μ

Лекция 11

Жорданова нормальная форма

Содержание лекции:
Этой лекцией мы завершаем знакомство с линейными операторами. Здесь мы обсудим жорданову нормальную форму матрицы, а также покажем какие примущества она имеет для функционального исчисления матриц.

Ключевые слова:
Жорданова нормальная форма матрицы, алгебраическая кратность, полная кратность, спектральная кратность, функция от оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

11.1 Жорданова нормальная форма

Лемма 11.1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ *и* $\beta(X)$ *- базис линейного пространства* X*, причем*

$$\beta(X) = \{\beta(L_1), \beta(L_2), \ldots, \beta(L_k)\}$$

тогда матрица A *оператора* φ *имеет в этом базисе блочно-диагональный вид:*

$$A = diag\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}, \quad A_j = \lambda_j E_j + T_j.$$

►
Пусть $\beta(X)$ - базис X, тогда $\beta(X) = \{\beta(L_1), \beta(L_2), \ldots, \beta(L_k)\}$ и

$$n_i = \dim L_i = \dim\ker(\varphi - \lambda\mathcal{I})^{m_i}.$$

Каждое подпространство L_i является ультраинвариантным, на котором действует компонента φ_i оператора φ, матрица которого как следствие имеет блочно диагональный вид:

$$\varphi \quad \leftrightarrow \quad A = diag\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}.$$

◄

Nota bene В случае линейного оператора скалярного типа имеем:

$$\varphi x_i = \lambda_i x_i \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_i = \lambda_i \mathcal{I}_i,$$
$$A_j = diag\,\{\lambda_j, \lambda_j, \ldots, \lambda_j\}.$$

Nota bene Пусть A_i - матрица компоненты оператора φ_i подпространстве L_i, тогда:

$$A_i = \lambda_i E_i + T_i : \quad L_i \to L_i,$$
$$n_i = \dim L_i = \dim\ker(\varphi - \lambda_i\mathcal{I})^{m_i}.$$

Если в L_i выбран базис Жордана, тогда T_i представляет собой прямую сумму жордановых блоков.

$$T_i = diag\left\{T_{i,1}^{(m)}, T_{i,2}^{(m)}, T_{i,3}^{(m-1)}, T_{i,4}^{(m-1)}, \ldots T_{i,k}^{(1)}, \ldots T_{i,r_i}^{(1)} = 0\right\},$$

где r_i - число жордановых блоков, а n_i - размер жордановой клетки T_i.

> Построенная таким образом форма матрицы линейного оператора называется **Жордановой нормальной формой**.

Nota bene Имеет место

1. $\chi_\varphi(\lambda) = \Pi_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

2. $\sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$.

►
Характеристический полином компоненты φ_i имеет вид:

$$\chi_{\varphi_i}(\lambda) = \det(A_i - \lambda_i E_i) = \Pi_{i=1}^{n_i}(\lambda_i - \lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i},$$
$$\chi_{\varphi}(\lambda) = \Pi_{i=1}^{k}\chi_{\varphi_i}(\lambda) = \Pi_{i=1}^{k}(\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Отсюда для спектра σ_{φ_i} имеем

$$\chi_{\varphi_i}(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_i, \quad \sigma_{\varphi_i} = \{\lambda_i\}$$
$$\chi_{\varphi}(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \quad \sigma_{\varphi} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}.$$

◄

Пусть λ_i - собственное значение оператора $\varphi : X \to X$, тогда

1. m_i - кратность корня λ_i в минимальном полиноме $p_\varphi(\lambda)$ - **алгебраическая кратность** λ_i (максимальный размер жорданова блока);
2. n_i - размерность ультраинвариантного подпространства L_i - **полная кратность** λ_i (кратность корня характеристического полинома $\chi_\varphi(\lambda)$);
3. r_i - размерность подпространства $(A_i - \lambda_i E_i)$ - **спектральная кратность** λ_i (число жордановых блоков в A_i).

Лемма 11.2. *Алгебраическая и спектральная (геометрическая) кратности не превосходят полной:*

$$1 \le m_i \le n_i, \quad 1 \le r_i \le m_i.$$

Nota bene Частные случаи:

1. $n_i = 1 \quad \Rightarrow \quad r_i = m_i = 1$ - оператор с простым спектром;
2. $r_i = n_i \quad \Leftrightarrow \quad m_i = 1$ - оператор скалярного типа;
3. $r_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m_i = n_i$ - жорданов блок.

11.1.1 Функциональное исчисление для оператора общего вида

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_k(X)$ - линейный оператор над пространством X и $f : \mathbb{k} \to \mathbb{k}$ - функция, которая представима в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Nota bene Значение $f(\varphi)$ функции f определяется следующим образом

$$f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m.$$

Пусть $\beta(X)$ - произвольный базис линейного пространства X и $\beta_J(X)$ - жорданов базис оператора φ. Если A - матрица оператора φ в базисе $\beta(X)$ и A_J - жорданова нормальная форма оператора матрицы оператора φ, тогда

$$A = TA_JT^{-1}, \quad f(A) = T\left(f\left(A_J\right)\right)T^{-1} = T\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m A_J^m\right)T^{-1}$$

Nota bene Матрица оператора φ в жордановой нормальной форме имеет блочно-диагональный вид и значит:

$$A_J = diag\left\{A_1, A_2, \ldots, A_k\right\}, \quad A_J^m = diag\left\{A_1^m, A_2^m, \ldots, A_k^m\right\}.$$

Откуда следует, что достаточно уметь возводить в степень жорданову клетку.

Nota bene Пусть далее

$$A_j = \lambda_j I_j + \tau_j, \quad \tau_j^{m_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_j I_j + \tau_j)^m = \sum_{r=1}^{m} C_m^r \tau_j^r \lambda^{m-r},$$

где C_m^r - биномиальные коэффициенты. С учетом свойств матрицы нильпотентного оператора, будем иметь:

$$\begin{gathered}
diag A_j = \left\{C_m^0\lambda^m, C_m^0\lambda^m, \ldots, C_m^0\lambda^m\right\}, \\
diag_{+1} A_j = \left\{C_m^1\lambda^{m-1}, C_m^1\lambda^{m-1}, \ldots, C_m^1\lambda^{m-1}\right\}, \\
\ldots, \\
diag_{+r} A_j = \left\{C_m^r\lambda^{m-r}, C_m^r\lambda^{m-r}, \ldots, C_m^r\lambda^{m-r}\right\}, \\
\ldots.
\end{gathered}$$

и тогда

$$\begin{gathered}
diag f(A_j) = \left\{f(\lambda), f(\lambda), \ldots, f(\lambda)\right\}, \\
diag_{+1}(A_j) = \left\{\frac{1}{1!}f'(\lambda), \frac{1}{1!}f'(\lambda), \ldots, \frac{1}{1!}f'(\lambda)\right\}, \\
\ldots, \\
diag_{+r}(A_j) = \left\{\frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda), \frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda), \ldots, \frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda)\right\}, \\
\ldots.
\end{gathered}$$

Пример 11.1. Пусть $f(x) = \sin(x)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

тогда

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda & -\frac{1}{2}\sin\lambda & -\frac{1}{6}\cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & -\frac{1}{2}\sin\lambda \\ 0 & 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sin\lambda \end{pmatrix},$$
