Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 4. Tydzień rozpoczynający się 23. marca

Zadania

1. Dla funkcji $f(x,y) = C(x+y)\exp\{-(x+y)\}$, gdzie $x > 0$, $y > 0$
   (a) Wyznaczyć stałą C taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej (X, Y).
   (b) Sprawdzić, czy zmienne losowe X, Y są niezależne.
   (c) Obliczyć momenty m_{10}, m_{01}.

   W zadaniach 2–10 zakładamy, że zmienne losowe są ciągłe, stosujemy też oznaczenia: gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej X to – odpowiednio – $f_X(x)$ oraz $F_X(x)$.

2. Czy można tak dobrać stałą C, aby funkcja $f_{XY}(x,y) = Cxy + x + y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

   Do zadań 3–4. Dana jest funkcja $f_{XY}(x,y) = -xy + x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

3. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
4. Obliczyć ppb $P(1 \leqslant X \leqslant 3,\ \ 0 \leqslant Y \leqslant 0.5)$.

   Oznaczenie: $X \sim U[a,b]$ oznacza, że zmienna losowa X podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale $[a,b]$. Innymi słowy: $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$, dla $x \in [a,b]$.

5. Załóżmy, że $X \sim U[0,1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \dfrac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leqslant y \leqslant 1$.
6. Zmienna losowa $X \sim U[-1;1]$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = |X|$.
7. Niech X będzie ciągłą zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0;1]$.
8. Niech $Y = X^2$ (X określona na $\mathbb{R}$). Wykazać, że
$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \text{dla } y > 0.$$
9. Zmienna losowa X ma gęstość $f_X(x) = xe^{-x}$, dla $x \geqslant 0$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.
10. Niech $X \sim U[a;b]$. Obliczyć wartość $\mathrm{V}(X)$
11. Niech X podlega standardowemu rozkładowi Cauchy'ego, $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że $Y = \dfrac{1}{X}$ ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.

Witold Karczewski