$$f(x) = \begin{cases} \min\{\frac{3}{4}, \max\{\frac{1}{4}, (x^2-1)^2\}\}, & (x)_{10} \text{ содержит } 31415 \\ \sin x & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E = [0,5], \quad F(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0,2] \\ x[x] & x \in (2,5] \end{cases}$$

Аналитический метод:

① $\measuredangle\ A = \{x \in E \mid (x)_{10}$ содержит подстроку „31415"$\}$

$\exists\ A_n$ – множество чисел из $[0,5]$ таких, что послед. „31415" начинается с позиции n после 0 (0.31415 при $n=0$ и т.д.)

Рассмотрим структуру A_n:

$A_0 = [0.31415, 0.31416)$ – мера $f(x) \cdot 10^{-5}$

$A_1 = [0.i31415, 0.i31416)$, где $i = 0 \ldots 9$ – мера $f(x) \cdot 10^{-6} \cdot 10$

⋮

При $A_5 = [0.iiiii31415, 0.iiiii31416)$, где $iiiii = 00000 \ldots 99999$ начнутся повторы $(0.31415(\ldots))$ – тогда мера: $f(x) \cdot 10^{-10} \cdot (100000 - 1)$

⋮

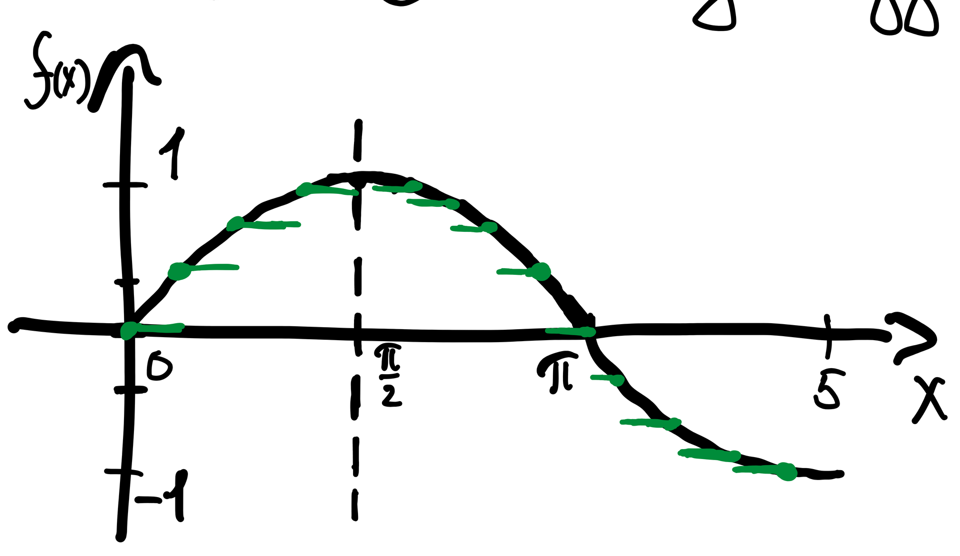
При $n \to +\infty$ повторов будет становится всё больше

$\Rightarrow \lambda(A_n) \to 0$

Тогда, по аналогии с мн-вом Кантора, $\forall \varepsilon > 0: \lambda(A) < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ По C-свойству Лузина $f(x)$ измерима по Лебегу

②



Поделим множество значений $\sin x$ на E на n частей и зададим $f_n(x)$

Рассмотрим промежутки монотонности $\sin x$ на E:

1) На $[0, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{3\pi}{2}, 5]$ промежутки будут покрывать x-ы из $[\arcsin(\frac{2i}{n}-1), \arcsin(\frac{2i+2}{n}-1))$.

2) На $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ – будут покрывать $[\arcsin(\frac{2i+2}{n}-1), \arcsin(\frac{2i}{n}-1))$.

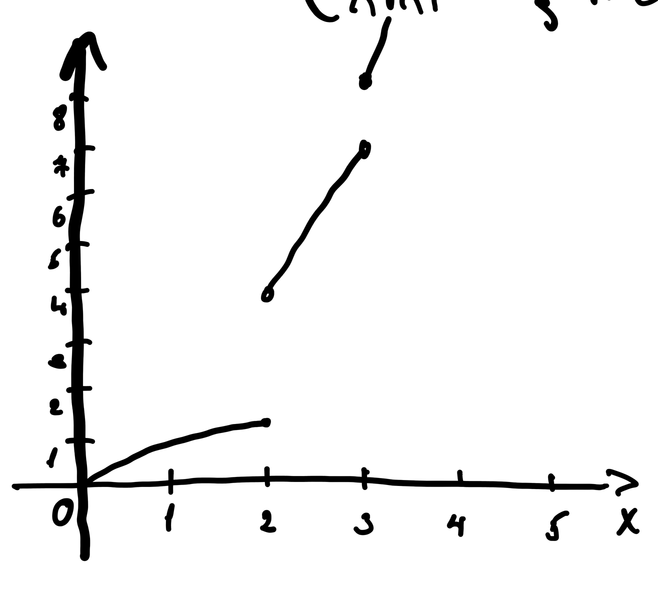
Таким образом, выбрав простые ф-ии как кусочки значения синуса: $f(x) = \frac{2i}{n} - 1$, где i – номер отрезка и „генерируя" этой ф-ии пользуемся 1 и 2

$\Longrightarrow$ При $n \to +\infty$ каждая ф-я будет „отвечать" за ε кусочки и, очевидно, $f_n \leq f$ и $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$

③ $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,5]} f_n \, d\lambda = \int_{[0,5]} f \, d\lambda$ по т. Леви

$\int_{[0,5]} f \, d\lambda \underset{\text{по т. о связи инт. Р. и Л.}}{=} \int_{[0,5]} f \, dx = \int_{[0,5]} \sin x \, dx = 1 - \cos 5$

④ $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0,2] \\ x[x], & x \in (2,5] \end{cases}$



$F(x)$ не убывает, а $x[x]$ очевидно непрерывна слева

$\Longrightarrow$ по опр. (мера)

⑤ $\int_E f \, d\mu_F = \int_{[0,2]} f \, d\mu_F + \int_{(2,3]} f \, d\mu_F + \int_{(3,5]} f \, d\mu_F \approx -7.9211..$

Численный метод:

Рез-ты в реп.-ии.

Вывод: В лаб. работе мы научились приближать ф-ии простыми и с их помощью считать инт. Лебега, а также вычислять инт. Лебега-Стилтьеса.