

Конспект лекций (12-...)

Илья Астафьев

10 апреля 2023 г.

Содержание

1	Несобственный интеграл	3
1.1	Свойства несобственного интеграла	3
1.2	Интеграл с несколькими особыми точками	5
1.3	Интеграл от знакопостоянной функции	5
1.4	Интеграл от знакопеременной функции	6
1.5	Интеграл в смысле главного значения	8
1.6	<i>Полезные вещи</i>	9
2	Числовые ряды	11
2.1	Основные понятия	11

1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f(x) \in R_{loc}(E)$ - локально интегрируема на E , если $f \in R[a, b]$ для $\forall [a, b] \subset E$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $(b \in \mathbb{R} \cup +\infty)$

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx, \text{ при } \omega \in [a, b)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} F(\omega) - \text{несобственный интеграл}$$

Если $\lim F(\omega)$ конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится

- Если \int_a^b в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - I рода
- Если \int_a^b в \mathbb{R} - II рода

Если $f \notin R[a, \bar{b}]$, то \bar{b} называется *особой точкой* $f(x)$. Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - I \text{ рода } (+\infty \text{ особая точка})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} - II \text{ рода } (0 \text{ особая точка})$$

Если:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f(x)dx \Rightarrow \begin{cases} \in \mathbb{R}, \text{ то сходится,} \\ \notin \mathbb{R}, \text{ то расходится} \end{cases} \begin{cases} \pm\infty \\ \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^{+\infty}, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty}, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится при } \alpha < 1. \text{ Расходится при } \alpha \geq 1$$

1.1 Свойства несобственного интеграла

1. Линейность. $f, g \in R_{loc}[a, b)$

•

$$\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

если

$$\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \bar{\mathbb{R}}$$

•

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

• **Следствие:**

Сходится + Сходится = Сходится

Сходится + Расходится = Расходится

Расходится + Расходится = ?

2. Монотонность. $f, g \in R_{loc}[a, b], f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \overline{R}$:
Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Аддитивность. $f \in R_{loc}[a, b], c \in (a, b)$:
Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

▷

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_c^\omega f(x)dx$$

◀

4. Формула по частям. u, v — дифференцируема на $[a, b], u'v' \in R_{loc}[a, b]$

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$

5. Формула замены переменной. $f \in C[a, b], x = \phi(t) [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]. \phi$ — дифференцируема на $[\alpha, \beta], \exists \phi(\beta-0) = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \phi(t)$ в \overline{R}

Тогда:

$$\int_{\phi(\beta-0)}^{\phi(\alpha)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$$

и эти интегралы (не)существуют одновременно

▷

- (a) $\exists I_1 \in \overline{R},$

$$I_2 = \lim_{\omega \rightarrow \beta-0} \int_\alpha^\omega f(\phi) \cdot \phi' dt = \lim_{\omega \rightarrow \beta-0} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx = I_1$$

- (b) $\exists I_2 \in \overline{R},$

$$I_1 = \lim_{\omega \rightarrow \phi(\beta-0)} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx$$

- Если $\phi(\beta-0) < b$, то очевидно
- Пусть $x_n \rightarrow \phi(\beta-0) = b, x_n \in [\phi(\alpha), b]$
для $\forall n \exists \gamma_n : \phi(\gamma_n) = x_n$
Докажем, что

$$\gamma_n \rightarrow \beta-0, \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

Если $\gamma \nrightarrow \beta-0$, то $\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 : \exists n \geq n_0$

$$\gamma_n < \beta - \varepsilon$$

$$\phi(\gamma_n) \leq \sup_{[\alpha, \beta-\varepsilon]} \phi < b$$

Отсюда следует, что $\phi(\gamma_n) \nrightarrow b$

Итак, для $\forall x_n \rightarrow \phi(\beta-0)$:

$$\int_{\phi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_n} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^{\beta-0} f(\phi) \cdot \phi'(t)dt$$

◀

1.2 Интеграл с несколькими особыми точками

1.

$$f \in R(a, b) \int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow a+0} \int_{\omega}^c f(x)dx + \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_c^{\omega} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

где $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся}$$

2. Пусть f определена на (a, b) ; $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ кроме конечного числа точек. $C \in (a, b)$ называется особой точкой f , если $f \notin R[\alpha, \beta]$ для $\forall \alpha, \beta : a < \alpha < \beta < b$

$a(b)$ - особая, если $a = -\infty (b = -\infty)$ или $f \notin R[a, \alpha] \forall \alpha \in (a, b)$

Пусть $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$ - особые точки f на (a, b)

$c_0 = a, c_n = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx - \text{сходится} \forall i = 1 \dots n$$

Проблема: если пытаться взять существенно большие значения для b , то зачастую численный метод вычисления несобственного интеграла даст сильно неточное значение.

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$
$$\int_1^{10^6} \frac{dx}{x} = 6 \cdot \ln 10 \approx 13$$
$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x} = 10 \cdot \ln 10 \approx 23$$

1.3 Интеграл от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$ на $[a, b)$ **Теорема** . Пусть $F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx$ Тогда: 1. $F \uparrow$ 2. $\int_a^b f(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена

Доказательство:

1.

$$\omega_1 < \omega_2, f(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} = \int_a^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \geq F(\omega_1)$$

2. Очевидно

Теорема (признаки сравнения).

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a, b)$. Тогда

- Если $\int_a^b g(x)dx$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - сходится
- Если $\int_a^b g(x)dx$ - расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - расходится

2. $f \sim g$, при $x \rightarrow b - 0$. Тогда

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b-0$

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2} \text{ для } x \in (\delta, b)$$

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$$

1.4 Интеграл от знакопеременной функции

Теорема (Критерий Коши).

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ сходится \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow$$

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx. \exists \lim_{\omega \rightarrow b-0} F(\omega) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta : \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta |F(\delta_1) - F(\delta_2)| < \varepsilon$$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится абсолютно, если } \int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится}$$

Теорема .

Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится

Доказательство:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

Теорема (о сумме с абсолютно сходящимся интегралом).

Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, $f(x) = g(x) + h(x)$ на $[a, b)$ и $\int_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно.

Тогда:

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся абсолютно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся условно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба расходятся.

Доказательство:

$$|f| \leq |g| + |h|$$

Пример:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ & \delta_1 = \pi n, \delta_2 = 2\pi n \\ & \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \\ & \frac{1}{2\pi n} \cdot n \cdot \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} = \varepsilon \end{aligned}$$

Вопросы из чата:

Пусть $f \in R_{loc}[a, +\infty)$. Правда ли, что:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходится} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ответ: нет, неправда.

$$f \in C[a, +\infty), f \geq 0 \not\Rightarrow f(x) - \text{ограничена}$$

Теорема (Признак Абеля-Дирихле).

Пусть $f(x) \in C[a, b)$, $g(x) \in C^1[a, b)$. Тогда для сходимости $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ достаточно одной пары условий

- Признак Дирихле

1. $F(\omega) = \int_a^\omega g(x) dx$ - ограничена
2. $g(x)$ монотонна и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

- Признак Абеля:

1. $\int_a^b f(x) dx$ сходится
2. $g(x)$ монотонна и ограничена

▷

1. Дирихле: $F'(x) = f(x)$

Критерий Коши: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b)$

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) \cdot g(x) dx \right| = \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) d(F) \right| = \left| g(x) \cdot F(x) \right|_{\delta_1}^{\delta_2} = \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} F(x) \cdot g'(x) dx \right| \leq$$

$$\leq C \cdot (|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|) + C \cdot \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)| dx \right| \leq 2C(|\delta_1| + |g(\delta_2)|) \leq 4C \cdot \varepsilon$$

2. Абель: т.к. $g(x)$ - монотонна и ограничена \Rightarrow

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = A \in \mathbb{R}$$

$$g(x) - A - \text{монотонна и } \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$$

Рассмотрим

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot (g - A) dx + A \cdot \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \text{сходится по Дирихле}$$

◀

Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$f(x) = \sin(x);$$

$$F(\omega) = \int_0^\omega \sin(x) dx = 1 - \cos(\omega) - \text{ограничена};$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ и } \downarrow$$

Отсюда следует, что:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \text{сходится}$$

1.5 Интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^c + \int_c^{+\infty} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b$$

Из того, что мы знаем на данный момент, мы делаем вывод, что интеграл рас-
ходится. Чтобы учитывать подобные ситуации, вводят понятие:

Определение. Пусть $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда $v.p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}([a, b] \setminus \{c\}) \Rightarrow v.p \int_a^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$

Лемма. Если сходится \int_a^b , то сходится и $v.p \int_a^b = \int_a^b$.

1.6 Полезные вещи

1. Интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

▷

$$e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(x^2 + 1)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx \leq \int_{-1}^1 e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}$$

В левой части делаем замену $x = \sin(t)$, в правой части сделаем замену $\tan(t)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(t) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = ?$$

$$2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

Делаем замену $t = \sqrt{k} \cdot x$

$$\frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi \cdot \frac{2k \cdot \sqrt{k}}{(2k-1)} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

◀

2. Теорема (Неравенство Гёльдера).

Пусть $f, g \in R[a, b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$



$$a_k = f(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$$
$$b_k = g(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$$



2 Числовые ряды

2.1 Основные понятия

Определение. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$. Числовым рядом с общим членом a_n называется символ вида:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Определение. Для ряда $\sum a_k$ определим $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - последовательность частичных сумм.

Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$ ($\notin \mathbb{R}$), то $\sum a_n$ называется сходящимся (расходящимся).

Пример:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ расходится

Определение. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$ называется n -ным остатком ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$

Лемма. Ряд $\sum a_k$ - сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ - сходится, для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Лемма. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Leftrightarrow R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

\triangleright Пусть $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. $R_n = S - S_n$ \blacktriangleleft

Теорема (Необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ $\triangleright a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0$

\blacktriangleleft

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{гармонический ряд}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$