Lista 6

Oskar Bujacz

15 kwietnia 2020

Zadanie 3

Dla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mamy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że postać $M_X(t)$ jest następująca: $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.

Rozwiązanie

Rozpiszmy MGF z definicji.

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2tx\sigma^2 + x^2 - 2x\mu + \mu^2\right)\right) dx = \tag{2}$$

Chcemy dopełnić wyrazy w wykładniku do pełnego kwadratu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - (2x\mu + 2tx\sigma^2) + \mu^2 + 2\mu t\sigma^2 + t^2\sigma^4\right)\right) \exp\left(t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) dx = \tag{3}$$

Zwijamy kwadrat oraz wyciągamy przed całkę wyrazy niezależne od x

$$\exp\left(t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-(\mu+t\sigma^2))^2}{\sigma^2}\right)\right) dx = \tag{4}$$

Zauważamy, że funkcja podcałkowa to funkcja rozkładu $N(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2)$, zatem wartość całki w granicach $(-\infty, +\infty)$ jest równa 1. Otrzymujemy

$$\exp\left(t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) \cdot 1 = \exp\left(t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) \tag{5}$$

co mieliśmy pokazać.

Zadanie 4

Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć funckję tworzącą momenty $M_{\widehat{X}}(t)$ zmiennej $\widehat{X}$, a następnię zidentyfikować rozkład zmiennej $\widehat{X}$

Rozwiązanie

Będziemy korzystąc z faktu z wykładu, Dla $Z = X+Y$ mamy $M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$. Skorzystamy też ze wzoru udowodnionego w zadaniu 3.

$$M_{\widehat{X}}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(\frac{t}{n}) = \exp\left(n\left(\mu u + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)\right)\Bigg|_{u=t/n} = \tag{6}$$

Podstawiamy odpowiednie u

$$\exp\left(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2n}\right) \tag{7}$$

Latwo zauważyć, że jest to MGF rozkładu $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.