λ

Лекция 10

Структура нильпотентного оператора

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы изучим свойства нильпотентного оператора и структуру подпространств нак которых он действует. Будет построен базис Жордана и получена нормальная форма матрицы оператора в этом базисе. Все приведенное является краеугольным камнем построения матричной алгебры.

Ключевые слова:
Нильпотентный оператор, базис Жордана, жорданова клетка, присоединенный вектор, башня Жордана, одноклеточный оператор.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

10.1 Структура инвариантных подпространств

Пусть $\tau \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - нильпотентный оператор порядка m, так что

$$\tau^m = 0, \quad \tau^r \neq 0, \quad r < m \tag{10.1}$$

Лемма 10.1. *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - линейный оператор и $L_r = \ker \varphi^r$, тогда имеет место последовательность:*

$$0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_{p-2} \subseteq L_{p-1} \subseteq L_p = X, \tag{10.2}$$

▶
Имеет место

$$x \in L_r \quad \Rightarrow \quad \varphi^r x = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^{r+1} x = \varphi \cdot \varphi^r x = 0.$$

◀

Теорема 10.1. *Пусть $\tau \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - нильпотентный оператор порядка p, то есть $\tau^p = 0$, тогда каждое включение в последовательности - точное:*

$$L_{r-1} \subset L_r, \quad r = 1 \ldots p.$$

▶
Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что

1. $\dim_{\Bbbk} L_{r-1} < \dim_{\Bbbk} L_r$;
2. для всякого набора $\left\{x_i^{(0)}\right\}_{i=1}^s \in L_r$ линейно независимого над L_{r-1} (то есть не выражающегося через базис L_{r-1}) набор $\left\{\tau x_i^{(0)}\right\}_{i=1}^s$ линейнонезависим над L_{r-2}.

Доказательство будем проводить индукцией по r. Пусть $r = p$, тогда утверждение

$$\dim_{\Bbbk} L_{p-1} < \dim_{\Bbbk} L_p$$

становится тривиальным. Вторую часть докажем от противного: пусть $\left\{\tau x_i^{(0)}\right\}_{i=1}^s$ линейнозависим над L_{r-2}, тогда

$$\exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1^s} : \quad \sum_{i=1}^s \alpha^i \tau x_i^{(0)} \in L_{r-2} \quad \Rightarrow \quad \tau^{r-2} \left(\sum_{i=1}^s \alpha^i \tau x_i^{(0)} \right) = \tau^{r-1} \left(\sum_{i=1}^s \alpha^i x_i^{(0)} \right) = 0,$$

но отсюда сразу следует, что

$$\sum_{i=1}^s \alpha^i x_i^{(0)} \in L_{i-1},$$

что противоречит исходному предположению. Следовательно, если $\{e_j\}_{j=1}^m$ - базис L_{r-2}, тогда

$$\left\{ \{e_j\}_{j=1}^m , \left\{\tau x_i^{(0)}\right\}_{i=1}^s \right\}$$

- линейнонезависимый набор в L_{r-1} и тогда очевидно, что $\dim_{\Bbbk} L_{r-2} < \dim_{\Bbbk} L_{r-1}$. Для $r < p - 2$ доказательство повторяется.
◀

10.2 Базис Жордана

Базисом Жордана нильпотентного оператора τ называется такой базис $\beta(X)$ пространства X, в котором матрица оператора τ имеет вид **жордановой клетки** порядка p:

$$T = diag_{+1}\{1, 1, \dots, 1\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 10.2. *(существование) Базис Жордана существует :)*

▶

Используем слудеющую процедуру:

1. выберем в $L_p = X$ максимальный линейнонезависимый над L_{p-1} набор векторов $\left\{x^{(0)i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}$, $s_0 = \operatorname{codim}_X L_{p-1}$.

2. пополним набор $\left\{\tau x^{(0)i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}$ из L_{p-1} векторами $\left\{x^{(1)i_1}\right\}_{i_1=1}^{s_1}$, $s_1 = \operatorname{codim}_X L_{p-2} - s_0$; до максимального линейнонезависимого над L_{p-2} набора;

3. продолжим процедуру пока не закончатся линейнонезависимые векторы в X и получим следующие цепочки:

   - $\left\{x^{(0)}_{i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}$
   - $\left\{\tau x^{(0)}_{i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}, \quad \left\{x^{(1)}_{i_1}\right\}_{i_1=1}^{s_1};$
   - $\left\{\tau^2 x^{(0)}_{i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}, \quad \left\{\tau x^{(1)}_{i_1}\right\}_{i_1=1}^{s_1}, \quad \left\{x^{(2)}_{i_2}\right\}_{i_2=1}^{s_2};$
   - $\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots;$
   - $\left\{\tau^{p-1} x^{(0)}_{i_0}\right\}_{i_0=1}^{s_0}, \quad \left\{\tau^{p-2} x^{(1)}_{i_1}\right\}_{i_1=1}^{s_1}, \quad \left\{\tau^{p-3} x^{(2)}_{i_2}\right\}_{i_2=1}^{s_2} \quad \dots \quad \left\{x^{(p-1)}_{i_{p-1}}\right\}_{i_{p-1}=1}^{s_{p-1}}$

Число получившихся векторов, очевидно, равно $\dim_{\Bbbk} X$ и по построению они линейно - независимы и таким образом, образует базис пространства X. Введем обзначение:

$$e^{(0)}_{j,k_j} = \tau^{p-j} x^{(j-1)}_{k_{j-1}}, \quad j = 1 \dots p, \quad k_{j-1} = 1 \dots s_{j-1};$$
$$e^{(r)}_{j,k_j} = \tau^{p-j-r} x^{(j-1)}_{k_{j-1}}, \quad j = 1 \dots p, \quad r = 0 \dots p-j, \quad k_{j-1} = 1 \dots s_{j-1};$$

Запишем таблицу еще раз, используя новые обозначения:

1. $e^{(p-1)}_{1,1}, \dots, e^{(p-1)}_{1,s_0};$

2. $e^{(p-2)}_{1,1}, \dots, e^{(p-2)}_{1,s_0}; \quad e^{(p-2)}_{2,1}, \dots, e^{(p-2)}_{2,s_1};$

3. $e^{(p-3)}_{1,1}, \dots, e^{(p-3)}_{1,s_0}; \quad e^{(p-3)}_{2,1}, \dots, e^{(p-3)}_{2,s_1}; \quad e^{(p-3)}_{3,1}, \dots, e^{(p-3)}_{3,s_2};$

4. $\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots;$

5. $e_{1,1}^{(0)}, \dots\dots, e_{1,s_0}^{(0)}; \quad e_{2,1}^{(0)}, \dots\dots, e_{2,s_1}^{(0)}; \quad e_{3,1}^{(2)}, \dots\dots, e_{3,s_2}^{(0)}; \quad \dots \quad ; \quad e_{p,1}^{(0)}, \dots\dots, e_{p,s_{p-1}}^{(0)}$

◀

Nota bene Векторы вида $e_{i,k}^{(0)}$, стоящие в последней строке таблицы, являются собственными векторами оператора τ, отвечающим нулевому собственному значению.

Элементы цепочки

$$e_{i,k}^{(l-1)} \to e_{i,k}^{(l-2)} \to e_{i,k}^{(l-3)} \to \dots \to e_{i,k}^{(1)} \to e_{i,k}^{(0)}$$

вида $e_{i,k}^{(r)}$ называются **присоединенными векторами** порядка r к собственному вектору $e_{i,k}^{(0)}$. Число l присоединенных векторов называется **длиной цепочки**.

Nota bene Линейная оболочка $L_{i,k}$ векторов данной цепочки

$$\mathcal{L}\left\{e_{i,k}^{(p-1)}, e_{i,k}^{(p-2)}, e_{i,k}^{(p-3)}, \dots, e_{i,k}^{(1)}, e_{i,k}^{(0)}\right\}, \quad \dim_{\Bbbk} L_{i,k} = l,$$

образует ультраинвариантное подпространство оператора τ размерности l.
Матрица компоненты $\tau_{i,k} = \tau|_{L_{i,k}}$ оператора τ в ультраинвариантном подпространстве $L_{i,k}$ в указанном базисе имеет вид жордановой клетки.

Полученная таблица из собственных и присоединенных векторов опретора τ называется **башней Жордана** оператора τ.

Оператор $\tau_{i,k}$, называется **одноклеточным нильпотентным оператором**:

$$\tau_{i,k} e_{i,k}^{(r)} = e_{i,k}^{(r+1)}.$$

Теорема 10.3. *Пусть* $\tau = \dot{+}\sum_{i,k} \tau_{i,k} = \sum_{i,k} \tau_i \mathcal{P}_{i,k}$, *где* $T_{i,k}$ *- жорданова клетка порядка* $m_{i,k}$. *Тогда* τ *- нильпотентный оператор порядка* $m = \max_{i,k} m_{i,k}$.

▶

$$T = diag\{T_1, T_2, \dots, T_k\}, \quad \Rightarrow \quad T^s = diag\{T_1^s, T_2^s, \dots, T_k^s\} = 0 \quad \forall s \geq m.$$

◀

Лемма 10.2. *Если* τ *- нильпотентный оператор порядка* m, *тогда* $p_\tau(\lambda) = \lambda^m$ *- его минимальный полином:*

▶

Действительно,

$$\tau^m = 0, \quad \tau^{m-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad p_\tau(\lambda) = \lambda^m.$$

◀