



**WYDZIAŁ FIZYKI
i INFORMATYKI STOSOWANEJ**
Uniwersytet Łódzki

Mateusz Borowiec

Kierunek: informatyka

Specjalność: informatyka stosowana

Ścieżka dydaktyczna: Sztuczna inteligencja

Numer albumu: 382765

**Zastosowanie ABM do analizy procesu
formowania opinii w wielowymiarowej przestrzeni
opinii**

Praca magisterska

wykonana pod kierunkiem

Dr hab. Tomasz Gwizdała, prof. UŁ

W Katedrze Systemów Inteligentnych

WFiIS UŁ

Łódź 2024

Spis treści

1	Wstęp	5
2	Podstawy teoretyczne	7
2.1	Czym jest ABM?	7
2.2	Sieci społecznościowe	8
2.2.1	Elementy sieci społecznościowych	8
2.2.2	Rodzaje sieci społecznościowych	8
2.3	Sieć Erdős-Rényi	9
2.3.1	Definicja modelu Erdős-Rényi	9
2.3.2	Właściwości sieci Erdős-Rényi	9
2.3.3	Zastosowania sieci Erdős-Rényi	10
2.3.4	Ograniczenia modelu Erdős-Rényi	10
2.4	Sieć Barabási-Albert	11
2.4.1	Założenia modelu Barabási-Albert	11
2.4.2	Algorytm generowania sieci Barabási-Albert	11
2.4.3	Właściwości sieci Barabási-Albert	12
2.4.4	Zastosowania sieci Barabási-Albert	12
2.4.5	Ograniczenia modelu Barabási-Albert	14
2.5	Sieć Watts-Strogatz	15
2.5.1	Cechy modelu Watts-Strogatz	15
2.5.2	Algorytm generowania sieci Watts-Strogatz	15
2.5.3	Właściwości sieci Watts-Strogatz	16
2.5.4	Zastosowania sieci Watts-Strogatz	16
2.5.5	Ograniczenia modelu Watts-Strogatz	16
2.6	Diagram Nolana	17
2.6.1	Kontekst historyczno-naukowy	17
2.6.2	Opis diagramu Nolana	17
2.6.3	Zastosowanie i znaczenie diagramu Nolana	18
2.6.4	Krytyka diagramu Nolana	18
3	Praktyczna realizacja sieci społecznościowej	19
3.1	Opis sieci społecznościowej	19
3.1.1	Opis działania agenta	19

3.2	Implementacja sieci społecznej	20
3.2.1	Klasa Network	20
3.2.2	Klasa Agent	20
4	Symulacje i analiza wyników	21
4.1	Pierwsza symulacja	21
4.1.1	Aktualizacja opinii agenta	21
4.1.2	Rozkład trójkątny	21
4.2	Zwiększenie wpływu hubów, zmiana rozkładu	23
4.3	Współczynnik modyfikujący średnią rozkładu	25
4.4	Analiza współczynników modyfikujących średnią rozkładu	27
5	Podsumowanie	29
	Spis tabel	30
	Spis rysunków	30
.1	Załącznik: Publikacja	30
	Bibliografia	45

Rozdział 1

Wstęp

Rozdział 2

Podstawy teoretyczne

2.1 Czym jest ABM?

Agent-Based Modeling (ABM) to metoda symulacji, w której jednostki zwane agentami oddziałują ze sobą oraz z otoczeniem według zdefiniowanych reguł [1].

Każdy agent może mieć unikalne cechy, preferencje i zachowania, co umożliwia modelowanie różnorodności występującej w rzeczywistych systemach.

Dzięki tym interakcjom można badać złożone zachowania i wzorce, które wyłaniają się na poziomie systemu.

Globalne wzorce zachowań systemu wyłaniają się z interakcji między jednostkowymi agentami, co oznacza, że zachowanie całego systemu nie jest wprost zaprogramowane, ale wynika z lokalnych interakcji.

Agenci mogą uczyć się i dostosowywać swoje zachowania w odpowiedzi na zmieniające się warunki otoczenia lub na podstawie doświadczeń.

ABM ma wiele zastosowań w badaniach nad systemami złożonymi w wielu dziedzinach, takich jak:

- **Ekonomia i finanse:** Analiza zachowań konsumentów, rynków finansowych, decyzji inwestycyjnych oraz dynamiki makroekonomicznej [2].
- **Nauki społeczne:** Modelowanie procesów społecznych, takich jak dyfuzja innowacji, zachowania tłumu, ewolucja norm społecznych oraz migracje [3].
- **Biologia i ekologia:** Badanie dynamiki populacji, interakcji międzygatunkowych, rozprzestrzeniania się chorób oraz zachowań zwierząt [4].
- **Inżynieria i urbanistyka:** Symulacje ruchu drogowego, optymalizacja planowania urbanistycznego, zarządzanie infrastrukturą i systemami transportowymi [5].
- **Epidemiologia:** Modelowanie rozprzestrzeniania się chorób zakaźnych, skuteczności interwencji zdrowotnych, oraz dynamiki szczepień [6].

2.2 Sieci społecznościowe

Sieci społecznościowe to struktury złożone z jednostek (węzłów) oraz powiązań między nimi (krawędzi), które modelują relacje społeczne lub interakcje pomiędzy różnymi podmiotami.

Jednostkami w takich sieciach mogą być osoby, organizacje, grupy społeczne lub inne podmioty, a relacje między nimi mogą obejmować przyjaźnie, współpracę, przepływ informacji, wpływy lub inne formy interakcji społecznych.

2.2.1 Elementy sieci społecznościowych

Sieci społecznościowe można opisywać i analizować za pomocą teorii grafów, gdzie węzły odpowiadają aktorom społecznym, a krawędzie – relacjom między nimi [7].

W teorii grafów sieć społeczna jest grafem, który może być skierowany lub nieskierowany, w zależności od tego, czy relacje między węzłami są wzajemne, oraz ważony, gdy krawędzie mają przypisane wartości liczbowe, odzwierciedlające np. siłę lub intensywność relacji między węzłami. Na przykład, w sieci znajomości wagi mogą odzwierciedlać częstotliwość interakcji.

Sieci często wykazują pewne struktury, w których węzły są bardziej gęsto połączone ze sobą niż z innymi częściami sieci, tworząc tzw. społeczności [9].

Niektóre węzły w sieci mogą odgrywać również bardziej centralną rolę, np. poprzez łączenie wielu innych węzłów lub pośrednictwo w przepływie informacji [10].

2.2.2 Rodzaje sieci społecznościowych

- **Sieci egocentryczne:** Sieci, które koncentrują się na pojedynczym węźle (osobie lub organizacji) oraz jego bezpośrednich połączeniach. Analiza takiej sieci pokazuje, jak jednostka jest powiązana z innymi aktorami [11].
- **Sieci pełne:** Sieci, które obejmują całą grupę lub populację i badają relacje pomiędzy wszystkimi jednostkami w tej grupie. Są one szczególnie użyteczne do analizy struktur globalnych, takich jak hierarchie czy przepływy informacji [12].
- **Sieci jednopoziomowe:** W tego rodzaju sieciach każdy węzeł reprezentuje ten sam typ jednostek, np. osoby lub organizacje, a krawędzie to relacje między nimi [8].
- **Sieci dwupoziomowe:** Sieci te zawierają dwa typy węzłów, np. osoby i wydarzenia, a krawędzie reprezentują uczestnictwo danej osoby w wydarzeniu [13].

- **Sieci dynamiczne:** Sieci, w których relacje między węzłami mogą zmieniać się w czasie.

Tego typu sieci są szczególnie przydatne w badaniu ewolucji grup społecznych, migracji czy zmian w przepływie informacji [14].

W pracy przeanalizowane zostaną najważniejsze modele losowych grafów: model Erdős-Rényi, model Barabási-Albert, oraz model Watts-Strogatz.

2.3 Sieć Erdős-Rényi

Model sieci Erdős-Rényi (ER) jest jednym z najprostszych i najwcześniejszych modeli matematycznych do generowania losowych sieci.

Nazwa pochodzi od nazwisk dwóch matematyków, Paula Erdősa i Alfréda Rényi, którzy w 1959 roku zaproponowali ten model [15]. Model ten jest często stosowany jako punkt odniesienia w analizie sieci i badaniach naukowych dotyczących struktur sieciowych.

2.3.1 Definicja modelu Erdős-Rényi

Istnieją dwie podstawowe wersje modelu Erdős-Rényi:

- **Model $G(n, M)$:** Dany jest zbiór n węzłów, a następnie losowo wybierane jest dokładnie M krawędzi spośród wszystkich możliwych par węzłów. Każda z M krawędzi jest dodawana niezależnie.
- **Model $G(n, p)$:** Dany jest zbiór n węzłów, a każda para węzłów jest połączona krawędzią z prawdopodobieństwem p , niezależnie od innych par. Ostateczna liczba krawędzi w tej wersji jest zmienną losową.

Najczęściej stosowaną wersją jest model $G(n, p)$, który jest bardziej intuicyjny i daje większą elastyczność w kontroli gęstości sieci.

2.3.2 Właściwości sieci Erdős-Rényi

- **Rozkład stopni węzłów:** W modelu $G(n, p)$ stopień każdego węzła jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $\binom{n-1}{p}$. Dla dużych n rozkład ten zbliża się do rozkładu Poissona o wartości [16]

$$\lambda = p(n - 1) \tag{2.1}$$

- **Średnia długość najkrótszej ścieżki:** W miarę wzrostu liczby węzłów n , średnia odległość między węzłami jest stosunkowo krótka, rzędu $\frac{\ln n}{\ln(np)}$, co jest typowe dla tzw. efektu „małego świata” [17].
- **Klasteryzacja:** W sieci Erdős-Rényi współczynnik klasteryzacji, czyli prawdopodobieństwo, że dwa węzły sąsiadujące z danym węzłem są również połączone ze sobą, jest rzędu p i nie zależy od lokalnych struktur [18].
- **Pojawienie się gigantycznego składnika:** W modelu $G(n, p)$ istnieje próg

$$p_c = \frac{1}{n} \quad (2.2)$$

powyżej którego zaczyna się tworzyć tzw. gigantyczny składnik – duża, spójna część sieci obejmująca znaczną część węzłów [19].

- **Losowy charakter:** Sieć nie posiada regularnej struktury, a rozmieszczenie krawędzi jest całkowicie losowe [16].

2.3.3 Zastosowania sieci Erdős-Rényi

Model Erdős-Rényi stanowi podstawę teoretyczną do badań nad sieciami losowymi i służy jako punkt odniesienia w analizie bardziej złożonych struktur sieciowych. Choć rzadko spotyka się go w rzeczywistych sieciach (np. sieciach społecznościowych, biologicznych, komputerowych), pomaga on zrozumieć, jak różnią się rzeczywiste sieci od struktur losowych [17].

2.3.4 Ograniczenia modelu Erdős-Rényi

Model Erdős-Rényi nie odzwierciedla dobrze wielu cech rzeczywistych sieci:

- **Mała klasteryzacja:** Rzeczywiste sieci często mają znacznie wyższy współczynnik klasteryzacji niż sieć ER. W sieciach rzeczywistych, takich jak sieci społecznościowe lub biologiczne, węzły są bardziej skłonne do tworzenia lokalnych grup (klastrow), czego model ER nie uwzględnia. Współczynnik klasteryzacji w modelu ER jest niski i wynosi $\sim \frac{1}{n}$, co nie odpowiada rzeczywistym sieciom [18].
- **Rozkład stopni węzłów:** W sieci ER stopnie węzłów mają rozkład zbliżony do Poissona, podczas gdy wiele rzeczywistych sieci charakteryzuje się rozkładem potęgowym (np. większość węzłów ma niski stopień, ale istnieje kilka węzłów o bardzo wysokim stopniu). Sieci składające się z takich węzłów, tzw. hubów, są typowe dla sieci bezskalowych, jak np. sieci WWW czy sieci społecznościowe, czego model ER nie jest w stanie odwzorować [20].

2.4 Sieć Barabási-Albert

Model Barabási-Albert (BA) to model sieci bezskalowej, gdzie stopnie węzłów podążają za rozkładem potęgowym. Model ten został zaproponowany przez Alberta-László Barabásiego i Rékę Alberta w 1999 roku [20] i jest jednym z najważniejszych modeli do opisu sieci rzeczywistych, takich jak sieci społecznościowe, internet, sieci metaboliczne i wiele innych.

2.4.1 Założenia modelu Barabási-Albert

Model BA opiera się na dwóch kluczowych mechanizmach:

- **Preferencyjne przyłączanie:** Nowe węzły mają większe prawdopodobieństwo połączenia się z węzłami, które już mają wiele połączeń. Oznacza to, że „bogaci stają się bogatsi” - węzły o wysokim stopniu przyciągają więcej nowych połączeń.
- **Wzrost:** Sieć rozwija się w czasie, przy czym do istniejącej sieci dodawane są nowe węzły, które tworzą połączenia z już istniejącymi węzłami.

2.4.2 Algorytm generowania sieci Barabási-Albert

Proces budowania sieci BA jest następujący:

1. **Inicjalizacja:** Rozpocznij od małej sieci początkowej składającej się z m_0 węzłów, które są połączone w pewien sposób.
2. **Dodawanie nowego węzła:** Na każdym kroku dodawany jest nowy węzeł, który tworzy $m \leq m_0$ krawędzi łączących go z już istniejącymi węzłami.
3. **Preferencyjne przyłączanie:** Prawdopodobieństwo, że nowy węzeł połączy się z istniejącym węzłem i , jest proporcjonalne do stopnia węzła k_i . Formalnie, prawdopodobieństwo to wynosi:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (2.3)$$

gdzie k_i to stopień węzła i , a suma w mianowniku przebiega przez wszystkie istniejące węzły w sieci.

Proces ten jest kontynuowany, aż sieć osiągnie oczekiwaną liczbę węzłów.

2.4.3 Właściwości sieci Barabási-Albert

Model Barabási-Albert opisuje sposób, w jaki sieci rozwijają się zgodnie z zasadą preferencyjnego przyłączania. Model ten ma pewne charakterystyczne właściwości:

- **Preferencyjne przyłączanie:** Nowo dodawane węzły mają większe prawdopodobieństwo połączenia się z węzłami, które już mają dużą liczbę połączeń. Oznacza to, że węzły z większą liczbą połączeń (tzw. huby) rosną szybciej, co prowadzi do tworzenia się kilku bardzo dobrze połączonych węzłów w sieci [20].
- **Rozkład potęgowy stopni węzłów:** Stopnie węzłów w sieci BA (liczba połączeń węzła) podążają za rozkładem potęgowym. Oznacza to, że większość węzłów ma niewiele połączeń, ale istnieje niewielka liczba węzłów o bardzo dużej liczbie połączeń. Rozkład ten charakteryzuje się rzadkim występowaniem węzłów o bardzo wysokim stopniu, co opisuje wzór:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (2.4)$$

gdzie $P(k)$ jest prawdopodobieństwem, że węzeł ma k połączeń, a γ jest parametrem rozkładu, zwykle w przybliżeniu równym 3 [20].

- **Skalowalność:** Sieci BA są *skalowalne*, co oznacza, że właściwości topologiczne sieci nie zależą od jej wielkości. Wzorce łączenia się węzłów pozostają podobne niezależnie od liczby węzłów w sieci, a sieć rozwija się zgodnie z tymi samymi regułami, niezależnie od jej rozmiaru [17].
- **Bezskalowość:** Sieci BA są sieciami *bezskalowymi*, co oznacza, że nie ma typowego rozmiaru węzła (stopnia węzła). Dominują węzły o małej liczbie połączeń, ale możliwe jest istnienie węzłów o bardzo wysokim stopniu, co różni je od sieci losowych z rozkładem Poissona [21].
- **Odporność na uszkodzenia losowe:** Sieci o strukturze BA są stosunkowo odporne na losowe usunięcie węzłów. Nawet po usunięciu dużej liczby losowo wybranych węzłów, sieć może nadal funkcjonować, ponieważ większość węzłów ma niewielką liczbę połączeń. Jednak sieć jest podatna na ukierunkowane ataki na huby, ponieważ ich usunięcie może prowadzić do fragmentacji sieci [22].

2.4.4 Zastosowania sieci Barabási-Albert

Model BA dobrze opisuje strukturę wielu rzeczywistych sieci, w tym:

- **Sieci internetowe:** Węzły reprezentują strony internetowe, a krawędzie — linki między nimi. Występuje kilka stron (hubów) mających bardzo dużą liczbę połączeń.

- **Sieci społecznościowe:** Węzły reprezentują osoby, a krawędzie ich relacje społeczne. Niektóre osoby (np. celebryci) mają znacznie więcej połączeń niż inne.
- **Sieci biologiczne:** W sieciach metabolicznych czy sieciach interakcji białek obserwuje się strukturę skali bez charakterystycznej wielkości.
- **Internet i sieci komputerowe:** Internet można modelować jako sieć BA, gdzie węzły reprezentują routery lub serwery, a krawędzie – połączenia między nimi. Zasada preferencyjnego przyłączania dobrze odzwierciedla sposób, w jaki nowe witryny internetowe łączą się z popularnymi stronami, tworząc kilka hubów, które odpowiadają głównym węzłom sieciowym [23].
- **Biologia i sieci metaboliczne:** Sieci BA mają zastosowanie w biologii, zwłaszcza w analizie sieci metabolicznych organizmów, gdzie metabolity (węzły) są połączone reakcjami enzymatycznymi (krawędzie). Takie sieci również wykazują rozkład potęgowy, z kilkoma metabolitami o bardzo dużej liczbie połączeń, co sprawia, że sieci metaboliczne są odporne na przypadkowe zakłócenia [24].
- **Ekonomia i finanse:** Model BA jest używany do opisu systemów ekonomicznych, takich jak sieci handlowe, gdzie firmy, instytucje finansowe lub rynki są węzłami, a ich wzajemne relacje, jak np. kontrakty, to krawędzie. W tych systemach preferencyjne przyłączanie odzwierciedla, jak większe firmy przyciągają więcej partnerów biznesowych, tworząc sieci z rozkładem potęgowym [25].
- **Nauka i sieci cytowań:** W badaniach naukowych model BA jest wykorzystywany do opisu sieci cytowań, gdzie węzłami są artykuły naukowe, a krawędzie oznaczają cytowania między nimi. Starsze, bardziej cytowane artykuły są częściej cytowane przez nowe prace, co tworzy strukturę sieci z kilkoma bardzo często cytowanymi artykułami w roli hubów [26].
- **Media społecznościowe:** Sieci BA są również stosowane w analizie sieci społecznych, takich jak Facebook, Twitter czy LinkedIn. Użytkownicy tych platform (węzły) tworzą połączenia (krawędzie) z innymi użytkownikami, a zasada preferencyjnego przyłączania powoduje, że popularni użytkownicy (huby) zdobywają jeszcze więcej połączeń, co prowadzi do powstawania struktur bezskalowych [27].

- **Propagacja informacji i epidemie:** Sieci BA znajdują zastosowanie w modelowaniu rozprzestrzeniania się informacji lub chorób w sieciach społecznych. Model BA może symulować, jak epidemie lub plotki szybko rozprzestrzeniają się przez kilka kluczowych węzłów (osób o wysokiej liczbie połączeń), co pomaga w opracowywaniu strategii kontroli lub przewidywania rozwoju epidemii [28].

2.4.5 Ograniczenia modelu Barabási-Albert

Mimo że model BA jest użyteczny, ma pewne ograniczenia:

- **Zbyt uproszczona struktura sieci:** Model BA zakłada, że nowe węzły łączą się tylko na podstawie preferencyjnego przyłączania, gdzie prawdopodobieństwo połączenia się z istniejącym węzłem zależy od liczby jego połączeń. W rzeczywistych sieciach istnieje jednak wiele innych czynników wpływających na tworzenie połączeń, takich jak geografia, interesy, zasoby, które model BA ignoruje [17].
- **Brak heterogeniczności w węzłach:** W modelu BA wszystkie węzły są traktowane jako jednorodne i mają te same właściwości poza liczbą połączeń. W rzeczywistości węzły różnią się wieloma cechami, takimi jak zdolności przetwarzania informacji, rola w sieci, czy preferencje, co może wpływać na sposób, w jaki tworzą połączenia [29].
- **Brak uwzględnienia ograniczeń topologicznych:** W modelu BA nie ma ograniczeń dotyczących liczby połączeń, które może mieć węzeł. W rzeczywistych sieciach, takich jak sieci społeczne czy biologiczne, istnieją fizyczne lub społeczne ograniczenia na liczbę relacji, które jeden węzeł może utrzymywać, co model BA pomija [30].
- **Zbyt prosty mechanizm wzrostu:** Sieci rzeczywiste rozwijają się często w sposób bardziej złożony, niż sugeruje to model BA. Wiele sieci rozwija się nie tylko poprzez przyłączanie nowych węzłów do istniejących, ale także poprzez usuwanie węzłów, zmiany w strukturze połączeń, czy tworzenie nowych krawędzi między istniejącymi węzłami, czego model BA nie uwzględnia [31].
- **Nierealność preferencyjnego przyłączania w pewnych kontekstach:** Zasada preferencyjnego przyłączania, na której opiera się model BA, zakłada, że węzły z większą liczbą połączeń zawsze przyciągają więcej nowych połączeń. W wielu przypadkach, np. w sieciach społecznych lub ekonomicznych, inne czynniki, takie jak reputacja, dostępność lub jakość zasobów, mogą odgrywać większą rolę niż sama liczba połączeń [32].

- **Brak dynamiki krawędzi:** W modelu BA nowe węzły dodają nowe krawędzie, ale nie ma możliwości modyfikowania istniejących połączeń ani usuwania starych. W rzeczywistych sieciach krawędzie mogą zanikać, np. w wyniku przestarzałych kontaktów, zmian w interesach lub rozwoju technologii [33].

2.5 Sieć Watts-Strogatz

Model sieci Watts-Strogatz (WS) jest jednym z kluczowych modeli do analizy zjawiska tzw. małego świata w sieciach. Został zaproponowany przez Duncana Wattsa i Stevena Strogatza w 1998 roku [18]. Model ten pozwala generować sieci, które łączą w sobie cechy zarówno sieci regularnych, jak i losowych, co czyni go użytecznym w opisie rzeczywistych sieci społecznych, biologicznych czy technologicznych.

2.5.1 Cechy modelu Watts-Strogatz

Sieci Watts-Strogatz charakteryzują się następującymi właściwościami:

- **Krótką średnią ścieżka:** Węzły są od siebie oddzielone przez stosunkowo małą liczbę połączeń, co jest charakterystyczne dla sieci „małego świata” [18].
- **Wysoki współczynnik klasteryzacji:** Węzły są silnie połączone z sąsiadami, tworząc lokalne grupy (kliki), co odpowiada klasteryzacji obserwowanej w rzeczywistych sieciach [18].
- **Efekt małego świata:** Sieć Watts-Strogatz stanowi pośrednią strukturę pomiędzy sieciami regularnymi (gdzie węzły są połączone według ustalonego wzorca) a sieciami losowymi (gdzie połączenia są tworzone przypadkowo) [18].

2.5.2 Algorytm generowania sieci Watts-Strogatz

Proces generowania sieci WS przebiega następująco:

1. **Konstrukcja pierścienia:** Rozpocznij od utworzenia regularnego pierścienia z n węzłami, gdzie każdy węzeł jest połączony z $k/2$ najbliższymi sąsiadami z każdej strony (czyli każdy węzeł ma k połączeń).
2. **Przełączanie krawędzi:** Dla każdej krawędzi łączącej węzeł i z węzłem j , losowo przełącz ją z prawdopodobieństwem p na nową krawędź, łącząc i z losowo wybranym węzłem m , pod warunkiem, że nie ma już połączenia między i a m .

Parametr p kontroluje stopień losowości w sieci:

- Dla $p = 0$ sieć jest całkowicie regularna.

- Dla $p = 1$ sieć staje się zupełnie losowa.
- Dla wartości $0 < p < 1$ sieć zachowuje zarówno wysoką klasteryzację, jak i krótką średnią ścieżkę, co odpowiada strukturze „małego świata”.

2.5.3 Właściwości sieci Watts-Strogatz

Sieci Watts-Strogatz charakteryzują się następującymi właściwościami:

- **Krótką średnią ścieżkę:** Węzły są od siebie oddzielone przez stosunkowo małą liczbę połączeń, co jest charakterystyczne dla sieci „małego świata” [18].
- **Wysoki współczynnik klasteryzacji:** Węzły są silnie połączone z sąsiadami, tworząc lokalne grupy (kliki), co odpowiada klasteryzacji obserwowanej w rzeczywistych sieciach [18].
- **Efekt małego świata:** Sieć Watts-Strogatz stanowi pośrednią strukturę pomiędzy sieciami regularnymi (gdzie węzły są połączone według ustalonego wzorca) a sieciami losowymi (gdzie połączenia są tworzone przypadkowo) [18].

2.5.4 Zastosowania sieci Watts-Strogatz

Model Watts-Strogatz jest wykorzystywany do analizy i modelowania struktur sieciowych w różnych dziedzinach, takich jak:

- **Sieci społecznościowe:** W sieciach społecznościowych znajomi często tworzą małe, silnie powiązane grupy, ale istnieją także połączenia z osobami spoza tych grup [18].
- **Sieci biologiczne:** Występuje w neuronowych sieciach mózgowych, gdzie niektóre neurony są bardziej skłonne do połączeń w lokalnych regionach, ale mają także połączenia do odległych obszarów [34].
- **Sieci komunikacyjne i transportowe:** Takie jak sieci elektryczne czy sieci lotnicze, które mają zarówno krótkie lokalne, jak i długodystansowe połączenia [35].

2.5.5 Ograniczenia modelu Watts-Strogatz

Chociaż model Watts-Strogatz odzwierciedla wiele cech rzeczywistych sieci, ma też pewne ograniczenia:

- **Rozkład stopni węzłów:** Sieć Watts-Strogatz nie tworzy rozkładu potęgowego stopni węzłów, co ogranicza jej zdolność do odzwierciedlania struktur sieci o charakterze bezskalowym [20].

- **Brak różnorodności w ewolucji sieci:** Model nie uwzględnia mechanizmu preferencyjnego przyłączania, który jest kluczowy w wielu rzeczywistych sieciach [17].

2.6 Diagram Nolana

Diagram Nolana jest narzędziem używanym do wizualizacji spektrum politycznego, które rozszerza tradycyjny, jednowymiarowy podział na lewicę i prawicę, wprowadzając dwuwymiarową analizę poglądów politycznych. Stworzony został przez amerykańskiego libertarianina Davida Nolana w 1970 roku [36].

Diagram ten zyskał popularność wśród osób poszukujących bardziej złożonego sposobu zrozumienia różnorodności ideologicznej, ponieważ uwzględnia zarówno kwestie ekonomiczne, jak i społeczne w analizie politycznej.

2.6.1 Kontekst historyczno-naukowy

Tradycyjne postrzeganie spektrum politycznego jako linii prostej — od skrajnej lewicy do skrajnej prawicy — zostało poddane krytyce przez badaczy, filozofów i działaczy politycznych, którzy zauważyli, że jednowymiarowy model jest niewystarczający do opisu złożoności ideologii politycznych. W latach 60. i 70. XX wieku pojawiło się zainteresowanie wielowymiarowym podejściem do analizy politycznej, co skłoniło Davida Nolana do opracowania bardziej złożonego modelu [36].

Nolan zauważył, że różne ideologie mają różne podejścia do kwestii wolności osobistej oraz wolności ekonomicznej. Jego dwuwymiarowy model pozwalał na bardziej precyzyjną identyfikację pozycji ideologicznych, zwłaszcza dla ideologii, które nie pasowały do tradycyjnej skali lewica-prawica, takich jak libertarianizm.

2.6.2 Opis diagramu Nolana

Diagram Nolana przedstawia spektrum polityczne jako kwadrat podzielony na cztery ćwiartki, które reprezentują różne orientacje polityczne:

- **Oś pozioma (wolność ekonomiczna):** Reprezentuje zakres kontroli państwa nad gospodarką. Na lewym końcu znajdują się poglądy opowiadające się za większym wpływem rządu na kwestie ekonomiczne (np. socjalizm), natomiast na prawym końcu są poglądy popierające wolny rynek i minimalną interwencję rządową (np. leseferyzm).
- **Oś pionowa (wolność osobista):** Przedstawia zakres swobód obywatelskich i społecznych. Na górnym końcu znajdują się ideologie popierające maksymalną wolność osobistą (np. libertarianizm), podczas gdy na dolnym końcu

znajdują się ideologie popierające większą kontrolę rządową nad życiem osobistym (np. autorytaryzm).

Pogranicze tych dwóch osi tworzy cztery główne obszary ideologiczne:

- **Libertarianizm (prawy górny róg):** Wysoka wolność osobista i ekonomiczna.
- **Autorytaryzm (lewy dolny róg):** Niska wolność osobista i ekonomiczna.
- **Lewica (lewy górny róg):** Wysoka wolność osobista, ale niska wolność ekonomiczna.
- **Prawica (prawy dolny róg):** Wysoka wolność ekonomiczna, ale niska wolność osobista.

2.6.3 Zastosowanie i znaczenie diagramu Nolana

Diagram Nolana jest używany do analizy i klasyfikacji poglądów politycznych w sposób, który uwzględnia wielowymiarową naturę ideologii. Pomaga on:

- **Rozszerzyć tradycyjne spektrum polityczne:** Pokazuje, że wiele ideologii nie pasuje do jednowymiarowego podziału na lewicę i prawicę, zwracając uwagę na to, że kwestie wolności osobistej i ekonomicznej mogą być od siebie niezależne.
- **Identyfikować złożone poglądy polityczne:** Umożliwia dokładniejszą identyfikację pozycji ideologicznych dla jednostek lub organizacji, których poglądy są bardziej złożone, niż proste podziały na lewicę i prawicę.
- **Wspierać edukację polityczną:** Jest używany jako narzędzie dydaktyczne do nauczania o różnorodności politycznej, pomagając zrozumieć, jak różne ideologie odnoszą się do wolności osobistej i ekonomicznej.

2.6.4 Krytyka diagramu Nolana

Mimo swojej popularności i użyteczności, diagram Nolana jest także przedmiotem krytyki:

- **Nadmierne uproszczenie:** Niektórzy badacze argumentują, że nawet model dwuwymiarowy nie oddaje pełni złożoności poglądów politycznych, które mogą obejmować wiele innych wymiarów, takich jak ekologia, polityka zagraniczna czy kwestie kulturowe [37].
- **Subiektywny wybór osi:** Oś wolności ekonomicznej i osobistej może nie być najważniejszym aspektem dla wszystkich osób, co sprawia, że model ten może nie być uniwersalny [38].

Rozdział 3

Praktyczna realizacja sieci społecznościowej

3.1 Opis sieci społecznościowej

Sieć społeczna wymieniona w tytule pracy ma za zadanie odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób formują się przekonania polityczne sieci społecznościowej. Zbadane zostały trzy rodzaje sieci społecznościowych: Barabási-Albert, Erdős-Rényi, Watts-Strogatz. Podstawą realizacji jest agent posiadający specyficzne właściwości. Współczynnik wpływu na innych wyraża, w jakim stopniu agent wywiera wpływ na opinie sąsiadów, a tym samym na działanie całej sieci. Elastyczność jednostki określa, w jakim stopniu sąsiedzi agenta są w stanie wpłynąć na zmianę jego opinii. Opinia początkowa definiuje położenie początkowe agenta na wykresie.

3.1.1 Opis działania agenta

Każdy agent ma następujące parametry:

Zmienna	Zakres wartości	Rozkład
Wpływ na innych	0-1	równomierny
Elastyczność jednostki	0,1-1	beta
Opinia początkowa	0-1	równomierny

Tabela 3.1: Parametry agenta

Ograniczenia wartości mają na celu uniknięcie sytuacji, w której agent mógłby wyjść poza zakres możliwych do uzyskania opinii, tzn. przedział od 0 do 1.

Cechy opisane w tabeli 3.1 mają następujące uzasadnienie:

- Wpływ na innych jest losowany z rozkładu równomiernego, żeby wyrównać szanse agentów na wpływ na innych.

- Opinia początkowa również jest losowana z rozkładu równomiernego, żeby w miarę możliwości równo rozłożyć opinie wszystkich agentów na początku istnienia sieci.
- Elastyczność jednostki jest losowana z rozkładu beta, żeby agenci byli bardziej skłonni do zmiany opinii. Przedział wartości rozpoczynający się od $0,1$ jest związany ze wzorem modyfikatora środka rozkładu podanym w 4.1.

3.2 Implementacja sieci społecznej

W pracy został wykorzystany język Python do implementacji sieci społecznych, zapisu wyników, oraz tworzenia wykresów obrazujących wyniki. Główną biblioteką wykorzystywaną do implementacji sieci społecznych jest biblioteka NetworkX [39]. Biblioteką do tworzenia wykresów została biblioteka Matplotlib [40]. Do odczytu oraz zapisu plików CSV została użyta biblioteka 'CSV' [41] ze standardowej biblioteki języka Python.

3.2.1 Klasa Network

Każda sieć społeczna składa się z klasy Graph z biblioteki NetworkX [39] oraz listy agentów przypisanych do każdego wierzchołka. Typ aktualizacji opinii jest również zdefiniowany w klasie. Ponadto, dla celów zapisu wyników, klasa zawiera nazwę sieci społecznej.

3.2.2 Klasa Agent

Każdy agent ma następujące parametry:

- Wpływ na innych (influence) - Osiąga wartości 0-1 i określa wartość wpływu na innych agentów
- Elastyczność (flexibility) - Osiąga wartości 0,1-1 i określa podatność agenta na zmianę opinii pod wpływem swoich sąsiadów
- Opinia (opinion) - Osiąga wartości 0-1 i określa wartość opinii agenta w zależności od opinii sąsiadów

Rozdział 4

Symulacje i analiza wyników

4.1 Pierwsza symulacja

4.1.1 Aktualizacja opinii agenta

Ewolucja sieci społecznościowej polega na zmianie opinii agentów, na bazie ich wewnętrznych właściwości oraz połączeń w obrębie sieci. Pozwalają one na wyznaczenie współczynników, które mają wpływ na środek rozkładu, z którego losowana jest nowa opinia.

Współczynniki użyte do aktualizacji opinii, poza parametrami agenta, są wymienione poniżej:

Zmienna	Zakres wartości
Średnia opinii sąsiadów	0-1
Udział sąsiadów agenta w populacji	0-1
Średnia wpływu sąsiadów	0-1

Tabela 4.1: Parametry aktualizacji opinii

4.1.2 Rozkład trójkątny

Rozkład, z którego była losowana nowa wartość agenta, jest rozkładem trójkątnym. Dolną granicę przedziału wyznacza niższa z dwóch wartości: obecna opinia agenta lub średnia opinii sąsiadów, wymieniona w tabeli 4.1. Górną granicą przedziału jest większa z nich. Centrum rozkładu C było wyznaczane wg poniższego wzoru:

$$C = (A_{ns} + N_{id}) * A_f \quad (4.1)$$

gdzie:

- A_{ns} - udział sąsiadów agenta w populacji (w tabeli 4.1)

- N_{id} - średnia wpływu sąsiadów (w tabeli 4.1)
- A_f - elastyczność agenta

Sumowanie średniej wpływu sąsiadów z udziałem sąsiadów agenta w populacji miało za zadanie spowodować, że na agenta z większą ilością sąsiadów wywierany jest większy wpływ. Z drugiej strony, na odizolowanych osobników wywierany jest mniejszy wpływ, co powoduje, że 'okopują' się oni w swoich poglądach. Z kolei elastyczność agenta we wzorze pozwala ograniczyć wpływ otoczenia na danego agenta.

Rezultat jest taki, że huby mają duży wpływ na bliskie poglądowo węzły, zacieśniając je coraz bardziej, natomiast węzły z małą liczbą sąsiadów przesuwały się w kierunku huba dużo wolniej.

Aktualizacja współrzędnych modelu była zmieniana w jednej iteracji równocześnie dla wszystkich węzłów w grafie. Za koniec ewolucji modelu uznajemy moment, w którym opinie wszystkich agentów mieszczą się w kwadracie o boku 0,1. Symulacje zostały uruchomione dla populacji 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 i 5000 agentów. Wyniki symulacji zostały przedstawione poniżej.

Populacja	Średnia liczba iteracji		
	Erdős-Rényi	Barabási-Albert	Watts-Strogatz
20	6,3	7,2	8,1
50	6,3	9,2	11,4
100	6,1	11,1	13,7
200	6,9	12,1	15,5
500	7,7	13,0	17,2
1000	8,1	14,4	19,0
2000	8,7	14,5	19,3
5000	9,6	15,0	19,9

Tabela 4.2: Wyniki symulacji wstępnej

W tabeli 4.2 przedstawione zostały wyniki symulacji wstępnej. Dla większej liczby agentów bardziej widać różnicę pomiędzy szybkością zbiegania agentów do centrum, jednak nie jest ona zbyt duża, ponieważ spodziewano się liczby około 20 iteracji dla rozmiaru populacji równego 5000. Ponadto okazało się, że czas zbiegania symulacji rośnie logarytmicznie względem wielkości populacji, co pozwala przewidzieć czas zbiegania dla danego rozmiaru populacji.

Nowy modyfikator środka rozkładu

W trakcie symulacji również kilkakrotnie program zamykał się z błędem. Okazało się, że wzór 4.1 pozwalał na uzyskanie wartości powyżej 1, co pokazano poniżej:

$$C = (A_{ns} + N_{id}) * A_f = ([0 - 1] + [0 - 1]) * [0 - 1] = [0 - 2] * [0 - 1] = [0 - 2] \quad (4.2)$$

Z tego powodu musiał zostać zmieniony. Nowy wzór modyfikatora środka rozkładu prezentuje się następująco:

$$C = \frac{N_{id} + A_{ns}}{2} * A_f \quad (4.3)$$

Aby pokazać, że nowy modyfikator środka rozkładu faktycznie uzyskuje wartości 0-1, przeprowadzony został następujący dowód:

$$C = \frac{[0 - 1] + [0 - 1]}{2} * [0 - 1] = \frac{[0 - 2]}{2} * [0 - 1] = [0 - 1] * [0 - 1] = [0 - 1] \quad (4.4)$$

Po zmianie wzoru aktualizacji opinii uzyskano następujące rezultaty:

Populacja	Średnia liczba iteracji		
	Erdős-Rényi	Barabási-Albert	Watts-Strogatz
20	6,1	7,9	7,4
50	5,5	9,1	10,4
100	6,5	11,2	13,7
200	6,9	11,4	15,0
500	7,7	12,1	17,2
1000	7,6	13,3	18,5
2000	8,4	14,5	18,8
5000	8,8	14,7	19,9

Tabela 4.3: Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów

Jak widać w tabeli 4.3, wyniki nie zmieniły się znacząco, natomiast błąd w programie przestał występować. Oznacza to, że należało upodobnić sieć bardziej do sieci rzeczywistej.

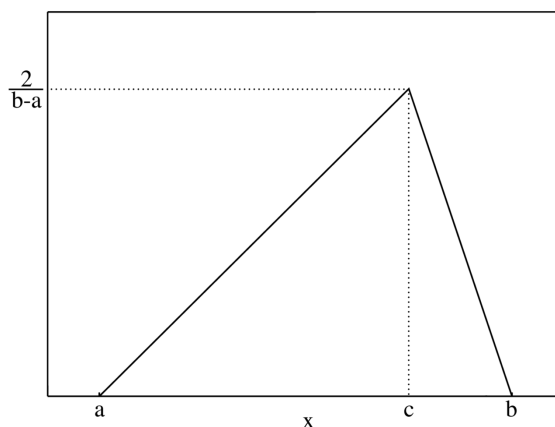
4.2 Zwiększenie wpływu hubów, zmiana rozkładu

Huby powinny mieć większy dar przekonywania. W celu uzyskania takiego efektu należało zwiększyć siłę oddziaływania węzłów z dużą liczbą sąsiadów. W związku z tym średnia opinii sąsiadów została zmieniona na średnią ważoną, gdzie wartościami wag będą współczynniki wpływu A_i każdego z nich. Spowoduje to zawężenie przedziału rozkładu, z którego jest losowana nowa wartość opinii. W związku z tą zmianą nowe wyniki symulacji wyglądają następująco:

Jak widać w tabeli 4.4, wyniki zmieniły się znacząco tylko dla sieci Watts-Strogatz, pozostałe sieci zbiegały mniej więcej tak samo szybko.

Populacja	Średnia liczba iteracji		
	Erdős-Rényi	Barabási-Albert	Watts-Strogatz
20	6,4	8,4	10,2
50	5,4	12,4	14,7
100	6,3	13,9	17,8
200	6,4	16,1	22,0
500	7,1	20,2	29,3
1000	8,0	21,1	35,7
2000	8,3	29,3	34,9
5000	8,3	14,7	41,9

Tabela 4.4: Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów



Rysunek 4.1: Rozkład trójkątny. Źródło: [42]

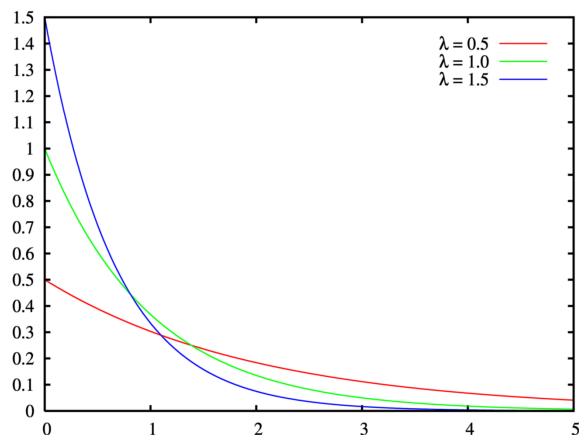
W związku z tym sposobem na spowolnienie zbiegania opinii do jednego punktu stała się zmiana rozkładu. Wybór padł na rozkład wykładniczy.

Rezultat zmiany rozkładu prezentowany jest w tabeli 4.5.

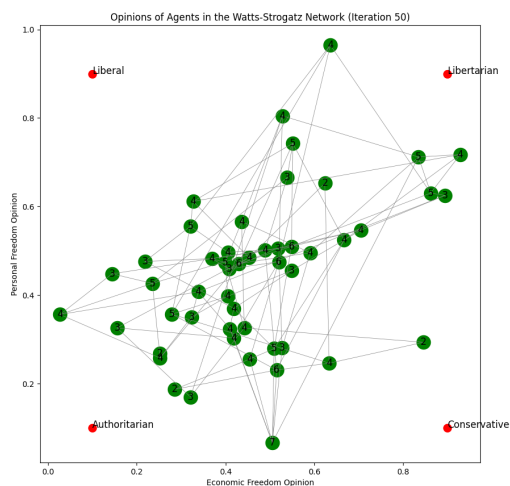
Populacja	Średnia liczba iteracji		
	Erdős-Rényi	Barabási-Albert	Watts-Strogatz
20	1420,6	1384,1	1526,6

Tabela 4.5: Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów

Jak widać w tabeli 4.5, przy użyciu rozkładu wykładniczego wyniki symulacji zmieniły się znacząco. Okazało się, że zaszła potrzeba ograniczenia populacji agentów, ponieważ opinie agentów przestały zbiegać w szybkim tempie. Oznacza to, że w tej postaci symulacji można będzie zaobserwować, jak kształtują się opinie agentów, i czy dochodzi do polaryzacji poglądów, tzn. skupienia się opinii w co najmniej dwóch hubach.



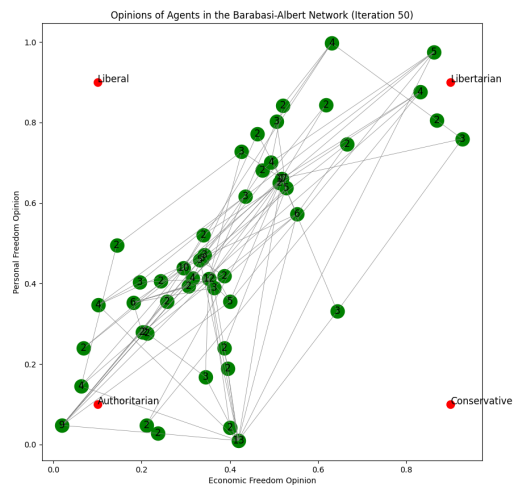
Rysunek 4.2: Rozkład wykładniczy. Źródło: [43]



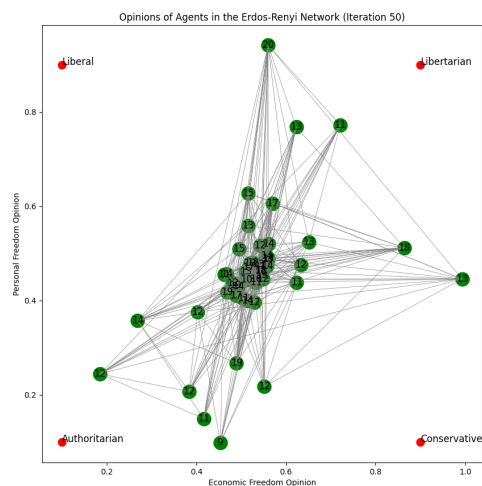
Rysunek 4.3: Sieć Watts-Strogatz w iteracji nr 50

4.3 Współczynnik modyfikujący średnią rozkładu

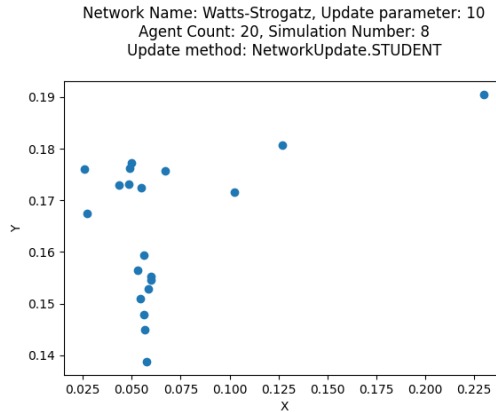
Dodatkowy współczynnik modyfikujący średnią rozkładu został dodany do funkcji aktualizującej opinię danego agenta. Okazało się, że współczynnik wynoszący 500 jest odpowiedni dla uzyskania więcej niż jednej zbieżnej grupy, przynajmniej dla sieci Watts-Strogatz [4.3] i Barabási-Albert [4.4]. W przypadku sieci Erdős-Rényi [4.5] nie powstaje więcej niż jedna grupa, raczej pojawiają się "orbitujące" elementy populacji, znacznie oddalone od głównej grupy. Dla mniejszych współczynników populacja jest zbieżna do jednej grupy, a dla większych elementy przestają się grupować. Przykładowe rezultaty widoczne są poniżej.



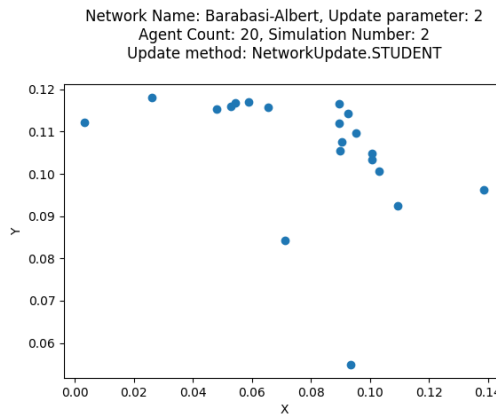
Rysunek 4.4: Sieć Barabási-Albert w iteracji nr 50



Rysunek 4.5: Sieć Erdős-Rényi w iteracji nr 50



Rysunek 4.6: Sieć Watts-Strogatz, parametr aktualizacji: 10, populacja: 20



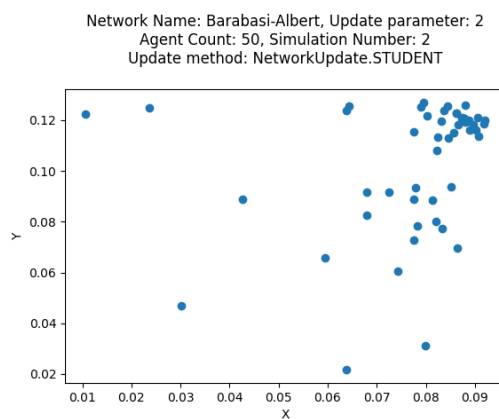
Rysunek 4.7: Sieć Barabási-Albert, parametr aktualizacji: 2, populacja: 20

4.4 Analiza współczynników modyfikujących średnią rozkładu

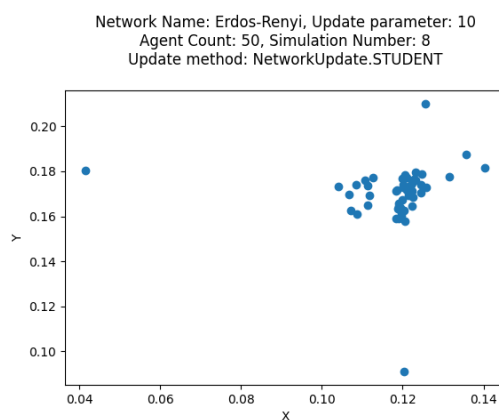
Jako że współczynnik modyfikujący średnią rozkładu pozwolił na uzyskanie lepszych rezultatów niż do tej pory, przeprowadzono badania dla różnych wartości parametru, wyniki są w plikach CSV na stronie [44].

Przeprowadzone zostały obliczenia dla następujących wartości modyfikatora: [0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000], oraz dla następujących wartości populacji: [20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000].

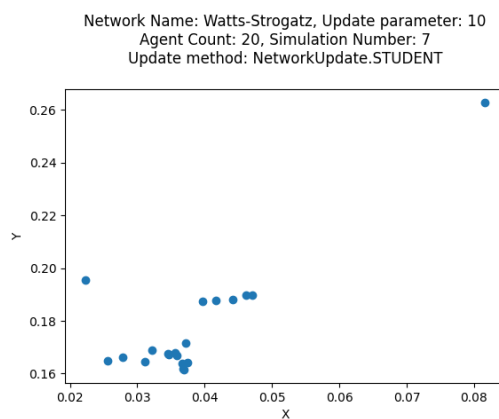
Niestety, niewiele z nich pozwoliło na uzyskanie więcej niż jednej grupy na wykresie. Wyniki przedstawiono na rysunkach 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 i 4.10.



Rysunek 4.8: Sieć Barabási-Albert, parametr aktualizacji: 2, populacja: 50



Rysunek 4.9: Sieć Erdős-Rényi, parametr aktualizacji: 10, populacja: 50



Rysunek 4.10: Sieć Watts-Strogatz, parametr aktualizacji: 10, populacja: 20

Rozdział 5

Podsumowanie

Spis tabel

3.1	Parametry agenta	19
4.1	Parametry aktualizacji opinii	21
4.2	Wyniki symulacji wstępnej	22
4.3	Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów	23
4.4	Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów	24
4.5	Wyniki symulacji ze średnią udziału sąsiadów agenta w populacji i średniej opinii sąsiadów	24

Spis rysunków

4.1	Rozkład trójkątny. Źródło: [42]	24
4.2	Rozkład wykładniczy. Źródło: [43]	25
4.3	Sieć Watts-Strogatz w iteracji nr 50	25
4.4	Sieć Barabási-Albert w iteracji nr 50	26
4.5	Sieć Erdős-Rényi w iteracji nr 50	26
4.6	Sieć Watts-Strogatz, parametr aktualizacji: 10, populacja: 20	27
4.7	Sieć Barabási-Albert, parametr aktualizacji: 2, populacja: 20	27
4.8	Sieć Barabási-Albert, parametr aktualizacji: 2, populacja: 50	28
4.9	Sieć Erdős-Rényi, parametr aktualizacji: 10, populacja: 50	28
4.10	Sieć Watts-Strogatz, parametr aktualizacji: 10, populacja: 20	28

.1 Załącznik: Publikacja

Modelling of opinion formation process on different social networks

Mateusz Borowiec¹, Tomasz Gwizdała¹[0000–0002–3981–6037], and Paweł Maślanka¹[0000–0002–6456–7423]

Faculty of Physics and Applied Informatics, University of Łódź, Pomorska 149/153,
90-236 Łódź, Poland norbert.borowiec@edu.nui.lodz.pl, tomasz.gwizdalla@uni.lodz.pl,
pawel.maslanka@uni.lodz.pl

Abstract. Different processes related to the phenomena of interaction across communities are of particular interest, especially since the beginning of the current century. It concerns such processes as disease spreading, opinion distribution, and formation or recommendation systems. The last two are of special interest in the rapid development of social networks. In our paper we will present the proposition of the update scheme intended for the opinion in continuous space. We show it for the 2D opinion space following Nolan's idea of multidimensional opinion presentation. We implement our mechanism for different types of networks and different parameters. The paper shows that similarities exist between the networks with longer tails of node degree distribution, and we can observe the emergence of two groups around two different points in the space.

Keywords: opinion formation · scale-free networks · social networks

1 Introduction

The history of studying the process of opinion formation using numeric models consists of history related to the two different problems. The first is the description of the community, while the second is the definition of opinion and the rule that makes it possible to change it.

Regarding the first topic, we must emphasize that the image of community is completely different today compared to the pioneering times of computing. While today, online social networks create a magnificent area to study human behavior, when coming to the 50s or 60s, we have to mention the lack of information from sociological sources. The first, revolutionary in some sense approach to the process of society modeling came from the late 50's [9] and one of the most famous experiments showing the range and possibilities of interpersonal contacts (I consider here the famous Milgram “small world” experiment was described almost ten years later. Even when considering that the original Erdos-Renyi model seems unrealistic compared to some contemporary models, which commonly with the Erdos-Renyi one, will be studied in this paper, the original one is still of great importance.

When considering the attempts to describe the interaction between the individuals, we have to go back to the 70s and the Clifford model of spatial conflict with Glauber update [8]. Since then, a lot of different approaches have been studied: the analytical model of Galam [11], the Voters model, where the opinion is spread from the influencer and not imposed on individual [20]. The group of papers dealing with outward opinion dissemination also consists of papers related to the Sznajd-Weron model and its extensions [?][15][27]. Many works also use Cellular Automata as the playground for opinion formation [19].

Some different types of approaches, mainly taking into account swarm-based updates also related to modified logistic functions, were presented in our earlier papers [16] [17].

2 Model

2.1 Basics

In this subsection, we are going to show the crucial assumptions of our calculations. It contains two parts: information about the most popular graphs used in the simulation of communities and information on how the opinions of individuals are determined.

Three social network models will be used in our paper:

- Erdős-Rényi graph
- Watts-Strogatz graph
- Barabasi-Albert graph

The Erdős-Rényi is the most classical, known for more than 60 years model, called usually “Random graph” and introduced by authors in 1959 [9]. Since the two approaches to this graph exist, we must emphasize using the more frequent $G(N, p)$ approach. According to this model, the edge between nodes (connection between individuals) exists for every pair of nodes independently and with the probability p . N certainly means the number of nodes.

It is interesting that a great comeback of social networks took place at the turn of the 20th and 21st centuries. This resulted in the creation of two of the most famous models. There are Watts-Strogatz and Barabasi-Albert ones. Both these models have different backgrounds and different final properties but both are often used in the study of different complex systems related to the analysis of communities behavior.

The basic assumption underlying the Watts-Strogatz model [28][25] was maintaining each node’s average number of neighbors. When defining the WS model $G(N, K, \beta)$, we initially connect every node to the even number of K of its neighbors. For simplicity of visualization, this phase is usually presented as a connection of nodes distributed along the ring with $K/2$ to its left nearest neighbors and to $K/2$ of right nearest neighbors. Then, the procedure of rewiring starts. For every node, $K/2$ of its left or right edges is rewired with probability β to an arbitrarily selected node. The only restriction is that we cannot duplicate connections, and we cannot create self-loops.

The Barabasi-Albert approach [3][1] is usually called the preferential one. This term comes from the fact that, for the basic model, we do not make any assumptions about its parameters. We start from the three nodes, creating a complete graph. Then, successive nodes are added to the structure, and edges between the added node and the existing one are created with the probability:

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1)$$

In the formula above, k_i is the number of neighbors of i -th node, and the sum is taken over all nodes.

From the point of view of simulations performed on all of the above-presented graphs, especially two values or functions are crucial:

- the distribution of node's degrees
- the clustering coefficient

The distribution of degrees is self-explanatory, however we would like to emphasize the role of this parameter in the process of information passing. It is obvious that by increasing the number of neighbors we increase the influence of particular node as well as its susceptibility to the opinions imposed by them. The closer the node degree values are to each other, the more similar the behavior of the individuals. On the other hand, the strong asymmetry of distribution leads to the existence of individuals which are better “interfaces” in the providing feedback.

type of graph	node's degree distribution	clustering coefficient
Erdős-Rényi $G(N, p)$	binomial distribution $p(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$	$C = p$
Watts-Strogatz $G(N, K, \beta)$ [5]	$p(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2, K/2)} \binom{K/2}{n} \times (1-\beta)^n \beta^{K/2-n} e^{\beta K/2^n} \times \frac{\beta K/2^k = K/2-n}{(k-K/2-n)!}$	$C = \frac{3(K-2)}{4(K-1)} (1-\beta)^2$
Barabasi-Albert [4]	$p(k) \propto k^{-3}$	$\frac{(\ln N)^2}{N}$

Table 1: The properties of three types of graphs corresponding to the three models used across the paper.

The formulas describing the values of parameters for all three types of plots presented above are summarized in table ?? . The comparison shows visible similarities between the first two models and the differences when considering the

third one. For the ER and WS models, the distribution of node's degrees has a visible maximum, whose position is defined by the parameters p or K , respectively. The width of the distribution for the ER model is given by the properties of the binomial distribution, while the WS model increases with increasing β . On the contrary, the BA model expresses the exponential decrease of the plot with the maximum, only slightly higher than for smaller values, existing for the very low degree (usually less than 10). Interestingly, WS, as well as BA models, lead to the emergence of so-called hubs - the nodes/individuals with an extremely high number of neighbors. Because this fact is connected to the distances between nodes (usually expressed as graph's radii and diameters) it has been considered, with variable success, to model the famous Milgram experiment, [24], or the similar problems. This concerns Watts-Strogatz [22], [18], [23] as well as Barabasi-Albert model [14][12].

The individual's opinion is described within the frame of the "Nolan chart" concept. The scientific community does not often use the name, but some submissions use it in the mentioned form [16] [2] [10] [13]. Quite often the similar model is called simply "twodimensional" or even "multidimensional" [7] [26] [6] [21]. The Nolan chart's crucial property is to present individuals' opinions on two different issues on perpendicular axes and limit the possible value on every issue to a scaled interval $[-1, 1]$. According to the original Nolan's model, two axes correspond to "personal freedom" and "economic freedom". This approach allows an attempt to define several typical political attitudes, such as liberal or conservative, as certain areas on the diagram. The idea can certainly be easily adapted to an arbitrary number of opinions concerning arbitrary topics. This leads to a simple generalization of Nolan's chart to an arbitrary number of dimensions, forming the hypercube as a space available for opinions.

2.2 The details of approach

When introducing the model used throughout the paper, it's crucial to focus on two key aspects: the features of individuals and the update scheme. Each individual is characterized by a specific set of data, which we will delve into.

- The twodimensional vector corresponding to the node's position on Nolan's diagram. It is clear that both numbers should be float and taken from the $[0, 1]$ interval. In fact, the original values are drawn from this range. The presence of safeguards preventing crossing the limits of this range depends on the method of the update. It means that, although it is not correct and even not sensible, we enable greater values and this, as it will be seen in the section devoted to the presentation of results, can lead to quite interesting effects.
- Influence. This parameter, constant through the whole simulation and sampled uniformly from the interval $[0, 1]$ corresponds to the power to influence the opinion of other individuals.
- Susceptibility. The parameter, also constant through the simulation and sampled uniformly from the interval $[0, 1]$, describes the sensitivity of individuals to the social pressure exerted by neighbors.

In the simplest case, we can assume that both factors, influence and susceptibility, correlate or even equal one to another. In the presented study, we distinguish them for every individual, so there is no connection between them.

We use two update schemes in the proposed paper, which are different from the most popular ones. For both of them, the crucial information is the direction of motion of the individual in the space given by Nolan's diagram. The direction is given as the vector between the individual's current position and the average of positions of all nearest neighbors of this individual. The position of the point selected as a potential new opinion is chosen according to the exponential distribution given by the distance between the current position and the average of neighbors multiplied by the sum of neighbors' influences, its own susceptibility, and some general parameter defined for a particular type of update and constant through the whole simulation. On the line which direction is described earlier, the new opinion is determined according to one of the following schemes:

1. The point is chosen from the exponential distribution between the minimal coordinate and the maximal coordinate. The old point will be conserved if the new value exceeds the interval limits.
2. The new point is chosen with the exponential distribution starting from the old position.

As can be observed, the first model preserves the correctness of the new choice, while the second one does not. This leads to some different behaviors and makes interesting intervals of parameters for both updates significantly different.

3 Results

The main goal of the simulation was to analyze the dynamics of the opinion-forming process. We can either study the behavior of single individuals or try to determine the characteristics of an entire population. In most models that are used to study the opinion formation process, the final result is the unanimity of the entire population. The question is usually about the time and characteristics of reaching this state. Therefore, to show the model's general properties, we concentrate on the global characteristics, particularly the speed of going to unanimity, by presenting the dependence of the sum of squared distances between all nodes and their center of mass.

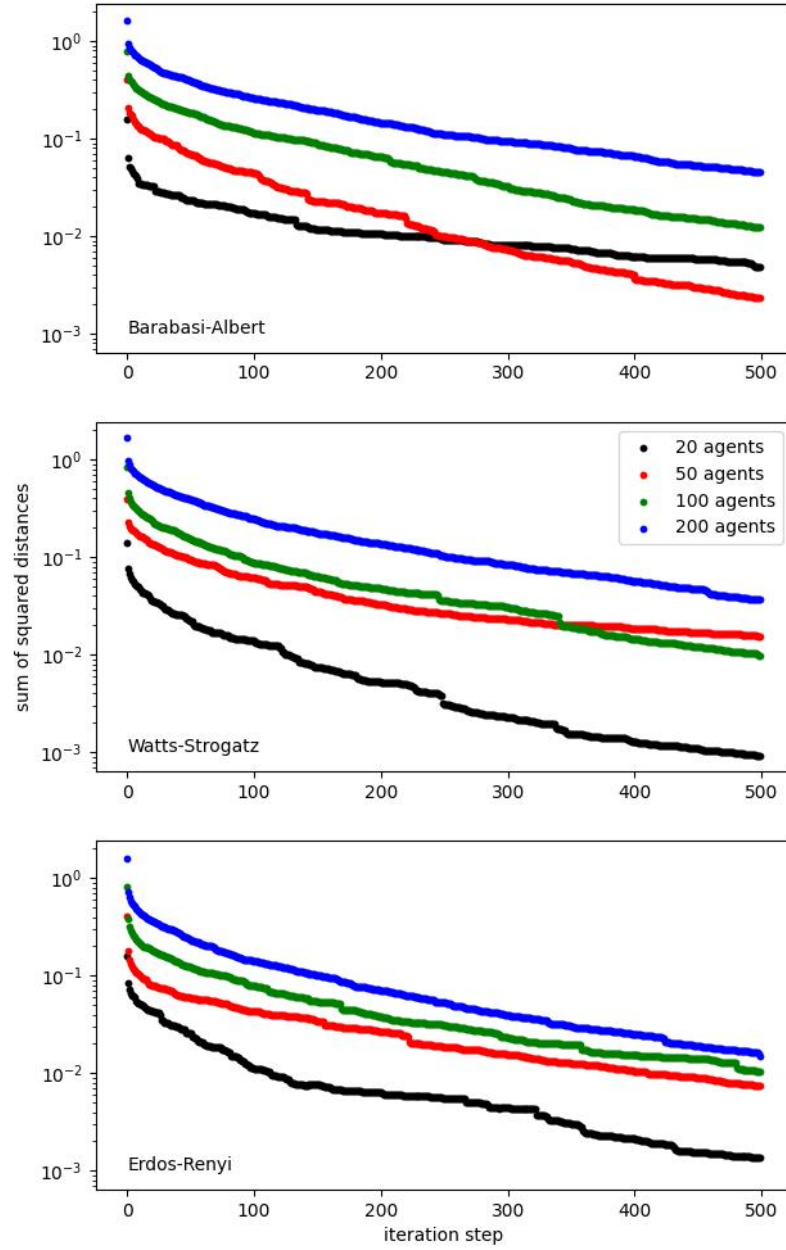


Fig. 1: The decrease of the average distance from the mean position in the function of time of simulation for the first type of update.

The simulation was made for three networks, two methods of update and the sets of parameters characteristic for these updates. As was written earlier, the three network models are the Barabasi-Albert (BA), Watts-Strogatz (WS), and Erdos-Renyi (ER) ones. The only additional information we have to provide is that the probability of rewiring is for the Watts-Strogatz network assumed to be equal $\beta = 0.3$. The updates are described simply as the first and the second one, but it must be remembered that the first protects the system against going beyond the limits of the Nolan diagram space, and the second does not. An interesting observation was made for the update parameters. From the preliminary tests, we obtained that the value area for the first update is two or even three orders of magnitude larger than that for the second one. We certainly do not need to analyze the absolute values of this parameter because it describes the speed of movement in the solution space and, therefore, the tendency to change opinions, and we can take any values. Finally, we adopted the set $\{200, 500, 1000\}$ for the first update as the set of parameter values. For the second update, it is $\{5, 10\}$. All calculations are made for different graph sizes: $\{20, 50, 100, 200\}$. These values are indeed relatively small, but they allow for the most essential characteristics of the process to be shown.

For every set of parameters we perform 5 simulations, 500 simulation steps each. The simulation step means the synchronized update of the positions of all individuals according to the assumed rule.

In Fig.1, the results for the update #1 are presented. All plots are obtained after averaging over five runs with the model parameter equal 500. Successive plots correspond to different network models, while colors are related to the size of the graph. The image for this update does not show any anomalies or deviations from the general image. For every set of parameters, the sum of square distance decreases. The decline is monotonic without any abrupt changes. The only debatable issue is the difference in slope value for some particular cases (20 agents for the BA model, 50 agents for the WS model), which, following the tendency, decrease significantly slower. We will discuss this problem later.

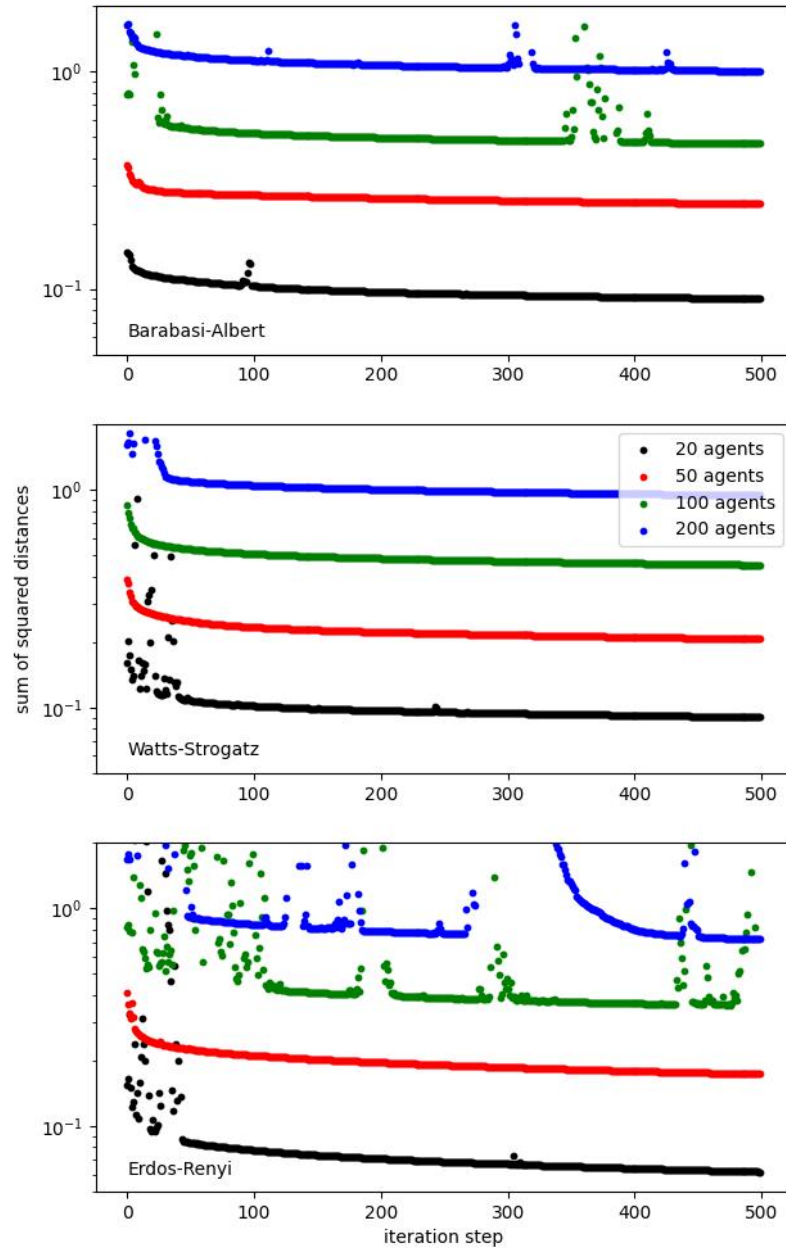


Fig. 2: The decrease of average distance from the mean position in the function of time of simulation for the second type of update..

The situation for the second update is much more interesting, shown in Fig.2. The plots were obtained for model parameters equal to 5 and, as earlier, averaged over five runs. We must mention that for parameter equal 10 the majority of runs lead to the dispersal of individuals beyond the acceptable area. Only one run led to such a situation for the presented case, but we must mention this problem. Generally, for this update, we can see several previously unobservable effects. The decrease of the squared distance value sum is much slower than for the first model. It certainly exists but seems to reach in 500 steps the value obtained for update#1 in the first ten steps. The more interesting is that sometimes the system is brought out of a state of stable development. This process, observed as a sudden increase in distance, can be observed for every graph size and different network models, so we can say that this is the effect of the update scheme. The important fact is that the system returns to the previously observed relationship, which is best visible in the graph for the ER model and 200 agents in the fourth century of simulation steps.

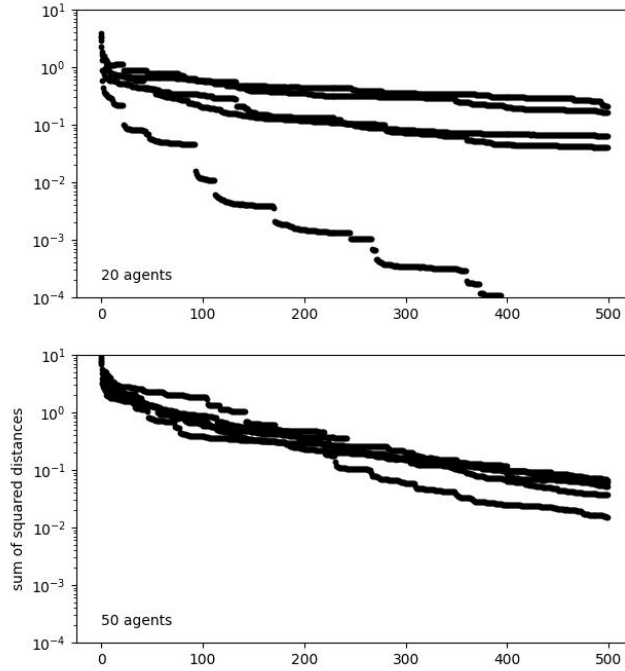


Fig. 3: The comparison of individual runs averaged in Fig.1.

In Fig.3, we can observe the source of differences shown earlier in Fig.1. Both plots are prepared for the Barabasi-Albert model. One can confirm the expected effect that the results are more stable for a higher number of nodes, and all runs lead to more similar results. On the other hand, the plots for 20 nodes lead to two conclusions, one of which is quite surprising. It can be expected that the spread of curves will be higher, and the single result can impact the average more strongly than for larger networks. The unexpected effect is that most runs lead to results going down much slower than for graphs with more nodes. Such expectations come clearly from the Fig.1. The only rapid descent comes from the single run, and the decrease here is extremely strong compared to other cases. This can be easily compared when considering that horizontal axes have the same range on both plots.

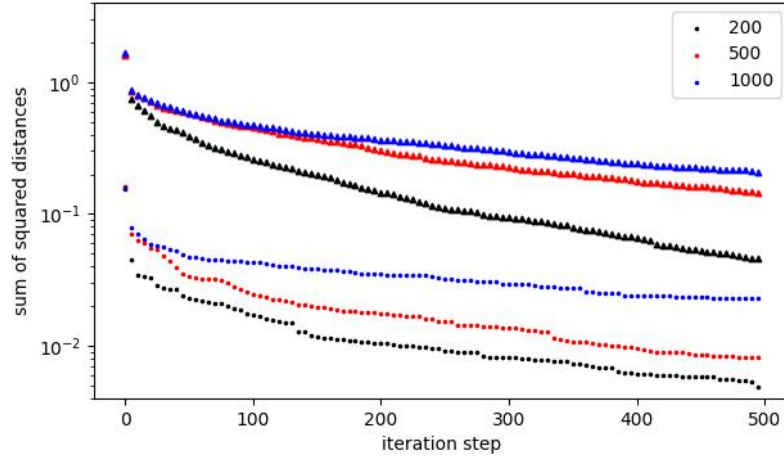


Fig. 4: The comparison of parameter dependence for the Barabasi-Albert model and two network sizes (20 nodes - lower bunch of curves, 200 nodes - the upper one). The values of the parameter are shown in the legend.

We must answer the question about the dependence of results on the update parameter. Since more successfully finished calculations we made for the first update technique, the results shown in Fig.4 are also presented for this update. We can notice the flattening of the decrease process with increasing value. The effect is monotonic and reproducible for all sets of simulation parameters applied.

Finally, we can compare curves for different network models in Fig.5. As it was done earlier, two sizes are considered: 20 nodes and 200 nodes. For every graph, the bunch for lower size is visible below the one for greater size. Since all curves are visible in earlier plots, we have to pay attention to some common

behavior observed for different models. The analysis of the figure shows that, independent of the type of update, value of update parameter and graph size, the Barabasi-Albert model behaves similarly to the Watts-Strogatz one and Erdos-Renyi model presents different behavior. It is a little surprising since the WS model's origin is closer to the ER one than to BA, but it seems that the observed effect is the result of the presence of hubs. These nodes with a high number of neighbors appear in the WS model.

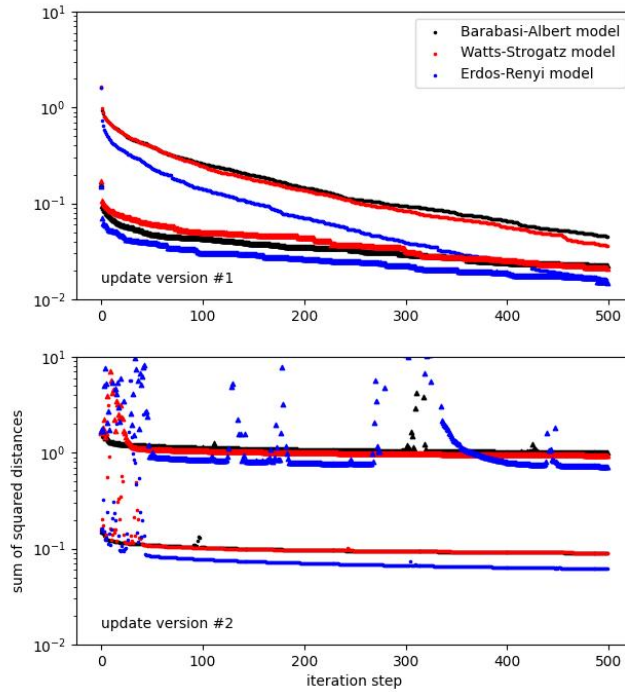


Fig. 5: The averaged runs for different models and parameters.

The difference between the two models, similar in behavior, becomes visible when we plot the simulation snapshot. In Fig.6 we can see the comparison of two selected runs for Barabasi-Albert and Watts-Strogatz networks. Although the right image shows the typical slow convergence of individuals to a common point, in the left plot, some different pattern is created. In the figure, we can see that there are two centers, instead of one, that are common to all points.

Indeed, they are close one to another but the possibility to distinguish both of them is obvious. It shows that by manipulating individual and global parameters of simulation, we can reproduce the situation with more than one opinion existing in the community.

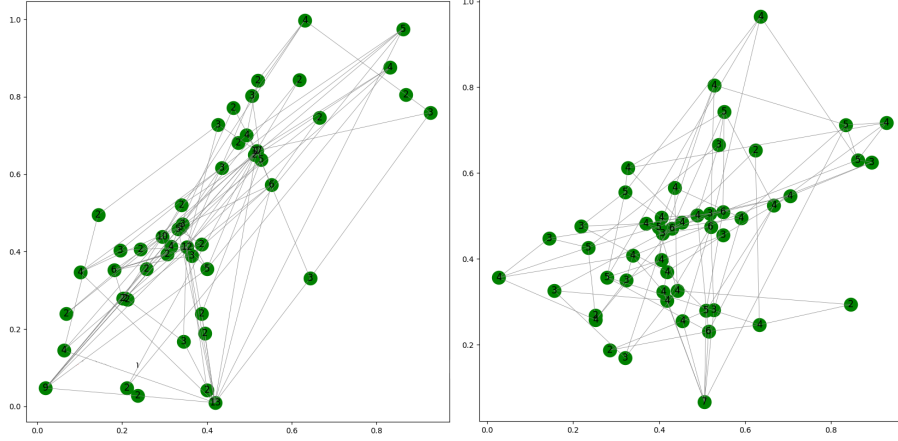


Fig. 6: Creation of two clusters for Barabasi-Albert model (left) as compared to the Watts-Strogatz one (right).

4 Conclusions

In the paper, we present the first test of some new class of opinion update scheme, applied to different network models corresponding usually to the social networks of various sizes and local and global parameters. From the results obtained, we can deduce the main directions in which further research should be conducted. The calculations are performed for relatively low graph sizes. But even such small sizes enable us to formulate some conclusions.

The presence of hubs is probably the reason for the more similar behavior of Barabasi-Albert and Watts-Strogatz models despite the similarity of node degree distributions for WS and ER models. We can also observe the emergence of clusters concentrated around some common opinion.

When discussing future, we can indicate some interesting problems which presentation goes beyond the scope of this short, introductory paper. First, more attention should be paid to the individuals' features. Here, some issues need discussion. Are the features related to someone's susceptibility constant in time? We know from different sociological news that people are usually conservative in their opinions and are rarely ready to change them. How should this effect influence the value of individual parameters? Another question concerns the connection between the number of neighbors and individual parameters. Usually, hubs are more convinced of their opinions and have a greater influence

on their surroundings. Nowadays, influencers are an excellent example of such a phenomenon. Maybe some personal factors, like relationships between people, also have to be included.

We can also take into account some properties related to the geometry of the Nolan's diagram as the opinion space. I mean mainly the determination of the motion direction from the weighted average or the increase of dimensionality.

References

1. Albert, R., Barabási, A.L.: Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47–97 (Jan 2002)
2. Anania, E.C., Rice, S., Pierce, M., Winter, S.R., Capps, J., Walters, N.W., Milner, M.N.: Public support for police drone missions depends on political affiliation and neighborhood demographics. *Technology in Society* **57**, 95 – 103 (2019)
3. Barabasi, A.L., Albert, R.: Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**(5439), 509–512 (1999)
4. Barabási, A.L.: Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **371**(1987) (2013)
5. Barrat, A., Weigt, M.: On the properties of small-world network models, vol. 9781400841356 (2011)
6. Baumann, F., Lorenz-Spreen, P., Sokolov, I.M., Starnini, M.: Emergence of polarized ideological opinions in multidimensional topic spaces. *Physical Review X* **11**(1) (2021)
7. Betz, G., Hamann, M., McHedlidze, T., Von Schmettow, S.: Applying argumentation to structure and visualize multi-dimensional opinion spaces. *Argument and Computation* **10**(1), 23 – 40 (2019)
8. Clifford, P., Sudbury, A.: A model for spatial conflict. *Biometrika* **60**(3), 581–588 (1973)
9. Erdős, P., Rényi, A.: On random graphs I. *Publicationes Mathematicae Debrecen* **6**, 290 (1959)
10. Feltwell, T., Wood, G., Brooker, P., Rowland, S., Baumer, E.P.S., Long, K., Vines, J., Barnett, J., Lawson, S.: Broadening exposure to socio-political opinions via a pushy smart home device (2020)
11. Galam, S.: Minority opinion spreading in random geometry. *Eur. Phys. J. B*, **25**, 403–406 (2002)
12. Gila, O., Ozel, E., Goodrich, M.: Highway preferential attachment models for geographic routing. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* **14462 LNCS**, 56 – 80 (2024)
13. Golebiowska, M., Sznajd-Weron, K.: The evolution of political views within the model with two binary opinions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* **12744 LNCS**, 302 – 308 (2021)
14. Goodrich, M.T., Ozel, E.: Modeling the small-world phenomenon with road networks (2022)
15. Gwizdała, T.M.: Randomized Sznajd model. *Int.J.Mod.Phys.C* **17**(12), 1791–1799 (2006)

16. Gwizdała, T.M.: The swarm-like update scheme for opinion formation. In: Nguyen, N.T., Papadopoulos, G.A., Jedrzejowicz, P., Trawinski, B., Vossen, G. (eds.) *Computational Collective Intelligence*. pp. 66–75. Springer International Publishing, Cham (2017)
17. Gwizdała, T.M.: The role of mapping curve in swarm-like opinion formation. In: Nguyen, N.T., Pimenidis, E., Khan, Z., Trawiński, B. (eds.) *Computational Collective Intelligence*. pp. 157–166. Springer International Publishing, Cham (2018)
18. Halim, F., Wu, Y., Yap, R.H.C.: Routing in the watts and strogatz small world networks revisited. In: *2010 Fourth IEEE International Conference on Self-Adaptive and Self-Organizing Systems Workshop*. pp. 247–250 (2010)
19. Hegselmann, R., Flache, A., Möller, V.: Cellular automata as a modelling tool: Solidarity and opinion formation. In: Suleiman, R., Troitzsch, K.G., Gilbert, N. (eds.) *Tools and Techniques for Social Science Simulation*. pp. 151–178. Physica-Verlag HD, Heidelberg (2000)
20. Holley, R.A., Liggett, T.M.: Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model. *The Annals of Probability* **3**(4), 643 – 663 (1975)
21. Jond, H.B., Yildiz, A.: A game approach to multi-dimensional opinion dynamics in social networks with stubborn strategist agents. *European Journal of Control* **75** (2024)
22. Kleinberg, J.: The small-world phenomenon: An algorithmic perspective. p. 163 – 170 (2000)
23. Lattanzi, S., Panconesi, A., Sivakumar, D.: Milgram-routing in social networks. In: *WWW*. pp. 725–734 (2011)
24. Milgram, S.: The small world problem. *Psychology Today* pp. 60 – 67 (1967)
25. Newman, M., Watts, D.: Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* **60**(6), 7332 – 7342 (1999)
26. Schweighofer, S., Garcia, D., Schweitzer, F.: An agent-based model of multi-dimensional opinion dynamics and opinion alignment. *Chaos* **30**(9) (2020)
27. Stauffer, D., A.O.Sousa, de Oliveira, S.: Generalization to square lattice of Sznajd sociophysics. *Int.J.Mod.Phys.C* **11**, 1239 (2000)
28. Watts, D., Strogatz, S.: Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* **393**(6684), 440–442 (1998)

Bibliografia

- [1] Macal, C. M., & North, M. J. (2010). Tutorial on agent-based modelling and simulation. *Journal of Simulation*, 4(3), 151-162.
- [2] Tesfatsion, L., & Judd, K. L. (Eds.). (2006). *Handbook of Computational Economics: Agent-Based Computational Economics* (Vol. 2). Elsevier.
- [3] Epstein, J. M. (2007). *Generative Social Science: Studies in Agent-Based Computational Modeling*. Princeton University Press.
- [4] Grimm, V., & Railsback, S. F. (2005). *Individual-based Modeling and Ecology*. Princeton University Press.
- [5] Bonabeau, E. (2002). Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99 (Suppl 3), 7280-7287.
- [6] Eubank, S., Guclu, H., Kumar, V. S. A., Marathe, M. V., Srinivasan, A., Toroczkai, Z., & Wang, N. (2004). Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks. *Nature*, 429 (6988), 180-184.
- [7] Wasserman, S., & Faust, K. (1994). *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press.
- [8] Newman, M. E. J. (2010). *Networks: An Introduction*. Oxford University Press.
- [9] Girvan, M., & Newman, M. E. J. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99 (12), 7821-7826.
- [10] Freeman, L. C. (1979). Centrality in social networks: Conceptual clarification. *Social Networks*, 1(3), 215-239.
- [11] Hanneman, R. A., & Riddle, M. (2005). *Introduction to Social Network Methods*. University of California.
- [12] Scott, J. (2000). *Social Network Analysis: A Handbook* (2nd ed.). SAGE Publications.

-
- [13] Borgatti, S. P., & Everett, M. G. (1997). Network analysis of two-mode data. *Social Networks*, 19(3), 243-269.
- [14] Holme, P., & Saramäki, J. (2012). Temporal networks. *Physics Reports*, 519(3), 97-125.
- [15] Erdős, P., & Rényi, A. (1959). On Random Graphs I. *Publicationes Mathematicae*, 6, 290-297.
- [16] Erdős, P., & Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5, 17-60.
- [17] Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2), 167-256.
- [18] Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684), 440-442.
- [19] Bollobás, B. (2001). *Random Graphs*. Cambridge University Press.
- [20] Barabási, A.-L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439), 509-512.
- [21] Albert, R., & Barabási, A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1), 47-97.
- [22] Albert, R., Jeong, H., & Barabási, A.-L. (2000). Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406(6794), 378-382.
- [23] Barabási, A.-L., & Bonabeau, E. (2003). Scale-free networks. *Scientific American*, 288(5), 60-69.
- [24] Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., Oltvai, Z. N., & Barabási, A.-L. (2000). The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804), 651-654.
- [25] Battiston, S., Delli Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B., & Stiglitz, J. E. (2007). Credit chains and bankruptcy propagation in production networks. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6), 2061-2084.
- [26] Price, D. J. de S. (1976). A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the American Society for Information Science*, 27(5), 292-306.
- [27] Leskovec, J., Lang, K. J., Dasgupta, A., & Mahoney, M. (2008). Statistical properties of community structure in large social and information networks. *Proceedings of the 17th International Conference on World Wide Web*, 695-704.

- [28] Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2001). Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical Review Letters*, 86(14), 3200-3203.
- [29] Klemm, K., & Eguiluz, V. M. (2002). Highly clustered scale-free networks. *Physical Review E*, 65(3), 036123.
- [30] Amaral, L. A. N., Scala, A., Barthélemy, M., & Stanley, H. E. (2000). Classes of small-world networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(21), 11149-11152.
- [31] Dorogovtsev, S. N., & Mendes, J. F. F. (2002). Evolution of networks. *Advances in Physics*, 51(4), 1079-1187.
- [32] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D.-U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5), 175-308.
- [33] Holme, P., Kim, B. J., Yoon, C. N., & Han, S. K. (2002). Attack vulnerability of complex networks. *Physical Review E*, 65(5), 056109.
- [34] Sporns, O., & Zwi, J. D. (2004). The small world of the cerebral cortex. *Neuroinformatics*, 2(2), 145-162.
- [35] Barrat, A., Barthélemy, M., Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2004). The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(11), 3747-3752.
- [36] Nolan, D. (1971). The Case for a Libertarian Political Party. *The Individualist*, 1(4), 3-6.
- [37] Rothbard, M. N. (1978). Libertarianism vs. the Nolan chart. *Libertarian Review*, 7(1), 15-16.
- [38] Kirsch, A. (2020). The Nolan chart: a reconsideration of its validity and use in modern political analysis. *Journal of Political Ideologies*, 25(3), 345-364.
- [39] Hagberg, A. A., Schult, D. A., & Swart, P. J. (2008). Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In *Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008)* (pp. 11-15). <https://networkx.org/>
- [40] Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90-95. <https://matplotlib.org/>
- [41] Python Software Foundation. (n.d.). *csv – CSV File Reading and Writing*. Python Documentation. <https://docs.python.org/3/library/csv.html>
- [42] CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=182090>

-
- [43] Autorstwa Cburnett - Praca własna, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=73793>
- [44] Opracowanie własne, https://uniwersytetlodzki-my.sharepoint.com/personal/ul0237204_edu_uni_lodz_pl/_layouts/15/onedrive.aspx?id=%2Fpersonal%2Ful0237204%5Fedu%5Funi%5Flodz%5Fpl%2FDocuments%2Fmaster%5Fdegree%5F%2D%5Fsocial%5Fnetworking&ga=1