SISTEMI LINEARI

LINEARITÁ

$$Q\left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\right] = c_1 Q_1\left[x_1(t)\right] + c_2 Q_2\left[x_2(t)\right]$$

TEMPO INVARIANZA

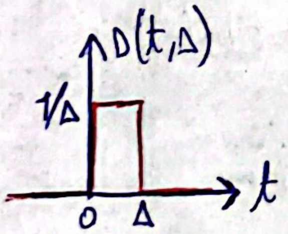
$$y(t-t_0) = Q\left[x(t-t_0)\right]$$

NOTA: Q É IL SISTEMA LINEARE E SI SCRIVE $y(t) = Q\left[x(t)\right]$

UN SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE (S.L.T.I.) PUÓ ESSERE COMPLETAMENTE CARATTERIZZATO NEL DOMINIO DEI TEMPI DALLA RISPOSTA IMPULSIVA:

$$h(t) = Q\left[\delta(t)\right]$$

SI UTILIZZA UNA DEFINIZIONE OPERATIVA DI RISPOSTA IMPULSIVA. SI CONSIDERA:



$$D[t,\Delta] \longrightarrow \boxed{Q} \longrightarrow y_\Delta(t)$$

DA CUI $h(t) = \lim\limits_{\Delta \to 0} y_\Delta(t)$

LA RISPOSTA IMPULSIVA PERMETTE DI ESPRIMERE L'USCITA DELLA RETE IN RISPOSTA AD UN GENERICO SEGNALE $\rightarrow$ $y(t) = x(t) * h(t)$

DIM

SI HA $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

$h(t)$ É LA RISPOSTA IMPULSIVA, CIOÉ LA RISPOSTA DEL SISTEMA LINEARE QUANDO IN INGRESSO SI HA $\delta(t)$.

LA FRECCIA $\longrightarrow$ INDICA QUI LA TRASFORMAZIONE OPERATA DAL SISTEMA LINEARE. L'ESPRESSIONE SOPRA SI ESPRIME IN MODO EQUIVALENTE COME $h(t) = Q[\delta(t)]$. IN GENERALE, UNA RISPOSTA AD UN GENERICO SEGNALE SI INDICA CON $y(t) = Q[x(t)]$

(NOTA: AL CONTRARIO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER, QUA SI RIMANE NEL DOMINIO DEI TEMPI)

IN UN S.L.T.I. VALGONO LE SEGUENTI CORRISPONDENZE:

- $\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$ (TEMPO INVARIANZA)
- $x(\tau)\,\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)\,h(t-\tau)$ (PER LINEARITÁ, PRODOTTO PER UNA COSTANTE)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

  (PER LINEARITÁ, POICHÉ L'INTEGRALE É UNA SOMMA E HA CARATTERISTICHE DI LINEARITÁ)

NOTA: SOMMA DI INFINITE RISPOSTE IMPULSIVE IN CUI $x(\tau)$ É CALCOLATO COME SCALARE IN OGNI PUNTO

$$x(t) * \delta(t) \longrightarrow x(t) * h(t)$$ (PER DEFINIZIONE DI CONVOLUZIONE)

RICORDANDO CHE $\delta(t)$ É L'ELEMENTO NEUTRO DELLA CONVOLUZIONE:

$$\Rightarrow x(t) \longrightarrow x(t) * h(t)$$

CIOÉ DATO UN QUALSIASI SEGNALE $x(t) \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$H(\omega)$ É LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, QUA DEFINITA COME $F[h(t)]$.

SE $h(t) \in \mathbb{R} \rightarrow H(-\omega) = H^*(\omega)$

AVENDO $y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$

RISPOSTA AD UN FASORE

$$x(t) = C_x e^{j\omega_1 t} \rightarrow y(t) = C_Y e^{j\omega_1 t} \quad , \text{CON} \quad C_Y = H(\omega_1) C_x$$

NOTA: ω_1 NOTAZIONE PER INDICARE UNA PARTICOLARE FREQUENZA, PER CUI $H(\omega_1)$ DENOTA UN PRECISO PUNTO DELLA FUNZIONE

DIM

COSTANTE CHE PER DEFINIZIONE NON TRASFORMA

TRASFORMATA TRAMITE DELTA PER SEGNALI PERIODICI

$$X(\omega) = F[x(t)] = C_x F[e^{j\omega_1 t}] = C_x \overbrace{\delta(\omega - \omega_1) 2\pi}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) = \underbrace{C_x H(\omega)}_{= C_Y} \underbrace{\delta(\omega - \omega_1) 2\pi}_{= F[e^{j\omega_1 t}]}$$

$$\downarrow$$

$$y(t) = C_Y e^{j\omega_1 t}$$

RISPOSTA AD UNA SINUSOIDE

$$x(t) = A_x \cos(\omega_1 t - \varphi_x) \rightarrow y(t) = A_y \cos(\omega_1 t - \varphi_y)$$

- (VALE SE $h(t) \in \mathbb{R}$)
- $A_y = T(\omega_1) A_x$
- $\varphi_y = \varphi_x + \beta(\omega_1)$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$x(t) = A_x \cos(\omega_1 t - \varphi_x) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{A_x e^{-j\varphi_x}}_{=\dot{A}_x} \cdot e^{j\omega_1 t} \right\}$$

- LA RISPOSTA $y(t)$ É REALE IN QUANTO CONVOLUZIONE DI $x(t)$ e $h(t)$ REALI

$$\Rightarrow y(t) = \mathrm{Re}\left\{ \dot{A}_y e^{j\omega_1 t} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CALCOLO} \\ \text{PER FASORE}}}{=} \mathrm{Re}\left\{ \dot{A}_x H(\omega_1) e^{j\omega_1 t} \right\}$$

$$= A_y \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$

OSSERVAZIONE:

$$\underbrace{\dot{A}_x e^{-j\omega_1 t}}_{=x(t)} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \underbrace{\dot{A}_y e^{j\omega_1 t}}_{=y(t)}$$

$$\dot{A}_x e^{-j\omega_1 t} = \mathrm{Re}\{\dot{A}_x e^{-j\omega_1 t}\} + \mathrm{Im}\{\dot{A}_x e^{-j\omega_1 t}\}$$

$$\dot{A}_y e^{j\omega_1 t} = \mathrm{Re}\{\dot{A}_y e^{j\omega_1 t}\} + \mathrm{Im}\{\dot{A}_y e^{j\omega_1 t}\}$$

$\rightarrow$ CON $h(t)$ e $x(t)$ REALI IL RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE É $y(t)$ REALE. DA NOTARE ANCHE CHE $Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$ E IN QUESTA OSSERVAZIONE LO SI SOTTOINTENDE