Lista 9

Oskar Bujacz

13 maja 2020

Zadanie 2

Niech zmienne $X_1, X_2, \dots X_n$ są niezależne i niech mają ten sam rozkad $Exp(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \dots, X_i$ dla $i = 1 : n$. Dla gęstości $f_{Y_1,Y_2,\dots,Y_n}(y_1, \dots, y_n)$ wykazać, żę gęstość brzegowa. $f_n(y_n)$ względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem

$$f_{Y_n} = \lambda^n y_n^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} exp(-\lambda y_n), \quad 0 < y_n$$

.

W zadaniu 1 otrzymaliśmy zależność $y_i = y_{i-1} + x_i$ oraz $0 < y_i$ dla $i = 1 : n$. Z własności rozkładu wykładniczego wiemy, że $x_i \in [0, \infty)$, zatem $y_i > y_{i-1} > 0$.

W celu pokazania wzoru na gęstość brzegowej policzymy $n-1$ krotną całkę z funkcji gęstości wyprowadzonej w zadaniu 1. Skorzystamy z zauważonych wcześniej przedziałów dla y_i

$$f_{Y_N}(y_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_{Y_1,Y_2,\dots,Y_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{n-3} dy_{n-2} dy_{n-1} = \tag{1}$$

$$= \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \cdots \int_0^{y_2} \lambda^n exp(-\lambda y_n) dy_1 \dots dy_{n-2} dy_{n-1} = \tag{2}$$

Wyciągamy skalary przed całki.

$$= \lambda^n exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \cdots \int_0^{y_3} y_2 dy_2 \dots dy_{n-2} dy_{n-1} = \tag{3}$$

$$= \lambda^n exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \cdots \int_0^{y_4} \frac{y_3^2}{2} dy_3 \dots dy_{n-2} dy_{n-1} = \tag{4}$$

Tutaj możemy już zauważyć schemat obliczania tej całki, otrzymujemy $i-2$ w wykładniku oraz $(i-2)!$ mianowniku w stosunku do indeksu y_i w granicy kolejnej całki. Mamy

$$= \lambda^n exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \frac{y_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!} dy_{n-1} = \tag{5}$$

$$= \lambda^n exp(-\lambda y_n) \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \tag{6}$$

Co jest szukanym wzorem.