Конспект лекций (12-...)

Илья Астафьев

24 апреля 2023 г.

Содержание

1 Несобственный интеграл **3**
1.1 Свойства несобственного интеграла . . . 3
1.2 Интеграл с несколькими особыми точками . . . 5
1.3 Интеграл от знакопостоянной функции . . . 5
1.4 Интеграл от знакопеременной функции . . . 6
1.5 Интеграл в смысле главного значения . . . 8
1.6 *Полезные вещи* . . . 9

2 Числовые ряды **11**
2.1 Основные понятия . . . 11
2.2 Свойства рядов . . . 12
2.3 Положительные ряды . . . 12
2.4 Интегральный признак Коши . . . 16
2.5 Знакопеременные ряды . . . 18
2.6 Произведение рядов . . . 21

1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}, f(x) \in R_{loc}(E)$ - локально интегрируема на E, если $f \in R[a, b]$ для $\forall [a, b] \subset E$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $(b \in \mathbb{R} \cup +\infty)$

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx, \text{ при } \omega \in [a, b)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} F(\omega) \text{ - несобственный интеграл}$$

Если $\lim F(\omega)$ конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится

- Если $\int_a^b$в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - I рода
- Если $\int_a^b$в $\mathbb{R}$ - II рода

Если $f \notin R[a, \bar{b}]$, то $\bar{b}$ называется *особой точкой* $f(x)$. Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \ - \ I \text{ рода } (+\infty \text{ особая точка})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} - II \text{ рода } (0 \text{ особая точка})$$

Если:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega \Rightarrow \begin{cases} \in \mathbb{R}, \text{то сходится,} \\ \notin \mathbb{R}, \text{то расходится} \begin{cases} \pm\infty \\ \nexists \ \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \end{cases}$$

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^{+\infty}, \ \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, \ \alpha = 1 \\ +\infty, \ \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится при } \alpha < 1. \text{ Расходится при } \alpha \geq 1$$

1.1 Свойства несобственного интеграла

1. Линейность. $f, g \in R_{loc}[a, b)$

   - $$\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

     если

     $$\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \bar{\mathbb{R}}$$

   - $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

   - **Следствие:**
     Сходится + Сходится = Сходится
     Сходится + Расходится = Расходится
     Расходится + Расходится = ?

2. Монотонность. $f, g \in R_{loc}[a,b), f(x) \le g(x)$ на $[a,b)$ и $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \overline{R}:$
   Тогда:
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$
3. Аддитивность. $f \in R_{loc}[a,b), c \in (a,b):$
   Тогда:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
   $\triangleright$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^c + \int_c^\omega = \int_a^c + \lim_{\omega \to b-0} \int_c^\omega$$
   $\blacktriangleleft$
4. Формула по частям. $u, v -$ дифференцируема на $[a,b), u^{'} v^{'} \in R_{loc}[a,b)$
$$\int_a^b u(x) \cdot v^{'}(x) = uv \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u^{'}(x)dx$$
5. Формула замены переменной. $f \in C[a,b), x = \phi(t)\ [\alpha,\beta) \to [a,b).$ $\phi -$ диффернцируема на $[\alpha,\beta)$, $\exists \phi(\beta - 0) = \lim\limits_{t \to \beta-0} \phi(t)$ в $\overline{R}$
   Тогда:
$$\int_{\phi(\beta-0)}^{\phi(\alpha)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi^{'}(t)dt$$
   и эти интегралы (не)существуют одновременно
   $\triangleright$
   (a) $\exists I_1 \in \overline{R}$,
$$I_2 = \lim_{\omega \to \beta-0} \int_\alpha^\omega f(\phi) \cdot \phi^{'} dt = \lim_{\omega \to \beta-0} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx = I_1$$
   (b) $\exists I_2 \in \overline{R}$,
$$I_1 = \lim_{\omega \to \phi(\beta-0)} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx$$
   - Если $\phi(\beta - 0) < b$, то очевидно
   - Пусть $x_n \to \phi(\beta - 0) = b, x_n \in [\phi(\alpha), b)$
     для $\forall n\ \exists \gamma_n : \phi(\gamma_n) = x_n$
     Докажем, что
$$\gamma_n \to \beta - 0, \text{ при } n \to +\infty$$
     Если $\gamma \nrightarrow \beta - 0$, то $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 :\ \exists n \ge n_0$
$$\gamma_n < \beta - \varepsilon$$
$$\phi(\gamma_n) \le \sup_{[\alpha, \beta-\varepsilon]} \phi < b$$
     Отсюда следует, что $\phi(\gamma_n) \nrightarrow b$

   Итак, для $\forall x_n \to \phi(\beta - 0):$
$$\int_{\phi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_n} f(\phi(t)) \cdot \phi^{'}(t)dt \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\alpha^{\beta-0} f(\phi) \cdot \phi^{'}(t)dt$$
   $\blacktriangleleft$

1.2 Интеграл с несколькими особыми точками

1.

$$f \in R(a,b) \int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^c f(x)dx + \lim_{\omega \to b-0} \int_c^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

где $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся}$$

2. Пусть f определена на $(a,b); a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ кроме конечного числа точек. $C \in (a,b)$ называется особой точкой f, если $f \notin R[\alpha, \beta]$ для $\forall \alpha, \beta : a < \alpha < \beta < b$
$a(b)$ - особая, если $a = -\infty (b = -\infty)$ или $f \notin R[a, \alpha] \forall \alpha \in (a,b)$

Пусть $c_1 < c_2 < ... < c_{n-1}$ - особые точки f на (a,b)
$c_0 = a, c_n = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx \text{ - сходится } \forall i = 1...n$$

Проблема: если пытаться взять существенно большие значения для b, то зачастую численный метод вычисления несобственного интеграла даст сильно неточное значение.
Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$\int_1^{10^6} \frac{dx}{x} = 6 \cdot \ln 10 \approx 13$$

$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x} = 10 \cdot \ln 10 \approx 23$$

1.3 Интеграл от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a,b), f \geq 0$ на $[a,b)$ **Теорема .** Пусть $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx$ Тогда: 1. $F \uparrow$ 2. $\int_a^b f(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена
Доказательство:
1.

$$\omega_1 < \omega_2, \ f(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} = \int_a^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \geq F(\omega_1)$$

2. Очевидно

Теорема (признаки сравнения).
Пусть $f, q \in R_{loc}[a,b)$

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a,b)$. Тогда
   - Если $\int_a^b g(x)dx$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - сходится
   - Если $\int_a^b g(x)dx$ - расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - расходится
2. $f \sim g$, при $x \to b-0$. Тогда
   - $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся

Доказательство:
1. Очевидно
2. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \alpha(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 1$$
$$\frac{1}{2} \le \alpha(x) \le \frac{3}{2} \text{ для } x \in (\delta, b)$$
$$\frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2}g(x)$$

1.4 Интеграл от знакопеременной функции

Теорема (Критерий Коши).

$$\text{Пусть } f \in R_{loc}[a,b). \text{Тогда } \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta \in (a,b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow$$
$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx . \exists \lim_{\omega \to b-0} F(\omega) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta : \ \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta \ |F(\delta_1) - F(\delta_2)| < \varepsilon$$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится абсолютно, если } \int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится}$$

Теорема .
Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится

Доказательство:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится } \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a,b) \ \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \le \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Теорема (о сумме с абсолютно сходящимся интегралом).
Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a,b), f(x) = g(x) + h(x)$ на $[a,b)$ и $\int_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно.
Тогда:

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся абсолютно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся условно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба расходятся.

Доказательство:

$$|f| \le |g| + |h|$$

Пример:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$
Рассмотрим:
$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$$
$$\delta_1 = \pi n, \delta_2 = 2\pi n$$
$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x|dx =$$
$$\frac{1}{2\pi n}\cdot n \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} = \varepsilon$$
Вопросы из чата:

Пусть $f \in R_{loc}[a, +\infty)$. Правда ли, что:
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ - сходится } \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Ответ: нет, неправда.
$$f \in C[a, +\infty),\ f \geq 0 \nRightarrow f(x) \text{ - ограничена}$$

Теорема (Признак Абеля-Дирихле).

Пусть $f(x) \in C[a, b),\ g(x) \in C^1[a, b)$. Тогда для сходимости $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ достаточно одной пары условий

- Признак Дирихле
  1. $F(\omega) = \int_a^{\omega} g(x)dx$ - ограничена
  2. $g(x)$ монотонна и $g(x) \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$
- Признак Абеля:
  1. $\int_a^b f(x)dx$ сходится
  2. $g(x)$ монотонна и ограничена

$\triangleright$

1. Дирихле: $F^{'}(x) = f(x)$

   Критерий Коши: $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta \in (a, b)\ \forall\delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b)$
$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\cdot g(x)dx\right| = \left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)d(F)\right| = \left|g(x)\cdot F(x)\Big|_{\delta_1}^{\delta_2} = \int_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)\cdot g^{'}(x)dx\right| \leq$$

$$\leq C\cdot(|g(\delta_1)|+|g(\delta_2)|)+C\cdot\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2}|g^{'}(x)dx|\right|\leq 2C(|\delta_1|+|g(\delta_2|)\leq 4C\cdot\varepsilon$$

2. Абель: т.к $g(x)$ - монотонна и ограничена $\Rightarrow$

$$\exists\lim_{x\to b-0}g(x)=A\in\mathbb{R}$$

$$g(x)-A \text{ - монотонна и } \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$$

Рассмотрим

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=\int_a^b f(x)\cdot(g-A)dx+A\cdot\int_a^b f(x)dx\Rightarrow \text{ сходится по Дирихле}$$

◀

Пример:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

$f(x)=\sin(x)$;

$F(\omega)=\int_0^{\omega}\sin(x)dx=1-\cos(\omega)$ - ограничена;

$g(x)=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ и $\downarrow$

Отсюда следует, что:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx \text{ - сходится}$$

1.5 Интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{c}+\int_{c}^{+\infty}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b$$

Из того, что мы знаем на данный момент, мы делаем вывод, что интеграл расходится. Чтобы учитывать подобные ситуации, вводят понятние:

Определение. Пусть $f\in R_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда $v.p\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx$

Определение. Пусть $f\in R_{loc}([a,b]\backslash\{c\})\Rightarrow v.p\int_a^b=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$

Лемма. Если сходится $\int_a^b$, то сходится и $v.p\int_a^b=\int_a^b$.

1.6 *Полезные вещи*

1. Интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$\triangleright$

$$e^x \geq x + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(x^2+1)^k}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^k dx \leq \int_{-1}^{1} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}$$

В левой части делаем замену $x = \sin(t)$, в правой части сделаем замену $\tan(t)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(t) dt$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) =?$$

$$2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

Делаем замену $t = \sqrt{k} \cdot x$

$$\frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi \cdot \frac{2k \cdot \sqrt{k}}{(2k-1)} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$\blacktriangleleft$

2. **Теорема (Неравенство Гёльдера).**
   Пусть $f, g \in R[a,b], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

▷

$$a_k = f(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$$
$$b_k = g(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$$

◀

2 Числовые ряды

2.1 Основные понятия

Определение. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$. Числовым рядом с общим членом a_n называется символ вида:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Определение. Для ряда $\sum a_k$ определим $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - последовательность частичных сумм.

Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
Если $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$ ($\notin \mathbb{R}$), то $\sum a_n$ называется сходящимся (расходящимся).

Пример:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ расходится

Определение. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$ называется $n-$нным остатком ряда $\sum_{k=1}^{\infty}$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$

Лемма. Ряд $\sum a_k$ - сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ - сходится, для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Лемма. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Leftrightarrow R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\triangleright$ Пусть $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. $R_n = S - S_n$ $\blacktriangleleft$
Теорема (Необходимое условие сходимости).
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\triangleright$ $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$
$\blacktriangleleft$
Теорема (Критерий Коши сходимости ряда).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}:$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < E$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - гармонический ряд}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

2.2 Свойства рядов

1. Линейность
   Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходятся, то сходится и ряд:
   $$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
2. Монотонность
   Если $a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, то
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2.3 Положительные ряды

Рассмотрим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0$$

Лемма. Если $a_n \geq 0$, то

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \uparrow$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup S_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничена

.

Теорема (Признаки сравнения).
Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда:

1. $\sum b_n$ - сходится $\Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $\sum a_n$ - расходится $\Rightarrow \sum b_n$ - расходится
3. Пусть $a_n, b_n \geq 0, a_n \sim b_n$.
   Тогда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ оба сходятся или оба расходятся. $\triangleright$ $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$ $\blacktriangleleft$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

Теорема (Радикальный признак Коши).
Пусть $a_n \geq 0, \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$
Тогда:

1. Если $l > 1$, то $\sum a_n$ расходится
2. Если $l < 1$, то $\sum a_n$ сходится

Notabene. Если $l = 1$, то ?.

$$\sum \frac{1}{n} \text{ - расходится, } \frac{1}{n^2} \text{ - сходится}$$

Доказательство. ·

1. $\sqrt[n]{a_n} \to l > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1$ н.с.н.н

   $a_n > 1 \Rightarrow\Rightarrow a_n \nrightarrow 0$
2. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

   $\exists n_0 : \ \forall n \geq n_o$
   $$\sqrt[n]{a_n} < q$$
   $$a_n < q^n$$
   $$\sum q^n \text{ - геометрическая прогрессия } 0 < q < 1$$

Теорема (признак Даламбера).
Пусть $a_n > 0, \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то $\sum a_n$ расходится
2. Если $l < 1$, то $\sum a_n$ сходится

$\triangleright$

1. $l > 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,\ a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n \nrightarrow 0$
2. $l < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{l+1}{2}$ при $n \geq n_0$
   $a_{n+1} < q \cdot a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+k} < q_k \cdot a_{n_0}$

◀

Notabene.

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = l$
2. *Радикальный признак Коши "сильнее" признака Деламбера:*
   т. е если $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1$, *то*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n}$$

Даламбер:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

Коши:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((-1)^{n+1} + 2) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot ((-1)^n + 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} + 2}{(-1)^n + 2} \Rightarrow \nexists \lim$$

.

Пример:

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

Очевидно, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} (\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n) = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 = +\infty \text{ - расходится}$$

По теореме Лагранжа:

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = (\ln \ln x)'(\xi) = \frac{1}{\xi \ln \xi} < \frac{1}{n \ln n}$$

$$\xi \in (n, n+1) \Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln n} \text{ - расходится}$$

Теорема (признак Куммера).
Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\sum \frac{1}{b_n}$ - расходится.
Пусть $\exists l = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(b_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right)$ Тогда:

1. $l > 0 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $l < 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится

$\triangleright$

1. Н.с.н.н:
$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} > \frac{l}{2} \cdot a_{n+1} > 0$$
Давайте докажем, что $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$
$$a_n \cdot b_n \downarrow \text{ и ограничен снизу}$$
Рассмотрим
$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot a_n - b_{n+1} - a_{n+1}) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= \lim_{N \to \infty} (b_1 \cdot a_1 - b_{N+1} \cdot a_{N+1}) \in \mathbb{R} \text{ - сходится} \Rightarrow \sum a_n \text{ - сходится}$$
2. Н.с.н.н
$$b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} < 0 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow b_n \cdot a_n \uparrow \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n \cdot b_n \geq a_{n_0} \cdot b_{n_0} = C > 0 \Rightarrow a_{n+1} > \frac{b_n \cdot a_n}{b_{n+1}} \geq \frac{C}{b_{n+1}} \text{ - расходится}$$

$\blacktriangleleft$ *Notabene. при $b_n = 1$: Даламбер. .*

Теорема (Признак Раабе).
Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l$. Тогда:

1. $l > 1$, то $\sum a_n$ - сходится
2. $l < 1$, то $\sum a_n$ - расходится

$\triangleright$ Используем признак Куммера: $b_n = n$ $\blacktriangleleft$

Теорема (Признак Бертрана).
Пусть $a_n > 0$. $\exists l = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$

1. $l > 0 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $l < 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится

$\triangleright$ Используем признак Куммера: $b_n = n \cdot \ln n$ $\blacktriangleleft$

Теорема (Признак Гаусса).
Пусть $a_n > 0$. $\frac{a_n}{a_{n+1}}\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right),\ \gamma > 0.$
Тогда:

1. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится (Доказывать по Даламберу)
2. $\lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится (Доказывать по Даламберу)
3. $\lambda = 1,\ \mu > 1$, то $\sum a_n$ - сходится (Доказывать по Раабе)
4. $\lambda = 1,\ \mu \le 1$, то $\sum a_n$ - расходится (Доказывать по Раабе: $\mu < 1$, по Бертрану: $\mu = 1$)

2.4 Интегральный признак Коши

Теорема (Интегральный признак Коши).
Пусть $f(x)$ - монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ и } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ оба (ра-)сходятся}$$

$\triangleright$ Пусть $f \downarrow$

1. Если $f(x) < 0$ на $(a, +\infty)$
   Тогда $\sum f(n)$ расходятся, так как $f(n) \nrightarrow 0$

   $$\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx < (\delta_2 - \delta_2) \cdot f(a) \to -\infty \text{ - расходится.}$$

   Критерий Коши не выполнен.
2. Пусть $f(x) > 0$:

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n) \ \Big| n = 1..N$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leq \int_{1}^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

Notabene. Верно ли, что если

$$F(N) = \int_{1}^{N} f(x)dx \text{ и } \exists \lim_{N\to+\infty} F(N)\ (N \in \mathbb{N}),\text{ то } \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \text{ - сходится?}$$

Ответ: Если $f(x)\downarrow$, то да. Иначе - нет .

◀ Пример:

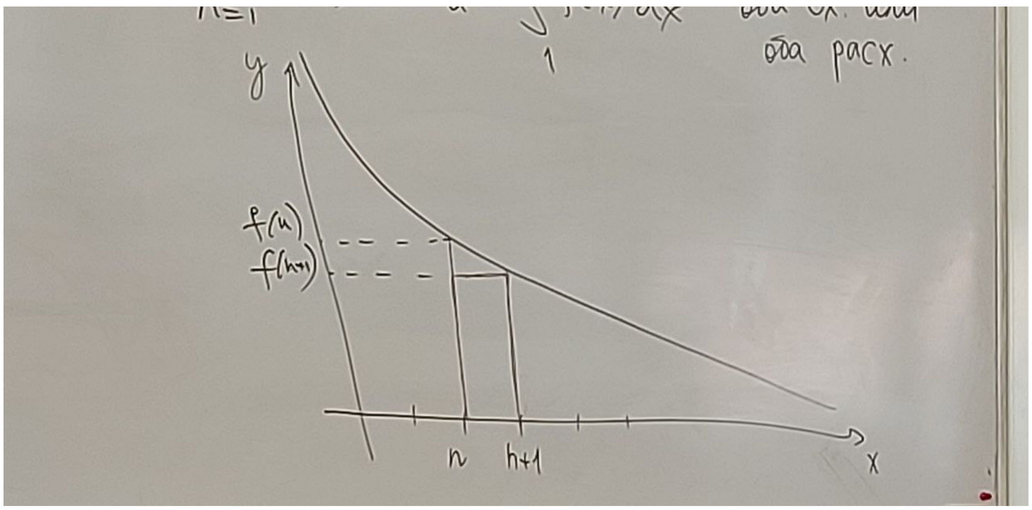

Рис. 1: График с лекции

Проэкспериментируем с интегральным признаком:

$$\sum \frac{1}{n \ln n} - ?$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = F(\ln\ln(\infty)) - F(\ln\ln(2)) = +\infty \Rightarrow \text{ ряд расходится}$$

Лемма. (о сравнении ряда и интеграла).
Пусть $f(x) \geq 0, \downarrow$ на $[1, +\infty)$. Тогда

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx \text{ имеет предел в } \mathbb{R}$$

▷ Рассмотрим

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)fx \geq 0 \Rightarrow A_n \uparrow$$

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathbb{R}$$

◀

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - расходится}$$

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = A_n + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = A_n + \ln(n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \sim \ln(n+1) \sim \ln n, \text{ при } n \to +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), (A_n \to \gamma \approx 0.58 \text{ - Постоянная Эйлера-Маскерони})$$

2.5 Знакопеременные ряды

Определение.
$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ сходится
$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum |a_n|$ расходится $\sum a_n$ сходится

Лемма. Если $\sum |a_n|$ - сходится, то $\sum a_n$ сходится.

Теорема .
$a_n = b_n + c_n,\ \sum c_n$ - сходится абсолютно. Тогда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково
▷ никак ◀

Лемма. (Преобразования Абеля).
Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k-1})$$

▷ Пусть $a_0 = 0$.
Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} \cdot b_k$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$

◀

Теорема (Признак Дирихле-Абеля).

Для сходимости $\sum_k^{\infty} a_k \cdot b_k$ достаточно выполнения одной из двух пар условий:

Признак Дирихле:

1. $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - ограничены
2. $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - монотонно

Признак Абеля:

1. $\sum_k^{\infty} a_k$ - сходится
2. b_n - ограниченно и монотонно

▷

1. $$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} |A_n(b_k - b_{k+1})| \leq C \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = C \cdot |b_1 - b_{n+1}| \to C \cdot b_1 \Rightarrow$$

$$\exists \lim \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

2. Сами

◀ Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

- $a_n = (-1)^n$
- $b_n = \frac{1}{n} \downarrow\to 0$
- $A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = 0$ или 1

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}\text{сходится, но не абсолютно}$$

Еще:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1)$$

Теорема (Признак Лейбница).

Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n,\ a_n \geq 0$$

Если $a_n \to 0$ и $\downarrow$, то ряд сходится.

$\triangleright$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$$

$$S_{2n} \uparrow$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1 \Rightarrow S_{2n} \text{ имеет предел}$$

Пусть $S_{2n} \to S$. Тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} = a_{2n+1} \to S + 0 = S \Rightarrow S_n \to S$$

◀

Следствие: $S \leq a_1$, $|R_n| \leq a_{n+1}$

Теорема (Римана).

Пусть $\sum^{\infty} a_n$ сходится условно, и $S \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists$ перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = S$$

А также $\exists$ перестановка, не имеющая сумму в $\overline{\mathbb{R}}$

$\triangleright$ Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$$

◀

1. $S \in \mathbb{R}, S \geq 0:$

   Пусть $p_1 \in \mathbb{N}$ - наименьшее число такое, что

$$S \leq \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+$$

Пусть $q_1 \in \mathbb{N}$ - наименьшее число такое, что

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{q_1} a_n^- < S$$

Пусть p_2 - аналогично с p_1:

$$S \leq \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{q_1} a_n^- + \sum_{n=p_1+1}^{p_1+p_2} a_n^+$$

Будем группировать суммы как $A_1, A_2, A_3, ...$ и каждый раз чередовать суммы так, чтобы результат $\tilde{S}_k$ был больше/меньше S.

В итоге имеем

$$\left|\tilde{S}_k - S\right| < |a_j| \to 0 \Rightarrow \tilde{S}_k \to S$$

Так как в каждой группе члены одного знака, то сам ряд $\to S$

2.6 Произведение рядов

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1...n;\ j=1...m} a_i b_j$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$(\phi, \psi):\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ - биекция

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} \cdot b_{\psi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Теорема (Коши о произведении рядов).
Если $\sum a_n, \sum b_n$ - сходятся асболютно, то для $\forall$ биекции $(\phi, \psi):\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} b_{\phi(k)}$$

сходится абсолютно, причем $S = S^A \cdot S^B$

$\triangleright$

1. *Сходимость*

   Возьмем

$$S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_{\phi(k)}| \cdot |b_{\psi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{max(\phi(k))} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{max(\psi(k))} \leq S^{|A|} \cdot S^{|B|}$$

Значит сходится абсолютно.

2. *Сходимость к*

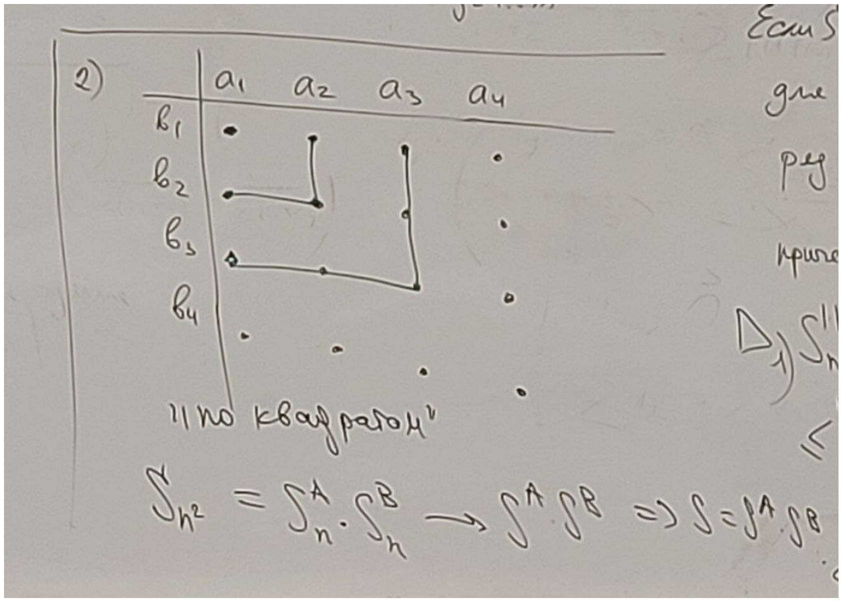

Рис. 2: Табличка :D

◀ **Определение.** произведение "по Коши"или "по диагонали"

Для $\sum^\infty a_n,\ \sum^\infty b_n$:

$$\sum^\infty a_n \cdot \sum^\infty b_n = \sum_{n=1}^\infty c_n,\ c_n = \sum_{j=1}^n a_j \cdot b_{n-j+1}$$

- $c_1 = a_1 b_1$
- $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$
- $c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$

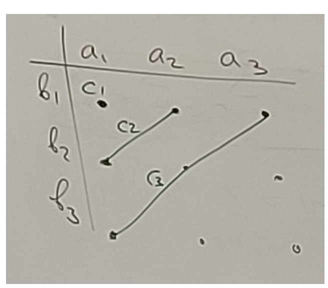

Рис. 3: Произведение по Коши

Если с $n = 0$:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}$$

Теорема (Мертенса).

Если $\sum a_n$ сходится абсолютно, $\sum b_n$ сходится, то их произведение по Коши сходится и $S = S^A \cdot S^B$

$\triangleright$ Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k,\ S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k,\ S^A = \sum^\infty a_k,\ S^B = \sum^\infty b_k$

$$S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,\ S^{|A|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot b_{k-j+1}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = a_1 \cdot S_n^B + a_2 \cdot S_{n-1}^B + ... + a_n \cdot S_1^B \doteq$$

$$S_n^B = S^B - R_n^B$$

$$\doteq a_1 \cdot (S^B - R_n^B) + a_2(S^B - R_{n-1}^B) + ... + a_n(S^B - R_1^B) = S_n^A \cdot S^B = (a_1 \cdot R_n^B + a_2 \cdot R_{n-1}^B + ... + a_n \cdot R_1^B)$$

$\exists n_0 :\ |R_n^B| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n_0} a_k R_{n-k+1}^B + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \cdot R_{n-k+1}^B$$

$$|\alpha_n| \leq \sum_{k=1}^{n_0} \left| a_k R_{n-k+1}^B \right| + \sum_{k=n_0+1}^{n} \left| a_k \cdot R_{n-k+1}^B \right|$$

Пусть первая сумма (*), вторая сумма (**). Тогда:

$$(*) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \left| R_{n-k+1}^B \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \leq \varepsilon \cdot S^{|A|}$$

так как $R_n^B \to 0$, то $|R_n^B| < \varepsilon$ для $\forall n$ н.с.н.н

$$(**) \leq M \cdot \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k|$$

$$\forall n :\ |R_n^B| \leq M$$

$\blacktriangleleft$