



Лекция 7

Инвариантные подпространства

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы начнем исследовать структуру инвариантных подпространств линейного оператора. Будут сформулированы основные понятия, связанные с задачей разложения на инвариантные подпространства, а также приведена общая формулировка спектральной теоремы.

Ключевые слова:

Инвариантное подпространство, ультраинвариантное подпространство, компонента оператора, ультрапроектор, прямая сумма компонент, спектральная компонента, нильпотентный оператор, спектральная теорема, спектр.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

7.1 Ультраинвариантность

Пусть $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(X)$ - эндоморфизм линейного пространства $X(\mathbb{K})$.

Подпространство $L(\mathbb{K}) \leq X(\mathbb{K})$ линейного пространства $X(\mathbb{K})$ называется **инвариантным подпространством** линейного оператора φ , если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(L) \subset L. \quad (7.1)$$

Пример 7.1.

1. $\{0\}$ и X - инвариантные подпространства;
2. $\mathcal{I} : \quad \mathcal{I}x = x, \quad \forall x \in X$ - любое подпространство является инвариантным;
3. $\theta : \quad \theta x = 0, \quad \forall x \in X$ - любое подпространство является инвариантным;
4. Пусть $X = L_1 \oplus L_2$, тогда L_1 и L_2 - инвариантные подпространства для соответствующих проекторов \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 .

Инвариантное подпространство L линейного оператора φ называется **ультраинвариантным** подпространством, если существует его дополнение L' , которое тоже является инвариантным подпространством.

Nota bene В силу симметричности определения, дополнение ультраинвариантного подпространства является также ультраинвариантным подпространством.

Оператор φ_L называется **компонентой** оператора φ в ультраинвариантном подпространстве L , если $\varphi_L \in \text{End}_{\mathbb{K}}(L)$ и

$$\varphi_L(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in L.$$

|| **Ультрапроектор** - это проектор на ультраинвариантное подпространство.

Лемма 7.1. Пусть $X = L_1 \oplus L_2$ - прямая сумма ультраинвариантных подпространств оператора φ , тогда

$$\varphi = \varphi\mathcal{P}_1 + \varphi\mathcal{P}_2 \triangleq \varphi_1 \oplus \varphi_2, \quad \varphi_i \in \text{End}_{\mathbb{K}}(L_i).$$

►

Прямой проверкой убеждаемся:

$$\forall x \in X \quad \varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi\mathcal{P}_1(x) + \varphi\mathcal{P}_2(x) = (\varphi\mathcal{P}_1 + \varphi\mathcal{P}_2)(x).$$

◄

В условиях предыдущей леммы говорят, что оператор φ **представим в виде прямой суммы своих компонент**:

$$\varphi(x) = (\varphi_1 \oplus \varphi_2)(x_1 + x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2).$$

7.2 Спектральная теорема

Лемма 7.2. Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, причем $(p_1, p_2) = 1$, так что

$$X = L_1 \oplus L_2, \quad L_i = \ker p_i(\varphi), \quad i = 1, 2.$$

Тогда L_1 и L_2 - нетривиальные инвариантные подпространства оператора φ .

►

Пусть $x \in L_1$, тогда $p_1(\varphi)x = 0$, откуда сразу получаем

$$p_1(\varphi)(\varphi x) = \varphi(p_1(\varphi)x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \in \ker p_1\varphi.$$

Для $\ker p_2(\varphi)$ аналогично. Пусть теперь $\ker p_1(\varphi) = X$, тогда

$$\ker p_1(\varphi) = X \Rightarrow \forall x \in X \quad p_1(\varphi)x = 0 \Rightarrow p_1(\varphi) = \theta,$$

и значит $p_1(\varphi)$ - аннулирующий полином, но $\deg p_1 < \deg p_\varphi$, противоречие.

И, наконец, пусть $\ker p_1(\varphi) = \{0\}$, тогда

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker p_2(\varphi) = \dim_{\mathbb{K}} X - \dim_{\mathbb{K}} \ker p_1(\varphi) = \dim_{\mathbb{K}} X \Rightarrow \ker p_2(\varphi) \simeq X,$$

и приходим к уже рассмотренному случаю.

◄

Лемма 7.3. Подпространства $\ker p_1(\varphi)$ и $\ker p_2(\varphi)$ - ультраинвариантные.

►

Оба подпространства $\ker p_1(\varphi)$ и $\ker p_2(\varphi)$ являются инвариантными.

◄

Лемма 7.4. Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t)p_2(t)$ разложение минимального аннулирующего полинома оператора φ на взаимно простые множители и пусть φ_i - компонента φ в соответствующем подпространстве L_i , тогда $p_i(t)$ - минимальный аннулирующий полином для φ_i .

►

Действительно

$$\forall x \in L_i \quad p_i(\varphi_i)x = 0 \Rightarrow p_i(\varphi)x = \theta,$$

и таким образом $p_i(t)$ - аннулирующий полином для φ_i . Докажем его минимальность.

Пусть \tilde{p}_i - минимальный аннулирующий полином для φ_i , тогда

$$p_i \vdots \tilde{p}_i \Leftrightarrow \exists g : p_i(t) = g(t)\tilde{p}_i(t),$$

но тогда $\tilde{p}_1(t) \cdot \tilde{p}_2(t)$ - аннулирующий полином оператора φ , степень которого меньше степени $p_\varphi(t)$. Противоречие.

◄

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Теорема 7.1. (спектральная теорема) Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t)p_2(t) \dots p_m(t)$ - минимальный полином оператора φ , разложенный на взаимно простые сомножители. Тогда

- $\bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i = \ker p_i(\varphi);$
- $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathcal{P}_i,$

где φ_i - компонента оператора φ в ультраинвариантном подпространстве L_i и \mathcal{P}_i - проектор подпространство L_i .

Nota bene Пусть $p_\varphi(t)$ представим в следующем виде:

$$p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^m p_i(t), \quad p_i(t) = (t - t_i)^{r_i},$$

тогда сразу получаем:

$$L_i = \ker p_i(\varphi) = \ker(\varphi_i - t_i \mathcal{I}_i)^{r_i}$$

Nota bene Напомним, что оператор τ называется **нильпотентным** порядка r , если

$$\tau^r = \theta, \quad \tau^{r-1} \neq \theta.$$

Лемма 7.5. Определяемый следующим образом оператор $\tau_i : L_i \rightarrow L_i$, является **нильпотентным**:

$$\tau_i = \varphi_i - t_i \mathcal{I}_i$$



Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\forall x \in L_i \quad (\varphi_i - t_i \mathcal{I}_i)^{r_i} x = \tau_i^{r_i} x = 0.$$



Nota bene Имея определение для оператора τ_i , спектральную теорему можно переписать следующим образом:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m (t_i \mathcal{I}_i + \tau_i) \mathcal{P}_i, \quad \tau_i^{r_i} = \theta.$$

В приведенной выше формулировке спектральной теоремы...

t_i называется **элементарной порцией спектра**;

\mathcal{P}_i называется **спектральным ультрапроектором**;

L_i называется **спектральным ультраинвариантным подпространством**;

φ_i называется **спектральной компонентой** линейного оператора φ .