Содержание

1 Линейный оператора: определение, примеры **2**

2 Ядро и образ линейного оператора: теорема о ядре и образе **2**

3 Пространство линейных операторов **3**

4 Матрица линейного оператора **4**

5 Теорема о базисе пространства линейных операторов **5**

5.1 То, чего нет в билетах, но оно важно 6

6 Композиция линейных операторов **6**

7 Алгебра линейных операторов и алгебра матриц **6**

7.1 Примеры алгебр 7

7.2 Алгебра матриц 7

8 Обратный оператор **7**

9 Обратимость в алгебре матриц **8**

Билеты к коллоку

i.g. i.a.

x марта 2023 г.

1 Линейный оператора: определение, примеры

Определение. Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y называется **линейным оператором**, если $\forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

Notabene. Множество линейных операторов из $X(\mathbb{K})$ в $Y(\mathbb{K})$ обозначается $Hom_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

Notabene. Оператор $\varphi : X \to X$, отображающий X в себя, называют эндоморфизмом и пишут $\varphi \in End(X)$, а в случае отображения на себя - автоморфизмом.

Примеры:

1. *Нульоператор:* $\Theta : X \to Y, \quad \Theta x = 0_Y$
2. *Единичный оператор или тождественный:* $\mathcal{I} : X \to Y, \quad \mathcal{I}x = x$
3. *Проекторы:* $\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to X, \quad X = L_1 \oplus L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1, \quad x_1 \in L_1$

2 Ядро и образ линейного оператора: теорема о ядре и образе

Определение. Ядром линейного оператора $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется подмножество X:

$$\ker\varphi = \{x \in X : \quad \varphi(x) = 0\}$$

Определение. Образом линейного отображения $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется подмножество Y:

$$\mathrm{Im}\varphi = \{y \in Y : \quad \exists x \in X \quad \varphi(x) = y\} = \varphi(X)$$

Notabene. Образ и ядро являются линейными подпространствами..
Теорема(база). Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда имеет место изоморфизм

$$X/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$$

Доказательство. Отображение $\bar{\varphi} : X/\ker\varphi \to \mathrm{Im}\varphi$, заданное как

$$x + \ker\varphi \mapsto \varphi(x)$$

Гомоморфно (выполнена линейность), сюрьективно и инъективно - а значит является изоморфизмом. $\square$

.

Определение. Пусть $L \leq X$ - линейное подпространство X. Набор $\{v_j\}_{j=1}^m \in X$ называется **линейно независимым над $\mathbb{K}$ относительно** L, если

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \in L \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$$

то есть набор векторов ЛНЗ между собой и любыми векторами из L.

Определение. Говорят, что $\{v_j\}_{j=1}^m$ **порождает** X относительно L, если

$$X = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \rangle + L$$

то есть X это сумма линейной оболочки набора и подпространства L.

Определение. Говорят, что $\{v_j\}_{j=1}^m$ базис X относительно L, если набор ЛНЗ над L и порождает X относительно L

Лемма. Следующие условия эквивалентны: .

1. $\{v_j\}_{j=1}^m$ - базис X относительно L;
2. $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_m\}$ - базис X/L;
3. $X = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} \oplus L$.

Доказательство. Очевидно, но поясню

1. $1 \Rightarrow 2$: Так как набор - базис, значит ЛНЗ в X относительно L, из чего следует ЛНЗ в X/L, а полнота следует отсюда же.
2. $2 \Rightarrow 3$: Очевидно
3. $3 \Rightarrow 1$: Очевидно

□

Лемма. Если $L \leq X$, тогда имеет место:.

$$\dim X = \dim L + \dim X/L$$

доказательство очевидно следует из прошлой леммы и к тому же, так как линейная оболочка ЛНЗ набора в пересечении с L дает пустое множество - то сумма является прямой и из нее следует сумма размерностей.

Теорема(о ядре и образе). Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда имеет место

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im} \varphi = \dim X$$

Доказательство. Так как $\mathrm{Im}\varphi \simeq X/\ker\varphi$, то $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim X/\ker\varphi$, тогда из прошлой леммы получим требуемое. □

3 Пространство линейных операторов

Определение. Говорят, что операторы $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ **равны**, если

$$\varphi x = \psi x, \quad \forall x \in X$$

Определение. Отображение χ называется **суммой** линейных операторов $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, если

$$\forall x \in X \quad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Лемма. Имеет место $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

$$\chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2)$$
$$\chi(\lambda x) = \lambda \chi(x)$$

Доказательство.

$$\chi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = (\varphi + \psi)x_1 + (\varphi + \psi)x_2 = \chi(x_1) + \chi(x_2)$$

$$\chi(\lambda x) = (\varphi + \psi)\lambda x = \lambda(\varphi + \psi)x = \lambda \chi(x)$$

□

.

Определение. Отображение ζ называется **умножением** линейного оператора φ на число λ, если

$$\forall x \in X \quad \zeta x = \lambda\varphi(x)$$

Лемма. Имеет место $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

Доказательство. Очевидно. Так же, как для суммы.

$$\zeta(x_1 + x_2) = \lambda(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)) = \lambda\varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) = \zeta(x_1) + \zeta(x_2)$$

$$\zeta(\lambda_1 x) = \lambda_1\lambda_2\varphi(x) = \lambda_1\zeta(x)$$

□

.

Теорема. Множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi, \zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, а $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

1. Коммутативность сложения
$$\varphi + \psi = \psi + \varphi$$

2. Ассоциативность сложения
$$\varphi + (\psi + \zeta) = (\varphi + \psi) + \zeta$$

3. Существование нуля
$$\exists \Theta : \quad \varphi(x) + \Theta(x) = \varphi(x) + 0_Y = \varphi(x)$$

4. Существование противоположного элемента
$$-\varphi + \varphi = \Theta$$

5. $$\lambda(\varphi + \psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$$

6. $$(\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$$

7. $$\lambda(\mu\varphi) = (\lambda\mu)\varphi$$

8. $$\exists \mathbb{I} : \quad \mathbb{I} \cdot \varphi = \varphi$$

□

4 Матрица линейного оператора

Определение. Матрицей линейного оператора φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица A, по столбцам которой координаты образов векторов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Теорема. Задание линейного оператора φ эквивалентно заданию его матрицы в фиксированной паре базисов.

Доказательство. Докажем импликации

$\Rightarrow$ Очевидно. То есть задали оператор - автоматически можем задать матрицу по определению.

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n, \{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X, Y соответственно. Рассмотрим элементы $x \in X, y \in Y$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \quad \varphi(x) = y$$

Рассмотрим действие оператора:

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$$

Откуда следует, мелкими преобразованиями

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j$$

то есть мы смогли получить действие оператора на вектор, зная коэффициенты матрицы линейного оператора.

□

5 Теорема о базисе пространства линейных операторов

Теорема. Набор операторов $\{{}^i_j\varepsilon\}$, действующих на произвольный вектор $x \in X$ по правилу

$${}^i_j\varepsilon(x) = \xi^i g_j, \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

образует базис пространства $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

Доказательство. Необходимо показать, что набор операторов $\{{}^i_k\varepsilon\}$ является полным и ЛНЗ в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$:

ПН: Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m a_i^j g_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi^i a_i^j g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \cdot{}^i_j\varepsilon(x) a_i^j, \quad \forall x \in X$$

Откуда следует, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \cdot{}^i_j\varepsilon a_i^j, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию векторов набора $\{{}^i_j\varepsilon\}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \cdot{}^i_j\varepsilon \beta_i^j = \Theta$$

и применим обе части равенства к базисному элементу e_k:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \cdot{}^i_j\varepsilon(e_k) \beta_i^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_k^i g_j \beta_i^j = \sum_{j=1}^m g_j \beta_k^j = 0_Y$$

Но так как набор $\{g_j\}_{j=1}^m$ - ЛНЗ, а значит $\beta_k^j = 0 \forall k$. А так как k - любое, то это верно для всех векторов набора $\{e_i\}_{i=1}^n$.

□

.

5.1 То, чего нет в билетах, но оно важно

Определение. **Преобразованием подобия** матрицы A называется преобразование

$$A \mapsto T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad \det T \neq 0$$

что позволяет находить матрицу оператора для другого базиса, зная старый и новый базисы и матрицу ЛО.

6 Композиция линейных операторов

Определение. Пусть X, Y, K - линейные пространства. **Композицией** линейных операторов $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(Y, Z)$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется отображение $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Z)$ такое, что

$$\chi = \psi \circ \varphi \quad \psi\varphi x = \psi(\varphi x) \quad \forall x \in X$$

Лемма. Отображение χ - линейный оператор.

Доказательство.

$$\chi(x_1 + x_2) = \psi(\varphi(x_1 + x_2)) = \psi(\varphi x_1 + \varphi x_2) = \psi(\varphi x_1) + \psi(\varphi x_2) = \chi x_1 + \chi x_2$$

$$\chi(\lambda x) = \psi(\varphi \lambda x) = \psi(\lambda \varphi x) = \lambda \psi(\varphi x) = \lambda \chi x$$

□

.

Теорема(о матрице оператора-композиции операторов). Пусть $\chi = \psi \circ \varphi$, тогда $C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$

Доказательство. Из определения следует:

$$\chi e_i = \psi(\varphi e_i) = \psi(\sum_{j=1}^{m} \alpha^j g_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j \psi(g_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j (\sum_{k=1}^{p} \beta_j^k h_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j \beta_j^k) h_k = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i^k h_k \quad \Rightarrow \quad \gamma_i^k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j \beta_j^k$$

□

7 Алгебра линейных операторов и алгебра матриц

Лемма. Операция композиции операторов ассоциативна.

$$\varphi \in \mathrm{H}om(X, Y), \quad \psi \in \mathrm{H}om(Y, Z), \quad \chi \in \mathrm{H}om(Z, W)$$

Доказательство. Покажем, что композиция ассоциативна всегда:

$$(\chi \circ (\psi \circ \varphi))(x) = \chi((\psi \circ \varphi)(x)) = \chi(\psi(\varphi(x))) = (\chi \circ \psi)(\varphi(x)) = ((\chi \circ \psi) \circ \varphi)(x)$$

□

.

Notabene. Множество End(X) имеет структуру полугруппы(ассоциативная операция) относительно операции композиции и структуру кольца относительно композиции и сложения.

Определение. **Алгеброй** называется кольцо, снабженное структурой линейного пространства.

Определение. Алгебра $\mathrm{End}(X, Y)$ называется **алгеброй операторов** над пространством $X(\mathbb{K})$.

7.1 Примеры алгебр

1. $\mathbb{R}$ - алгебра вещественных чисел;
2. $\mathbb{C}$ - алгебра комплексных чисел.

7.2 Алгебра матриц

Notabene. Очевидно, что каждому оператору можно сопоставить свою матрицу, а значит алгебра линейных операторов изоморфна алгебре квадратных матриц $n \times n$.

Лемма. Имеет место изоморфизм алгебры ЛО и алгебры квадратных матриц $n \times n$.

$$\mathrm{E}nd(X,Y) \simeq \mathrm{Mat}_n$$

Доказательство. Выберем базис $\{^i_j\varepsilon\}$ в $\mathrm{End}(X,Y)$ и отобразим

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \cdot^i_j \varepsilon \alpha_i^j \quad \leftrightarrow \quad ||\alpha_i^j|| = A_\varphi$$

□

8 Обратный оператор

Определение. Обратным оператором к данному называется отображение $\bar{\varphi}\mathrm{Im}\varphi \to X$, такое что

$$\bar{(}y) = x \quad \forall y \in \mathrm{Im}\varphi$$

Лемма. Отображение $\bar{\varphi}$ - линейный оператор.

Доказательство. Очевидно. □

.

Определение. Оператор, для которого существует обратный, называется **обратимым**.

Определение. Линейный оператор $\varphi^{-1} \in$ Hom X Y называется **обратным оператором** к оператору φ, если

$$(\bar{\varphi} \circ \varphi)(x) = x \quad \forall x \in X$$
$$(\varphi \circ \bar{\varphi})(y) = y \quad \forall y \in Y$$

Теорема(критерий существования обратного оператора). Для оператора $\varphi \in$ Hom X Y существует обратный ему тогда и только тогда, когда

$$\ker\varphi = 0, \quad \mathrm{Im}\varphi = Y$$

Доказательство. Первое - гарантирует инъективность отображения, а второе - сюръективность. Поэтому отображение является биекцией, а значит существует обратное. □

.

Notabene. Необходимым условием существования обратного оператора является изоморфность пространств X и Y.

$$X \simeq Y \quad \Leftrightarrow \quad \dim X = \dim Y$$

Лемма. Отображение $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ обладает следующими свойствами:.

$$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi, \quad (\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$$

Доказательство. Очевидно. □

9 Обратимость в алгебре матриц