Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. Tydzień rozpoczynający się 15. kwietnia

Zadania

1. Niech $X \sim \text{Geom}(p)$ (rozkład geometryczny). Wykazać, że $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1 - qe^t}$.
2. Niech $X \sim \text{Geom}(p)$. Korzystając z funkcji $M_X(t)$ obliczyć $\text{E}(X)$ oraz $\text{V}(X)$.
3. Dla $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ mamy $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że postać $M_X(t)$ jest następująca: $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \dfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.
4. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i $X_k \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć funkcję tworzącą momenty $M_{\bar{X}}(t)$ zmiennej $\bar{X}$ ($\bar{X}$ to średnia z $X_1, \ldots, X_n$), a następnie zidentyfikować rozkład zmiennej $\bar{X}$.

   [**Z. 5–6**] Zmienna $X \sim \text{Gamma}(b, p)$ ma MGF postaci $M_X(t) = (1 - \dfrac{t}{b})^{-p}$. Można skorzystać z faktu, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5. Niech $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$.
6. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_k \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$.

   [**Z. 7–8**] Znaleźć rozkład, któremu podlega zmienna $Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$. O występujących w tych zadaniach zmiennych zakładamy, że są niezależne. Rozwiązujemy zadania używając "*MGFy*" (funkcje generujące momenty).

7. $X_k \sim \text{Gamma}(b, p_k)$, $k = 1, \ldots, n$.
8. $X_k \sim \text{B}(m_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.
9. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = \dfrac{15}{2} x^2 y$ (na trójkącie o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$). Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $T = X/Y$.
10. Zakładamy, że zysk firmy jest zmienną losową U. MGF tego zysku przedstawia się wzorem $M_U(t) = \dfrac{2}{2 - 3t}$. Wyznaczyć:
    (a) wartość oczekiwaną zysku,
    (b) wariancję zysku,
    (c) MGF podatku od zysku, przy założeniu stopy podatkowej liniowej, 90%.
11. Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X. Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich zmiennych zależy Y) jeżeli:
    (a) $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t)$,
    (b) $M_Y(t) = \mathrm{e}^{2t} M_X(t)$,
    (c) $M_Y(t) = 4 M_X(t)$.

Witold Karczewski