TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT)

$$X_q = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j\frac{2\pi}{N}mq} \qquad \text{TRASFORMATA}$$

$$x_m = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j\frac{2\pi}{N}mq} \qquad \text{ANTITRASFORMATA}$$

$\boxed{\text{DIM}}$ (ANTITRASFORMATA)

- SCRIVO LA FORMULA PER L'ANTITRASFORMATA SOSTITUENDO X_q

$$\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}mq}\; e^{j\frac{2\pi}{N}mq} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \boxed{\sum_{q=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}q(m-k)}}$$

$$\| \quad (A)$$

PROPRIETÀ POTENZE $(\alpha^n)^m = \alpha^{n\cdot m}$

CONSIDERO ORA SOLO (A) $\rightarrow$

$$= \sum_{q=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}\right)^{q}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x^m = \begin{cases} \dfrac{1-x^N}{1-x} & , x \neq 1 \\ N & , x = 1 \end{cases}$$

QUI $x = e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}$

E SI NOTA CHE $(m-k)$ NON È MAI $> N-1$

$\Rightarrow e^{j2\pi\left(\frac{N-1}{N}\right)}$ È IL

MASSIMO POSSIBILE CHE NON FA MAI 1 (MAI ZERO AL DENOMINATORE)

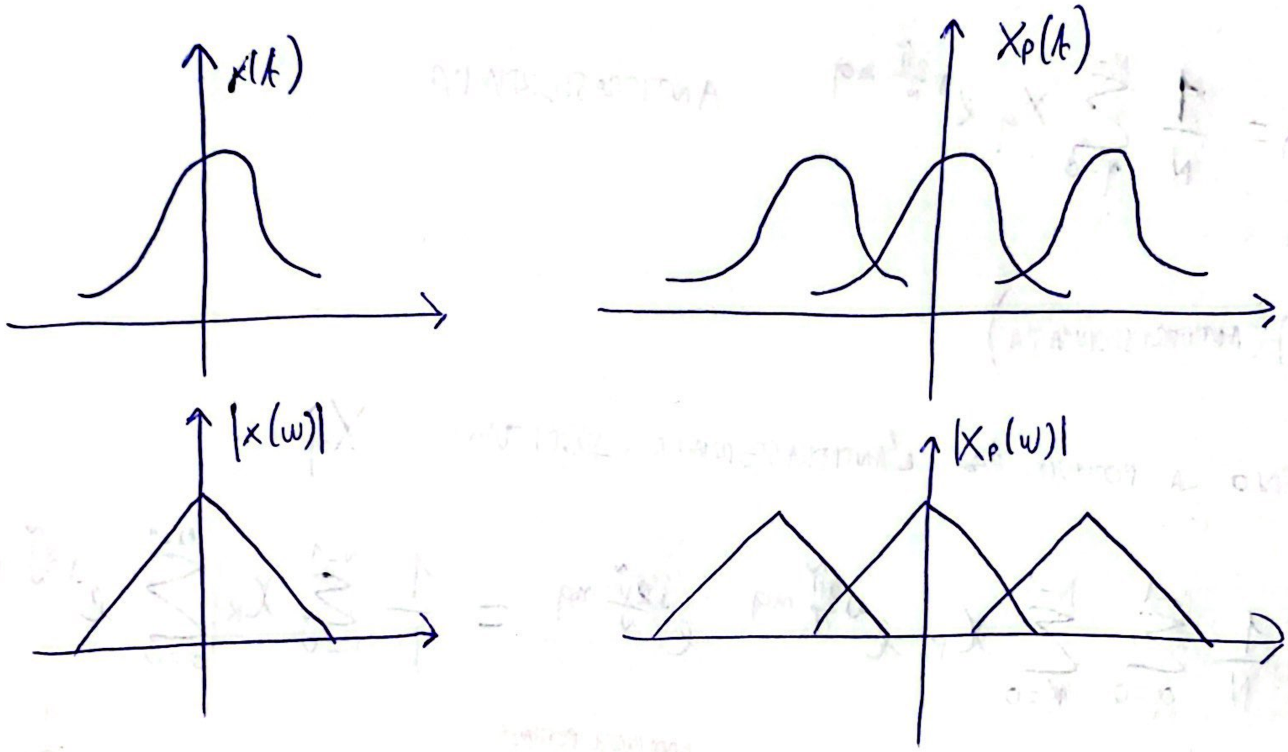
$$= \begin{cases} 0 & , m \neq k \\ N & , m = k \end{cases}$$

PERCHÉ HO $e^{j2\pi(m-k)\frac{N}{N}}$ E FA SEMPRE 1

PERCHÉ LA NOSTRA $x = 1$ E QUINDI $\sum_{m=0}^{N-1} x^m = N$

• Risostituendo si ottiene

$$\frac{1}{\cancel{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \cancel{N} = x_m$$



$$x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t - i T_p)$$

$$X_p(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(\omega - i\omega_p)$$

Il legame fra segnale e trasformata riguarda le ripetizioni periodiche di $x(t)$ e $X(\omega)$ e non direttamente le stesse

Legame periodi: $T_p \, \omega_p = 2\pi \cdot N$

Si divide $x_p(t)$ e $X_p(\omega)$ in intervalli $\Delta t = T_p/N$ e $\Delta\omega = \omega_p/N$.

La DFT lega i termini $x_m = x_p(m\Delta t)$ con $X_m = X_p(m\Delta\omega)$ con $m = 0, 1, \dots, N-1$, cioé mette in relazione le ripetizioni periodiche di $x(t)$ e $X(\omega)$, non direttamente $x(t)$ e $X(\omega)$. Per evitare aliasing si richiede T_p e ω_p sufficientemente grandi ponderando N, poiché $\boxed{T_p \, \omega_p = 2\pi N}$