



Лекция 2

Матрица линейного оператора

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы рассмотрим представление оператора в линейном пространстве с заданным базисом. Мы покажем, что произвольный линейный оператор в этом случае можно представить прямоугольной матрицей соответствующих размеров. Также будет обсуждаться вопрос преобразования матрицы оператора при замене базисов пространств.

Ключевые слова:

Матрица линейного оператора, базис размерность пространства линейных операторов, преобразование матрицы оператора, преобразование подобия.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Матрица линейного оператора

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно.

Матрицей линейного оператора φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A = \|\alpha_i^j\|$ по столбцам которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$:

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j.$$

Пример 2.1. Примеры:

1. $\Theta : X \rightarrow Y$:

$$A_{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{I} : X \rightarrow X$:

$$A_{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} : X \rightarrow X$:

$$A_{\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2}} = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & A_{\Theta} \end{pmatrix},$$

так как

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x, \quad \forall x \in L_1,$$

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = 0, \quad \forall x \in L_2.$$

4. $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$:

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в базисе $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$.

МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Теорема 2.1. Задание линейного оператора φ эквивалентно заданию его матрицы A в фиксированной паре базисов.

►

⇒ Очевидно.

⇐ Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n, \{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно. Рассмотрим элементы $x \in X$ и $y \in Y$, такие что:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \quad \varphi(x) = y.$$

Рассмотрим действие оператора на элемент x :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j,$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j.$$

◀

Теорема 2.2. Набор операторов $\{^i_j \varepsilon\}$, действующих на произвольный вектор $x \in X$ по правилу

$$^i_j \varepsilon(x) = \xi^i g_j, \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i,$$

образует базис пространства $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$

►

Необходимо показать, что набор операторов $\{^i_k \varepsilon\}$ является полным и линейно независимым в $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$:

ПН: пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m a_i^j g_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi^i a_i^j g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ^i_j \varepsilon(x) a_i^j, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ^i_j \varepsilon a_i^j, \quad \forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y).$$

ЛНЗ: положим, рассмотрим линейную комбинацию векторов набора $\{^i_j \varepsilon\}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ^i_j \varepsilon \beta_i^j = \Theta,$$

МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

и применим обе части операторного равенства к базисному элементу e_k пространства X . Получим:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m {}^i\varepsilon(e_k) \beta_i^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_k^i g_j \beta_i^j = \sum_{j=1}^m g_j \beta_k^j = 0_Y$$

Но набор $\{g_j\}_{j=1}^m$ - линейно-независимый (как базис Y) следовательно $\beta_k^j = 0, \forall k$. Применяя полученное выражение ко всем элементам базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ получим что все коэффициенты β_k^j равны нулю.

◀

Nota bene Пространство $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ изоморфно пространству K_n^m $m \times n$ матриц.

Nota bene Размерность линейного пространства $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ равна

$$\dim \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y) = \dim_{\mathbb{K}} K_n^m = \dim_{\mathbb{K}} X \cdot \dim_{\mathbb{K}} Y = m \cdot n.$$

Теорема 2.3. Пусть $\varphi \in \text{End}(X)$ имеет в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ соответственно матрицы A и \tilde{A} . Тогда

$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T, \quad S = T^{-1}.$$

►

Вычислим образ $\varphi(\tilde{e}_k)$ двумя способами:

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{e}_k) &= \sum_{j=1}^n \tilde{a}_k^j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^j \tau_j^i e_i. \\ \varphi(\tilde{e}_k) &= \varphi \left(\sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \tau_k^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tau_k^j a_j^i e_i. \end{aligned}$$

Доказательство следует из равенства правых частей полученных выражений.

◀

|| Преобразованием подобия матрицы A называется преобразование вида:

$$A \mapsto T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad \det T \neq 0.$$

Nota bene Преобразование матрицы произвольного оператора $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ с матрицами перехода T_X и T_Y имеет вид:

$$\tilde{A} = T_Y^{-1} \cdot A \cdot T_X.$$

Nota bene При замене базиса матрица A линейного оператора φ подвергается преобразованию подобия.