Содержание

Билеты к коллоку

i.g. i.a.

20 марта 2023 г.

1 Понятие первообразной. Теорема о двух первообразных. Понятие неопределенного интеграла.

Замечание: Ниже под обозначением $\langle a, b\rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.

Определение. Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Несколько примеров:

1. Пусть $f(x) = x^2$, тогда первообразная $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$;
2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $F(x) = -\cos x$;
3. Пусть $f(x) = 0$, тогда $F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

и так далее.

Теорема (о двух первообразных). Пусть $F(x)$ - первообразная функция $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x), \Phi(x)$ - первообразные $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle$:

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

По следствию из теоремы Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

тогда $\Psi'(x) \equiv const$

Достаточность. Пусть $F(x) - \Phi(x) = C$ выполнено, тогда $\Phi(x) = F(x) + C$ и тогда

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

значит $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. □

.

Определение. Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется *множество всех первообразных на этом промежутке.* Обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Также это значит, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Определение. Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x)$ - непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ везде, кроме не более чем конечного числа точек.

2 Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Рис. 1: Таблица неопределенных интегралов.

.

Доказательство каждого из них состоит в том, что нужно продифференцировать правую часть... **!!ВЫУЧИТЕ ТАБЛИЦУ!!**

3 Свойства неопределенного интеграла.

ladies and gentlemans:

1. **Теорема (связь с производной).** Пусть $\int f(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$, тогда на $\langle a, b\rangle$:

   (a) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

   (b) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

   Доказательство. 1, 2)

   $$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

   Напомним, что $df = f'(x)dx$ и все становится очевидно. □

2. **Лемма.** Если $F(x)$ интегрируема на $\langle a,b\rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. **Теорема (линейность).** Пусть на $\langle a,b\rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Тогда

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int f(x)dx$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\left(\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

проинтегрировав обе части получим, что

$$\alpha \int f(x)dx + \beta \int f(x)dx = \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$$

□

4. **Теорема формулы замены переменной.** Пусть на $\langle a,b\rangle$ существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx,\ \varphi(t)\ :\ \langle \alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$, дифференцируема на $\langle \alpha,\beta\rangle$, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ - первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi(t)$ на $\langle \alpha,\beta\rangle$, откуда и следует равенство. □

5. **Теорема формула интегрирования по частям.** Пусть u, v - дифференцируемы на $\langle a,b\rangle$ и на этом промежутке существует неопределенный интеграл $\int vdu$, тогда на $\langle a,b\rangle$

$$\int vdu = uv - \int udv$$

Доказательство.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

перейдем к дифференциалам

$$d(uv) = udv + vdu \quad \Leftrightarrow \quad vdu = d(uv) - udv$$

проинтегрировав (найдем первообразные) обе части получим требуемое. □

4 Интегрирование рациональных дробей. Теорема о разложении на простейшие дроби и две леммы.

5 Интегрирование простейших дробей

6 Определение интеграла Римана. Пример неинтегрируемой функции.

Определение. Говорят, что **разбиение** τ введено на отрезке, если введена система точек $x_i,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, удовлетворяющая условию:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Обозначения:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Определение. Величина $\lambda(\tau) = \max\limits_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \Delta x_i$ называется **мелкостью(или рангом) разбиения(дробления)**.

Определение. Говорят, что на отрезке введено **оснащенное разбиение** (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi_i,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$, таким образом, что они находятся внутри i-ых отрезков.

Определение. Пусть на отрезке задана функция $f(x)$ и введена разбиение (τ, ξ). Величина

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральная суммой** для функции $f(x)$ на отрезке.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является **интегральном Римана** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ : \ \forall \tau \ : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \varepsilon \ \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

при этом пишут

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Определение. Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана на отрезке [a, b], называется **интегрируемой по Риману** на этом отрезке и обозначается $f \in R[a, b]$.

6.1 Пример неинтегрируеммой функции.

Например *функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и пусть τ - разбиение на нем.
Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \Delta x_i = 0$$

Тем самым, устремляя мелкость разбиения к нулю, "предел"зависит от выбора средних точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Определение. Расширим определение интеграла:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx, \quad a < b$$

7 Понятие сумм Дарбу, их свойства: неравенство для интегральной суммы, представления точными гранями, неравенства при измельчении разбиения, неравенства между верхней и нижней суммой для разных разбиений.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке [a, b] и τ - некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

называют **верхней и нижней суммами Дарбу** для $f(x)$, отвечающими разбиению τ, соответственно.

7.1 Очевидно, что ... aka неравенство для интегральной суммы.

Из определения нижней и верхней сумм дарбу очевидно:

$$s_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f)$$

Лемма. Ограниченность $f(x)$ сверху(снизу) равносильна конечности верхней(нижней) суммы Дарбу.

Доказательство. Очевидно.
По хорошему, если функция $f(x)$ ограничена сверху, то ее супремум конечное число, и так как все супремумы на отрезках не больше супремума функции, *очевидно*, что верхняя сумма Дарбу конечна. □

7.2 Представление точными гранями.

Лемма. Справедливы равенства.

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

Доказательство. Докажем первое равенство.
Очевидно что... $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$. Пусть f ограничена сверху на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ и по определению супремума

$$\exists \xi_i \in \Delta_i \ : \ M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1...n$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

свернув в правой и левой части формулы получим

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi)$$

и так как $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$:

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

по критерию супремума.
Если f не ограничена сверху на $[a,b]$, то она не ограничена хотя бы на одном подотрезке $[a,b]$. Для определенности рассмотрим такой подотрезок Δ_1. Тогда на этом подотрезке супремумом будет являться $+\infty$, а тогда верхняя сумма Дарбу

$$S_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n-1} M_i\Delta x_i+\infty=+\infty$$

А так как любая интегральная сумма будет меньше чем $S_\tau(f)$, то $S_\tau(f)=\sup\limits_{\xi}\sigma_\tau(f,\xi)$.

Второе равенство доказывается аналогично. □

7.3 Неравенства при измельчении разбиения.

Определение. Пусть на отрезке [a, b] введенны разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является **измельчением** разбиения τ_2, если $\tau_2\subset\tau_1$.

Лемма. Пусть $\tau_2\subset\tau_1$, тогда.

$$S_{\tau_2}(f)\geq S_{\tau_1}(f),\quad s_{\tau_1}(f)\geq s_{\tau_2}(f)$$

то есть при измельчении разбиения, верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x}\in(x_{k-1},x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2}=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1,i\neq k}^{n} M_i\Delta x_i+M_k\Delta x_k$$

Пусть $M'_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},\hat{x}]} f(x)$ и $M''_k=\sup\limits_{x\in[\hat{x},x_k]} f(x)$,

$$M_k\geq M'_k,\quad M_k\geq M''_k$$

и далее распишем $M_k\Delta x_k$

$$M_k\Delta x_k=M_k(\hat{x}-x_{k-1})+M_k(x_k-\hat{x})\geq M'_k(\hat{x}-x_{k-1})+M''_k(x_k-\hat{x}),$$

откуда (очевидно)

$$S_{\tau_2}(f)\geq\sum_{i=1,i\neq k}^{n} M_i\Delta x_i+M'_k(\hat{x}-x_{k-1})+M''_k(x_k-\hat{x})=S_{\tau_1}(f)$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

7.4 Неравенство между верхней и нижней суммой Дарбу при различных разбиениях.

Лемма. Пусть τ_1 и τ_2 - разбиения отрезка $[a,b]$, тогда.

$$s_{\tau_1}(f)\leq S_{\tau_2}(f)$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Пусть разбиениея $\tau=\tau_1\cap\tau_2$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем $\tau_1\subset\tau$, $\tau_2\subset\tau$. По прошлой лемме и неравенстве между интегральными суммами и суммами Дарбу:

$$s_{\tau_1}(f)\leq s_\tau(f)\leq S_\tau(f)\leq S_{\tau_2}(f)$$

что *очевидно* доказывает лемму. □

8 Понятия интегралов Дарбу. Неравенство, связывающее суммы и интегралы Дарбу. Необходимое условие интегрируемости функции.

Определение. Пусть функция задана и ограничена на $[a, b]$. Величины

$$I^*(f) = \inf_\tau S_\tau(f), \quad I_*(f) = \sup_\tau s_\tau(f)$$

называются **верхним и нижним интегралами Дарбу** соответственно.

8.1 Неравенство связывающее суммы и интегралы Дарбу.

Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство

$$s_{\tau_1}(f) \leq I_*(f) \leq I^* \leq S_{\tau_2}(f)$$

доказательство очевидно.

8.2 Необходимое условие интегрируемости.

Пусть $f \in R[a, b]$, тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена, например сверху. Тогда $S_\tau(f) = +\infty$ для любого разбиения τ. Поэтому для любого числа I и разбиения τ найдется такое оснащенное разбиение (τ, ξ), что

$$\sigma_\tau(f, \xi) > I + 1$$

то есть никакое число I не является интегралом данной функции. □

9 Критерии интегрируемости (Дарбу, Римана, через интегралы Дарбу). Запись с помощью колебания функции.

Теорема (Критерии интегрируемости). Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $f \in R[a, b]$;
2. Критерий Дарбу:
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \tau\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$
3. Критерий Римана:
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \tau\ :\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$
4.
$$I_* = I^* \quad (= I)$$

Доказательство.

- Докажем $1 \Rightarrow 2$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta > 0 :\ \forall \tau\ :\ \lambda(\tau) < \delta\ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда (раскрываем модуль)

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

перейдем к инфимуму и к супремуму в левой и правой части соответственно

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

- Переход 2 $\Rightarrow$ 3 очевиден, так как мы доказали для любого разбиения, а в критерии Римана сужение к "какому-то".
- Докажем 3 $\Rightarrow$ 4. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Заметим, что тогда f ограничена. Так как (из предыдущих свойств)
$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau$$
то $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ для любого ε. То есть $I^* = I_*$.
- И докажем 4 $\Rightarrow$ 1. Пусть $I^* = I_* = I$. Тогда для $\varepsilon > 0$
$$I_* = \sup_\tau s_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_1 \;:\; s_{\tau_1} > I_* - \frac{\varepsilon}{4}$$
$$I^* = \inf \tau S_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_2 \;:\; S_{\tau_2} > I^* + \frac{\varepsilon}{4}$$

□

9.1 Запись с помощью колебаний функции.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. **Колебанием функции** на этом множестве называется величина
$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|$$
И из определний супремума и инфимума легко получить
$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$$
И в критериях Дарбу и Римана можно заменить $S_\tau - s_\tau$
$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i$$

10 Свойства интегрируемых функций: линейность; интегрируемость произведения, частного, модуля; интегрируемость на меньшем отрезке и на склейке отрезков.

Пусть $f(x), g(x) \in R[a, b]$, тогда

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $f(x)g(x) \in R[a, b]$;
3. $|f(x)| \in R[a, b]$;
4. Если $|f(x)| \geq C > 0$ на $[a, b]$, то $\dfrac{1}{f(x)} \in R[a, b]$;
5. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, тогда $f(x) \in R[c, d]$.

Доказательство. 1. Так как
$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leq$$
$$\leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E)$$
то переходя к супремуму в левой части
$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, перепишем критерий Дарбу через колебания

$$\exists \delta_1 \ : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

аналогично для g:

$$\exists \delta_2 \ : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\alpha f + \beta g) \Delta x_i \leq |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i + |\beta|$$

$\square$