Лекция 11

Модели бинарных откликов. Описание модуля Nonlinear Estimation.

Модуль нелинейное оценивание включает бинарные (логит и пробит), экспоненциальную, заданную пользователем модели. Бинарные модели применяют, если зависимая переменная (отклик) может принимать только два значения. Например, пациент может выздороветь, а может не выздороветь. Кандидат на работу может пройти тест, а может провалить и т.д. Во всех этих случаях представляет интерес поиск зависимостей между одной или несколькими «непрерывными» переменными и одной зависимой от них бинарной переменной. Так как технически достаточно сложно смоделировать бинарную функцию от непрерывных аргументов, задачу регрессии формулируют иначе. Вместо предсказания бинарной переменной предсказывают **непрерывную переменную со значениями на отрезке** [0, 1].

Наибольшее распространение получили логит и пробит модели, которые реализованы в программе *STATISTICA.*

В логит модели отклик принимает значения из отрезка [0,1]. Это достигается применением регрессионного уравнения

$$Y = exp(b_0 + b_1X_1 + \ldots + b_nX_n)/\{1+exp(b_0 + b_1X_1 + \ldots + b_nX_n)\}.$$

Легко заметить, что вне зависимости от коэффициентов регрессии и значений X значения отклика Y, предсказанные этой моделью, всегда будут принадлежать отрезку [0, 1]. Покажем это для случая $n = 1$:

$$Y = exp(b_0+b_1X)/\{1 + exp(b_0+b_1X)\} = \{exp(b_0+b_1X)+$$
$$+ 1 - 1\}/\{1 + exp(b_0 + b_1X)\}=1 - 1/\{1 + exp(b_0 + b_1X)\}.$$

Очевидно, что при $exp(b_0 + b_1X) \to \infty$, $Y\to 1$;

при $exp(b_0 + b_1X) \to 0$, $Y\to 0$.

В пробит регрессии бинарная зависимая переменная рассматривается как отклик некоторой нормированной нормально распределенной переменной *Y*, принимающей любое действительное значение.

Рассмотрим регрессионную модель

$$Y = b_0 + b_1X_1 + \ldots + b_nX_n,$$

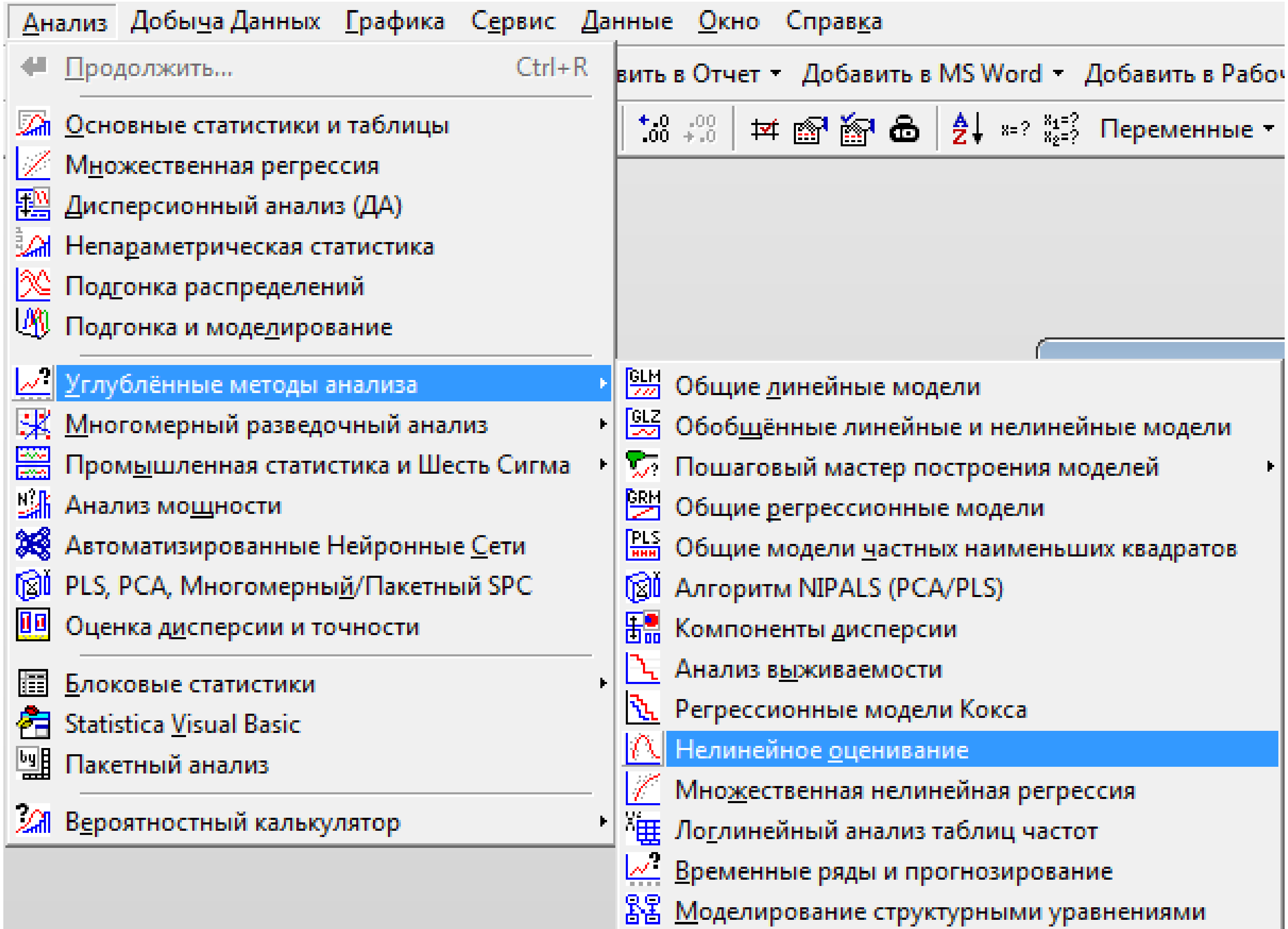
где $Y \in R$ и имеет нормированное нормальное распределение. Тогда в качестве бинарного отклика рассмотрим функцию распределения вероятностей переменной Y, принимающей значения из [0, 1],

$$\mathrm{P(Y < y) = F(y)} = \Phi\left(\frac{Y - MY}{\sigma_Y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{Y-MY}{\sigma_Y}} e^{\frac{-1}{2}t^2}\,dt$$

где *y* – значение переменной *Y*; μY и σY– соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение *Y*. Данное уравнение называют «пробит» регрессионной моделью**.** Таким образом, в пробит и логит регрессии бинарный отклик моделируют как непрерывную переменную, принимающую значения из интервала [0, 1]. Из такой переменной легко получить бинарную переменную, например, при помощи следующего правила:

если $Y \in [0; 0{,}5]$, то $Y = 0$; если $Y \in (0{,}5; 1]$, то $Y = 1$.

Для запуска модуля **Нелинейное оценивание** надо в меню **Анализ** выбрать команду **Углубленные методы анализа**. Далее в открывшемся меню выбрать процедуру **Нелинейное оценивание**.


Анализ
Добыча Данных
Графика
Сервис
Данные
Окно
Справка
Продолжить... Ctrl+R
Основные статистики и таблицы
Множественная регрессия
Дисперсионный анализ (ДА)
Непараметрическая статистика
Подгонка распределений
Подгонка и моделирование
Углублённые методы анализа
Многомерный разведочный анализ
Промышленная статистика и Шесть Сигма
Анализ мощности
Автоматизированные Нейронные Сети
PLS, PCA, Многомерный/Пакетный SPC
Оценка дисперсии и точности
Блоковые статистики
Statistica Visual Basic
Пакетный анализ
Вероятностный калькулятор
Добавить в MS Word
Переменные
Общие линейные модели
Обобщённые линейные и нелинейные модели
Пошаговый мастер построения моделей
Общие регрессионные модели
Общие модели частных наименьших квадратов
Алгоритм NIPALS (PCA/PLS)
Компоненты дисперсии
Анализ выживаемости
Регрессионные модели Кокса
Нелинейное оценивание
Множественная нелинейная регрессия
Логлинейный анализ таблиц частот
Временные ряды и прогнозирование
Моделирование структурными уравнениями

В окне модуля представлены шесть видов нелинейного оценивания (рис. 1):

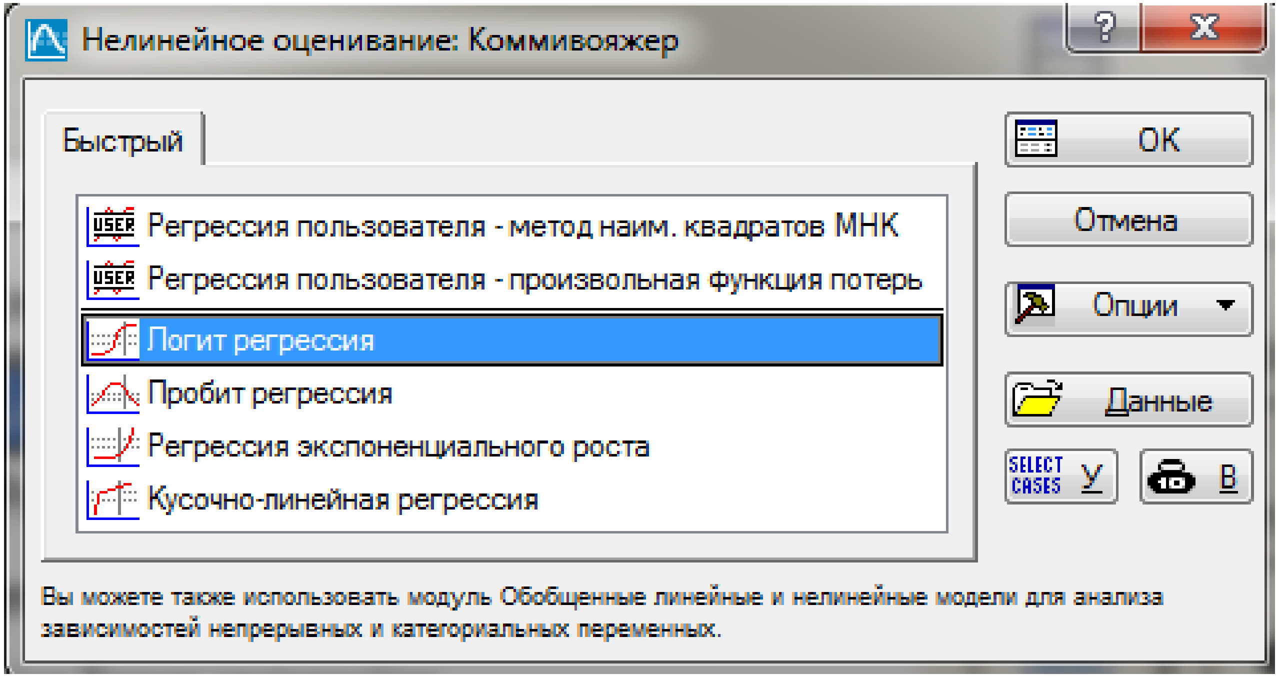


Рис. 1

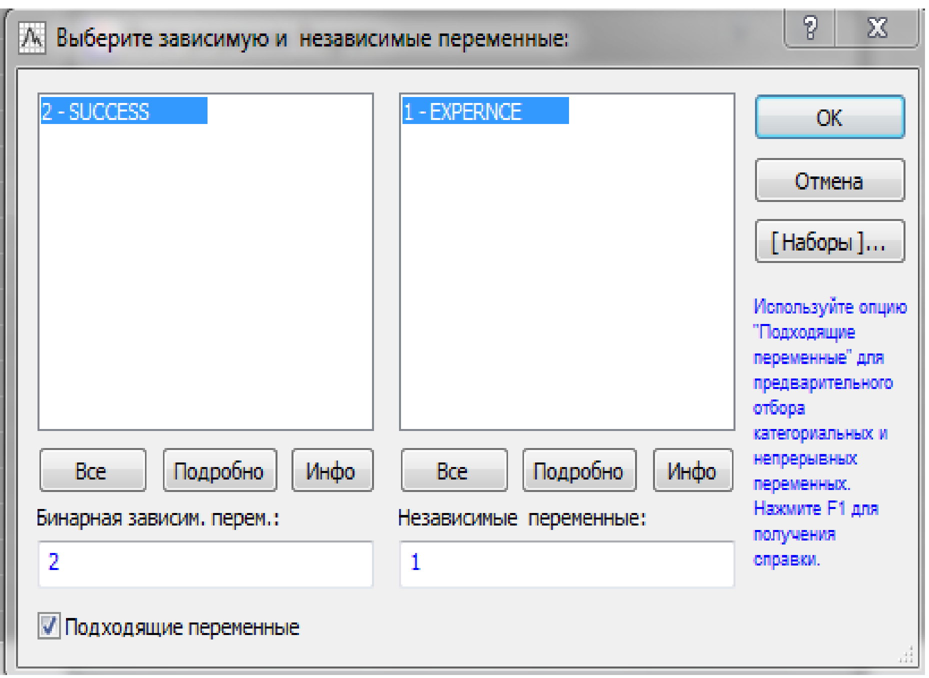
Рассмотрим работу с командой **Логит регрессия.** В качестве данных рассмотрим файл **Program.sta** из библиотеки **Example,** содержащий информацию о тестировании программистов.

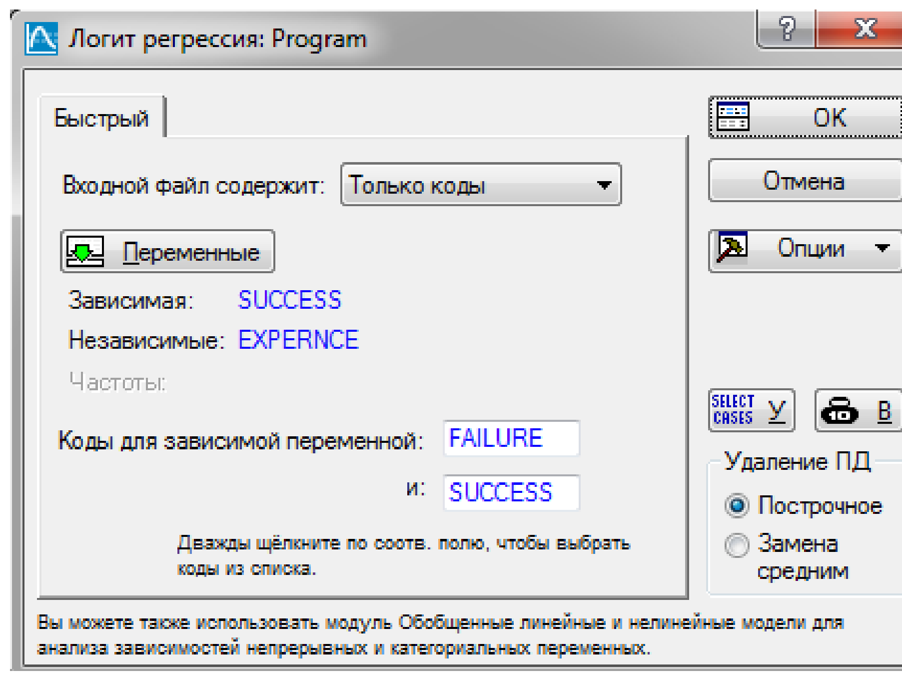
	Success in a programing	
	1 EXPERNCE	2 SUCCESS
Frank	14	FAILURE
Henry	29	FAILURE
Tom	6	FAILURE
Beth	25	SUCCESS
Susan	18	SUCCESS
Harry	4	FAILURE
Paul	18	FAILURE
Pete	12	FAILURE
Diana	22	SUCCESS
Louise	6	FAILURE
Fred	30	SUCCESS
Hank	11	FAILURE
Steven	30	SUCCESS
Tod	5	FAILURE
Take	20	SUCCESS
Sam	13	FAILURE
Gail	9	FAILURE
Thomas	32	SUCCESS
Theodore	24	FAILURE
Charles	13	SUCCESS
Elizabeth	19	FAILURE
Lori	4	FAILURE
Ann	28	SUCCESS
Valerie	22	SUCCESS
Anke	8	SUCCESS

Рис. 2

Наблюдения – это имена программистов. Переменная *Experience* отображает стаж программиста. Переменная *Success* принимает значения *failure* (провал - 0) или *success* (удача – 1) в зависимости от результатов теста. Необходимо построить регрессионную модель зависимости бинарного отклика *Success* от непрерывной переменной *Experience.*

Выберите в диалоговом окне команду **Quick Logit regression**. Откроется окно диалога **Logistic regression.** Для того чтобы начать анализ, следует выбрать зависимую и независимые переменные из списка переменных, щелкнув кнопкой **Variables**. Зависимой переменной (откликом) выберите *Success*, независимой – *Experience*. Если нажать на **OK,** программа возвратится в начальное диалоговое окно. При нажатии на ОК уже в этом окне откроется окно в котором можно выбрать параметры и метод оценивания





В верхней информационной части содержится информация о модели: название модели; название зависимой и независимой переменных; коды бинарного отклика; число наблюдений. В нижней части окна можно выбрать процедуру оценивания: *Квази-Ньютоновский*, *Симплекс метод*, *Симплекс и Квази-Ньютоновский*, *Хука-Дживиса и др*. В окне можно назначить параметры процедуры *Максимальное количество итераций*, *Критерий сходимости*, *Начальные значения*, *Начальный размер шага*. Все эти возможности относятся к вкладке **Дополнительно**. Выберем метод оценивания и параметры по умолчанию

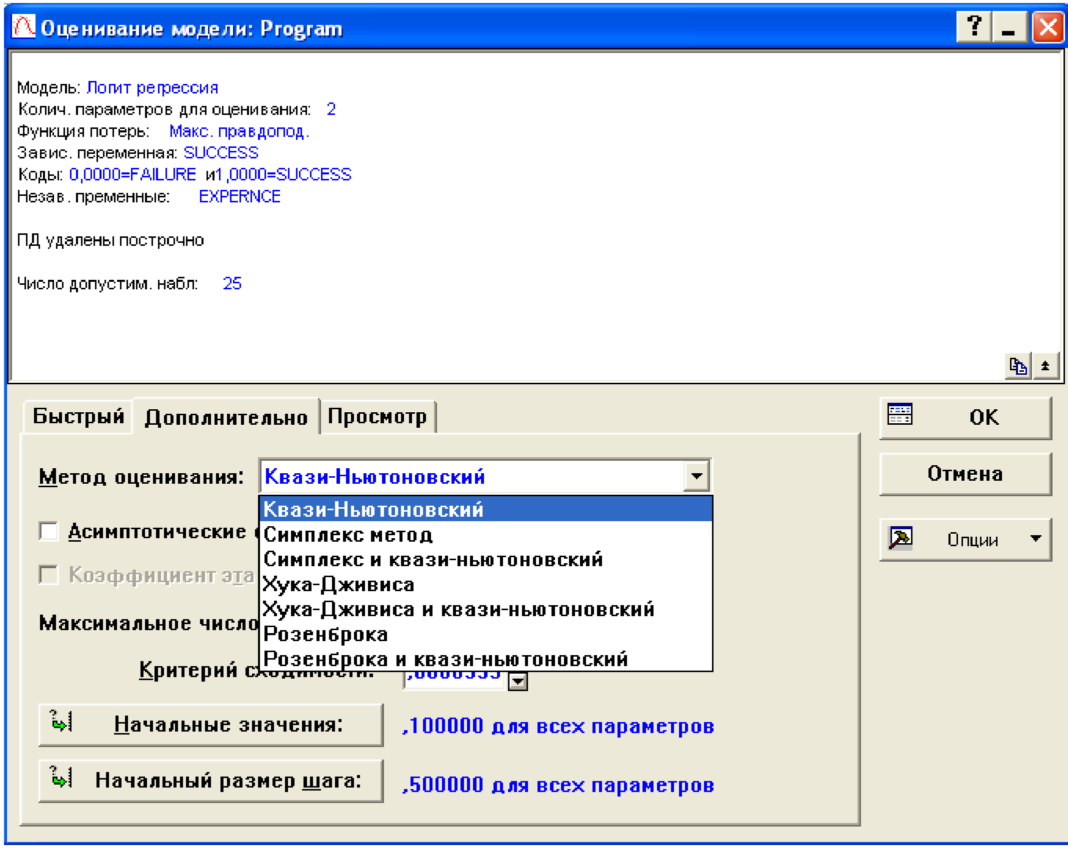
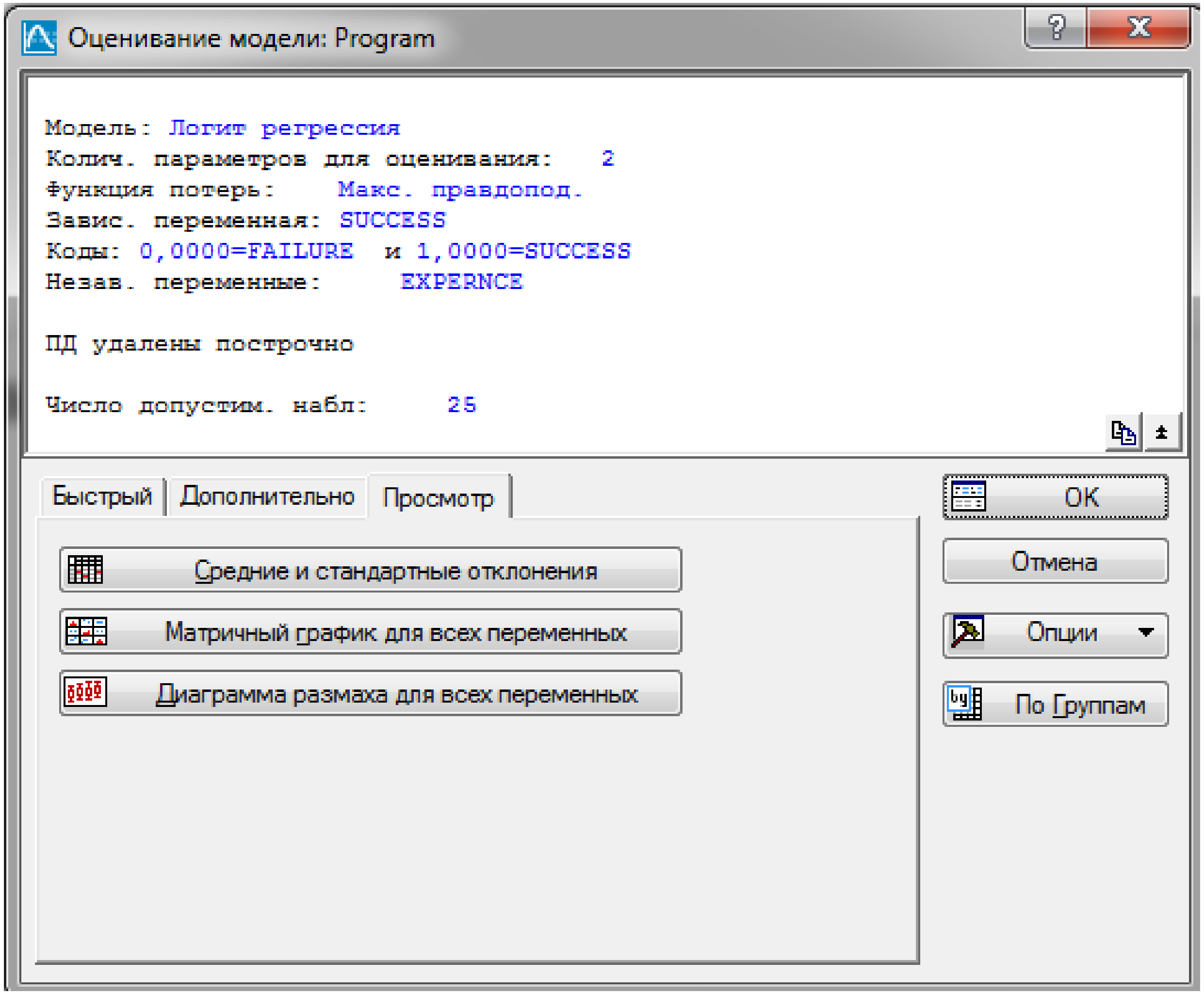


Рис. 3

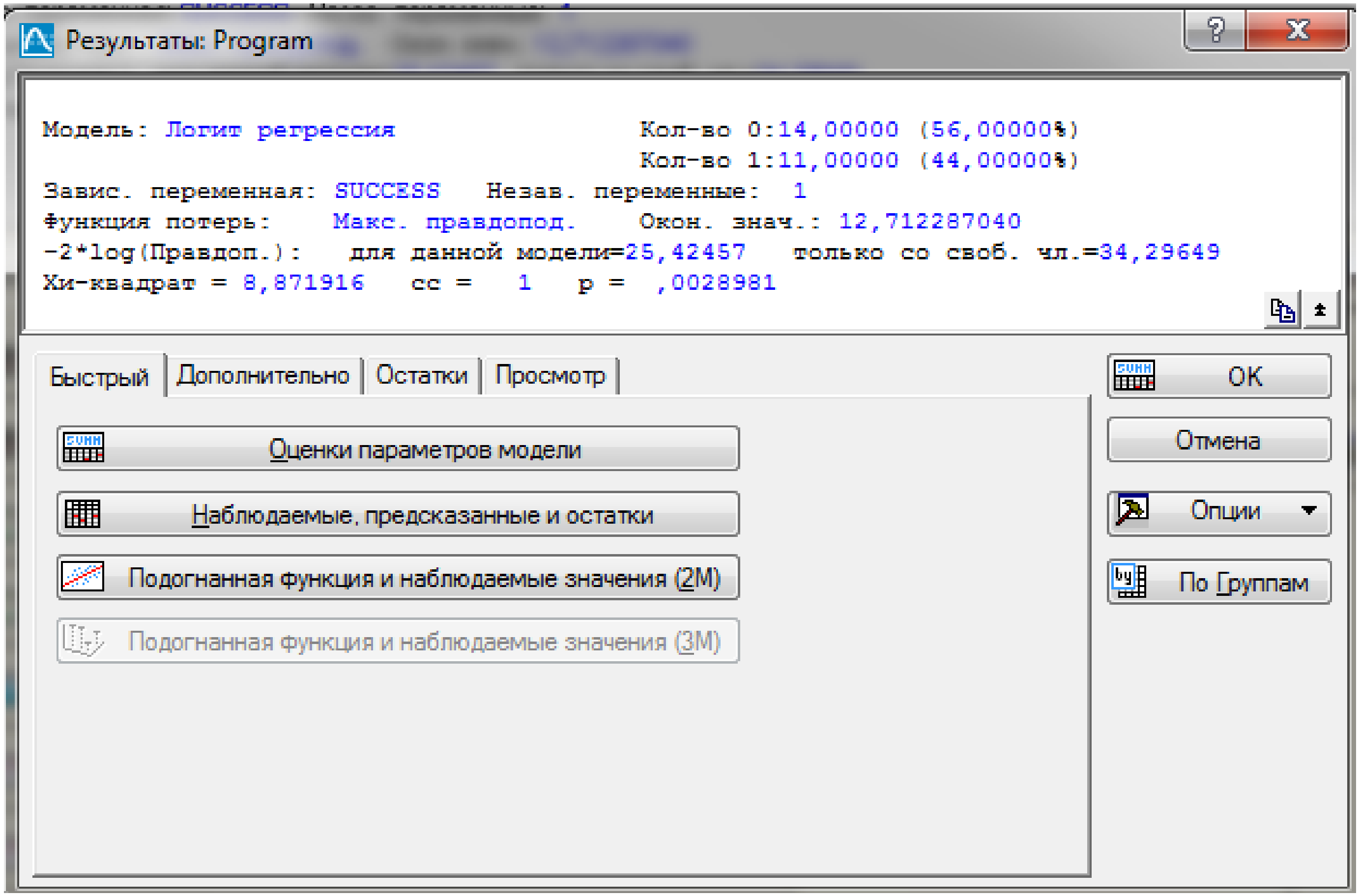
Вкладка **Просмотр** содержит стандартный набор кнопок для предварительного просмотра различных сравнительных характеристик:

– *Средние и стандартные отклонения*;
– *М*атричный график для всех переменных;
– *Диаграммы размаха для всех переменных*.



После того как все параметры выбраны (по умолчанию), изучены различные статистические характеристики, можно перейти непосредственно к оцениванию. В окне **Model Estimation** (**Оценивание модели**) нажмем на **ОК**. Если процесс оценивания сошелся за указанное количество итераций, то появится диалоговое окно **Results.**

Окно **Results** состоит из информационной и функциональной частей (рис. 4). Из первой части видно, что значение параметра *Chi-square* достаточно велико, а значение *p* – мало. Это говорит о достаточной адекватности выбранной модели.



Если нажать на кнопку *Оценки параметров* появится таблица с коэффициентами модели логит регрессии, по которым можно составить уравнение логит регрессии.

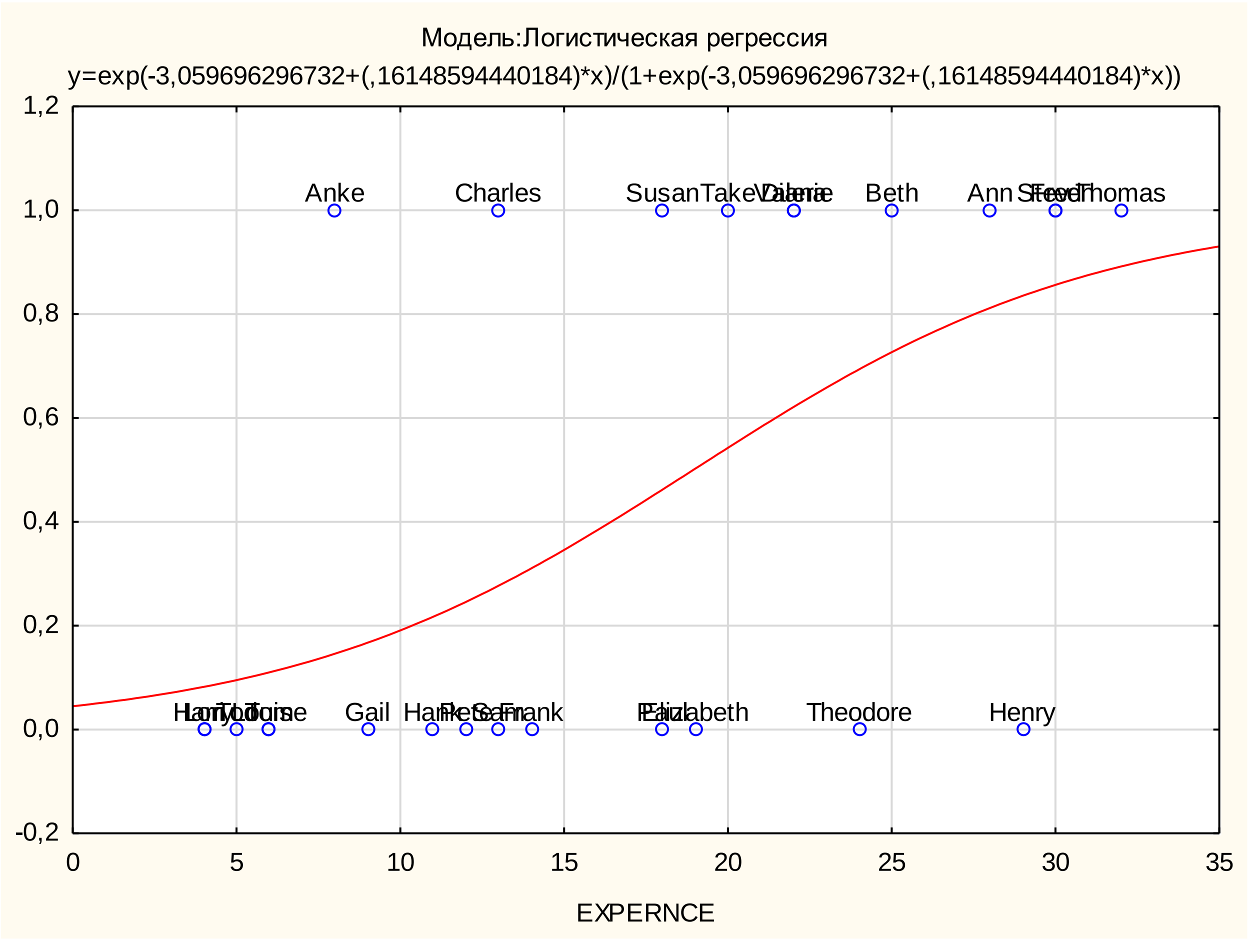
Если нажать на кнопку *Наблюдаемые, предсказанные и остатки* появится таблица с соответствующими значениями. Ошибочные классификации выделены красным цветом

N=25	Модель: Логистическая регрессия Число 0: 14 1: 11 (Program) Зав. пер.: SUCCESS Потери: Максисмум правдоподобия Итоговые потери: 12,712287040 Хи^2(1)=8,8719 p=,00290	
	B0	EXPERNCE
Оценка	-3,05970	0,16149
Отн.Шансов(ед. изм.)	0,04690	1,17526
Отн.Шансов(размах)		91,98325

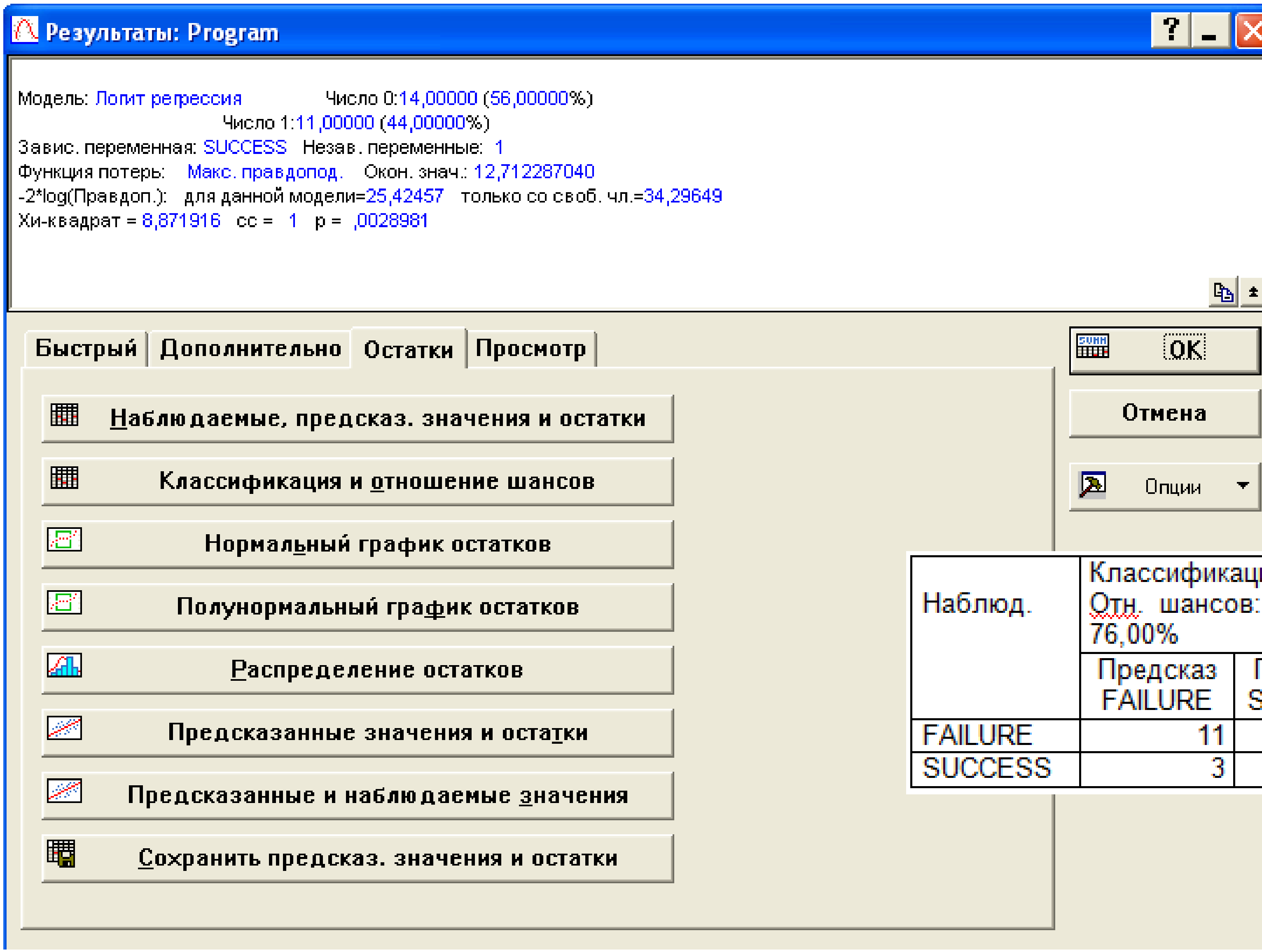
	Модель: Логистическая регрессия (Program) Зав. Пер.: SUCCESS		
	Наблюд.	Предсказанные	Остатки
Frank	0,000000	0,310262	-0,310262
Henry	0,000000	0,835263	-0,835263
Tom	0,000000	0,109996	-0,109996
Beth	1,000000	0,726602	0,273398
Susan	1,000000	0,461837	0,538163
Harry	0,000000	0,082130	-0,082130
Paul	0,000000	0,461837	-0,461837
Pete	0,000000	0,245666	-0,245666
Diana	1,000000	0,620812	0,379188
Louise	0,000000	0,109996	-0,109996
Fred	1,000000	0,856299	0,143701
Hank	0,000000	0,216980	-0,216980
Steven	1,000000	0,856299	0,143701
Tod	0,000000	0,095154	-0,095154
Take	1,000000	0,542404	0,457596
Sam	0,000000	0,276802	-0,276802
Gail	0,000000	0,167100	-0,167100
Thomas	1,000000	0,891664	0,108336
Theodore	0,000000	0,693379	-0,693379
Charles	1,000000	0,276802	0,723198
Elizabeth	0,000000	0,502134	-0,502134
Lori	0,000000	0,082130	-0,082130
Ann	1,000000	0,811825	0,188175
Valerie	1,000000	0,620812	0,379188
Anke	1,000000	0,145815	0,854185

$$Success = exp(-3,06 + 0,16Experience)/(1 + exp(-3,06 + +0,16Experience)).$$

Если нажать на кнопку *Подогнанная функция и наблюдаемые значения*, то программа построит кривую логистической регрессии



Перейдем на вкладку *Остатки* и нажмем на кнопку *Классификация* и отношение шансов. Появится двумерная таблица с частотами наблюдаемых и прогнозных значений бинарного отклика



Наблюд.	Классификация (Program) Отн. шансов: 9,7778 Проц. верн.: 76,00%		
	Предсказ FAILURE	Предсказ SUCCESS	% Правилн.
FAILURE	11	3	78,57143
SUCCESS	3	8	72,72727

Рис. 4

Наиболее полно графическая информация о результатах моделирования приведена на вкладке **Остатки**.

Остатки представляют собой разницу между исходными величинами и предсказанными с помощью модели. Все кнопки этой вкладки (кроме трех) предназначены для графической визуализации результатов, кнопка **Распределение остатков** – для визуализации гистограммы остатков. Гистограмма остатков дана в сравнении с плотностью нормального распределения. Из рис. 5 видно, что гистограмма достаточно «хорошо» приближается кривой плотности нормального распределения. Это также свидетельствует об адекватности модели.

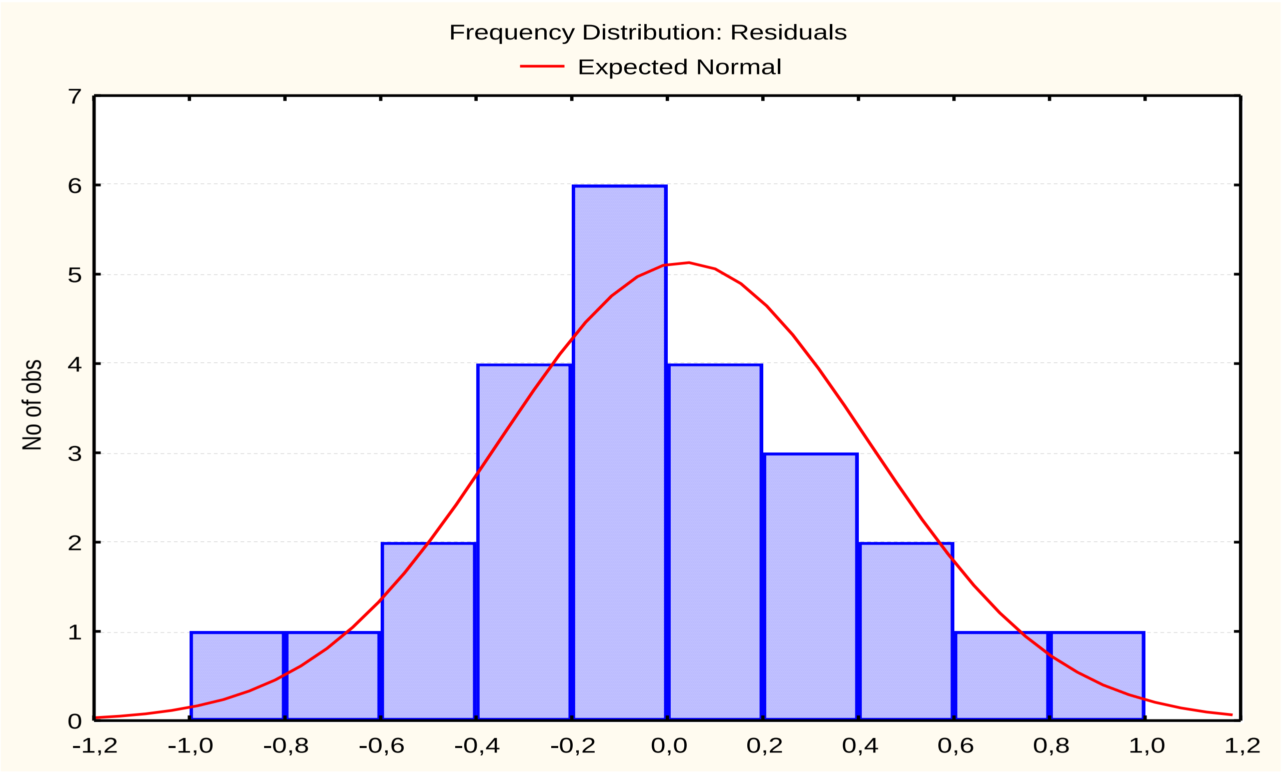
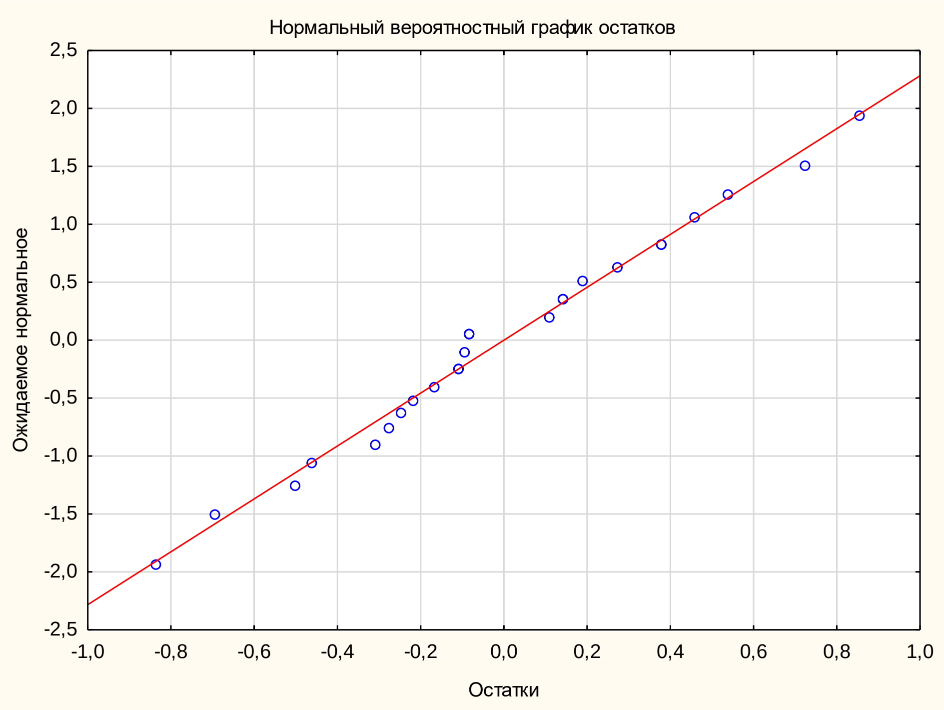


Рис. 5

Соответствие распределения остатков нормальному закону можно оценить также при помощи кнопок **Нормальный график** и **Полу нормальный график** – только абсолютные величины).

Если нажать на кнопку **Предсказанные и наблюдаемые значения** появится график на котором по оси ординат расположены наблюдаемые значений, а по оси абсцисс – предсказанные. К сожалению имена наблюдений не показаны



Экспоненциальная регрессия. Описание процедуры Exponential growth regression.

Exponential growth regression (регрессии экспоненциального роста**)** соответствует модель вида

$$Y = c + exp(b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots) + \varepsilon,$$

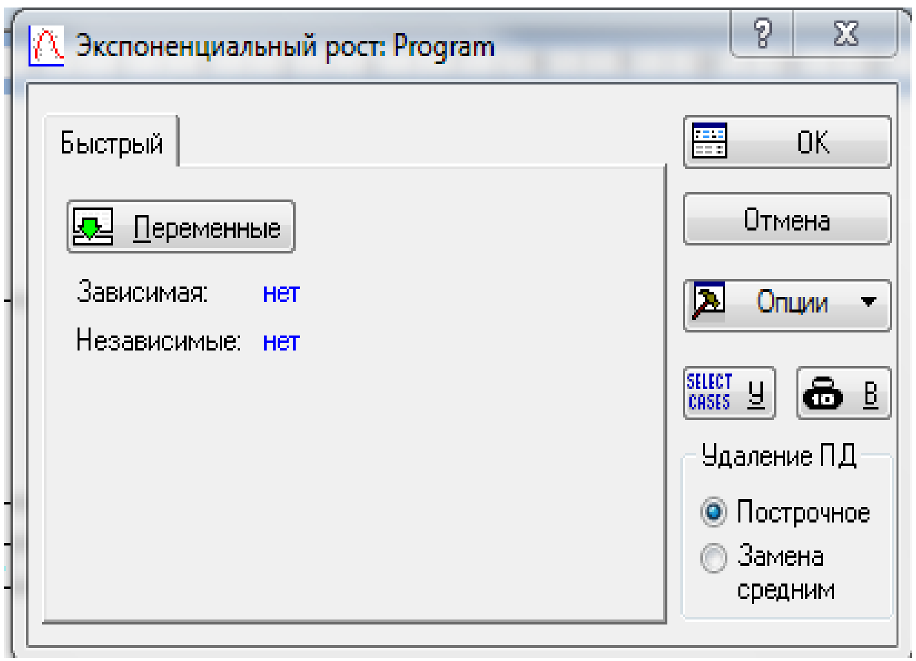
где c, b_0, b_1…– параметры, которые необходимо оценить.

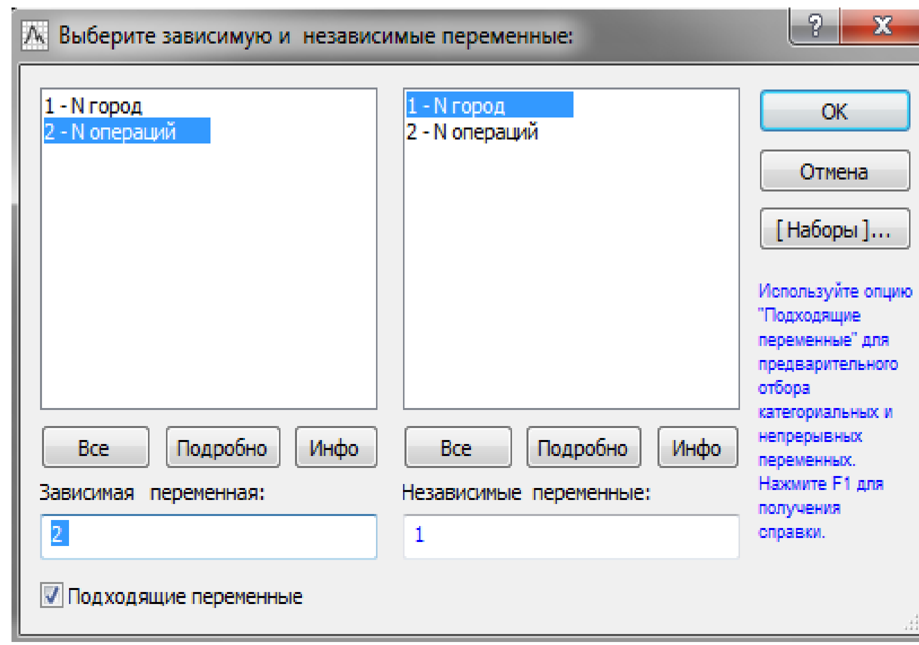
Таблица данных *Коммивояжер* (таблица есть в STATISTICA примеры) изображена на рис. 7.

	1 N город	2 N операций
1	5	140
2	6	403
3	7	1097
4	8	2981
5	9	8000
6	10	22026
7	11	59874
8	12	162755
9	13	442000
10	14	1202604

Рис. 7

Переменная *N город* – это размерность решаемой задачи. Надо определить, существует ли взаимосвязь между размерностью задачи и количеством операций (трудоемкостью алгоритма), можно ли эту взаимосвязь представить моделью регрессионного роста, найти параметры модели. В качестве зависимой переменой используем *N операций*, а в качестве независимой – соответственно *N город*. После выбора переменных в стартовом окне нажмем **OK.** Откроется окно **Оценивание модели** (рис. 8).





Выберем метод оценивания, например **Розенброк и квази-ньютоновский,** и если нужно установив параметры вычислительной процедуры, щелкнем по **OK.**

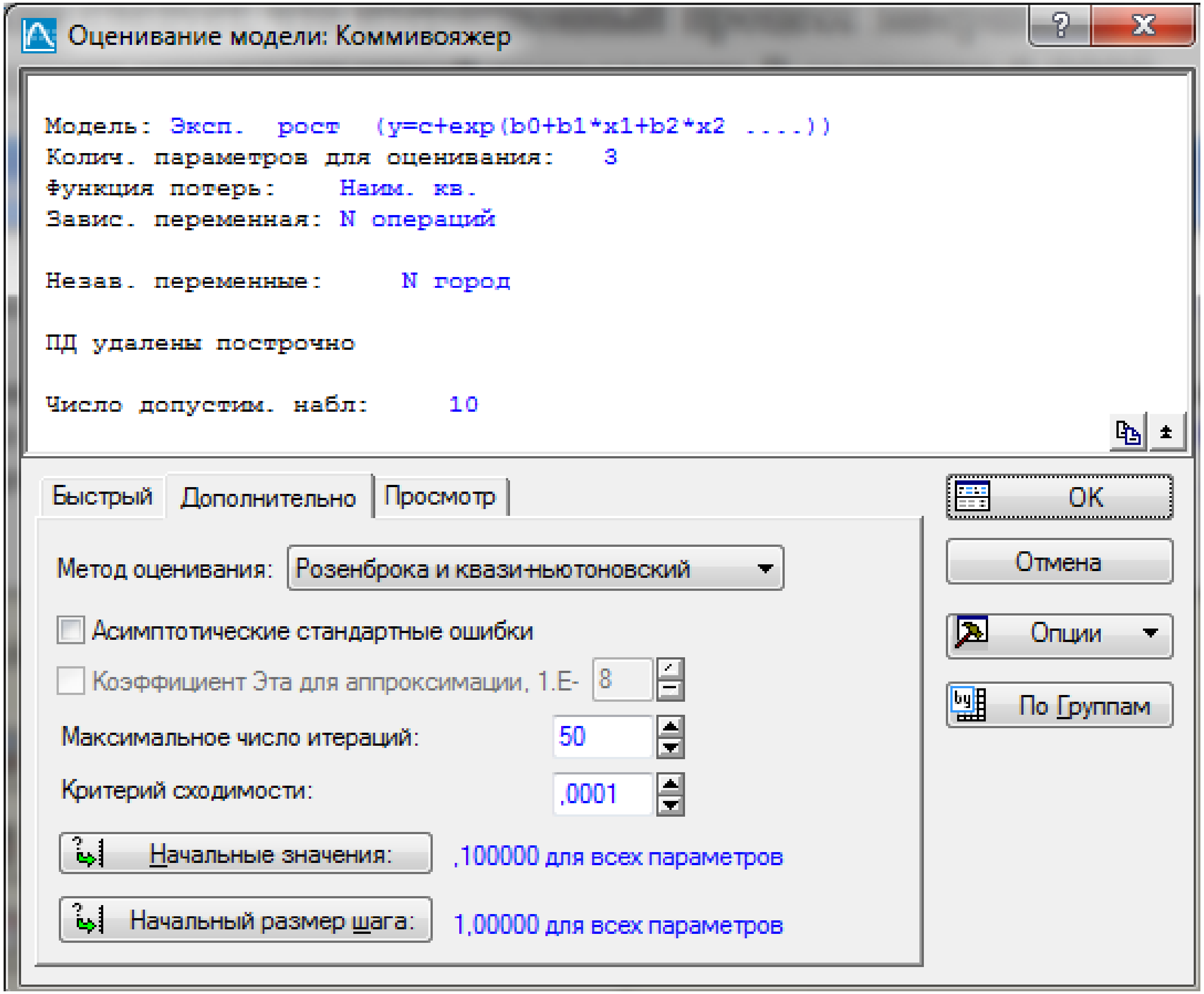

Оценивание модели: Коммивояжер
Модель: Эксп. рост (y=c+exp(b0+b1*x1+b2*x2 ....))
Колич. параметров для оценивания: 3
Функция потерь: Наим. кв.
Завис. переменная: N операций
Незав. переменные: N город
ПД удалены построчно
Число допустим. набл: 10
Быстрый
Дополнительно
Просмотр
OK
Отмена
Опции
По Группам
Метод оценивания:
Розенброка и квази-ньютоновский
Асимптотические стандартные ошибки
Коэффициент Эта для аппроксимации, 1.E-
8
Максимальное число итераций:
50
Критерий сходимости:
,0001
Начальные значения:
,100000 для всех параметров
Начальный размер шага:
1,00000 для всех параметров

Рис. 8

Появится диалоговое окно результатов **Results** (рис. 9). Из информационной части окна следует, что итерационный процесс завершился успешно, коэффициент множественной корреляции *R* составил 0,9999.

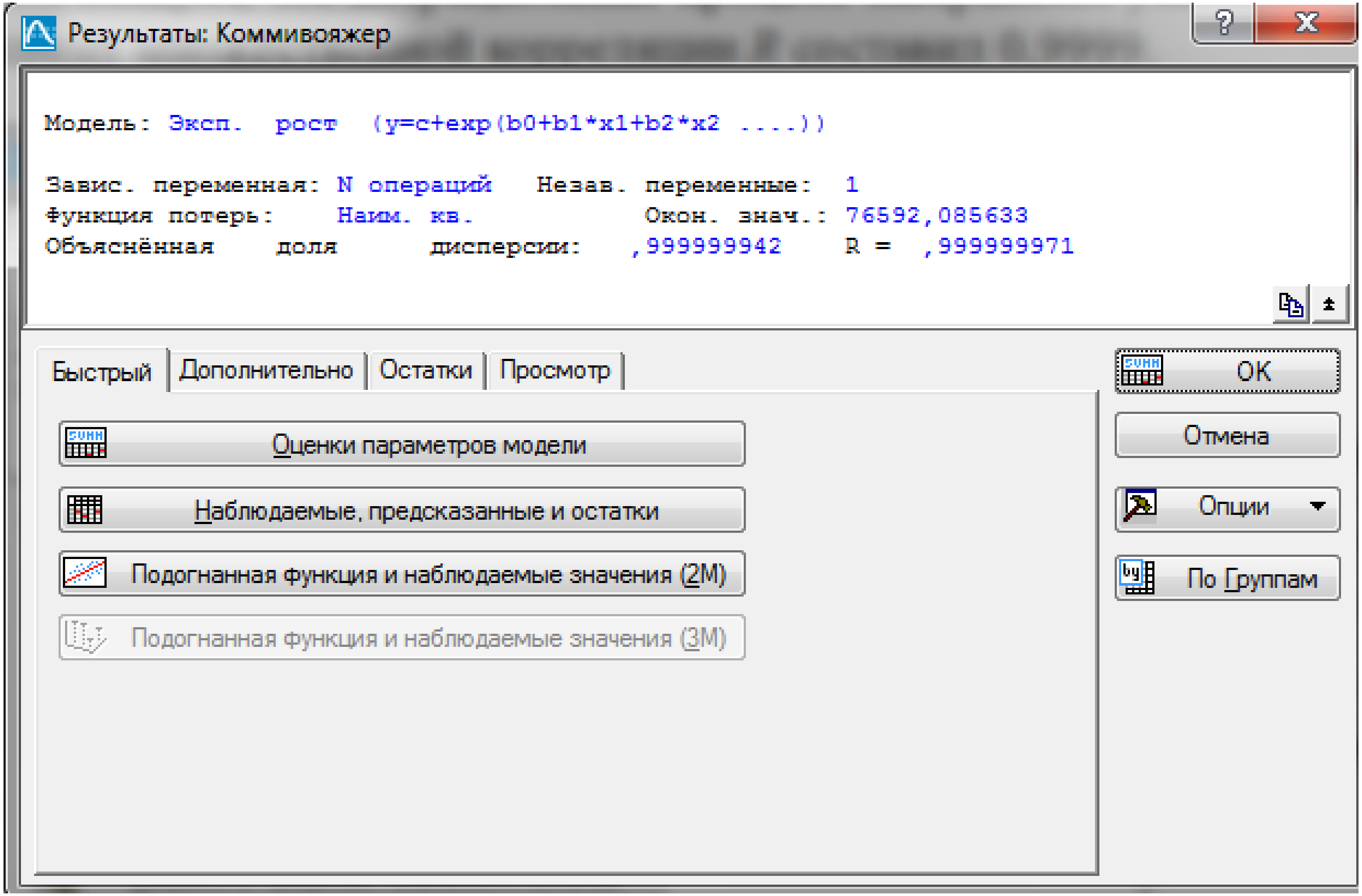


Рис. 9

Нажмем кнопку **Наблюдаемые, предсказанные значения....** Откроется таблица для просмотра наблюдаемых и предсказанных значений трудоемкости алгоритма, остатков (рис. 10). Из таблицы видно, что наблюдаемые и предсказанные значения незначительно отличаются друг от друга. Несмотря на большие значения сравниваемых величин, наибольший остаток не превышает по модулю 500.

	Model is: (Коммивояжер) Dep. Var. : N операций		
	Observed	Predicted	Residuals
1	140	166	-25,847
2	403	420	-16,353
3	1097	1110	-13,804
4	2981	2989	-7,942
5	8000	8098	-97,989
6	22026	21994	32,653
7	59874	59788	86,124
8	162755	162582	173,170
9	442000	442162	-162,186
10	1202604	1202572	32,028

Рис. 10

Нажмем кнопку **Оценки параметров модели.** Появится таблица (рис. 11) со значениями параметров регрессионной модели.

N=10	Модель: эксп. рост (y=c+exp(b0+b1*x1+b2*x2 ....)) (Коммивояжер) Завис. переменная: N операций Потери: Наименьшие квадраты Итоговые потери:76592,085707 R= 1,0000 Объяснён. дисперс.: 100		
	C	B0	N город
Оценка	18,19628	-0,007985	1,000567

Рис. 11

По данным таблицы можно составить уравнение регрессии экспоненциального роста:

$$N\text{операц} = 18{,}19634 + \exp(-0{,}007985 + 1{,}000567 N\,\text{город}).$$

Используя приведенное соотношение, легко по заданному значению числа городов оценить трудоемкость алгоритма поиска решения задачи коммивояжера.

Нажмем кнопку **Подогнанная функция и наблюдаемые значения.** Появится изображение графика с нанесенными наблюдаемыми значениями (рис. 12). Из графика видно значительное соответствие регрессионной модели эмпирической зависимости между числом городов и трудоемкостью алгоритма.

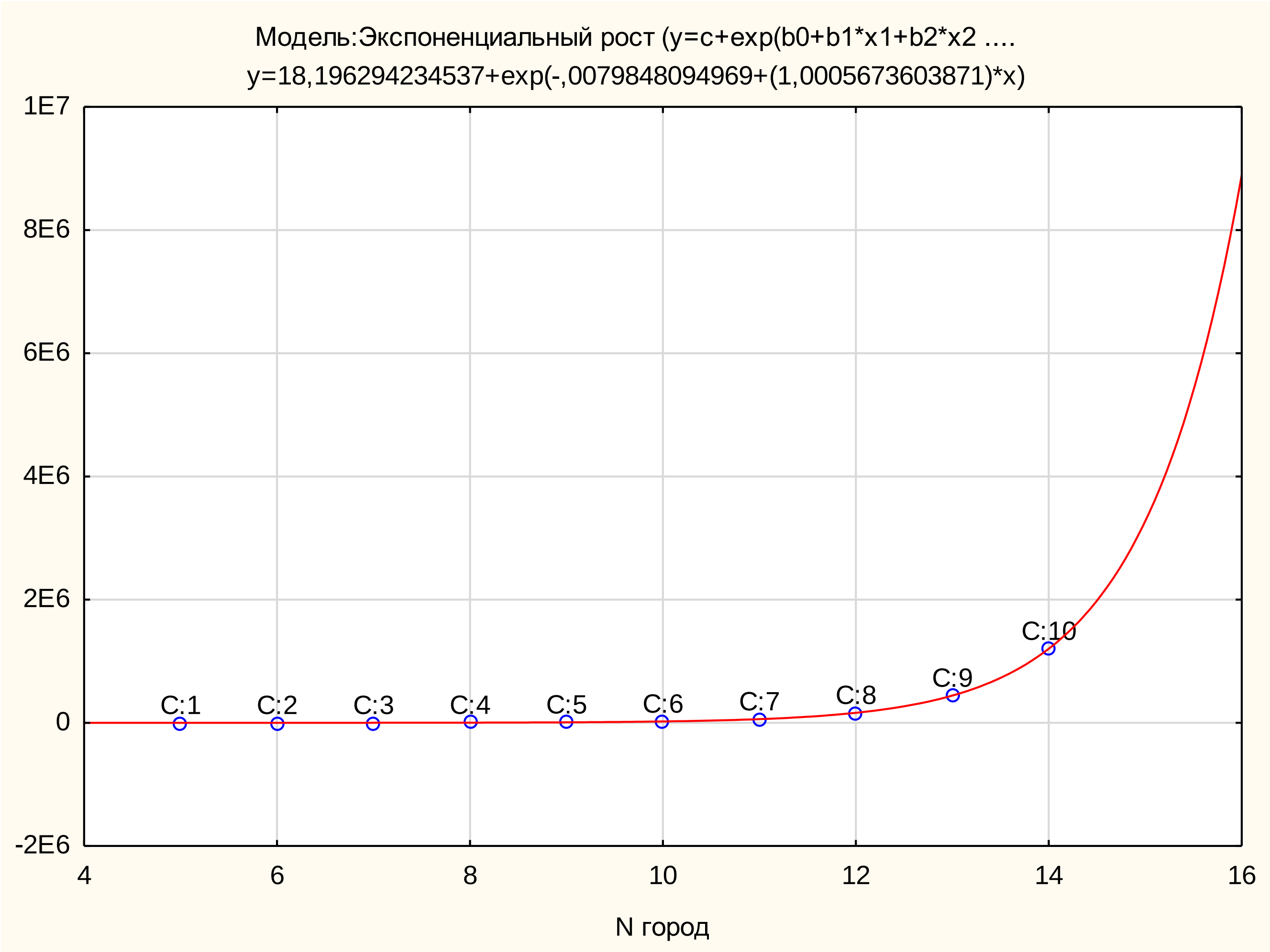


Рис. 12

Дополнительно убедиться в адекватности модели можно при помощи вкладки **Остатки**. Об адекватности модели также свидетельствует гистограмма остатков (рис. 13), из которой следует некоторое соответствие (несмотря на малое число наблюдений) распределения остатков нормальному закону.

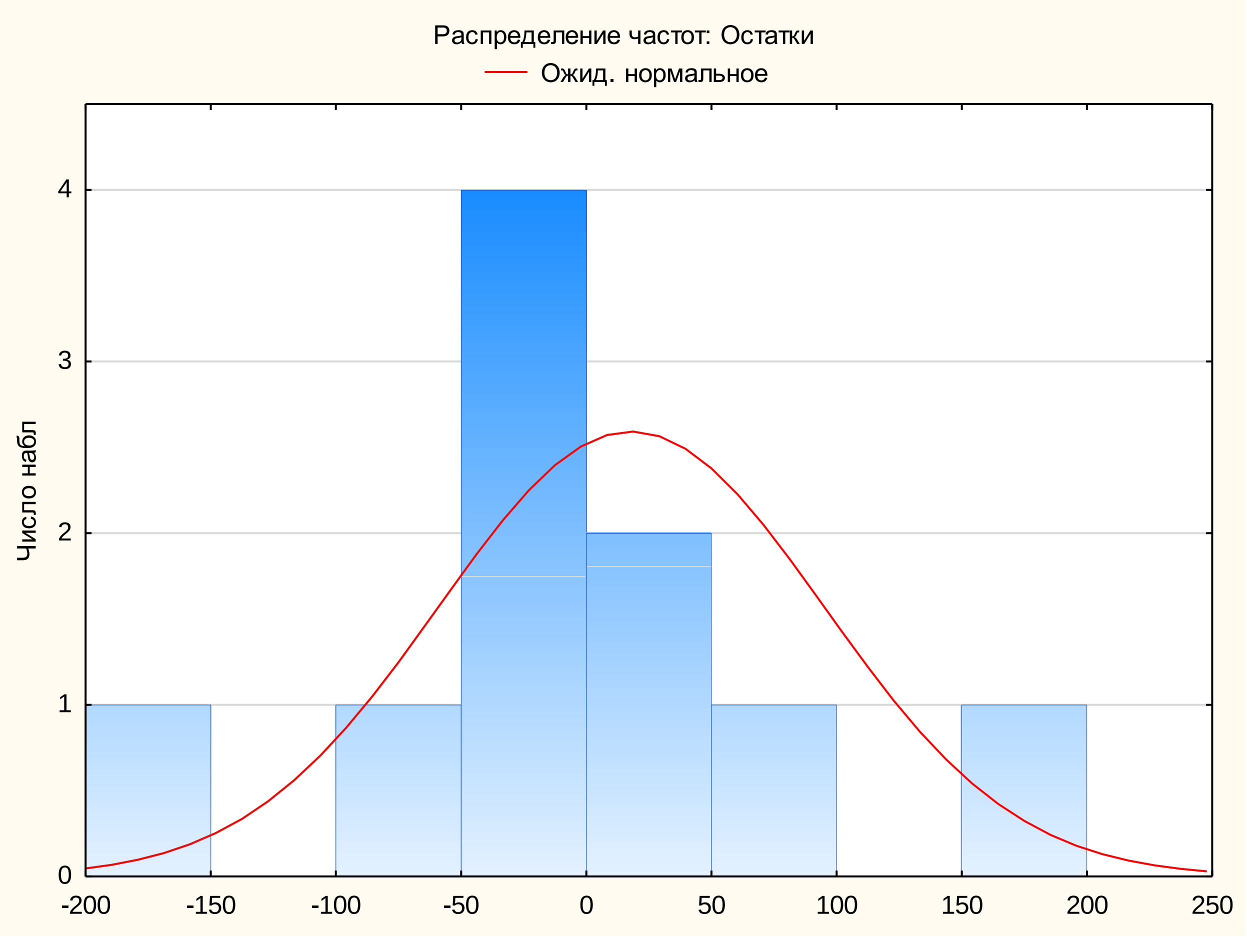


Рис. 13

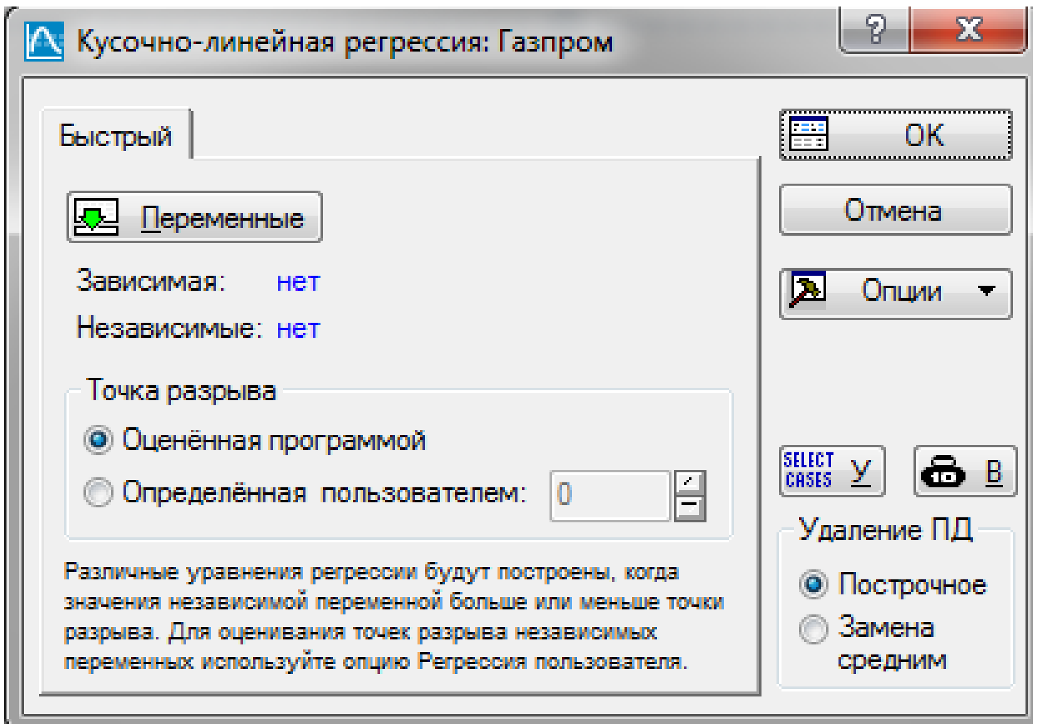
Кусочно-линейная регрессия. Описание процедуры Piecewise linear regression.

Кусочно-линейной регрессии соответствует модель:

$$Y = (b_{01} + b_{11}x_1 + \ldots + b_{m1}x_m)(Y <= Y^*) +$$
$$+(b_{02} + b_{12}x_1 + \ldots + b_{m2}x_m)(Y > Y^*),$$

где Y^* – точка разрыва, которая может быть либо выбрана пользователем, либо оценена программой. Такой выбор предлагается в стартовом диалоговом окне разрывной регрессии в рамке **Точка разрыва** – *Оцененная программой*, *Определенная пользователем*.

Такая модель оценивания очень удобна в том случае, когда зависимая переменная при достижении некоторого критического значения резко меняется. Тогда до достижения критического момента оценивание производится одной моделью, а после достижения – другой.



После выбора рабочего файла и зависимой и независимой переменных дальнейший диалог с программой осуществляется аналогично рассмотренным ранее моделям с той лишь разницей, что в таблицах результатов кроме предсказанных значений и оцененных параметров будет содержаться оцененное значение точки разрыва (в случае, если было указано оценивание этой точки системой). Будут выведены две различные оценки одного и того же параметра – до критического момента и после.

В качестве данных возьмем файл *Газпром* (STATISTICA примеры), содержащий информацию о помесячной стоимости акций компании *Газпром* в апреле, мае 1999 г. (рис. 14). Из таблицы видно, что с 1-е по 10-е наблюдение стоимость акций растет, затем происходит резкое снижение курса и далее вновь с 11-е по 20-е наблюдение продолжается рост курса. Необходимо построить регрессионную модель зависимости стоимости акций от месяца. Целесообразно применить кусочно-линейную регрессию.

	1 N даты	2 Дата	3 **Курс**
1	1	14/05/97	1850,000
2	2	15/05/97	1870,000
3	3	16/05/97	1890,000
4	4	17/05/97	1900,000
5	5	18/05/97	1950,990
6	6	19/05/97	2000,000
7	7	20/05/97	2044,800
8	8	21/05/97	2100,680
9	9	22/05/97	2150,760
10	10	23/05/97	2203,760
11	1	24/05/97	1716,160
12	2	25/05/97	1739,556
13	3	26/05/97	1756,160
14	4	27/05/97	1809,800
15	5	28/05/97	1853,685
16	6	29/05/97	1888,950
17	7	30/05/97	1943,640
18	8	31/05/97	2018,578
19	9	01/06/97	2050,400
20	10	02/06/97	2096,659

Рис. 14

В окне (рис.16) выберем зависимую переменную – *Курс*, а независимую – *N даты* и запустим процесс оценивания, указав в открывшемся окне **Оценивание модели** метод **Квазиньютоновский.**

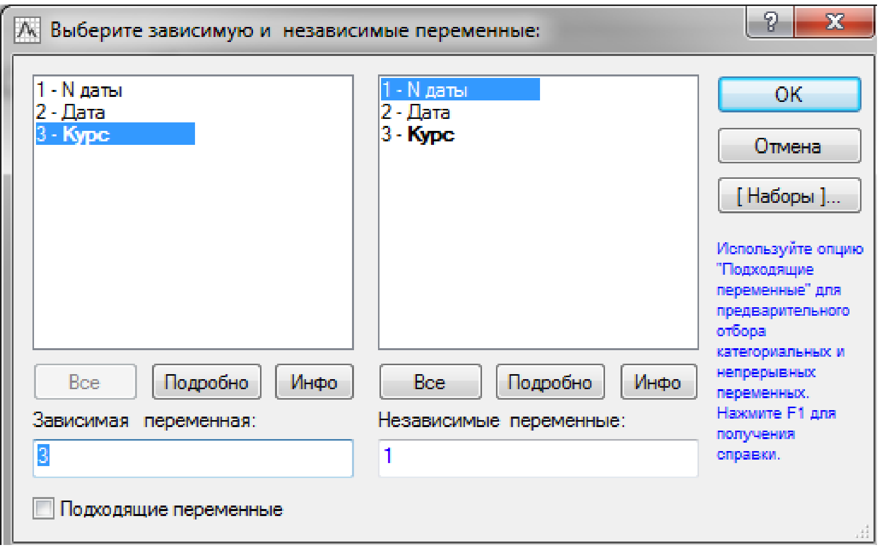
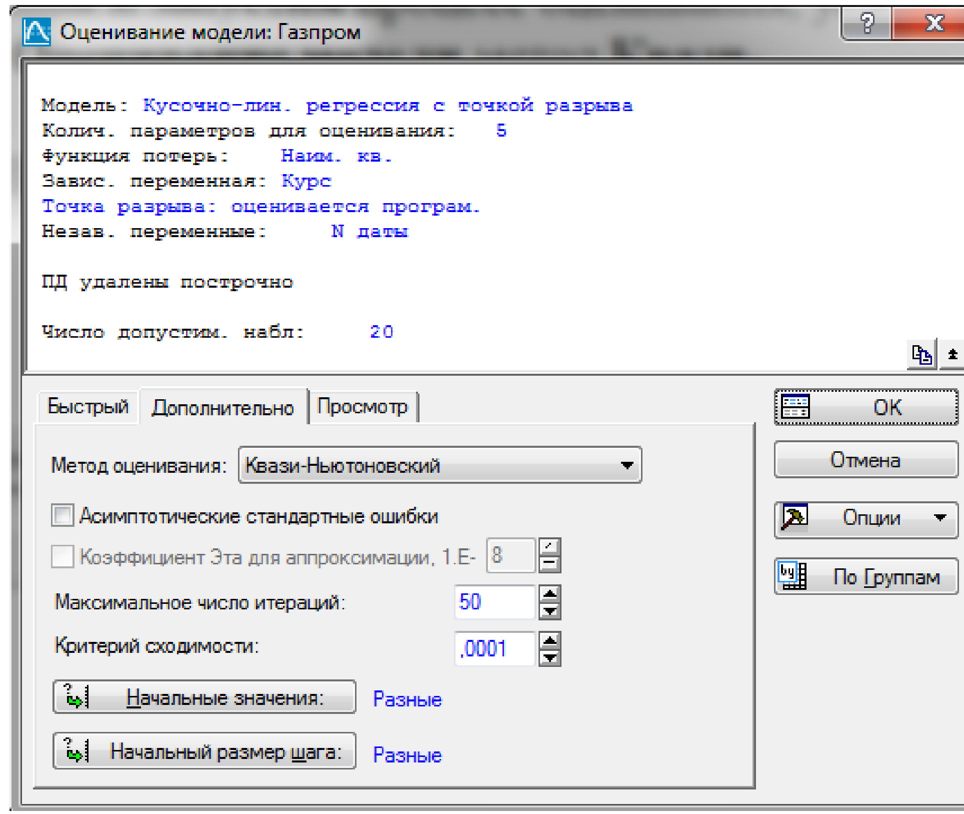


Рис. 16



После успешного завершения итерационного процесса (коэффициент множественной корреляции R равен 0,925) откроется окно **Результат** (рис. 17).

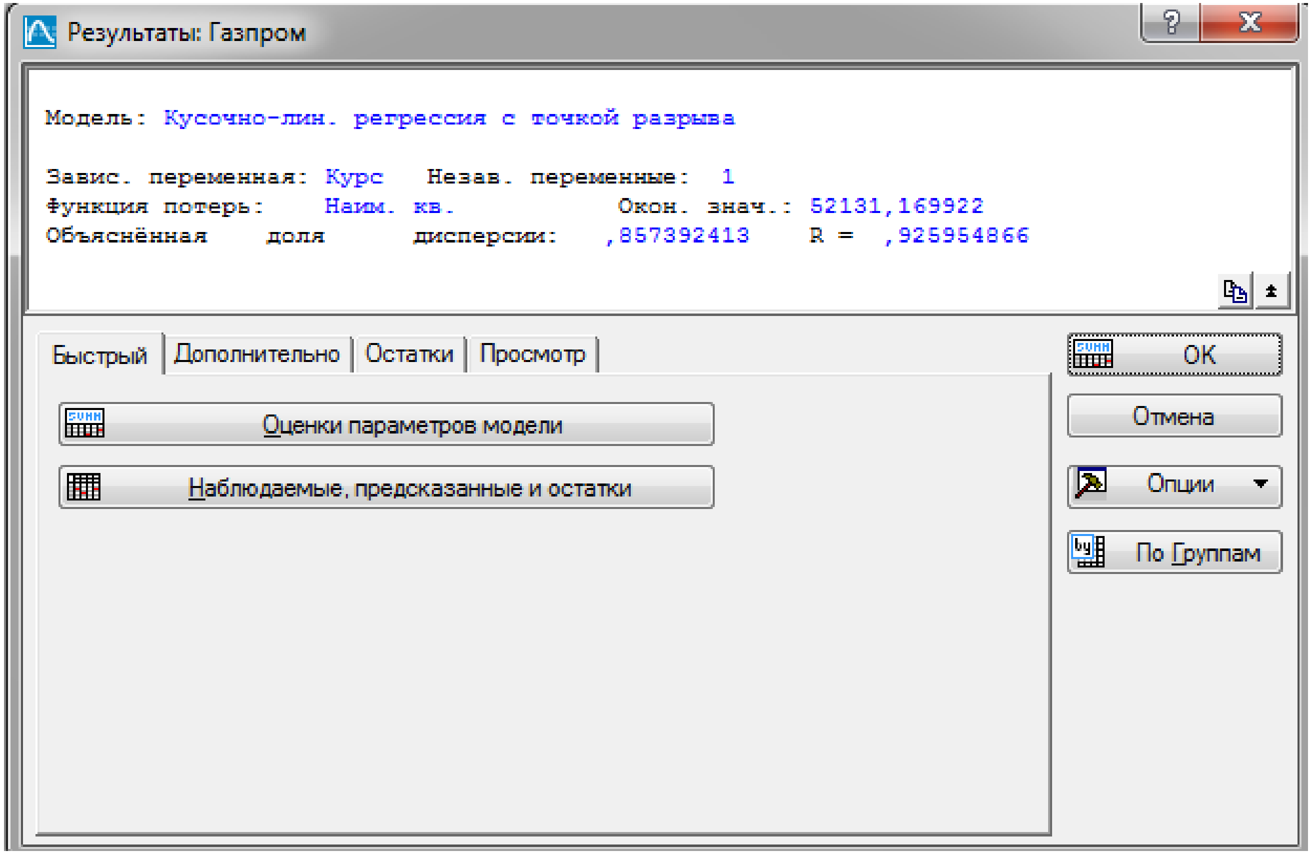


Рис. 17

Нажмем кнопку **Оценка параметров модели.** В результате оценивания получим по два значения параметров – до точки разрыва и после (рис. 18).

Соответственно будет построено две линейные модели – до точки разрыва 1941,729 и после:

1) *Курс* = 1763,350 + 20,6712*N даты;*
2) *Курс* = 1733,486 + 40,8278*N даты*.

N=20	Модель: Кусочно-лин. регрессии с точками разрыва (Газпром) Завис. переменная: **Курс** Потери: Наименьшие квадраты Итоговые потери:52131,169922 R= ,92595 Объяснён. дисперс.: 85,				
	B0	N даты	B0	N даты	Т. разр.
Оценка	1763,350	20,67121	1733,486	40,82789	1941,729

Рис. 18

Обратите внимание, что точка разрыва 1941,729 принимает некоторое промежуточное значение между «критическими» значениями курса 2203,760 и 1716,160.

Нажмем кнопку **Наблюдаемые, предсказанные и остатки** появится таблица с исходными, предсказанными значениями курса и остатками. Линейный график предсказанных значений приведен на рис. 15. Как видно из графиков исходных и предсказанных значений, основная тенденция изменения курса акций сохранена при незначительном отличии предсказанных и исходных значений (рис.15).

Таким образом, построена адекватная кусочно-линейная регрессионная модель изменения курса акций.

	Модель: (Газпром) Зав. Пер.: **Курс**		
	Наблюд.	Предсказанные	Остатки
1	1850,000	1784,022	65,9784
2	1870,000	1804,693	65,3072
3	1890,000	1825,364	64,6360
4	1900,000	1846,035	53,9648
5	1950,990	1937,626	13,3642
6	2000,000	1978,454	21,5463
7	2044,800	2019,282	25,5184
8	2100,680	2060,109	40,5704
9	2150,760	2100,937	49,8227
10	2203,760	2141,765	61,9948
11	1716,160	1784,022	-67,8616
12	1739,556	1804,693	-65,1368
13	1756,160	1825,364	-69,2040
14	1809,800	1846,035	-36,2352
15	1853,685	1866,706	-13,0213
16	1888,950	1887,378	1,5724
17	1943,640	2019,282	-75,6416
18	2018,578	2060,109	-41,5315

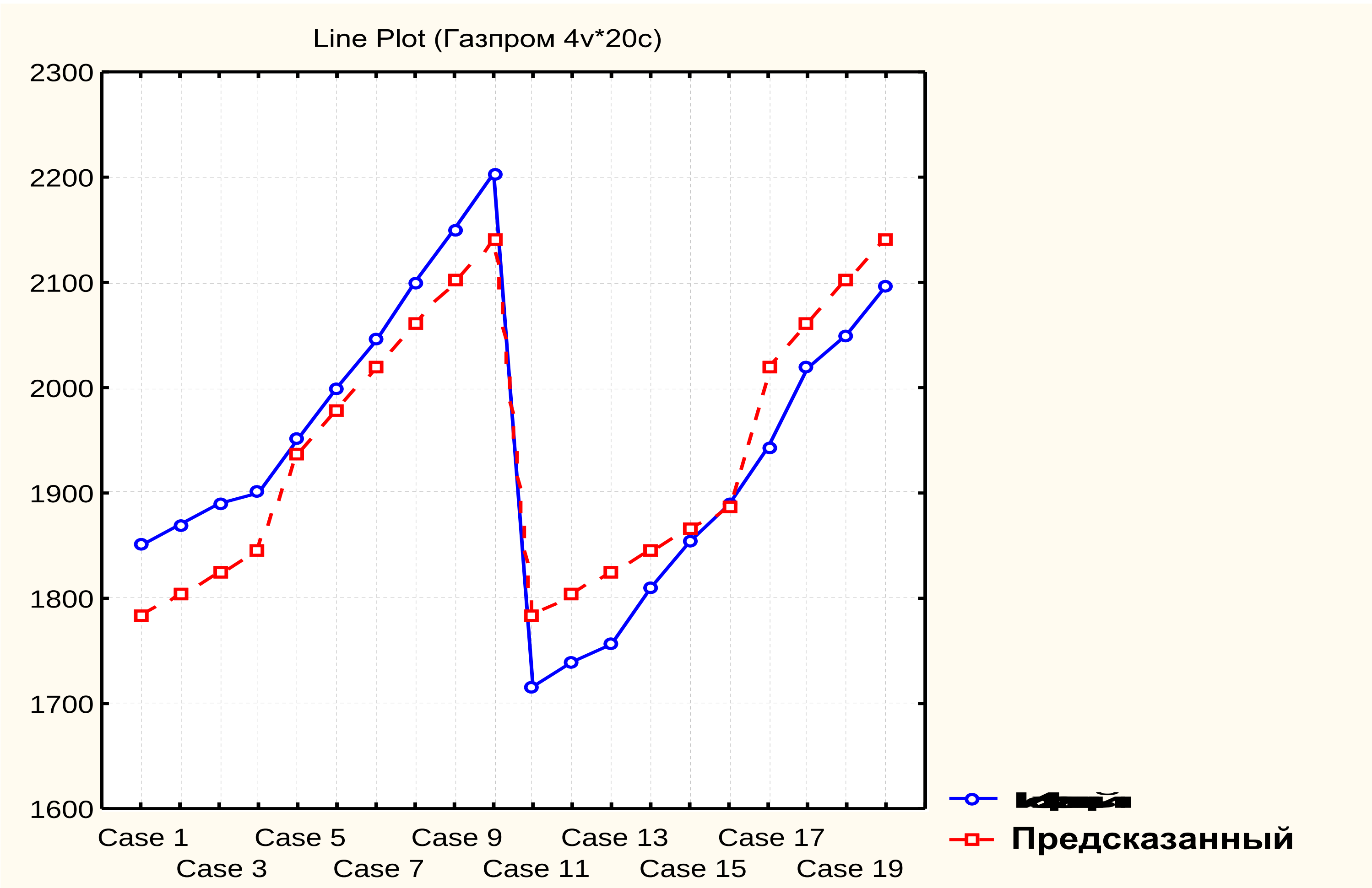


Рис. 15

График построен при помощи процедуры Линейный график для переменных вкладки Графики на панели инструментов

Определенная пользователем регрессия.

Теперь рассмотрим регрессию, определенную пользователем. В данной версии пользовательская регрессия разделена на два пункта: пользовательская регрессия с методом наименьших квадратом и регрессия с определенной пользователем функцией потерь. В первом случае независимо от заданной модели квадратичная функция потерь задана программой. Во втором же случае функцию потерь задает пользователь. В том и другом случае регрессионную модель определяет пользователь. Перебором различных моделей можно найти наилучшую регрессию, которой соответствует минимальное значение функции потерь.

Раннее зависимость между размерностью задачи коммивояжера и количеством операций (трудоемкостью алгоритма) аппроксимировали моделью экспоненциального роста с достаточно высокой степенью точности. Аппроксимируем эту зависимость моделью другого типа, например, полиномиальной.

В стартовом окне модуля «Нелинейное оценивание» выберем команду **Регрессия пользователя – метод наименьших квадратов.**

В появившемся окне (рис.19) нажмем кнопку **Оцениваемая функция.**

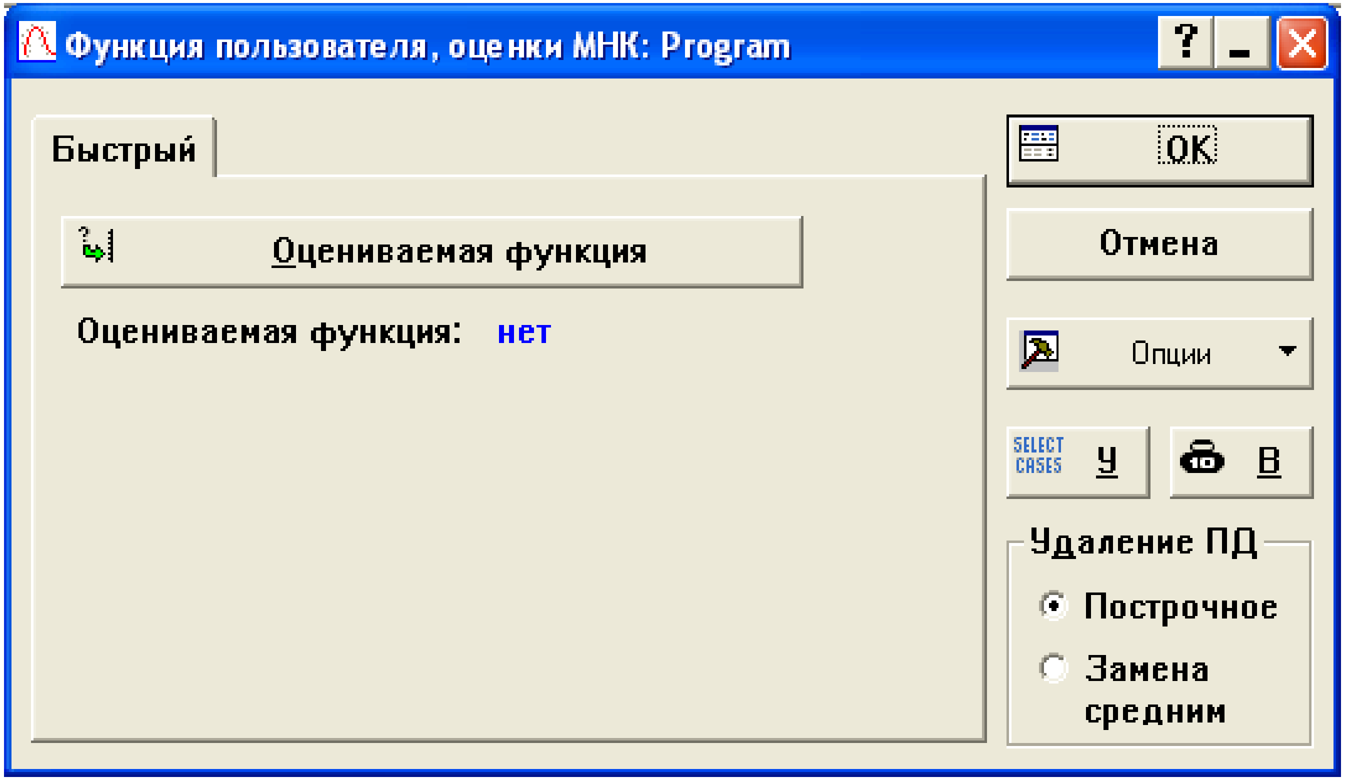


Рис. 19

Откроется окно **Оцениваемая функция** (рис. 20), в одноименном поле окна надо указать тип пользовательской регрессии, например $V2 = b1V1^{b2}$ и щелкнуть по ОК, вернемся в стартовое окно модуля, но с прописанной функцией регрессии (рис.21). Нажмем на ОК, появится окно (рис.22) для выбора метода и параметров анализа, укажем максимальное число итераций вместо 50 значение 200 и щелкнем по ОК

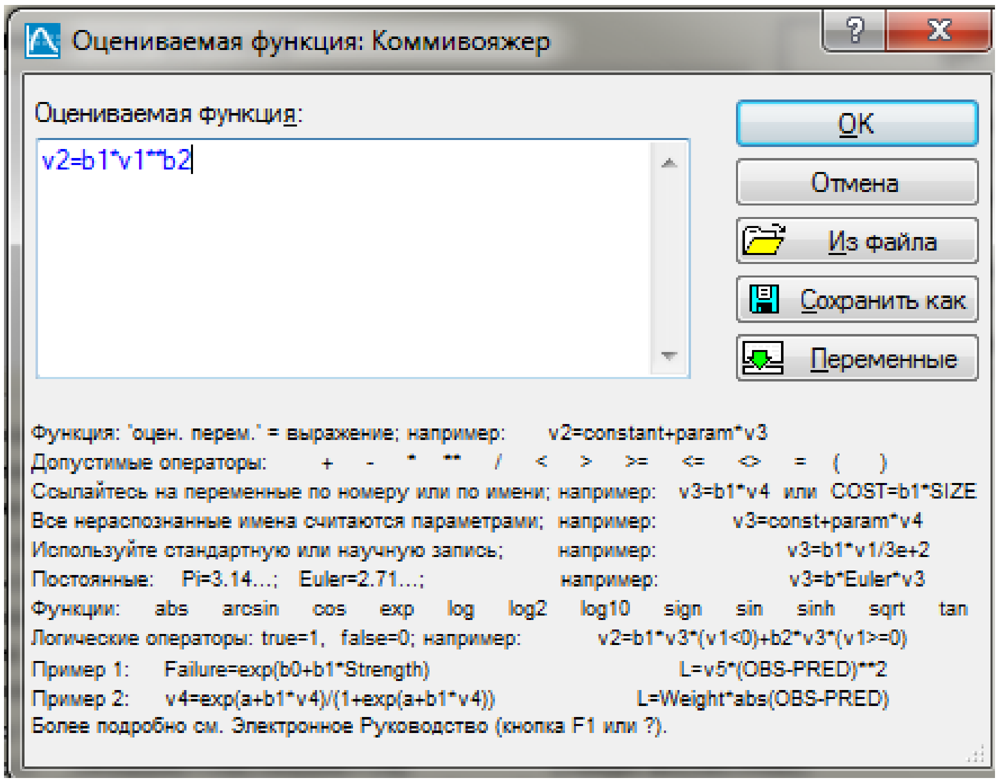


Рис. 20

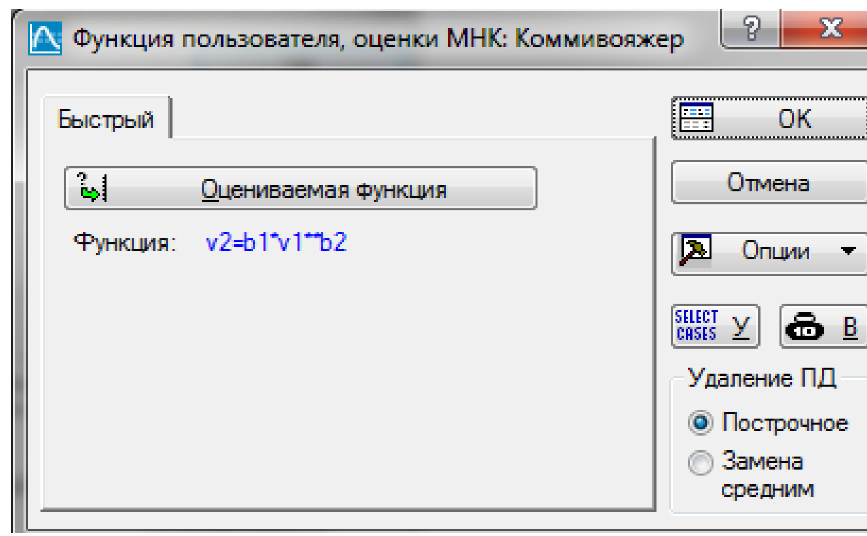


Рис. 21

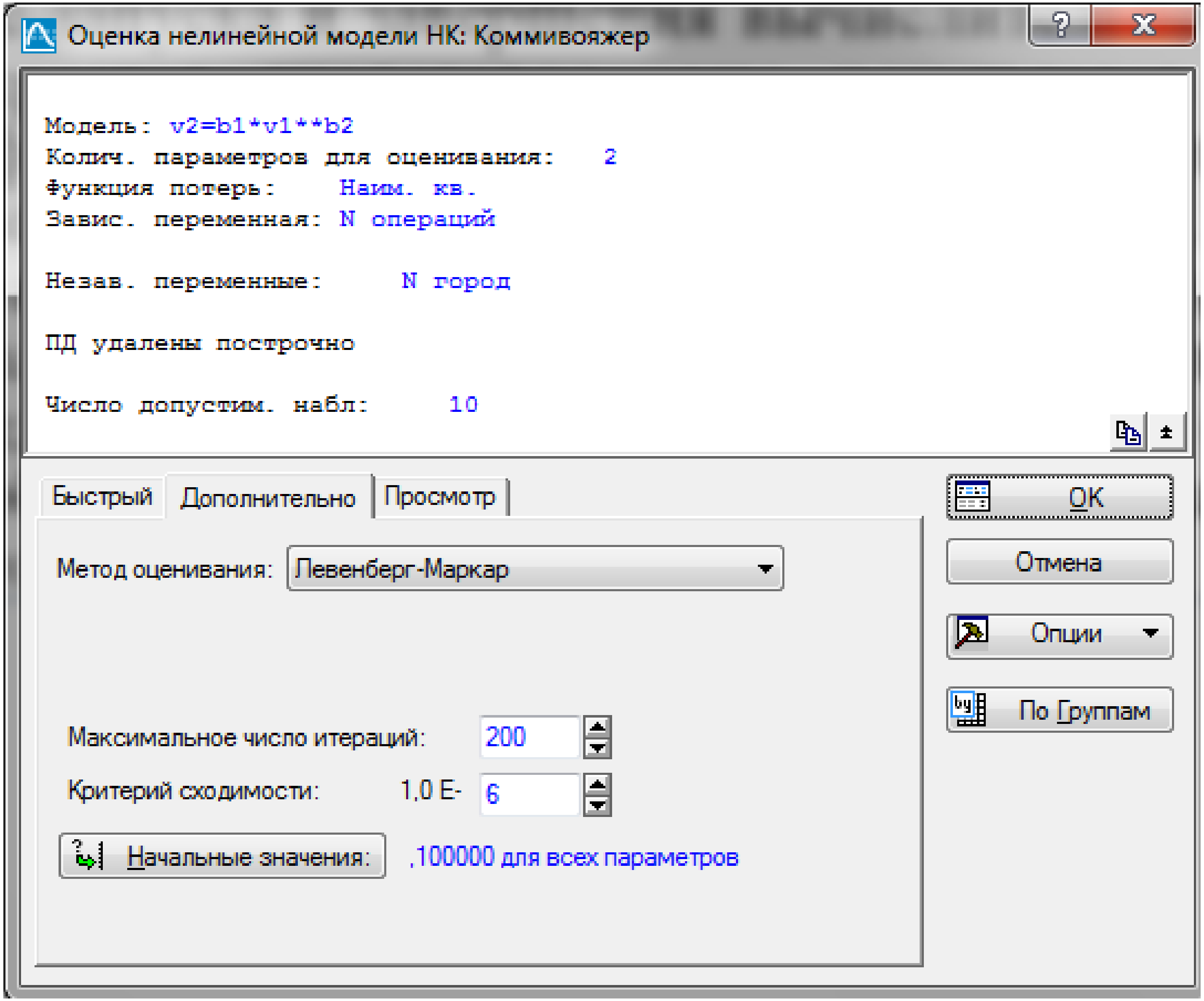

Оценка нелинейной модели НК: Коммивояжер
Модель: v2=b1*v1**b2
Колич. параметров для оценивания: 2
Функция потерь: Наим. кв.
Завис. переменная: N операций
Незав. переменные: N город
ПД удалены построчно
Число допустим. набл: 10
Быстрый
Дополнительно
Просмотр
Метод оценивания:
Левенберг-Маркар
Максимальное число итераций:
200
Критерий сходимости:
1,0 E-
6
Начальные значения:
,100000 для всех параметров
OK
Отмена
Опции
По Группам

Рис. 22

После запуска и завершения вычислительной процедуры откроется диалоговое окно результатов (рис.23). Из информационной части окна следует, что процедура завершилась успешно – *R* = 0,9998, но велико окончательное значение функции потерь= 316873072,94 и значительно отличие предсказанных значений от исходных, в особенности при малых значениях числа городов (*N город*). Если нажать на кнопку **Наблюдаемые, предсказанные и значения остатков,** то появится таблица с соответствующими значениями (рис.24). Также при помощи кнопки **Оценки параметров**, программа построит таблицу со значениями параметров (рис.25)

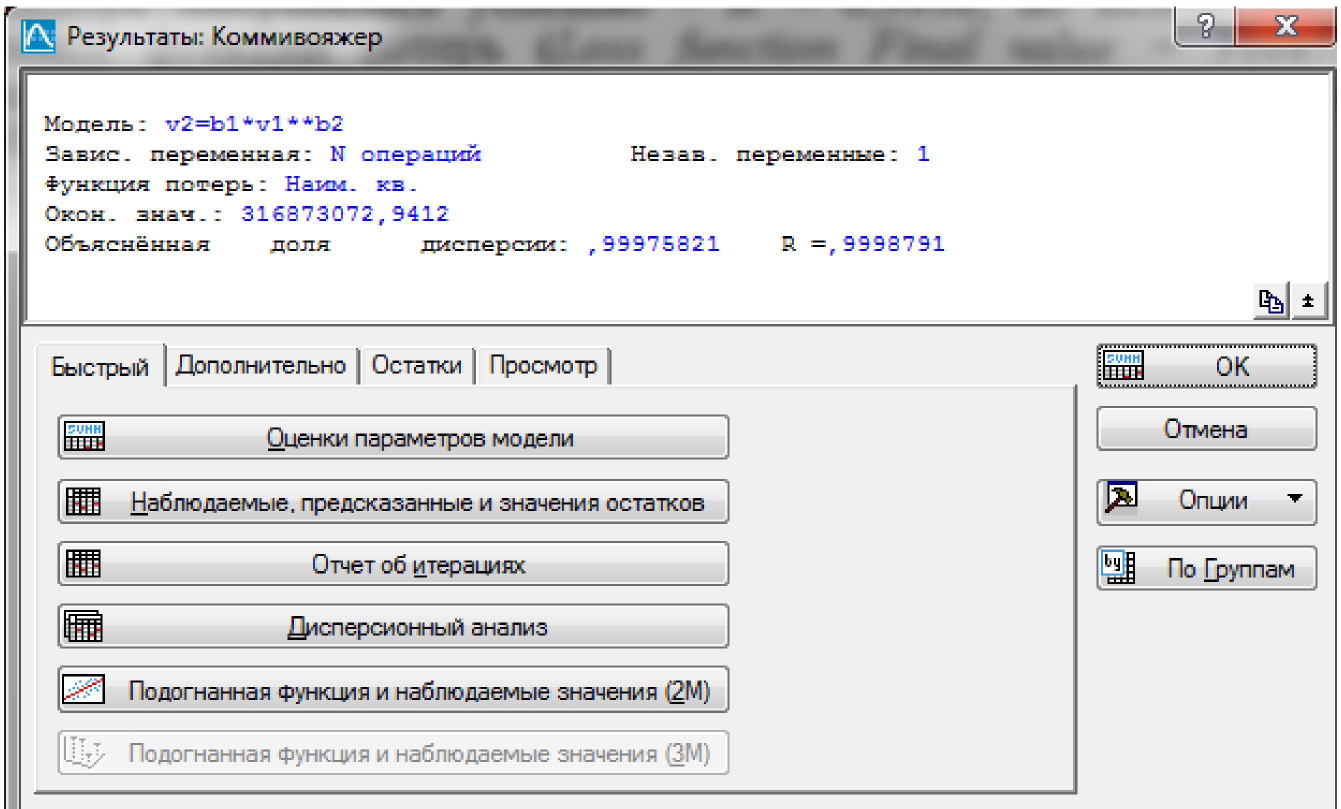


Рис. 23

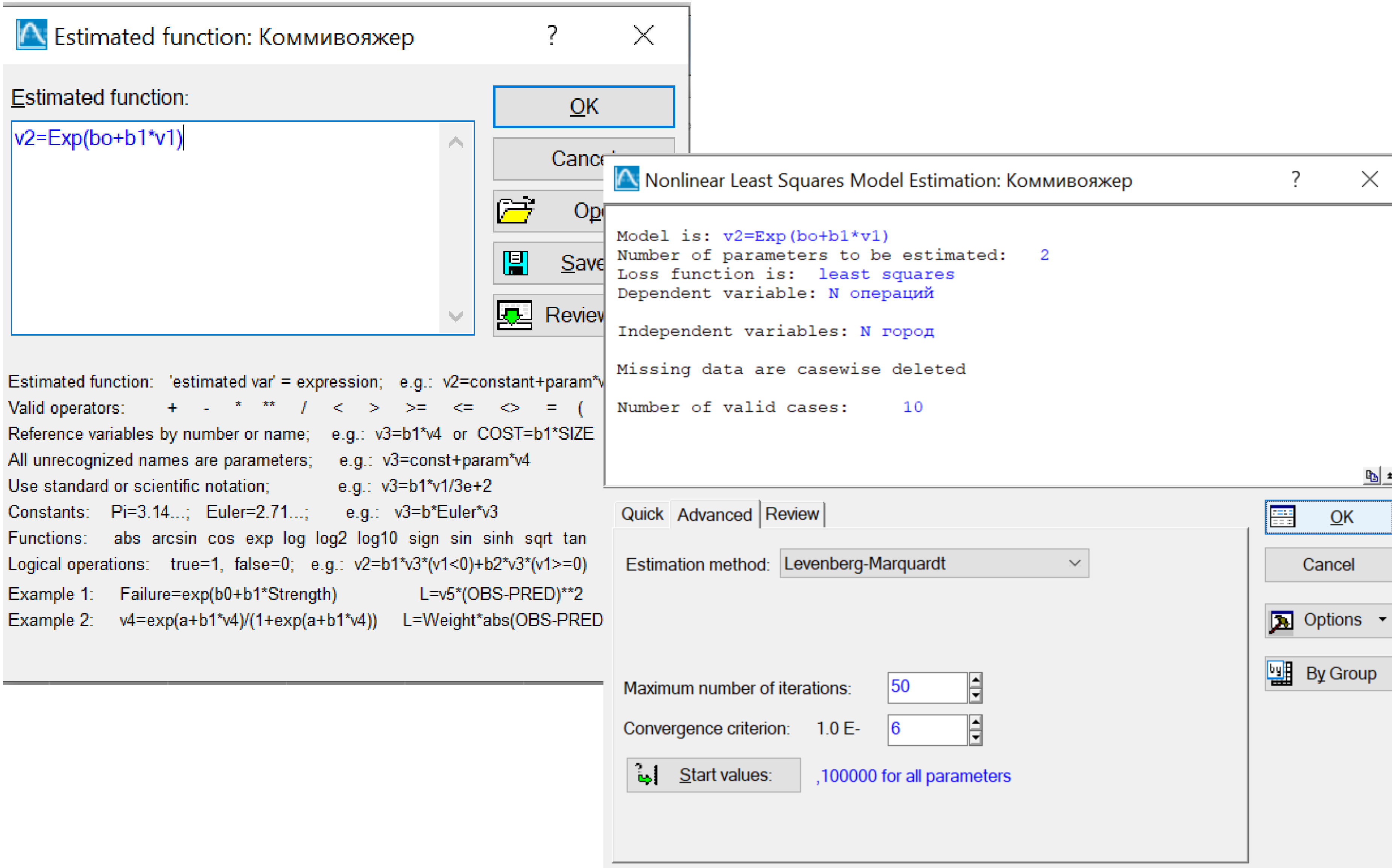
	Модель: v2=b1*v1**b2 (Коммивояжер) Зав. Пер. : N операций		
	Наблюд.	Предсказанные	Остатки
1	140	1	138,50
2	403	17	386,78
3	1097	127	969,24
4	2981	743	2238,38
5	8000	3516	4483,91
6	22026	14130	7896,21
7	59874	49730	10144,35
8	162755	156856	5898,69
9	442000	451264	-9264,25
10	1202604	1200420	2184,04

Рис. 24

	Модель: v2=b1*v1**b2 (Коммивояжер) Зав. Пер. : N операций Внимание: Вырожденный результат, значения могут быть неверными					
	Оценка	Стандарт ошиб.	t-знач. сс = 8	p-знач.	Ниж. Дов Предел	Вер. Дов Предел
b1	0,00000	0,000000	0,00	0,00	0,00000	0,00000
b2	13,20201	0,155249	0,00	0,00	12,84400	13,56001

Рис. 25

Заменим степенную зависимость более быстрорастущую - экспоненциальную и воспользуемся методом Левенберга для вычисления коэффициентов экспоненциальной регрессии



Получим результат по точности превосходящий не только степенную зависимость, но и ранее полученную при помощи процедуры экспоненциальной регрессии (рис.10)

	Model is: v2=Exp(bo+b1*v1) (Коммивояж Dep. Var. : N операций		
	Observed	Predicted	Residuals
1	140	148	-7,712
2	403	402	1,697
3	1097	1093	4,040
4	2981	2972	9,428
5	8000	8082	-81,684
6	22026	21980	46,673
7	59874	59779	95,595
8	162755	162580	174,798
9	442000	442170	-169,570
10	1202604	1202571	33,634

	Model is: v2=Exp(bo+b1*v1) (Коммивояжер) Dep. Var. : N операций Level of confidence: 95.0% (alpha=0.050)					
	Estimate	Standard error	t-value df = 8	p-value	Lo. Conf Limit	Up. Conf Limit
bo	-0,007354	0,002497	-2,945	0,018558	-0,013112	-0,001596
b1	1,000523	0,000180	5549,870	0,000000	1,000108	1,000939

По данным таблицы можно составить уравнение регрессии экспоненциального роста:

$$N_{операц} = \exp(-0{,}007354 + 1{,}000523 N_{город})$$

Коэффициенты уравнения незначительно, но все же отличаются от ранее полученных (слайд 23)