

# Содержание

<b>1</b>	<b>Понятие первообразной. Теорема о двух первообразных. Понятие неопределенного интеграла.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Таблица неопределенных интегралов.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Свойства неопределенного интеграла.</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Интегрирование рациональных дробей. Теорема о разложении на простейшие дроби и две леммы.</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Интегрирование простейших дробей</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Определение интеграла Римана. Пример неинтегрируемой функции.</b>	<b>5</b>
6.1	Пример неинтегрируемой функции. . . . .	6
<b>7</b>	<b>Понятие сумм Дарбу, их свойства: неравенство для интегральной суммы, представления точными гранями, неравенства при измельчении разбиения, неравенства между верхней и нижней суммой для разных разбиений.</b>	<b>7</b>
7.1	Очевидно, что . . . ака неравенство для интегральной суммы. . . . .	7
7.2	Представление точными гранями. . . . .	7
7.3	Неравенства при измельчении разбиения. . . . .	8
7.4	Неравенство между верхней и нижней суммой Дарбу при различных разбиениях. . . . .	8
<b>8</b>	<b>Понятия интегралов Дарбу. Неравенство, связывающее суммы и интегралы Дарбу. Необходимое условие интегрируемости функции.</b>	<b>9</b>
8.1	Неравенство связывающее суммы и интегралы Дарбу. . . . .	9
8.2	Необходимое условие интегрируемости. . . . .	9
<b>9</b>	<b>Критерии интегрируемости (Дарбу, Римана, через интегралы Дарбу). Запись с помощью колебания функции.</b>	<b>9</b>
9.1	Запись с помощью колебаний функции. . . . .	10
<b>10</b>	<b>Свойства интегрируемых функций: линейность; интегрируемость произведения, частного, модуля; интегрируемость на меньшем отрезке и на склейке отрезков.</b>	<b>10</b>
10.1	Склейка отрезков . . . . .	12
<b>11</b>	<b>Классы интегрируемых функций: непрерывная, с конечным числом точек разрыва, монотонная.</b>	<b>12</b>
11.1	Интегрируемость непрерывной функции . . . . .	12
11.2	Конечное число точек разрыва . . . . .	13
11.3	Интегрируемость монотонной функции . . . . .	13
<b>12</b>	<b>Свойства интеграла Римана: линейность; аддитивность по промежутку, монотонность, делимость от нуля, неравенство с модулем.</b>	<b>14</b>
12.1	Линейность определенного интеграла . . . . .	14
12.2	Аддитивность по промежутку интегрирования . . . . .	14
12.3	Монотонность интеграла . . . . .	14
12.4	Делимость от нуля . . . . .	15
12.5	Неравенство с модулем . . . . .	15
<b>13</b>	<b>Первая теорема о среднем</b>	<b>15</b>
<b>14</b>	<b>Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, дифференцируемость (две теоремы).</b>	<b>16</b>
14.1	Непрерывность $\Phi(x)$ . . . . .	16
14.2	Дифференцируемость $\Phi(x)$ . . . . .	16

<b>15</b>	<b>Формула Ньютона-Лейбница. Усиленная формула и обобщенная формула.</b>	<b>17</b>
15.1	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	17
15.2	Усиленная формула Ньютона-Лейбница . . . . .	18
15.3	Обобщенная формула Ньютона-Лейбница . . . . .	18
<b>16</b>	<b>Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.</b>	<b>19</b>
16.1	Формула интегрирования по частям . . . . .	19
16.2	Формула замены переменной . . . . .	19
<b>17</b>	<b>Интеграл от четной, нечетной и периодической функции. Изменение функции в конечном числе точек.</b>	<b>19</b>
17.1	Интеграл четной функции . . . . .	19
17.2	Интеграл нечетной функции . . . . .	20
17.3	Интеграл периодической функции . . . . .	20
17.4	Теорема об изменении функции в конечном числе точек . . . . .	20

# Билеты к коллоку

i.g. i.a.

20 марта 2023 г.

## 1 Понятие первообразной. Теорема о двух первообразных. Понятие неопределенного интеграла.

**Замечание:** Ниже под обозначением  $\langle a, b \rangle$  будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.

**Определение.** Первообразной функции  $f(x)$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$  называется функция  $F(x)$  такая, что для всех  $x \in \langle a, b \rangle$  выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

**Несколько примеров:**

1. Пусть  $f(x) = x^2$ , тогда первообразная  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ;
2. Пусть  $f(x) = \sin x$ , тогда  $F(x) = -\cos x$ ;
3. Пусть  $f(x) = 0$ , тогда  $F(x) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

и так далее.

**Теорема (о двух первообразных).** Пусть  $F(x)$  - первообразная функция  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ . Для того, чтобы  $\Phi(x)$  также была первообразной для  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

*Доказательство.* Необходимость. Пусть  $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$ , где  $F(x), \Phi(x)$  - первообразные  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\forall x \in \langle a, b \rangle$ :

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

По следствию из теоремы Лагранжа, для любых  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$  таких, что  $x_1 < x_2$

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

тогда  $\Psi(x) \equiv \text{const}$

Достаточность. Пусть  $F(x) - \Phi(x) = C$  выполнено, тогда  $\Phi(x) = F(x) + C$  и тогда

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

значит  $\Phi(x)$  - первообразная  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ . □

**Определение.** Неопределенным интегралом функции  $f(x)$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$  называется множество всех первообразных на этом промежутке. Обозначается:

$$\int f(x) dx$$

Также это значит, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется *обобщенной первообразной*  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ , если  $F(x)$  - непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и  $F'(x) = f(x)$  везде, кроме не более чем конечного числа точек.

## 2 Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}x + C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1, x > 0$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,  x  <  a $
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C,  x  \neq a$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	

Рис. 1: Таблица неопределенных интегралов.

Доказательство каждого из них состоит в том, что нужно продифференцировать правую часть. . . **!!ВЫУЧИТЕ ТАБЛИЦУ!!**

## 3 Свойства неопределенного интеграла.

ladies and gentlemen:

1. **Теорема (связь с производной).** Пусть  $\int f(x)dx$  на  $\langle a, b \rangle$ , тогда на  $\langle a, b \rangle$ :

(a)  $(\int f(x)dx)' = f(x);$

(b)  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$

*Доказательство.* 1, 2)

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

Напомним, что  $df = f'(x)dx$  и все становится очевидно.

□

2. **Лемма.** Если  $F(x)$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

3. **Теорема (линейность).** Пусть на  $\langle a, b \rangle$  существуют неопределенные интегралы  $\int f(x)dx$  и  $\int g(x)dx$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Тогда

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

*Доказательство.* По предыдущему свойству,

$$\left( \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

проинтегрировав обе части получим, что

$$\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx = \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$$

□

4. **Теорема формулы замены переменной.** Пусть на  $\langle a, b \rangle$  существует неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$ ,  $\varphi(t) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

*Доказательство.* Пусть  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ , тогда, согласно теореме о производной сложной функции,  $F(\varphi(t))$  - первообразная для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , откуда и следует равенство. □

5. **Теорема формула интегрирования по частям.** Пусть  $u, v$  - дифференцируемы на  $\langle a, b \rangle$  и на этом промежутке существует неопределенный интеграл  $\int vdu$ , тогда на  $\langle a, b \rangle$

$$\int vdu = uv - \int u dv$$

*Доказательство.*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

перейдем к дифференциалам

$$d(uv) = u dv + v du \Leftrightarrow v du = d(uv) - u dv$$

проинтегрировав (найдем первообразные) обе части получим требуемое. □

4 **Интегрирование рациональных дробей. Теорема о разложении на простейшие дроби и две леммы.**

5 **Интегрирование простейших дробей**

6 **Определение интеграла Римана. Пример неинтегрируемой функции.**

**Определение.** Говорят, что **разбиение**  $\tau$  введено на отрезке, если введена система точек  $x_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , удовлетворяющая условию:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

**Обозначения:**

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Определение.** Величина  $\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta x_i$  называется **мелкостью(или рангом) разбиения(дробления)**.

**Определение.** Говорят, что на отрезке введено **оснащенное разбиение**  $(\tau, \xi)$ , если на нем введено разбиение  $\tau$  и выбрана система точек  $\xi_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , таким образом, что они находятся внутри  $i$ -ых отрезков.

**Определение.** Пусть на отрезке задана функция  $f(x)$  и введена разбиение  $(\tau, \xi)$ . Величина

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральная суммой** для функции  $f(x)$  на отрезке.

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Говорят, что число  $I$  является **интегральным Римана** от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

при этом пишут

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

**Определение.** Функция  $f(x)$ , для которой существует интеграл Римана на отрезке  $[a, b]$ , называется **интегрируемой по Риману** на этом отрезке и обозначается  $f \in R[a, b]$ .

## 6.1 Пример неинтегрируемой функции.

Например *функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$  и пусть  $\tau$  - разбиение на нем. Выберем в каждом отрезке  $\Delta_i$  точку  $\xi_i \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^n d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$$

Выберем в каждом отрезке  $\Delta_i$  точку  $\xi_i \in \mathbb{I}$ . Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^n d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0$$

Тем самым, устремляя мелкость разбиения к нулю, "предел" зависит от выбора средних точек  $\xi$ , что противоречит определению интеграла.

**Определение.** Расширим определение интеграла:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad a < b$$

## 7 Понятие сумм Дарбу, их свойства: неравенство для интегральной суммы, представления точными гранями, неравенства при измельчении разбиения, неравенства между верхней и нижней суммой для разных разбиений.

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$  и  $\tau$  - некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

называют **верхней и нижней суммами Дарбу** для  $f(x)$ , отвечающими разбиению  $\tau$ , соответственно.

### 7.1 Очевидно, что ... aka неравенство для интегральной суммы.

Из определения нижней и верхней сумм дарбу очевидно:

$$s_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f)$$

**Лемма.** Ограниченность  $f(x)$  сверху(снизу) равносильна конечности верхней(нижней) суммы Дарбу.

*Доказательство.* Очевидно.

По хорошему, если функция  $f(x)$  ограничена сверху, то ее супремум конечное число, и так как все супремумы на отрезках не больше супремума функции, *очевидно*, что верхняя сумма Дарбу конечна.  $\square$

### 7.2 Представление точными гранями.

**Лемма.** Справедливы равенства.

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

*Доказательство.* Докажем первое равенство.

*Очевидно что...*  $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$ . Пусть  $f$  ограничена сверху на  $[a, b]$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и по определению супремума

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1 \dots n$$

Домножим каждое неравенство на  $\Delta x_i$  и сложим по  $i$ , получим

$$\sum_{i=1}^n \left( M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

свернув в правой и левой части формулы получим

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi)$$

и так как  $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$ :

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

по критерию супремума.

Если  $f$  не ограничена сверху на  $[a, b]$ , то она не ограничена хотя бы на одной подотрезке  $[a, b]$ . Для определенности рассмотрим такой подотрезок  $\Delta_1$ . Тогда на этом подотрезке супремумом будет являться  $+\infty$ , а тогда верхняя сумма Дарбу

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \Delta x_i + \infty = +\infty$$

А так как любая интегральная сумма будет меньше чем  $S_\tau(f)$ , то  $S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi)$ .

Второе равенство доказывается аналогично. □

### 7.3 Неравенства при измельчении разбиения.

**Определение.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  введены разбиения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Говорят, что разбиение  $\tau_1$  является **измельчением** разбиения  $\tau_2$ , если  $\tau_2 \subset \tau_1$ .

**Лемма.** Пусть  $\tau_2 \subset \tau_1$ , тогда.

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f)$$

то есть при измельчении разбиения, верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются.

*Доказательство.* Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение  $\tau_1$  получается из  $\tau_2$  добавлением одной точки  $\hat{x} \in (x_{k-1}, x_k)$ . Тогда

$$S_{\tau_2} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k$$

Пусть  $M'_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, \hat{x}]} f(x)$  и  $M''_k = \sup_{x \in [\hat{x}, x_k]} f(x)$ ,

$$M_k \geq M'_k, \quad M_k \geq M''_k$$

и далее распишем  $M_k \Delta x_k$

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}),$$

откуда (очевидно)

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f)$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

### 7.4 Неравенство между верхней и нижней суммой Дарбу при различных разбиениях.

**Лемма.** Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - разбиения отрезка  $[a, b]$ , тогда.

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

*Доказательство.* Пусть разбиения  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  является разбиением отрезка  $[a, b]$ , причем  $\tau_1 \subset \tau$ ,  $\tau_2 \subset \tau$ . По прошлой лемме и неравенстве между интегральными суммами и суммами Дарбу:

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

что очевидно доказывает лемму. □



## 8 Понятия интегралов Дарбу. Неравенство, связывающее суммы и интегралы Дарбу. Необходимое условие интегрируемости функции.

**Определение.** Пусть функция задана и ограничена на  $[a, b]$ . Величины

$$I^*(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f), \quad I_*(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f)$$

называются **верхним и нижним интегралами Дарбу** соответственно.

### 8.1 Неравенство связывающее суммы и интегралы Дарбу.

Для любых разбиений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отрезка  $[a, b]$  выполнено неравенство

$$s_{\tau_1}(f) \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_2}(f)$$

доказательство очевидно.

### 8.2 Необходимое условие интегрируемости.

Пусть  $f \in R[a, b]$ , тогда  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  не ограничена, например сверху. Тогда  $S_{\tau}(f) = +\infty$  для любого разбиения  $\tau$ . Поэтому для любого числа  $I$  и разбиения  $\tau$  найдется такое оснащенное разбиение  $(\tau, \xi)$ , что

$$\sigma_{\tau}(f, \xi) > I + 1$$

то есть никакое число  $I$  не является интегралом данной функции.  $\square$

## 9 Критерии интегрируемости (Дарбу, Римана, через интегралы Дарбу). Запись с помощью колебания функции.

**Теорема (Критерии интегрируемости).** Пусть  $f$  задана на  $[a, b]$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $f \in R[a, b]$ ;

2. Критерий Дарбу:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon$$

3. Критерий Римана:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon$$

4.

$$I_* = I^* \quad (= I)$$

*Доказательство.* • Докажем  $1 \Rightarrow 2$ . Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma_{\tau}(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда (раскрываем модуль)

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_{\tau}(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

перейдем к инфимуму и к супремуму в левой и правой части соответственно

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда

$$S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

- Переход  $2 \Rightarrow 3$  очевиден, так как мы доказали для любого разбиения, а в критерии Римана сужение к "какому-то".
- Докажем  $3 \Rightarrow 4$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и разбиение  $\tau$  такое, что  $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$ . Заметим, что тогда  $f$  ограничена. Так как (из предыдущих свойств)

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau$$

то  $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$  для любого  $\varepsilon$ . То есть  $I^* = I_*$ .

- И докажем  $4 \Rightarrow 1$ . Пусть  $I^* = I_* = I$ . Тогда для  $\varepsilon > 0$

$$I_* = \sup_{\tau} s_{\tau} \Rightarrow \exists \tau_1 : s_{\tau_1} > I_* - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I^* = \inf_{\tau} S_{\tau} \Rightarrow \exists \tau_2 : S_{\tau_2} > I^* + \frac{\varepsilon}{4}$$

□

## 9.1 Запись с помощью колебаний функции.

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  задана на множестве  $E$ . **Колебанием функции** на этом множестве называется величина

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|$$

И из определений супремума и инфимума легко получить

$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$$

И в критериях Дарбу и Римана можно заменить  $S_\tau - s_\tau$

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i$$

## 10 Свойства интегрируемых функций: линейность; интегрируемость произведения, частного, модуля; интегрируемость на меньшем отрезке и на склейке отрезков.

Пусть  $f(x), g(x) \in R[a, b]$ , тогда

1.  $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
2.  $f(x)g(x) \in R[a, b]$ ;
3.  $|f(x)| \in R[a, b]$ ;
4. Если  $|f(x)| \geq C > 0$  на  $[a, b]$ , то  $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$ ;
5. Пусть  $[c, d] \subset [a, b]$ , тогда  $f(x) \in R[c, d]$ .

*Доказательство.* 1. Так как

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| &\leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \leq \\ &\leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E) \end{aligned}$$

то переходя к супремуму в левой части

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $f \in R[a, b]$ , перепишем критерий Дарбу через колебания

$$\exists \delta_1 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

аналогично для  $g$ :

$$\exists \delta_2 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , тогда для любого  $\tau$  такого, что  $\lambda(\tau) < \delta$  выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha f + \beta g) \Delta x_i &\leq |\alpha| \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \leq \\ &\leq \frac{|\alpha| \varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{\beta \varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Значит по критерию Дарбу,  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ .

2. Так как  $f, g \in R[a, b]$ , то по необходимому условию они ограничены на  $[a, b]$ , то есть

$$\exists C : |f(x)| < C, |g(x)| < C, \forall x \in [a, b]$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)) \end{aligned}$$

то переходя к супремуму в левой части неравенства получим, что

$$\omega_i(fg) \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$

Распишем критерии Дарбу через колебания для  $f, g$  (прошлый пункт) и тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i(fg) \Delta x_i &\leq C \left( \sum_{i=1}^n f \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g \Delta x_i \right) \leq \\ &\leq C \left( \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Так как

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_i(f)$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$$

далее аналогично п1, п2

4. Так как

$$\left| \frac{1}{f(x) - \frac{1}{f(y)}} \right| = \frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2}$$

то переходя к супремуму

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2}$$

далее аналогично п1, п2

5. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $f \in R[a, b]$ , то, согласно критерию Дарбу

$$\exists \delta : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon$$

Пусть  $\tau'$  - произвольное разбиение отрезка  $[c, d]$  такое, что  $\lambda(\tau') < \delta$ . Дополним его до разбиения  $\tau$  отрезка  $[a, b]$  так, чтобы  $\lambda(\tau) < \delta$ , введя разбиения отрезков  $[a, c]$  и  $[d, b]$ , но не добавляя новых точек в отрезок  $[c, d]$ . Тогда

$$\sum_{[c,d]} \omega_i(f) \Delta x_i \leq \sum_{[a,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon$$

так как все слагаемые входящие в левую сумму, входят в правую сумму и омега больше нуля. Таким образом  $f \in R[c, d]$ . □

## 10.1 Склейка отрезков

**Теорема (склейка отрезков).** Пусть  $f(x) \in R[a, c]$ ,  $f(x) \in R[c, b]$ , тогда  $f(x) \in R[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f \in R[a, c]$ , то по критерию Римана

$$\exists \tau_1 : \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

и аналогично для  $f \in R[c, b]$

$$\exists \tau_2 : \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  является разбиением отрезка  $[a, b]$ , причем

$$\sum_{[a,b]} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

значит по критерию Римана  $f(x) \in R[a, b]$ . □

## 11 Классы интегрируемых функций: непрерывная, с конечным числом точек разрыва, монотонная.

### 11.1 Интегрируемость непрерывной функции

**Теорема (об интегрируемости непрерывной функции).** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция интегрируема на нем.

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора, а значит

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Пусть  $\tau$  - разбиение отрезка  $[a, b]$ , причем  $\lambda(\tau) < \delta$ , тогда

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

тогда по критерию Римана,  $f \in R[a, b]$ . □

## 11.2 Конечное число точек разрыва

**Теорема (о конечном числе точек разрыва).** Пусть  $f$  задана и ограничена на  $[a, b]$ . Пусть, кроме того, множество точек разрыва - конечно. Тогда функция интегрируема.

*Доказательство.* Так как функция ограничена, то  $|f| \leq C$ . Тогда  $\omega(f, [a, b]) \leq 2C$  (так как колебание по определению - модуль разности супремума и инфимума, которые могут быть равны  $C$  и  $-C$  соответственно).

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса  $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16Ck}$ , где  $k$  - количество точек разрыва. Дополнение к этому набору интервалов (к набору интервалов окрестностей  $k$  точек) - это

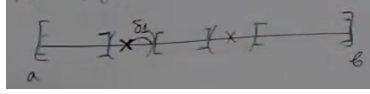


Рис. 2: Схематичный график функции с  $k$  точек разрыва.

набор отрезков (отрезки, где нет точек разрыва), на каждом из которых  $f(x)$  - непрерывна, а следовательно равномерно непрерывна. А так как число отрезков конечно ( $k + 1$  штука), то существует  $\delta_2$  такое, что если  $x', x''$  из какого-то отрезка и  $|x' - x''| < \delta_2$ , то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  и  $\tau$  - разбиение отрезка  $[a, b]$  мелкости меньше  $\delta$ .

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i = \sum' \omega_i(f) \Delta x_i + \sum'' \omega_i(f) \Delta x_i$$

где первая сумма - отрезки, не имеющие общих точек с интервалами, а вторая - по всем остальным отрезкам. Поэтому

$$\sum' \omega_i(f) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leq \frac{\varepsilon}{4C}$$

а значит

$$\sum'' \omega_i(f) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{4C} 2C = \frac{\varepsilon}{2}$$

и тогда

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i \leq \varepsilon$$

в итоге получаем требуемое. □

## 11.3 Интегрируемость монотонной функции

**Теорема (об интегрируемости монотонной функции).** Заданная и монотонная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  интегрируема на этом отрезке.

*Доказательство.* Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $f(x) \equiv C$  - интегрируемость очевидна.

2. Пусть  $f(x) \neq C$  и для определенности не убывает. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда положив  $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$  и взяв разбиение  $\tau$  отрезка  $[a, b]$  мелкости меньше  $\delta$ , выполняется

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \varepsilon$$

(кратко: оценили сверху так, что длина всех отрезков меньше  $\varepsilon/(b-a)$ )  
Значит, согласно критерию Римана, теорема доказана. □

## 12 Свойства интеграла Римана: линейность; аддитивность по промежутку, монотонность, делимость от нуля, неравенство с модулем.

### 12.1 Линейность определенного интеграла

**Теорема (о линейности определенного интеграла).** Пусть  $f, g \in R[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.* То, что  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$  известно из прошлых теорем. Пусть  $I_f = \int_a^b f(x) dx$ ,  $I_g = \int_a^b g(x) dx$ . Тогда для разбиения  $(\tau, \xi)$  имеем

$$\left| \sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \xi) - \alpha I_f - \beta I_g \right| \leq |\alpha| \left| \sigma_\tau(f, \xi) - I_f \right| + |\beta| \left| \sigma_\tau(g, \xi) - I_g \right|$$

так как  $I_f$  и  $I_g$  интегрируемы (то есть модули этих разностей, допустим, меньше  $\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$  и  $\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ ) получим требуемое. □

### 12.2 Аддитивность по промежутку интегрирования

**Теорема (о аддитивности промежутка интегрирования).** Пусть  $f \in R[a, b]$ ,  $c \in [a, b]$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Доказательство.* Интегрируемость функции  $f$  на промежутках  $[a, c]$  и  $[c, b]$  известна. Пусть  $\tau$  - разбиение отрезка  $[a, b]$ , содержащее точку  $c$ . Тогда оно порождает два разбиения  $\tau_1, \tau_2$ , причем  $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$  и  $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$ . И так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

и при  $\lambda(\tau) \rightarrow 0$  получаем требуемое. □

### 12.3 Монотонность интеграла

**Теорема (о монотонности интеграла).** Пусть  $a \leq b$ ,  $f, g \in R[a, b]$ , причем  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.* Для интегральных сумм справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

переходя к пределу при  $\lambda(\tau) \rightarrow 0$  получаем требуемое.  $\square$

### Важное следствие

Пусть  $a \leq b, f \in R[a, b], m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

## 12.4 Отделимость от нуля

**Теорема (об отделимости от нуля).** Пусть  $a < b, f \in R[a, b], f \geq 0$  и существует точка  $x_0 \in [a, b]$  такая, что  $f(x_0) > 0$ , причем  $f$  непрерывна в  $x_0$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

*Доказательство.* Так как  $f(x) > 0$  и  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , то существует окрестность  $U(x_0)$ , что при  $x \in U(x_0)$  выполняется  $f(x) > f(x_0)/2$ . Тогда в силу монотонности

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{[a, b] \cap U(x_0)} f(x) dx > \frac{f(x_0)}{2} \cdot \text{мера}([a, b] \cap U(x_0)) > 0$$

$\square$

## 12.5 Неравенство с модулем

**Теорема (о неравенстве с модулем).** Пусть  $f \in R[a, b]$ , тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

*Доказательство.* Интегрируемость функции  $|f|$  известна. А так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i$$

то переходя к пределам получим требуемое.  $\square$

## 13 Первая теорема о среднем

**Теорема (первая теорема о среднем).** Пусть  $f, g \in R[a, b], g(x)$  не меняет знак на  $[a, b], m = \inf f(x), M = \sup f(x)$ , тогда

$$\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Кроме того, если  $f(x) \in C[a, b]$ , то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.* Пусть  $g(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ , тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b]$$

и по монотонности интеграла

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Если  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , то  $\mu$  - любое число отрезка. А если  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , то  $\int_a^b g(x)dx > 0$  и, поделив на этот интеграл получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Тогда пусть  $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$  (напомним, интеграл - это какое-то число).

Если  $f \in C[a, b]$ , то по теореме Больцано-Коши для каждого  $\mu \in [m, M]$  существует  $\xi \in [a, b]$ , что  $f(\xi) = \mu$ .  $\square$

## 14 Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, дифференцируемость (две теоремы).

**Определение.** Пусть  $f \in R[a, b]$  и  $x \in [a, b]$ . Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$$

называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

### 14.1 Непрерывность $\Phi(x)$

**Теорема (о непрерывности  $\Phi(x)$ ).**

$$\Phi(x) \in C[a, b]$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in [a, b]$ ,  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . Так как функция  $f \in R[a, b]$ , то она ограничена на отрезке, то есть

$$|f(x)| \leq C, \quad x \in [a, b]$$

и тогда

$$\begin{aligned} |\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(x)|dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} Cdx \right| = C|\Delta x| \end{aligned}$$

значит при  $\Delta x \rightarrow 0$  выполняется  $\Phi(x_0 + \Delta x) \rightarrow \Phi(x_0)$ , что и означает непрерывность функции в точке  $x_0$ , а так как  $x_0$  - произвольная точка  $[a, b]$ , то утверждение доказано.  $\square$

### 14.2 Дифференцируемость $\Phi(x)$

**Теорема (о дифференцируемости  $\Phi(x)$  или т.Барроу).**  $\Phi(x)$  дифференцируема в точках непрерывности функции  $f(x)$ , причем

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0)$$



*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ .

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x) dx - f(x_0) \Delta x}{\Delta x} \right| =$$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx}{\Delta x} \right|$$

(последний переход - сворачивание  $f(x_0)\Delta x$  как интеграла по такому же промежутку)  
Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда (так как  $f(x)$  непрерывна)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Пусть  $\Delta x < \delta$  ( $x - x_0 < \delta$ ), тогда

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(x) - f(x_0)| dx}{\Delta x} \right| < \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \varepsilon \cdot dx}{\Delta x} \right| = \varepsilon$$

что означает, что (по определению производной)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

□

## 15 Формула Ньютона-Лейбница. Усиленная формула и обобщенная формула.

### 15.1 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема (Формула Ньютона-Лейбница).** Пусть  $f(x) \in C[a, b]$  и  $F(x)$  - ее первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Любая первообразная непрерывной функции имеет вид:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C$$

Так как

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx + C = C$$

то  $C = F(a)$ . Положив в равенстве

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a)$$

то при  $x = b$  получается

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

□

## 15.2 Усиленная формула Ньютона-Лейбница

**Теорема (Усиленная формула Ньютона-Лейбница).** Пусть  $f \in R[a, b]$  и существует некоторая первообразная  $F(x)$  на  $[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Пусть  $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  - разбиение (кстати равномерное) отрезка. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Согласно теореме Лагранжа, существует  $\xi_k^n \in (x_k, x_{k-1})$  такое, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1})$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k$$

перейдя к пределу с  $n \rightarrow +\infty$  получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

что и завершает доказательство. □

Эта формула работает для любой первообразной  $f(x)$ .

## 15.3 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

**Теорема (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница).** Пусть  $f(x) \in R[a, b]$  и  $F(x)$  - обобщенная первообразная функции  $f(x)$ , тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  - точки внутри  $(a, b)$ , в которых нарушено  $F'(x) = f(x)$ . Добавим к ним  $\alpha_0 = a$ ,  $\alpha_k = b$ . Так как интеграл - непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(\alpha_p - \varepsilon) - F(\alpha_{p-1} + \varepsilon)) = \\ &= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}) \end{aligned}$$

где последнее - так как функция непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{p=1}^k \int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^k (F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})) = \\ &= F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

## 16 Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.

### 16.1 Формула интегрирования по частям

**Теорема (формула интегрирования по частям).** Пусть  $u, v$  - дифференцируемы на  $[a, b]$ , причем  $u', v' \in R[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

*Доказательство.* Очевидно, что  $uv' \in R[a, b]$  и  $u'v \in R[a, b]$ . Кроме того,  $(uv)' = u'v + v'u \in R[a, b]$ , а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = \int_a^b (u'v + v'u) dx = \int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$$

□

### 16.2 Формула замены переменной

**Теорема (формула замены переменной).** Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $x = \phi(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ,  $\phi(t)$  дифференцируема и  $\phi'(t) \in R[\alpha, \beta]$ , тогда

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

*Доказательство.* Интеграл от правой части определен. По свойствам интегрируемых функций  $f(\phi(t))\phi'(t) \in R[\alpha, \beta]$ , причем  $F(\phi(t))$  - первообразная этой функции, если  $F(x)$  - первообразная  $f(x)$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$$

□

## 17 Интеграл от четной, нечетной и периодической функции. Изменение функции в конечном числе точек.

### 17.1 Интеграл четной функции

**Теорема .** Пусть  $f \in R[0, a]$  и является четной. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

*Доказательство.* Функция четна ( $f(-x) = f(x)$ ), значит  $f \in R[-a, a]$ .

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

В первом интеграле замена  $t = -x$ ,  $dt = -dx$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

□

## 17.2 Интеграл нечетной функции

**Теорема .** Пусть  $f \in R[0, a]$  и является нечетной. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

*Доказательство.* аналогично четной функции, но при замене  $f(t) = -f(t)$  и минус не уйдет. □

## 17.3 Интеграл периодической функции

**Теорема .** Пусть  $f \in R[0, T]$  и является периодической с периодом  $T$ . Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.* Сделаем замену  $t = x - a$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(t)dt$$

□

## 17.4 Теорема об изменении функции в конечном числе точек

**Теорема (об изменении функции в конечном числе точек).** Пусть  $g \in R[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x)$  для  $\forall x \in [a, b]$  кроме конечного числа точек. Тогда

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = g(x)$  на  $[a, b]$  везде, кроме точки  $c$ . Построим интегральную сумму для  $f$

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=j} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_j)\Delta x_j$$

тогда, так как  $f = g$  везде, кроме  $c$

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sigma_\tau(g, \xi) - g(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_j)\Delta x_j$$

перейдя к пределу при  $\lambda(\tau) \rightarrow 0$

$$I = I - 0 + 0 = I$$

□