# INSIEMISTICA

14/09/2020

Indichiamo con $A$ un insieme e con $a$ un suo generico elemento: $A = \{a, b, c, \dots\}$

Possiamo ~~definire~~ dire che $a$ appartiene ad $A$ ($a \in A$) e che $z$ non appartiene ad $A$ ($z \notin A$)

Un insieme può avere un numero finito o infinito di elementi. (ex. $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ è pari$\}$)

Un insieme vuoto si indica con il simbolo $\emptyset$. (ex $A = \emptyset$)

## Inclusione:

Dati due insiemi $A$ e $B$, si ha:

- INCLUSIONE: scriviamo $B \subseteq A$ se $B$ è sottoinsieme di $A$, il che vuol dire che tutti gli elementi di $B$ appartengono ad $A$ ($\forall x \in B \Rightarrow x \in A$)

  allora/si ha che

- INCLUSIONE PROPRIA: scriviamo $B \subsetneq A$ o $B \subset A$ se $B$ è sottoinsieme proprio di $A$, ovvero nel caso in cui $A$ e $B$ non coincidono.

  $B \subset A$ significa: $(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge (\exists y \in A \mid y \notin B)$

  "esiste" → ne deve esistere almeno una

$A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$ valgono sempre

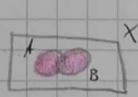
- UGUAGLIANZA: scriviamo $A = B$ se $A$ e $B$ hanno gli stessi elementi, cioè se $A$ è contenuto in $B$ e $B$ è contenuto in $A$

  $A = B$ significa che: $\underbrace{(\forall x \in A \Rightarrow x \in B)}_{A \subseteq B} \wedge \underbrace{(\forall x \in B \Rightarrow x \in A)}_{B \subseteq A}$

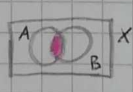
  Quindi per dimostrare che $A = B$ devo dimostrare che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

## Operazioni:

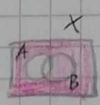
- UNIONE: $A \cup B = \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$




- INTERSEZIONE: $A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

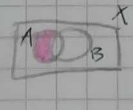



- COMPLEMENTARE: $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$




→ come fare $X - A$

- DIFFERENZA: $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$

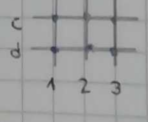



- PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}$

ex.

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{a, c, d\}$ $\quad$ $A \times B$ non è $B \times A$

$A \times B = \{(1,a), (1,c), (1,d), (2,a), (2,c), (2,d), (3,a), (3,c), (3,d)\}$




$A \times B$ è l'insieme dei punti della griglia

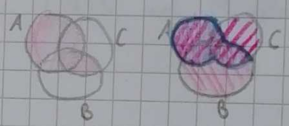
## Proprietà di unione e intersezione:

- $A \cup A = A$;
- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cup B \supseteq A$;
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

- $A \cap A = A$;
- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

bisogna verificare che le due si implichino a vicenda = "se e solo se"

Proprietà distributive: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$




Dimostrazione formale di una proprietà

$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$ dimostriamo che entrambe le implicazioni sono vere

- $(\Rightarrow)$ $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$

  sapendo che $A \cup B = A$
  sia $b \in B \Rightarrow b \in A \cup B$
  $\Rightarrow b \in A \Rightarrow B \subseteq A$

- $(\Leftarrow)$ $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$

  sapendo che $B \subseteq A$ dobbiamo dimostrare che $A \subseteq A \cup B$ (il che è ovvio) e che $A \cup B \subseteq A$

  $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ e poiché $B \subseteq A$
  $\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in A)$, ovvero $x \in A$ e $A \cup B \subseteq A$

  Quindi $A \cup B = A$

verificare che
mplichino a vicenda

$\cup(A\cap C)$

sono vere

trare che
$A\cup B \subseteq A$

$B \subseteq A$

$x \in A$ e $A \cup B \subseteq A$

# ASSIOMI dei NUMERI REALI

Numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$ $q \neq 0$

Numeri irrazionali: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ex. $\sqrt{2}, \pi, e$

L'insieme $\mathbb{R}$ è dato dall'unione di numeri razionali e numeri irrazionali

Dimostriamo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supponiamo per assurdo che esistano $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}/\{0\}$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, cioè $p^2 = 2q^2$

$$\exists\, p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 : \frac{p}{q} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$$

La fattorizzazione in fattori primi di entrambi i membri deve essere uguale. Solo un fattore sarà pari $(2^x)$, gli altri saranno dispari

$p = 2^m \cdot d_1$ → $p^2 = 2^{2m} \cdot d_1^2$

$q = 2^n \cdot d_2$ → $q^2 = 2^{2n} \cdot d_2^2$

fattori dispari che elevati al quadrato resteranno dispari

$\frac{p^2}{q^2} = \frac{2^{2m} \cdot \cancel{d_1^2}}{2^{2n} \cdot \cancel{d_2^2}} = 2$ → $2^{2m-2n} = 2^1$ → $2m = 1 + 2n$ → non è possibile perchè $2m$ e $2n$ sono sicuramente numeri pari ma $1+2n$ è sicuramente un numero dispari e quindi l'uguaglianza è falsa.
Di conseguenza $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere definito come l'insieme che soddisfa i seguenti quattro assiomi

Assioma 1 (somma)
L'addizione in $\mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà:

questo assioma non vale per $\mathbb{N}$ ma per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sì

commutativa: $a+b=b+a, \ \forall a,b \in \mathbb{R}$;

associativa: $(a+b)+c=a+(b+c), \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'elemento neutro: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : a+0=0+a=a, \ \forall a \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'opposto: $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R} : a+(-a)=0$;

Si dice che $(\mathbb{R},+)$ è un gruppo commutativo. Si può dimostrare che l'elemento neutro e che l'opposto di un numero sono unici.

Assioma 2 (prodotto)
Il prodotto in $\mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà:

questo assioma non vale per $\mathbb{Z}$ ma vale per $\mathbb{Q}$

commutativa: $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a,b \in \mathbb{R}$;

associativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c, \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'elemento neutro: $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a, \ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

esistenza del reciproco: $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} : a\cdot(a^{-1})=1$;

distributiva: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b \cdot c, \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$,

Si dice che $(\mathbb{R},+,\cdot)$ è corpo commutativo o campo. Si può dimostrare che l'elemento neutro e il reciproco di un numero sono unici.

Assioma 3 (ordinamento)
La relazione "essere minore o uguale" ($\leq$) è una relazione di ordine totale in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x,y \in \mathbb{R}$ vale sempre $x \leq y \ \vee \ y \leq x$

Inoltre l'ordinamento $(\mathbb{R}, \leq)$ ha le seguenti proprietà:
~~$\forall a,b \in \mathbb{R} : a \leq b$ si ha~~

compatibilità con la somma: $a+c \leq b+c, \ \forall c \in \mathbb{R}$;

compatibilità con il prodotto: $a \cdot c \leq b \cdot c, \ \forall c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\boxed{c \geq 0}$

Un insieme che verifica gli assiomi 1,2,3 si dice corpo commutativo ordinato.
Gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono corpi commutativi ordinati

Assioma 4 (completezza) fondamentale per la distinzione di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma 4)
Per ogni coppia di sottoinsiemi $A$ e $B$ di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$, detto elemento separatore, tale che

$$a \leq c \leq b, \ \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

TEOREMA: esiste ed è unico (a meno di isomorfismi) un insieme $\mathbb{R}$ che verifica gli assiomi 1,2,3 e 4

# ESTREMI SUPERIORE ed INFERIORE

17/09/2020

**Estremo superiore:**

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq 0$, diciamo che $b \in \mathbb{R}$ è MAGGIORANTE di $A$ se $x \leq b \ \forall x \in A$.
In tal caso $A$ è un insieme limitato superiormente.

Definiamo ESTREMO SUPERIORE di $A$ (indicato con $\sup A$) il più piccolo dei suoi maggioranti.

Ex.

- $A = \{-3, 1, \frac{5}{3}, 7, 110\}$

  $b$ è maggiorante se $b \geq 110$

  $\sup(A) = 110$

- insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

  illimitato superiormente $\rightarrow \sup(\mathbb{N}) = +\infty$

- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ $\quad \sup(B) = \sqrt{2}$

  $\sqrt{2} \notin B$

**Estremo inferiore:**

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq 0$, diciamo che $a \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE di $A$ se $a \leq x \ \forall x \in A$.
In tal caso $A$ è un insieme limitato inferiormente.

Definiamo ESTREMO INFERIORE di $A$ (indicato con $\inf(A)$) il più grande dei suoi minoranti.

Ex.

- $A = \{-3, 1, \frac{5}{3}, 7, 110\}$ $\quad \inf(A) = -3$
- $\mathbb{N}$ $\quad \inf(\mathbb{N}) = 0$
- $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ $\quad \inf(B) = -\sqrt{2}$

Un generico insieme $A$ è LIMITATO se $\exists M \in \mathbb{R} : -M \leq a \leq M \quad \forall a \in A$

**Proprietà dell'estremo superiore:**

- L'estremo superiore di un insieme non vuoto e superiormente limitato esiste ed è unico

  Dimostrazione: $A \neq \emptyset$ $\quad \underset{\neq\emptyset}{B} = \{x \in \mathbb{R} : \text{è maggiorante di } A\}$ $\quad \forall a \in A \wedge \forall b \in B \quad a \leq b$

  Per l'assioma di completezza $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$ $\quad c = \sup(A)$

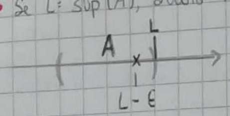
  Per dimostrare che $c$ è unico ragiono per assurdo:
  Siano $c_1$ e $c_2$ estremi superiori di $A \rightarrow c_1 \leq c_2$ oppure $c_2 \leq c_1$

  $c_1 < c_2$ è impossibile perché se fosse vera $c_2$ non sarebbe il più piccolo tra i maggioranti e quindi non sarebbe estremo superiore

  Per un ragionamento analogo anche $c_2 < c_1$ è impossibile. L'unica opzione possibile allora è $c_1 = c_2$ ~~che~~, il che dimostra come l'estremo superiore sia unico

- se $L = \sup(A)$, allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon$

- Se $L = \sup(A)$, allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon$

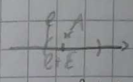



ci sarà sempre $a \in A : a > L - \varepsilon$

- L'estremo superiore di un insieme superiormente illimitato e non vuoto è $\sup(A) = +\infty$

Proprietà dell'estremo inferiore:

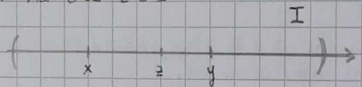
- L'estremo inferiore di un insieme non vuoto e inferiormente limitato esiste ed è unico
- Se $\ell = \inf(A)$, allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $a < \ell + \varepsilon$




- L'estremo inferiore di un insieme inferiormente illimitato e non vuoto è $\inf(A) = -\infty$

## INTERVALLI e ALTRI SOTTOINSIEMI di $\mathbb{R}$

$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se per ogni coppia $x, y \in I$ con $x \leq y$ e per ogni numero $z \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq z \leq y$ si ha che $z \in I$




Intervalli di $\mathbb{R}$: Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$ definiamo

- intervallo limitato aperto: $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- intervallo limitato chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- int. limitato chiuso a sx e aperto a dx $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- int. limitato aperto a sx e chiuso a dx $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- int. illimitato superiormente e aperto a sx $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- int. illimitato inferiormente e aperto a dx $]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- int. illimitato superiormente e chiuso a sx $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- int. illimitato inferiormente e chiuso a dx $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- intervallo illimitato $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$

**Nota:** se $a = b$, allora $[a, b] = \{a\}$ e $]a, b[ = ]a, b] = [a, b[ = \emptyset$

Esercizi:

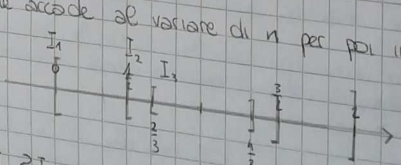
- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 2]$ (si legge "l'unione per n che va da 1 a più infinito degli intervalli chiusi $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$")

Proviamo a immaginare ciò che accade al variare di n per poi immaginare l'unione infinita di questi intervalli

$n = 1 \quad [0, 2]$

$n = 2 \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$n = 3 \quad \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$




$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3$, quindi la loro infinita unione sarà pari a $I_1$

- $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = \{1\}$

Questa volta non viene chiesta l'unione bensì l'intersezione.

Chiamiamo $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ ; è facile dimostrare che $\{1\} \in B$ poichè

$\forall n \ \{1\} \in \left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$

Per dimostrare che non ci sono altri elementi oltre ad 1 bisogna ragionare per assurdo

Supponiamo che esista $y \neq 1$ e che $y \in B$. Consideriamo, in particolare, che $y > 1$ e scrivo quindi $y = 1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

A questo punto è sufficiente dimostrare che $1+\varepsilon > 1+\frac{1}{n}$ per almeno 1 valore di n

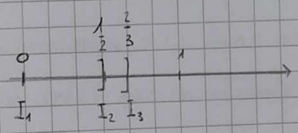
$\frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$ allora $\left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ non contiene $\{y\}$

- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] = [0, 1[$

$n=1 \quad [0,0] = \{0\}$

$n=2 \quad \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$n=3 \quad \left[0, \frac{2}{3}\right]$




Al crescere di n il limite destro si avvicina ad 1 ma 1 non appartiene a nessuno di questi intervalli quindi $0 \leq x < 1$

# CENNI alla NON NUMERABILITA' di $\mathbb{R}$

Diciamo che due insieme A e B hanno la stessa cardinalitá se esiste una corrispondenza biunivoca (iniettiva e suriettiva) tra di loro.
(= se posso legare ogni elemento di A ad uno e uno solo elemento di B)

Un insieme A che puó essere messo in corrispondenza biunivoca con un insieme $A_n = \{1, \dots, n\}$ si dice FINITO, con n elementi. Altrimenti l'insieme si dice INFINITO.
→ (la cardinalitá di un insieme finito corrisponde al suo numero di elementi)

Un insieme infinito A che possa essere messo in ~~relazione~~ corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ si dice NUMERABILE. Altrimenti l'insieme si dice NON NUMERABILE.

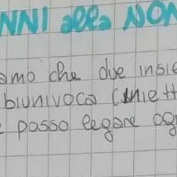
→ Un insieme numerabile ha la stessa cardinalitá dell'insieme $\mathbb{N}$

→ È facile mostrare che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili

con $\mathbb{N}$ è ovvio, con $\mathbb{Z}$ è sufficiente associare 0 a 0, i numeri positivi ai numeri dispari e i numeri negativi ai numeri pari

Teorema: L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile

I numeri razionali sono $\frac{p}{q}$. Creo un reticolo (stesso procedimento per $\mathbb{Q}^-$)




seguendo le diagonali posso ordinarli

Teorema: L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è <u>non</u> numerabile

Teorema della densitá: (densitá di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)
Gli insiemi dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$,
cioè per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$ esistono un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ e un numero irrazionale $\jmath \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tali che:

$$a < r < b \quad ; \quad a < \jmath < b$$

Come conseguenza, ogni intervallo aperto $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ contiene infiniti ~~ra~~ numeri razionali e infiniti numeri irrazionalitá

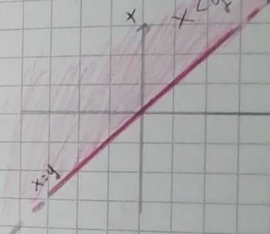
FUNZIONI, DOMIN

Relazione:
Dati due insiemi A e
qualunque sottoinsiem
Se A = B, allora si p

Una relazione stabilisc
relazione stessa, cosí

Esempi

· relazione d'ordine (
$x \le y$ ex. $(1,2)$, $(\frac{1}{10}, 10)$




il semipiano colorato è
rappresentazione grafica
del sottoinsieme indivi
dalla relazione

Funzione:
Una relazione f tra due
elemento di A asso

L'insieme A viene detto

Le funzioni che vedremo s
(codominio B = $\mathbb{R}$
x viene detta variabile

# FUNZIONI, DOMINIO, CODOMINIO

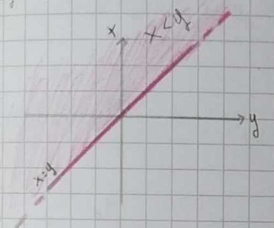
## Relazione:

Dati due insiemi A e B non vuoti, chiamiamo RELAZIONE (binaria) tra A e B un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
Se $A = B$, allora si parla di relazione in A

Una relazione stabilisce quali delle coppie appartenenti ad $A \times B$ soddisfano la relazione stessa, così facendo individua un sottoinsieme di $A \times B$

Esempi

- relazione d'ordine ($\leq$) in $\mathbb{R}$
  $x \leq y$ ex. $(1,2)$ ; $(\frac{1}{10}, 10)$

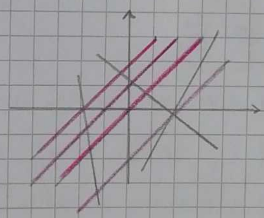



Il semipiano colorato è la rappresentazione grafica del sottoinsieme individuato dalla relazione

- relazione di "essere divisibile" in $\mathbb{N}$
  $(6,3)$, $(2,2)$

  x è divisibile per y

- relazioni di equivalenza, ad esempio "essere parallele" nello spazio delle rette



## Funzione:

Una relazione $f$ tra due insiemi non vuoti A e B è detta FUNZIONE se ad ogni elemento di A associa un solo elemento di B

$$\forall a \in A \quad \exists! \, b \in B : f(a) = b$$

L'insieme A viene detto DOMINIO mentre l'insieme B viene detto CODOMINIO e scriveremo:

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Le funzioni che vedremo saranno funzioni $f$ di variabile reale (dominio $D \subseteq \mathbb{R}$) a valori reali ~~(reali)~~ (codominio $B = \mathbb{R}$).
x viene detta variabile indipendente mentre y è detta variabile indipendente

21/09/2020

## Grafico:

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama GRAFICO della funzione $f: D \to \mathbb{R}$ (indicato con $G(f)$ o con $\Gamma$) il sottoinsieme dei punti del piano cartesiano messi in relazione da $f$

$$G(f) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : x \in D \wedge y = f(x)\}$$

Se considero il piano cartesiano $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ come l'insieme delle coppie allora posso considerare il grafico come un sottoinsieme del piano composto da coppie particolari che soddisfano la funzione $f$

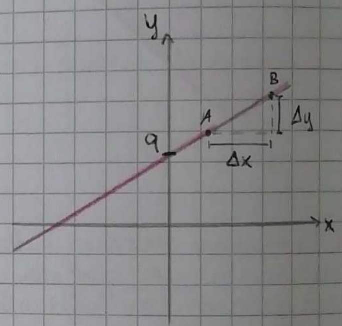
## Immagine:

Si chiama IMMAGINE della funzione $f: D \to \mathbb{R}$ il sottoinsieme del codominio costituito dai valori effettivamente assunti dalla funzione e si denota con $Im(f)$ o $f(D)$

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D \wedge f(x) = y\}$$

Esempi

- $y = f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$ → equazione di una retta non verticale




- $D = \mathbb{R}$
  - m: coefficiente angolare → indica l'inclinazione della retta

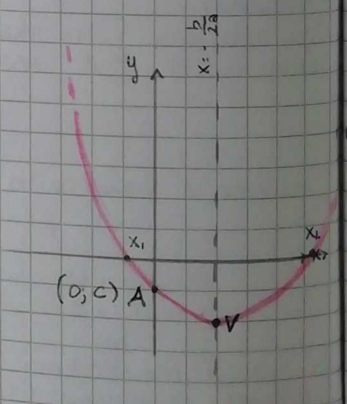
$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

  - q: intercetta, termine noto

- Il grafico di $f$ ($G(f)$) corrisponde alla retta stessa
- L'immagine di $f$ è l'insieme dei valori assunti dalla $y$

$$Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } m \neq 0 \\ \{q\} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ → equazione parabola




- $D = \mathbb{R}$
  - asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$
  - $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
  - $a > 0$ → parabola rivolta verso l'alto
    $a < 0$ → parabola rivolta verso il basso

- $Im(f) = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right[$ se $a > 0$

  $Im(f) = \left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$ se $a < 0$

21/09/2020

$f(f)$ o con $\Gamma$)

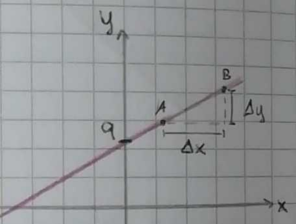
$f$

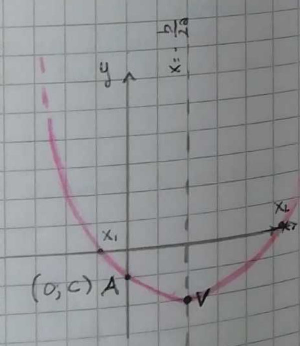
coppie allora posso

da coppie particolari

inio costituito dai

$Im(f)$ o $f(D)$




## Osservazioni: interpretazione grafica

Data una funzione $f: D \to \mathbb{R}$

- Un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ appartiene al grafico di $f$ se e solo se $x_0 \in D$ e $y_0 = f(x_0)$
- Il grafico di $f$ è una curva nel piano caratterizzata dal fatto che, dato $x_0 \in D$, la retta $x = x_0$, parallela all'asse delle ordinate (asse y), interseca il grafico di $f$ in un solo punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$
- Il dominio D di $f$ è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse (asse x) ed è la proiezione del grafico della funzione su tale asse
- L'immagine $f(D)$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, costituito da tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di $f$ in ALMENO un punto.
  $f(D)$ è la proiezione del grafico di $f$ sull'asse delle ordinate.

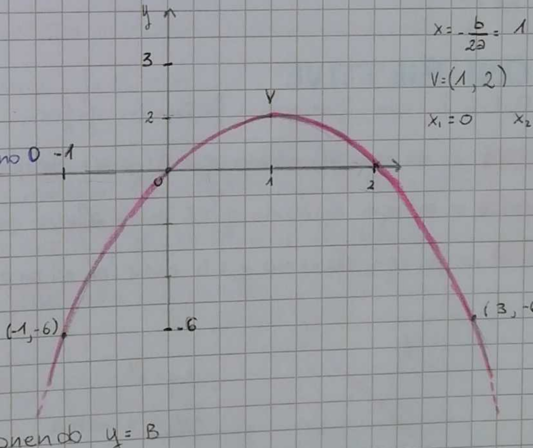
## Controimmagine:

Si chiama CONTROIMMAGINE di $B \subseteq \mathbb{R}$ ~~(coordinata)~~ rispetto alla funzione $f: D \to \mathbb{R}$ l'insieme dei valori $x \in D$ tali che $f(x) \in B$

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$$

Esempi

- Sia $f(x) = -2x^2 + 4x$




$x = -\frac{b}{2a} = 1$

$V = (1, 2)$

$x_1 = 0$ $x_2 = 2$

Qual è la controimmagine di 0?

= quali sono i valori di x che restituiscono 0

$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{0, 2\}$

$f^{\leftarrow}(\{2\}) = \{1\}$

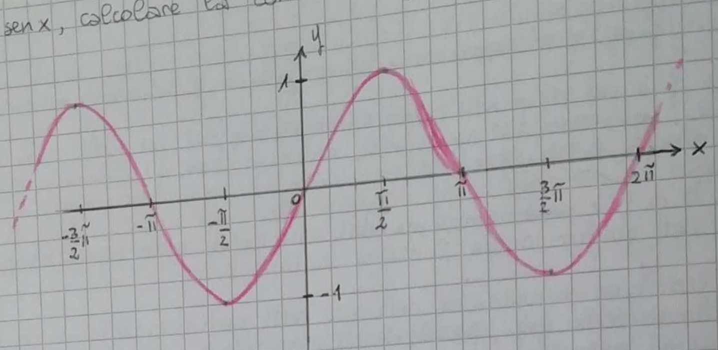
$f^{\leftarrow}(\{5\}) = \emptyset$

è giusto? $f^{\leftarrow}([-6, 3[) = [-1, 3]$

$f^{\leftarrow}([-6, 0[) = [-1, 0[ \cup ]2, 3]$

- Un'altro modo è calcolare ~~porre~~ $f(x)$ ponendo $y = B$

• Sia $g(x) = \operatorname{sen} x$, calcolare la controimmagine di $1, 0, -2$ e $[-1, 4]$




$g^{\leftarrow}(\{1\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$g^{\leftarrow}(\{0\}) = \pi + k\pi = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$g^{\leftarrow}(\{-2\}) = \emptyset$

$g^{\leftarrow}([-1, 4[) =$

## FUNZIONI BIETTIVE

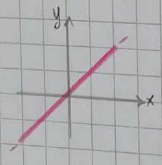
Siano $D, B \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f: D \to B$, $y = f(x)$, è detta:

- INIETTIVA se per ogni elemento $y_0 \in B$ esiste al più un elemento $x \in D$ tale che $y_0 = f(x)$
- SURIETTIVA se per ogni elemento $y_0 \in B$ esiste almeno un elemento $x \in D$ tale che $y_0 = f(x)$
- BIETTIVA se per ogni elemento $y_0 \in B$ esiste un ed un solo elemento $x \in D$ tale che $y_0 = f(x)$

Esempi:

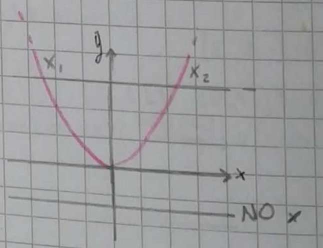
• $y = x$

- è iniettiva
- è suriettiva
- è biettiva



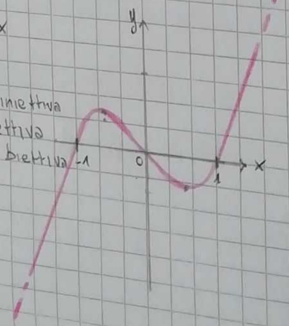

• $y = x^2$

- **NON** è iniettiva
- **NON** è suriettiva
- **NON** è biettiva




• $y = x^3 - x$

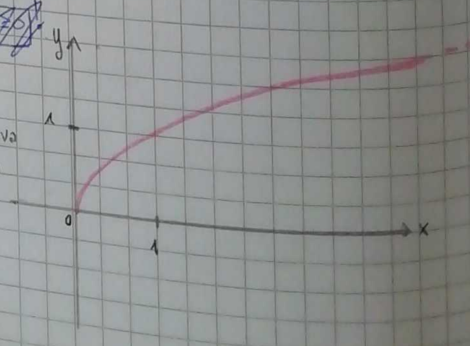
- **NON** è iniettiva
- è suriettiva
- **NON** è biettiva




• $y = \sqrt{x}$

- ~~NON~~ è iniettiva
- **NON** è suriettiva
- **NON** è biettiva

$\boxed{D = [0, +\infty[}$ !
ovvero $x \geq 0$



## Interpretazione grafica:

24/09/2020

Sia $y_0 \in B$, $B \subseteq \mathbb{R}$ codominio di $f$.

- $f$ è iniettiva se ogni retta $y = y_0$ (parallela all'asse delle ascisse) interseca il grafico di $f$ in al più un punto;
- $f$ è suriettiva se ogni retta $y = y_0$ interseca il grafico di $f$ in almeno un punto
- $f$ è biettiva se ogni retta $y = y_0$ interseca il grafico di $f$ in esattamente un punto

Proposizione: Siano $D, B \subseteq \mathbb{R}$. Data una funzione $f: D \to B$, $y = f(x)$, si ha che:

- $f$ è iniettiva se e solo se, dati $x_1, x_2 \in D$ : $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$
- $f$ è iniettiva se e solo se dati $x_1, x_2 \in D$ : $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f$ è suriettiva se e solo se $f(D) = B$ (immagine = codominio)
- $f$ è biettiva se e solo se $f$ è iniettiva e suriettiva

### RESTRIZIONE di una FUNZIONE:

Il dominio e il codominio di una funzione si possono restringere in modo da ottenere una funzione biettiva.
Ad esempio consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$. $f$ non è né iniettiva né suriettiva.

Quando restringiamo ~~una parabola~~ il dominio di una parabola, di solito si considera l'intervallo $x \geq 0$ ma, ovviamente, ~~anche~~ l'intervallo $x \leq 0$ è equivalente.

Restringiamo il dominio e il codominio di $f$ a $D = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ che equivale a scrivere $D = [0, +\infty[$

e definiamo così la funzione $g$ tale che $g: D \to D$, $x \mapsto y = x^2$

e scriveremo $g = f|_D$ → si indica l'insieme in cui la funzione è stata ristretta, nel nostro caso $D$

$g$ è iniettiva, suriettiva e quindi anche biettiva.

Esempio: Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \operatorname{sen} x$ — $f$ è una funzione periodica e non è né iniettiva né suriettiva

È naturale restringere il codominio all'intervallo $B = [-1, 1]$ e convenzionalmente ~~si riduce~~ si restringe il dominio di $f$ a $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Otteniamo così $g = f|_A$ tale che $g: D \to B$, $x \mapsto \operatorname{sen} x$

La funzione $g$ è iniettiva, suriettiva e quindi anche biettiva

## FUNZIONI MONOTONE:

Siano $D, B \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f: D \to B$, $y = f(x)$ è detta:

- CRESCENTE se per ogni $x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$
- DECRESCENTE se per ogni $x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$
- STRETTAMENTE CRESCENTE se per ogni $x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$
- STRETTAMENTE DECRESCENTE se per ogni $x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$

Una funzione crescente o decrescente è detta MONOTONA

Proprietà delle funzioni monotone:

- una funzione strettamente monotona è iniettiva perchè $f(x_1) \neq f(x_2)$, sempre
- una funzione iniettiva può non essere monotona (ex. $y = \frac{1}{x}$)
- una funzione in cui $f(D)$ è costituito da un unico elemento $c \in \mathbb{R}$ si dice COSTANTE
  $f(x) = c \quad \forall x \in D$

# OPERAZIONI tra FUNZIONI

Siano $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo le seguenti funzioni $f$ e $g$

$$f: D_f \to \mathbb{R} \qquad\qquad g: D_g \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) \qquad\qquad x \mapsto y = g(x)$$

Sono definite le seguenti funzioni a partire da $f$ e $g$:

- FUNZIONE SOMMA $h = f + g$: $h(x) = f(x) + g(x)$ con dominio $D_h = D_f \cap D_g$;
- FUNZIONE PRODOTTO $h = f \cdot g$: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ con dominio $D_h = D_f \cap D_g$;
- FUNZIONE RAPPORTO $h = \frac{f}{g}$: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con dominio $D_h = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f \cap D_g) \wedge g(x) \neq 0\}$ denominatore
- FUNZIONE COMPOSTA $h = g \circ f$: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

  con dominio $D_h = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_g)\}$

Esempio:

Consideriamo le seguenti funzioni $f$ e $g$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = x^2 + 2$$

$$g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$$

La composta $h = g \circ f$ è: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$ $\quad D_h: x^2 + 2 \geq 0 \to D = \mathbb{R}$

La composta $l = f \circ g$ è: $l(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 2$ $\quad D_l: x \geq 0 \to D = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Esercizio: Siano $f: D_f \to B$ e $g: D_g \to C$ due funzioni. Dimostrare che

1. se $g \circ f$ è iniettiva, allora $f$ è iniettiva;
2. se $g \circ f$ è suriettiva, allora $g$ è suriettiva.

1. $f$ è iniettiva $\overset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x_1, x_2 \in D_f$

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{allora}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Partendo da $f(x_1) = f(x_2)$

~~se $g \circ f$ è iniettiva si scrive~~

possiamo scrivere $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

Per iniettività di $(g \circ f)$ si ha che $x_1 = x_2$, quindi anche $f$ è iniettiva

2. $g$ è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\forall c \in C \quad \exists\, y \in D_g : g(y) = c$

Sapendo che $(g \circ f)$ è suriettiva so anche che $\exists\, x \in D_f : (g \circ f)(x) = c$

Scriviamo $f(x) = y \Rightarrow g$ è suriettiva

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = c$

# FUNZIONE INVERSA

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo una funzione biettiva $f: D \to B$, $y = f(x)$.
La legge che assegna ad ogni $y \in B$ l'unico punto $x \in D$ tale che $f(x) = y$ si chiama **FUNZIONE INVERSA** e si denota con:

$$f^{-1}: B \to D$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Valgono le seguenti proprietà

- $f^{-1}(B) = D$ : l'immagine della funzione inversa $f^{-1}$ è il dominio di $f$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D$, questa funzione è anche detta FUNZIONE IDENTITÀ del DOMINIO
- $(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in B$, questa funzione è anche detta FUNZIONE IDENTITÀ del CODOMINIO
- $f^{-1}$ è biettiva e $(f^{-1})^{-1} = f$ : l'inverso della funzione inversa è la funzione di partenza

Esempi:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ $\rightarrow$ $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ – $(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$

  $f$ è biettiva $\qquad$ $f^{-1}$ è biettiva $\qquad$ – $(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

  $f$ non è biettiva ma, per invertirla, possiamo restringere il dominio ad $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $g = f|_A$

  $$g: A \to A$$
  $$x \mapsto x^2 = g(x)$$

  $g$ è biettiva $\rightarrow$ $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad$ non è invertibile perché non è biettiva

  Restringiamo il dominio $\quad g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$
  $$x \mapsto \operatorname{sen} x = g(x)$$

  $g$ è biettiva e quindi è invertibile

  $$g^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
  $$x \mapsto \operatorname{arcsen} x$$

  $y = \operatorname{arcsen}(x)$ se $\operatorname{sen}(y) = x$

  L'arcoseno restituisce l'angolo il cui seno è $x$

  ex. $\operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$

Problemi di notazione:

- attenzione a non confondere la funzione inversa, $f^{-1}(x)$, con la funzione reciproca $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$
- la controimmagine a volte è indicata anche con $f^{-1}(B)$. Attenzione a non confondere la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$ con la funzione inversa $f^{-1}(y)$

# SIMMETRIE

Una funzione $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è detta: ~~pari~~

- **PARI** se per ogni $x \in D$ si ha che $\underline{-x \in D}$ e $f(-x) = f(x)$ (ex. $y = x^2$ oppure $y = \cos x$)
- **DISPARI** se per ogni $x \in D$ si ha che $\underline{-x \in D}$ e $f(-x) = -f(x)$ (ex. $y = x$ oppure $y = \operatorname{sen} x$)

Dal punto di vista grafico, se una funzione è pari allora il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y mentre se una funzione è dispari allora il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi (simmetria centrale rispetto all'origine)

! Una funzione pari non potrà mai essere iniettiva! $\boxed{28/09/2020}$

Funzione periodica:

Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è detta **PERIODICA** se esiste $T > 0$ per cui ogni $x \in D$ si ha che $x \pm T \in D$ e $f(x+T) = f(x)$. Il più piccolo valore di $T > 0$ per cui vale questa proprietà si chiama **PERIODO** di $f$

Se $T$ è periodo di $f$, allora anche $2T, 3T, \dots$ e $-T, -2T, \dots$ soddisfano la proprietà della periodicità

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x)$$

Ex.
- le funzioni costanti $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ sono periodiche con periodo qualsiasi numero reale $T > 0$
- $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo $T = 2\pi$

## Traslazioni, dilatazioni e riflessioni

Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$; siano $x_0 > 0$; $y_0 > 0$; $a > 1$; $b > 1$

- Il grafico di $y = f(x + x_0)$ si ottiene traslando a sinistra di $x_0$;
- Il grafico di $y = f(x - x_0)$ si ottiene traslando a destra di $x_0$;
- Il grafico di $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di $y_0$;
- Il grafico di $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando in basso di $y_0$;
- Il grafico di $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$ si ottiene dilatando l'asse x di $a$;
- Il grafico di $y = f(x \cdot a)$ si ottiene contraendo l'asse x di $a$;
- Il grafico di $y = b \cdot f(x)$ si ottiene dilatando l'asse y di $b$;
- Il grafico di $y = \frac{1}{b} \cdot f(x)$ si ottiene contraendo l'asse y di $b$;
- Il grafico di $y = f(-x)$ si ottiene riflettendo rispetto l'asse $y$;
- Il grafico di $y = -f(x)$ si ottiene riflettendo rispetto l'asse $x$;
- Il grafico di $y = -f(-x)$ si ottiene riflettendo rispetto all'origine (simmetria centrale);
- Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ si ottiene riflettendo rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (ovvero la retta $y = x$).

# FUNZIONI ELEMENTARI

## FUNZIONI POTENZA

Fissato un esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^{\alpha}$

dove il dominio D di f e la definizione di potenza dipendono dal valore di $\alpha$

### Funzione potenza con esponente naturale

Sia $\alpha = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora:

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

- dominio $D = \mathbb{R}$

(immagine)
- $\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} [0, +\infty[ & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

N.B: $y = x^0 = 1$ se $x \neq 0$. A volte $0^0 = 1$ per convenzione

Osservazioni:

- Se $n \neq 0$ è pari, allora $f(x) = x^n$ è pari e strettamente crescente in $[0; +\infty[$;
- Se n è dispari, allora $f(x) = x^n$ è dispari e strettamente crescente in $\mathbb{R}$
- Se $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ si ha:

$$\begin{cases} x^n < x^m & \text{se } x > 1 \\ x^n > x^m & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Valgono le proprietà delle potenze:

$0^n = 0 \qquad 1^n = 1 \qquad x^{n+m} = x^n x^m \qquad x^{nm} = (x^n)^m$

- Un polinomio ~~è una~~ di grado n è una funzione

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$ dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$

### Funzione potenza con esponente intero negativo

Se $\alpha = -n$ con $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

- dominio $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- immagine $\mathrm{Im}\, f = \begin{cases} ]0, +\infty[ & \text{se } n \text{ è pari} \neq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

### Funzione potenza con esponente $\frac{1}{n}$

Se $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

ovvero $y = f(x)$ risolve $y^n = x$

| | DOMINIO | IMMAGINE |
|---|---|---|
| Se n è pari | $D = [0, +\infty[$ | $\mathrm{Im}\, f = [0, +\infty[$ |
| Se n è dispari | $D = \mathbb{R}$ | $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ |

## Funzione potenza con esponente razionale

Se $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Se $\alpha > 0$ il dominio è $D = [0, +\infty[$ e l'immagine è $\operatorname{Im} f = [0, +\infty[$

Se $\alpha < 0$ il dominio è $D = ]0, +\infty[$ e l'immagine è $\operatorname{Im} f = ]0, +\infty[$

## Funzione potenza con esponente reale

Se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^\alpha = \begin{cases} \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \leq \alpha\} & \text{se } x \geq 1; \\ \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \leq \alpha\} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

non è da imparare a memoria

Se $\alpha > 0$, il dominio è $D = [0, +\infty[$ e l'immagine è $\operatorname{Im} f = [0, +\infty[$

Se $\alpha < 0$, il dominio è $D = ]0, +\infty[$ e l'immagine è $\operatorname{Im} f = ]0, +\infty[$

**N.B.:** anche con esponente reale, valgono tutte le proprietà delle potenze

# FUNZIONI ESPONENZIALI

Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, la funzione esponenziale con base $a$ è

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = a^x = \exp_a(x)$$

~~Se $a > 1$ la funzione è crescente mentre se $a < 1$ la funzione è decrescente~~

Proprietà:

- Le funzioni esponenziali assumono solo valori positivi
- Se $a > 1$, allora $f(x) = a^x$ è strettamente crescente ($x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$) mentre se $0 < a < 1$, allora $f(x) = a^x$ è strettamente decrescente ($x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$)
- Se $a = 1$, allora $f(x) = 1^x = 1$ è costante
- La funzione $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ definita con dominio $\mathbb{R}$ e codominio $]0, +\infty[$ è BIETTIVA e quindi invertibile (la funzione inversa è il LOGARITMO)

Inoltre, per $a > 0$ e $x, x_1, x_2, b, c \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^b = a^{bx}$

Esercizio:

1. $17\sqrt{2^{x+1}} > 34\sqrt[3]{4^{x-3}}$

2. $\cancel{17}\left(2^{\frac{x+1}{2}}\right) > \cancel{34}^{\,2}\left(2^{\frac{2x-6}{3}}\right)$

3. $2^{\left(\frac{x+1}{2}\right)} > 2^{\left(\frac{2x-6}{3} + 1\right)}$

4. $\frac{x+1}{2} > \frac{2x-6}{3} + 1$

5. $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} > -\frac{1}{2} - \frac{6}{3} + 1$

6. $\frac{3x - 4x}{6} > \frac{-3 - 12 + 6}{6}$

7. $-\frac{1}{6}x > -\frac{9}{6}$

8. $x < -\frac{9}{\cancel{6}} \cdot -\frac{\cancel{6}}{1}$

$x < 9$

01/10/2020

# FUNZIONI LOGARITMICHE

Fissato $0<a<1$ oppure $a>1$, la funzione logaritmo in base $a$ è $f: ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \log_a(x)$

Ed è definita come funzione inversa dell'esponenziale $a^x$:

$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$ cioè:
- $a^{\log_a(x)} = x, \ \forall x > 0$
- $\log_a(a^x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale e non può avere la base pari a 1 perché quando la base dell'esponenziale è pari a 1 la funzione degenera in una funzione costante, la quale non è invertibile.

## Proprietà delle funzioni logaritmiche

Si può dimostrare che
- se $a>1$, allora $f(x) = \log_a x$ è strettamente crescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$
- Se $0<a<1$, allora $f(x) = \log_a x$ è strettamente decrescente $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$

Inoltre le seguenti proprietà dei logaritmi discendono dalle proprietà delle potenze
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha$, con $\alpha > 0$
- $\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$, con $\alpha>0, \beta>0$
- $\cancel{\log_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\log_a \alpha}{\log_a \beta}}$
- $\log_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_a \alpha - \log_a \beta$, con $\alpha>0, \beta>0$
- CAMBIO di BASE $(a,b,c>0)$: $a^\alpha = b^{\alpha \log_b(a)}$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

### Osservazioni:
- Non confondere $\log_a \alpha^\beta$ con $\log_a^\beta \alpha$:
  - $\to \log_a \alpha^\beta = \log_a(\alpha^\beta) = \beta \log_a \alpha$
  - $\to \log_a^\beta \alpha = (\log_a \alpha)^\beta$
- Si noti che $\log_a(x^2) = 2\log_a |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Per determinare il dominio naturale di $h(x) = f(x)^{g(x)}$ possiamo scrivere $f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a(f(x))}$ da cui è chiaro che bisogna imporre $f(x)>0$

Se la base è il numero di Nepero, $e \approx 2,7182\ldots$, allora spesso la base della funzione esponenziale e logaritmica non viene indicata

$e^x = \exp_e(x) = \exp(x)$; $\quad \log_e(x) = \log(x) = \ln(x)$

01/10/2020

$: ]0;+\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \log_a(x)$

...nziale e non può avere la
...ari a 1 la funzione degenera

$\Leftrightarrow \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$

$\Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$

...oprietà delle potenze

$\alpha^\beta = \beta \log_a \alpha$, con $\alpha > 0$

$= \dfrac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

...o scrivere $f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\cdot \log_a(f(x))}$

... la base della funzione

---

Esercizi:

- Trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$

C.E.

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0 \\ \log_a x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow D: 0 < x \leq 1 \Rightarrow D: ]0; 1]$

$-(\log_2(x+5))^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0$ C.E.: $x+5 > 0 \rightarrow x > -5$ $\rightarrow D: ]-5; +\infty[$

$\log_2(x+5) = t$ $\rightarrow t^2 - t - 6 > 0$ $t^2 - t - 6 = 0$ $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4(-6)1}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$ $\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$

$t < -2 \vee t > 3$

$\log_2(x+5) < -2 \vee \log_2(x+5) > 3$

$x+5 < 2^{-2} \vee x+5 > 2^3$

$x < \frac{1}{4} - 5 \vee x > 8-5$

$x < -\frac{19}{4} \vee x > 3$ $\rightarrow$ Siccome il dominio è $]-5, +\infty[$ $\rightarrow$ $-5 < x < -\frac{19}{4} \vee x > 3$

Ovvero $]-5; -\frac{19}{4}[ \vee ]3, +\infty[$

D!

# FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

La funzione valore assoluto di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è definita come $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

**Proprietà:**

- $|x| \geq 0$ e $x \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- dato $a > 0$, allora $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
- dato $a > 0$, $|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \vee x > a)$;
- dati $a, b \in \mathbb{R}$ valgono le disuguaglianze triangolari: $|a+b| \leq |a| + |b|$ e $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Dimostrazione delle disuguaglianze triangolari:

- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Sappiamo che $-|a| \leq a \leq |a|$ e che $-|b| \leq b \leq |b|$. Sommando membro a membro otteniamo $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$. E, poiché $-y \leq x \leq y \Leftrightarrow |x| < y$, allora avremo che $|a+b| \leq |a|+|b|$

- $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (disuguaglianza triangolare inversa)

$|a| = |a-b+b|$ e posso scrivere $|a+b-b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$

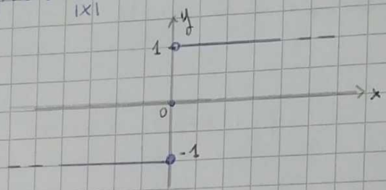
Inoltre $|b| = |b-a+a|$ e posso scrivere $|b-a+a| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |a| - |b| \geq -|a-b|$

Se unisco queste due disuguaglianze ottengo $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$ che è vero se e solo se $||a|-|b|| \leq |a-b|$

# FUNZIONE SEGNO

La funzione segno di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è definita come segue $sgn(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$

Per $x \neq 0$ vale anche $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$




# FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo la circonferenza goniometrica $\gamma$ (con centro l'origine e raggio 1). Ogni angolo $\alpha$ misurato a partire dal semiasse positivo delle ascisse in senso antiorario identifica una semiretta $r$ uscente da $O = (0,0)$. $r$ interseca la circonferenza $\gamma$ nel punto P. Si definiscono coseno e seno di $\alpha$ le coordinate del punto P. $P = (\cos\alpha, \ sen\,\alpha)$

L'angolo è normalmente misurato in radianti $(1 : 2\pi = 1° : 360°)$

Angoli notevoli: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°

| angolo (°) | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| angolo (rad) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| coseno | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| seno | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |

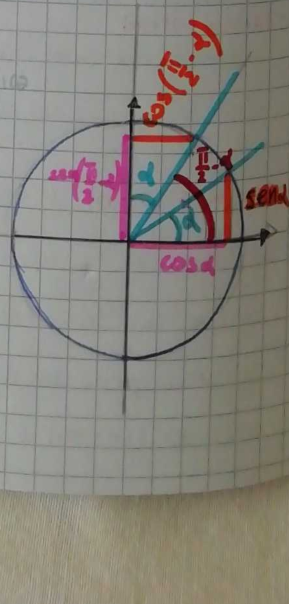
**Proprietà:** $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$

- per definizione $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $-1 \leq sen\,\alpha \leq 1$;
- teorema di Pitagora $(\cos\alpha)^2 + (sen\,\alpha)^2 = 1$;
- periodicità $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $sen(\alpha + 2k\pi) = sen\,\alpha$;
- simmetrie $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$;
- somma:
  - $sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha$
  - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\, sen\,\beta$

aiutarsi con l'interpretazione grafica

## Altre formule trigonometriche:

**TRASLAZIONE:** $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha$



05/10/2020

**DUPLICAZIONE:** $sen(2\alpha) = 2 sen\alpha \cos\alpha$; $\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (sen\alpha)^2$

**RIDUZIONE a POTENZA:** $(sen\alpha)^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $(\cos\alpha)^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

**BISEZIONE:** $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

## SENO

La funzione seno ristretta è $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ed è invertibile.

$x \longmapsto sen\, x$

La funzione inversa si chiama arco-seno ed è $\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$x \longmapsto \arcsin(x)$

La funzione $\arcsin(x)$ è tale che
$(\sin \circ \arcsin)(x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$ $\quad sen(arcsen(x))$
e
$(\arcsin \circ \sin)(x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad arcsen(sen(x))$

## COSENO

La funzione coseno ristretta è $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ ed è invertibile

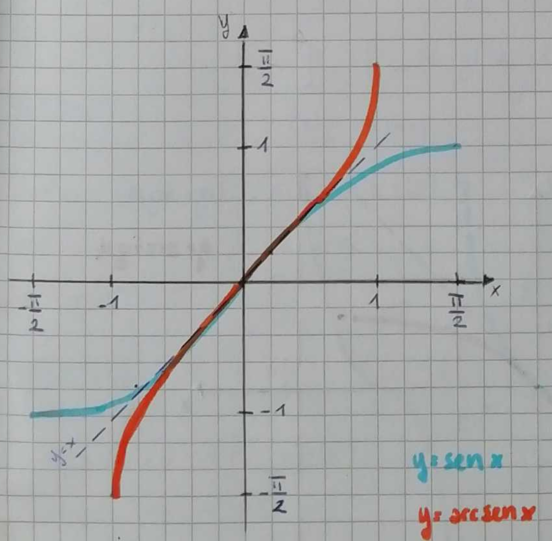
$x \longmapsto \cos x$

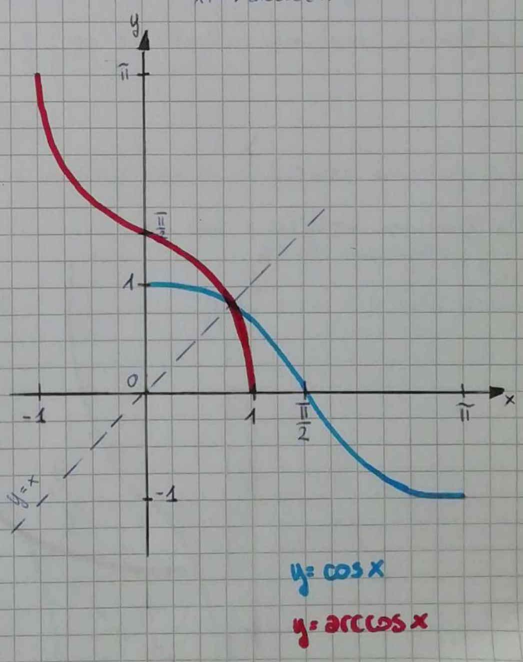
~~La funzio~~

La funzione inversa si chiama arco-coseno ed è $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$x \longmapsto \arccos(x)$

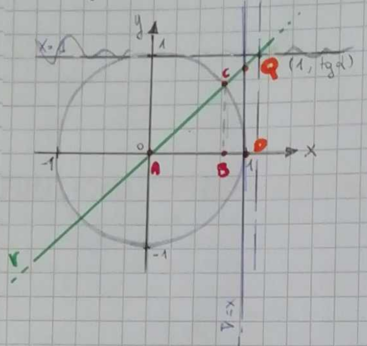
La funzione $\arccos(x)$ è tale che
$(\cos \circ \arccos)(x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$
e
$(\arccos \circ \cos)(x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$



# TANGENTE

Sia r la retta passante per O e formante un angolo $\alpha$ con il semiasse positivo delle ascisse.
Se r non è verticale $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, essa interseca la retta $x=1$ in un punto Q.
Si definisce tangente di $\alpha$ l'ordinata del punto Q, $Q = (1, tg\,\alpha)$




Consideriamo i due triangoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AQD}$.
Essi sono simili e per questo possiamo scrivere

$$\overline{QD} : \overline{CB} = \overline{OD} : \overline{AB}$$

ovvero

$$tg\,\alpha : sen\,\alpha = 1 : cos\,\alpha$$

da cui

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

**PROPRIETÀ:** Siano $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Valgono le seguenti proprietà

- $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ ;
- $tg(\alpha + k\pi) = tg(\alpha) \Rightarrow$ periodo $T = \pi$ ;
- il dominio di $y = tg(\alpha)$ è $D: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ;
- l'immagine di $y = tg(\alpha)$ è $\mathbb{R}$.
- la funzione $tg(\alpha)$ è SURIETTIVA

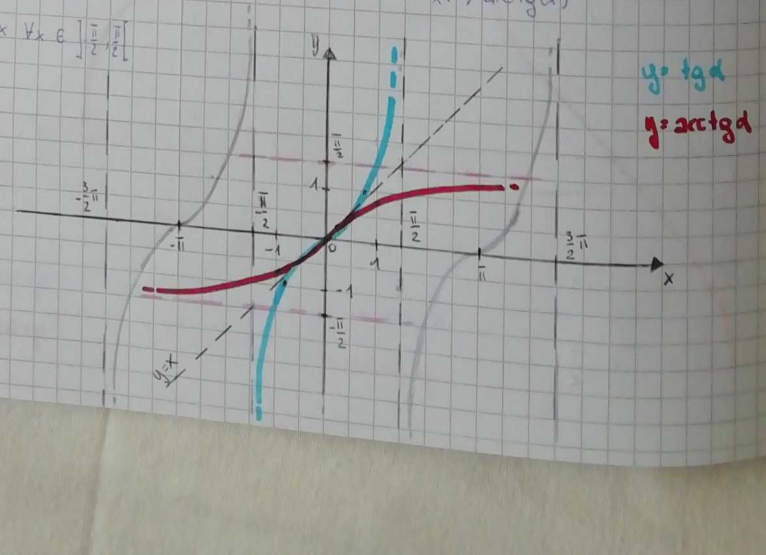
La funzione tangente ristretta è $tg: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ ed è invertibile.

$$x \longmapsto tg(x)$$

La funzione inversa si chiama arcotan e è $arctg: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \longmapsto arctg(x)$$

La funzione arctg(x) è tale che
$(tg \circ arctg)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e
$(arctg \circ tg)(x) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$




Esercizi:
- Mostrare che arcsen(x) +

$y = arcsen(x) \to sen(y) = x$

$cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = sen(y) = x$

$\to arcsen(x) + arc$

- Determinare il dominio

$$D = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ arcsen(x) > 0 \to x > 0 \end{cases}$$

- Risolvere $cos(2x) + sen$

$cos^2 x + sen^2 x + sen\,x \geq 0$

$(1 - sen^2 x + sen^2 x + sen\,x$

$sen\,x \geq -1$

$x \geq -\frac{\pi}{2}$

# COTANGENTE

- $ctg(x) = \frac{cos\,x}{sen\,x}$
- dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,$
- immagine: $\mathbb{R}$;
- periodo: $T = \pi$.

# SECANTE

$sec(x) = \frac{1}{cos\,x}$

dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k$

immagine: $]-\infty, -1] \cup$

periodo: $T = 2\pi$

# COSECANTE

$cosec(x) = \frac{1}{sen\,x}$

dominio: $\{x \in \mathbb{R}\ x \neq k\pi,$

immagine: $]-\infty, -1[ \cup [$

periodo: $T = 2\pi$

Esercizi:

• Mostrare che $arcsen(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

$y = arcsen(x) \to sen(y) = x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = sen(y) = x$ $\qquad$ $arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = arccos(x) = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - arcsen(x)$

$\rightarrow arcsen(x) + arc\cos(x) = \frac{\pi}{2}$

• Determinare il dominio di $y = \log_2(arcsen(x))$

$$D = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ arcsen(x) > 0 \rightarrow x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = ]0, 1]$$

• Risolvere $\cos(2x) + sen(x) \geq 0$

identità fondamentale della trigonometria

$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$\cos^2 x + sen^2 x + sen x \geq 0$

$1 - sen^2 x + sen^2 x + sen x \geq 0$

$sen x \geq -1$ $\qquad$ // applico la funzione arcsen ad entrambi i membri della disuguaglianza

$x \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

## COTANGENTE

- $ctg(x) = \frac{\cos x}{sen x}$;
- dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- immagine: $\mathbb{R}$;
- periodo: $T = \pi$.

## SECANTE

$sec(x) = \frac{1}{\cos x}$

dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}\}$

immagine: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

periodo: $T = 2\pi$

## COSECANTE

$cosec(x) = \frac{1}{sen x}$

dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

immagine: $]-\infty, -1[ \cup [1, +\infty[$

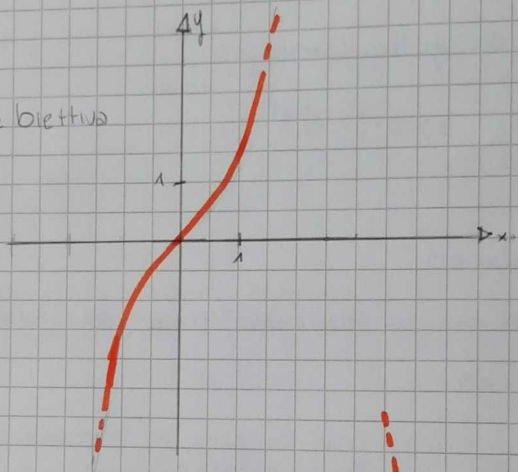
periodo: $T = 2\pi$

# FUNZIONI IPERBOLICHE

## SENO IPERBOLICO

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ; dominio: $\mathbb{R}$ ; invertibile su tutto $\mathbb{R}$; inversa $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ dominio $\mathbb{R}$

- La funzione sinh è dispari poiché $\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh(x)$ e quindi il suo grafico avrà una simmetria centrale rispetto all'origine.
- $\sinh(0) = 0$
- $\operatorname{senh}(x)$ è una funzione biettiva

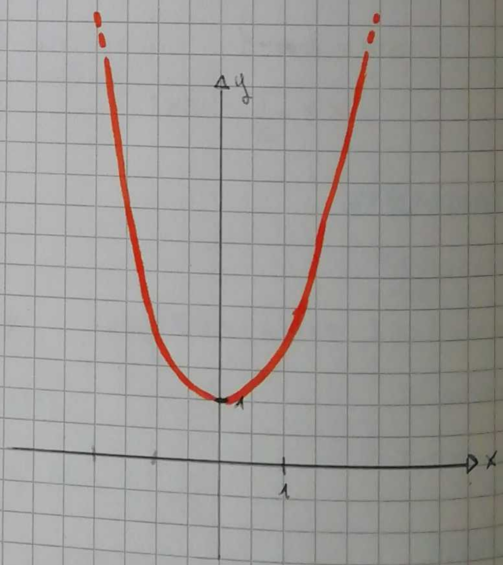



## COSENO IPERBOLICO

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; dominio: $\mathbb{R}$

- è una funzione pari
- non essendo biettiva, per essere invertita bisogna restringere il suo ~~valore~~ dominio per valori $x \in [0, +\infty[$
- Inversa: $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

  Dominio: $[1, +\infty[$




ELEMEN

Un interva
indicata co

Dati un pu
contiene

Quindi se

Dato un

- $x_0 \in A$ è
- $x_0 \in A^c$ è
- $x_0 \in \mathbb{R}$ è
che di A

Esempi:

- V = ]2, 20
Vale per

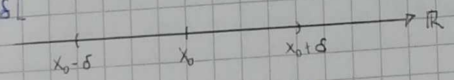
V = [2, 20
di fron

V = {0} ∪

Gli insie
come

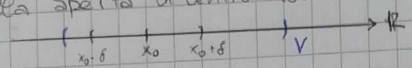
# ELEMENTI di TOPOLOGIA della RETTA REALE

Un intervallo aperto di centro $x_0$ e raggio $\delta > 0$ definisce una palla aperta indicata con $B(x_0, \delta[$




quindi $B(x_0, \delta[ \; = \; ]x_0-\delta, x_0+\delta[$

Dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}$, si dice che $V$ è un INTORNO di $x_0$ se $V$ contiene una palla aperta di centro $x_0$.

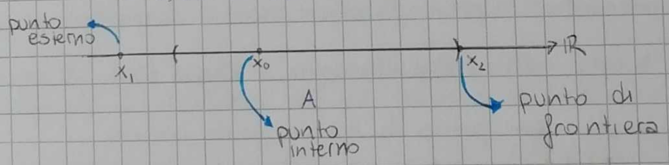



Quindi se esiste un $\delta$ per cui è vero che $B(x_0,\delta[ \subset V$ allora $V$ è un intorno di $x_0$

Dato un ~~insieme~~ sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che:

- $x_0 \in A$ è un PUNTO INTERNO di $A$ se ~~un into~~ esiste un intorno $V$ di $x_0$ tale che $V \subseteq A$
- $x_0 \in A^c$ è un PUNTO ESTERNO di $A$ se esiste un intorno $V$ di $x_0$ tale che $V \subseteq A^c$
  $A^c$ è il complementare di $A$, ovvero $A^c = \mathbb{R} - A$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ è un PUNTO di FRONTIERA di $A$ se ogni intorno ~~di~~ $V$ di $x_0$ contiene sia punti di $A$ che di $A^c$, cioè:

$$B(x_0,\delta[ \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad B(x_0,\delta[ \cap A^c \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$




**Esempi:**

- $V = ]2, 20[$ è intorno di ogni punto in $V$. I punti 2 e 20 sono punti di frontiera. Vale per ogni intervallo aperto

$V = [2, 20]$ è intorno di ogni suo punto interno, esclusi gli estremi 2 e 20 che sono punti di frontiera. Vale per ogni intervallo chiuso.

$V = \{0\} \cup ]10, +\infty[$ non è un intorno di $x_0 = 0$. I punti 0 e 10 sono punti di frontiera

Gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non hanno punti interni. Ogni punto di $\mathbb{Q}$ è di frontiera, così come ogni punto di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

08/10/2020

## Insiemi aperti e chiusi:

- Un insieme A si dice APERTO se è formato solo da punti interni
- Un insieme A si dice CHIUSO se il suo complementare è aperto

esempi:

- L'insieme dato dall'unione (finita o infinita) di intervalli aperti è un insieme aperto
- L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ è aperto. L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso. L'insieme non è né aperto né chiuso
- L'intersezione di due intervalli aperti è un insieme aperto
- L'intersezione di infiniti intervalli aperti può non essere un insieme aperto, infatti:

$$I_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$$

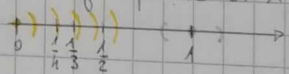
e l'insieme $\{0\}$ è CHIUSO

## Punti di accumulazione e punti isolati:

- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice PUNTO di ACCUMULAZIONE per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se in ogni intorno di $x_0$ cadono infiniti ~~punti di A~~ elementi di A. ($x_0$ può non appartenere ad A)
- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in A$. Se a non è un punto di accumulazione di A, allora a si dice PUNTO ISOLATO di A

esempi:

- Tutti i punti di un intervallo I, inclusi gli estremi, sono di accumulazione per I.
- Sia $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Allora il punto $x_0 = 0$ è l'unico punto di accumulazione per A. Si noti che $0 \notin A$ e che ogni punto di A è un punto isolato.



$\forall \delta > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \ \frac{1}{n} \in B\left]0, \delta\right[ \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow n > \frac{1}{\delta}$

Quindi per ogni $n > \frac{1}{\delta}$ si ha che $\frac{1}{n} \in B\left]0, \delta\right[$

- L'insieme $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione
- Ogni numero reale di accumulazione per $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$)

**Teorema di Bolzano-Weierstrass:** ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$

Ad esempio, $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ è infinito perché gli elementi di $\mathbb{N}^*$ sono infiniti ed è limitato perché tutti i valori di A cadono tra 0 e 1

Esercizio: Trovare i punti di accumulazione dell'insieme $A = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ e dire se A è un'insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso

Gli elementi di A si possono scrivere come $1 + \frac{1}{n}$. Gli elementi di A si avvicinano a $x_0 = 1$ per n crescente. Mostriamo che $x_0 = 1$ è punto di accumulazione per A.

Sia $\delta > 0$ e consideriamo un intorno circolare di 1, $B(1, \delta[ \; = \; ]1-\delta, 1+\delta[$.

Imponendo la condizione $1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \delta$ si trova che per $n > \frac{1}{\delta}$ gli elementi di A cadono in $B(1, \delta[$ e quindi 1 è punto di accumulazione per A.

A non è aperto perchè non contiene intervalli aperti. Inoltre $A^c$ non è aperto perché qualsiasi intorno di 1 ($1 \notin A$ ma $1 \in A^c$) contiene infiniti punti di A. Quindi A non è nè aperto né chiuso.

Esercizio: Trovare i punti di accumulazione dell'insieme $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e dire se A è un insieme aperto, chiuso o nè aperto né chiuso.

Gli elementi di A si possono scrivere come $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Gli elementi di A si ~~possono~~ avvicinano a $x_0 = 1$ per n crescente. Mostriamo che $x_0 = 1$ è un punto di accumulazione per A.

Sia $\delta > 0$ e consideriamo un intorno circolare di 1, $V = B(1, \delta[$.

Imponendo la condizione $1 - \delta < \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < 1$ si può mostrare che per $n > \frac{1-\delta}{\delta}$ gli elementi di A cadono nell'intorno V e quindi è un punto di accumulazione per A.

A non è aperto perché non contiene intervalli aperti. Inoltre $A^c$ non è aperto perchè qualsiasi intorno di 1 contiene infiniti punti di A. Quindi A non è nè aperto nè chiuso

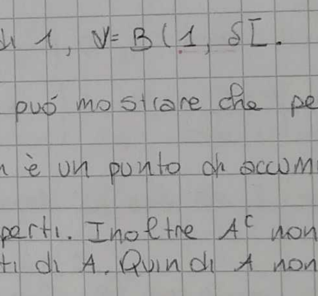
## Definizione generale di limite

Sia data una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A. Diremo che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite di f per x che tende a $x_0$ se, fissato comunque un intorno $U_\ell$ di $\ell$, è possibile trovare un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ tale che i valori della funzione calcolati in tutti i punti di $A \cap I_{x_0}$, tranne eventualmente $x_0$ stesso, cadano nel prefissato intorno $U_\ell$ di $\ell$.

In formule $\forall U_\ell \; \exists I_{x_0} : \forall x \in A \cap I_{x_0}$, con $x \neq x_0$, si abbia $f(x) \in U_\ell$

Scriveremo quindi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$




Si usano inoltre le seguenti notazioni per specificare che nella definizione di limite $x \neq x_0$ e $x \in A$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0, x \in A}} f(x) = \ell$$

esempio:
Consideriamo $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ e il seguente limite: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0$.

Significa che preso un arbitrario intorno (intervallo aperto) di $\ell=0$, $U_0=]a,b[$ con $a<0<b$, esiste un intorno (intervallo aperto) di $x_0=1$, $I_1=]c,d[$ con $c<1<d$, per cui $f(x)\in U_0$ $\forall x\in I_1$

## Definizione ε-δ (epsilon-delta)

[definizione pratica per verificare la correttezza di un limite finito con x tendente a un valore finito]

Sia data una funzione $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A.
Diremo che $\ell\in\mathbb{R}$ è il limite di f per x tendente a $x_0$, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, se, fissato comunque un $\varepsilon>0$, è possibile in corrispondenza ad esso trovare un $\delta_\varepsilon>0$ tale che:

$$\forall x\in A,\ x\neq x_0,\ \text{tale che } \underbrace{|x-x_0|<\delta_\varepsilon}_{x\in B(x_0,\delta_\varepsilon)} \text{ si abbia } \underbrace{|f(x)-\ell|<\varepsilon}_{B(\ell,\varepsilon)}$$

Nota: si può dimostrare che questa definizione di limite è equivalente alla precedente

Esempi:

- Data $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, verificare che $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

  Dobbiamo dimostrare che $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_\varepsilon$ per cui $|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ con $x\neq x_0$

  Nel caso di specie: $|x-1|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$. Consideriamo la seconda disuguaglianza

  $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\varepsilon$

  Quindi basta porre $\delta_\varepsilon=\varepsilon$ e si ha $|x-1|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

- Data $g(x)=4x+5$, verificare che $\lim_{x\to 2} g(x)=13$

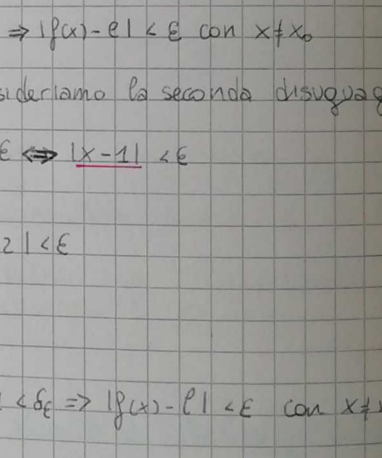
  Dobbiamo dimostrare che $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_\varepsilon$ per cui $|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ con $x\neq x_0$

  Nel caso di specie: $|x-2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |4x+5-13|<\varepsilon$

  $|4x+5-13|<\varepsilon$ è vera se e solo se ($\Leftrightarrow$) $|4x-8|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$

  Quindi basta ~~dire~~ porre $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{4}$ e si ha $|x-2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x)-13|<\varepsilon$

- Verificare che $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ non esiste



## Teorema dell'unicità del limite

Se $l_1$ e $l_2 \in \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora deve essere $l_1 = l_2$, cioè se il limite esiste esso è <u>unico</u>.

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo $l_1 \neq l_2$. Allora esistono $U_1$ e $U_2$ intorni rispettivamente di $l_1$ e $l_2$, che sono disgiunti, cioè $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Per definizione di limite, esistono $I_1$ e $I_2$ intorni di $x_0$ tali che ~~funzion~~

$$f(x) \in U_1 \quad \forall x \in I_1 \setminus \{x_0\} \quad e \quad f(x) \in U_2 \quad \forall x \in I_2 \setminus \{x_0\}.$$

Siccome $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ (sono entrambi intorni di $x_0$), consideriamo $z \in I_1 \cap I_2$, $z \neq x_0$.

Si dovrebbe avere $f(z) \in U_1$ e $f(z) \in U_2$ ma ciò è impossibile poiché $U_1$ e $U_2$ sono disgiunti. Quindi si conclude che $l_1 = l_2$

## Teorema della permanenza del segno

- Se una funzione ha limite positivo, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$, allora esiste un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ per cui $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_{x_0}$;
- Se una funzione ha limite negativo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$, allora esiste un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ per cui $f(x) < 0 \quad \forall x \in I_{x_0}$
- (naturalmente $x$ sta nel dominio di $f$)

Dimostrazione:
Dimostriamo il caso in cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$. Siccome $l > 0$, esiste $U$ intorno di $l$ tale che $y > 0 \ \forall y \in U$. Per definizione di limite esiste $I_{x_0}$ tale che

$$f(x) \in U \quad \forall x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in I_{x_0}$$

## INTORNI di $\infty$

La definizione di limite si può estendere a $+\infty$, $-\infty$ e $\infty$ utilizzando i seguenti intorni

- Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ superiormente illimitato si dice intorno di $+\infty$ (ex. $]b, +\infty[$, con $b \in \mathbb{R}$)
- Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente illimitato si dice intorno di $-\infty$ (ex. $]-\infty, a[$, con $a \in \mathbb{R}$)
- Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente e superiormente illimitato si dice intorno di $\infty$.
  (ex. $]-\infty, a[ \ \cup \ ]b, +\infty[$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

# LIMITI INFINITI

Sono allora chiare le seguenti scritture ($\ell, x_0 \in \mathbb{R}$):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Nota: quando abbiamo un limite con $x$ che tende a $\pm\infty$ o che assume valore $\pm\infty$ ~~possiamo~~ NON possiamo verificare il limite con la definizione $\varepsilon$-$\delta$, ma dobbiamo considerare intorni di $\pm\infty$

Esempi:

- Data $f(x) = \frac{x+1}{x}$, verificare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Dato un $\varepsilon > 0$, dobbiamo dimostrare che esiste un intervallo $M \in \mathbb{R}$ per cui

$$\forall x \in M \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{con } x \neq 0$$

vuol dire che $x \in ]M, +\infty[$

Consideriamo la seconda relazione:

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Nel caso di specie $x > 0$ quindi posso togliere il modulo e scrivere $x > \frac{1}{\varepsilon}$

A questo punto basta ~~dimostrare~~ porre $M = \frac{1}{\varepsilon}$ e si ha $x > M \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

- Data $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, verificare $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

Dato un $M \in \mathbb{R}$, dobbiamo dimostrare che esiste un $\delta > 0$ per cui $|x-2| < \delta \Rightarrow f(x) < M$, con $x \neq 2$

$$f(x) < M \iff -\frac{1}{(x-2)^2} < M \iff \frac{1}{M} > (x-2)^2$$

(assumiamo $M < 0$)

$$\iff |x-2| < \sqrt{-\frac{1}{M}}$$

Quindi se $M < 0$ ~~si ha che~~ basta porre $\delta = \sqrt{-\frac{1}{M}}$ e si ha che $|x-2| < \delta \Rightarrow f(x) < M$