Лекция 6

Алгебра операторных полиномов

Содержание лекции:
В данной лекции мы применим некоторые результаты, полученные для алгебры скалярных полиномов к новым обьектам - операторным полиномам. Мы получим ряд результатов, ксающихся структуры ядер таких операторов и сформулируем важное утверждение о разложении пространства ядра полинома в прямую сумму ядер взаимно простых его делителей.

Ключевые слова:
Операторный полином, аннулирующий полином оператора, минимальный аннулируюзий полином, теорема о ядре и образе, теорема о проекторах.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

6.1 Операторные полиномы

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ линейное пространство, $\dim_{\Bbbk} X = n$, и $\varphi \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$ - эндоморфизм. Определим отображение $\sigma_\varphi : \Bbbk[t] \to \operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$ следующим образом:

$$\sigma_\varphi : \quad p(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i t^i \quad \mapsto \quad p(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi^i,$$

и при этом

$$\varphi^0 = \mathcal{I}, \quad \varphi^1 = \varphi, \quad \varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \quad \dots$$

‖ **Операторным полиномом** называется образ полинома p при отображении σ_φ.

Лемма 6.1. *Отображение σ_φ является гомоморфизмом.*

▶
Все свойства гомоморфности очевидным образом выполняются.
◀

Nota bene Из леммы следует, что образ σ_φ является подалгеброй алгебры $\operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$:

$$\operatorname{Im} \sigma_\varphi = \Bbbk[\varphi]$$

Nota bene Напомним, что ядро $\ker \sigma_\varphi$ - это идеал, который состоит из всех всех таких полиномов $p \in \Bbbk[t]$, для которых $\sigma_\varphi(p) = \theta$, где θ - нулевой оператор.

‖ Всякий полином из $\ker \sigma_\varphi$ называется **аннулирующим полиномом** оператора φ.

Лемма 6.2. *Идеал $\ker \sigma_\varphi$ нетривиален.*

▶
Заметим, что $\Bbbk[\varphi] \le \operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$ и поэтому

$$\dim_{\Bbbk} \Bbbk[\varphi] \le \dim_{\Bbbk} \operatorname{End}_{\Bbbk}(X) = n^2.$$

Набор $\left\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2, \dots \varphi^{n^2}\right\}$ является линейно-зависимым в $\operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$ и, следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация, такая что

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = \theta \quad \Rightarrow \quad p \in \ker \sigma_\varphi.$$

◀

‖ **Минимальным аннулирующим полиномом** линейного оператора φ называется минимальный порождающий полином идеала $\ker \sigma_\varphi$.

Nota bene Будем обозначать минимальный порождающий полином оператора φ через p_φ, тогда можно записать:

$$p_\varphi(\varphi) = \theta.$$

Лемма 6.3. *Пусть $p, q \in \Bbbk[t]$, тогда*

$$\begin{aligned} p(\varphi) = q(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad (p - q) \vdots\, p_\varphi, \\ p = gp_\varphi + r \quad &\Rightarrow \quad r(\varphi) = p(\varphi). \end{aligned}$$

Лемма 6.4. *В силу вышесказанного, имеем:*

$$\Bbbk[\varphi] \simeq \Bbbk[t]/p_\varphi \Bbbk[t]$$

6.2 Структурная теорема

Nota bene Рассмотрим специальный случай, когда $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$.

Лемма 6.5. *Пусть p_1, $p_2 \in \Bbbk[t]$, такие что $(p_1, p_2) = 1$, тогда*

$$\exists\, q_1, q_2 \in \Bbbk[t] : \quad p_1(\varphi)q_1(\varphi) + p_2(\varphi)q_2(\varphi) = \mathcal{I}.$$

►
Доказательство следует из леммы о разложении НОД.
◄

Лемма 6.6. *Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, причем $(p_1, p_2) = 1$, тогда:*

$$X = \ker p_1(\varphi) \oplus \ker p_2(\varphi).$$

►
Из предыдущей леммы имеем:

$$\mathcal{I} = p_1(\varphi) \cdot q_1(\varphi) + p_2(\varphi)q_1(\varphi), \quad q_1(t), q_2(t) \in \Bbbk[t],$$

откуда сразу можно получить

$$\forall x \in X \quad x = \mathcal{I}x = p_1(\varphi) \cdot q_1(\varphi)x + p_2(\varphi)q_1(\varphi)x = x_1 + x_2.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} p_2(\varphi)x_1 = q_1(\varphi)p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = q_1(\varphi)p_\varphi(\varphi)x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \in \ker p_2(\varphi) \\ p_1(\varphi)x_2 = q_2(\varphi)p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = q_2(\varphi)p_\varphi(\varphi)x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 \in \ker p_1(\varphi) \end{aligned}$$

В заключение докажем, что $\ker p_1(\varphi) \cap \ker p_2(\varphi) = \{0\}$. Действительно,

$$z \in \ker p_1(\varphi) \cap \ker p_2(\varphi) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad z = p_1(\varphi) \cdot q_1(\varphi)z + p_2(\varphi)q_1(\varphi)z = 0.$$

◄

Лемма 6.7. *Пусть* $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, *причем* $(p_1, p_2) = 1$, *тогда:*

$$\ker p_1(\varphi) = \operatorname{Im} p_2(\varphi), \quad \ker p_2(\varphi) = \operatorname{Im} p_1(\varphi).$$

▶
Докажем первое из утверждений (второе доказывается аналогично):

$$0 = p_\varphi(\varphi)X = p_1(\varphi)p_2(\varphi) = p_1(\varphi)\operatorname{Im} p_2(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} p_2(\varphi) \subseteq \ker p_1(\varphi).$$

Кроме того, имеет место:

$$\begin{cases} \dim_\Bbbk X = \dim_\Bbbk \ker p_1(\varphi) + \dim_\Bbbk \ker p_2(\varphi) \\ \dim_\Bbbk X = \dim_\Bbbk \ker p_2(\varphi) + \dim_\Bbbk \operatorname{Im} p_2(\varphi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dim_\Bbbk \ker p_1(\varphi) = \dim_\Bbbk \operatorname{Im} p_2(\varphi).$$

◀

Теорема 6.1. *Пусть* $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, *причем* $(p_1, p_2) = 1$, *тогда:*

$$X \simeq X/\ker p_1(\varphi) \oplus X/\ker p_2(\varphi).$$

▶
Убеждаемся прямой проверкой:

$$X = \ker p_1(\varphi) \oplus \ker p_2(\varphi) = \operatorname{Im} p_2(\varphi) \oplus \operatorname{Im} p_1(\varphi) \simeq X/\ker p_2(\varphi) \oplus X/\ker p_1(\varphi).$$

◀

Nota bene Из теоремы, в частности, следует, что

$$\ker p_1(\varphi) \simeq X/\ker p_2(\varphi), \quad \ker p_2(\varphi) \simeq X/\ker p_1(\varphi).$$

Лемма 6.8. *Пусть* $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, *причем* $(p_1, p_2) = 1$ *тогда проекторы на соответствующие подпространства* $\ker p_1(\varphi)$ *и* $\ker p_2(\varphi)$ *имеют вид:*

$$\mathcal{P}_1 = q_2(\varphi)p_2(\varphi), \quad \mathcal{P}_2 = q_1(\varphi)p_1(\varphi).$$

▶
Прямой проверкой убеждаемся, что выполняются каждое из перечисленных свойств:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \theta = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_i\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i, \quad i = 1, 2.$$

◀

Nota bene Следующая теорема обобщает полученные выше результаты на случай произвольного разложения минимального полинома $p_\varphi(\varphi)$. Доказательство проводится методом индукции:

Теорема 6.2. *Пусть* $p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^k p_i(t)$, *где все* $p_i(t)$ *взаимно простые, тогда:*

- $\exists\ \{q_i(t)\}_{i=1}^m \subset \Bbbk[t] : \quad \sum_{i=1}^m q_i(\varphi)p_i'(\varphi) = \mathcal{I};$
- $X = \bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i = \ker p_i(\varphi) \simeq X/\ker p_i'(\varphi);$
- $\mathcal{P}_i = q_i(\varphi)p_i'(\varphi)$ *- проектор на* L_i.