Lista 10

Oskar Bujacz

20 maja 2020

Zadanie 7

Niezależne zmienne losowe X, Y podlegają rozkładom: $\chi^2(n)$ oraz $\chi^2(k)$. Znaleźć rozkład zmiennej $F = \frac{X}{Y} \cdot \frac{k}{n}$.

Rozwiązanie:

Na początek zapiszmy wzory na rozkłady X i Y znane z wykładu. Wiemy, że $n, k \in \mathbb{N}$

$$X \sim \chi^2(n) \Rightarrow f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \tag{1}$$

$$Y \sim \chi^2(k) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \tag{2}$$

Z niezależności zmiennych X i Y możemy rozpisać $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Otrzymamy wtedy:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x+y}{2}\right) \tag{3}$$

Wprowadźmy następującą zamianę zmiennych i policzmy potrzebny Jakobian.

$$F = \frac{X}{Y} \cdot \frac{k}{n} \qquad T = Y \tag{4}$$

$$X = \frac{n}{k} \cdot FT \qquad Y = T \tag{5}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n}{k} \cdot T & \frac{n}{k} \cdot F \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\frac{n}{k} \cdot T| = \frac{n}{k} \cdot T \tag{6}$$

Możemy przejść do obliczenia $g_{F,T}(f(x,y), t(x,y))$:

$$g_{F,T}(f,t) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{n}{k} ft\right)^{\frac{n}{2}-1} t^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\frac{n}{k} ft + t}{2}\right) t \frac{n}{k} \tag{7}$$

Dalej policzymy gęstość brzegową $g_F(f)$. Wiemy, że $Y \sim \chi^2(k)$, zatem $y \in \mathbb{R}_+$, podobnie $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g_F(f) = \int_0^\infty \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{n}{k} ft\right)^{\frac{n}{2}-1} t^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\frac{n}{k} ft + t}{2}\right) t \frac{n}{k} dt = \tag{8}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} f^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{k+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\frac{n}{k}ft+t}{2}\right) dt = \tag{9}$$

Rozwiążemy otrzymaną całkę przez odpowiednie podstawienie

$$z = \frac{\frac{n}{k}ft+t}{2} \Rightarrow t = \frac{2z}{\frac{n}{k}f+1} \tag{10}$$

$$dz = \frac{\frac{n}{k}f+1}{2}dt \Rightarrow dt = \frac{2}{\frac{n}{k}f+1}dz \tag{11}$$

$$\int_0^\infty t^{\frac{k+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\frac{n}{k}ft+t}{2}\right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{2z}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}-1} \exp\left(-z\right) \frac{2}{\frac{n}{k}f+1}dz = \tag{12}$$

Zauważamy rozkład Γ

$$= \left(\frac{2}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}} \int_0^\infty z^{\frac{k+n}{2}-1} \exp\left(-z\right) dz = \left(\frac{2}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}} \Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right) \tag{13}$$

Wracamy do równania(9)

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} f^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}} \Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right) = \tag{14}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} f^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}} = \tag{15}$$

Zamieniamy rozkłady Γ na rozkład B. Ostatecznie

$$= B\left(\frac{n}{2}, \frac{k}{2}\right)^{-1} \; f^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\frac{n}{k}f+1}\right)^{\frac{k+n}{2}} = \tag{16}$$