Lista 8

Oskar Bujacz

29 kwietnia 2020

Zadanie 5

Wiemy, że $X_k \sim U[0,a], \quad k = 1,2,3$. Niech $Y_1 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \quad Y_2 = X_{(2)}, \quad Y_3 = \frac{X_{(1)}+X_{(3)}}{2}$ Udowodnić, żę wartości oczekiwane są takie same $E(Y_1) = E(Y_2) = E(Y_3) = \frac{a}{2}$

- $E(Y_1)$
  Korzystając z niezależności zmiennych rozbijamy na sumę wartości oczekiwanych. Łatwo policzyć, że $E(X_i) = \frac{a}{2}$ dla $i = 1,2,3$.

$$E(Y_1) = E\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \frac{E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)}{3} = \frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{3} = \frac{a}{2} \tag{1}$$

- $E(Y_2)$
  Z zadanie 4 wiemy, że $f_2(x) = 6 \cdot F(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot f(x)$. Z własności rozkładu jednostajnego obliczamy $f(x) = \frac{1}{a}$ oraz $F(x) = \frac{x}{a}$.

$$E(Y_2) = E(X_{(2)}) = \int_0^a x f_2(x) dx = \int_0^a x \frac{6x(1-\frac{x}{a})}{a^2} dx = \frac{6x^3}{3a^2} - \frac{6x^4}{4a^3}\Bigg|_0^a = \frac{2a^3}{a^2} - \frac{3a^4}{2a^3} = \frac{a}{2} \tag{2}$$

- $E(Y_3)$
  Skorzystamy ze wskazówki, że $Y_3 = \frac{3Y_1 - Y_2}{2}$

$$E(Y_3) = E\left(\frac{X_1+X_3}{2}\right) = E\left(\frac{3Y_1-Y_3}{2}\right) = \frac{3E(Y_1)-E(Y_2)}{2} = \frac{3\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{2} \tag{3}$$