Лекция 3

Алгебры операторов и матриц

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим композицию линейных операторов, а также рассмотрим структуры, которые возникают на множествах с этой операцией. Наибольший интерес для нас будет представлять алгебра линейных операторов и связанная с ней алгебра матриц. В конце лекции мы введем новое понятие обратного оператора и обсудим ключевые свойства этого отображения.

Ключевые слова:
Композиция операторов, произведение матриц, алгебра операторов, структурные константы алгебры, обратимый оператор, обратный оператор, критерий существования обратного оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И.   Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Композиция операторов

Пусть $X(\Bbbk)$, $Y(\Bbbk)$, $Z(\Bbbk)$ - линейные пространства. **Композицией** линейных операторов $\psi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y, Z)$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)$ называется отображение $\chi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Z)$, такое что

$$\chi = \psi \circ \varphi \quad \psi\varphi x = \psi\left(\varphi x\right) \quad \forall x \in X.$$

Лемма 3.1. *Отображение χ - линейный оператор.*

►

Действительно:

$$\chi(x_1 + x_2) = \psi\left(\varphi(x_1 + x_2)\right) = \psi\left(\varphi x_1 + \varphi x_2\right) = \psi\left(\varphi x_1\right) + \psi\left(\varphi x_2\right) = \chi x_1 + \chi x_2,$$
$$\chi(\lambda x) = \psi\left(\varphi(\lambda x)\right) = \psi\left(\lambda\varphi x\right) = \lambda\psi\left(\varphi x\right) = \lambda\chi x.$$

◄

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ и $\{h_k\}_{k=1}^p$ - базисы пространств X, Y и Z соответственно. Определим матрицы операторов φ, ψ и χ в этих базисах:

$$\varphi \quad \leftrightarrow \quad A_\varphi = \|\alpha_i^j\|: \quad \varphi e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j,$$
$$\psi \quad \leftrightarrow \quad B_\psi = \|\beta_j^k\|: \quad \psi h_k = \sum_{k=1}^p \beta_j^k h_k,$$
$$\chi \quad \leftrightarrow \quad C_\chi = \|\gamma_i^k\|: \quad \chi e_i = \sum_{i=1}^p \gamma_i^k h_k,$$

Произведением матриц $B_{p\times m}$ и $A_{m\times n}$ называется матрица $C_{p\times n}$, такая что

$$C = \|\gamma_i^k\|: \quad \gamma_i^k = \sum_{j=1}^m \beta_j^k \cdot \alpha_i^j.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\chi = \psi \circ \varphi$, тогда $C = B \cdot A$.*

►

Действительно, из определения следует

$$\chi e_i = \psi\left(\varphi e_i\right) = \psi\left(\sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j \psi\left(g_j\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j \left(\sum_{k=1}^p \beta_j^k h_k\right) =$$
$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m \alpha_i^j \beta_j^k\right) h_k = \sum_{i=1}^p \gamma_i^k h_k \quad \Rightarrow \quad \gamma_i^k = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j \beta_j^k.$$

◄

3.2 Алгебры операторов и матриц

Лемма 3.2. *Операция композиции операторов ассоциативна:*

$$\begin{gathered}\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y), \quad \psi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y, Z), \quad \chi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Z, W), \\ \Rightarrow \quad \chi \circ (\psi \circ \varphi) = (\chi \circ \psi) \circ \varphi\end{gathered}$$

►

Покажем, что композиция ассоциативна *всегда*:

$$(\chi \circ (\psi \circ \varphi))(x) = \chi\left((\psi \circ \varphi)(x)\right) = \chi\left(\psi\left(\varphi(x)\right)\right) = (\chi \circ \psi)(\varphi(x)) = ((\chi \circ \psi) \circ \varphi)(x).$$

◄

Лемма 3.3. *Множество* $\mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ *имеет структуру полугруппы относительно операции композиции* $\circ$ *и структуру кольца - относительно операций* $+$ *и* $\circ$.

‖ **Алгеброй** называется кольцо, снабженное структурой линейного пространства.

Nota bene Множество $\mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ имеет структуру алгебры относительно операций сложения и композиции.

‖ Алгебра $\mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ называется **алгеброй операторов** над пространством $X(\Bbbk)$.

Пример 3.1. Другие примеры алгебр:

1. $\mathbb{R}$ - алгебра вещественных чисел;
2. $\mathbb{C}$ - алгебра комплексных чисел:
$$x = (x_0, x_1), \quad \leftrightarrow \quad 1 \cdot x_0 + i \cdot x_2.$$
3. $\mathbb{R}^4$ - алгебра кватернионов:
$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad \leftrightarrow \quad 1 \cdot x_0 + i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3.$$

Nota bene Пусть $\mathcal{A}$ - произвольная алгебра и $x, y \in \mathcal{A}$, и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $\mathcal{A}$, тогда

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k,$$

и для *произведения* элементов будем иметь

$$x \cdot y = \left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \eta^k e_k\right) = \sum_{j,k=1}^n \xi^j \eta^k \left(e_j \cdot e_k\right) = \sum_{j,k,l=1}^n \xi^j \eta^k m_{jk}^l e_l.$$

‖ Набор $\left\{m_{jk}^l\right\}$ называется **структурными константами** алгебры $\mathcal{A}$:

$$e_j \cdot e_k = \sum_{l=1}^n m_{jk}^l e_l.$$

Nota bene Пусть $X = X(\Bbbk)$ - линейное пространство и $\{e_i\}_{i=1}^n$ его базис. Положим далее, что $\mathrm{End}_\Bbbk(X)$ - алгебра операторов над $X(\Bbbk)$, причем:

$$\varphi \leftrightarrow A_\varphi, \quad \psi \leftrightarrow B_\psi, \quad A_\varphi, B_\psi \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

Лемма 3.4. *Имеют место следующие соответсвия:*

$$\varphi + \psi \leftrightarrow A_\varphi + B_\psi, \quad \lambda\varphi \leftrightarrow \lambda A_\varphi, \quad \psi \circ \varphi \leftrightarrow B_\psi \cdot A_\varphi$$

Лемма 3.5. *Имеет место изоморфизм алгебры эндоморфизмов пространства $X(\Bbbk)$ и алгебры квадратных $n \times n$ матриц:*

$$\mathrm{End}_\Bbbk(X) \simeq \mathrm{Mat}_n$$

►
Соответствующий изоморфизм устанавливается посредством выбора базиса $\{{}^i_j\varepsilon\}$ в $\mathrm{End}_\Bbbk(X)$ и отображением

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^n {}^i_j\varepsilon \alpha^j_i \quad \leftrightarrow \quad \|\alpha^j_i\| = A_\varphi.$$

◄

3.3 Обратный оператор

Nota bene Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)$ - линейный оператор. Рассмотрим отображение $\tilde\varphi : \mathrm{Im}\,\varphi \to X$, такое что:

$$\tilde\varphi(y) = x \quad \forall y \in \mathrm{Im}\,\varphi.$$

Nota bene Иными словами, можно написать:

$$(\tilde\varphi \circ \varphi)(x) = x \quad \forall x \in X,$$
$$(\varphi \circ \tilde\varphi)(y) = y \quad \forall y \in \mathrm{Im}\,\varphi.$$

Лемма 3.6. *Отображение $\tilde\varphi$ - линейный оператор.*
►
Докажем аддитивность:

$$\varphi(\tilde\varphi(y_1) + \tilde\varphi(y_2)) = (\varphi \circ \tilde\varphi)(y_1) + (\varphi \circ \tilde\varphi)(y_2) = y_1 + y_2,$$
$$\tilde\varphi(y_1) + \tilde\varphi(y_2) = \tilde\varphi(y_1 + y_2).$$

Однородность доказывается аналогично.
◄

> Оператор φ, для которого существует $\tilde\varphi$, обладающий перечисленными выше свойствами, называется **обратимым**.

Линейный оператор $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y, X)$ называется **обратным оператором** к оператору $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, если

$$(\tilde{\varphi} \circ \varphi)(x) = x \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varphi} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$$
$$(\varphi \circ \tilde{\varphi})(y) = y \quad \forall y \in Y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{id}_Y \,.$$

Теорема 3.2. *Для оператора $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ существует ему обратный $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y, X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\ker \varphi = \{0\}\,, \quad \mathrm{Im}\, \varphi = Y.$$

►
Первое из условий гарантирует инъективность отображения, а второе - его сюрьективность. Поэтому отображение, обладающее перечисленными свойствами, является биекцией, и значит обратимо.
◄

Nota bene Необходимым условием существования оператора обратного к $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ является изоморфность пространств X и Y:

$$X \simeq Y \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} Y.$$

Лемма 3.7. *Отображение $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ обладает следующими свойствами:*

$$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi, \quad (\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}.$$