Отчет по лабораторной работе №3

Дисциплина: Математическое моделирование

Боровикова Карина Владимировна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является создание модели боевых действий с помощью языков Julia и OpenModelica. Построить соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

2 Задание

- Рассмотреть два случая ведения боевых действий:
  1. Модель боевых действий между регулярными войсками;
  2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов;
- Построить графики изменения численности войск армии X и армии У для соответствующий случаев.

3 Теоретическое введение

В данной лабораторной работе мы будем использовать простейшие модели боевыхх действий Ланчестера. В битве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим два случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками;

2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

Первый случай

Численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);

- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);

- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Второй случай

В борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан [1].

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответстующий номеру студенчесткого билета вариант: 1032201748 % 70 = 18

2. Условие задачи является следующим:

Между страной и страной идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 105 000 человек, а в распоряжении страны армия численностью в 95 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем, что $P(t)$ и $Q(t)$ - непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск врмии X и армии Y для следующих случаев:

- Модель боевых действий между регулярными войсками (формула [4.1]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.35x(t) - 0.45y(t) + 2\sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.69x(t) - 0.61y(t) + \cos(t) + 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

- Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (формула [4.2]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.35x(t) - 0.73y(t) + 2\sin(2t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.45x(t)y(t) - 0.41y(t) + \cos(t) + 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

3. Для начала рассмотрим первый случай.

Нам известно, что модель боевых дейтсвий между регулярными войсками описывается следующим образом (формула [4.3]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны и соответственно, $a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам и в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (формула [4.4]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases} \tag{4.4}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение ([4.5]):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{by}{cx} \\ cxdx &= bydy \\ cx^2 - by^2 &= C \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. [4.1]). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

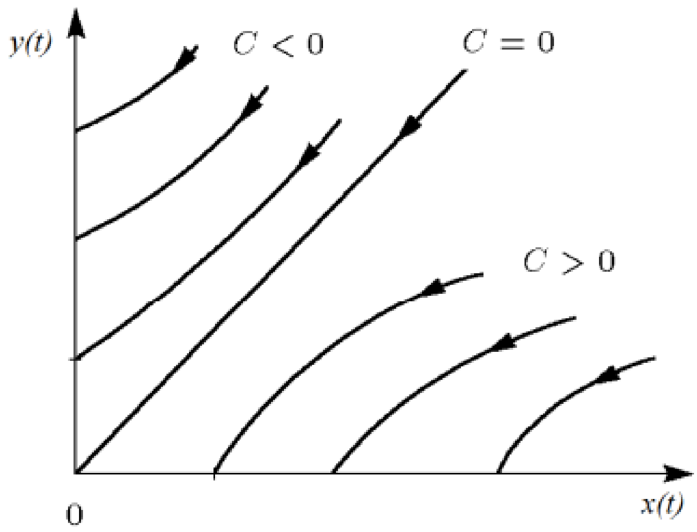

Рис. 4.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

4. По условию задачи в первом случае мы меем следующие начальные значения:

- $x_0 = 105000$ - численность первой армии
- $y_0 = 95000$ - численность второй армии
- $a = 0.35$ - константа, характеризующая степень влияния различных факторов на потери

- $b = 0.45$ - эффективность боевых действий армии y
- $c = 0.69$ - эффективность боевых действий армии x
- $h = 0.61$ - константа, характеризующая степень влияния различных факторов на потери

На языке Julia получаем следующий код:

```
using Plots
    using DifferentialEquations
    x⊠ = 105000
    y⊠ = 95000

    #= Потери, не связанные с боевыми действиями страны X=#
    a = 0.35
    #= Эффективность боевых действий стороны Y=#
    b = 0.45
    #= Эффективность боевых действий армии X=#
    c = 0.69
    #= Потери, не связанные с боевыми действиями страны Y=#
    h = 0.61

    #= Возможность подхода подкрепления к армии X =#
    P(t) = 2*sin(t)
    #= Возможность подхода подкрепления к армии Y =#
    Q(t) = cos(t) + 1

    u⊠ = [x⊠, y⊠]
    p = (a, b, c, h)
    T = [0, 5]
```

```
    function F(d, u, p, t)
        a, b, c, h = p
        d[1] = -a*u[1] - b*u[2] + P(t)
        d[2] = -c*u[1] - h*u[2] + Q(t)
    end

    prob = ODEProblem(F, u⊠, T, p)
    sol1 = solve(prob)

    plt = plot!(
    sol1,
    vars =(0, 1),
    color =:red,
    label ="Страна X",
    title ="Модель боевых действий",
    xlabel ="Время",
    ylabel ="Численность"
    )

    plot!(
    sol1,
    vars =(0, 2),
    color =:green,
    label ="Страна Y"
    )

savefig(plt, "pt1.png")

end
```

Результат выполнения данного кода представляет собой файл 3.png (рис. [4.2])

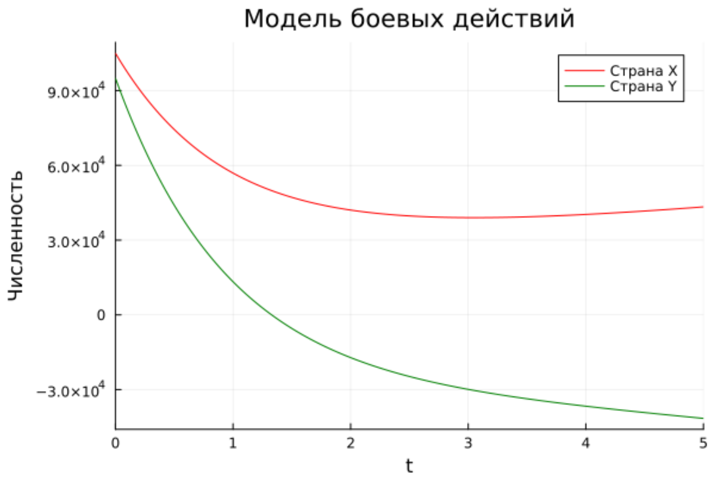

Рис. 4.2: Результат выполнения кода на Julia для части 1

Далее пишем код на OpenModelica:

```
model om1 "War"

parameter Integer x0 = 105000;
parameter Integer y0 = 95000;

parameter Real a = 0.35;
parameter Real b = 0.45;
parameter Real c = 0.69;
parameter Real h = 0.61;

Real P;
Real Q;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
```

```
equation
P = 2*sin(time);
Q = cos(time)+1;

der(x) = - a * x - b * y + P;
der(y) = - c * x - h * y + Q;

end om1;
```

Результат выполнения данного кода представляет собой файл 5.png (рис. [4.3])

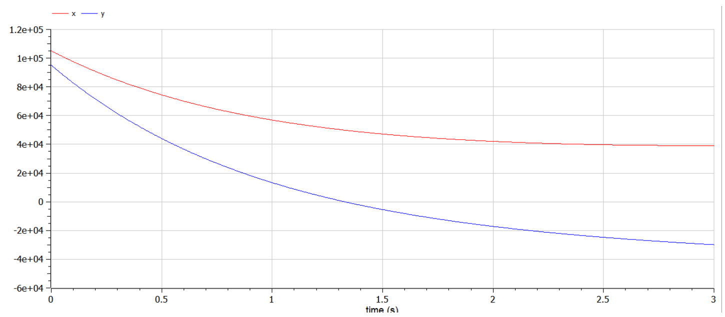

Рис. 4.3: Результат выполнения кода на OpenModelica для части 1

5. Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (формула [4.6]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в системе [4.3].

С теми же упрощениями, что и в первом случае, модель [4.6] принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

Эта система приводится к уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0 \tag{4.8}$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1 \tag{4.9}$$

Из рис. [4.2] видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент с и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$) , должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется прим меньшем росте начальной численности войск.

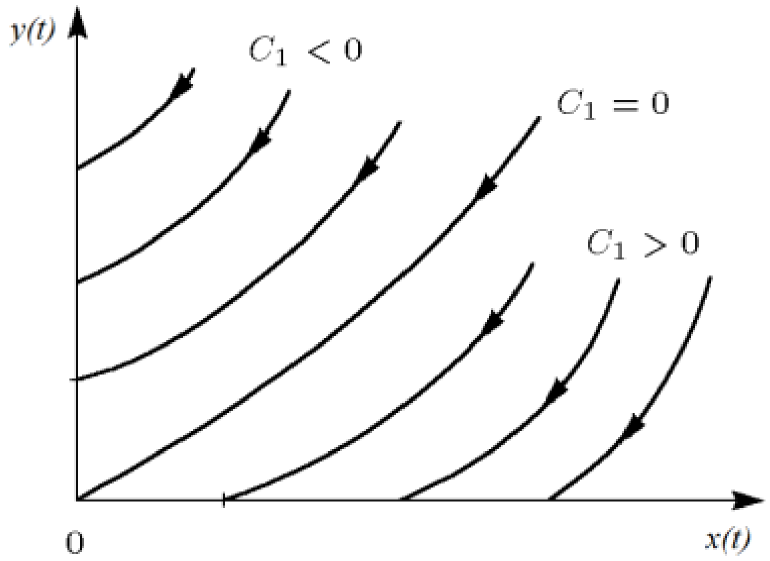

Рис. 4.4: Фазовные траектории системы

6. По условию задачи во втором случае мы меем следующие начальные значения:

- $x_0 = 105000$ - численность первой армии
- $y_0 = 95000$ - численность второй армии
- $a = 0.35$ - константа, характеризующая степень влияния различных факторов на потери
- $b = 0.73$ - эффективность боевых действий армии y
- $c = 0.45$ - эффективность боевых действий армии x
- $h = 0.41$ - константа, характеризующая степень влияния различных факторов на потери

На языке Julia получаем следующий код:

```
using Plots
  using DifferentialEquations
  x⊠ = 105000
  y⊠ = 95000
```

```
#= Потери, не связанные с боевыми действиями страны X=#
a = 0.35
#= Эффективность боевых действий стороны Y=#
b = 0.73
#= Эффективность боевых действий армии X=#
c = 0.45
#= Потери, не связанные с боевыми действиями страны Y=#
h = 0.41

#= Возможность подхода подкрепления к армии X =#
P(t) = 2*sin(2*t)
#= Возможность подхода подкрепления к армии Y =#
Q(t) = cos(t) + 1

u⊠ = [x⊠, y⊠]
p = (a, b, c, h)
T = [0, 5]

function F(d, u, p, t)
    a, b, c, h = p
    d[1] = -a*u[1] - b*u[2] + P(t)
    d[2] = -c*u[1]*u[2] - h*u[2] + Q(t)
end

prob = ODEProblem(F, u⊠, T, p)
sol = solve(prob)

plt = plot!(
```

```
    sol,
    vars =(0, 1),
    color =:red,
    label ="Страна X",
    title ="Модель боевых действий",
    xlabel ="Время",
    ylabel ="Численность"
    )

    plot!(
    sol,
    vars =(0, 2),
    color =:green,
    label ="Страна Y"
    )


savefig(plt, "pt2.png")
```

Результат выполнения данного кода представляет собой файл 4.png (рис. [4.5])

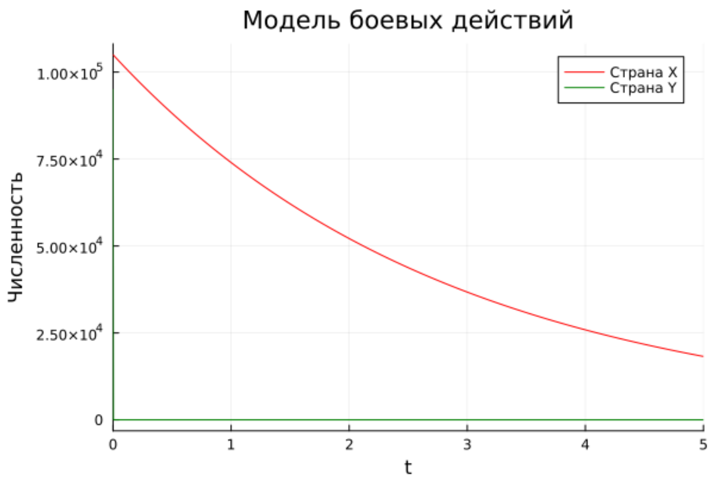

Рис. 4.5: Результат выполнения кода на Julia для части 1

Далее пишем код на OpenModelica:

```
model om2 "War"

parameter Integer x0 = 105000;
parameter Integer y0 = 95000;

parameter Real a = 0.35;
parameter Real b = 0.73;
parameter Real c = 0.45;
parameter Real h = 0.41;

Real P;
Real Q;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation
```

```
P = 2*sin(2*time);
Q = cos(time)+1;

der(x) = - a * x - b * y + P;
der(y) = - c * x * y - h * y + Q;

end om2;
```

Результат выполнения данного кода представляет собой файл 6.png (рис. [4.6])

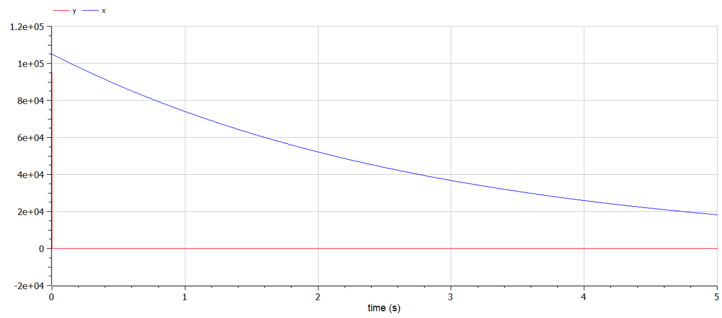

Рис. 4.6: Результат выполнения кода на OpenModelica для части 1

5 Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы мы создали модели боевых действий с помощью языков Julia и OpenModelica, а также построили соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

Список литературы

1. Лабораторная работа №2 [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971725/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%202.pdf.