Содержание

Билеты к коллоку

i.g. i.a.

20 марта 2023 г.

1 Понятие первообразной. Теорема о двух первообразных. Понятие неопределенного интеграла.

Замечание: Ниже под обозначением $\langle a, b\rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.

Определение. Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Несколько примеров:

1. Пусть $f(x) = x^2$, тогда первообразная $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$;
2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $F(x) = -\cos x$;
3. Пусть $f(x) = 0$, тогда $F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

и так далее.

Теорема (о двух первообразных). Пусть $F(x)$ - первообразная функция $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x), \Phi(x)$ - первообразные $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle$:

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

По следствию из теоремы Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

тогда $\Psi(x) \equiv const$

Достаточность. Пусть $F(x) - \Phi(x) = C$ выполнено, тогда $\Phi(x) = F(x) + C$ и тогда

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

значит $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. $\square$

.

Определение. Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется *множество всех первообразных на этом промежутке.* Обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Также это значит, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Определение. Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x)$ - непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ везде, кроме не более чем конечного числа точек.

2 Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Рис. 1: Таблица неопределенных интегралов.

.

Доказательство каждого из них состоит в том, что нужно продифференцировать правую часть... **!!ВЫУЧИТЕ ТАБЛИЦУ!!**

3 Свойства неопределенного интеграла.

ladies and gentlemans:

1. **Теорема (связь с производной).** Пусть $\int f(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$, тогда на $\langle a, b\rangle$:

   (a) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

   (b) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

   Доказательство. 1, 2)

   $$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

   Напомним, что $df = f'(x)dx$ и все становится очевидно. □

2. **Лемма.** Если $F(x)$ интегрируема на $\langle a, b\rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. **Теорема (линейность).** Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Тогда

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int f(x)dx$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\Big(\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\Big)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

проинтегрировав обе части получим, что

$$\alpha \int f(x)dx + \beta \int f(x)dx = \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$$

□

4. **Теорема формулы замены переменной.** Пусть на $\langle a, b\rangle$ существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx,\ \varphi(t)\ :\ \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$, дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ - первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$, откуда и следует равенство. □

5. **Теорема формула интегрирования по частям.** Пусть u, v - дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$ и на этом промежутке существует неопределенный интеграл $\int vdu$, тогда на $\langle a, b\rangle$

$$\int vdu = uv - \int udv$$

Доказательство.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

перейдем к дифференциалам

$$d(uv) = udv + vdu \quad \Leftrightarrow \quad vdu = d(uv) - udv$$

проинтегрировав (найдем первообразные) обе части получим требуемое. □

4 Интегрирование рациональных дробей. Теорема о разложении на простейшие дроби и две леммы.

4.1 Некоторые понятия из теории многочленов

Определение. Многочленом (полиномом) будем называть функцию $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Под многочленом нулевой степени будем подразумевать константу.
Определение. *Рациональной дробью* называется дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, $Q_m(x)$ - многочлен степени m.

Определение. *Рациональная дробь* называется правильной, если $n < m$, иначе она называется неправильной.
Лемма. Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - неправильная дробь. Тогда существует единственное представление

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где R_{n-m} - многочлен степени $(n-m)$, $T_k(x)$ - многочлен степени k, причем $k < m$. .
Теорема . Пусть $P_n(x)$ - многочлен n-степени, у которого коэффициент при старшей степени равен единице. Тогда он может быть разложен на множители следующим образом

$$P_n(x) = (x-a)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-a_p)^{k_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1) \cdot ... \cdot (x^2+b_m+c_m)^{l_m},$$

где

$$k_p, l_m \in \mathbb{N}, D = b_m^2 - 4c_m < 0, k_1+k_2+...+k_p+2\cdot(l_1+...+l_m) = n$$

Notabene. Условия $b_i^2 - 4c_i < 0$ *означают, что квадратные трехчлены* $x^2+b_ix+c_i$ *не имеют вещественных корней. В этом случае они имеют два комплексно-сопряженных корня* $\alpha \pm \beta i$.

4.2 Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение. Будем называть простейшими дроби вида:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$
Лемма. Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь и $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, где $\tilde{Q}(a) \neq 0$. Существует число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$, такие что существует единственное представление

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\tilde{Q}(x)},$$

.

Доказательство.

Существование Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k\cdot\tilde{Q}_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}_m(x)}{(x-a)^k\cdot\tilde{Q}_m(x)}$$

Выберем число A так, чтобы число A так, чтобы число a было корнем числителя.

$$P_n(a) - A\cdot\tilde{Q}(x) = 0 \Rightarrow A = \frac{P_n(a)}{\tilde{Q}(a)}, (\tilde{Q}(a) \neq 0)$$

В числителе стоит многочлен $P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}(x)$ с корнем a. Значит, числитель можно разложить как $(x-a)\cdot\tilde{P}(x)$.

$$\frac{P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}(x)}{(x-a)^k\cdot\tilde{Q}(x)} = \frac{(x-a)\cdot\tilde{P}(x)}{(x-a)^k\cdot\tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\tilde{Q}(x)}.$$

Единственность Пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P_1}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\tilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P_2}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\tilde{Q}(x)}$$

Домножая на $(x-a)^k\cdot\tilde{Q}(x)$, получаем:

$$A_1\cdot\tilde{Q}(x) + \tilde{P_1}(x)\cdot(x-a) = A_2\cdot\tilde{Q}(x) + \tilde{P_2}(x)\cdot(x-a), (\forall x \in \mathbb{R})$$

Пусть $x = a$, тогда:

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(a)$$

Так как $\tilde{Q}(a) \neq 0 \Rightarrow A_1 = A_2$, значит коэффициенты многочлена $\tilde{P}$ также можно вычислить однозначно - **противоречие** □

Лемма. Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь и $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot \tilde{Q}(x), p^2 - 4q < 0, \alpha \pm \beta i$ - комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, причем $\tilde{Q}(\alpha + \beta i) \neq 0$. Существуют единственные чисал $A, B \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$ такие, что существует единственное представление

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

.

Доказательство.

Существование

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax+B) \cdot \tilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Выберем такие A, B, что $\alpha + \beta i$ корень числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha + \beta i) - (A(\alpha+\beta i) + B) \cdot \tilde{Q}(\alpha + \beta i) = 0$$

Так как значение многочлена в точке - комплексное число, то

$$\begin{cases} P_n(\alpha+\beta i) = P_1 + iP_2, \\ \tilde{Q}(\alpha+\beta i) = \tilde{Q_1} + i\tilde{Q_2}, \end{cases}$$

где $P_1, P_2, \tilde{Q_1}, \tilde{Q_2} \in \mathbb{R}$ и $\tilde{Q_1^2} + \tilde{Q_2^2} \neq 0$, так как по условию $\tilde{Q}(\alpha + \beta i) \neq 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$P_1 + iP_2 - (A\alpha + iA\beta + B) \cdot (\tilde{Q_1} + i\tilde{Q_2}) = 0$$

Что эквивалентно

$$(P_1 - A(\alpha\tilde{Q_1} - \beta\tilde{Q_2}) - B\tilde{Q_1}) + i(P_2 - A(\alpha\tilde{Q_2} + \beta\tilde{Q_1}) - B\tilde{Q_2}) = 0 + 0 \cdot i$$

Таким образом получим:

$$\begin{cases} A(\alpha\tilde{Q_1} - \beta\tilde{Q_2}) - B\tilde{Q_1} = P_1 \\ A(\alpha\tilde{Q_2} + \beta\tilde{Q_1}) - B\tilde{Q_2} = P_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы:

$$\Delta = (\alpha\tilde{Q_1} - \beta\tilde{Q_2})\tilde{Q_2} - \tilde{Q_1}(\alpha\tilde{Q_2} + \beta\tilde{Q_1}) = -\beta(\tilde{Q_1^2} + \tilde{Q_2^2}) \neq 0$$

Значит при можно найти такие A, B, что $\alpha \pm \beta i$ корень числителя. Значит, числитель $P_n(x) - (Ax+B) \cdot \tilde{Q_m}(x) = (x^2+px+q) \cdot \tilde{P_n}(x)$, причем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{(x^2+px+q) \cdot \tilde{P_n}(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot \tilde{Q_m}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Единственность Пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\tilde{P}_2(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Домножая на $(x^2+px+q)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, получаем:

$$(A_1x+B_1) \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_1(x) \cdot (x^2+px+q) = (A_2x+B_2) \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_2(x) \cdot (x^2+px+q), (\forall x \in \mathbb{C})$$

Пусть $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right)$ тогда:

$$\left(A_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right) + B_1\right) \cdot \tilde{Q}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right)\right) = \left(A_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right) + B_2\right) \cdot \tilde{Q}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right)\right)$$

Так как $\tilde{Q}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{p^2-4q} - p\right)\right) \neq 0 \Rightarrow A_1 = A_2, B_1 = B_2$, значит коэффициенты многочлена $\tilde{P}$ также можно вычислить однозначно - **противоречие** □

Теорема . Любая рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{A_{11}}{(x-a)^{k-1}} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} +$$

$$+ \frac{A_{s1}}{(x-a)^{k_s}} + ... + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+ \frac{B_{t1}X + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + ... + \frac{B_{tl_t}X + c_{tl_t}}{x^2+p_tx+q},$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}, R_{n-m}(x)$ - многочлен степени $(n-m)$ и знаменатель исходной дроби имеет Разложение

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_qx+q_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Доказательство. Если в рациональной дроби степень числителя больше степени знаменателя, то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. То есть нам достаточно рассмотреть случай правильной несократимой дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}, k < m$. Тогда согласно первой лемме:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k-1}} + \frac{\tilde{P}^{(11)}}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\tilde{Q_m(x)}^{(1)} = (x-a_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Далее по все той же лемме можно найти число A_{12} и многочлен $\tilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\tilde{P}^{(11)}}{(x-a)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)} = \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{\tilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{\tilde{P}^{(1k_1)(x)}}{\tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности $k_i, i = 1...s$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + ... + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + ... +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + ... + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{\tilde{P}^{(sk_s)}}{\tilde{Q}^{(s)}(x)},$$

где $\tilde{Q}^{(s)}(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2+px+q_t)^{l_t}$, при это дробь $\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)}$ - правильная. Далее используя вторую лемму:

$$\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}}{\tilde{Q}^{(s)}} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1} \cdot \hat{Q}^{(1)}},$$

где $\hat{Q}^{(1)} = (x^2 + px + q_2)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_t + q_t)^{l_t}$. Продолжая рассуждения, мы обнаружим, что каждой t паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности l_t будут соответствовать l_t простейших дробей третьего и четвертого типа. В результате:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + ... + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + ... +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{sk_s}} + ... + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ... + \frac{B_{1l_1x+C_{1l_1}}}{(x^2+p_1x+q_1)} +$$

$$\frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + ... + \frac{B_{2l_2x+C_{2l_2}}}{(x^2+p_2x+q_2)} + ... + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + ... + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

□

5 Интегрирование простейших дробей

6 Определение интеграла Римана. Пример неинтегрируемой функции.

Определение. Говорят, что **разбиение** τ введено на отрезке, если введена система точек $x_i,\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$, удовлетворяющая условию:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Обозначения:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Определение. Величина $\lambda(\tau) = \max\limits_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \Delta x_i$ называется **мелкостью(или рангом) разбиения(дробления)**.

Определение. Говорят, что на отрезке введено **оснащенное разбиение** (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi_i,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$, таким образом, что они находятся внутри i-ых отрезков.

Определение. Пусть на отрезке задана функция $f(x)$ и введена разбиение (τ, ξ). Величина

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральная суммой** для функции $f(x)$ на отрезке.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является **интегральном Римана** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ :\ \forall \tau\ :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

при этом пишут

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Определение. Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана на отрезке [a, b], называется **интегрируемой по Риману** на этом отрезке и обозначается $f \in R[a, b]$.

6.1 Пример неинтегрируеммой функции.

Например *функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и пусть τ - разбиение на нем.
Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0$$

Тем самым, устремляя мелкость разбиения к нулю, "предел"зависит от выбора средних точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Определение. Расширим определение интеграла:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad a < b$$

7 Понятие сумм Дарбу, их свойства: неравенство для интегральной суммы, представления точными гранями, неравенства при измельчении разбиения, неравенства между верхней и нижней суммой для разных разбиений.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке [a, b] и τ - некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

называют **верхней и нижней суммами Дарбу** для $f(x)$, отвечающими разбиению τ, соответственно.

7.1 Очевидно, что ... aka неравенство для интегральной суммы.

Из определения нижней и верхней сумм дарбу очевидно:

$$s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f, \xi) \le S_\tau(f)$$

Лемма. Ограниченность $f(x)$ сверху(снизу) равносильна конечности верхней(нижней) суммы Дарбу.

Доказательство. Очевидно.
По хорошему, если функция $f(x)$ ограничена сверху, то ее супремум конечное число, и так как все супремумы на отрезках не больше супремума функции, *очевидно*, что верхняя сумма Дарбу конечна. □

7.2 Представление точными гранями.

Лемма. Справедливы равенства.

$$S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi), \quad s_\tau(f) = \inf_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$$

Доказательство. Докажем первое равенство.
Очевидно что... $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$. Пусть f ограничена сверху на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ и по определению супремума

$$\exists \xi_i \in \Delta_i \ : \ M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1...n$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

свернув в правой и левой части формулы получим

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi)$$

и так как $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$:

$$S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$$

по критерию супремума.
Если f не ограничена сверху на $[a,b]$, то она не ограничена хотя бы на одном подотрезке $[a,b]$. Для определенности рассмотрим такой подотрезок Δ_1. Тогда на этом подотрезке супремумом будет являться $+\infty$, а тогда верхняя сумма Дарбу

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i\Delta x_i + \infty = +\infty$$

А так как любая интегральная сумма будет меньше чем $S_\tau(f)$, то $S_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$.

Второе равенство доказывается аналогично. □

7.3 Неравенства при измельчении разбиения.

Определение. Пусть на отрезке [a, b] введенны разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является **измельчением** разбиения τ_2, если $\tau_2 \subset \tau_1$.

Лемма. Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда.

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f)$$

то есть при измельчении разбиения, верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2} = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} M_i\Delta x_i + M_k\Delta x_k$$

Пусть $M'_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},\hat{x}]} f(x)$ и $M''_k = \sup\limits_{x\in[\hat{x},x_k]} f(x)$,

$$M_k \geq M'_k, \quad M_k \geq M''_k$$

и далее распишем $M_k\Delta x_k$

$$M_k\Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}),$$

откуда (очевидно)

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f)$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

7.4 Неравенство между верхней и нижней суммой Дарбу при различных разбиениях.

Лемма. Пусть τ_1 и τ_2 - разбиения отрезка $[a, b]$, тогда.

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Пусть разбиениея $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. По прошлой лемме и неравенстве между интегральными суммами и суммами Дарбу:

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

что *очевидно* доказывает лемму. □

8 Понятия интегралов Дарбу. Неравенство, связывающее суммы и интегралы Дарбу. Необходимое условие интегрируемости функции.

Определение. Пусть функция задана и ограничена на $[a, b]$. Величины

$$I^*(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f), \quad I_*(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f)$$

называются **верхним и нижним интегралами Дарбу** соответственно.

8.1 Неравенство связывающее суммы и интегралы Дарбу.

Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство

$$s_{\tau_1}(f) \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_2}(f)$$

доказательство очевидно.

8.2 Необходимое условие интегрируемости.

Пусть $f \in R[a, b]$, тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена, например сверху. Тогда $S_{\tau}(f) = +\infty$ для любого разбиения τ. Поэтому для любого числа I и разбиения τ найдется такое оснащенное разбиение (τ, ξ), что

$$\sigma_{\tau}(f, \xi) > I + 1$$

то есть никакое число I не является интегралом данной функции. □

9 Критерии интегрируемости (Дарбу, Римана, через интегралы Дарбу). Запись с помощью колебания функции.

Теорема (Критерии интегрируемости). Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $f \in R[a, b]$;
2. Критерий Дарбу:
$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 :\; \forall \tau\; \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$
3. Критерий Римана:
$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \tau\; :\; S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$
4. $$I_* = I^* \quad (= I)$$

Доказательство.

- Докажем $1 \Rightarrow 2$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда
$$\exists\, \delta > 0 :\; \forall \tau\; :\; \lambda(\tau) < \delta\; \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$
откуда (раскрываем модуль)
$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$
перейдем к инфимуму и к супремуму в левой и правой части соответственно
$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_\tau(f) \le S_\tau(f) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$$
откуда
$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$
- Переход $2 \Rightarrow 3$ очевиден, так как мы доказали для любого разбиения, а в критерии Римана сужение к "какому-то".
- Докажем $3 \Rightarrow 4$. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Заметим, что тогда f ограничена. Так как (из предыдущих свойств)
$$s_\tau \le I_* \le I^* \le S_\tau$$
то $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$ для любого ε. То есть $I^* = I_*$.
- И докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $I^* = I_* = I$. Тогда для $\varepsilon > 0$
$$I_* = \sup_\tau s_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_1\; :\; s_{\tau_1} > I_* - \frac{\varepsilon}{4}$$
$$I^* = \inf_\tau S_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_2\; :\; S_{\tau_2} > I^* + \frac{\varepsilon}{4}$$

□

9.1 Запись с помощью колебаний функции.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. **Колебанием функции** на этом множестве называется величина

$$\omega(f,E) = \sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|$$

И из определний супремума и инфимума легко получить

$$\omega(f,E) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x)$$

И в критериях Дарбу и Римана можно заменить $S_\tau - s_\tau$

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i$$

10 Свойства интегрируемых функций: линейность; интегрируемость произведения, частного, модуля; интегрируемость на меньшем отрезке и на склейке отрезков.

Пусть $f(x), g(x) \in R[a,b]$, тогда

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $f(x)g(x) \in R[a,b]$;
3. $|f(x)| \in R[a,b]$;
4. Если $|f(x)| \geq C > 0$ на $[a,b]$, то $\dfrac{1}{f(x)} \in R[a,b]$;
5. Пусть $[c,d] \subset [a,b]$, тогда $f(x) \in R[c,d]$.

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha||f(x)-f(y)| + |\beta||g(x)-g(y)| \leq$$

$$\leq |\alpha|\omega(f,E) + |\beta|\omega(g,E)$$

то переходя к супремуму в левой части

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha|\omega(f,E) + |\beta|\omega(g,E)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, перепишем критерий Дарбу через колебания

$$\exists\delta_1\ :\ \forall\tau:\ \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$$

аналогично для g:

$$\exists\delta_2\ :\ \forall\tau:\ \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\omega(g,\Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$$

Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\alpha f + \beta g)\Delta x_i \leq |\alpha|\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + |\beta|\omega(g)\Delta x_i \leq$$

$$\leq \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} + \frac{\beta\varepsilon}{2(|\beta|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит по критерию Дарбу, $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$.

2. Так как $f, g \in R[a,b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a,b]$, то есть
$$\exists C: \ |f(x)| < C, |g(x)| < C, \forall x \in [a,b]$$
Кроме того, так как
$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \le$$
$$\le |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \le C(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$
то переходя к супремуму в левой части неравенства получим, что
$$\omega_i(fg) \le C(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$
Распишем критерии Дарбу через колебания для f, g (прошлый пункт) и тогда
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg)\Delta x_i \le C(\sum_{i=1}^{n} f\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g\Delta x_i) \le$$
$$\le C\Big(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\Big) = \varepsilon$$

3. Так как
$$||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)| \le \omega_i(f)$$
то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что
$$\omega_i(|f|) \le \omega_i(f)$$
далее аналогично п1, п2

4. Так как
$$\Big|\frac{1}{f(x) - \dfrac{1}{f(y)}}\Big| = \frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)} \le \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \le \frac{\omega_i(f)}{C^2}$$
то переходя к супремуму
$$\omega_i(\frac{1}{f}) \le \frac{\omega_i(f)}{C^2}$$
далее аналогично п1, п2

5. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, то, согласно критерию Дарбу
$$\exists \delta: \ \forall \tau: \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$$
Пусть τ' - произвольное разбиение отрезка $[c,d]$ такое, что $\lambda(\tau') < \delta$. Дополним его до разбиения τ отрезка $[a,b]$ так, чтобы $\lambda(\tau) < \delta$, введя разбиения отрезков $[a,c]$ и $[d,b]$, но не добавляя новых точек в отрезок $[c,d]$. Тогда
$$\sum_{[c,d]} \omega_i(f)\Delta x_i \le \sum_{[a,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$$
так как все слагаемые входящие в левую сумму, входят в правую сумму и омеги больше нуля. Таким образом $f \in R[c,d]$.

$\square$

.

10.1 Склейка отрезков

Теорема (склейка отрезков). Пусть $f(x) \in R[a,c]$, $f(x) \in R[c,b]$, тогда $f(x) \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R[a,c]$, то по критерию Римана

$$\exists \tau_1 : \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

и аналогично для $f \in R[c,b]$

$$\exists \tau_1 : \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем

$$\sum_{[a,b]} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

значит по критерию Римана $f(x) \in R[a,b]$. □

11 Классы интегрируемых функций: непрерывная, с конечным числом точек разрыва, монотонная.

11.1 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема (об интегрируемости непрерывной функции). Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора, а значит

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Пусть τ - разбиение отрезка $[a,b]$, причем $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$

тогда по критерию Римана, $f \in R[a,b]$. □

11.2 Конечное число точек разрыва

Теорема (о конечном числе точек разрыва). Пусть f задана и ограничена на $[a,b]$. Пусть, кроме того, множество точек разрыва - конечно. Тогда функция интегрируема.

Доказательство. Так как функция ограничена, то $|f| \leq C$. Тогда $\omega(f,[a,b]) \leq 2C$ (так как колебание по определению - модуль разности супремума и инфимума, которые могут быть равны C и -C соответственно).

Пусть $\varepsilon > 0$. Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16Ck}$, где k - количество точек разрыва. Дополнение к этому набору интервалов (к набору интервалов окрестностей k точек) - это набор отрезков(отрезки, где нет точек разрыва), на каждом из которых $f(x)$ - непрерывна, а следовательно

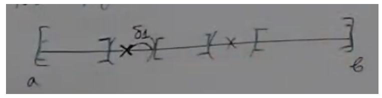

Рис. 2: Схематичный график функции с k точек разрыва.

равномерно непрерывна. А так как число отрезков конечно($k+1$ штука), то существует δ_2 такое, что если x', x'' из какого-то отрезка и $|x'-x''|<\delta_2$, то

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Пусть $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ и τ - разбиение отрезка $[a,b]$ мелкости меньше δ.

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i=\sum{}^{'}\omega_i(f)\Delta x_i+\sum{}^{''}\omega_i(f)\Delta x_i$$

где первая сумма - отрезки, не имеющие общих точек с интервалами, а вторая - по всем остальным отрезкам. Поэтому

$$\sum{}^{'}\omega_i(f)\Delta x_i\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta+2\delta_1+\delta)k\leq\frac{\varepsilon}{4C}$$

а значит

$$\sum{}^{''}\omega_i(f)\Delta x_i\leq\frac{\varepsilon}{4C}2C=\frac{\varepsilon}{2}$$

и тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i\leq\varepsilon$$

в итоге получаем требуемое. □

11.3 Интегрируемость монотонной функции

Теорема (об интегрируемости монотонной функции). Заданная и монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $f(x)\equiv C$ - интегрируемость очевидна.

2. Пусть $f(x)\not\equiv C$ и для определенности не убывает. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда положив $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ и взяв разбиение τ отрезка $[a,b]$ мелкости меньше δ, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\varepsilon$$

(кратко: оценили сверху так, что длина всех отрезков меньше eps/(b-a))
Значит, согласно критерию Римана, теорема доказана.

□

12 Свойства интеграла Римана: линейность; аддитивность по промежутку, монотонность, отделимость от нуля, неравенство с модулем.

12.1 Линейность определенного интеграла

Теорема (о линейности определенного интеграла). Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ известно из прошлых теорем. Пусть $I_f = \int_a^b f(x)dx, I_g = \int_a^b g(x)dx$. Тогда для разбиения (τ, ξ) имеем

$$\Big|\sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \xi) - \alpha I_f - \beta I_g\Big| \leq |\alpha|\Big|\sigma_\tau(f, \xi) - I_f\Big| + |\beta|\Big|\sigma_\tau(g, \xi) - I_g\Big|$$

так как I_f и I_g интегрируемы $\Big($то есть модули этих разностей, допустим, меньше $\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ и $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}\Big)$ получим требуемое. □

12.2 Аддитивность по промежутку интегрирования

Теорема (о аддитивности промежутка интегрирования). Пусть $f \in R[a, b], c \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Интегрируемость функциии f на промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ известна. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$, содержащее точку c. Тогда оно порождает два разбиения τ_1, τ_2, причем $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$. И так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

и при $\lambda(\tau) \to 0$ получаем требуемое. □

12.3 Монотонность интеграла

Теорема (о монотонности интеграла). Пусть $a \leq b, f, g \in R \in [a, b]$, причем $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

переходя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$ получаем требуемое. □

.

Важное следствие
Пусть $a \leq b, f \in R[a, b], m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x), M = sup_{x \in [a,b]} f(x)$, тогда

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

12.4 Отделимость от нуля

Теорема (об отделимости от нуля). Пусть $a < b, f \in R[a,b], f \geq 0$ и существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в x_0. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Доказательство. Так как $f(x) > 0$ и f непрерывнав точке x_0, то существует окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > f(x_0)/2$. Тогда в силу монотонности

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{[a,b]\cap U(x_0)} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} + \int_{[a,b]\cap U(x_0)} f(x)dx > 0$$

□

12.5 Неравенство с модулем

Теорема (о неравенстве с модулем). Пусть $f \in R[a,b]$, тогда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна. А так как

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i\right|$$

то переходя к пределам получим требуемое. □

13 Первая теорема о среднем

Теорема (первая теорема о среднем). Пусть $f, g \in R[a,b], g(x)$ не меняет знак на $[a,b], m = \inf f(x), M = \sup f(x)$, тогда

$$\exists \mu \in [m,M]: \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Кроме того, если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),\ x \in [a,b]$$

и по монотонности интеграла

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то μ - любое число отрезка. А если $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то $\int_a^b g(x)dx > 0$ и, поделив на этот интеграл получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Тогда пусть $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ (напомним, интеграл - это какое-то число).

Если $f \in C[a,b]$, то по теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m,M]$ существует $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi) = \mu$. □

14 Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, дифференциируемость (две теоремы).

Определение. Пусть $f \in R[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$$

называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

14.1 Непрерывность $\Phi(x)$

Теорема (о непрерывности $\Phi(x)$).

$$\Phi(x) \in C[a,b]$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b], x_0+\Delta x \in [a,b]$. Так как функция $f \in R[a,b]$, то она ограничена на отрезке, то есть

$$|f(x)| \leq C, \ x \in [a,b]$$

и тогда

$$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)|dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} Cdx\right| = C|\Delta x|$$

значит при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Phi(x_0+\Delta x) \to \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции в точке x_0, а так как x_0 - произвольная точка $[a,b]$, то утверждение доказано. □

14.2 Дифференцируемость $\Phi(x)$

Теорема (о дифференцируемости $\Phi(x)$ или т.Барроу). $\Phi(x)$ дифференцируема в точках непрерывности функции $f(x)$, причем

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a,b]$.

$$\left|\frac{\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx - f(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right| =$$

$$\left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))dx}{\Delta x}\right|$$

(последний переход - сворачивание $f(x_0)\Delta x$ как интеграла по такому же промежутку)
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда (так как $f(x)$ непрерывна)

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in [a,b] : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Пусть $\Delta x < \delta$ $(x - x_0 < \delta)$, тогда

$$\left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))dx}{\Delta x}\right| \leq \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x) - f(x_0)|dx}{\Delta x}\right| < \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon \cdot dx}{\Delta x}\right| = \varepsilon$$

что означает, что (по определению производной)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

□

15 Формула Ньютона-Лейбница. Усиленная формула и обобщенная формула.

15.1 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x) \in C[a,b]$ и $F(x)$ - ее первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Любая первообразная непрерывной функции имеет вид:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

Так как

$$F(A) = \int_a^a f(x)dx + C = C$$

то $C = F(a)$. Положив в равенстве

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + F(a)$$

то при $x = b$ получается

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\square$

15.2 Усиленная формула Ньютона-Лейбница

Теорема (Усиленная формула Ньютона-Лейбница). Пусть $f \in R[a,b]$ и существует некоторая первообразная $F(x)$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ - разбиение (кстати равномерное) отрезка. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_k, x_{k-1})$ такое, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1})$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k$$

перейдя к пределу с $n \to +\infty$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

что и завершает доказательство. $\square$

Эта формула работает для любой первообразной $f(x)$.

15.3 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Теорема (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x) \in R[a,b]$ и $F(x)$ - обобщенная первообразная функции $f(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ - точки внутри (a,b), в которых нарушено $F'(x) = f(x)$. Добавим к ним $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$. Так как интеграл - непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p - \varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} (F(\alpha_p - \varepsilon) - F(\alpha_{p-1} + \varepsilon)) =$$

$$= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})$$

где последнее - так как функция непрерывна. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} \int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}) =$$

$$F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a)$$

□

16 Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.

16.1 Формула интегрирования по частям

Теорема (формула интегрирования по частям). Пусть u, v - дифференцируемы на $[a,b]$, причем $u', v' \in R[a,b]$, тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. Очевидно, что $uv' \in R[a,b]$ и $u'v \in R[a,b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + v'u \in R[a,b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = \int_a^b (u'v + v'u)dx = \int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_b^a$$

□

16.2 Формула замены переменной

Теорема (формула замены переменной). Пусть $f(x) \in C[a,b], x = \phi(t) \;:\; [\alpha, \beta] \to [a,b], \phi(t)$ дифференцируема и $\phi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Доказательство. Интеграл от правой части определен. По свойствам интегрируемых функций $f(\phi(t))\phi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, причем $F(\phi(t))$ - первообразная этой функции, если $F(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

□

17 Интеграл от четной, нечетной и периодический функции. Изменение функции в конечном числе точек.

17.1 Интеграл четной функции

Теорема . Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Доказательство. Функция четна ($f(-x) = f(x)$), значит $f \in R[-a, a]$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

В первом интеграле замена $t = -x,\ dt = -dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

□

17.2 Интеграл нечетной функции

Теорема . Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Доказательство. аналогично четной функции, но при замене $f(t) = -f(t)$ и минус не уйдет. □

17.3 Интеграл периодической функции

Теорема . Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T. Тогда

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx,\ a \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Сделаем замену $t = x - a$

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

□

17.4 Теорема об изменении функции в конечном числе точек

Теорема (об изменении функции в конечном числе точек). Пусть $g \in R[a, b], f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$ кроме конечного числа точек. Тогда

$$\int_{a}^{b} g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Доказательство. Пусть $f(x) = g(x)$ на $[a, b]$ везде, кроме точки c. Построим интегральную сумму для f

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=j} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_j)\Delta x_j$$

тогда, так как $f = g$ везде, кроме c

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sigma_\tau(g, \xi) - g(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_j)\Delta x_j$$

перейдя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$

$$I = I - 0 + 0 = I$$

$\square$