AiSD ćwiczenia lista 3

Oskar Bujacz

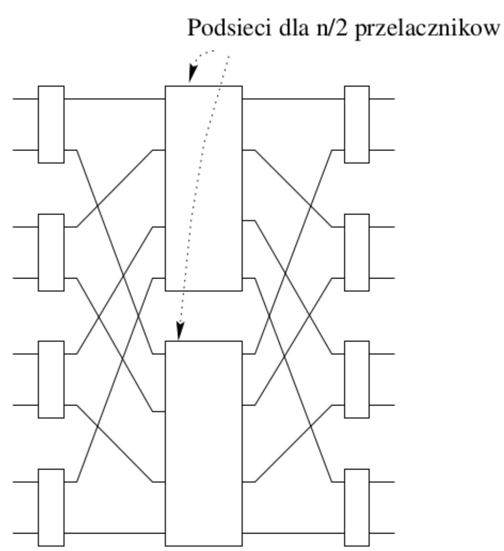
8 maja 2020

Zadanie 9

Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Benesa-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo i niezależnie od siebie w jeden w dwóch stanów (każdy stan przełącznika jest osiągany z prawdopodobieństw 1/2).

Rozwiązanie

Zapiszmy jako szukane prawdopodobieństwo jako $P(S_n = id)$, gdzie n to liczba elementów. Zakładamy, że $n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$, ponieważ tylko takie sieci były rozważane na wykładzie. Do zobrazowania budowy rozważanej sieci umieszczam rysunek z wykładu.



Rysunek 1: Schemat sieci dla $n = 8$

Każdy przełącznik w sieci może być w stanie *"na wprost"* bądź *" na ukos"*. Rozważmy następujący przypadek: załóżmy bez straty ogólności, że pierwszy przełącznik po lewej jest w stanie *na wprost*, zatem trafi do górnej sieci $S_{\frac{n}{2}}$. Aby element po wyjściu z tej górnej sieci pozostał na swoim miejscu, to pierwszy przełącznik również musi być *na wprost* oraz w sieci $S_{\frac{n}{2}}$ nie może się zmienić jego pozycja. Analogicznie rozumujemy dla stanu *na ukos*. Wtedy pierwszy element trafi do dolnej sieci $S_{\frac{n}{2}}$, zatem aby wrócił on na swoje miejsce to przełącznik z lewej strony też musi być *na ukos* oraz sieć dolna nie może zmienić jego pozycji. Otrzymujemy, że do sieci identycznościowej wymagany jest 1 z 2 stanów dla prawego przełącznika. Warto zwrócić uwagę na to, że obydwie sieci $S_{\frac{n}{2}}$ też muszą być identycznościowe. Rozumowanie powtarzamy dla każdego z przełączników, których jest $\frac{n}{2}$. Otrzymamy następujące równanie rekurencyjne do rozwiązania.

$$P(S_n = id) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot P(S_{\frac{n}{2}} = id)^2$$

Nałóżmy obustronnie logarytm z 2.

$$\log(P(S_n = id)) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + \log(P(S_{\frac{n}{2}} = id)^2) = -\frac{n}{2} + 2\log(P(S_{\frac{n}{2}} = id)) =$$

rozpisujemy

$$-\frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 4\log(P(S_{\frac{n}{4}} = id))$$

Równanie będziemy rozpisać $\log(n)$, razy (n jest potęgą 2, problem dzielimy na połowy), aż otrzymamy wyraz $\frac{n}{2}\log(P(S_2 = id))$. Dla 2 elementów mamy, że $P(S_2 = id) = \frac{1}{2}$, zatem

$$\frac{n}{2}\log(P(S_2 = id)) = \frac{n}{2} log\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

Otrzymujemy:

$$\log(P(S_n = id)) = \underbrace{-\frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \cdots - \frac{n}{2}}_{\log(n) elementw}$$

$$\log(P(S_n = id)) = -\frac{n}{2}\log(n)$$

Pozbywamy się logarytmu

$$P(S_n = id) = 2^{-\frac{n}{2}\log(n)} = n^{-\frac{n}{2}}$$

Co jest szukanym prawdopodobieństwem.