Lista 4

Oskar Bujacz

15 kwietnia 2020

Zadanie 8

Zmienna $(X+Y)$ ma rozkład o gęstości $f(x,y) = xy$, na obszarze $[0,2] \times [0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

Rozwiązanie

Rozważmy zamianę zmiennych $(X,Y) \to (Z,T)$. Wtedy mamy $Z = X+Y$, $X = Z-Y$ oraz $T = Y$. Do dalszych obliczeń potrzebny będzie jakobian.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Funkcja gęstości to $g(z,t) = f(x(z,t), y(z,t)) \cdot |J| = (z-t)t \cdot 1 = (z-t)t$. Pozostaje nam określić przedziały dla z, t.

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-2 \leqslant t \leqslant z \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

gdzie $t \in [0,1]$ oraz $z \in [0,3]$.

Do określenia pozostaje obszar całkowania. Przedziałem całkowania dla t jest przedział $[max\{z-2,0\}, min\{z,1\}]$. Możemy łatwo zauważyć, max i min będą zmieniać w punktach 1 i 2, zatem zatem dla ustalonego z dobieramy t.

$$z \in [0,1] \Rightarrow t \in [0,z]$$

$$z \in [1,2] \Rightarrow t \in [0,1]$$

$$z \in [2,3] \Rightarrow t \in [z-2,1]$$

Funkcja gęstości szukanej zmiennej $Z = X + Y$ to

$$g(z) = \int g(z,t)dt = \int zt - t^2 dt = \frac{zt^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C$$

Po rozbiciu na przypadki dla z

$$g(z) = \begin{cases} \left(\frac{zt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^z & z \in [0,1] \\ \left(\frac{zt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^z & z \in [1,2] \\ \left(\frac{zt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{z-2}^1 & z \in [2,3] \end{cases}$$