Конспект лекций (12-...)

Илья Астафьев

1 апреля 2023 г.

Содержание

1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}, f(x) \in R_{loc}(E)$ - локально интегрируема на E, если $f \in R[a,b]$ для $\forall [a,b] \subset E$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, где $(b \in \mathbb{R} \cup +\infty)$

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx, \text{ при } \omega \in [a,b)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} F(\omega) \text{ - несобственный интеграл}$$

Если $\lim F(\omega)$ конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится

- Если $\int_a^b$в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - I рода
- Если $\int_a^b$в $\mathbb{R}$ - II рода

Если $f \notin R[a, \bar{b}]$, то $\bar{b}$ называется *особой точкой* $f(x)$. Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \;-\; I \text{ рода } (+\infty \text{ особая точка})$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} - II \text{ рода } (0 \text{ особая точка})$$

Если:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega \Rightarrow \begin{cases} \in \mathbb{R}, \text{то сходится}, \\ \notin \mathbb{R}, \text{то расходится} \begin{cases} \pm\infty \\ \nexists\, \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \end{cases}$$

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^{+\infty}, \; \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, \; \alpha = 1 \\ +\infty, \; \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}, \; \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится при } \alpha < 1. \text{ Расходится при } \alpha \geq 1$$

1.1 Свойства несобственного интеграла

1. Линейность. $f, g \in R_{loc}[a,b)$
   - $$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
     если
     $$\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$$
   - $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$
   - **Следствие:**
     Сходится + Сходится = Сходится
     Сходится + Расходится = Расходится
     Расходится + Расходится = ?

2. Монотонность. $f, g \in R_{loc}[a,b), f(x) \le g(x)$ на $[a,b)$ и $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \overline{R}$:
   Тогда:
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

3. Аддитивность. $f \in R_{loc}[a,b), c \in (a,b)$:
   Тогда:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
   $\triangleright$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^c + \int_c^\omega = \int_a^c + \lim_{\omega \to b-0} \int_c^\omega$$
   $\blacktriangleleft$

4. Формула по частям. $u, v -$ дифференцируема на $[a,b), u^{'} v^{'} \in R_{loc}[a,b)$
$$\int_a^b u(x) \cdot v^{'}(x) = uv \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u^{'}(x)dx$$

5. Формула замены переменной. $f \in C[a,b), x = \phi(t)\ [\alpha, \beta) \to [a,b)$. $\phi -$ диффернцируема на $[\alpha, \beta)$, $\exists \phi(\beta - 0) = \lim\limits_{t \to \beta - 0} \phi(t)$ в $\overline{R}$
   Тогда:
$$\int_{\phi(\beta-0)}^{\phi(\alpha)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi^{'}(t)dt$$
   и эти интегралы (не)существуют одновременно
   $\triangleright$
   (a) $\exists I_1 \in \overline{R}$,
$$I_2 = \lim_{\omega \to \beta - 0} \int_\alpha^\omega f(\phi) \cdot \phi^{'} dt = \lim_{\omega \to \beta - 0} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx = I_1$$
   (b) $\exists I_2 \in \overline{R}$,
$$I_1 = \lim_{\omega \to \phi(\beta-0)} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx$$
   - Если $\phi(\beta - 0) < b$, то очевидно
   - Пусть $x_n \to \phi(\beta - 0) = b, x_n \in [\phi(\alpha), b)$
     для $\forall n\ \exists \gamma_n : \phi(\gamma_n) = x_n$
     Докажем, что
$$\gamma_n \to \beta - 0, \text{ при } n \to +\infty$$
     Если $\gamma \nrightarrow \beta - 0$, то $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 :\ \exists n \ge n_0$
$$\gamma_n < \beta - \varepsilon$$
$$\phi(\gamma_n) \le \sup_{[\alpha, \beta - \varepsilon]} \phi < b$$
     Отсюда следует, что $\phi(\gamma_n) \nrightarrow b$

   Итак, для $\forall x_n \to \phi(\beta - 0)$:
$$\int_{\phi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_n} f(\phi(t)) \cdot \phi^{'}(t)dt \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\alpha^{\beta - 0} f(\phi) \cdot \phi^{'}(t)dt$$

$\blacktriangleleft$

1.2 Интеграл с несколькими особыми точками

1.
$$f \in R(a,b) \int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^c f(x)dx + \lim_{\omega \to b-0} \int_c^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
где $c \in (a,b)$
$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся}$$
2. Пусть f определена на $(a,b); a,b \in \bar{\mathbb{R}}$ кроме конечного числа точек. $C \in (a,b)$ называется особой точкой f, если $f \notin R[\alpha,\beta]$ для $\forall \alpha,\beta : a < \alpha < \beta < b$
$a(b)$ - особая, если $a = -\infty (b = -\infty)$ или $f \notin R[a,\alpha] \forall \alpha \in (a,b)$

Пусть $c_1 < c_2 < ... < c_{n-1}$ - особые точки f на (a,b)
$c_0 = a, c_n = b$
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx \text{ - сходится } \forall i = 1...n$$

Проблема: если пытаться взять существенно большие значения для b, то зачастую численный метод вычисления несобственного интеграла даст сильно неточное значение.
Например:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$
$$\int_1^{10^6} \frac{dx}{x} = 6 \cdot \ln 10 \approx 13$$
$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x} = 10 \cdot \ln 10 \approx 23$$

1.3 Интеграл от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a,b), f \geq 0$ на $[a,b)$ **Теорема .** Пусть $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx$ Тогда: 1. $F \uparrow$ 2. $\int_a^b f(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена
Доказательство:
1.
$$\omega_1 < \omega_2,\ f(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} = \int_a^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \geq F(\omega_1)$$
2. Очевидно

Теорема (признаки сравнения).
Пусть $f, q \in R_{loc}[a,b)$

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a,b)$. Тогда
   - Если $\int_a^b g(x)dx$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - сходится
   - Если $\int_a^b g(x)dx$ - расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - расходится
2. $f \sim g$, при $x \to b-0$. Тогда
   - $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся

Доказательство:
1. Очевидно
2. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b - 0$

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \alpha(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 1$$
$$\frac{1}{2} \le \alpha(x) \le \frac{3}{2} \text{ для } x \in (\delta, b)$$
$$\frac{1}{2} g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2} g(x)$$

1.4 Интеграл от знакопеременной функции

Теорема (Критерий Коши).

$$\text{Пусть } f \in R_{loc}[a, b)\text{.Тогда } \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow$$
$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx . \exists \lim_{\omega \to b-0} F(\omega) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta : \ \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta \ |F(\delta_1) - F(\delta_2)| < \varepsilon$$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится абсолютно, если } \int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится}$$

Теорема .
Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится

Доказательство:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится } \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a, b) \ \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \le \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Теорема (о сумме с абсолютно сходящимся интегралом).
Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a, b), f(x) = g(x) + h(x)$ на $[a, b)$ и $\int_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно.
Тогда:

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся абсолютно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся условно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба расходятся.

Доказательство:

$$|f| \le |g| + |h|$$

Пример:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Рассмотрим:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$\delta_1 = \pi n, \delta_2 = 2\pi n$$

$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx =$$

$$\frac{1}{2\pi n} \cdot n \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} = \varepsilon$$