Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 11

9 stycznia **2020** r.

M11.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n.

M11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\,dx$.

M11.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?

M11.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

M11.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poeksperymentować z metodą adaptacyjną Simpsona

```
function AdaptiveSimpson(f,a,b; abstol=1.0e-8)
  nf = 3;
  ff = f([a, (a+b)/2, b]);
  nf = 3; # Initial Simpson approximation
  I1 = (b-a)*dot([1, 4, 1], ff)/6;
  function adaptrec(f,a,b,ff,I1,tol,nf)
    h = (b-a)/2;
    fm = f([a+h/2, b-h/2]);
    nf = nf + 2;
    # Simpson approximations for left and right subinterval
    fR = [ff[2], fm[2], ff[3]];
    fL = [ff[1], fm[1], ff[2]];
    IL = h*dot([1, 4, 1],fL)/6;
    IR = h*dot([1, 4, 1],fR)/6;
    I2 = IL + IR;
    I = I2 + (I2 - I1)/15;
    # Extrapolated approximation
    if (abs(I-I2) > tol)
      IL,nf = adaptrec(f,a,a+h,fL,IL,tol/2,nf);
      IR,nf = adaptrec(f,b-h,b,fR,IR,tol/2,nf);
      I = IL + IR;
    end
    return I,nf;
  end
  return adaptrec(f,a,b,ff,I1,abstol,nf);
end;
```

Podać przykład funkcji $f \in C^\infty[-1,1]$, dla której obliczanie całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, z dokładnością `abstol`$=10^{-6}$, wymaga co najmniej 1000 wywołań funkcji f.
Wskazówka: zob. [D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, rozdział 7.6.]

M11.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Julia, do obliczania całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą interpolacyjnej kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function ClenshawCurtis(f,n)
  # Chebyshev extreme points
  x  = cos.(pi*(0:n)/n)
  fx = f.(x)/(2n)
  # Fast Fourier transform
  g  = real(FFTW.fft(vcat(fx,fx[n:-1:2])))
  # Chebyshev coefficients
  a  = vcat( g[1], g[2:n]+g[2*n:-1:n+2], g[n+1] )
  w  = zeros(length(a))
  w[1:2:end] = 2 ./ (1 .- (0:2:n) .^ 2 )
  LinearAlgebra.dot(w,a)
end
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

M11.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczby c_j, dla których *wielomian trygonometryczny* $w_n(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2\, dx.$$

M11.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k)\,T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1}.

M11.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że rząd kwadratury *Lobatto* wynosi $2n$, tzn. pokazać, że wzór

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' f(\cos(k\pi/n)) \tag{1}$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$ oraz niedokładny dla pewnego wielomianu $f \in \Pi_{2n}$.

M11.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\, dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$. Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

M11.11. $\boxed{\text{2 punkty. Włącz komputer i uzasadnij odpowiedź.}}$ Obliczyć z dokładnością do $\varepsilon = 10^{-3}$ wartość całki

$$I(f) = \int_0^\infty \cos^2(x) e^{-x} = 3/5.$$

19 grudnia 2019

Rafał Nowak