

Конспект лекций (12-...)

Илья Астафьев

17 апреля 2023 г.

Содержание

1	Несобственный интеграл	3
1.1	Свойства несобственного интеграла	3
1.2	Интеграл с несколькими особыми точками	5
1.3	Интеграл от знакопостоянной функции	5
1.4	Интеграл от знакопеременной функции	6
1.5	Интеграл в смысле главного значения	8
1.6	<i>Полезные вещи</i>	9
2	Числовые ряды	11
2.1	Основные понятия	11
2.2	Свойства рядов	12
2.3	Положительные ряды	12
2.4	Интегральный признак Коши	16
2.5	Знакопеременные ряды	18

1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f(x) \in R_{loc}(E)$ - локально интегрируема на E , если $f \in R[a, b]$ для $\forall [a, b] \subset E$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $(b \in \mathbb{R} \cup +\infty)$

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx, \text{ при } \omega \in [a, b)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} F(\omega) - \text{несобственный интеграл}$$

Если $\lim F(\omega)$ конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится

- Если \int_a^b в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - I рода
- Если \int_a^b в \mathbb{R} - II рода

Если $f \notin R[a, \bar{b}]$, то \bar{b} называется *особой точкой* $f(x)$. Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - I \text{ рода } (+\infty \text{ особая точка})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} - II \text{ рода } (0 \text{ особая точка})$$

Если:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f(x)dx \Rightarrow \begin{cases} \in \mathbb{R}, \text{ то сходится,} \\ \notin \mathbb{R}, \text{ то расходится} \end{cases} \begin{cases} \pm\infty \\ \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^{+\infty}, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty}, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится при } \alpha < 1. \text{ Расходится при } \alpha \geq 1$$

1.1 Свойства несобственного интеграла

1. Линейность. $f, g \in R_{loc}[a, b)$

•

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

если

$$\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \bar{\mathbb{R}}$$

•

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

• **Следствие:**

Сходится + Сходится = Сходится

Сходится + Расходится = Расходится

Расходится + Расходится = ?

2. Монотонность. $f, g \in R_{loc}[a, b], f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \in \overline{R}$:
Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Аддитивность. $f \in R_{loc}[a, b], c \in (a, b)$:
Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

▷

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^c + \int_c^\omega = \int_a^c + \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_c^\omega$$

◀

4. Формула по частям. u, v — дифференцируема на $[a, b], u' v' \in R_{loc}[a, b]$

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) = uv \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$

5. Формула замены переменной. $f \in C[a, b], x = \phi(t) [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]. \phi$ — дифференцируема на $[\alpha, \beta], \exists \phi(\beta-0) = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \phi(t)$ в \overline{R}

Тогда:

$$\int_{\phi(\beta-0)}^{\phi(\alpha)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$$

и эти интегралы (не)существуют одновременно

▷

- (a) $\exists I_1 \in \overline{R},$

$$I_2 = \lim_{\omega \rightarrow \beta-0} \int_\alpha^\omega f(\phi) \cdot \phi' dt = \lim_{\omega \rightarrow \beta-0} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x)dx = I_1$$

- (b) $\exists I_2 \in \overline{R},$

$$I_1 = \lim_{\omega \rightarrow \phi(\beta-0)} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\omega)} f(x)dx$$

- Если $\phi(\beta-0) < b$, то очевидно
- Пусть $x_n \rightarrow \phi(\beta-0) = b, x_n \in [\phi(\alpha), b]$
для $\forall n \exists \gamma_n : \phi(\gamma_n) = x_n$
Докажем, что

$$\gamma_n \rightarrow \beta-0, \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

Если $\gamma \nrightarrow \beta-0$, то $\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 : \exists n \geq n_0$

$$\gamma_n < \beta - \varepsilon$$

$$\phi(\gamma_n) \leq \sup_{[\alpha, \beta-\varepsilon]} \phi < b$$

Отсюда следует, что $\phi(\gamma_n) \nrightarrow b$

Итак, для $\forall x_n \rightarrow \phi(\beta-0)$:

$$\int_{\phi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_n} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^{\beta-0} f(\phi) \cdot \phi'(t)dt$$

◀

1.2 Интеграл с несколькими особыми точками

1.

$$f \in R(a, b) \int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow a+0} \int_{\omega}^c f(x)dx + \lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_c^{\omega} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

где $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся}$$

2. Пусть f определена на (a, b) ; $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ кроме конечного числа точек. $C \in (a, b)$ называется особой точкой f , если $f \notin R[\alpha, \beta]$ для $\forall \alpha, \beta : a < \alpha < \beta < b$

$a(b)$ - особая, если $a = -\infty (b = -\infty)$ или $f \notin R[a, \alpha] \forall \alpha \in (a, b)$

Пусть $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$ - особые точки f на (a, b)

$c_0 = a, c_n = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx - \text{сходится} \forall i = 1 \dots n$$

Проблема: если пытаться взять существенно большие значения для b , то зачастую численный метод вычисления несобственного интеграла даст сильно неточное значение.

Например:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$\int_1^{10^6} \frac{dx}{x} = 6 \cdot \ln 10 \approx 13$$

$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x} = 10 \cdot \ln 10 \approx 23$$

1.3 Интеграл от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$ на $[a, b)$ **Теорема** . Пусть $F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx$ Тогда: 1. $F \uparrow$ 2. $\int_a^b f(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена

Доказательство:

1.

$$\omega_1 < \omega_2, f(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} = \int_a^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \geq F(\omega_1)$$

2. Очевидно

Теорема (признаки сравнения).

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a, b)$. Тогда

- Если $\int_a^b g(x)dx$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - сходится
- Если $\int_a^b g(x)dx$ - расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - расходится

2. $f \sim g$, при $x \rightarrow b - 0$. Тогда

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b-0$

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2} \text{ для } x \in (\delta, b)$$

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$$

1.4 Интеграл от знакопеременной функции

Теорема (Критерий Коши).

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ сходится \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow$$

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)dx. \exists \lim_{\omega \rightarrow b-0} F(\omega) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta : \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta |F(\delta_1) - F(\delta_2)| < \varepsilon$$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится абсолютно, если } \int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится}$$

Теорема .

Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится

Доказательство:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall \delta_1, \delta_2 > \Delta : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

Теорема (о сумме с абсолютно сходящимся интегралом).

Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, $f(x) = g(x) + h(x)$ на $[a, b)$ и $\int_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно. Тогда:

- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся абсолютно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба сходятся условно
- $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ - оба расходятся.

Доказательство:

$$|f| \leq |g| + |h|$$

Пример:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ & \delta_1 = \pi n, \delta_2 = 2\pi n \\ & \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \\ & \frac{1}{2\pi n} \cdot n \cdot \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} = \varepsilon \end{aligned}$$

Вопросы из чата:

Пусть $f \in R_{loc}[a, +\infty)$. Правда ли, что:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходится} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ответ: нет, неправда.

$$f \in C[a, +\infty), f \geq 0 \not\Rightarrow f(x) - \text{ограничена}$$

Теорема (Признак Абеля-Дирихле).

Пусть $f(x) \in C[a, b)$, $g(x) \in C^1[a, b)$. Тогда для сходимости $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ достаточно одной пары условий

- Признак Дирихле

1. $F(\omega) = \int_a^\omega g(x) dx$ - ограничена
2. $g(x)$ монотонна и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

- Признак Абеля:

1. $\int_a^b f(x) dx$ сходится
2. $g(x)$ монотонна и ограничена

▷

1. Дирихле: $F'(x) = f(x)$

Критерий Коши: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b)$

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) \cdot g(x) dx \right| = \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) d(F) \right| = \left| g(x) \cdot F(x) \right|_{\delta_1}^{\delta_2} = \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} F(x) \cdot g'(x) dx \right| \leq$$

$$\leq C \cdot (|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|) + C \cdot \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)| dx \right| \leq 2C(|\delta_1| + |g(\delta_2)|) \leq 4C \cdot \varepsilon$$

2. Абель: т.к. $g(x)$ - монотонна и ограничена \Rightarrow

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = A \in \mathbb{R}$$

$$g(x) - A - \text{монотонна и } \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$$

Рассмотрим

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot (g - A) dx + A \cdot \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \text{сходится по Дирихле}$$

◀

Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$f(x) = \sin(x);$$

$$F(\omega) = \int_0^\omega \sin(x) dx = 1 - \cos(\omega) - \text{ограничена};$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ и } \downarrow$$

Отсюда следует, что:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \text{сходится}$$

1.5 Интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^c + \int_c^{+\infty} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b$$

Из того, что мы знаем на данный момент, мы делаем вывод, что интеграл рас-
ходится. Чтобы учитывать подобные ситуации, вводят понятие:

Определение. Пусть $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда $v.p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$

Определение. Пусть $f \in R_{loc}([a, b] \setminus \{c\}) \Rightarrow v.p \int_a^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$

Лемма. Если сходится \int_a^b , то сходится и $v.p \int_a^b = \int_a^b$.

1.6 Полезные вещи

1. Интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

▷

$$e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(x^2 + 1)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx \leq \int_{-1}^1 e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}$$

В левой части делаем замену $x = \sin(t)$, в правой части сделаем замену $\tan(t)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(t) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = ?$$

$$2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

Делаем замену $t = \sqrt{k} \cdot x$

$$\frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi \cdot \frac{2k \cdot \sqrt{k}}{(2k-1)} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

◀

2. Теорема (Неравенство Гёльдера).

Пусть $f, g \in R[a, b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$



$$a_k = f(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$$
$$b_k = g(\xi_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$$



2 Числовые ряды

2.1 Основные понятия

Определение. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$. Числовым рядом с общим членом a_n называется символ вида:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Определение. Для ряда $\sum a_k$ определим $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - последовательность частичных сумм.

Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$ ($\notin \mathbb{R}$), то $\sum a_n$ называется сходящимся (расходящимся).

Пример:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ расходится

Определение. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$ называется n -ным остатком ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$

Лемма. Ряд $\sum a_k$ - сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ - сходится, для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Лемма. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Leftrightarrow R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

\triangleright Пусть $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. $R_n = S - S_n$ \blacktriangleleft

Теорема (Необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ $\triangleright a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0$

\blacktriangleleft

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{гармонический ряд}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

2.2 Свойства рядов

1. Линейность

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходятся, то сходится и ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Монотонность

Если $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2.3 Положительные ряды

Рассмотрим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

Лемма. Если $a_n \geq 0$, то

- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup S_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничена

.

Теорема (Признаки сравнения).

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда:

1. $\sum b_n$ - сходится $\Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $\sum a_n$ - расходится $\Rightarrow \sum b_n$ - расходится
3. Пусть $a_n, b_n \geq 0, a_n \sim b_n$.

Тогда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ оба сходятся или оба расходятся. $\triangleright \frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n \blacktriangleleft$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

Теорема (Радикальный признак Коши).

Пусть $a_n \geq 0$, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то $\sum a_n$ расходится
2. Если $l < 1$, то $\sum a_n$ сходится

Notabene. Если $l = 1$, ?.

$$\sum \frac{1}{n} - \text{расходится}, \quad \frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

Доказательство. ·

1. $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1$ н.с.н.н

$$a_n > 1 \Rightarrow \Rightarrow a_n \nrightarrow 0$$

2. Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0$$

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

$$a_n < q^n$$

$$\sum q^n - \text{геометрическая прогрессия } 0 < q < 1$$

Теорема (признак Даламбера).

Пусть $a_n > 0$, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то $\sum a_n$ расходится
2. Если $l < 1$, то $\sum a_n$ сходится

▷

1. $l > 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n \rightarrow 0$
2. $l < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{l+1}{2}$ при $n \geq n_0$
 $a_{n+1} < q \cdot a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+k} < q_k \cdot a_{n_0}$



Notabene.

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = l$
2. *Радикальный признак Коши "сильнее"*
признака Даламбера:
т. е. если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n}$$

Даламбер:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

Коши:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((-1)^{n+1} + 2) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot ((-1)^n + 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} + 2}{(-1)^n + 2} \Rightarrow \nexists \lim$$

Пример:

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N (\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n) = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 = +\infty - \text{расходится} \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа:

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = (\ln \ln x)'(\xi) = \frac{1}{\xi \ln \xi} < \frac{1}{n \ln n}$$

$$\xi \in (n, n+1) \Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln n} - \text{расходится}$$

Теорема (признак Куммера).

Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\sum \frac{1}{b_n}$ - расходится.

Пусть $\exists l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right)$ Тогда:

1. $l > 0 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $l < 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится

▷

1. Н.с.н.н:

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} > \frac{l}{2} \cdot a_{n+1} > 0$$

Давайте докажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$

$a_n \cdot b_n \downarrow$ и ограничен снизу

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1}) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 \cdot a_1 - b_{N+1} \cdot a_{N+1}) \in \mathbb{R} - \text{сходится} \Rightarrow \sum a_n - \text{сходится} \end{aligned}$$

2. Н.с.н.н

$$\begin{aligned} b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \geq n_0 &\Rightarrow b_n \cdot a_n \uparrow \Rightarrow \\ \Rightarrow a_n \cdot b_n \geq a_{n_0} \cdot b_{n_0} = C > 0 &\Rightarrow a_{n+1} > \frac{b_n \cdot a_n}{b_{n+1}} \geq \frac{C}{b_{n+1}} - \text{расходится} \end{aligned}$$

◀ *Notabene.* при $b_n = 1$: Даламбер. .

Теорема (Признак Раабе).

Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l$. Тогда:

1. $l > 1$, то $\sum a_n$ - сходится
2. $l < 1$, то $\sum a_n$ - расходится

▷ Используем признак Куммера: $b_n = n$ ◀

Теорема (Признак Бертрана).

Пусть $a_n > 0$. $\exists l = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$

1. $l > 0 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится
2. $l < 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится

▷ Используем признак Куммера: $b_n = n \cdot \ln n$ ◀

Теорема (Признак Гаусса).

Пусть $a_n > 0$. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$, $\gamma > 0$.

Тогда:

1. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится (Доказывать по Даламберу)
2. $\lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - расходится (Доказывать по Даламберу)
3. $\lambda = 1$, $\mu > 1$, то $\sum a_n$ - сходится (Доказывать по Раабе)
4. $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$, то $\sum a_n$ - расходится (Доказывать по Раабе: $\mu < 1$, по Бертрону: $\mu = 1$)

2.4 Интегральный признак Коши

Теорема (Интегральный признак Коши).

Пусть $f(x)$ - монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ и } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ оба (ра-)сходятся}$$

▷ Пусть $f \downarrow$

1. Если $f(x) < 0$ на $(a, +\infty)$

Тогда $\sum f(n)$ расходятся, так как $f(n) \nrightarrow 0$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx < (\delta_2 - \delta_1) \cdot f(a) \rightarrow -\infty - \text{расходится.}$$

Критерий Коши не выполнен.

2. Пусть $f(x) > 0$:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \mid n = 1..N$$

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n)$$

Notabene. Верно ли, что если

$F(N) = \int_1^N f(x) dx$ и $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} F(N)$ ($N \in \mathbb{N}$), то $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ - сходится?

Ответ: Если $f(x) \downarrow$, то да. Иначе - нет.

◀ Пример:

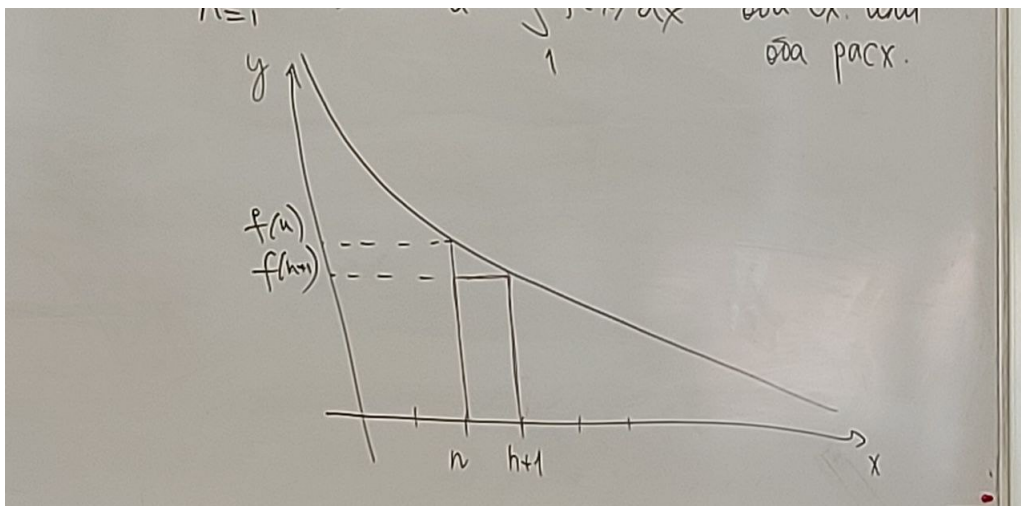


Рис. 1: График с лекции

Проэкспериментируем с интегральным признаком:

$$\sum \frac{1}{n \ln n} - ?$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = F(\ln \ln(\infty)) - F(\ln \ln(2)) = +\infty \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

Лемма. (о сравнении ряда и интеграла).

Пусть $f(x) \geq 0, \downarrow$ на $[1, +\infty)$. Тогда

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \text{ имеет предел в } \mathbb{R}$$

▷ Рассмотрим

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0 \Rightarrow A_n \uparrow$$

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=1}^n f(k+1) - \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathbb{R}$$

◀

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = A_n + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = A_n + \ln(n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \sim \ln(n+1) \sim \ln n, \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), (A_n \rightarrow \gamma \approx 0.58 - \text{Постоянная Эйлера-Маскерони})$$

2.5 Знакопеременные ряды

Определение.

$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ сходится

$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum |a_n|$ расходится $\sum a_n$ сходится

Лемма. Если $\sum |a_n|$ - сходится, то $\sum a_n$ сходится.

Теорема .

$a_n = b_n + c_n$, $\sum c_n$ - сходится абсолютно. Тогда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково

▷ никак ◀

Лемма. (Преобразования Абеля).

Пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

▷ Пусть $a_0 = 0$.

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1})b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} \cdot b_k$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$



Теорема (Признак Дирихле-Абеля).

Для сходимости $\sum_k^\infty a_k \cdot b_k$ достаточно выполнения одной из двух пар условий:

Признак Дирихле:

1. $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - ограничены
2. $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ - монотонно

Признак Абеля:

1. $\sum_k^\infty a_k$ - сходится
2. b_n - ограничено и монотонно



1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k &= A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^n A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) \\ \sum_{k=1}^n |A_n(b_k - b_{k+1})| &\leq C \cdot \sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| = C \cdot |b_1 - b_{n+1}| \rightarrow C \cdot b_1 \Rightarrow \\ &\exists \lim \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \end{aligned}$$

2. Сами

◀ Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

- $a_n = (-1)^n$
- $b_n = \frac{1}{n} \downarrow \rightarrow 0$
- $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = 0$ или 1

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{сходится, но не абсолютно}$$

Еще:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

Теорема (Признак Лейбница).

Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n \geq 0$$

Если $a_n \rightarrow 0$ и \downarrow , то ряд сходится.

▷

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$$

$$S_{2n} \uparrow$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1 \Rightarrow S_{2n} \text{ имеет предел}$$

Пусть $S_{2n} \rightarrow S$. Тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \rightarrow S + 0 = S \Rightarrow S_n \rightarrow S$$

◀ Следствие: $S \leq a_1, |R_n| \leq a_{n+1}$