DIMOSTRAZIONI SERIE TEMPORALI

$$F[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$ TRASFORMATA SEGNALE GENERICO

$$X_s(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m\, e^{-j\omega m T}$$ TRASFORMATA DI UNA SERIE

$$x_m = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega)\, e^{j\omega m T}\, d\omega$$ ANTITRASFORMATA DI UNA SERIE (ELEMENTI DELLA SERIE)

DIM

- OSSERVAZIONE: $X_s(\omega) = X_s(\omega + \omega_p)$, $\omega_p \to \frac{2\pi}{T}$ [CIOÈ $X_s(\omega)$ È UNA FUNZIONE PERIODICA ~~PR~~ IN OMEGA. È PERIODICA IN QUANTO SOMMA DI TERMINI PERIODICI]

- DATA LA SUA PERIODICITÀ, SI PUÒ SVILUPPARLA TRAMITE LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER. STAVOLTA, PERÒ, SI PARTE DA UNA FUNZIONE IN OMEGA

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{jm\boxed{\omega_0}t}$$

$\omega_0 \to \frac{2\pi}{T}$ CON T PERIODO DELLA FUNZIONE

SVILUPPO IN SERIE (SINTESI)

$$c_m = \frac{1}{\boxed{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt$$

$T \to$ PERIODO

ANALISI

- DA SINTESI $\rightarrow$ $$X_s(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{jm\boxed{\frac{2\pi}{\omega_p}}\omega}$$

ω_p PERIODO DELLA FUNZIONE

- DA ANALISI $\rightarrow$ $$c_m = \frac{1}{\omega_p} \int_{-\omega_p/2}^{\omega_p/2} X_s(\omega)\, e^{-jm\boxed{\frac{2\pi}{\omega_p}}\omega}\, d\omega$$

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_p} = \cancel{2\pi} \cdot \frac{T}{\cancel{2\pi}} = T \quad \text{PERCHÉ } \omega_p = \frac{2\pi}{T} \right]$$ $T \to$ PERIODO

• CONTINUA C_m ... (SOSTITUISCE $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$)

$$C_m = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega)\, e^{-j\omega m T}\, d\omega$$

• CONTINUA $X_s(\omega)$ (SOSTITUISCE $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$)

$$X_s(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{j m \omega T}$$

RISPETTO ALLE FORMULE INIZIALI DA DIMOSTRARE, SI HANNO I SEGNI INVERTITI. BASTI NOTARE PERÒ CHE $X_s(\omega)$ È DEFINITA PER $m \in (-\infty, +\infty)$. ED È QUINDI INDIFFERENTE CONSIDERARE C_m CON SEGNO OPPOSTO. $\Rightarrow X_m = C_{-m}$

CAMPIONAMENTO DI UNA FUNZIONE TEMPO CONTINUA

$X_m := X(\underset{\in \mathbb{Z}}{m}T)$ (CIOÈ I VALORI DELLA FUNZIONE CONSIDERATI A INTERVALLI T)

$f_0 = \frac{1}{T}$ FREQ. CAMPIONAMENTO

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (SOLITA RELAZIONE $\omega = 2\pi f$)

$$\boxed{X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(\omega + K\omega_0)}$$

RELAZIONE FRA TRASFORMATA DELLA FUNZIONE E TRASFORMATA DELLA SERIE DEI CAMPIONI

DIM

$$X_m = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega)\, e^{j\omega mT}\, d\omega$$

X_m SONO ELEMENTI DELLA SERIE MA ANCHE ELEMENTI $X(mT)$ DELLA FUNZIONE

QUESTA È LA FORMULA DI ANTITRASFORMATA PER UNA SERIE

$$X(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega mT}$$

PROPRIO SULLA BASE DELLA DOPPIA NATURA DEI CAMPIONI, ESSI POSSONO ESSERE ESPRESSI ANCHE COME ANTITRASFORMATA DELLA FUNZIONE TEMPO CONTINUA CAMPIONATA CALCOLATA PER $t = mT$

- LO SCOPO È QUELLO DI CONFRONTARE QUESTE DUE ESPRESSIONI IN MODO DA OTTENERE UNA RELAZIONE FRA $X(\omega)$ E $X_s(\omega)$.
- SI PROCEDE QUINDI MANIPOLANDO L'INTEGRALE PER OPERARE I CONFRONTI

INTERVALLO SIMILE A QUELLO PRESENTE IN X_m

$$X(mT) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{K=-\infty}^{+\infty}}_{\text{SOMMATORIA DI INFINITI INTEGRALI + PICCOLI}} \int_{-\pi/T + K\omega_0}^{\boxed{\pi/T + K\omega_0}} X(\omega)\, e^{j\omega mT}\, d\omega$$

$$\xi = \omega - K\omega_0 \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(\xi + K\omega_0)\, \overbrace{e^{j\xi mT}\, \boxed{e^{jK\omega_0 mT}}}^{\text{SOMMA DI POTENZE}}$$

(DA CUI $\omega = \xi + K\omega_0$)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\boxed{e^{jK\omega_0 mT}} = 1$

$= e^{jK2\pi m}$ E K, m SONO INTERI, PERCIÒ È UN TERMINE DEL TIPO $e^{j2\pi m}$ (CON $m = K \cdot m$ INTERO)

NEL PIANO GAUSSIANO $e^{j2\pi m}$ HA SEMPRE MODULO 1

$$\longrightarrow \underset{\xi = \omega}{\text{RICHIAMANDO}} \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(\omega + K\omega_0)\, e^{j\omega mT}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(\omega + K\omega_0)\, e^{j\omega m T}\, d\omega$$

(É STATA PORTATA DENTRO LA SOMMATORIA IN QUANTO LA SOMMA DEGLI INTEGRALI È UGUALE ALL'INTEGRALE DELLA SOMMA)

- CONFRONTANDO QUEST'ULTIMA ESPRESSIONE OTTENUTA CON LA FORMULA DI ANTITRASFORMATA DELLA SERIE (RICONFRONTANDO CIOÈ X_m CON $X(mT)$)

SI OSSERVA CHE $$\boxed{T\, X_s(\omega)\, \cancel{e^{j\omega m T}} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(\omega + K\omega_0)\, \cancel{e^{j\omega m T}}}$$

DA CUI $$\boxed{X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(\omega + K\omega_0)}$$

SI NOTI CHE LE FUNZIONI INTEGRANDI DEVONO ESSERE UGUALI IN QUANTO SI È PARTITI DALL'UGUAGLIANZA E NON SI SONO FATTE IPOTESI SU $X_s(\omega)$ E $X(\omega)$

REVERSIBILITÀ DELLA FUNZIONE CAMPIONATA

NON SI PUÒ, IN GENERALE, RICOSTRUIRE LA FUNZIONE ORIGINARIA A PARTIRE DAI SOLI CAMPIONI. GRAZIE AL PASSAGGIO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE, PERÒ, LO SI PUÒ FARE, A PATTO DI AVERE TERMINI PERIODICI NELLE PULSAZIONI E PER SEGNALI PASSA BASSO $\rightarrow \underbrace{f_0}_{\text{FREQ. CAMPIONAMENTO}} > 2 \underbrace{f_m}_{\text{FREQ. MAX SEGNALE}}$

SI NOTI CHE SARÀ COMUNQUE NECESSARIO UN FILTRO FISICAMENTE REALIZZABILE PER ISOLARE I TERMINI (CHE NON HA PENDENZA NETTA)

$$X(\omega) = \begin{cases} T X_s(\omega) & , |\omega| < \omega_0/2 \\ 0 & , \text{ALTROVE} \end{cases}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

TERMINE CENTRALE ISOLATO E COSTANTE MOLTIPLICATIVA

• SI INSERISCE NELLA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE POICHÉ LO SCOPO È OTTENERE $x(t)$

$$\rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{T}{2\pi} \int_{\boxed{-\pi/T}}^{\boxed{\pi/T}} X_s(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

$= \pm \frac{\omega_0}{2}$ ED È DOVE LA FUNZIONE È DEFINITA

- $X_s(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j\omega m T}$ È LA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE DELLA SERIE

$$\rightarrow x(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-jm\omega T} \right) e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(t-mT)} \, d\omega$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \left[\frac{e^{j\omega(t-mT)}}{j(t-mT)} \right]_{-\pi/T}^{\pi/T}$$

LO PORTO AL DENOMINATORE

$$= \frac{T}{\cancel{2}\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \frac{\cancel{2j} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{T}(t-mT)\right]}{\cancel{j}(t-mT)}$$

$e^x = \operatorname{sen} x + \cos x$, QUINDI
$e^x - e^{-x} = \operatorname{sen} x + \cos x - (\cos x - \operatorname{sen} x)$
$\parallel$
$2 \operatorname{sen} x$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \frac{\operatorname{sen}\left[\pi\left(\frac{t-mT}{T}\right)\right]}{\pi\left(\frac{t-mT}{T}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \operatorname{sinc}\left(\frac{t-mT}{T}\right)}$$

SVILUPPO IN SERIE DI SHANNON (CHE VALE SOLO PER $\omega_0 > 2\omega_m$)