Lista 9

Oskar Bujacz

13 maja 2020

Zadanie 5

Niezależne zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_5$ mają ten sam, ciągły rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k. Obliczyć wartość p.

Na początek weźmy sobie takie Y o rozkładzie ciągłym, że $Y = F_X(x)$. Rozważmy $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F_X(x) < x) = P(x < F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y \tag{1}$$

Zatem rozkład Y to $U[0,1]$, więc funkcja gęstości $f_Y(y) = 1$ Wróćmy do p.

$$p = P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5) = \tag{2}$$

Rozpiszmy z użyciem dystrybuanty i zamieńmy $F(X_i) = y_i$

$$= P(F(X_1) < F(X_2), \quad F(X_2) > F(X_3), \quad F(X_3) < F(X_4), \quad F(X_4) > F(X_5) = \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_2} \int_{y_3}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_4} f_Y(y_1) f_Y(y_2) f_Y(y_3) f_Y(y_4) f_Y(y_5) dy_5 dy_4 dy_3 dy_2 dy_1 = \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y_1) \int_{y_1}^{\infty} f_Y(y_2) \int_{-\infty}^{y_2} f_Y(y_3) \int_{y_3}^{\infty} f_Y(y_4) \int_{-\infty}^{y_4} f_Y(y_5) dy_5 dy_4 dy_3 dy_2 dy_1 = \tag{5}$$

Podstawmy odpowiednie granice korzystając z $Y \sim U[0,1]$ oraz $f_Y(y_i) = 1$.

$$= \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_0^{y_2} \int_{y_3}^1 \int_0^{y_4} dy_5 dy_4 dy_3 dy_2 dy_1 = \tag{6}$$

$$= \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_0^{y_2} \int_{y_3}^1 y_4 dy_4 dy_3 dy_2 dy_1 = \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_0^{y_2} \frac{1}{2} - \frac{y_3^2}{2} dy_3 dy_2 dy_1 = \tag{7}$$

$$= \int_0^1 \int_{y_1}^1 \frac{y_2}{2} - \frac{y_2^3}{6} dy_2 dy_1 = \int_0^1 \frac{y_2^2}{4} - \frac{y_2^4}{24} \Bigg|_{y_1}^1 dy_1 = \tag{8}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_1^4}{24} dy_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{2}{15} \tag{9}$$

Udało się obliczyć konkretną wartość p bez założeń dotyczących rozkładów X_i, zatem jest ona od nich niezależna.