

Содержание

1	Неопределенный интеграл	4
1.1	Понятие первообразной, неопределённого интеграла и вопросы их существования	4
1.2	Таблица неопределённых интегралов	6
1.3	Свойства неопределенного интеграла	7
1.4	Интегрирование рациональных дробей	11
1.5	Некоторые сведения из теории многочленов	11
1.6	Разложение рациональной дроби на простейшие	12
1.7	Интегрирование простейших дробей	16
1.8	Метод Остроградского	18
1.9	Интегрирование иррациональностей	18
1.10	Интегралы от тригонометрических функций	20
1.11	“Неберущиеся” интегралы	21
2	Понятие интеграла Римана	21
2.1	Интегральные суммы и интеграл	21
2.2	Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости	24
2.3	Критерии Дарбу и Римана интегрируемости функции	27
2.4	Свойства интегрируемых функций	30
2.5	Классы интегрируемых функций	32
2.6	Свойства интеграла Римана. Первая теорема о среднем.	34
2.7	Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства	38
2.8	Формула Ньютона-Лейбница	40
2.9	Формулы замены переменной и интегрирования по частям	43
2.10	Интегралы от четной, нечетной и периодической функций	45
2.11	Формулы Валлиса и Стирлинга	46
3	Приложения определенного интеграла	48
3.1	Понятие площади и ее вычисление	48
3.1.1	Площадь в декартовых координатах	50
3.1.2	Площадь в полярных координатах	52
3.2	Понятие объема и его вычисление	52
3.2.1	Вычисление объемов	53
3.3	Понятие длины и ее вычисление	55
3.3.1	Вычисление длины пути	56

4	Несобственный интеграл	60
4.1	Понятие несобственного интеграла	60
4.2	Свойства несобственного интеграла	61
4.3	Признаки сходимости интегралов от функций, сохраняющих знак	63
4.4	Критерий Коши	68
4.5	Абсолютная и условная сходимости интеграла	68
4.6	Признак Абеля–Дирихле	71
4.7	Интегралы с несколькими особенностями	75
4.8	Интеграл в смысле главного значения	75
4.9	Интеграл Эйлера–Пуассона	77
5	Числовые ряды	78
5.1	Понятие ряда и его суммы	78
5.2	Признаки сходимости рядов с положительными членами	81
5.2.1	Признаки сравнения и ряд Дирихле	81
5.2.2	Радикальный признак Коши	82
5.2.3	Признак Даламбера	84
5.2.4	Признак Куммера	85
5.2.5	Признак Раабе	86
5.2.6	Признак Гаусса	87
5.2.7	Интегральный признак Коши и асимптотика сумм	87
5.3	Признаки сходимости рядов с членами произвольного знака . .	91
5.4	Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Теорема Рима- мана	96
5.5	Произведение рядов	102
6	Функциональные последовательности и ряды	107
6.1	Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов	107
6.2	Равномерная сходимость функциональных последовательно- стей и рядов	109
6.3	Равномерная норма	111
6.4	Критерий Коши равномерной сходимости	113
6.5	Признаки равномерной сходимости функциональных рядов . . .	115
6.6	Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов	120
7	Степенные ряды	125
7.1	Общие свойства степенных рядов	125
7.2	Остаточные члены формулы Тейлора	132
7.3	Ряды Тейлора и Маклорена	134
7.4	Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора . .	135
7.4.1	Ряд Маклорена для e^x	135

7.4.2	Ряд Маклорена для a^x	136
7.4.3	Ряд Маклорена для $\sin x$	136
7.4.4	Ряд Маклорена для $\cos x$	136
7.4.5	Ряд Маклорена для $\ln(1 + x)$	137
7.4.6	Ряд Маклорена для $(1 + x)^\alpha$	137
7.4.7	Ряд Маклорена для $\operatorname{arctg} x$	139

8 Тригонометрические ряды Фурье 140

8.1	Ортогональные системы функций	140
8.2	Ряд Фурье по ортогональной системе	140
8.3	Лемма Римана	142
8.4	Ядро Дирихле	144
8.5	Принцип локализации и условия Гёльдера	145
8.6	Сходимость ряда Фурье в точке	147
8.7	Некоторые примеры и приложения	148
8.7.1	Ряд из обратных квадратов	148
8.7.2	Бесконечное произведение для синуса	149
8.8	Ряды Фурье по произвольному промежутку длины $2l$	150

1 Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной, неопределённого интеграла и вопросы их существования

Ранее была изучена операция дифференцирования, сопоставляющая функции ее производную. В этом разделе будет изучаться обратная задача, в которой производная известна, а функцию нужно найти.

Замечание 1.1.1 *Ниже под обозначением $\langle a, b \rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.*

Определение 1.1.1 *Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b \rangle$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1.1.1 *Функция $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ будет первообразной для функции $f(x) = x^2$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, но эта первообразная не единственна. Так, функции $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ или $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \pi^e$ также будут ее первообразными.*

Пример 1.1.2 *Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.*

Пример 1.1.3 *Функция $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$.*

Вопрос об описании всех первообразных данной функции решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.1.1 *Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные для $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b \rangle$

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C$.

Достаточность. Пусть на $\langle a, b \rangle$ выполнено условие $F(x) - \Phi(x) = C$. Тогда на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, а следовательно

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

То есть $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$. □

Определение 1.1.2 *Неопределённым интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется множество всех её первообразных на этом промежутке. Неопределённый интеграл обозначается следующим образом:*

$$\int f(x)dx,$$

где

- \int - знак неопределённого интеграла;
- $f(x)$ - подынтегральная функция;
- $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;
- x - переменная интегрирования.

Следствие 1.1.2 *Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, то неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$ равен*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для краткости информацию о том, что рассматривается промежуток $\langle a, b \rangle$, часто опускают. Например, вместо

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

пишут

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

подразумевая, что C – кусочно-постоянная.

Замечание 1.1.2 *Если dx трактовать, как дифференциал, то ниже приведенные формулы интегрирования по частям и замены переменной становятся совершенно «механическими».*

Замечание 1.1.3 Полезно отметить, что не каждая функция имеет первообразную. Так как производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода, то любая функция, имеющая на $\langle a, b \rangle$ разрыв первого рода, не имеет на $\langle a, b \rangle$ первообразной.

Позже, при изучении определенного интеграла Римана будет показано, что каждая непрерывная на $\langle a, b \rangle$ функция имеет на этом множестве первообразную.

Замечание 1.1.4 Первообразные существуют не только у непрерывных функций. Производная дифференцируемой функции может иметь разрывы второго рода. Например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

Детали остаются читателю.

Для практических целей часто полезно следующее определение.

Определение 1.1.3 Функция $F(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, если $F(x) \in C\langle a, b \rangle$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $\langle a, b \rangle$, кроме не более чем конечного числа точек.

Пример 1.1.4 Легко проверить, что обобщенной первообразной функции $y = \operatorname{sign} x$ на \mathbb{R} является функция $y = |x|$.

1.2 Таблица неопределённых интегралов

Ниже приведена таблица интегралов, часто используемых на практике.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0 \text{ («длинный логарифм»)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \text{ («высокий логарифм»)}$$

Доказательство. В качестве примера приведено доказательство для формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части равна подынтегральной функции.

$$\begin{aligned} \left(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \end{aligned}$$

□

Важно отметить, что каждая из формул, написанных выше, рассматривается на тех промежутках вещественной оси, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то произвольные постоянные в правой части, вообще говоря, различны.

1.3 Свойства неопределенного интеграла

Теорема 1.3.1 (Интеграл и производная) Пусть существует $\int f(x)dx$ на $\langle a, b \rangle$, тогда на $\langle a, b \rangle$:

1. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$
2. $d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$

Доказательство. 1. Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Доказывается аналогично и предлагается в качестве упражнения. □

Прямо из определения легко получается и следующая важная лемма:

Лемма 1.3.1 Если $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.

Следующая теорема широко применяется на практике.

Теорема 1.3.2 (Линейность неопределенного интеграла) Пусть на $\langle a, b \rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Тогда

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\left(\alpha \int f dx + \beta \int g dx \right)' = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

то есть $\alpha \int f dx + \beta \int g dx$ – первообразная для $\alpha f + \beta g$ на $\langle a, b \rangle$, а значит равенство установлено. \square

Пример 1.3.1 Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx.$$

По свойству линейности,

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx = \int x dx + \int x^{-1/3} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x^{2/3} + 5 \ln |x| + C.$$

Пример 1.3.2 Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Теорема 1.3.3 (Формула замены переменной) Пусть на $\langle a, b \rangle$ существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $\varphi(t) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, дифференцируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$, откуда и следует равенство. \square

Пример 1.3.3 Вычислить интеграл

$$\int x e^{x^2} dx.$$

Пусть $x^2 = t$, тогда $d(x^2) = dt$ или $2x dx = dt$, а значит

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Пример 1.3.4 Вычисление предыдущего интеграла можно оформить и иначе, если dx трактовать, как дифференциал.

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Данный способ оформления называется занесением под знак дифференциала.

Теорема 1.3.4 (Формула интегрирования по частям) Пусть u, v дифференцируемы на $\langle a, b \rangle$ и на $\langle a, b \rangle$ существует неопределенный интеграл $\int v du$, тогда на $\langle a, b \rangle$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Доказательство. Действительно, если рассмотреть дифференциал от правой части равенства, то получим

$$d\left(uv - \int v du\right) = d(uv) - d\left(\int v du\right) = d(uv) - v du = u dv,$$

так как $d(uv) = u dv + v du$. Отсюда следует требуемое. \square

Пример 1.3.5 Вычислить интеграл

$$\int x \sin x dx.$$

Пусть $u = x$, тогда $du = dx$, $dv = \sin x dx$ и $v = -\cos x$. Значит,

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 1.3.6 Вычислить интеграл

$$\int (x^2 + 2x)e^x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int (x^2 + 2x)e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x \\ du = (2x + 2)dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2 + 2x)e^x - \int (2x + 2)e^x dx.$$

В результате степень многочлена перед экспонентой уменьшилась. Проинтегрируем по частям снова,

$$\int (2x + 2)e^x = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 2 \\ du = 2dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (2x + 2)e^x - 2 \int e^x dx = (2x + 2)e^x - e^x + C.$$

Окончательно,

$$\int (x^2 + 2x)e^x dx = (x^2 + 2x)e^x - (2x + 2)e^x + e^x + C.$$

Замечание 1.3.1 Формулу интегрирования по частям удобно применять для интегралов вида

$$\int P_n(x)a^{\alpha x} dx, \quad \int P_n(x) \sin(\alpha x) dx, \quad \int P_n(x) \cos(\alpha x) dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n .

Пример 1.3.7 Вычислить интеграл

$$\int e^x \sin x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

еще раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

В итоге,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Интегралы такого типа, как рассмотрен выше, называются самосводящимися.

1.4 Интегрирование рациональных дробей

1.5 Некоторые сведения из теории многочленов

В дальнейшем, под многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ будет подразумеваться функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Под многочленом нулевой степени будет подразумеваться константа.

Определение 1.5.1 Рациональной дробью называется дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_m(x)$ – многочлен степени m .

Определение 1.5.2 Рациональная дробь называется правильной, если $n < m$, иначе она называется неправильной.

Лемма 1.5.1 Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная дробь. Тогда существует единственное представление

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R_{n-m}(x)$ – многочлен степени $(n - m)$, $T_k(x)$ – многочлен степени k , причем $k < m$.

В теории многочленов доказывается следующая теорема.

Теорема 1.5.1 Пусть $P_n(x)$ – многочлен n -й степени, у которого коэффициент при старшей степени равен единице. Тогда он может быть разложен на множители следующим образом

$$P_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_mx + c_m)^{l_m},$$

где

$$k_p, l_m \in \mathbb{N}, D = b_m^2 - 4c_m < 0, k_1 + k_2 + \dots + k_p + 2 \cdot (l_1 + \dots + l_m) = n.$$

Замечание 1.5.1 Условия $b_i^2 - 4c_i < 0$ означают, что квадратные трехчлены $x^2 + b_ix + c_i$ не имеют вещественных корней. В этом случае они имеют два комплексно-сопряженных корня $\alpha \pm \beta i$.

1.6 Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение 1.6.1 Простейшими дробями называют дроби вида

$$\frac{A}{(x - a)^k}, \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Оказывается, любая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших. Этой теореме предположим две леммы.

Лемма 1.6.1 Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и $Q_m(x) = (x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, где $\tilde{Q}(a) \neq 0$. Существует число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$, такие что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x - a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x - a)^k} = \frac{P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя.

$$P_n(a) - A \cdot \tilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{P_n(a)}{\tilde{Q}(a)},$$

где последнее равенство корректно, так как по условию $\tilde{Q}(a) \neq 0$. При данном A в числителе стоит многочлен $P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)$ с корнем a , значит его можно разложить на множители $(x - a) \cdot \tilde{P}(x)$, а тогда

$$\frac{P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{(x - a) \cdot \tilde{P}(x)}{(x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Существование разложения доказано.

Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x - a)^k} + \frac{\tilde{P}_2(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Домножив на $(x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, имеем

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_1(x) \cdot (x - a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_2(x) \cdot (x - a),$$

причем это равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда равенство превращается в

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(a),$$

и так как $\tilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\tilde{P} = P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие. \square

Лемма 1.6.2 Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и $Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, $p^2 - 4q < 0$, $\alpha \pm \beta i$ – комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, причем $\tilde{Q}(\alpha \pm \beta i) \neq 0$. Существуют единственные числа $A, B \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$ такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A, B так, чтобы число $\alpha + \beta i$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha + \beta i) - (A(\alpha + \beta i) + B) \cdot \tilde{Q}(\alpha + \beta i) = 0.$$

Так как значение многочлена в комплексной точке дает комплексное число, то

$$P_n(\alpha + \beta i) = P_1 + iP_2,$$

$$\tilde{Q}(\alpha + \beta i) = \tilde{Q}_1 + i\tilde{Q}_2,$$

где $P_1, P_2, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 \in \mathbb{R}$ и $\tilde{Q}_1^2 + \tilde{Q}_2^2 \neq 0$, так как по условию $\tilde{Q}(\alpha + \beta i) \neq 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$P_1 + iP_2 - (A\alpha + iA\beta + B) \cdot (\tilde{Q}_1 + i\tilde{Q}_2) = 0.$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$(P_1 - A(\alpha\tilde{Q}_1 - \beta\tilde{Q}_2) - B\tilde{Q}_1) + i(P_2 - A(\alpha\tilde{Q}_2 + \beta\tilde{Q}_1) - B\tilde{Q}_2) = 0 + 0 \cdot i$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_1 - A(\alpha\tilde{Q}_1 - \beta\tilde{Q}_2) - B\tilde{Q}_1 = 0 \\ P_2 - A(\alpha\tilde{Q}_2 + \beta\tilde{Q}_1) - B\tilde{Q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha\tilde{Q}_1 - \beta\tilde{Q}_2) + B\tilde{Q}_1 = P_1 \\ A(\alpha\tilde{Q}_2 + \beta\tilde{Q}_1) + B\tilde{Q}_2 = P_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы:

$$\Delta = (\alpha\tilde{Q}_1 - \beta\tilde{Q}_2)\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1(\alpha\tilde{Q}_2 + \beta\tilde{Q}_1) = -\beta(\tilde{Q}_1^2 + \tilde{Q}_2^2) \neq 0.$$

Значит из системы единственным образом могут быть найдены числа A и B такие, что $\alpha + \beta i$ - корень числителя. Если $\alpha + \beta i$ корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ - тоже его корень, значит при найденных A и B числитель $P_n(x) - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x)$ может быть разложен на множители

$$P_n(x) - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x) = (x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x),$$

причем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{(x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.

Единственность доказывается аналогично доказательству предыдущей леммы и остается в качестве упражнения. \square

Две данные леммы позволяют доказать теорему, которая и является основной целью данного параграфа.

Теорема 1.6.1 Любая рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & R_{n-m}(x) + \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ & + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}} + \dots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2 + p_tx + q_t}, \end{aligned}$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$, $R_{n-m}(x)$ – многочлен степени $(n-m)$ и знаменатель исходной дроби имеет разложение

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}.$$

Доказательство. Пусть в рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ степень $n > m$, тогда по лемме 1.5.1 ее можно представить в виде суммы многочлена $R_{n-m}(x)$ и правильной дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$, где $k < m$. Таким образом достаточно рассмотреть случай правильной и несократимой дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$. По лемме 1.6.1 дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\tilde{Q}^{(1)}(x) = (x-a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$. Далее по лемме 1.6.1 также можно найти число A_{12} и многочлен $\tilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)} = \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{\tilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{\tilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i , $i = 1 \dots s$, получим

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)} + \dots + \\ & \frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{Q}^{(s)}(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$, при этом дробь $\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)}$ – правильная. Далее используем лемму 1.6.2, получим

$$\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1} \cdot \hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$. Продолжая рассуждения таким же образом получим, что каждой t паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности l_t , будут соответствовать l_t простейших дробей третьего и четвертого типа, и окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)} + \frac{A_{21}}{(x - a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - a_2)} + \dots + \\ & \frac{A_{s1}}{(x - a_s)^{sk_s}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x - a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \\ & \frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \dots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \dots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}} + \dots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2 + p_tx + q_t}. \end{aligned}$$

□

1.7 Интегрирование простейших дробей

В данном пункте в общем виде показывается, как можно вычислить интеграл от простейших рациональных дробей. Для начала рассмотрим интеграл

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx, \quad k \geq 1.$$

1. При $k = 1$ имеем

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \int \frac{d(x - a)}{x - a} = A \ln |x - a| + C.$$

2. При $k > 1$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = A \int \frac{d(x - a)}{(x - a)^k} = A \int (x - a)^{-k} d(x - a) = A \frac{(x - a)^{1-k}}{1 - k} + C.$$

Теперь покажем, как вычисляются интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad k \geq 1, \quad p^2 - 4q < 0.$$

3. Пусть $k = 1$. Дополним знаменатель до полного квадрата,

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как выражение

$$\frac{4q - p^2}{4} > 0,$$

то его можно обозначить, как a^2 . Кроме того, положим $t = x + \frac{p}{2}$, тогда $dt = dx$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{A(t - \frac{p}{2}) + B}{t^2 + a^2} dt = \int \frac{At + (B - \frac{Ap}{2})}{t^2 + a^2} dt = \\ &= A \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \\ &= \frac{A}{2} \ln |t^2 + a^2| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{A}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} + C. \end{aligned}$$

4. Пусть $k > 1$. Используя обозначения, введенные в пункте 3, получим

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = A \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Сначала рассмотрим первый интеграл:

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \frac{(t^2 + a^2)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл, обозначив его I_k :

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 + a^2 - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычислим по частям

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt &= \left| \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} \\ v = \frac{1}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \end{array} \right| = \\ &= \frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{4(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$I_k = \frac{1}{a^2} \left(I_{k-1} \left(1 + \frac{1}{4(1-k)} \right) - \frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right).$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1} .
Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

то схема вычисления интеграла полностью изложена.

Следствие 1.7.1 *Интеграл от рациональной дроби может быть выражен через элементарные функции.*

1.8 Метод Остроградского

Вычисление интеграла от последнего типа дроби – задача трудоемкая. Полезно пользоваться следующей формулой (в случае, когда дробь под интегралом – правильная):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но первой кратности. Многочлен $Q_1(x)$ – это частое от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Все написанные дроби являются правильными.

Доказательство. Остается в качестве упражнения □

1.9 Интегрирование иррациональностей

Пусть $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – рациональная функция относительно каждой из переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

1. Интегралы вида

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_n} \right) dx,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Q}$. Подстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

m – общий знаменатель p_1, p_2, \dots, p_n .

2. Интегралы вида

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx, \quad a \neq 0.$$

Функция под интегралом с помощью алгебраических преобразований приводится к виду:

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = \frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ – рациональные дроби. С интегралом от рациональной дроби все ясно. Как вычислить интеграл от первой дроби?

Разложив дробь на простейшие, приходим к дробям (и интегралам) трех типов. Первый тип:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Этот интеграл может быть вычислен, как

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{m-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где коэффициенты ищутся после дифференцирования методом неопределенных коэффициентов.

Второй тип:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Этот интеграл сводится к интегралу предыдущего типа подстановкой $t = (x-a)^{-1}$.

Третий тип:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Если $ax^2 + bx + c = \alpha(x^2 + px + q)$, то приходим к интегралу

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^{k+1/2}} dx = E \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^{k+1/2}} dx + F \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k+1/2}}.$$

Второй интеграл вычисляется, используя подстановку Абеля:

$$t = \left(\sqrt{x^2 + px + q} \right) '.$$

Иначе

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$$

и коэффициенты подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах исчезли члены, содержащие t . Приходим к интегралу

$$\int \frac{P_{k-1}(x)}{(x^2 + a)^k \sqrt{sx^2 + r}} dx.$$

Раскладывая дробь на простейшие, имеем либо

$$\int \frac{x}{(x^2 + a)^k \sqrt{sx^2 + r}} dx,$$

либо

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a)^k \sqrt{sx^2 + r}}.$$

Последний интеграл снова вычисляется подстановкой Абеля

$$t = \left(\sqrt{sx^2 + r} \right)'.$$

3. Дифференциальный бином

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx,$$

$a, b \in \mathbb{R}, m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = t^N$, N – общий знаменатель m, n .

Если $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, то $ax^n + b = t^s$, s – знаменатель p .

Если $(m+1)/n + p \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^{-n} = t^s$, s – знаменатель p .

В других случаях интеграл в элементарных функциях не выражается (см. ниже про “Неберущиеся интегралы”).

1.10 Интегралы от тригонометрических функций

В этом разделе будут рассмотрены интегралы от некоторых классов тригонометрических функций.

Покажем, что интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

всегда сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Для этого обратимся к формулам выражения синуса и косинуса через тангенс половинного угла, а тем самым представим их через t :

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

А также

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом исходный интеграл будет выражен через рациональные функции:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

1.11 “Неберущиеся” интегралы

Позже мы докажем, что непрерывная функция всегда имеет первообразную. Но эта первообразная не всегда выражается через элементарные функции.

Ниже приведены некоторые интегралы, не выражающиеся элементарными функциями:

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------|--|
| 1. $\int \frac{\sin x}{x} dx;$ | 4. $\int e^{\pm x^2} dx;$ | 7. $\int \frac{dx}{\ln x};$ |
| 2. $\int \frac{\cos x}{x} dx;$ | 5. $\int \sin x^2 dx;$ | 8. $\int \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 x} dx;$ |
| 3. $\int \frac{e^x}{x} dx;$ | 6. $\int \cos x^2 dx;$ | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 x}}.$ |

2 Понятие интеграла Римана

2.1 Интегральные суммы и интеграл

Определение 2.1.1 Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение τ , если введена система точек $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, удовлетворяющая условию

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Замечание 2.1.1 Обычно вводят следующие обозначения:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 2.1.2 Величина $\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta x_i$ называется мелкостью (рангом) разбиения (дробления).

Определение 2.1.3 Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (или оснащенное разбиение) (τ, ξ) , если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$.

Определение 2.1.4 Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и введено разбиение (τ, ξ) . Величина

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ) .

Определение 2.1.5 Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Замечание 2.1.2 Проще, но с некоторыми оговорками, последнее определение можно переписать в виде

$$I = \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Замечание 2.1.3 Понятие предела интегральных сумм, вообще говоря, не является частным случаем понятия предела функции, так как интегральная сумма является функцией разбиения, а не его мелкости. В дальнейшем мы часто будем писать $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, оставляя детальную расшифровку читателю. Кроме того, предел такого типа можно свести к рассмотрению предела последовательности.

Определение 2.1.6 Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$ называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой) и обозначается $f \in R[a, b]$.

Пример 2.1.1 Легко показать, что постоянная функция $y = C$ интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, причем

$$\int_a^b C dx = C(b - a).$$

Действительно, вводя произвольное разбиение (τ, ξ) отрезка $[a, b]$,

$$\sigma_\tau(y, \xi) = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b - a),$$

откуда и следует требуемое.

Пример 2.1.2 Не всякая функция интегрируема. Оказывается, что функция Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Для примера будем рассматривать отрезок $[0, 1]$ и пусть τ – разбиение этого отрезка.

Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^n d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1.$$

Теперь выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^n d(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0.$$

Тем самым, при стремлении $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, предел зависит от выбора средних точек ξ , что противоречит определению интеграла.

Для дальнейшего изложения удобно немного расширить определение интеграла Римана.

Определение 2.1.7 По определению полагают

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad a < b.$$

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости

Для изучения вопросов существования интеграла Римана, полезно рассмотреть две «крайние интегральные суммы», которые, на самом деле, интегральными являются не всегда.

Определение 2.2.1 Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и τ – некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x),$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x)$, отвечающими разбиению τ , соответственно.

Замечание 2.2.1 Из определения верхней и нижней сумм Дарбу очевидно неравенство

$$s_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f)$$

для любых оснащенных разбиений (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

Лемма 2.2.1 Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности верхней суммы $S_\tau(f)$ (нижней суммы $s_\tau(f)$).

Доказательство. Очевидно. □

Замечание 2.2.2 Если $f \in C[a, b]$, то, согласно теореме Вейерштрасса, $m_i = \min_{x \in \Delta_i} f(x)$, $M_i = \max_{x \in \Delta_i} f(x)$, а потому нижняя и верхняя суммы Дарбу для непрерывной функции являются ее наименьшей и наибольшими интегральными суммами, соответственно.

В общем случае последнее замечание, конечно, не выполняется, но справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2.2 Справедливы равенства

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. То, что $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$ уже отмечено в замечании 2.2.1. Пусть f ограничена сверху на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1 \dots n.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i , получим

$$\sum_{i=1}^n \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi),$$

что и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется набор точек ξ такой, что

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi),$$

и $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$. Тем самым проверено, что

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Если же f не ограничена сверху на $[a, b]$, то f не ограничена хотя бы на одном Δ_i . Пусть, для определенности, на Δ_1 . Тогда существует последовательность ξ_1^n , что $f(\xi_1^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \geq 2$. Тогда

$$\sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(\xi_1^n) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = +\infty = S_\tau(f)$$

□

Определение 2.2.2 Пусть на отрезке $[a, b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2 . Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2 , если $\tau_2 \subset \tau_1$.

Лемма 2.2.3 Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f),$$

то есть при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M'_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, \hat{x}]} f(x), \quad M''_k = \sup_{x \in [\hat{x}, x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M'_k, \quad M_k \geq M''_k$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M'_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

Лемма 2.2.4 Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезка $[a, b]$, тогда

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. По лемме 2.2.3 и замечанию 2.2.1,

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывает утверждение. □

Определение 2.2.3 Пусть функция задана и ограничена на $[a, b]$. Величины

$$I^*(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f), \quad I_*(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f)$$

называются верхним и нижним интегралами Дарбу соответственно.

Замечание 2.2.3 Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство

$$s_{\tau_1}(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Теорема 2.2.1 (Необходимое условие интегрируемости) Пусть $f \in R[a, b]$, тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f , например, не ограничена сверху. Тогда $S_\tau(f) = +\infty$ для любого разбиения τ . Поэтому для любого числа I и разбиения τ , найдется такое оснащенное разбиение (τ, ξ) , что

$$\sigma_\tau(f, \xi) > I + 1.$$

Значит, никакое число I пределом интегральных сумм не является. \square

2.3 Критерии Дарбу и Римана интегрируемости функции

Теорема 2.3.1 (Критерии интегрируемости) Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $f \in R[a, b]$;

2. Критерий Дарбу:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$

3. Критерий Римана:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$

4.

$$I_* = I^* \quad (= I).$$

Доказательство.

- Докажем $1 \Rightarrow 2$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму по ξ , а в левой части к инфимуму, получается

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

- Переход $2 \Rightarrow 3$ очевиден.
- Докажем $3 \Rightarrow 4$. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Заметим, что тогда f ограничена. Так как (из определения и свойств интегралов Дарбу)

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau,$$

то $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $I_* = I^*$.

- И, наконец, докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $I^* = I_* = I$. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$I_* = \sup_{\tau} s_{\tau} \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_1 : s_{\tau_1} > I_* - \varepsilon/4,$$

$$I^* = \inf_{\tau} S_{\tau} \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_2 : S_{\tau_2} < I^* + \varepsilon/4.$$

Пусть теперь τ – произвольное разбиение мелкости $\lambda(\tau) < \delta$ (значение δ выберем позже). Дополним его точками разбиений τ_1 и τ_2 и рассмотрим разбиение $\tilde{\tau} = \tau \cup \tau_1 \cup \tau_2$.

Пусть k – число точек в разбиении $\tau_1 \cup \tau_2$, $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$. Будем считать, что $m < M$ (иначе $f = \text{const} \in R[a, b]$).

Оценим наибольшее отклонение нижней суммы Дарбу разбиения τ по сравнению с его измельчением $\tilde{\tau}$. Так как к τ добавились k точек, то значение слагаемых суммы s_τ могло измениться на k отрезках разбиения. На каждом таком отрезке слагаемое $m_i \Delta x_i$ увеличилось не более, чем на $\delta(M_i - m_i) \leq \delta(M - m)$. Значит, вся сумма s_τ могла вырасти не больше, чем на $\delta k(M - m)$:

$$s_{\tilde{\tau}} - s_{\tau} \leq k\delta(M - m).$$

Аналогично, верхняя сумма S_τ при добавлении точек $\tau_1 \cup \tau_2$ может уменьшиться не более, чем на такую же величину:

$$S_{\tau} - S_{\tilde{\tau}} \leq k\delta(M - m).$$

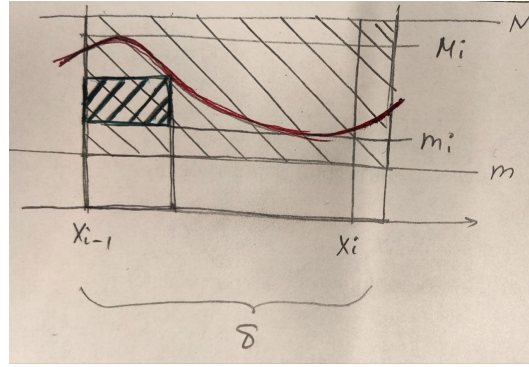


Рис. 1: Изменение нижней суммы s_τ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ при добавлении одной точки. Зеленая штриховка – реальное изменение, серая штриховка – максимально возможное изменение (с запасом)

Таким образом, имеем

$$s_\tau \geq s_{\tilde{\tau}} - k\delta(M - m) \geq s_{\tau_1} - k\delta(M - m) > I - k\delta(M - m) - \varepsilon/4,$$

$$S_\tau \leq S_{\tilde{\tau}} + k\delta(M - m) \leq S_{\tau_2} + k\delta(M - m) < I + k\delta(M - m) + \varepsilon/4,$$

откуда

$$S_\tau - s_\tau < 2k\delta(M - m) + \varepsilon/2.$$

Теперь понятно, как надо выбирать δ . Возьмем

$$\delta = \min \left\{ \lambda(\tau_1), \lambda(\tau_2), \frac{\varepsilon}{4k(M - m)} \right\}.$$

Тогда для любого τ мелкостью меньше δ имеем $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Осталось заметить, что из неравенств

$$s_\tau \leq \sigma_\tau(\xi) \leq S_\tau, \quad s_\tau \leq I_* = I = I^* \leq S_\tau$$

следует для любого оснащения ξ : $|\sigma_\tau(\xi) - I| < S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, что и означает $f \in R[a, b]$.

□

Определение 2.3.1 Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E . Колебанием функции на этом множестве называется величина

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Из определений верхней и нижней граней легко получить, что

$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x).$$

Замечание 2.3.1 В критериях Дарбу и Римана разность $S_\tau - s_\tau$ можно заменять на

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i,$$

где $\omega_i(f) = M_i - m_i$ – колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

2.4 Свойства интегрируемых функций

Ниже приведены основные свойства интегрируемых функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 2.4.1 (Свойства интегрируемых функций) Пусть $f(x), g(x) \in R[a, b]$, тогда

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f(x)g(x) \in R[a, b]$.
3. $|f(x)| \in R[a, b]$.
4. Если $|f(x)| \geq C > 0$ на $[a, b]$, то $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$.
5. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, тогда $f(x) \in R[c, d]$.

Доказательство. 1. Так как

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| &\leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \leq \\ &\leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E), \end{aligned}$$

то, переходя к супремуму в левой части получается, что

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то по следствию 2.3.1

$$\exists \delta_1 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a, b]$, то по следствию 2.3.1

$$\exists \delta_2 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$ выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha f + \beta g) \Delta x_i &\leq |\alpha| \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \leq \\ &\leq \frac{|\alpha| \varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta| \varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, по критерию Дарбу, $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$.

2. Так как $f, g \in R[a, b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists C : |f(x)| < C, |g(x)| < C, \forall x \in [a, b].$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)), \end{aligned}$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получим, что

$$\omega_i(fg) \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

3. Так как

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_i(f),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

4. Так как

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2}.$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

5. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то, согласно теореме Дарбу,

$$\exists \delta : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Пусть τ' – произвольное разбиение отрезка $[c, d]$ такое, что $\lambda(\tau') < \delta$. Дополним его до разбиения τ отрезка $[a, b]$ так, чтобы $\lambda(\tau) < \delta$, введя разбиения отрезков $[a, c]$ и $[d, b]$, но не добавляя новых точек в отрезок $[c, d]$. Тогда

$$\sum_{[c,d]} \omega_i(f) \Delta x_i \leq \sum_{[a,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon,$$

так как все слагаемые, входящие в левую сумму, входят и в правую, и $\omega_i(f) \geq 0$. Тем самым показано, что $f \in R[c, d]$. \square

Для дальнейшего изложения потребуется еще одно важное свойство интегрируемых функций, которое сформулировано ниже.

Теорема 2.4.2 Пусть $f(x) \in R[a, c]$, $f(x) \in R[c, b]$, тогда $f(x) \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R[a, c]$, то по критерию Римана

$$\exists \tau_1 : \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f \in R[c, b]$, то по критерию Римана

$$\exists \tau_2 : \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем

$$\sum_{[a,b]} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Римана, $f \in R[a, b]$. \square

2.5 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.5.1 (Интегрируемость непрерывной функции)

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т.е.

$$(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in R[a, b]).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора, а значит

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$, причем $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Римана, $f \in R[a, b]$. \square

Теорема 2.5.2 (Конечное число точек разрыва) Пусть f задана и ограничена на $[a, b]$. Пусть, кроме того, множество точек разрыва функции f конечно. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказательство. Так как функция ограничена, то $|f| \leq C$. Тогда $\omega(f, [a, b]) \leq 2C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса $\delta_1 = \varepsilon/(16Ck)$, где k – количество точек разрыва.

Дополнение к этому набору интервалов – это набор отрезков, на каждом из которых функция f непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Значит, так как число отрезков конечно, то существует δ_2 , что если x', x'' из какого-то отрезка, причем $|x' - x''| < \delta_2$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и τ – разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$.

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i = \sum' \omega_i(f) \Delta x_i + \sum'' \omega_i(f) \Delta x_i,$$

где первая сумма идет по отрезкам, не имеющим общих точек с построенными интервалами, а вторая – по всем остальным. Поэтому

$$\sum' \omega_i(f) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leq \frac{\varepsilon}{4C},$$

а значит

$$\sum \omega_i(f) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{4C} 2C = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге получаем требуемое. \square

Теорема 2.5.3 (Об интегрируемости монотонной функции)

Заданная и монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Интегрируемость постоянной функции уже известна. Пусть функция $f(x)$ не постоянна, не убывает и $\varepsilon > 0$. Тогда положив $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ и взяв разбиение τ отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \varepsilon.$$

Значит, согласно критерию Римана, $f \in R[a, b]$. \square

Замечание 2.5.1 *Монотонная функция может иметь счетное число точек разрыва. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}.$$

2.6 Свойства интеграла Римана. Первая теорема о среднем.

Справедливо свойство линейности интеграла.

Теорема 2.6.1 (Линейность определенного интеграла) *Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ известно из теоремы 2.4.1. Пусть $I_f = \int_a^b f(x) dx$, $I_g = \int_a^b g(x) dx$. Тогда для разбиения (τ, ξ) имеем

$$\left| \sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \xi) - \alpha I_f - \beta I_g \right| \leq |\alpha| \left| \sigma_\tau(f, \xi) - I_f \right| + |\beta| \left| \sigma_\tau(g, \xi) - I_g \right|.$$

Пользуясь определением интеграла Римана для I_f и I_g и интегрируемостью функции $\alpha f + \beta g$, получаем требуемое. \square

Теорема 2.6.2 (Аддитивность по промежутку интегрирования)

Пусть $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ известна из теоремы 2.4.1. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$, содержащее точку c . Тогда оно порождает разбиения τ_1 отрезка $[a, c]$ и τ_2 отрезка $[c, b]$, причем $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \rightarrow 0$ и $\lambda(\tau_2) \rightarrow 0$, то получаем требуемое. \square

Следствие 2.6.3 Пусть $f \in R(\min(a, b, c), \max(a, b, c))$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Доказательство моментально следует из предыдущей теоремы и соглашений о том, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

\square

Следующее свойство интеграла часто называют его монотонностью.

Теорема 2.6.4 (Монотонность интеграла) Пусть $a \leq b$, $f, g \in R[a, b]$, причем $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, получается требуемое. \square

Следствие 2.6.5 Пусть $a \leq b$, $f \in R[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Теорема 2.6.6 (Об отделимости от нуля) Пусть $a < b$, $f \in R[a, b]$, $f \geq 0$ и существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в x_0 . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Доказательство. Так как $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в точке x_0 , то существует окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > f(x_0)/2$. Тогда, в силу монотонности интеграла,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{[a, b] \cap U(x_0)} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int_{[a, b] \cap U(x_0)} dx > 0.$$

□

Теорема 2.6.7 Пусть $f \in R[a, b]$, тогда

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы 2.4.1. Так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

то переходя к пределам получается требуемое.

□

Теорема 2.6.8 (Первая теорема о среднем) Пусть $f, g \in R[a, b]$, $g(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, тогда

$$\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Кроме того, если $f(x) \in C[a, b]$, то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b]$$

и по теореме 2.6.4

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то в качестве μ можно взять любое число из отрезка $[m, M]$, так как из неравенства выше следует, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Если же $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то $\int_a^b g(x)dx > 0$ и, поделив на этот интеграл, получается неравенство

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

получается требуемое.

Если предположить, что $f(x) \in C[a, b]$, то по теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть утверждения. \square

Замечание 2.6.1 Можно доказать, что в условиях теоремы в предположении, что $f \in C[a, b]$, $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Обязательно проделайте это!

2.7 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства

Определение 2.7.1 Пусть $f \in R[a, b]$ и $x \in [a, b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Ниже будут рассмотрены стандартные свойства функции $\Phi(x)$: ее непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 2.7.1 (О непрерывности $\Phi(x)$)

$$\Phi(x) \in C[a, b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Так как функция $f \in R[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть

$$|f(x)| \leq C, \quad x \in [a, b].$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(x)|dx \right| \leq \\ &\leq C \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dx \right| = C|\Delta x|. \end{aligned}$$

Значит, при $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется $\Phi(x_0 + \Delta x) \rightarrow \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0 . Так как x_0 – произвольная точка отрезка $[a, b]$, то утверждение доказано. \square

Теорема 2.7.2 (О производной $\Phi(x)$) $\Phi(x)$ дифференцируема в точках непрерывности функции $f(x)$, причем

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x) dx - f(x_0) \Delta x}{\Delta x} \right| = \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx}{\Delta x} \right|. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда (в силу непрерывности функции $f(x)$)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\Delta x < \delta$, тогда

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(x) - f(x_0)| dx}{\Delta x} \right| < \varepsilon \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dx}{\Delta x} \right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

□

Следствие 2.7.3 Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем любая ее первообразная имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C = \Phi(x) + C.$$

2.8 Формула Ньютона-Лейбница

Ниже приведена основная формула интегрального исчисления.

Теорема 2.8.1 (Формула Ньютона-Лейбница) Пусть $f \in C[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию 2.7.3, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C.$$

Так как

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx + C = C,$$

то $C = F(a)$. Положив в равенстве

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + F(a)$$

$x = b$, получается

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Формула Ньютона-Лейбница справедлива и при предположении наличия первообразной у интегрируемой функции, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.2 (Усиленная формула Ньютона-Лейбница) Пусть $f \in R[a, b]$ и существует $F(x)$ – некоторая первообразная данной функции на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащенным разбиением (τ, ξ) . Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \rightarrow +\infty$ выполняется $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k,$$

а значит

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

□

Замечание 2.8.1 Доказанная формула Ньютона-Лейбница справедлива для любой первообразной интегрируемой функции. Ясно, что значение интеграла не зависит от выбора этой первообразной, ведь если выбрана первообразная $F(x) + C$, то

$$F(b) - F(a) = F(b) + C - F(a) - C.$$

Оказывается, формула Ньютона-Лейбница справедлива и для обобщенных первообразных.

Теорема 2.8.3 (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница) Пусть $f(x) \in R[a, b]$ и $F(x)$ – обобщенная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ – точки внутри (a, b) , в которых нарушено условие $F'(x) = f(x)$. Добавим к ним $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$. Так как интеграл – непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(\alpha_p - \varepsilon) - F(\alpha_{p-1} + \varepsilon)) = \\ &= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}), \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо ввиду того, что F – непрерывная функция. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{p=1}^k \int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^k (F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})) = \\ &= F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

Замечание 2.8.2 Не каждая интегрируемая функция имеет первообразную, и не каждая функция, имеющая первообразную, интегрируема.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема, а значит имеет первообразную, но $f' \notin R[-1, 1]$ (в силу неограниченности).

С другой стороны, функция $f(x) = \operatorname{sign} x \in R[-1, 1]$, но не имеет первообразной на этом промежутке. Она имеет обобщенную первообразную.

Обязательно придумайте пример интегрируемой функции, не имеющей даже обобщенной первообразной.

Вывод: интегрируемость и наличие первообразной – вещи разные.

2.9 Формулы замены переменной и интегрирования по частям

Теорема 2.9.1 (Формула интегрирования по частям) Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b]$, причем $u', v' \in R[a, b]$, тогда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Согласно теоремам о действиях с интегрируемыми функциями, $uv' \in R[a, b]$ и $u'v \in R[a, b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a, b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = \int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b.$$

□

Пример 2.9.1 Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Пусть

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Ясно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) d(-\cos(x)) = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ясно, что тогда

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Теорема 2.9.2 (Первый вариант формулы замены переменной)

Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(t)$ дифференцируема и $\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, так как $f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi(t)) \in R[\alpha, \beta]$. По свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, причем $F(\varphi(t))$ – первообразная этой функции, если $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

□

Пример 2.9.2 Вычислить интеграл ($a > 0$)

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Ясно (из геометрических соображений), что ответ таков: $\frac{\pi}{4}a^2$. Проверим это. Сделаем замену $x = a \sin t$. Тогда

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Часто теорему о замене переменной дают и в более общей форме.

Теорема 2.9.3 (Второй вариант формулы замены переменной)

Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, а $f \in R[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. Тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ясно, что здесь от функции φ больше требований, а от f – меньше. Мы не будем сейчас доказывать эту теорему.

2.10 Интегралы от четной, нечетной и периодической функций

Теорема 2.10.1 Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Доказательство. Ясно, что $f \in R[-a, a]$, так как $f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x$, $dt = -dx$, откуда

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt,$$

значит

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

□

Теорема 2.10.2 Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

Теорема 2.10.3 Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T , тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

2.11 Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 2.11.1 (Формула Валлиса)

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется цепочка неравенств

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x).$$

Обозначив

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx,$$

получим

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi,$$

откуда и получается требуемое. □

Докажем формулу Стирлинга в простейшем варианте. В дальнейшем она будет получена куда быстрее, проще, и точнее.

Теорема 2.11.2 (Простейшая формула Стирлинга)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Покажем, что она убывает и ограничена снизу. Так как

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2},$$

то

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Из геометрических соображений легко получить неравенство, что

$$\frac{1}{n + 1/2} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Умножив все неравенство на $(n + 1/2)$, получим

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{(n + 1/2)^2}{n(n + 1)}.$$

Вычтем единицу, тогда получим

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{(n + 1/2)^2}{n(n + 1)} - 1 = \frac{1}{4n(n + 1)},$$

Откуда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1,$$

а значит последовательность x_n убывает. Так как она ограничена снизу (например, нулем), то она, согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел. Обозначим его A .

Подставим в неравенства $(n + 1)$, $(n + 2)$, ..., $(n + k)$ и сложим, тогда получим

$$\begin{aligned} 0 < \ln \frac{x_n}{x_{n+k}} &< \frac{1}{4n(n + 1)} + \frac{1}{4(n + 1)(n + 2)} + \dots + \frac{1}{4(n + k - 1)(n + k)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + k} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)}.$$

Пусть $k \rightarrow +\infty$, тогда

$$1 < \frac{x_n}{A} < e^{1/(4n)}$$

и значит $A \neq 0$. В итоге,

$$A < x_n < Ae^{1/(4n)},$$

а значит $x_n = A(1 + o(1))$. Осталось найти A . Согласно формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

С другой стороны,

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \sqrt{2} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}.$$

Левая же часть стремится к A . Тем самым,

$$x_n = \sqrt{2\pi}(1 + o(1)),$$

что и доказывает формулу. □

Замечание 2.11.1 Можно доказать, что

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta/12n}, \quad 0 < \theta < 1.$$

3 Приложения определенного интеграла

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения теории определенного интеграла Римана к различным геометрическим и физическим задачам.

3.1 Понятие площади и ее вычисление

Понятие площади некоторых геометрических фигур известно из школьного курса геометрии. Определение площади для более широкого класса множеств «совсем строго» даваться не будет.

Замечание 3.1.1 Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Как обычно,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Определение 3.1.1 Отображение $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется движением, если

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|,$$

иными словами движение сохраняет расстояния.

Определение 3.1.2 Функция множеств (функционал) $S : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве «квадрируемых фигур» подмножеств плоскости, называется площадью, если

1. $S(A) \geq 0, A \in \mathfrak{U}$.

2. Если $A, B \in \mathfrak{U}, A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathfrak{U}$ и

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

3. Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab .

4. Если $A \in \mathfrak{U}$, U – движение, то $U(A) \in \mathfrak{U}$ и

$$S(U(A)) = S(A).$$

Замечание 3.1.2 Множество квадратируемых фигур мы не определяем. То, что некоторая фигура имеет площадь здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.

Лемма 3.1.1 (Свойства площади) Пусть $S : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$ – площадь. Тогда:

1. Площадь монотонна, то есть если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, то

$$S(A) \leq S(B).$$

2. Пусть $A \in \mathfrak{U}$ содержится в некотором отрезке. Тогда $S(A) = 0$.

3. Если множества $A, B \in \mathfrak{U}$ пересекаются по множеству нулевой площади, то

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

Доказательство. 1. $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тогда, предполагая квадратируемость $(B \setminus A)$,

$$S(A \cup (B \setminus A)) = S(A) + S(B \setminus A) \geq S(A).$$

2. A можно поместить в прямоугольник площади меньше, чем любое наперед заданное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq S(A) < \varepsilon \Rightarrow S(A) = 0.$$

3. Пусть $C = A \cap B$.

$$S(A) = S(A \setminus C) + S(C) = S(A \setminus B)$$

$$S(A \cup B) = S(A \setminus C) + S(B) = S(A) + S(B).$$

□

3.1.1 Площадь в декартовых координатах

Определение 3.1.3 Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется *подграфиком функции f* . Если функция f непрерывна, то подграфик еще называют *криволинейной трапецией*.

Предположим, что $f \in R[a, b]$ и подграфик данной функции имеет площадь. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau.$$

Поскольку $S(G_f)$ – число, не зависящее от τ , а $f \in R[a, b]$, то при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \rightarrow 0$, значит при всех τ неравенству

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau$$

удовлетворяет только одно число

$$S(G_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Данная формула допускает некоторое обобщение.

Теорема 3.1.1 Пусть $f, g \in R[a, b]$, $f \leq g$, тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$

$$G_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int_a^b (g - f)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c , чтобы $f + c \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} S(G_{f,g}) &= S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) = \\ &= \int_a^b (g + c)dx - \int_a^b (f + c)dx = \int_a^b (g - f)dx. \end{aligned}$$

□

Пусть теперь функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда площадь подграфика находится как

$$S(G_f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

В случае замкнутой кривой верна

Теорема 3.1.2 Пусть фигура G ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$S(G) = \pm \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \mp \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt,$$

где знак перед интегралом определяется в зависимости от направления обхода кривой. Точнее, верхний знак соответствует обходу кривой по часовой стрелке.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случай, когда G выпукла и граница обходится по часовой стрелке. Пусть $x \in [a, b]$ и $x(\alpha) = x(\beta) = a$, $x(\gamma) = b$. Тогда, пользуясь аддитивностью площади и предыдущей теоремой, получим

$$S(G) = \int_{\alpha}^{\gamma} y(t)x'(t)dt - \int_{\beta}^{\gamma} y(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\gamma} y(t)x'(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Второй интеграл получим, меняя x и y ролями.

Если кривая имеет противоположную ориентацию, то изменятся знаки перед интегралами.

Если фигура G не выпуклая, то представим её как объединение выпуклых фигур и воспользуемся аддитивностью площади.

□

3.1.2 Площадь в полярных координатах

Выведем формулу для вычисления площади фигуры в полярных координатах.

Определение 3.1.4 Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество

$$\widetilde{G}_f = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна, то подграфик еще называется криволинейным сектором.

Предположим, что $f \in R[\alpha, \beta]$ и подграфик данной функции в полярных координатах имеет площадь. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ – разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$, составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \leq S(\widetilde{G}_f) \leq S_\tau.$$

Кроме того, s_τ и S_τ – суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$. Так как эта функция интегрируема, то при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \rightarrow 0$, а значит

$$S(\widetilde{G}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

3.2 Понятие объема и его вычисление

Под словом тело всюду понимается подмножество пространства \mathbb{R}^3 .

Определение 3.2.1 Функция множеств (функционал) $V : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве «кубируемых фигур» подмножеств пространства \mathbb{R}^3 , называется объемом, если

1. $V(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{U}$.

2. Если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathfrak{U}$ и

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

3. Объем параллелепипеда со сторонами a, b, c равна abc .

4. Если $A \in \mathfrak{U}$, U – движение, то $U(A) \in \mathfrak{U}$ и

$$V(U(A)) = V(A).$$

Замечание 3.2.1 Множество кубируемых фигур мы не определяем. То, что некоторое тело имеет объем здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.

Лемма 3.2.1 (Свойства объема) Пусть $V : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$ – объем. Тогда:

1. Объем монотонен, то есть если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, то

$$V(A) \leq V(B).$$

2. Пусть $A \in \mathfrak{U}$ содержится в некотором прямоугольнике. Тогда $V(A) = 0$.

3. Если множества $A, B \in \mathfrak{U}$ пересекаются по множеству нулевого объема, то

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Определение 3.2.2 (Сечение) Пусть T – тело, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

называется сечением тела T первой координатой x .

3.2.1 Вычисление объемов

Далее будем полагать, что тело T удовлетворяет следующим условиям:

1. $\exists [a, b] : T(x) = \emptyset, x \notin [a, b]$.

2. $\forall x \in [a, b]$ фигура $T(x)$ квадратуема с площадью $S(x)$, причем $S(x) \in C[a, b]$.

3. $\forall \Delta \subset [a, b] \exists \xi_{\Delta}^*, \xi_{\Delta}^{**} : T(\xi_{\Delta}^*) \subset T(x) \subset T(\xi_{\Delta}^{**}) \forall x \in \Delta$.

Пусть T имеет объем и τ – разбиение $[a, b]$. Пусть

$$m_k = \min_{\Delta_k} S(x), \quad M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi_k^*)) = m_k, \quad S(T(\xi_k^{**})) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^*), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^{**}),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x, y, z) \in T : x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^n q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k.$$

По усиленной монотонности объема,

$$\begin{aligned} V\left(\bigcup_{k=1}^n q_k\right) &= \sum_{k=1}^n V(q_k) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s_\tau, \\ V\left(\bigcup_{k=1}^n Q_k\right) &= \sum_{k=1}^n V(Q_k) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S_\tau. \end{aligned}$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \leq V(T) \leq S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ – суммы Дарбу $S(x)$, а последняя интегрируема, то

$$V(T) = \int_a^b S(x) dx.$$

Определение 3.2.3 (Тело вращения) Пусть $f \in C[a, b]$, причем $f \geq 0$. Множество

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг Ox .

Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

3.3 Понятие длины и ее вычисление

Определение 3.3.1 Путем в пространстве \mathbb{R}^n называется отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, все координатные функции которого непрерывны на $[a, b]$.

Замечание 3.3.1 Путь γ задается n непрерывными функциями $x_i(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Определение 3.3.2 Точка $\gamma(a)$ называется началом пути, а точка $\gamma(b)$ концом пути.

Определение 3.3.3 Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то путь называется замкнутым.

Определение 3.3.4 Если равенство $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ возможно лишь при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, то путь называется простым (или несамопересекающимся).

Определение 3.3.5 Множество $\gamma([a, b])$, то есть образ отрезка $[a, b]$, называется носителем пути.

Замечание 3.3.2 Разные пути могут иметь равные носители. Например, верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ является носителем как пути $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$, так и пути $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

Определение 3.3.6 Говорят, что $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – путь гладкости m , если $x_i(t) \in C^m[a, b]$, $i = 1 \dots n$. Если $m = 1$, то путь часто называют просто гладким.

Определение 3.3.7 Если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что сужение пути $\gamma(t)$ на каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ – гладкий путь, то путь называется кусочно-гладким.

Определение 3.3.8 Два пути $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует строго возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(u(t)).$$

Замечание 3.3.3 Можно показать, что в условиях определения функция u непрерывна.

Лемма 3.3.1 Введенное отношение – отношение эквивалентности.

Доказательство. Очевидно. □

Определение 3.3.9 Класс эквивалентных путей называют кривой и обозначают $\{\gamma\}$, а каждый представитель класса γ – параметризация кривой.

Ясно, что носители эквивалентных кривых совпадают.

Определение 3.3.10 $\{\gamma^-\}$ – кривая с противоположной ориентацией, если

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \quad t \in [a, b]$$

Определение 3.3.11 Кривая называется гладкой (m -гладкой, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m -гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.

3.3.1 Вычисление длины пути

Дадим определение длины пути. Определение должно удовлетворять нескольким естественным требованиям. Во-первых, длина пути должна быть аддитивной. Во-вторых, длина пути, соединяющего точки A и B , должна быть не меньше длины отрезка AB .

Для простоты и геометрической наглядности, пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – путь, τ – разбиение отрезка $[a, b]$ точками t_0, t_1, \dots, t_n .

Определение 3.3.12 Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ , отвечающей разбиению τ . Эту ломаную будем обозначать s_τ .

Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ вычисляется по формуле

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Определение 3.3.13 Длиной пути γ называется величина

$$l_\gamma = \sup_{\tau} |s_\tau|.$$

Определение 3.3.14 Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Лемма 3.3.2 *Длины эквивалентных путей равны*

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(u(t))$, $u(t) : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ – возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$ – дробление $[a, b]$, тогда $\tilde{\tau}_k = u(t_k)$ – дробление $[\alpha, \beta]$.

$$s_\gamma = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\tilde{\gamma}(\tilde{t}_k) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_{k-1})| = s_{\tilde{\gamma}} < l_{\tilde{\gamma}}.$$

Значит, $l_\gamma \leq l_{\tilde{\gamma}}$. Меняя их местами, придем к требуемому. \square

Аналогично можно показать, что длины противоположных путей равны.

Определение 3.3.15 *Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.*

Покажем, что путь аддитивен, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.1 *Пусть $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\gamma^1(t) : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma^2(t) : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Путь $\gamma(t)$ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути $\gamma^1(t)$ и $\gamma^2(t)$, причем*

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ – разбиение $[a, b]$, содержащее точку c . Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Тогда ломаная s_τ – объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2} , причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \leq l_\gamma.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляемы. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1 , а потом по τ_2 , получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leq l_\gamma.$$

Докажем достаточность и обратное неравенство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c , то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Пусть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ' , могла только увеличиться, так как согласно неравенству треугольника,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leq \\ & \sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$|s_\tau| \leq |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму в левой части неравенства по τ , получим

$$l_\gamma \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее в пункте необходимости, заключаем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана. \square

Замечание 3.3.4 Пока что нигде не требовалась непрерывность отображения γ .

Укажем важное достаточное условие спрямляемости кривой.

Теорема 3.3.2 Пусть путь $\gamma \in C^1[a, b]$, тогда он спрямляем.

Доказательство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$,

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ такие, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad M_y = \max_{t \in [a, b]} |y'(t)|, \quad m_x = \min_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad m_y = \min_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t_i \leq |s_\tau| \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b - a) \leq |s_\tau| \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b - a).$$

Переходя к супремуму по τ , имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b - a) \leq l_\gamma \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b - a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем. \square

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – спрямляемая кривая. Тогда, согласно теореме, для $t \in [a, b]$ определена функция $l_\gamma(t)$, показывающая длину участка пути γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(t)$.

Теорема 3.3.3 Пусть путь $\gamma \in C^1[a, b]$, тогда функция $l_\gamma(t) \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$ и $t_0, t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Согласно последнему неравенству предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t \leq l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t.$$

Деля на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \leq \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_x = x'(t_0), \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_y = y'(t_0), \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

и $l'_{\gamma+}(t_0) = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}$. Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$, а значит, в силу произвольности t_0 ,

$$l'_\gamma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}.$$

Так как функции $x'(t)$ и $y'(t)$, согласно условию, непрерывны, то $l'_\gamma(t) \in C[a, b]$ и $l_\gamma(t) \in C^1[a, b]$. \square

Следствие 3.3.4 Пусть путь $\gamma \in C^1[a, b]$, тогда

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Доказательство. Так как $l'_\gamma(t) \in C[a, b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$l_\gamma(t) = l_\gamma(t) - l_\gamma(a) = \int_a^t l'_\gamma(t) dt.$$

Так как $l_\gamma = l_\gamma(b)$, то

$$l_\gamma = l_\gamma(b) = \int_a^b l'_\gamma(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

□

Все вышеизложенное относится не только к путям в \mathbb{R}^2 , но и к путям в \mathbb{R}^n для произвольных $n \in \mathbb{N}$, доказательства сохраняются.

4 Несобственный интеграл

4.1 Понятие несобственного интеграла

Определение 4.1.1 Говорят, что функция f локально интегрируема на промежутке E , и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a, b]$ для любого $[a, b] \subset E$.

Иными словами, локально интегрируемая функция интегрируема на любом отрезке, содержащемся в E .

Определение 4.1.2 Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда символ

$$\int_a^b f(x) dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a, b)$.

Определение 4.1.3 Пусть $\omega \in [a, b)$. Тогда предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-} \int_a^\omega f(x) dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла.

Определение 4.1.4 Пусть $\omega \in [a, b)$. Если предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-} \int_a^\omega f(x) dx$$

существует в \mathbb{R} , то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе – расходящимся.

Пример 4.1.1 Легко понять, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha > 1$, и расходится иначе. Более точно,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha < 1$, и расходится иначе. Более точно,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

4.2 Свойства несобственного интеграла

Свойства несобственного интеграла во многом аналогичны свойствам классического интеграла Римана.

Теорема 4.2.1 (О линейности несобственного интеграла) Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$. Если сходятся

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b g(x) dx,$$

то

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b-$ в равенстве

$$\int_a^\omega (f + g) dx = \int_a^\omega f(x) dx + \int_a^\omega g(x) dx.$$

□

Теорема 4.2.2 (Об аддитивности по промежутку) Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда для любого $c \in (a, b)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

причем интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)dx$$

существуют или нет одновременно.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b-$ в равенстве

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx.$$

□

Лемма 4.2.1 (Формула интегрирования по частям) Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int_a^b vu'dx,$$

причем последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует хотя бы два предела из трех.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b-$ в равенстве

$$\int_a^\omega uv'dx = uv|_a^\omega - \int_a^\omega vu'dx.$$

□

Теорема 4.2.3 (Формула замены переменной) Пусть $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, причем $\varphi'(t) \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, $f \in C[A, B)$ и существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. Пусть существует $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx = I$, причем $I \in \overline{\mathbb{R}}$. Так как на $[\varphi(a), \varphi(\omega)]$ существует первообразная функции f (в силу непрерывности последней), скажем, $F(x)$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \beta-} \int_{\alpha}^{\omega} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\omega \rightarrow \beta-} (F(\varphi(\omega)) - F(\varphi(a))) = \lim_{\omega \rightarrow \beta-} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\omega)} f(x)dx = I.$$

Пусть теперь существует $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$, $I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем существование правого интеграла.

Если $\varphi(\beta-) \in \mathbb{R}$, то интеграл существует, как собственный. Равенство же справедливо из доказанного первого пункта.

Иначе $\varphi(\beta-) = B$. Пусть $x_n \in [A, B)$, причем $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$. Будем считать, что $x_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда, по теореме Больцано-Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$ такие, что $\varphi(\gamma_n) = x_n$.

Покажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta-$. Пусть $\gamma \in [\alpha, \beta)$. Так как $\max_{[\alpha, \gamma]} \varphi < B$, а $\varphi(\gamma_n) \rightarrow B$, то, начиная с некоторого момента, $\gamma_n \in (\gamma, \beta)$. Значит, $\gamma_n \rightarrow \beta-$ и

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{C_n} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I.$$

□

4.3 Признаки сходимости интегралов от функций, сохраняющих знак

В этом пункте будем считать, что рассматриваемые функции не меняют знак. Всюду мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 4.3.1 Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx, \quad \omega \in [a, b)$$

не убывает, а сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \leq \omega_1 \leq \omega_2 < b$, то, так как

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geq 0,$$

то

$$\int_a^{\omega_2} f(x)dx = \int_a^{\omega_1} f(x)dx + \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geq \int_a^{\omega_1} f(x)dx,$$

откуда $F(\omega_2) \geq F(\omega_1)$, а значит $F(\omega)$ не убывает. Тогда сходимость несобственного интеграла, то есть существование конечного предела, по теореме Вейерштрасса равносильна ограниченности $F(\omega)$. \square

Теорема 4.3.2 (Признаки сравнения) Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b)$. Тогда

1. Если сходится $\int_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int_a^b f(x)dx$.
2. Если расходится $\int_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int_a^b g(x)dx$.
3. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b-$, то интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Согласно предыдущей теореме,

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx$$

не убывает с ростом ω . По свойствам интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$,

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx \leq \int_a^{\omega} g(x)dx \leq \sup_{\omega \in [a, b)} \int_a^{\omega} g(x)dx = \int_a^b g(x)dx < +\infty,$$

где последнее неравенство справедливо, исходя из условия (несобственный интеграл сходится). Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл сходится.

2. Второй пункт легко доказываться от противного. Если предположить, что интеграл

$$\int_a^b g(x)dx$$

сходится, то, по только что доказанному первому пункту, сходится и

$$\int_a^b f(x)dx,$$

что противоречит условию.

3. Согласно определению, $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b-$ означает, что существует $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{x \rightarrow b-} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int_{\Delta}^b f(x)dx, \quad \int_{\Delta}^b g(x)dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся с использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Скажем, если сходится интеграл от $g(x)$, то, используя правое неравенство, сходится и интеграл от $f(x)$. Если же расходится интеграл от f , то, опять же, по правому неравенству, расходится и интеграл от g . Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство. \square

Пример 4.3.1 Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx.$$

Ясно, что у этого интеграла особенность на верхнем пределе – это $+\infty$. Для исследования интеграла на сходимость вовсе не обязательно его вычислять. Заметим, что функция под интегралом положительна и упростим подынтегральную функцию при $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x}{x^{7/3} \sqrt[3]{1/x^7 + 1}} \sim \frac{x}{x^{7/3}} = \frac{1}{x^{4/3}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Так как интеграл

$$\int \frac{dx}{x^{4/3}}$$

сходится, то, по 3 пункту теоремы сравнения, сходится и исходный интеграл.

Пример 4.3.2 Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

На первый взгляд может показаться, что у данного интеграла две особенности: в точках 0 и $+\infty$, но это не так. В окрестности нуля функция ограничена и интеграл может рассматриваться, как собственный. Значит, осталось выяснить поведение интеграла на $+\infty$. Перепишем интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

и исследуем на сходимость второй. Функция под интегралом неотрицательна, можно пользоваться сформулированными теоремами. Так как

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

а интеграл от последней функции по $[1, +\infty)$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

Замечание 4.3.1 Отметим важный момент: из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ не следует, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ даже в случае, когда $f \geq 0$ и $f \in C[0, +\infty)$.

Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right).$$

положим $f(x) = 0$ при $x \in [0, +\infty)$, $x \notin E$. Кроме того, пусть

$$f(k) = k, \quad f\left(k \pm \frac{1}{k^2(k+1)}\right) = 0$$

и f линейна на

$$\left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k \right) \quad \text{и} \quad \left(k, k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right).$$

Ясно, что такая функция непрерывна и неотрицательна на $x \in [0, +\infty)$. Кроме того, если $N \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{N+1/2} f(x)dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k - \frac{1}{k^2(k+1)}}^{k + \frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^N k \cdot \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Из последнего следует (ввиду монотонности интеграла от неотрицательной функции), что сходится и $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. В то же время, очевидно, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ не выполнено. Кроме того, $f(x)$ оказывается не ограниченной.

4.4 Критерий Коши

Так как несобственный интеграл – это предел, то, как обычно, справедлив так называемый критерий Коши сходимости интеграла.

Теорема 4.4.1 (Критерий Коши) Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается, как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

4.5 Абсолютная и условная сходимости интеграла

Если функция не сохраняет знак вблизи особой точки, то выделяют дополнительный тип сходимости.

Определение 4.5.1 Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Как связаны абсолютная сходимость и сходимость интеграла?

Теорема 4.5.1 Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл сходится абсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon.$$

Но согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. \square

Замечание 4.5.1 При исследовании интеграла на абсолютную сходимость можно пользоваться доказанными ранее признаками сходимости интегралов от знакопостоянных функций.

Определение 4.5.2 Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, но абсолютной сходимости нет (то есть он не сходится абсолютно), то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится условно (или неабсолютно).

Пример 4.5.1 Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Так как

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

а последний интеграл сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно, а значит и просто сходится.

Пример 4.5.2 Часто оказывается, что интеграл сходится лишь условно. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Во-первых, он сходится. Интегрируя по частям ($dv = \sin x dx$), получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл, как мы только что показали, сходится.

Покажем, что абсолютной сходимости нет. Воспользуемся критерием Коши (его отрицанием):

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \Delta \in (a, b) \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_1 = \pi n$, $\delta_2 = 2\pi n$, $\delta_i \rightarrow +\infty$, тогда

$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Последнее равенство показывает, что абсолютной сходимости у интеграла нет. Значит, исходный интеграл сходится, но лишь условно.

Замечание 4.5.2 Расходимость последнего интеграла можно установить и следующим образом. Ясно, что

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x},$$

причем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

где последний интеграл сходится (доказывается интегрированием по частям), а первый, очевидно, расходится. Значит и исходный интеграл расходится.

На практике часто бывает полезна ещё такая теорема.

Теорема 4.5.2 Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, причем

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Если интеграл $\int_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково (одновременно либо расходятся, либо сходятся абсолютно, либо условно).

Доказательство. Пусть интеграл от g сходится абсолютно. Тогда, так как $|f| \leq |g| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от f . Наоборот, если сходится абсолютно интеграл от f , то, так как $g = f - h$ и $|g| \leq |f| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от g .

Пусть интеграл от g сходится условно. Тогда интеграл от f сходится. Если бы он сходился абсолютно, то по пред. пункту, абсолютно бы сходился и интеграл от g . Значит, он сходится условно. Аналогично разбираются и остальные случаи. \square

4.6 Признак Абеля–Дирихле

Рассмотрим признак, позволяющий устанавливать сходимость интеграла от произведения двух функций.

Теорема 4.6.1 (Признак Абеля–Дирихле) Пусть $f \in C[a, b)$, а $g \in C^1[a, b)$ и монотонна. Тогда для сходимости интеграла

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

достаточно, чтобы выполнялась любая из двух пар условий:

1. Функция $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx$ ограничена на $[a, b)$.

2. $g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow b-$,

или

1. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

2. $g(x)$ ограничена на $[a, b)$.

Формулировка теоремы с первой парой условий иногда называют признаком Дирихле, а со второй – признаком Абеля.

Доказательство. 1) Пусть $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx$ и выполнена первая пара условий. Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)dF(x) \right| = \left| F(\delta_2)g(\delta_2) - F(\delta_1)g(\delta_1) - \int_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx \right| \leq$$

применим неравенство треугольника для модуля и воспользуемся ограниченностью $F(\omega)$: $|F(\omega)| \leq C$:

$$\leq \left| F(\delta_2)g(\delta_2) \right| + \left| F(\delta_1)g(\delta_1) \right| + \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx \right| \leq$$

оценим модуль интеграла интегралом от модуля

$$\leq C(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|) + C \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx \right|$$

заметим, что в силу монотонности $g(x)$ $g'(x)$ одного знака, а значит $\int_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx = \pm(g(\delta_2) - g(\delta_1))$. Воспользуемся неравенством треугольника еще раз и получим

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| \leq 2C(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|).$$

Так как $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b-$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(b) \quad |g(x)| < \varepsilon/4C$, и

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon,$$

что и означает сходимость интеграла.

2) Так как g монотонна и ограничена, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = A$. Введем функцию $h(x) = g(x) - A$, $h(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b-$ и $h(x)$ монотонна. Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx + A \int_a^b f(x)dx.$$

Первый интеграл сходится по п.1), а второй по условию. Следовательно, исходный интеграл сходится. \square

Пример 4.6.1 Исследовать на абсолютную и условную сходимости

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно, ведь

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

а интеграл от последней функции по промежутку $[1, +\infty)$ при $\alpha > 1$ сходится.

Если $\alpha \leq 0$, то интеграл расходится, так как

$$\left| \int_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq (2\pi n)^{-\alpha} \int_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \sin x dx = (1 - \sqrt{2}/2)(2\pi n)^{-\alpha},$$

где последняя величина не стремится к нулю с ростом n .

Если $\alpha \in (0, 1]$, то интеграл сходится по признаку Абеля–Дирихле, так как

$$|F(\omega)| = \left| \int_1^\omega \sin x dx \right| = |\cos \omega - \cos 1| \leq 2$$

и $1/x^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. С другой стороны,

$$\left| \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{n}{(2\pi n)^\alpha} 2 = C \cdot n^{1-\alpha},$$

где последнее выражение к нулю не стремится. Значит, абсолютной сходимости нет и интеграл при $\alpha \in (0, 1]$ сходится условно.

Пример 4.6.2 Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \sin \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Найдем асимптотику подынтегральной функции вблизи особой точки.

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} - \frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right).$$

Ясно, что интеграл от функции $\frac{\sin^3 x}{x^2} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ сходится абсолютно. Значит, достаточно исследовать интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Как известно, он сходится условно. Значит, исходный интеграл сходится условно.

Пример 4.6.3 Отказаться от условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле нельзя.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

Если (неверно) использовать признак, то

$$|F(\omega)| = \left| \int_1^{\omega} \sin x dx \right| \leq 2,$$

а $(\sqrt{x} - \sin x)^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, но не монотонно. Откуда можно сделать неверный вывод, что интеграл сходится (условно).

В то же время,

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Интеграл же от $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}$ расходится, так как интеграл от первой функции сходится, а от второй расходится (по доказанному ранее).

4.7 Интегралы с несколькими особенностями

До сих пор особенность у нас была лишь на одном конце промежутка интегрирования. Обобщим.

Определение 4.7.1 Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega_1 \rightarrow a+0} \int_{\omega_1}^c f(x)dx + \lim_{\omega_2 \rightarrow b-0} \int_c^{\omega_2} f(x)dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и не равны бесконечностям разных знаков. При этом интеграл называется сходящимся, если, как и ранее, его значение принадлежит \mathbb{R} (то есть оба интеграла справа сходятся).

Замечание 4.7.1 Ясно, что определение не зависит от выбора точки c .

Пусть теперь $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и f задана на (a, b) за исключением не более чем конечного числа точек.

Определение 4.7.2 Точка $c \in (a, b)$ называется особой точкой функции f , если

$$\forall A, B: a < A < c < B < b \Rightarrow f \notin R[A, B].$$

Точка a называется особой, если либо $a = -\infty$, либо $f \notin R[a, B]$ для любых $a < B < b$. Аналогично определяется особая точка b .

Пусть число особых точек конечно и $c_1 < \dots < c_{n-1}$ – особые точки внутри (a, b) . Добавим $c_0 = a$ и $c_n = b$. Можно показать, что $f \in R_{loc}(c_{i-1}, c_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx.$$

4.8 Интеграл в смысле главного значения

Определение 4.8.1 (Особенность в конченной точке) Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in (a, b)$ – единственная особая точка. Предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right),$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется главным значением интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Если значение предела принадлежит \mathbb{R} , то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание 4.8.1 Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.

Пример 4.8.1 Рассмотрим $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0.$$

Определение 4.8.2 (Особенность в бесконечной точке) Пусть $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. Интегралом в смысле главного значения по \mathbb{R} называется предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Если значение предела принадлежит \mathbb{R} , то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Замечание 4.8.2 Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.

Пример 4.8.2 Рассмотрим $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x dx = 0.$$

В случае нескольких особенностей можно поступать по-разному. Останавливаться на этом не будем.

4.9 Интеграл Эйлера-Пуассона

Вычислим так называемый интеграл Эйлера-Пуассона.

Теорема 4.9.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1 - x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Будем рассматривать первое неравенство при $x \in [-1, 1]$, а последнее при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^k},$$

а значит

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx \leq \int_{-1}^1 e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем $x = \operatorname{tg} t$. Тогда придем к неравенству

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt.$$

Так как, как было вычислено ранее (и в чем легко убедиться),

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k - 1 \end{cases},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t = \sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}} \frac{2k}{2k-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi}.$$

Теперь требуемое получается согласно теореме о сжатой переменной. \square

5 Числовые ряды

5.1 Понятие ряда и его суммы

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

Определение 5.1.1 Пусть дана последовательность a_n . Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, последовательность a_n – общим членом ряда.

Определение 5.1.2 Последовательность S_k : сумма первых k членов ряда

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

называется *частичной суммой ряда*, а её предел, если он существует в $\bar{\mathbb{R}}$, называется *суммой ряда*:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k.$$

Если последовательность S_k сходится, то ряд называется *сходящимся*, иначе – *расходящимся*. Разность $R_k = S - S_k$ называется *остатком ряда*.

Пример 5.1.1 1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ сходится и его сумма равна 0.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – геометрическая прогрессия. Сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1,$$

следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся 0 и -1 .

Замечание 5.1.1 Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимост.

Лемма. Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.

► Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$. ◀

Теорема 5.1.1 (Критерий Коши сходимости ряда) Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε можно было найти номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. \square

Пример 5.1.2 Гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие сходимости ряда) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \rightarrow 0$.

► Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$, то $a_n \rightarrow S - S = 0$.
◄

Замечание 5.1.2 Условие $a_n \rightarrow 0$ не является достаточным для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Но если $a_n \not\rightarrow 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Лемма 5.1.1 (Линейность суммирования) Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k . Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k$, $S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S_n^B \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. \square

Лемма 5.1.2 (Монотонность суммирования) Пусть $a_k \leq b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k сходятся в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k$, $S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$. Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^A \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^B \Rightarrow S^A \leq S^B.$$

□

5.2 Признаки сходимости рядов с положительными членами

5.2.1 Признаки сравнения и ряд Дирихле

Доказательство признаков сравнения опирается на следующую лемму.

Лемма 5.2.1 Пусть $a_k \geq 0$. Тогда последовательность $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ не убывает и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса). □

Теорема 5.2.1 (Признаки сравнения) Пусть $a_k, b_k \geq 0$. Тогда:

1. Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом b_k сходится, то сходится и ряд с общим членом a_k .
2. Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом a_k расходится, то расходится и ряд с общим членом b_k .

3. Если $a_k \sim b_k$ при $k \rightarrow +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Обозначим $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k$, $S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$.

1. Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A , согласно доказанной лемме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k , то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k . Это противоречит условию.

3. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}b_k.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны и остаются в качестве упражнения. \square

Пример 5.2.1 Исследовать на сходимость ряд Дирихле при $\alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ ряд Дирихле – гармонический ряд, а значит он расходится. Так как при $\alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n},$$

то, согласно признакам сравнения, при $\alpha < 1$ ряд Дирихле расходится.

5.2.2 Радикальный признак Коши

Теорема 5.2.2 (Радикальный признак Коши) Пусть $a_k \geq 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого k_0 , выполняется

$$\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1.$$

Отсюда следует, что a_k не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

2. Если $l < 1$, то выберем $\varepsilon = (1 - l)/2$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1.$$

Из этого неравенства получаем, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l+1}{2}\right)^k.$$

Так как ряд $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^k$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится и ряд

$$R_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд. □

Замечание 5.2.1 В случае, когда $l = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

признак Коши дает $l = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 5.2.2 Как было показано в теореме, если признак Коши дает $l > 1$, это означает, что общий член не стремится к нулю. Если известно, что

$$1 < l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то $a_n \rightarrow +\infty$.

Замечание 5.2.3 Признак остается верным, если вместо предела взять верхний предел.

5.2.3 Признак Даламбера

Теорема 5.2.3 (Признак Даламбера) Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty]$$

Тогда

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера k_0 , $a_{k+1} > a_k$, а значит $a_k \geq a_{k_0+1} > 0$, то есть a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию.

2. Если $l < 1$, то выберем $\varepsilon = (1 - l)/2$. Согласно свойству предела, найдется k_0 , что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} = q,$$

откуда $a_{k+1} < qa_k$. По индукции, при $n > k_0$ имеем $a_n \leq q^{n-k_0-1}a_{k_0+1}$. Отсюда, согласно признаку сравнения,

$$R_{k_0} = \sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_n$$

сходится (большой ряд – геометрическая прогрессия, причем $|q| < 1$). Значит, сходится и исходный ряд. \square

Замечание 5.2.4 В случае, когда $l = 1$, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

признак Даламбера дает $l = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 5.2.5 Как было показано в теореме, если признак Даламбера дает $l > 1$, это означает, что общий член ряда стремится к бесконечности.

Замечание 5.2.6 Признаки Коши и Даламбера – завуалированные признаки сравнения с геометрической прогрессией.

5.2.4 Признак Куммера

Для создания произвольного числа признаков разной тонкости полезна следующая теорема.

Теорема 5.2.4 (Признак Куммера) Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \quad \text{расходится.}$$

Пусть

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right),$$

тогда

1. Если $l > 0$, то ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. 1. Так как $l > 0$, то существует n_0 , что при $n > n_0$

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \frac{l}{2} a_{n+1} > 0.$$

В частности, $a_n b_n > a_{n+1} b_{n+1}$, а значит последовательность $a_n b_n$ убывает при $n > n_0$ и ограничена снизу, значит имеет предел. Но тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0+1}^k (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_0+1} b_{n_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) < +\infty. \end{aligned}$$

Значит, сходится и $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n .

2. Пусть $l < 0$. Тогда существует n_0 , что при $n > n_0$

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0 \Rightarrow b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{n+1} a_{n+1} > b_n a_n$ и последовательность $b_n a_n$ монотонно возрастает при $n > n_0$. Значит,

$$a_n b_n \geq a_{n_0+1} b_{n_0+1} \Rightarrow a_n \geq \frac{a_{n_0+1} b_{n_0+1}}{b_n}$$

и ряд $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ расходится.

□

Замечание 5.2.7 Можно заметить, что расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$$

использовалась только при доказательстве достаточности.

Замечание 5.2.8 Если положить $b_n = 1$, то получится признак Даламбера.

5.2.5 Признак Раабе

Теорема 5.2.5 (Признак Раабе) Пусть $a_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Тогда

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. Для доказательства в признаке Куммера достаточно положить $b_n = n$. Детали остаются в качестве упражнения. \square

Теорема 5.2.6 (Признак Бертрана) Пусть $a_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = l.$$

Тогда

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. Сначала покажем, что ряд с общим членом $\frac{1}{n \ln n}$ расходится. Это следует из того, что, согласно теореме Лагранжа,

$$\ln \ln(n+2) - \ln \ln(n+1) = \frac{1}{\xi \ln \xi} \leq \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}, \quad \xi \in (n+1, n+2)$$

и того, что ряд с общим членом $\ln \ln(n+2) - \ln \ln(n+1)$ расходится, так как

$$\sum_{n=1}^k (\ln \ln(n+2) - \ln \ln(n+1)) = \ln \ln(k+2) - \ln \ln 2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Положим в признаке Куммера $b_n = n \ln n$. Получим

$$\begin{aligned} n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) &= \\ &= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) + (n+1) \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Теперь признак Бертрана следует из того, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

□

5.2.6 Признак Гаусса

Теорема 5.2.7 (Признак Гаусса) Пусть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right), \quad \gamma > 0.$$

Тогда:

1. Если $\lambda > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если $\lambda < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.
3. Если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.
4. Если $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. Доказательство опирается на ранее доказанные признаки. Первые два пункта – это признак Даламбера. Третий и четвертый пункты в случае, когда $\mu \neq 1$ – это признак Раабе. Случай $\lambda = 1$, $\mu = 1$ доказывается по признаку Бертрана. □

5.2.7 Интегральный признак Коши и асимптотика сумм

Теорема 5.2.8 (Интегральный признак Коши) Пусть $f(x)$ монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда

сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Пусть, скажем, f не возрастает. Тогда если $f(x_0) < 0$, то, в силу монотонности, $f(x) \leq f(x_0) < 0$ при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \rightarrow +\infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится.

Кроме того,

$$\int_{x_0}^A f(x)dx \leq f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \geq 0$. В этом случае (вспоминая, что f не возрастает) очевидно следующее неравенство

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Учитывая, что функция $F(\omega) = \int_1^{\omega} f(x)dx$ не убывает, для существования предела $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \rightarrow +\infty$. \square

Пример 5.2.2 Теперь исследование ряда с общим членом $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, не представляет труда. Согласно интегральному признаку, достаточно рассмотреть сходимость интеграла

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Так как интеграл, очевидно, расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Идея, использованная при доказательстве интегрального признака Коши, часто помогает в исследовании асимптотики различных сумм. Докажем следующую лемму.

Лемма 5.2.2 Пусть $f(x) \geq 0$ не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда последовательность

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n не убывает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого сделаем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k+1),$$

то, по доказанному в доказательстве интегрального признака Коши,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \leq 0,$$

откуда

$$A_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Согласно теореме Вейерштрасса, A_n имеет предел. □

Замечание 5.2.9 Применительно к поиску асимптотик, последняя лемма может быть использована следующим образом. Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$, тогда

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx = A + \alpha_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + A + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Особо интересны случаи, когда ряд, стоящий слева, расходится. Тогда (при $n \rightarrow +\infty$)

$$\sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

Пример 5.2.3 Рассмотрим гармонический ряд и найдем его асимптотику. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

Тем самым,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n.$$

Определение 5.2.1 Постоянная A в равенстве

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

называется постоянной Эйлера и часто обозначается γ .

Замечание 5.2.10 Полезно отметить, что написанное равенство дает способ вычисления постоянной Эйлера с любой точностью. Так как

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

то

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right).$$

Замечание 5.2.11 Для сходящихся рядов похожие рассуждения позволяют оценить скорость стремления остатка ряда к нулю. Пусть $f \geq 0$ и не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Например,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{(a-1)k^{a-1}}, \quad a > 1.$$

5.3 Признаки сходимости рядов с членами произвольного знака

Аналогично рассмотренному в интегралах, рассмотрим ряды с произвольными членами и новые типы сходимости, которые в этом случае возникают.

Определение 5.3.1 Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.

Как и ранее, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3.1 Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем n_0 такой, что

$$\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши делаем вывод, что ряд с общим членом a_k сходится. \square

Замечание 5.3.1 При исследовании ряда на абсолютную сходимость можно пользоваться изученными ранее признаками.

Определение 5.3.2 Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).

Для исследования знакопеременных рядов на сходимость используют признаки Абеля–Дирихле, аналогичные соответствующим интегральным признакам. Для доказательства нам потребуется аналог формулы интегрирования по частям.

Лемма 5.3.1 (Преобразование Абеля) Пусть $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. Пусть $A_0 = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1} b_i = \\ &= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

□

Теорема 5.3.2 (Признак Абеля-Дирихле) Пусть даны последовательности a_k , b_k , причем b_k монотонна. Тогда для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. Частичные суммы $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничены в совокупности, то есть $|A_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Последовательность b_k стремится к нулю, то есть $b_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$,

либо

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. Последовательность b_k ограничена, то есть $|b_k| \leq C$.

Доказательство. 1. Воспользуемся преобразованием Абеля. В обозначениях теоремы,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Так как $|A_n| \leq C$, в силу второго условия $A_n b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Тогда сходимость рассматриваемого ряда равносильна сходимости ряда с общим членом $A_k (b_k - b_{k+1})$. Покажем, что такой ряд сходится абсолютно. Это следует из теоремы сравнения и следующих выкладок:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = C \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| =$$

$$= C \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_1 - b_{n+1}| = C|b_1|.$$

Итого, рассматриваемый ряд сходится.

2. Так как b_k монотонна и ограничена, то она имеет предел b . Рассмотрим последовательность $c_k = b_k - b$. Тогда для пары последовательностей a_k и c_k справедливы условия первого пункта, а значит сходится ряд с общим членом $a_k c_k$. Между тем,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k - b \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Итого, средний ряд сходится, так как сходятся два других ряда. \square

Пример 5.3.1 Неабсолютно сходящиеся ряды существуют. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Легко проверить, что абсолютной сходимости нет (ряд получается гармоническим). В то же время,

$$|A_n| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \right| \leq 1, \quad \frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ причем монотонно,}$$

а значит выполнена первая пара условий признака Абеля-Дирихле, и ряд сходится (условно).

Давайте найдем сумму этого ряда.

Лемма 5.3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln(2n) + \gamma + \alpha_{2n} - \ln n - \gamma - \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln 2. \end{aligned}$$

\square

Пример 5.3.2 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^a}.$$

Ясно, что при $a \leq 0$ ряд расходится так как его общий член не стремится к нулю.

Если $a > 1$, то

$$\left| \frac{\sin k}{k^a} \right| \leq \frac{1}{k^a}$$

и, согласно признакам сравнения, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь $a \in (0, 1]$. Сначала установим, что ряд сходится. Действительно,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \sin k = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{1}{2}},$$

а значит $|A_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|}$ и, так как $\frac{1}{k^a}$ монотонно стремится к нулю, то ряд сходится. Абсолютной сходимости нет, так как

$$\left| \frac{\sin k}{k^a} \right| \geq \frac{\sin^2 k}{k^a} = \frac{1 - \cos 2k}{2k^a} = \frac{1}{2k^a} - \frac{\cos 2k}{2k^a},$$

и ряд с общим членом $\frac{1}{2k^a}$ расходится, а с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k^a}$ сходится (что доказывается аналогично только что проделанному).

Часто бывает полезна следующая теорема.

Теорема 5.3.3 Пусть $a_k = b_k + c_k$ и ряд с общим членом c_k сходится абсолютно. Тогда ряды с общими членами a_k и b_k ведут себя одинаково (либо одновременно сходятся условно, либо абсолютно, либо расходятся).

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. \square

Пример 5.3.3 Условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле важно. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}}.$$

Рассмотрим цепочку преобразований

$$\frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin k \left(1 + \frac{\sin k}{\sqrt{k}}\right)^{-1} = \frac{\sin k}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{\sin k}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin k}{\sqrt{k}} - \frac{\sin^2 k}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ясно, что ряд с общим членом $k^{-3/2}$ сходится, а значит ряд с общим членом $O(k^{-3/2})$ сходится абсолютно. Ряд с общим членом $\frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ сходится (по доказанному ранее), а ряд с общим членом $\frac{\sin^2 k}{k}$ расходится. Значит, исходный ряд расходится.

Приведем еще один признак.

Теорема 5.3.4 (Признак Лейбница) Пусть рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда ряд сходится.

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}, \end{aligned}$$

так как все слагаемые положительны (в силу невозрастания a_n) и, тем самым, S_{2n} не убывает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$. Но тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Тогда можно утверждать, что ряд сходится. \square

Определение 5.3.3 Ряд, фигурирующий в условии теоремы, часто называют рядом лейбницевского типа.

Замечание 5.3.2 Как показано в доказательстве теоремы,

$$0 \leq S_{2n} \leq a_1.$$

Это значит, что $0 \leq S \leq a_1$.

Лемма 5.3.3 (Об остатке ряда лейбницевского типа) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ рас-
сатривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда

$$|R_n| \leq a_{n+1}, \quad R_n(-1)^n a_{n+1} \geq 0.$$

Иными словами, модуль остатка ряда лейбницевского типа не превосходит модуля первого отброшенного члена. Кроме того, остаток совпадает по знаку со знаком первого отброшенного члена.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить к остатку ряда сформулированное выше замечание. \square

5.4 Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Теорема Римана

Оказывается, над сходящимися рядами далеко не всегда можно проводить привычные нам операции.

Пример 5.4.1 Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots,$$

сумма которого вычислена выше и равна $\ln 2$. Переставим его члены местами и рассмотрим следующий ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$

Рассмотрим частичную сумму нового ряда с номером $3n$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}, \end{aligned}$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$, то $\tilde{S}_{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{2}$. Легко понять, что \tilde{S}_{3n+1} и \tilde{S}_{3n+2} тоже сходятся к $\frac{\ln 2}{2}$, а значит можно утверждать, что

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Итого, перестановка членов исходного ряда поменяла сумму.

Итак, наша цель – ответить на вопросы: какие свойства суммирования (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и проч.) и в каких случаях переносятся на ряды. Начнем с ассоциативности.

Определение 5.4.1 Пусть дан ряд с общим членом a_k и $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ – возрастающая последовательность номеров. Положим $n_0 = 0$ и

$$A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

называется группировкой исходного ряда.

Отметим, что группировка ряда сохраняет исходный порядок членов ряда, но меняет общий член ряда.

Замечание 5.4.1 Мы знаем на примере ряда с общим членом $a_k = (-1)^k$, что группировка ряда может сходиться даже в том случае, когда ряд расходится:

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) + \dots = 0.$$

Ответим на вопрос, как связаны сходимость ряда и сходимость его группировок.

Теорема 5.4.1 (Об ассоциативности) 1. Пусть ряд с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда и любая его группировка имеет сумму S , то есть

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S.$$

2. Пусть группировка $\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ и каждая группа содержит не более $L \in \mathbb{N}$ членов. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

3. Пусть группировка $\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, а все члены внутри каждой группы имеют один и тот же знак. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Замечание 5.4.2 В пункте 3 теоремы слова о знаке означают следующее:

$$\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow a_{n_j+p} a_{n_j+k} \geq 0, \quad p, k \in \mathbb{N}, \quad n_{j+p} \leq n_{j+1}, \quad n_{j+k} \leq n_{j+1}.$$

Это означает, что внутри каждой группы все члены группы имеют один и тот же знак, причем если среди них встречается нулевой член – это не проблема.

Доказательство. 1. Ясно, что

$$\tilde{S}_p = \sum_{j=0}^p A_j = \sum_{k=1}^{n_p} a_k = S_{n_p}.$$

Так как $n_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} +\infty$ и S_{n_p} – подпоследовательность последовательности

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, имеющей пределом S (в $\overline{\mathbb{R}}$), то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \tilde{S}_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n_p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

откуда и следует требуемое.

2. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, то существует k_0 , что при $k > k_0$ выполняется

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Так как перестановка имеет сумму S , то существует j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\tilde{S}_j - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > \max(k_0, n_{j_0+1})$. Тогда существует t , что $n_t < n \leq n_{t+1}$, причем $n_t \geq n_{j_0+1}$. Но тогда

$$|S_n - S| \leq |S_n - \tilde{S}_t| + |\tilde{S}_t - S| = \left| \sum_{k=n_t+1}^n a_k \right| + |\tilde{S}_t - S| < \frac{\varepsilon}{2L}L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как перестановка имеет сумму S , то найдется j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\tilde{S}_j - S| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_{j_0+1}$. Тогда найдется t , что $n_t < n \leq n_{t+1}$, причем $n_t \geq n_{j_0+1}$. Если все члены группы A_t неотрицательны, то

$$\tilde{S}_t \leq S_n \leq \tilde{S}_{t+1},$$

а если неположительны, то

$$\tilde{S}_{t+1} \leq S_n \leq \tilde{S}_t.$$

В любом из двух описанных случаев,

$$|S_n - S| \leq \max(|\tilde{S}_t - S|, |\tilde{S}_{t+1} - S|) < \varepsilon.$$

□

Теперь выясним основное отличие абсолютно сходящихся рядов от условно сходящихся.

Теорема 5.4.2 *Ряд с общим членом a_k сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды с общими членами*

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geq 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad u \quad a_k^- = \begin{cases} 0, & a_k \geq 0 \\ -a_k, & a_k < 0 \end{cases},$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$,

$$S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^n |a_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S^{|\cdot|},$$

а также $S_n^\pm = \sum_{k=1}^n a_k^\pm$. Тогда

$$S_n^\pm \leq S_n^{|\cdot|} \leq S^{|\cdot|},$$

откуда (в силу критерия сходимости знакопостоянных рядов) $S_n^\pm \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S^\pm$. Кроме того,

$$S_n = S_n^+ - S_n^-,$$

откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$,

$$S = S^+ - S^- \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Докажем достаточность. Пусть $S_n^\pm = \sum_{k=1}^n a_k^\pm \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S^\pm$. Тогда

$$S_n^{|\cdot|} = S_n^+ + S_n^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S^+ + S^- < \infty,$$

а значит ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда он сходится, причем

$$S_n = S_n^+ - S_n^-$$

и, переходя к пределу, получаем требуемое равенство для сумм. \square

Замечание 5.4.3 Если ряд с общим членом a_k сходится условно, то $S^\pm = +\infty$. Докажите это.

Теперь решим вопрос о перестановке абсолютно сходящегося ряда.

Определение 5.4.2 Биекция $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется перестановкой множества натуральных чисел.

Определение 5.4.3 Пусть дан ряд с общим членом a_k и перестановка натуральных чисел φ . Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

называется перестановкой исходного ряда.

Теорема 5.4.3 (О перестановке абсолютно сходящегося ряда)

Пусть ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка сходится абсолютно, причем к той же сумме.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть все $a_k \geq 0$. Тогда

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^p a_k = S_p \leq S, \quad p = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \varphi(k).$$

Значит, перестановка сходится, причем $\tilde{S} \leq S$. Наоборот, так как $\tilde{S} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, то ряд с общим членом a_k – его перестановка ($a_k = a_{\varphi^{-1}(\varphi(k))}$), а значит, по доказанному, $S \leq \tilde{S}$, откуда $S = \tilde{S}$.

2. Пусть теперь $a_k \in \mathbb{R}$. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k , состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответственно. Ряды, с общими членами a_k^+ и a_k^- сходятся абсолютно, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

□

Оказывается, для условно сходящихся рядов такая теорема уже не имеет места, а имеет место теорема Римана.

Теорема 5.4.4 (Теорема Римана) Пусть ряд с общим членом a_k сходится условно. Тогда какое бы не взять $S \in \overline{\mathbb{R}}$, существует перестановка натуральных чисел φ , что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S.$$

Кроме того, существует такая перестановка исходного ряда, которая не имеет суммы в $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k , состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответственно, причем оба ряда расходятся (к $+\infty$ и $-\infty$, соответственно). Пусть $S \in \mathbb{R}$, $S \geq 0$, $a_0^+ = a_0^- = 0$. Пусть p_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1-1} a_k^+ \leq S < \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+.$$

Пусть теперь q_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1} a_k^- < S \leq \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1-1} a_k^-.$$

Пусть построены числа p_1, \dots, p_{l-1} и q_1, \dots, q_{l-1} . Найдем наименьшее число p_l , что

$$\sum_{k=0}^{p_l-1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^- \leq S < \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^-.$$

Теперь найдем наименьшее число q_l , что

$$\sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l} a_k^- < S \leq \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l-1} a_k^-.$$

Все построения возможны в виду расходимости обоих рядов (из их членов можно набрать сколь угодно большую положительную и сколь угодно маленькую отрицательную суммы).

Рассмотрим ряд

$$A_1^+ + A_1^- + A_2^+ + A_2^- + \dots + A_l^+ + A_l^- + \dots,$$

где ($p_0 = q_0 = 0$)

$$A_i^+ = \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} a_k^+, \quad A_i^- = \sum_{k=q_{i-1}+1}^{q_i} a_k^-,$$

причем если \tilde{S}_n – его частичная сумма, то

$$a_{q_l}^- < \tilde{S}_{2n} - S < 0,$$

а

$$0 < \tilde{S}_{2n+1} - S < a_{p_{l+1}}^+.$$

Так как общий член ряда, в силу сходимости, стремится к нулю, то доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{S}_n = S.$$

Так как все члены в каждой группе одного знака, то перестановка рассматриваемого ряда сходится к S . Остальные случаи остаются в качестве упражнения. \square

5.5 Произведение рядов

Понятно, что

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j,$$

и для конечных m, n последнее выражение не зависит ни от порядка суммирования, ни от способа перемножения. У рядов сразу возникают вопросы: будет ли сходиться полученный ряд? В каком порядке можно складывать?

Определение 5.5.1 Пусть даны ряды с общими членами a_k и b_k , (φ, ψ) – биекция \mathbb{N} на \mathbb{N}^2 . Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов с общими членами a_k и b_k .

Итак, произведение рядов – это ряд с произвольным порядком слагаемых вида $a_i b_j$.

Теорема 5.5.1 (Теорема Коши) Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B,$$

причем сходимость абсолютная. Тогда произведение рядов абсолютно сходится к AB .

Доказательство. Пусть (φ, ψ) – биекция \mathbb{N} на \mathbb{N}^2 . Тогда

$$\widetilde{S}_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^n |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum_{k=1}^p |a_k| \sum_{k=1}^t |b_k| \leq A^{|\cdot|} B^{|\cdot|},$$

$$p = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \varphi(k), \quad t = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \psi(k),$$

$$A^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad B^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

В итоге, ряд с общим членом $a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ сходится абсолютно. Значит, его сумма не зависит от перестановки. Тогда просуммируем «по квадратам».

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB.$$

□

Лемма 5.5.1 Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся к суммам A и B , то их произведение «по квадратам» сходится к AB .

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k$ и $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$. Ясно, что

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB.$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и $l_n = [\sqrt{n}]$. Тогда

$$S_n = S_{l_n^2} + \theta_n,$$

где $\theta_n = a_{l_n+1} S_k^B + b_{l_n+1} (S_t^A - S_p^A)$. Так как частичные суммы сходящихся рядов ограничены, а их общие члены стремятся к нулю, то и θ_n стремится к нулю. Тогда $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$. \square

Часто используется так называемое произведение по Коши (особенно – в степенных рядах).

Определение 5.5.2 Ряд с общим членом c_k , где

$$c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j},$$

называется произведением по Коши рядов с общими членами a_k и b_j .

Лемма 5.5.2 Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится абсолютно к сумме AB .

Доказательство. Данная лемма – прямое следствие теоремы Коши. \square

Замечание 5.5.1 Часто произведение нумеруют с нуля. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Пример 5.5.1 Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

сходится по признаку Лейбница. А что с его квадратом по Коши?

$$c_k = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Тогда

$$|c_k| = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}} \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = 1.$$

Итого, нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 5.5.2 (Теорема Мертенса) Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них – абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится, причем к произведению сумм.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Введем привычные обозначения

$$S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad S^{|A|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

$$S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Рассмотрим произведение по Коши – ряд с общим членом

$$c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j+1}.$$

Ясно, что

$$S_n^C = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j+1} = a_1 S_n^B + a_2 S_{n-1}^B + \dots + a_n S_1^B.$$

Так как $S^B = S_n^B + R_n^B$, то, подставляя $S_n^B = S^B - R_n^B$, получим

$$S_n^C = S_n^A S^B - \alpha_n,$$

где

$$\alpha_n = a_1 R_n^B + a_2 R_{n-1}^B + \dots + a_n R_1^B.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_k сходится, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n^B| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, тогда

$$|\alpha_n| = \left| \sum_{j=1}^n R_j^B a_{n-j+1} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1} \right| + \left| \sum_{j=n_0+1}^n R_j^B a_{n-j+1} \right|.$$

Для второй суммы справедлива оценка:

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^n R_j^B a_{n-j+1} \right| < \varepsilon \sum_{j=n_0+1}^n |a_{n-j+1}| \leq \varepsilon S^{|A|}.$$

Рассмотрим первую сумму. Так как $R_n^B \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, то $|R_n^B| \leq M$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1} \right| &\leq M \sum_{j=1}^{n_0} |a_{n-j+1}| = M \sum_{j=n-n_0+1}^n |a_j| = \\ &= M(R_{n-n_0}^{|A|} - R_n^{|A|}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

в силу абсолютной сходимости ряда с общим членом a_k . Итого,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^C = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n^A S^B - \alpha_n) = S^A S^B.$$

□

Чуть позже мы установим вот какую лемму.

Лемма 5.5.3 Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся к суммам A и B , соответственно, а их произведение по Коши сходится к C , то $C = AB$.

В заключение данного пункта, приведем следующий полезный пример.

Пример 5.5.2 Произведение по Коши двух расходящихся рядов может быть даже абсолютно сходящимся. Рассмотрим ряды с общими членами

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-2}, & k > 1 \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -1, & k > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим произведение по Коши. Понятно, что $c_1 = 1$, а при $k > 1$

$$c_k = \sum_{j=1}^k a_j b^{k-j+1} = -1 - \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-2} + 2^{k-2} = -1 - \frac{1 - 2^{k-2}}{1 - 2} + 2^{k-2} = 0.$$

Итого, построенный ряд сходится абсолютно к сумме 1.

6 Функциональные последовательности и ряды

6.1 Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

До этого нами рассматривались числовые ряды – частный случай так называемых функциональных рядов.

Определение 6.1.1 Последовательность $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется функциональной последовательностью.

Определение 6.1.2 Пусть дана функциональная последовательность $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Символ

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

называется функциональным рядом. Последовательность $f_k(x)$ называется общим членом функционального ряда.

Естественно, интересно дать определение предела функциональной последовательности (сходящегося функционального ряда).

Определение 6.1.3 Говорят, что функциональная последовательность $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(x).$$

Замечание 6.1.1 Ясно, что на множестве поточечной сходимости D возникает функция

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

Эта функция называется пределом функциональной последовательности (или поточечным пределом) $f_k(x)$ на множестве D

Пример 6.1.1 Рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n$. Какой у нее поточечный предел? Ясно, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Определение 6.1.4 Пусть рассматривается функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Функция

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

называется n -ой частичной суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Определение 6.1.5 Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующий числовой ряд с общим членом $f_k(x_0)$, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0).$$

Замечание 6.1.2 В терминах частичных сумм сходимость функционального ряда в точке x_0 означает существование конечного предела

$$S(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0).$$

Определение 6.1.6 Пусть рассматривается ряд с общим членом $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Множество D , определяемое, как

$$D = \{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится}\},$$

называется множеством сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. На множестве D определена функция $S(x)$ – сумма функционального ряда.

Определив предел функциональной последовательности (сумму функционального ряда), в анализе естественным образом возникают вопросы о свойстве предельной функции (суммы): будет ли она непрерывна, дифференцируема, интегрируема?

Пример 6.1.2 Рассмотрим $f_n(x) = x^n$ – последовательность непрерывных функций. Данная последовательность сходится при $x \in [0, 1]$, но к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 6.1.3 Рассмотрим $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ и $x \in \mathbb{R}$. Данная последовательность сходится к $f(x) = 0$ но

$$f'_n(x) = \cos nx$$

не сходится к нулю.

Пример 6.1.4 Рассмотрим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Опять же, все функции интегрируемы на $[0, 1]$, однако, предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема на $[0, 1]$.

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Введем новый тип сходимости.

Определение 6.2.1 Говорят, что последовательность $f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится к функции $f(x)$ на множестве $D \subset X$ равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Обозначают это так:

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} f(x)$$

Полезно сравнить это определение с ранее введенным определением (поточечной) сходимости.

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Видно, что определение отличается тем, что в случае поточечной сходимости найденный номер n_0 , вообще говоря, зависит от x , чего нет в равномерной сходимости: там номер одинаков сразу для всех x .

Замечание 6.2.1 Из сказанного ясно, что если $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D , то она сходится на D и поточечно. Тем самым предельную функцию имеет смысл искать, как поточечный предел, а затем уже проводить исследование на равномерную сходимость.

Пример 6.2.1 Знакомая нам последовательность

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad D = \mathbb{R},$$

сходится на множестве D равномерно (к нулю). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Пример 6.2.2 В то же время, последовательность $f_n(x) = x^n$ не сходится равномерно на $[0, 1]$. Напишем отрицание того факта, что последовательность сходится равномерно.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \exists x_n \in D : \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Выберем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогда $f(x_n) = 0$. В то же время,

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \varepsilon_0 \neq 0.$$

Итак, из поточечной сходимости равномерная, вообще говоря, не вытекает.

Определение 6.2.2 Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм равномерно сходится на D к сумме $S(x)$.

Замечание 6.2.2 На языке $\varepsilon - n$ последнее утверждение может быть записано так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Последнее неравенство может быть переписано, как

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Величина $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, как и ранее, называется n -ым остатком функционального ряда. Итого, равномерная сходимость ряда на D равносильна тому, что

$$R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} 0.$$

6.3 Равномерная норма

Определение 6.3.1 Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

называется равномерной нормой функции f на множестве X .

Отметим свойства введенного объекта.

Лемма 6.3.1 Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Равномерная норма обладает следующими свойствами.

1. Положительная определенность нормы: $\|f\|_X \geq 0$, причем $\|f\|_X = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
2. Положительная однородность нормы: $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Неравенство треугольника: $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только третье свойство. Оно следует из того, что

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_X + \|g\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. □

Теперь отметим несколько технических утверждений.

Лемма 6.3.2 Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$.

Доказательство. Ясно, что

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_X \|g\|_X \quad \forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. □

Теорема 6.3.1 (Связь равномерной сходимости и сходимости по норме)
Пусть $f_k(x), f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Тогда

$$f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{D} f(x) \Leftrightarrow \|f_k - f\|_D \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что неравенства

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$$

и

$$\|f_k - f\|_D \leq \varepsilon$$

равносильны. □

Доказанная теорема, по сути, дает способ исследования функциональной последовательности $f_k(x)$ на равномерную сходимость: сначала можно найти поточечный предел $f(x)$, а затем исследовать разность $\|f_k - f\|$ на стремление к нулю.

Пример 6.3.1 Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}$$

на множествах $D_1 = [0, +\infty)$ и $D_2 = [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.

Поточечный предел равен, очевидно, нулю, а потому

$$|f_k(x) - f(x)| = f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}.$$

Исследуем эту функцию на наибольшее значение. Воспользуемся производной:

$$f'_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}(1 - 2kx^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Понятно, что найденная точка – точка локального максимума, которая при всех k принадлежит множеству D_1 . Тогда

$$\|f_k - f\|_{D_1} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

и условие теоремы не выполняется, а значит равномерной сходимости нет.

Для второго множества ситуация другая. При достаточно больших k найденная точка не принадлежит множеству D_2 , а значит

$$\|f_k - f\|_{D_2} = \delta\sqrt{k}e^{-k\delta^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Итого, на множестве D_2 равномерная сходимость есть.

Лемма 6.3.3 (Дополнительные свойства равномерной сходимости)

Справедливы следующие свойства равномерной сходимости (везде сходимость при $n \rightarrow +\infty$):

1. Пусть $f_n(x), f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $D_0 \subset D \subset X$. Если $f_n(x) \xrightarrow{D} f$, то $f_n(x) \xrightarrow{D_0} f$.
2. Пусть $f_n(x), f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $D_0 \subset D \subset X$. Если $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ равномерно на D_0 , то $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ равномерно на D .
3. Пусть $f_n(x), f(x), g_n(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если $f_n \xrightarrow{D} f(x)$ и $g_n \xrightarrow{D} g(x)$, то

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \xrightarrow{D} \alpha f(x) + \beta g(x).$$

4. Пусть $f_n(x), f(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если $f_n \xrightarrow{D} f(x)$ и g ограничена на D , то

$$f_n(x)g(x) \xrightarrow{D} f(x)g(x).$$

Доказательство. Ясно, что какого-то пояснения требуют только 3 и 4 свойства. Докажем третье. Используя неравенство треугольника и положительную однородность нормы, получим

$$\|\alpha f_k + \beta g_k - \alpha f - \beta g\|_D \leq |\alpha| \|f_k - f\|_D + |\beta| \|g_k - g\|_D \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Докажем четвертое свойство. Оно следует из свойства нормы:

$$\|f_k g - f g\|_D = \|(f_k - f)g\|_D \leq \|f_k - f\|_D \|g\|_D \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

□

6.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 6.4.1 (Критерий Коши равномерной сходимости ф.п.)

Для того чтобы функциональная последовательность $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходилась равномерно на $D \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_D \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$\|f_{n+p} - f_n\|_D \leq \|f_{n+p} - f\|_D + \|f - f_n\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Написанное условие гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит сходится. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при $x \in D$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию, найдем n_0 , что при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Устремив $p \rightarrow +\infty$, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D,$$

откуда и следует требуемое. \square

Так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм, то справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4.2 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Пусть $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\|_D \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм. \square

Следствие 6.4.3 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)

Пусть $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ то

$$f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{D} 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно положить в критерии Коши $p = 1$. \square

Пример 6.4.1 Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится неравномерно на $(0, 1)$ так как, как было показано ранее, нет равномерной сходимости общего члена $f_k(x) = x^k$ к нулю на $(0, 1)$.

6.5 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 6.5.1 (Признак Вейерштрасса) Пусть $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$$

сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно (и абсолютно) на D .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$ сходится, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

В то же время, при $x \in D$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

Используя критерий Коши заключаем, что ряд сходится равномерно и абсолютно. \square

Замечание 6.5.1 Из доказательства видно, что равномерно сходящимся оказывается не только ряд с общим членом $f_k(x)$, но и ряд с общим членом $|f_k(x)|$, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

Следствие 6.5.2 Пусть $f_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $D \subset X$. Пусть, кроме того, на множестве D выполняется неравенство $|f_k(x)| \leq a_k$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{сходится.}$$

Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ сходятся абсолютно и равномерно.

Замечание 6.5.2 Существуют ряды, которые сходятся абсолютно, но неравномерно и равномерно, но неабсолютно. Примером абсолютно, но неравномерно сходящегося ряда служит ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (0, 1).$$

Примером равномерно, но неабсолютно сходящегося ряда, служит, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Понятно, что числовой ряд, если он сходится, сходится равномерно на любом множестве $D \subset \mathbb{R}$. Более того, существуют абсолютно и равномерно сходящиеся ряды, для которых ряд из модулей не сходится равномерно (то есть те, для которых не применим признак Вейерштрасса). Позже мы приведем примеры таких рядов.

Теорема 6.5.3 (Признак Абеля-Дирихле) Пусть $f_k(x), g_k(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, а последовательность $g_k(x)$ монотонна при любом $x \in D \subset X$. Тогда для равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$$

на D достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. Частичные суммы $A_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ равномерно ограничены на D , то есть

$$\exists C : \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq C \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. $g_k(x)$ равномерно стремится к нулю на D .

либо

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D
2. Последовательность $g_k(x)$ равномерно ограничена на D , то есть

$$\exists C : |g_k(x)| \leq C \quad \forall x \in D \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши и преобразованием Абеля:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(x) \right| = \\ &= \left| A_{n+p}(x) g_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{n+p-1} A_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x)) - \right. \\ &\quad \left. - A_n(x) g_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| = \\ &= \left| A_{n+p}(x) g_{n+p}(x) - A_n(x) g_n(x) + \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| = \\ &= \left| A_{n+p}(x) g_{n+p}(x) - A_n(x) g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right|. \end{aligned}$$

В силу равномерной ограниченности $A_n(x)$ и монотонности $g_k(x)$, приходим к оценке

$$\leq C (|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|) \leq 4C \max(|g_{n+1}(x)|, |g_{n+p}(x)|).$$

1. В силу равномерной сходимости, найдем номер n_0 , что при $n > n_0$ выполняется

$$|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Тогда рассматриваемый модуль не превосходит ε , что и завершает доказательство.

2. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D , то

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x) \Rightarrow 0.$$

Так как

$$A_k(x) = S(x) - R_k(x), \quad k \in \{n, n+1, \dots, n+p\},$$

то

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| = \\ & = \left| -R_{n+p}(x) g_{n+p}(x) + R_n(x) g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| \leq \\ & \leq |R_{n+p}(x)| |g_{n+p}(x)| + |R_n(x)| |g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |R_k(x)| |g_k(x) - g_{k+1}(x)|. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу того, что $R_n(x) \Rightarrow 0$,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C} \quad \forall x \in D,$$

а значит

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4C} (|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|) \leq \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. \square

Пример 6.5.1 Исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Воспользуемся признаком Абеля-Дирихле. Для этого вспомним, что

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \begin{cases} \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что написанная сумма не является равномерно ограниченной на любом множестве, содержащем хотя бы одну из точек множества $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $[a, b] \subset (2\pi k, 2\pi(k+1))$. Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\min(|\sin \frac{a}{2}|, |\sin \frac{b}{2}|)}$$

и ряд сходится на произвольных множествах такого типа (признак Дирихле). В то же время, равномерной сходимости на $(2\pi t, 2\pi(t+1))$ нет, так как

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\cos(2\pi t + \frac{1}{2n})k}{k} \right| \geq \frac{n \cos 1}{2n} = \cos 1,$$

что не стремится к нулю.

Замечание 6.5.3 Аналогичные рассуждения могут быть применены к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Результаты аналогичны.

На практике (для доказательства отсутствия равномерной сходимости) бывает полезна следующая лемма.

Лемма 6.5.1 Пусть $f_k(x) \in C[a, b]$. Если $f_k(x) \xrightarrow{(a,b)} f(x)$, то

$$f_k(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b).$$

Пусть $x_n \in (a, b)$, $x_n \rightarrow b$. Перейдем к пределу в неравенстве и, пользуясь непрерывностью $f_k(x)$, получим

$$|f_{n+p}(b) - f_n(b)| \leq \varepsilon.$$

Аналогично с точкой a . Значит, при $x \in [a, b]$ выполняется

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

что, согласно критерию Коши, влечет равномерную сходимость последовательности $f_k(x)$. \square

Аналогичная лемма справедлива и для рядов.

Лемма 6.5.2 Пусть $f_k(x) \in C[a, b]$. Если на (a, b) ряд с общим членом $f_k(x)$ сходится равномерно, то он сходится равномерно и на $[a, b]$.

Пример 6.5.2 Для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

условия непрерывности выполнены, но при $x = 2\pi t$ получаем расходящийся ряд с общим членом $\frac{1}{k}$. Значит, на интервалах с концами $2\pi t$ равномерной сходимости, конечно, нет.

6.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 6.6.1 (О перестановке пределов) Пусть $f(x), f_k(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем

$$1. f_k(x) \xrightarrow{D} f(x).$$

2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D .

Тогда пределы $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существуют (в \mathbb{R}) и совпадают, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_n . Пусть ее предел равен A . Осталось показать, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D ,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D.$$

В силу сходимости последовательности a_n ,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, n_0)$, тогда одновременно

$$|a_m - A| < \varepsilon \text{ и } |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \varepsilon.$$

Значит, при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

□

Аналогичный результат справедлив и для рядов.

Теорема 6.6.2 (Почленный переход к пределу) Пусть $f_k(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D .
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D .

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к сумме A , причем $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда. □

Из этих теорем легко получить и выводы о непрерывности предельной функции (или суммы ряда).

Теорема 6.6.3 (О непрерывности предельной функции) Пусть $f_k(x), f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем

1. $f_k(x) \Rightarrow [k \rightarrow +\infty] Df$ на D .
2. $f_k(x)$ непрерывны в x_0 .

Тогда f непрерывна в x_0 . В частности, если $f_k(x)$ непрерывны на D , то и $f(x)$ непрерывна на D .

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка, то доказывать нечего (любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения). Если x_0 – предельная, то выполнены условия теоремы, где $a_k = f_k(x_0)$. Поэтому,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_0) = f(x_0).$$

□

Теорема 6.6.4 (О непрерывности суммы ряда) Пусть $f_k(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D .

2. $f_k(x)$ непрерывны в x_0 .

Тогда сумма ряда непрерывна в x_0 . В частности, если $f_k(x)$ непрерывны на D , то и сумма ряда непрерывна на D .

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм. □

Замечание 6.6.1 Из равномерной непрерывности функций на D следует и равномерная непрерывность предельной функции (суммы).

Пример 6.6.1 Поточечной сходимости для непрерывности предельной функции недостаточно. Значит, недостаточно и для перестановки пределов.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} x^n = 1.$$

Условие равномерной сходимости не является необходимым.

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{[0, +\infty)} 0,$$

но сходимость, как было показано в примере ранее, неравномерна.

Иногда удается установить равномерную сходимость из непрерывности предельной функции.

Теорема 6.6.5 (Теорема Дини для последовательностей) Пусть $f_k(x), f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k(x), f(x) \in C[a, b]$. Кроме того, пусть $f_k(x)$ не убывает (не возрастает) по k на $[a, b]$ и

$$f_k(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x).$$

Тогда

$$f_k(x) \rightrightarrows_{[a, b]} f(x).$$

Доказательство. Пусть, например, $f_k(x)$ не убывает. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдем номер n_x , что

$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Это же неравенство остается в силе и в некоторой окрестности $U(x)$ точки x в силу непрерывности рассматриваемых функций. Из покрытия отрезка такими окрестностями выделим конечное покрытие $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_k)$ и выберем $n_0 = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_k})$. Тогда при $n > n_0$

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b],$$

что и означает равномерную сходимость. \square

Теорема 6.6.6 (Теорема Дини для рядов) Пусть $f_k(x) \in C[a, b]$ и $f_k(x) \geq 0$. Если сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то ряд к своей сумме сходится на $[a, b]$ равномерно.

Доказательство. Достаточно применить теорему Дини для последовательностей к последовательности частичных сумм. \square

Теорема 6.6.7 (Интегрирование ф.п.) Пусть $f_k(x), f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) \in R[a, b]$ и при $k \rightarrow +\infty$

$$f_k(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x).$$

Тогда $f \in R[a, b]$ и

$$\int_a^x f_k(t) dt \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x f(t) dt.$$

Доказательство. 1) Сначала докажем, что предельная функция $f(x)$ интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Пусть $n > n_0$, тогда

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| \leq \\ &\leq 2\varepsilon + \omega(f_n, E) \Rightarrow \omega(f, E) \leq 2\varepsilon + \omega(f_n, E), \end{aligned}$$

что дает интегрируемость f .

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a, b].$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int_a^x f_k(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_k(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a, b]$. Это и доказывает равномерную сходимость. \square

Аналогичная теорема справедлива и для рядов.

Теорема 6.6.8 (О почленном интегрировании ряда) Пусть $f_k(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k(x) \in R[a, b]$. Если ряд с общим членом $f_k(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на $[a, b]$, то $S(x) \in R[a, b]$, причем

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда. \square

Осталось решить вопрос о дифференцируемости предельной функции. В простейшем случае он решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 6.6.9 (О дифференцируемости предельной функции)

Пусть $f_k(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k(x) \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что последовательность $f_k(x_0)$ сходится.

2. $f'_k(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$ при $k \rightarrow +\infty$.

то

1. $f_k(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$ при $k \rightarrow +\infty$.

2. $f'(x) = g(x)$ на $[a, b]$ и, в частности, $f(x) \in C^1[a, b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_k(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

причем последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int_{x_0}^x g(x) dx.$$

Так как существует предел $C = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_0)$, то

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = C + \int_{x_0}^x g(x) dx,$$

где последняя сходимость равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$f'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Тем самым теорема доказана. □

На самом деле справедлива и более общая теорема.

Теорема 6.6.10 (О дифференцируемости предельной функции*)

Пусть $f_k(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что $f_k(x_0)$ сходится.

2. $f'_k(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$.

то

1. $f_k(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$.

2. $f'(x) = g(x)$ на $[a, b]$.

Доказательство. Без доказательства. □

7 Степенные ряды

7.1 Общие свойства степенных рядов

Определение 7.1.1 Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и a_k – числовая последовательность.

Замечание 7.1.1 Ясно, что множество сходимости любого степенного ряда не пусто, так как при $x = x_0$ сумма равна $a_0 \in \mathbb{R}$

Замечание 7.1.2 Линейной заменой $t = x - x_0$ произвольный степенной ряд сводится к ряду вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Не нарушая общности, в дальнейшем мы будем рассматривать именно такие ряды (при $x_0 = 0$).

Естественно возникает следующий набор вопросов:

1. Каково множество сходимости степенного ряда?
2. Каковы свойства суммы степенного ряда?
3. Можно ли данную функцию представить степенным рядом?

Начнем с ответа на первый вопрос.

Теорема 7.1.1 (1 теорема Абеля) Пусть дан ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

1. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{сходится,}$$

то исходный ряд сходится абсолютно при всех x таких, что $|x| < |x_1|$.

2. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{расходится,}$$

то исходный ряд расходится при всех x таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$ (иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$ пусто). Пусть $|x| < |x_1|$, тогда

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то $|a_k x_1^k| \leq C$, а значит

$$|a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Заметим, что $0 \leq \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$, а значит ряд с общим членом $C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k$ сходится как геометрическая прогрессия. Отсюда, согласно признаку сравнения, сходится, причем абсолютно, исходный ряд.

2. Второй пункт легко доказывается от противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$ ряд сходил, то по только что доказанному он бы сходил и при $x = x_1$, что противоречит условию \square

Из этой теоремы сразу вытекает вид множества сходимости степенного ряда.

Следствие 7.1.2 Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R); (R, +\infty)$ ряд расходится. При этом при $R = 0$ множество сходимости состоит из одной точки $\{0\}$, а при $R = +\infty$ множество сходимости совпадает с \mathbb{R} .

Определение 7.1.2 Число R из предыдущего следствия называется радиусом сходимости, а множество $(-R, R)$ интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Замечание 7.1.3 При $x = \pm R$ ситуация может быть разной. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ и сходится лишь при $x \in (-1, 1)$.

В то же время ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

тоже имеет радиус сходимости, равный 1, но сходится при $x \in [-1, 1]$, причем абсолютно.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

опять же имеет радиус сходимости $R = 1$, но сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, при $x = -1$ сходится условно, а при $x = 1$ расходится. Может

также возникнуть ситуация, когда в обеих точках $x = \pm R$ ряд сходится условно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда удобно пользоваться признаками Даламбера, радикальным признаком Коши, признаком Раабе и проч. С теоретической же точки зрения оказывается важной следующая теорема.

Теорема 7.1.3 (Теорема Коши-Адамара) Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем

$$l = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Это равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ и } |x| > \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответственно. Это и доказывает теорему. \square

Для того чтобы ответить на вопросы о свойствах суммы степенного ряда, решим вопрос о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема 7.1.4 (О равномерной сх-ти степенного ряда) Пусть дан ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и пусть $R > 0$ – его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_k x^k| \leq |a_k r^k|.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится абсолютно. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса. \square

Замечание 7.1.4 Последнюю теорему можно сформулировать и иначе: степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости. Доказательство остается практически без изменений.

Отсюда сразу получается следующее следствие.

Теорема 7.1.5 (О непрерывности суммы степенного ряда) Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $R > 0$ – его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на интервале сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и $\delta = \min\left(\frac{R-x_0}{2}, \frac{x_0+R}{2}\right)$. Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по предыдущей теореме, на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены ряда непрерывны на этом отрезке, то, по свойству равномерно сходящихся рядов, сумма ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$. В силу произвольности x_0 теорема доказана. \square

Вопрос о непрерывности суммы ряда при $x = \pm R$ решает следующая теорема.

Теорема 7.1.6 (2 теорема Абеля) Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и R – его радиус сходимости. Если сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$, то исходный ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

Доказательство. Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$a_k x^k = a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, причем равномерно на $[0, R]$, а последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^k$ монотонна и равномерно ограничена, то по признаку Абеля-Дирихле данный ряд сходится равномерно на $[0, R]$. \square

Следствие 7.1.7 В рамках условий предыдущей теоремы, сумма степенного ряда непрерывна на $(-R, R]$.

Замечание 7.1.5 Ясно, что аналогичная теорема справедлива и для случая $x = -R$.

Теперь обратимся к вопросу интегрирования степенных рядов.

Теорема 7.1.8 (Об интегрировании степенных рядов) Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $R > 0$ – его радиус сходимости. Пусть $[a, b] \subset (-R, R)$, тогда

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Если ряд сходится при $x = R$ ($x = -R$), то b может равняться R (а может равняться $-R$).

Доказательство. Данная теорема – прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда. \square

Перед тем как решить вопрос о дифференцировании ряда, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 7.1.1 *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \leq \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0 , что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{k|a_k|} < (1 + \varepsilon) \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1 + \varepsilon) \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε ,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши-Адамара, радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же. \square

Теорема 7.1.9 (О дифференцировании степенных рядов) Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $R > 0$ – его радиус сходимости, а $S(x)$ – его сумма. Тогда $S(x) \in C^\infty(-R, R)$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \geq 1.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав $\delta = \frac{1}{2} \min(R - x_0, x_0 + R)$ получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (-R, R),$$

а значит ряд из производных сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 — произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что $S(x)$ дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $S(x) \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. \square

Замечание 7.1.6 Ясно, что при рассмотрении степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

все полученные результаты остаются справедливыми, но на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, где R — радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Результаты про концы интервала сходимости (2 теорема Абеля и проч.) тоже остаются справедливыми.

В заключение, докажем теорему единственности.

Теорема 7.1.10 (О единственности разложения в степенной ряд)

Пусть при $x \in (-R, R)$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Тогда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то есть написанный ряд является рядом Тейлора.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

□

7.2 Остаточные члены формулы Тейлора

Напомним определение многочлена Тейлора.

Определение 7.2.1 *Многочлен*

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора для функции f порядка n в точке x_0* .

Естественно, важным является информация об остатке, то есть о величине

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0),$$

которая характеризует точность приближения рассматриваемой функции построенным многочленом. Получим интегральную формулу остаточного члена.

Теорема 7.2.1 (Интегральная форма остаточного члена ф. Тейлора)

Пусть $f(x)$ на отрезке с концами x_0 и x непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз. Тогда

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и проинтегрируем по частям. Тогда,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt = - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)' dt =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)dt = f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f''(t) ((x - t)^2)' dt.$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

□

Получим некоторые важные следствия.

Следствие 7.2.2 (Остаточный член в форме Лагранжа) В рамках условий предыдущей теоремы,

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ расположена между x и x_0 .

Доказательство. Так как $(x - t)^n$ сохраняет знак на отрезке с концами x_0 и x , то по теореме о среднем

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

□

Следствие 7.2.3 (Остаточный член в форме Коши) В рамках условий предыдущей теоремы,

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0),$$

где ξ расположена между x и x_0 .

Доказательство. По теореме о среднем,

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0).$$

□

7.3 Ряды Тейлора и Маклорена

Определение 7.3.1 Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называется рядом Тейлора в точке x_0 , порожденным функцией f .

Определение 7.3.2 Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

Замечание 7.3.1 Заметим, что ряд Тейлора всегда сходится к породившей его функции хотя бы в одной точке – в точке x_0 .

Пример 7.3.1 Оказывается, что бывают функции, ряды Тейлора которых сходятся к их значениям лишь в одной точке. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Легко проверить, что ряд Маклорена, построенный по функции f , состоит только из нулей, а значит сходится к значению функции только при $x = 0$ (хотя сам по себе сходится при всех возможных x).

Почему возникает ситуация как в последнем примере? Ясно, что так как

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0),$$

то то, что при некотором $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x, x_0)$$

равносильно тому, что $r_n(x, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3.1 Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции $f(x)$, сходил к этой функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

В последнем примере остаток стремится к нулю только при $x = 0$, поэтому и сходимость наблюдается лишь в одной точке. Глубинные причины такой ситуации становятся понятными лишь при рассмотрении функции комплексного переменного.

Теорема 7.3.2 (Достаточное условие сходимости ряда Тейлора)

Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке с концами x_0 и x . Если на этом отрезке производные функции равномерно ограничены, то есть

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

то

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Доказательство. Воспользуемся остаточным членом в формуле Лагранжа. Согласно условию,

$$|r_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

так как факториал растет быстрее показательной функции. По предыдущей теореме, ряд Тейлора сходится в точке x к породившей его функции. \square

7.4 Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

Применим полученные знания для разложения основных элементарных функций. Раскладывать будем при $x_0 = 0$ (то есть в ряд Маклорена).

7.4.1 Ряд Маклорена для e^x

Ясно, что если $f(x) = e^x$, то

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{и, в частности,} \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f , имеет вид

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Пусть $x \in (-r, r)$. Тогда справедлива оценка:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x < e^r,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора, он сходится к породившей его функции на любом промежутке вида $(-r, r)$, а значит, и на всем \mathbb{R} :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.2 Ряд Маклорена для a^x

Используя результат предыдущего пункта, соотношение $a^x = e^{x \ln a}$, а также единственность разложения в степенной ряд, легко получить, что

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.3 Ряд Маклорена для $\sin x$

Ясно, что так как $f(x) = \sin x$, то

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}n \right) \quad \text{и, в частности,} \quad f^{(n)}(0) = \sin \left(\frac{\pi}{2}n \right).$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f , имеет вид

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что на отрезке с концами 0 и x справедлива оценка:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2}n \right) \right| \leq 1,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.4 Ряд Маклорена для $\cos x$

Аналогично полученному в предыдущем пункте,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.5 Ряд Маклорена для $\ln(1+x)$

Ясно, что так как $f(x) = \ln(1+x)$, то

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{и, в частности,} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f , имеет вид

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

Написанный ряд сходится лишь при $x \in (-1, 1]$, поэтому только при этих значениях ряд и имеет смысл исследовать на сходимость к породившей его функции. Используем остаток в интегральной форме. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}} dz.$$

(сделали замену переменной $t = xz$, $dt = xdz$).

Заметим, что при $x \in (-1, 1)$ и $z \in [0, 1]$ выполнены неравенства

$$1+xz > 1-z \quad \text{и} \quad 1+xz < 1-|x|.$$

Тогда

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а значит при $x \in (-1, 1)$ построенный ряд сходится к значению породившей его функции. В то же время, при $x = 1$ ряд сходится, а значит его сумма непрерывна на $[0, 1]$ (2 теорема Абеля). Тогда

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

и

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

7.4.6 Ряд Маклорена для $(1+x)^\alpha$

Ясно, что так как $f(x) = (1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $f(0) = 1$, то ряд Маклорена, построенный по функции f , имеет вид

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1))}{n!}x^n + \dots = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (k - 1))}{k!}x^k. \end{aligned}$$

Без дополнительных пояснений отметим случаи, когда написанный ряд сходится:

1. Если $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то ряд сходится при $x \in \mathbb{R}$.
2. Если $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, то ряд сходится абсолютно при $x \in [1, 1]$ и расходится при $x \notin [-1, 1]$.
3. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, условно при $x = 1$, иначе расходится.
4. Если $\alpha \leq -1$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, иначе расходится.

Теперь исследуем сходимость написанного ряда к породившей его функции. Для этого снова воспользуемся остаточным членом в интегральной форме:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)}{n!} \int_0^x \frac{(x - t)^n}{(1 + t)^{n+1-\alpha}} dt = \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)}{n!} \cdot x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1 - z)^n}{(1 + xz)^{n+1-\alpha}} dz. \end{aligned}$$

Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда, по доказанному в предыдущем пункте,

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1 - |x|)^{1-\alpha}} \cdot \left| \alpha \left(\frac{\alpha}{1} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \right|.$$

При достаточно больших n будет выполнено

$$\left| \frac{\alpha}{n} - 1 \right| \leq 1,$$

откуда

$$\left| \alpha \left(\frac{\alpha}{1} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \right| \leq C,$$

где C не зависит от n . Тогда $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Итак,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Вопрос о сходимости ряда к породившей его функции при $x = \pm 1$ решается с использованием 2 теоремы Абеля и замечанием о сходимости написанного ряда, сделанным ранее.

7.4.7 Ряд Маклорена для $\arctg x$

Используя результат предыдущего пункта, а также единственность разложения в степенной ряд, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда написанный ряд можно интегрировать почленно по отрезку с концами 0 и x , а значит

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x x^{2k} dx,$$

откуда

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Так как получившийся справа ряд сходится (условно) при $x = \pm 1$, то, согласно следствию из второй теоремы Абеля,

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

8 Тригонометрические ряды Фурье

8.1 Ортогональные системы функций

Определение 8.1.1 Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \in C[a, b]$. Говорят, что система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ортогональна на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ называется ортонормированной.

Пример 8.1.1 Тригонометрическая система

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

ортонормирована на $[-\pi, \pi]$.

Пример 8.1.2 Многочлены Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad L_0(x) = 1,$$

образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$.

8.2 Ряд Фурье по ортогональной системе

Предположим, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье.

Заметим, что

1. Если написанное равенство справедливо на \mathbb{R} , то f – периодическая функция с периодом 2π . В частности, она полностью определяется заданием ее на произвольном промежутке длины 2π .
2. Обратно, логично предположить, что имея 2π -периодическую функцию, ее можно разложить в ряд по тригонометрической системе функций. Это, конечно, не всегда так.

Следующую лемму сформулируем для любых ортогональных систем функций.

Лемма 8.2.1 Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то справедливо равенство:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Доказательство. Так как функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они ограничены. И тогда из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \varphi_n(x)$ на $[a, b]$ и

$$f(x) \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \varphi_n(x).$$

Воспользуемся теоремой об интегрировании равномерно сходящегося ряда и ортогональностью системы $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ на $[a, b]$. Получим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \right) \varphi_n(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

Так как функции $\varphi_n(x)$ не равны тождественно нулю и непрерывны, то интеграл в знаменателе не равен нулю. И требуемое равенство доказано. \square

Определение 8.2.1 Числа a_n , вычисленные по формулам (*), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ – рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Записывать это будем так:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x \in [a, b].$$

Для тригонометрической системы функций (Пример 1) тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

8.3 Лемма Римана

Будем говорить, что функция $f(x) \in R_{loc}(a, b)$ интегрируема с модулем или абсолютно интегрируема на (a, b) , если несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится. В частности, f абсолютно интегрируема на \mathbb{R} , если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$.

Лемма 8.3.1 (Римана) Пусть f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b) . Тогда

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin wx dx = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos wx dx = 0.$$

Доказательство. 1) $f(x) \in R[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется разбиение $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a, b]$, что разность сумм Дарбу $S_\tau - s_\tau < \varepsilon/2$, то есть,

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Тогда на каждом отрезке разбиения выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) - m_i \leq M_i - m_i$$

и

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(x) \sin wx dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin wx dx \right| = \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin wx dx + \sum_{i=1}^n m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin wx dx \right| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - m_i| \cdot |\sin wx| dx + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|w|} |\cos wx_i - \cos wx_{i-1}| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i + \frac{2}{|w|} \sum_{i=1}^n |m_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2n}{|w|} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

(последнее слагаемое $\rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$, значит $< \varepsilon/2$).

2) Пусть теперь f абсолютно интегрируема на (a, b) (возможно неограниченном). Будем считать, что единственная особая точка интеграла – точка b . Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $b' < b$ такое, что $f \in R[a, b']$, а $\int_{b'}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. По п.1) найдется w_0 такое, что при $|w| > w_0$ выполнено

$$\left| \int_a^{b'} f(x) \sin wx dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, при $|w| > w_0$ имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(x) \sin wx dx \right| &= \left| \int_a^{b'} f(x) \sin wx dx + \int_{b'}^b f(x) \sin wx dx \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_a^{b'} f(x) \sin wx dx \right| + \left| \int_{b'}^b |f(x)| dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\int_a^b f(x) \cos wx dx \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$. \square

Следствие 8.3.1 Если f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты тригонометрического ряда Фурье стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$, а также общий член ряда стремится к 0.

8.4 Ядро Дирихле

Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье и немного ее преобразуем:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n k = 1^n \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \quad (\text{ядро Дирихле}).$$

Заметим, что

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin(u/2)} \quad \text{при } u \neq 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Отметим простейшие свойства ядра Дирихле.

Лемма 8.4.1 *Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:*

1. $D_n(u)$ – 2π -периодическая функция.
2. $D_n(u)$ – четная функция.
3. Выполнено условие нормировки:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) dx = 1.$$

Итак, для частичной суммы ряда Фурье оказывается справедливым следующее представление.

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.$$

Лемма 8.4.2 Пусть функция f является 2π -периодической на \mathbb{R} . Тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $u = x-t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле, подынтегральная функция является 2π -периодической, тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du.$$

Так как ядро Дирихле является четным, то

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x-u) + f(x+u)) D_n(u) du,$$

что и доказывает лемму. \square

8.5 Принцип локализации и условия Гёльдера

Используя представление частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла, а также используя лемму Римана, можно сформулировать следующий основной принцип локализации.

Теорема 8.5.1 (Принцип локализации) Пусть f, g – 2π -периодические на \mathbb{R} и абсолютно интегрируемые на $(-\pi, \pi)$ функции. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности точки $x_0 \in (-\pi, \pi)$, то их тригонометрические ряды Фурье сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, причем если сходятся, то к одному и тому же значению.

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье в виде

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0-t) + f(x_0+t)) D_n(t) dt.$$

Так как на $[\delta, \pi]$, $\delta > 0$ выполняется неравенство $\sin \frac{t}{2} > \sin \frac{\delta}{2}$, то на основании леммы Римана можно заключить, что

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x_0-t) + f(x_0+t)) D_n(t) dt + o(1).$$

В силу того, что при $t \in (-\delta, \delta)$ справедливо равенство $f(x_0 + t) = g(x_0 + t)$, то

$$\int_0^\delta (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) D_n(t) dt = \int_0^\delta (g(x_0 - t) + g(x_0 + t)) D_n(t) dt.$$

Из этого следует утверждение теоремы. \square

Замечание 8.5.1 Даже если оба ряда сходятся в точке x_0 , их сумма вовсе не обязательно совпадает со значением в точке x_0 породивших их функций.

Определение 8.5.1 (Условия Гёльдера) Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и такие числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ и $C > 0$, что для всех $u \in (0, \delta)$ выполнены неравенства

$$\left| f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) \right| \leq Cu^\alpha, \quad \left| f(x_0 - u) - f(x_0 - 0) \right| \leq Cu^\alpha.$$

Расширим понятие односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}.$$

Лемма 8.5.1 Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то она удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1$.

Доказательство. Из существования односторонних производных следует, что функции

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}, \quad \psi(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}$$

имеют конечные пределы при $u \rightarrow 0+$ и, значит, ограничены на интервале $(0, \delta)$, то есть существует $C > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \right| \leq C, \quad \left| \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u} \right| \leq C,$$

откуда и следуют условия Гёльдера при $\alpha = 1$. \square

Следствие 8.5.2 Дифференцируемая в точке функция удовлетворяет в этой точке условиям Гёльдера.

Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = |x|^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет условиям Гёльдера в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

8.6 Сходимость ряда Фурье в точке

Теорема 8.6.1 (Дирихле) Пусть $f(x)$ – 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, удовлетворяющая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ условию Гёльдера. Тогда в точке x_0 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $\frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$.

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда Фурье:

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) D_n(t) dt,$$

и

$$\int_0^\pi D_n(t) dt = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\begin{aligned} & T_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) + f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся леммой Римана. Для этого докажем, что функция $\frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) + f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{\sin \frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на $(0, \pi)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) + f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq \\ & \leq \int_0^\pi \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt + \int_0^\pi \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt. \end{aligned}$$

Для первого интеграла имеем при $t \rightarrow 0+$ (для второго аналогично):

$$\left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{\sin \frac{t}{2}} \right| \sim 2 \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \right| \leq 2Ct^\alpha,$$

откуда следует, что

$$\left| f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) \right| \leq \frac{2C}{t^{1-\alpha}}, \quad 1 - \alpha \in [0, 1),$$

оба интеграла сходятся, выполнены условия леммы Римана и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

□

Замечание 8.6.1 Если в условиях теоремы функция еще и непрерывна в точке x_0 , то ее ряд Фурье сходится к $f(x_0)$.

8.7 Некоторые примеры и приложения

8.7.1 Ряд из обратных квадратов

Пусть функция $f(x) = x^2$ задана на $[-\pi, \pi]$, а дальше периодически продолжена на \mathbb{R} . Ясно, что согласно доказанной теореме, ее ряд Фурье сходится к ней поточечно при $x \in \mathbb{R}$. Вычислим коэффициенты разложения.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Далее, пусть $k \geq 1$, тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx,$$

где последнее равенство верно в силу четности подынтегральной функции. Интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\cos \pi k = (-1)^k$, получим

$$a_k(f) = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток интегрирования симметричен. Итого, на $[-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx.$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

8.7.2 Бесконечное произведение для синуса

Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, заданную на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолженную на \mathbb{R} . Ясно, что построенный по ней ряд Фурье сходится к значению данной функции во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha - k)\pi}{\alpha - k} + \frac{\sin(\alpha + k)\pi}{\alpha + k} \right) = \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi} \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha - k} + \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha + k} \right) = \frac{(-1)^k}{\pi} 2\alpha \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin kx dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток симметричен. Тогда, на $(-\pi, \pi)$

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right).$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\cos \pi \alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

и

$$\operatorname{ctg} \pi \alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg} \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

При $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$ написанный ряд сходится равномерно, а значит его можно интегрировать почленно. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) d\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} d\alpha,$$

откуда

$$\ln \left| \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \right| \Big|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - k^2| \Big|_0^x$$

или

$$\ln \left| \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{k^2} \right|.$$

Избавляясь от логарифмом, получаем, что

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right), \quad |x| < 1.$$

8.8 Ряды Фурье по произвольному промежутку длины $2l$

До сих пор мы рассматривали 2π -периодические функции, заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но что, если период у функции другой? Предположим, что функция f задана на промежутке $[-l, l]$ и периодически продолжена на \mathbb{R} . Легко понять, что если $x \in [-l, l]$, то

$$y = \frac{\pi}{l} x \in [-\pi, \pi].$$

Значит, функции f можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Все сформулированные ранее результаты сохраняются с точностью до замены отрезка (или интервала) с концами $\pm\pi$ на отрезок (или интервал) с концами $\pm l$.