Lista 7

Oskar Bujacz

22 kwietnia 2020

Zadanie 3

Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$. Wykazać, że współczynnik korelacji zmiennych X_1, X_2 jest równy zero. Wykazać, że zmienne są zależne.

Rozwiązanie

Na początek zauważmy, że warunek $x^2+y^2 > 0$ zapewnia nam, że $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$. Łatwo zauważyć, zmienne x_1, x_2 spełniają równanie koła o promieniu 1. Ustalmy granice całkowania odpowiednio dla ustalonego x i y. Wtedy będziemy mogli policzyć gęstości brzegowe.

$$0 < x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \end{cases} \tag{1}$$

Liczymy $f_x(x)$ oraz $f_y(y)$.

$$f_x(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \tag{2}$$

$$f_y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \tag{3}$$

Aby pokazać zależność między zmiennymi, wystarczy pokazać dla pewnych danych $f(x,y) \neq f(x)f(y)$. Weźmy $x = 0.1$ oraz $y = 0.1$. Wtedy w oczywisty sposób

$$\frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{0.99}^2 \tag{4}$$

Zatem te zmienne są zależne.
Został nam do policzenia współczynnik korelacji. Określa się go wzorem.

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{5}$$

gdzie

$$cov(x,y) = E[(X - EX)(Y - EY)] \tag{6}$$

$$\sigma_x = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}, \qquad \sigma_y = \sqrt{E(Y^2) - (E(Y))^2} \tag{7}$$

Znamy granice całkowania dla ustalonego x i y znajdującego się na okręgu o promieniu 1, zatem możemy liczyć wszystkie potrzebne wartości oczekiwane.

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx \tag{8}$$

Policzmy na boku tą całkę jako nieoznaczoną. Stosujemy całkowanie przez podstawienie, $1-x^2 = t$, $-2xdx = dt$.

$$\int \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = -\int \frac{\sqrt{t}}{\pi} dt = -\frac{2}{3\pi} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Wracamy do całki oznaczonej. Podstawiamy otrzymamy wynik całkowania.

$$E(X) = -\frac{2}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{10}$$

$$E(Y) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\pi} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 - (-\sqrt{1-x^2})^2}{2\pi} dx = 0 \tag{11}$$

Liczymy kowariancję

$$E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi} dydx = \tag{12}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 - (-\sqrt{1-x^2})^2 x}{2\pi} dx = 0 \tag{13}$$

Już wiemy, że licznik współczynnika korelacji jest równy 0, musimy jeszcze sprawdzić jaki będzie mianownik.

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2}{\pi} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = \frac{1}{4} \tag{14}$$

$$E(Y^2) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{\pi} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi} dx = \frac{1}{4} \tag{15}$$

Otrzymaliśmy

$$\rho = \frac{0}{\sqrt{1/16}} = 0 \tag{16}$$

co należało udowodnić.