bar{C}, \bar{c}) = (A \cup B, \bar{c})$ . Observem que per (R7) tenim  $|\Gamma\bar{\theta}| = |\Gamma\theta\gamma_{\bar{c}}| = |\Gamma\theta| < |\Gamma|$  tal com volem.  $\square$

### 3.4 Solució del segon problema de Whitehead

En aquesta secció presentem les solucions per les diferents variants del segon problema de Whitehead. Les tres primeres d'aquestes solucions van aparèixer per primer cop en [Ger84]. La solució de la quarta variant es troba implícita en [Kal92] malgrat que no es menciona explícitament.

#### 3.4.1 Classes de conjugació de subgrups

El segon problema de Whitehead és  $\text{EO}([S], \text{Out}(F))$ , l'equivalència orbital de classes de conjugació de subgrups finitament generats de  $F$  amb l'acció dels automorfismes (extern) de  $F$ . El resoldrem aplicant el teorema 1.11.

En primer lloc, veurem que es compleix la propietat (i). Si tenim una classe de conjugació  $[H] \in [S]$ , aleshores denotem per  $\Gamma_{[H]}$  la seva representació gràfica en forma de  $X$ -graf. A més, existeix una bijecció entre  $X$ -grafs connexos cíclicament reduïts i classes de conjugació de  $[S]$ . Com que tenim  $|[H]| = |\Gamma_{[H]}|$  per definició, aleshores està clar que  $[S]$  amb aquesta funció de longitud té tots els estrats finits, doncs donat un número de vèrtexs només existeixen una quantitat finita de  $X$ -grafs possibles amb aquests vèrtexs. Per altra banda, també podem llistar de manera algorísmica tots els  $X$ -grafs connexos cíclicament reduïts amb un nombre de vèrtexs determinat.

La propietat (ii) es compleix usant els generadors de Whitehead per a  $\text{Aut}(F)$ . Finalment, pel punt (iii) veurem que es compleix la propietat de reducció de pics. Observem que la proposició 3.1 i els lemes 3.5 i 3.8 són els anàlegs per l'acció dels automorfismes de Whitehead sobre  $X$ -grafs cíclicament reduïts de la proposició 2.2 i els lemes 2.5 i 2.7 respectivament. Aleshores, per l'observació 2.11 queda automàticament demostrat el següent lema de reducció de pics per classes de conjugació de subgrups finitament generats de  $F$ .

**Lema 3.9.** *Siguin  $\Gamma_0$  un  $X$ -graf cíclicament reduït i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  amb  $\Gamma_1 = \Gamma_0\sigma$  i  $\Gamma_2 = \Gamma_0\tau$  de manera que  $|\Gamma_1| \leq |\Gamma_0|$  i  $|\Gamma_2| \leq |\Gamma_0|$  amb almenys una de les desigualtats estricta. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$$

$$(b) |\Gamma_1 \rho_1 \cdots \rho_i| < |\Gamma_0| \text{ per a } 0 < i < k$$

$$(c) \text{ Si } x \in X \text{ és invariant per } \sigma \text{ i } \tau, \text{ aleshores també ho és per } \rho_i \text{ amb } 1 \leq i \leq k.$$

Per tant podem aplicar el teorema 1.11 per veure que  $\mathbf{EO}([S], \text{Aut}(F))$  és decidible. A més podem usar l'algorisme de Whitehead per resoldre'l.

### 3.4.2 Subgrups

Per resoldre el problema d'equivalència orbital  $\mathbf{EO}(S, \text{Aut}(F))$  podem usar la solució que hem donat per a  $\mathbf{EO}([S], \text{Aut}(F))$  d'una manera semblant a com ho hem fet a la secció 2.5.2.

Donats dos subgrups de  $F$  finitament generats  $H_1, H_2 \in S$ , considerem les seves representacions gràfiques  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Aleshores prenem les reduccions cíclics d'aquests  $X$ -grafs

$$\Gamma'_1 = \text{cc}(\Gamma_1) = \Gamma_1 \gamma_{u_1} \quad \Gamma'_2 = \text{cc}(\Gamma_2) = \Gamma_2 \gamma_{u_2}$$

per a unes certes paraules  $u_1, u_2 \in F$ . Aleshores preguntem a l'algorisme de Whitehead per  $\mathbf{EO}([S], \text{Aut}(F))$  si els  $X$ -grafs cíclicament reduïts  $\Gamma'_1$  i  $\Gamma'_2$  pertanyen a la mateixa òrbita. En cas afirmatiu retornem SÍ, altrament retornem NO. Aquest algorisme és correcte per la mateixa raó que l'algorisme donat a la secció 2.5.2.

### 3.4.3 Tuples de classes de conjugació de subgrups

Per resoldre la variant del segon problema de Whitehead corresponent a  $\mathbf{EO}([S]^n, \text{Aut}(F))$  podem utilitzar la mateixa aproximació que hem usat a la secció 2.5.3 per resoldre  $\mathbf{EO}([F]^n, \text{Aut}(F))$ .

Donada una tupla  $[\mathbf{H}] \in [S]^n$  amb  $[\mathbf{H}] = ([H_1], \dots, [H_n])$ , podem construir una tupla de  $X$ -grafs connexos cíclicament reduïts  $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_{[H_1]}, \dots, \Gamma_{[H_n]})$  que denominarem representació gràfica de  $[\mathbf{H}]$ . Amb aquesta representació gràfica hi associem l'hipergraf de Whitehead

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \cdots + \mathfrak{W}_n,$$

corresponent a l'hipergraf suma dels hipergrafs de Whitehead  $\mathfrak{W}_i$  de  $\Gamma_{[H_i]}$ , amb  $1 \leq i \leq n$ . Emprant unes demostracions mimètiques a les de la secció 2.5.3 podem demostrar els següents resultats anàlegs a la proposició ?? i els lemes 3.5 i 3.8.

**Proposició 3.10.** *Sigui  $[\mathbf{H}] \in [S]^n$  i  $\sigma = (A, a) \in \mathbb{W}_{II}(X)$ . Si  $\mathfrak{W}$  és l'hipergraf de Whitehead de  $[\mathbf{H}]$ , aleshores es té*

$$|[\mathbf{H}]\sigma| - |[\mathbf{H}]| = \text{cap}_{\mathfrak{W}}(A) - \text{deg}_{\mathfrak{W}}(a).$$

**Lema 3.11.** *Siguin  $\sigma = (A, a)$  i  $\tau = (B, b)$  dos automorfismes de Whitehead de tipus II tals que  $A \cap B = \emptyset$  i  $\bar{a} \notin B$ . Aleshores, per a qualsevol tupla de classes d'equivalència de subgrups finitament generats de  $F$ ,  $[\mathbf{H}] \in [S]^n$ , es compleix que  $|[\mathbf{H}]\sigma\tau| - |[\mathbf{H}]\sigma| \leq |[\mathbf{H}]\tau| - |[\mathbf{H}]|$ .*

**Lema 3.12.** *Siguin  $\sigma = (A, a), \tau = (B, b) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  amb  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \not\subseteq B$ ,  $B \not\subseteq A$  i  $[\mathbf{H}] \in [S]^n$  de manera que  $|[\mathbf{H}]\sigma| \leq |[\mathbf{H}]|$  i  $|[\mathbf{H}]\tau| \leq |[\mathbf{H}]|$  amb almenys una de les dues desigualtats estrictes. Aleshores, existeixen un conjunt  $C \in \{A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cup B\}$  i una lletra  $c \in C \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$  de manera que per a  $\theta = (C, c) \in \mathbb{W}_{II}(X)$  es té  $|[\mathbf{H}]\theta| < |[\mathbf{H}]|$ .*

Així doncs, d'acord amb l'observació 2.11, el conjunt  $[S]^n$  amb l'acció dels automorfismes de Whitehead satisfà la propietat de reducció de pics i per tant, pel teorema 1.11, el problema  $\text{EO}([S]^n, \text{Aut}(F))$  és resoluble.

### 3.4.4 Tuples de subgrups

De la mateixa manera com passa amb el primer problema de Whitehead, la solució de la variant  $\text{EO}(S^n, \text{Aut}(F))$  del segon problema de Whitehead corresponent a la variant  $\text{EO}(F^n, \text{Aut}(F))$  del primer és la que requereix tècniques més elaborades.

Donats dos subgrups finitament generats de  $F$ ,  $H = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$  i  $H' = \langle w'_1, \dots, w'_{n'} \rangle$ , definim el subgrup de  $F$  donat per

$$\langle H, H' \rangle = \langle w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_{n'} \rangle.$$

Aquest és el subgrup més petit de  $F$  que conté  $H$  i  $H'$ . Aquest grup s'anomena el *producte lliure* de  $H$  i  $H'$ , denotat per  $H * H'$ , quan el rang de  $\langle H, H' \rangle$  és igual a la suma dels rangs de  $H$  i  $H'$ . És fàcil veure que si  $(\Gamma, v_0)$  i  $(\Gamma', v'_0)$

són les representacions gràfiques de  $H$  i  $H'$  respectivament, la representació gràfica de  $\langle H, H' \rangle$  es pot obtenir prenent el  $X$ -graf que s'obté d'identificar els vèrtexs  $v_0$  i  $v'_0$  de  $\Gamma$  i  $\Gamma'$  i reduir el graf resultant. Com a vèrtex distingit prendrem el vèrtex resultant de la identificació de  $v_0$  i  $v'_0$ . Si no cal fer cap reducció aleshores és que tenim  $\langle H, H' \rangle = H * H'$ .

**Lema 3.13.** *Siguin  $\mathbf{H}_0 \in S^n$  una tupla de  $n$  subgrups finitament generats de  $F$  i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  automorfismes de Whitehead tals que  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0\sigma$  i  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0\tau$ . Suposem que tenim  $|\mathbf{H}_1| \leq |\mathbf{H}_0|$  i  $|\mathbf{H}_2| \leq |\mathbf{H}_0|$  amb almenys una de les desigualtat estrictes. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \quad \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k,$$

$$(b) \quad |\mathbf{H}_1\rho_1 \cdots \rho_i| < |\mathbf{H}_0| \text{ per a } 0 < i < k.$$

*Demostració.* Posem  $\mathbf{H}_i = (H_{i,1}, \dots, H_{i,n})$  per  $i = 0, 1, 2$ . Sigui  $F'$  el grup lliure de rang  $r+1$  amb base  $X' = X \cup \{z\}$ . Com que tenim  $F \leq F'$ , aleshores  $H_{i,j} \leq F'$  per  $i = 0, 1, 2$  i  $1 \leq j \leq n$ . A més,  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X')$  pensant-los com a automorfismes que fixen  $z$ . Considerem els següents subgrups de  $F'$  donats per

$$H_i = H_{i,1} * zH_{i,2}\bar{z} * \cdots * z^{n-1}H_{i,n}\bar{z}^{n-1},$$

amb  $i = 0, 1, 2$ . A la figura 3.7 es pot veure la representació gràfica d'un dels  $H_i$ , amb punt base  $v_{i,1}$ , on  $(\Gamma_{i,j}, v_{i,j})$  són les representacions gràfiques dels subgrups  $H_{i,j}$ . Observem que el fet que  $z$  no aparegui en els  $X$ -grafs  $\Gamma_{i,j}$  garanteix que la construcció és cíclicament reduïda i per tant  $H_i$  és efectivament un producte lliure. Observem també que de la figura es desprèn que  $|H_i| = |\mathbf{H}_i|$ . Per tant es compleix que  $|H_1| \leq |H_0|$  i  $|H_2| \leq |H_0|$  amb almenys una de les desigualtats estrictes. A més, els representants gràfics dels  $H_i$  són cíclicament reduïts. Aleshores, per hipòtesi tenim que  $[H_1] = [H_0]\sigma$  i  $[H_2] = [H_0]\tau$ , ja que  $\sigma$  i  $\tau$  deixen  $z$  invariant. Així doncs, estem en condicions d'aplicar el lema 3.9 a la representació gràfica de  $[H_0]$  i els automorfismes de Whitehead  $\sigma$  i  $\tau$ . Això ens dóna el resultat desitjat.  $\square$

Hem vist doncs solucions per les quatre variants del segon problema de Whitehead. Convé remarcar que és possible recuperar com a corol·lari d'aquestes les solucions obtingudes en el capítol 2 observant que les paraules  $w \in F$  es troben en bijecció amb els grups cíclics  $\langle w \rangle \in S$ .

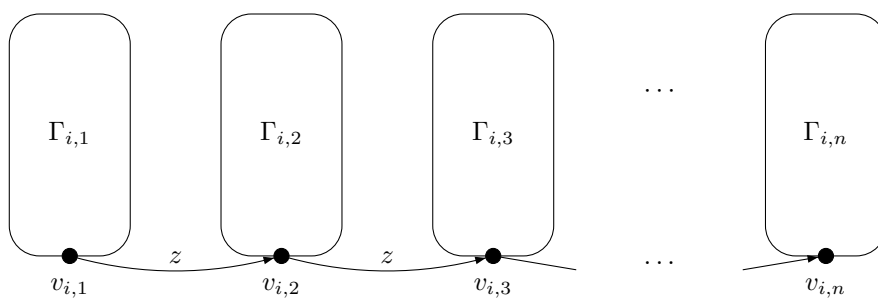


Figura 3.7: Representació gràfica del subgrup  $H_i$



# Capítol 4

## Aplicacions

En aquest capítol presentem tres aplicacions dels resultats i tècniques dels capítols anteriors. La primera, corresponent a la secció 4.1, consisteix en veure que les relacions de McCool donen una presentació completa per a  $\text{Aut}(F)$  amb  $\mathbb{W}(X)$  com a conjunt de generadors. La segona la donem a la secció 4.2 i consisteix en provar la decidibilitat del problema  $\text{EO}([F], A)$  per a una família infinita de subgrups  $A$  de  $\text{Aut}(F)$ . Acabem amb la secció 4.3 on repassem l'ús de les tècniques emprades en aquest treball en l'estudi de la complexitat computacional dels problemes de Whitehead.

### 4.1 Una presentació per a $\text{Aut}(F)$

A continuació demostrarem que els automorfismes de Whitehead  $\mathbb{W}(X)$  juntament amb les relacions de McCool (R1) – (R6) i les relacions del subgrup finit de  $\text{Aut}(F)$  format per totes les permutacions de  $\mathbb{W}_I(X)$  donen una presentació del grup d'automorfismes de  $F$ . Aquest resultat és degut a McCool i va aparèixer per primer cop a [McC74]. Per fixar notació, denotarem per  $R_I$  el conjunt de totes les relacions que satisfan els automorfismes de  $\mathbb{W}_I(X)$ . També denotarem per  $R_{II}$  el conjunt de totes les relacions de la forma (R1) – (R6) satisfetes pels automorfismes de  $\mathbb{W}(X)$ . Posarem  $R = R_I \cup R_{II}$ .

**Teorema 4.1.** *El grup  $\text{Aut}(F)$  admet una presentació de la forma  $\langle \mathbb{W}(X) | R \rangle$ .*

*Demostració.* Com ja hem comentat, és ben sabut que els automorfismes de Whitehead  $\mathbb{W}(X)$  són un conjunt de generadors per a  $\text{Aut}(F)$ . A més, tal com es demostra a l'apèndix A, aquests automorfismes satisfan totes les relacions de la forma (R1) – (R6). Així doncs, només cal veure que qualsevol

relació entre els elements de  $\mathbb{W}(X)$  és conseqüència de les relacions de  $R$ . Siguin doncs  $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in \mathbb{W}(X)$  tals que  $\sigma_1 \cdots \sigma_t = id$ . Prenem la tupla formada pels  $r$  generadors de  $F$ ,  $\mathbf{w} = (x_1, \dots, x_r)$  i definim  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}\sigma_1 \cdots \sigma_i$  per  $0 \leq i \leq t$ . Òbviament tenim  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_n$ . Aleshores definim  $l = \max \{|\mathbf{w}_i| \mid 0 \leq i \leq t\} \geq r$  i  $j = \max \{i \mid |\mathbf{w}_i| = l\}$ . Raonarem per inducció sobre la parella  $(l, j)$  amb l'ordre lexicogràfic. En primer lloc, considerem el cas base  $l = r$ . En aquest cas, necessàriament hem de tenir  $\sigma_i \in \mathbb{W}_I(X)$  per  $1 \leq i \leq t$ , doncs cap dels automorfismes altera la longitud de  $\mathbf{w}$ . Per tant, l'equació  $\sigma_1 \cdots \sigma_t = id$  és conseqüència de les relacions de  $R_I$ . Ara suposem que tenim  $l > r$  i  $0 < j < n$ . Llavors  $|\mathbf{w}_{i-1}| \leq |\mathbf{w}_i| > |\mathbf{w}_{i+1}|$ . Per tant, pel lema 2.17, existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  tals que  $\sigma_i \sigma_{i+1} = \rho_1 \cdots \rho_k$  és conseqüència de les relacions de  $R_{II}$  (vegeu l'observació 2.12) i a més  $|\mathbf{w}_{i-1}\rho_1 \cdots \rho_j| \leq |\mathbf{w}_i|$  per  $1 \leq j \leq k$ . Substituint aquesta relació en la relació original tenim que  $\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}\rho_1 \cdots \rho_k \sigma_{i+1} \cdots \sigma_t = id$ . Aquesta nova relació té els paràmetres  $l'$  i  $j'$  de manera que  $(l', j') < (l, j)$ . Així doncs, per hipòtesi d'inducció, la nova relació és conseqüència de les relacions de  $R$  i per tant podem concloure que la relació  $\sigma_1 \cdots \sigma_t = id$  és conseqüència de les relacions de  $R$  tal com volíem.  $\square$

## 4.2 Acció per estabilitzadors

Els problemes de Whitehead són problemes d'equivalència orbital de la forma  $\mathbf{EO}(M, \text{Aut}(F))$ , on  $M$  és algun conjunt derivat del grup lliure sobre el qual podem definir una acció de  $\text{Aut}(F)$ . És a dir, la família formada pels problemes de Whitehead apareix quan considerem l'equivalència orbital amb el segon argument fix i prenem diverses opcions pel primer argument. En aquesta secció ens plantegem la pregunta de què passa si fixem algun dels  $M$  dels problemes de Whitehead i variem el segon argument de  $\mathbf{EO}(M, G)$ . En particular, provarem que el problema és decidible amb  $M = [F]$  i  $G$  un subgrup qualsevol d'una família infinita de subgrups de  $\text{Aut}(F)$ .

Donada una paraula  $w \in F$ , l'estabilitzador de  $w$  és el subgrup de  $\text{Aut}(F)$  donat per

$$\text{Stab}(w) = \{\alpha \in \text{Aut}(F) \mid w = w\alpha\}.$$

És a dir, tots els automorfismes que fixen la paraula  $w$ . De la mateixa manera, donat un subgrup finitament generat de  $F$ ,  $H = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ , definim el seu



estabilitzador com

$$Stab(H) = \{\alpha \in Aut(F) \mid w = w\alpha, w \in H\}.$$

Això és, els automorfismes que fixen totes les paraules de  $H$ . És fàcil veure que

$$Stab(H) = Stab(w_1) \cap \dots \cap Stab(w_n) = Stab(w_1, \dots, w_n),$$

on l'estabilitzador d'una tupla de paraules es defineix de la manera òbvia. Tots aquests estabilitzadors són subgrups de  $Aut(F)$  i d'acord amb un teorema de McCool [McC75] són finitament presentats.

Donats un subgrup de  $F$  finitament generat  $H = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$  i dues paraules cícliques  $[u], [v] \in [F]$ , un es pot preguntar si existeix un automorfisme  $\alpha \in Aut(F)$  tal que fixi totes les paraules de  $H$  i envii la paraula cíclica  $[u]$  a  $[v]$ . Amb la notació introduïda fins ara, aquest és el següent problema d'equivalència orbital:  $EO([F], Stab(H))$ . Malgrat que sabem que el grup d'automorfismes  $Stab(H)$  és finitament presentat, diferents subgrup  $H$  poden donar presentacions diferents. Per tant, si volguéssim resoldre de manera general el problema  $EO([F], Stab(H))$  per un  $H$  arbitrari emprant la tècnica de reducció de pics tal com hem fet fins ara, seria necessari veure que tots els possibles conjunts de generadors que dona el teorema de McCool satisfan la propietat de reducció de pics.

No obstant, existeix una solució pel problema  $EO([F], Stab(H))$  consistent en reduir-lo a una nova variant del primer problema de Whitehead que anomenarem *mixta*. Suposem que ens donen una instància de  $EO([F], Stab(H))$  consistent en una parella de paraules cícliques  $([u], [v])$  per les quals volem determinar si existeix un automorfisme  $\alpha \in Stab(H)$  de manera que  $[v] = [u]\alpha$ . El que farem serà resoldre el problema equivalent consistent en determinar si existeix un automorfisme  $\alpha \in Aut(F)$  tal que  $w_i = w_i\alpha$  per  $1 \leq i \leq n$  i  $[v] = [u]\alpha$ . La primera condició ens assegura que en realitat tenim  $\alpha \in Stab(H)$  i la segona que  $\alpha$  compleix la propietat desitjada. Des del punt de vista d'equivalència orbital, aquest problema equivalent resulta ser una instància del problema  $EO(F^n \times [F], Aut(F))$  amb l'acció diagonal de  $Aut(F)$  sobre  $F^n \times [F]$ .

A continuació demostrarem que el problema  $EO(F^n \times [F], Aut(F))$  és resoluble mitjançant la tècnica de reducció de pics i, gràcies a la reducció que hem presentat, obtindrem com a corol·lari la resolubilitat de  $EO([F], Stab(H))$  per a qualsevol subgrup finitament generat  $H$  de  $F$ .

**Lema 4.2.** *Siguin  $\mathbf{w}_0 \in F^n$  una tupla de paraules de  $F$ ,  $[v_0] \in [F]$  una paraula cíclica i  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X)$  automorfismes de Whitehead. Supposem que tenim  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0\sigma$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_0\tau$ ,  $[v_1] = [v_0]\sigma$  i  $[v_2] = [v_0]\tau$  amb  $|\mathbf{w}_1| + |[v_1]| \leq |\mathbf{w}_0| + |[v_0]|$  i  $|\mathbf{w}_2| + |[v_2]| \leq |\mathbf{w}_0| + |[v_0]|$ , amb almenys una de les desigualtats estrictes. Aleshores existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X)$  satisfent*

$$(a) \quad \sigma^{-1}\tau = \rho_1 \cdots \rho_k$$

$$(b) \quad |\mathbf{w}_1\rho_1 \cdots \rho_i| + |[v_1]\rho_1 \cdots \rho_i| < |\mathbf{w}_0| + |[v_0]| \text{ per a } 0 < i < k.$$

*Demostració.* Posem  $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,n})$  per  $i = 0, 1, 2$ . Definim el grup lliure  $F'$  com  $F' = F(X')$  amb  $x' = X \cup \{z\}$  i per  $i = 0, 1, 2$  definim les paraules de  $F'$

$$w_i = w_{i,1}zw_{i,2}z \cdots zw_{i,n}z.$$

Observem que les paraules  $w_i$  són cíclicament reduïdes i que podem pensar que tenim  $\sigma, \tau \in \mathbb{W}(X')$  com a automorfismes que deixen  $z$  invariant. A més, es satisfà que  $w_1 = w_0\sigma$  i  $w_2 = w_0\tau$ . Ara considerem les tuples de  $[F']^2$  donades per  $[\mathbf{u}_i] = ([w_i], [v_i])$  per  $i = 0, 1, 2$ . Està clar que ens trobem en les hipòtesis del lema 2.16 i per tant existeixen  $k \geq 1$  i  $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{W}(X')$  que satisfan (a) i (b) perquè les paraules són cíclicament reduïdes per l'invariància de  $z$ . Per tant, d'acord amb l'observació 2.12, en realitat tenim  $\rho_i \in \mathbb{W}(X)$  per  $1 \leq i \leq k$  i (a) es segueix satisfent.  $\square$

El lema anterior prova que el conjunt  $F^n \times [F]$  amb l'acció dels automorfismes de Whitehead satisfà la propietat de reducció de pics respecte la longitud donada per  $|(\mathbf{w}, [v])| = |\mathbf{w}| + |[v]|$ . Amb aquesta longitud, és obvi que existeix un nombre finit d'elements per a cada possible longitud. Per tant, pel teorema 1.11 tenim que el problema  $\text{EO}(F^n \times [F], \text{Aut}(F))$  és resoluble. Aquest resultat, juntament amb la reducció presentada anteriorment, ens dóna el següent.

**Corol·lari 4.3.** *Per a tot subgrup finitament generat de  $F$ ,  $H \in S$ , el problema  $\text{EO}([F], \text{Stab}(H))$  és resoluble.*

### 4.3 La complexitat dels problemes de Whitehead

En aquest treball ens hem centrat en la decidibilitat dels problemes de Whitehead, és a dir, en l'aspecte *qualitatiu* dels problemes corresponent a provar

que efectivament existeixen algorismes per resoldre'ls. Mesurar quant eficients són aquests algorismes i dir fins a quin punt es poden o no millorar es correspon amb l'aspecte *quantitatiu* d'aquests problemes. Aquest és el camp que estudia la teoria de la complexitat computacional.

La complexitat dels problemes de Whitehead és, avui en dia, un problema de recerca actiu en el qual no es tenen encara uns resultats absolutament satisfactoris. No obstant, durant els últims anys s'han fet avenços prometedors que ens agradaria repassar breument.

A partir d'ara ens centrarem només en els problemes de Whitehead de manera que tindrem  $G = \text{Aut}(F)$ ,  $W = \mathbb{W}(X)$  i  $M$  serà algun dels conjunts que hem considerat.

En primer lloc, convé observar que la solució que dona l'algorisme de Whitehead pels elements  $m_1$  i  $m_2$  presentada en la demostració del teorema 1.11 es pot dividir en dues parts. La *primera part* consisteix en resoldre la minimització orbital  $\text{MinO}(M, G)$  pels dos elements  $m_1$  i  $m_2$ . La *segona part*, si es dona el cas que les longituds dels elements obtinguts en la minimització,  $m'_1$  i  $m'_2$ , coincideixen, consisteix en construir el graf corresponent a l'estrat de longitud  $l = |m'_1| = |m'_2|$  de  $M$ .

Històricament, la primera part de l'algorisme de Whitehead sempre ha estat considerada fàcil en comparació amb la segona part. Això és degut, principalment, a l'elevada combinatòria que s'obté en el cas pitjor quan es construeix la component connexa que conté  $m'_1$ . No obstant, la primera part, tal i com l'hem presentada en la demostració del teorema 1.11, tampoc es pot considerar eficient en termes absoluts. Fixem-nos que tenim  $|\mathbb{W}(X)| = O(r!2^r)$ . Això implica que, en cada pas de la minimització, en el cas pitjor hem de provar un nombre exponencial d'automorfismes per comprovar si algun disminueix la longitud. Suposant que a cada pas només aconseguim disminuir en 1 la longitud, això ens dona una cota de la forma  $O(nr!2^r)$  sobre el nombre d'operacions necessàries per resoldre la minimització orbital per a una paraula de longitud  $n$ . Aquesta complexitat és lineal en la longitud de l'entrada, però exponencial en el rang del grup lliure ambient. Tot i que en els problemes de Whitehead *per se* el paràmetre  $r$  és fix i per tant es pot considerar que la primera part de la solució té complexitat lineal, hi ha algorismes per resoldre altres problemes (per exemple, determinar si un subgrup és un factor lliure del seu grup ambient [RVW07]) que resolen un problema de Whitehead com a subproblema. És en aquests casos quan la dependència en  $r$  és rellevant i es considera que la primera part tampoc és

eficient.

Recentment, emprant les tècniques presentades en aquest treball que permeten construir el graf de Whitehead per controlar la variació de la longitud de la paraula en aplicar-li un automorfisme de Whitehead, els autors de [RVW07] han rebaixat la complexitat de la primera part de l'algorisme. Concretament, emprant el teorema de *max-flow min-cut* i l'algorisme de *Ford-Fulkerson* (vegeu [Koz92]), han donat un mètode per, en cada pas de la minimització, trobar, en cas que existeixi, un automorfisme de Whitehead que disminuïxi la longitud de la paraula en temps  $O(n^2 r^3)$ . És a dir, la seva solució té complexitat polinòmica en els dos paràmetres del problema: la longitud de la paraula i el rang del grup lliure ambient. Emprant tècniques semblants per a hipergrafs, els autors també donen una solució de la minimització orbital pel segon problema de Whitehead en temps  $O((n^2 r^4 + n^3 r^2) \log(nr))$ , també polinòmic en la longitud de la paraula i el rang del grup lliure.

Pel què fa a la segona part, de moment els esforços es centren en aconseguir una solució polinòmica en la longitud  $l$  dels elements de longitud mínima dins l'òrbita. En aquesta direcció hi ha diversos resultats parcials. Per una banda, se sap que és possible resoldre la segona part en temps polinòmic en  $l$  en el grup lliure de rang  $r = 2$  (vegeu [MS03, Kha04]). Per altra banda, l'autora de [Lee06a, Lee06b] ha obtingut solucions en temps polinòmic pel cas de rang arbitrari quan les paraules considerades tenen una forma determinada. No se sap si aquestes solucions es poden estendre d'alguna manera per resoldre completament el problema.

## Capítol 5

### Conclusions

La primera conclusió que extreiem d'aquest treball és que la tècnica de reducció de pics és molt útil per resoldre problemes d'equivalència orbital que involucren el grup d'automorfismes  $Aut(F)$ . En particular, això és conseqüència de la flexibilitat que permeten els automorfismes de Whitehead per treballar sobre els diferents conjunts que hem considerat on  $Aut(F)$  actua:  $F$ ,  $[F]$ ,  $F^n$ ,  $[F]^n$ ,  $S$ ,  $[S]$ ,  $S^n$  i  $[S]^n$ .

En aquest sentit, també és remarcable la similitud entre els resultats, demostracions i construccions que permeten resoldre el primer i segon problema de Whitehead. El fet que l'essència de les solucions algebraiques del primer problema de Whitehead donades per Rapaport [Rap58] i Lyndon i Higgins [HL74] es pugui traduir d'una manera tant directa en una solució del segon problema de Whitehead dona una idea de fins a quin punt els  $X$ -grafs són els objectes més naturals per representar els subgrups finitament generats de  $F$ . Aquesta és precisament l'observació que donà lloc al programa de Gersten per solucionar el segon problema de Whitehead.

Un dels trets distintius de les solucions que hem donat pels problemes de Whitehead és l'ús del graf i l'hipergraf de Whitehead per controlar els efectes dels automorfismes de Whitehead en la longitud dels objectes considerats. Aquesta construcció, que pel cas de grafs ja es troba present en el treball de Hoare [Hoa79], captura a la perfecció la informació sobre la longitud de l'objecte en estudi i les seves possibles variacions en aplicar-li un automorfisme de Whitehead de tipus II. Això és cert fins a tal punt que, tal i com hem comentat a la secció 4.3, el graf i hipergraf de Whitehead permeten trobar de manera eficient quin és l'automorfisme de Whitehead que provoca la major disminució possible en la longitud. Aquest és un dels ingredients clau del

resultat presentat a [RVW07], on a més apareix per primer cop l'hipergraf de Whitehead.

A banda del seu interès intrínsec, la solució algorísmica dels problemes de Whitehead ha permès estudiar diversos aspectes del grup d'automorfismes  $Aut(F)$ . Tal com hem vist a la secció 4.1, la tècnica de reducció de pics permet demostrar que les relacions de McCool donen una presentació per  $Aut(F)$ . A més, la presentabilitat finita dels estabilitzadors de subgrups  $H \in S$  en  $Aut(F)$  demostrada a [McC75] i dels centralitzadors de subconjunts finits de  $Aut(F)$  demostrada a [Kal92] són també conseqüència de les tècniques de reducció de pics emprades en la solució dels problemes de Whitehead. Seguint aquesta línia, aquestes tècniques han estat exportades a altres famílies de grups per estudiar problemes similars. Un exemple és la tesi doctoral [Day08] sobre les tècniques de reducció de pics en grups d'Artin d'angle recte.

Com a complement a les tècniques de reducció de pics en el cas mixte, a la secció 4.2 hem vist com l'ús de reduccions permet resoldre un problema no trivial reduint-lo a un altre. Aquest mètode és molt emprat en l'estudi de problemes decisionals en contextes abstractes i creiem que es pot emprar per donar solucions a d'altres problemes similars al dels estabilitzadors de subgrups finitament generats.

# Apèndix A

## Les relacions de McCool

En aquest apèndix demostrarem les relacions de McCool (R1) – (R9) que hem emprat àmpliament en aquest treball. Les relacions (R1) – (R6) són independents, i com hem vist a la secció 4.1, són suficients per donar una presentació de  $Aut(F)$  amb els automorfismes de Whitehead com a generadors. Les relacions (R7) – (R9) són conseqüència de les anteriors i s’han inclòs per la seva conveniència a l’hora de realitzar alguns càlculs.

Per a les relacions (R1) – (R5), la demostració consisteix en una taula on es comproven totes les possibilitats que s’obtenen d’aplicar els automorfismes que componen les dues bandes de la igualtat a símbols  $x \in X^\pm$  en diferents situacions relatives. La relació (R6) es demostra emprant la definició. De les relacions (R7) – (R9) en donem una demostració emprant les relacions anteriors.

### La relació (R1)

Veurem que  $\rho_1\rho_2 = \rho_3$  amb  $\rho_1 = (A, a)$ ,  $\rho_2 = (A - a + \bar{a}, \bar{a})$  i  $\rho_3 = id$ .

|   | $x\rho_1$   | $x\rho_2$   | $x\rho_1\rho_2$         | $x\rho_3$ |
|---|-------------|-------------|-------------------------|-----------|
| $x = a$                                   | $a$         | $a$         | $a$                     | $a$       |
| $x \in A \quad \bar{x} \in A$             | $\bar{a}xa$ | $ax\bar{a}$ | $\bar{a}ax\bar{a}a = x$ | $x$       |
| $x \in A \quad \bar{x} \in \bar{A}$       | $xa$        | $x\bar{a}$  | $x\bar{a}a = x$         | $x$       |
| $x \in \bar{A} \quad \bar{x} \in \bar{A}$ | $x$         | $x$         | $x$                     | $x$       |

## La relació (R2)

Veurem que  $\rho_1\rho_2 = \rho_3$  amb  $\rho_1 = (A, a)$ ,  $\rho_2 = (B, a)$  i  $\rho_3 = (A \cup B, a)$ , satisfent  $A \cap B = \{a\}$ .

|   | $x\rho_1$   | $x\rho_2$   | $x\rho_1\rho_2$ | $x\rho_3$   |
|---|-------------|-------------|-----------------|-------------|
| $x = a$   | $a$         | $a$         | $a$             | $a$         |
| $x \in A \quad \bar{x} \in A$                                       | $\bar{a}xa$ | $x$         | $\bar{a}xa$     | $\bar{a}xa$ |
| $x \in B \quad \bar{x} \in B$                                       | $x$         | $\bar{a}xa$ | $\bar{a}xa$     | $\bar{a}xa$ |
| $x \in A \quad \bar{x} \in B$                                       | $xa$        | $\bar{a}x$  | $\bar{a}xa$     | $\bar{a}xa$ |
| $x \in A \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $xa$        | $x$         | $xa$            | $xa$        |
| $x \in B \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $x$         | $xa$        | $xa$            | $xa$        |
| $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$ | $x$         | $x$         | $x$             | $x$         |

## La relació (R3)

Veurem que  $\rho_1\rho_2\rho_3 = \rho_2$  amb  $\rho_1 = (B - b + \bar{b}, \bar{b})$ ,  $\rho_2 = (A, a)$  i  $\rho_3 = (B, b)$ , satisfent  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\bar{a} \notin B$  i  $\bar{b} \notin A$ .

|   | $x\rho_1$         | $x\rho_2$   | $x\rho_3$   | $x\rho_1\rho_2\rho_3$   |
|---|-------------------|-------------|-------------|-------------------------|
| $x = a$   | $a$               | $a$         | $a$         | $a$                     |
| $x = b$   | $b$               | $b$         | $b$         | $b$                     |
| $x \in A \quad \bar{x} \in A$                                       | $x$               | $\bar{a}xa$ | $x$         | $\bar{a}xa$             |
| $x \in B \quad \bar{x} \in B$                                       | $b\bar{x}\bar{b}$ | $x$         | $\bar{b}xb$ | $b\bar{b}xb\bar{b} = x$ |
| $x \in A \quad \bar{x} \in B$                                       | $b\bar{x}$        | $xa$        | $\bar{b}x$  | $b\bar{b}xa = xa$       |
| $x \in A \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $x$               | $xa$        | $x$         | $xa$                    |
| $x \in B \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $x\bar{b}$        | $x$         | $xb$        | $xb\bar{b} = x$         |
| $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$ | $x$               | $x$         | $x$         | $x$                     |

## La relació (R4)

Veurem que  $\rho_1\rho_2\rho_3 = \rho_4$  amb  $\rho_1 = (B - b + \bar{b}, \bar{b})$ ,  $\rho_2 = (A, a)$ ,  $\rho_3 = (B, b)$  i  $\rho_4 = (A + B - b, a)$ , satisfent  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\bar{a} \notin B$  i  $\bar{b} \in A$ .



|   | $x\rho_1$  | $x\rho_2$   | $x\rho_3$   | $x\rho_1\rho_2\rho_3$                   | $x\rho_4$   |
|---|------------|-------------|-------------|---|-------------|
| $x = a$   | $a$        | $a$         | $a$         | $a$                                     | $a$         |
| $x = b$   | $b$        | $\bar{a}b$  | $b$         | $\bar{a}b$                              | $\bar{a}b$  |
| $x \in A \quad \bar{x} \in A$                                       | $x$        | $\bar{a}xa$ | $x$         | $\bar{a}xa$                             | $\bar{a}xa$ |
| $x \in B \quad \bar{x} \in B$                                       | $bxb$      | $x$         | $\bar{b}xb$ | $\bar{a}b\bar{b}xb\bar{b}a = \bar{a}xa$ | $\bar{a}xa$ |
| $x \in A \quad \bar{x} \in B$                                       | $bx$       | $xa$        | $\bar{b}x$  | $\bar{a}b\bar{b}xa = \bar{a}xa$         | $\bar{a}xa$ |
| $x \in A \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $x$        | $xa$        | $x$         | $xa$                                    | $xa$        |
| $x \in B \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$                    | $x\bar{b}$ | $x$         | $bx$        | $\bar{b}bx = x$                         | $x$         |
| $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \quad \bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B}$ | $x$        | $x$         | $x$         | $x$                                     | $x$         |

## La relació (R5)

Veurem que  $\rho_1\rho_2 = \rho_3\rho_4$  amb  $\rho_1 = (A, a)$ ,  $\rho_2 = (A - a + \bar{a}, b)$ ,  $\rho_3 = (a \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow a)$  i  $\rho_4 = (A - b + \bar{b}, a)$ , satisfent  $b \in A$ ,  $\bar{b} \in A$  i  $a \neq b$ .

|   | $x\rho_1$   | $x\rho_2$   | $x\rho_1\rho_2$                         | $x\rho_3$ | $x\rho_4$   | $x\rho_3\rho_4$ |
|---|-------------|-------------|---|-----------|-------------|-----------------|
| $x = a$                                   | $a$         | $\bar{b}a$  | $\bar{b}a$                              | $\bar{b}$ | $a$         | $\bar{b}a$      |
| $x = b$                                   | $ba$        | $b$         | $b\bar{b}a = a$                         | $a$       | $\bar{a}b$  | $a$             |
| $x \in A \quad \bar{x} \in A$             | $\bar{a}xa$ | $\bar{b}xb$ | $\bar{a}b\bar{b}xb\bar{b}a = \bar{a}xa$ | $x$       | $\bar{a}xa$ | $\bar{a}xa$     |
| $x \in A \quad \bar{x} \in \bar{A}$       | $xa$        | $xb$        | $xb\bar{b}a = xa$                       | $x$       | $xa$        | $xa$            |
| $x \in \bar{A} \quad \bar{x} \in \bar{A}$ | $x$         | $x$         | $x$                                     | $x$       | $x$         | $x$             |

## La relació (R6)

Veurem que  $\pi^{-1}\rho_1\pi = \rho_2$  amb  $\rho_1 = (A, a)$ ,  $\rho_2 = (A\pi, a\pi)$  i  $\pi \in \mathbb{W}_I(X)$  qualsevol. Per una banda tenim

$$x\pi^{-1}\rho_1\pi = \begin{cases} (\bar{a}\pi)x(a\pi) & \text{si } x\pi^{-1}, \bar{x}\pi^{-1} \in A, \\ x(a\pi) & \text{si } x\pi^{-1} \in A, \bar{x}\pi^{-1} \notin A, \\ (\bar{a}\pi)x & \text{si } x\pi^{-1} \notin A, \bar{x}\pi^{-1} \in A, \\ x & \text{si } x\pi^{-1}, \bar{x}\pi^{-1} \notin A. \end{cases}$$

Per altra banda tenim

$$x\rho_2 = \begin{cases} (\bar{a}\pi)x(a\pi) & \text{si } x, \bar{x} \in A\pi, \\ x(a\pi) & \text{si } x \in A\pi, \bar{x} \notin A\pi, \\ (\bar{a}\pi)x & \text{si } x \notin A\pi, \bar{x} \in A\pi, \\ x & \text{si } x, \bar{x} \notin A\pi. \end{cases}$$

Per la invertibilitat de  $\pi$  ambdós automorfismes són iguals.

## La relació (R7)

Veurem que  $\gamma_a = (A, a)(\bar{A}, \bar{a})^{-1}$  i que  $\gamma_a = (\bar{A}, \bar{a})^{-1}(A, a)$ .

$$\begin{aligned} \gamma_a &= (X^\pm - \bar{a}, a) \underset{(R2)}{=} (A, a)(X^\pm - A - \bar{a} + a, a) \\ &= (A, a)(\bar{A} - \bar{a} + a, a) \underset{(R1)}{=} (A, a)(\bar{A}, \bar{a})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_a &= (X^\pm - \bar{a}, a) \underset{(R2)}{=} (X^\pm - A - \bar{a} + a, a)(A, a) \\ &= (\bar{A} - \bar{a} + a, a)(A, a) \underset{(R1)}{=} (\bar{A}, \bar{a})^{-1}(A, a) \end{aligned}$$

## La relació (R8)

Veurem que  $\gamma_{\bar{b}}(A, a)\gamma_b = (A, a)$  amb  $b, \bar{b} \in \bar{A}$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{b}}(A, a)\gamma_b &= (X^\pm - b, \bar{b})(A, a)(X^\pm - \bar{b}, b) \\ &\underset{(R2)}{=} (A + \bar{b}, \bar{b})(\bar{A} - b, \bar{b})(A, a)(X^\pm - \bar{b} - a, b)(a + b, b) \\ &\underset{(R4)}{=} (A - a + \bar{a}, \bar{a})^{-1}(a + \bar{b}, \bar{b})(A - a + \bar{a}, \bar{a}) \\ &\quad (A, a)(X^\pm - b - a, \bar{b})(X^\pm - \bar{b} - a, b)(a + b, b) \\ &\underset{(R1)}{=} (A, a)(a + b, b)^{-1}(A, a)^{-1}(A, a)(a + b, b) = (A, a) \end{aligned}$$

## La relació (R9)

Veurem que  $(\bar{A}, \bar{a})^{-1} \gamma_{\bar{b}}(A, a) = \gamma_{\bar{b}}$  amb  $b \in A$ ,  $\bar{b} \in \bar{A}$  i  $b \neq a$ .

$$\begin{aligned}
 (\bar{A}, \bar{a})^{-1} \gamma_{\bar{b}}(A, a) &= (\bar{A}, \bar{a})^{-1} (X^{\pm} - b, \bar{b})(A, a) \\
 &\stackrel{(R1)}{=} (\bar{A} - \bar{a} + a, a)(X^{\pm} - b, \bar{b})(A, a) \\
 &\stackrel{(R2)}{=} (\bar{A} - \bar{a} + a, a)(X^{\pm} - b, \bar{b})(A - b, a)(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R8)}{=} (\bar{A} - \bar{a} + a, a)(A - b, a)(X^{\pm} - b, \bar{b})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R2)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, a)(X^{\pm} - b - a, \bar{b})(a + \bar{b}, \bar{b})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R1)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, \bar{b})(X^{\pm} - \bar{a} - \bar{b}, b)(X^{\pm} - \bar{a} - b, a) \\
 &\quad (X^{\pm} - b - a, \bar{b})(a + \bar{b}, \bar{b})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R5)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, \bar{b})(a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})(X^{\pm} - a - \bar{b}, b) \\
 &\quad (X^{\pm} - b - a, \bar{b})(a + \bar{b}, \bar{b})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R1)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, \bar{b})(a \rightarrow b, b \rightarrow \bar{a})(a + \bar{b}, \bar{b})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R5)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b})(\bar{a} + b, \bar{a})(a + b, a) \\
 &\stackrel{(R1)}{=} (X^{\pm} - \bar{a} - b, \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b}) \stackrel{(R2)}{=} (X^{\pm} - b, \bar{b}) = \gamma_{\bar{b}}
 \end{aligned}$$



# Bibliografia

- [Ber89] C. Berge. *Hypergraphs*, volum 45 de *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [BV08] O. Bogopolski i E. Ventura. A recursive presentation for Mihailova's subgroup. Preprint, 2008. <http://arxiv.org/abs/0810.0690>.
- [Day08] M. B. Day. Peak reduction and finite presentations for automorphism groups of right-angled Artin groups. Preprint, 2008. <http://arxiv.org/abs/0807.4799>.
- [Die05] R. Diestel. *Graph theory*, volum 173 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, tercera edició, 2005.
- [Ger84] S. M. Gersten. On Whitehead's algorithm. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 10(2):281–284, 1984.
- [HL74] P. J. Higgins i R. C. Lyndon. Equivalence of elements under automorphisms of a free group. *J. London Math. Soc. (2)*, 8:254–258, 1974.
- [Hoa79] A. H. M. Hoare. Coinitial graphs and Whitehead automorphisms. *Canad. J. Math.*, 31(1):112–123, 1979.
- [Kal92] S. Kalajdzievski. Automorphism group of a free group: centralizers and stabilizers. *J. Algebra*, 150(2):435–502, 1992.
- [Kha04] B. Khan. The structure of automorphic conjugacy in the free group of rank two. Dins *Computational and experimental group theory*, volum 349 de *Contemp. Math.*, pàgines 115–196. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

- [Koz92] D. C. Kozen. *The design and analysis of algorithms*. Texts and Monographs in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Lee06a] D. Lee. Counting words of minimum length in an automorphic orbit. *J. Algebra*, 301(1):35–58, 2006.
- [Lee06b] D. Lee. A tighter bound for the number of words of minimum length in an automorphic orbit. *J. Algebra*, 305(2):1093–1101, 2006.
- [LS01] R. C. Lyndon i P. E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [McC74] J. McCool. A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank. *J. London Math. Soc. (2)*, 8:259–266, 1974.
- [McC75] J. McCool. Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group. *J. Algebra*, 35:205–213, 1975.
- [MKS04] W. Magnus, A. Karrass i D. Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, segona edició, 2004.
- [MS03] A. G. Myasnikov i V. Shpilrain. Automorphic orbits in free groups. *J. Algebra*, 269(1):18–27, 2003.
- [Rap58] E. S. Rapaport. On free groups and their automorphisms. *Acta Math.*, 99:139–163, 1958.
- [Rog87] H. Rogers, Jr. *Theory of recursive functions and effective computability*. MIT Press, Cambridge, MA, segona edició, 1987.
- [RVW07] A. Roig, E. Ventura i P. Weil. On the complexity of the Whitehead minimization problem. *Internat. J. Algebra Comput.*, 17(8):1611–1634, 2007.
- [Sta83] J. R. Stallings. Topology of finite graphs. *Invent. Math.*, 71(3):551–565, 1983.
- [Whi36] J. H. C. Whitehead. On equivalent sets of elements in a free group. *Ann. of Math. (2)*, 37(4):782–800, 1936.