



Лекция 1

Понятие линейного оператора

Содержание лекции:

Настоящая лекция посвящена обсуждению линейных отображений между линейными пространствами. Мы введем основные понятия и объекты, связанные с линейными операторами, а также сформулируем наиболее важные их свойства. В конце мы докажем, что множество линейных операторов может быть наделено структурой линейного пространства.

Ключевые слова:

Линейный оператор, ядро, образ, теорема об изоморфизме, относительный базис, теорема о ядре и образе, равенство операторов, сумма, умножение на число, линейное пространство операторов.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

1.1 Определение линейного оператора

Отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y называется **линейным оператором**, если $\forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x).$$

Nota bene Множество линейных операторов из $X(\mathbb{K})$ в $Y(\mathbb{K})$ обозначается $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

Nota bene Оператор $\varphi : X \rightarrow X$, отображающий X в себя, называют *эндоморфизмом* и пишут $\varphi \in \text{End}(X)$, а в случае отображения на себя - *автоморфизмом* и пишут $\varphi \in \text{Aut}(X)$.

Пример 1.1. Примеры линейных операторов

1. $\Theta : X \rightarrow Y, \quad \Theta x = 0_Y$ - нулевой оператор;
2. $\mathcal{I} : X \rightarrow X, \quad \mathcal{I}x = x$ - тождественный оператор;
3. $\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} : X \rightarrow X, \quad X = L_1 \oplus L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1, \quad x_1 \in L_1$ - проектор;
4. $\varphi : X \rightarrow X, \quad X = C^1[-1, 1]$ - интегральный оператор:

$$(\varphi f)(t) = \int_{-1}^1 A(t, s) f(s) ds.$$

$A(s, t)$ - непрерывная функция на $C^1(-1, 1) \times C^1(-1, 1)$ - интегральное ядро.

5. $D : X \rightarrow X, \quad X = \mathcal{P}_n$ - дифференциальный оператор:

$$(Dp)(t) = \frac{d}{dt} p(t).$$

Ядром линейного оператора $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется подмножество X :

$$\ker \varphi = \{x \in X : \quad \varphi(x) = 0\}$$

Лемма 1.1. Ядро $\ker \varphi$ - линейное подпространство $X(\mathbb{K})$.

Образом линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется подмножество Y :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \quad \exists x \in X \quad \varphi(x) = y\} = \varphi(X).$$

Лемма 1.2. Образ $\text{Im } \varphi$ - линейное подпространство $Y(\mathbb{K})$.

1.2 Теорема о ядре и образе

Теорема 1.1. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда имеет место изоморфизм

$$X / \ker \varphi \simeq \text{Im } \varphi.$$



Отображение $\bar{\varphi} : X / \ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$, заданное как

$$x + \ker \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Гомоморфно, сюръективно и инъективно, а значит является изоморфизмом.



Пусть $L \leq X$ - линейное подпространство X . Набор $\{v_j\}_{j=1}^m$ из X называется **линейно независимым над \mathbb{K} относительно L** , Если

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in L \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Nota bene Приведенное в определение условие эквивалентно следующему:

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_m \bar{v}_m = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Говорят, что $\{v_j\}_{j=1}^m$ **порождает X относительно L** , если

$$X = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{K}} + L.$$

Набор $\{v_j\}_{j=1}^m$ называется **базисом X относительно L** , если он линейно независим относительно L и порождает X относительно L .

Лемма 1.3. Следующие условия эквивалентны:

- $\{v_j\}_{j=1}^m$ - базис X относительно L ;
- $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ - базис X/L ;
- $X = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{K}} \oplus L$.



Доказательство всех импликаций следует прямо из определений.



Лемма 1.4. Если $L \leq X$ тогда имеет место:

$$\dim_{\mathbb{K}} X = \dim_{\mathbb{K}} L + \dim_{\mathbb{K}} X/L$$



Доказательство прямо следует из предыдущей леммы.



ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Теорема 1.2. (о ядре и образе) Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда имеет место

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} X.$$

►

Используем теорему об изоморфизме, а потом лемму об относительных базисах.

◄

1.3 Пространство линейных операторов

Говорят, что операторы $\varphi, \psi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ **равны**, если

$$\varphi x = \psi x, \quad \forall x \in X.$$

Отображение χ называется **суммой** линейных операторов $\varphi, \psi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, если

$$\forall x \in X \quad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Лемма 1.5. Имеет место $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

$$\begin{aligned} \chi(x_1 + x_2) &= \chi(x_1) + \chi(x_2), \\ \chi(\lambda x) &= \lambda \chi(x) \end{aligned}$$

►

Докажем первое утверждение:

$$\chi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = (\varphi + \psi)x_1 + (\varphi + \psi)x_2 = \chi(x_1) + \chi(x_2).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. ◄

Отображение ζ называется **умножением** линейного оператора φ на число λ , если

$$\forall x \in X \quad \zeta x = \lambda \varphi(x)$$

Лемма 1.6. Имеет место $\zeta \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

►

Аналогично доказательству для суммы.

◄

Теорема 1.3. Множество $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ - линейное пространство над полем \mathbb{K} .

►

Прямая проверка аксиом линейного пространства.

◄