6ème Collège de Doujani

Mathématiques Essentielles : Tout pour la 6ème

ATTOUMANI Ibrahim

Année 2024 - 2025

Table des matières

1 Introduction

Les mathématiques sont bien plus que des nombres et des formules : ce sont des outils puissants qui nous aident à comprendre le monde qui nous entoure, à résoudre des problèmes complexes et à développer notre capacité à penser de manière critique. Ce livre, conçu spécifiquement pour les élèves de 6ème, est une invitation à explorer ce monde fascinant des mathématiques.

À travers les différentes séquences de ce livre, nous allons plonger dans les principales branches des mathématiques qui seront abordées cette année. Chaque séquence a été soigneusement élaborée pour introduire progressivement les concepts mathématiques fondamentaux, tout en fournissant des exemples concrets et des exercices pour renforcer votre compréhension.

Nous commencerons par explorer les nombres entiers, apprendre à les manipuler et à comprendre leur place dans le système numérique. Ensuite, nous entrerons dans le monde de la géométrie, où nous découvrirons les formes, les lignes et les angles. Les opérations sur les nombres entiers seront également au programme, suivi de l'étude des distances, des cercles et des concepts de fractions.

Chaque séquence offre une opportunité d'apprendre de manière interactive et engageante. Nous utiliserons des outils comme la programmation pour explorer des concepts abstraits d'une manière tangible et pratique. De la proportionnalité à l'étude des angles et des formes géométriques, chaque sujet a été choisi pour enrichir votre compréhension des mathématiques et vous préparer à des défis plus complexes à l'avenir.

Ce livre n'est pas seulement un manuel scolaire, mais un guide pour vous aider à développer des compétences mathématiques essentielles qui vous serviront tout au long de votre parcours éducatif et au-delà. Nous espérons que vous trouverez ce voyage à travers les mathématiques aussi enrichissant que stimulant.

Bienvenue dans le monde captivant des mathématiques de la 6ème année !

2 Les Nombres Entiers

2.1 Les Entiers Naturels

Définition

Les **entiers naturels** sont les nombres que nous utilisons pour compter. Ils commencent à zéro et augmentent sans fin. Ces nombres sont très importants en mathématiques et dans la vie quotidienne, car ils nous permettent de quantifier les objets et les événements.

Dans cette sous-section, nous allons apprendre à écrire ces nombres en toutes lettres et à les représenter graphiquement sur une demi-droite graduée.

Exemples

Voici quelques exemples d'écriture en toutes lettres pour les entiers naturels :

- 0 se lit « zéro »
- 1 se lit « un »
- 2 se lit « deux »
- 3 se lit « trois »
- 4 se lit « quatre »
- 5 se lit « cinq »
- 6 se lit « six »
- 7 se lit « sept »
- 8 se lit « huit »
- 9 se lit « neuf »

Dans un nombre, chaque chiffre occupe un certain rang détaillé dans le tableau ci-dessous :

Classe des milliards			**Classe des millions**			**Classe des milliers**			**Unités simples**		
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités
X	X	X	X	X	X	X	X	X	2	3	4
X	X	X	X	X	X	6	5	4	3	2	1
X	X	X	1	2	3	9	8	7	5	4	6
X	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	9

Table 1 – **Représentation des différentes classes et unités d'un nombre.**

Définition

La demi-droite graduée est une ligne qui commence à zéro et continue indéfiniment vers la droite. Les nombres sont marqués régulièrement sur cette ligne pour représenter leur valeur. Voici une illustration de la demi-droite graduée :

Remarque

Les petits traits tracés pour marquer les unités de longueur s'appellent la **graduation**. Lorsque l'espace entre le 0 et le 1 est trop grand, on peut utiliser une **sous-graduation** (en général on n'écrit pas les nombres en dessous). Au contraire, si cet espace est trop petit, on peut sauter plusieurs graduations pour ne graduer que de 5 en 5 par exemple.

2.1.1 Comparer, Ranger, Encadrer ou Intercaler des Entiers Naturels

Dans cette partie, nous allons apprendre à comparer, ranger, encadrer et intercaler des entiers naturels. Ces compétences sont utiles pour organiser et manipuler les nombres efficacement.

Comparer des entiers naturels consiste à déterminer lequel est plus grand ou plus petit. Les signes utilisés pour comparer sont $<$ (inférieur à), $>$ (supérieur à), $\leq$ (inférieur ou égal à), et $\geq$ (supérieur ou égal à).

Exemples

— $3 < 5$ (trois est inférieur à cinq)

— $7 > 4$ (sept est supérieur à quatre)

— $6 \leq 6$ (six est inférieur ou égal à six)

— $9 \geq 2$ (neuf est supérieur ou égal à deux)

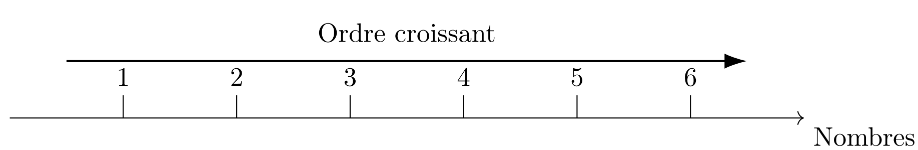
.

Ranger des entiers naturels signifie les organiser dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou décroissant (du plus grand au plus petit).

Considérons les nombres suivants en ordre croissant :

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6$$

Pour mieux visualiser l'ordre croissant, regardons la représentation graphique ci-dessous :



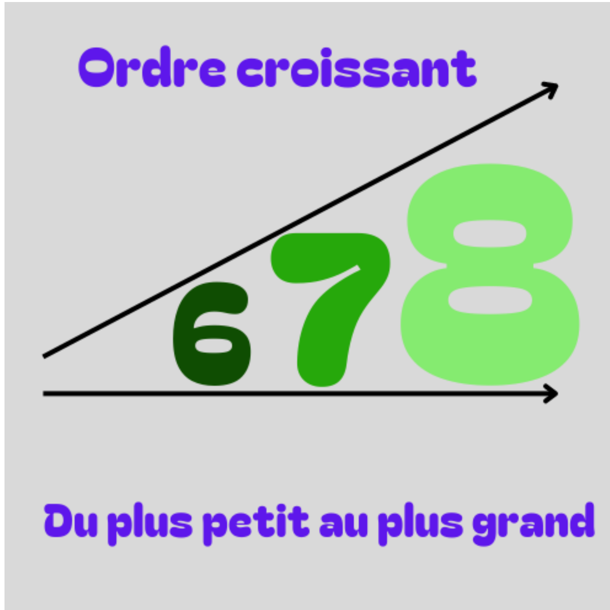


FIGURE 1 – Progression en Ordre Croissant

Considérons les nombres suivants en ordre décroissant :

$$6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$$

Pour mieux visualiser l'ordre décroissant, regardons la représentation graphique ci-dessous :

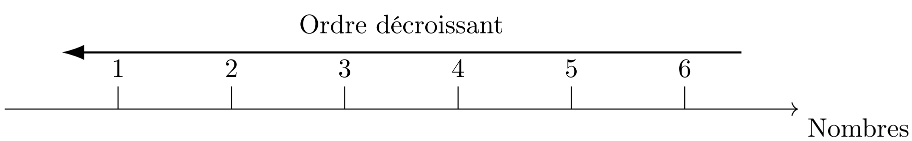


FIGURE 2 – Progression en Ordre Décroissante

Encadrer un nombre consiste à trouver deux nombres entre lesquels il se trouve. Cela peut aider à estimer la position d'un nombre par rapport aux autres.

Exemples

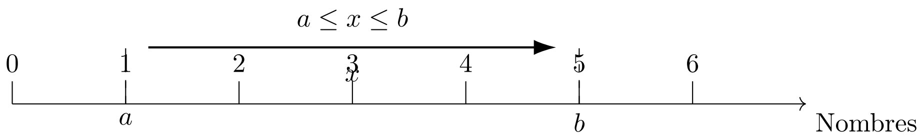
— $4 < 6 < 8$ (six est encadré entre quatre et huit)

.

Considérons l'encadrement du nombre $x = 3$ tel que $a = 1 \leq x \leq b = 5$.

$$a \leq x \leq b$$

Pour mieux visualiser l'encadrement d'un nombre, regardons la représentation graphique ci-dessous :



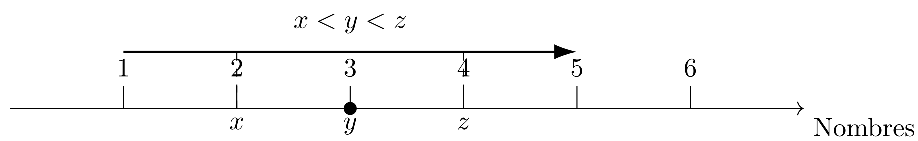
Intercaler un nombre signifie le placer correctement entre deux autres nombres. Cela aide à mieux comprendre la position relative des nombres.

Exemples

— y = 3 est entre x = 2 et z = 4

.

Pour mieux visualiser l'intercalation d'un nombre, regardons la représentation graphique ci-dessous :



Exercices

Exercice 1 : Trouvez les nombres entiers naturels entre 10 et 20.

Exercice 2 : Écrivez les nombres suivants en toutes lettres : 13, 25, 37, 48, 59.

Exercice 3 : Représentez graphiquement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, et 5 sur une demi-droite graduée.

Exercice 4 : Comparez les entiers naturels suivants en utilisant les signes $<$, $>$, $\leq$, ou $\geq$: 7 et 9, 12 et 12, 15 et 8.

Exercice 5 : Rangez les nombres suivants dans l'ordre décroissant : 45, 23, 89, 12, 67.

Exercice 6 : Encadrez le nombre 6 entre deux entiers naturels.

Exercice 7 : Intercalez le nombre 5 entre les nombres 3 et 7.

Récapitulatif

Dans cette section, nous avons exploré les concepts fondamentaux liés aux **nombres entiers naturels**. Voici les points essentiels à retenir :

— **Les entiers naturels** sont les nombres que nous utilisons pour compter, comme 0, 1, 2, 3, etc.
— Chaque chiffre dans un nombre occupe un **rang** spécifique (unités, dizaines, centaines, etc.).
— La **demi-droite graduée** est utilisée pour représenter les entiers naturels graphiquement.
— Les **opérations de comparaison** permettent de déterminer si un nombre est plus grand, plus petit, ou égal à un autre.
— **Ranger** des entiers naturels signifie les organiser dans un ordre croissant ou décroissant.
— **Encadrer** un nombre consiste à trouver deux nombres entre lesquels il se situe.
— **Intercaler** un nombre consiste à le placer correctement entre deux autres nombres.

Ces concepts sont cruciaux pour comprendre et manipuler les nombres dans les mathématiques de base.

2.2 Les Entiers Relatifs

Définition

Les entiers relatifs incluent les entiers naturels ainsi que leurs opposés négatifs. Ces nombres permettent de représenter des quantités au-dessous de zéro, comme les températures négatives ou les dettes.

Dans cette sous-section, nous apprendrons à écrire ces nombres en toutes lettres et à les représenter sur une demi-droite graduée.

Exemples

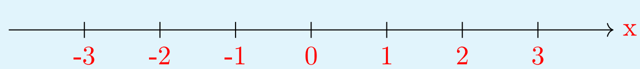
Voici quelques exemples d'écriture en toutes lettres pour les entiers relatifs :

— -3 se lit « moins trois »
— -2 se lit « moins deux »
— -1 se lit « moins un »
— 0 se lit « zéro »
— 1 se lit « un »
— 2 se lit « deux »
— 3 se lit « trois »

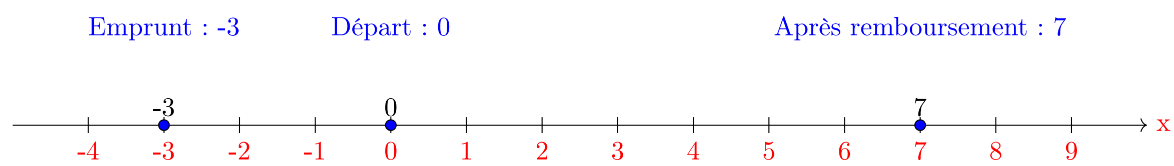
.

Remarque

Sur une demi-droite graduée, les nombres négatifs sont placés à gauche de zéro, et les nombres positifs à droite. Voici une illustration :



Imaginons que vous n'avez rien, soit 0 pièce (pas d'argent). Puis, vous faites un emprunt de 3 pièces à votre ami. Vous passez donc de 0 à -3, car vous devez maintenant 3 pièces à votre ami (c'est une dette). Ensuite, votre père vous donne 10 pièces comme argent de poche. Cela vous fait passer de -3 à 7 pièces, car dans les 10 pièces que vous avez reçues, vous en retirez 3 pour rembourser la dette envers votre ami. Voici comment cela se présente :



2.2.1 Comparer, Ranger, Encadrer ou Intercaler des Entiers Relatifs

Comparer, ranger, encadrer et intercaler des entiers relatifs sont des compétences essentielles pour comprendre et manipuler ces nombres. Ces opérations nous aident à organiser les nombres négatifs et positifs et à les utiliser dans des situations variées.

Comparer des entiers relatifs se fait avec les mêmes signes que pour les entiers naturels : $<$, $>$, $\leq$, et $\geq$.

Exemples

— -3 $<$ -1 (moins trois est inférieur à moins un)
— 2 $>$ -4 (deux est supérieur à moins quatre)
— $-2 \leq 0$ (moins deux est inférieur ou égal à zéro)
— $3 \geq -1$ (trois est supérieur ou égal à moins un)

.

Ranger des entiers relatifs consiste à les organiser dans l'ordre croissant ou décroissant, en tenant compte des nombres négatifs et positifs.

Encadrer un nombre relatif consiste à trouver deux entiers relatifs entre lesquels il se trouve. Cela peut être utile pour estimer sa position.

Exemples

— -2 $<$ 0 $<$ 3 (zéro est encadré entre moins deux et trois)

.

Intercaler un nombre relatif signifie le placer entre deux autres nombres. Cela aide à comprendre sa position relative dans l'ensemble des entiers.

Exemples

— 1 est entre 0 et 2
— -15 est entre -16 et -14

Exercices

Écris les entiers relatifs suivants en toutes lettres :

— -4

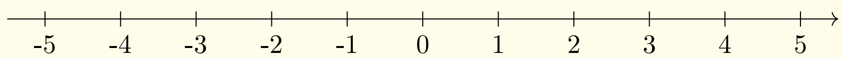
— 7

— -12

— 0

— -9

Place les entiers relatifs suivants sur la demi-droite graduée : -3, -1, 2, 4, -2.



Récapitulatif

Dans cette leçon, nous avons appris à écrire et à représenter les entiers relatifs. N'oubliez pas que les nombres négatifs sont simplement des entiers avec un signe moins devant, et ils se trouvent à gauche de zéro sur une droite graduée.

2.3 Opérations sur les Nombres Entiers

2.3.1 Additions et Soustractions

Définition

Les additions et soustractions sont les opérations de base pour combiner ou comparer des nombres. Nous allons explorer comment effectuer ces opérations avec des entiers.

Additionner des nombres signifie les combiner (les ajoutés entre eux) pour obtenir un total.

Exemples :

— $3 + 5 = 8$

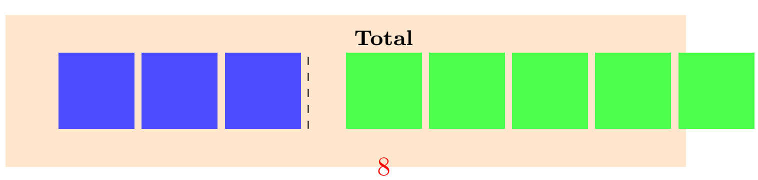


Figure 3 – Illustration de $3 + 5$ avec des rectangles

— $-3 + 4 = 1$

Soustraire un nombre signifie enlever une quantité d'un autre nombre.

Exemples :

— $7 - 2 = 5$

— $-5 - 2 = -7$

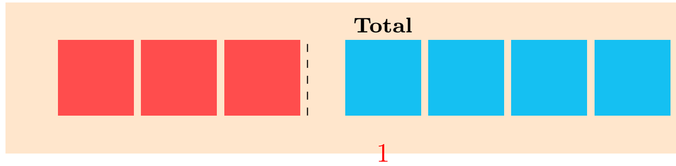


FIGURE 4 – Illustration de $-3+4$ avec des rectangles

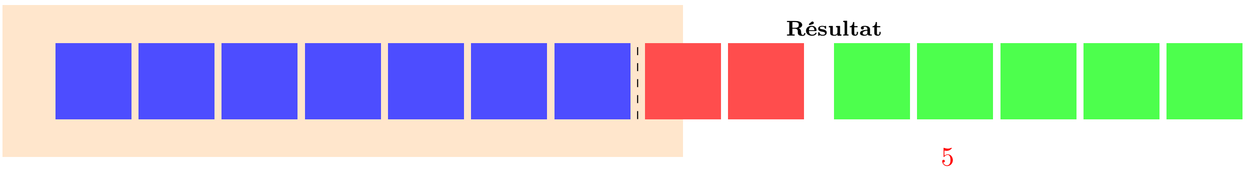


FIGURE 5 – Illustration de $7-2$ avec des rectangles

2.3.2 Multiplications

Définition

La multiplication est une opération qui consiste à ajouter un nombre à lui-même un certain nombre de fois. Nous allons voir comment multiplier des entiers.

Relation de signes : Lorsque l'on multiplie ou divise des nombres, la règle est la suivante :

— Le produit ou le quotient de deux nombres de même signe (positif avec positif ou négatif avec négatif) est **positif**.

— Le produit ou le quotient de deux nombres de signes opposés (positif avec négatif) est **négatif**.

Relations de Signes

Opération	Résultat	Couleur
$-(+)=-$	Négatif	$-$
$+(+)=+$	Positif	$+$
$-(-)=+$	Positif	$+$
$+(-)=-$	Négatif	$-$

Exemples :

Multiplications

Multiplication de 10 avec 5

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 50 \end{array}$$

Multiplication de 12 avec 11

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 11 \\ \hline 12 \\ 12\ \ \\ \hline 132 \end{array}$$

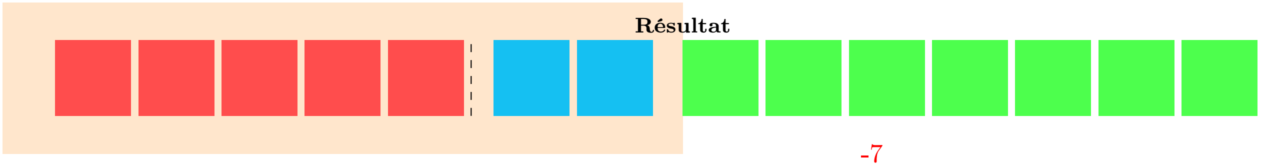


Figure 6 – Illustration de $-5-2$ avec des rectangles

Explication des Multiplications

Multiplication de 10 par 5 :

$$\begin{array}{r} 1\,0 \\ \times \quad 5 \\ \hline 5\,0 \end{array}$$

(La multiplication de 10 par 5 est directe : 10 multiplié par 5 donne 50.)
Explication : Nous multiplions 10 par 5. Comme 10 est un nombre entier, nous multiplions simplement les chiffres 10 et 5. Le résultat est 50.
Multiplication de 12 par 11 :

$$\begin{array}{r} 1\,2 \\ \times\,1\,1 \\ \hline 1\,2 \\ 1\,2\;\; \\ \hline 1\,3\,2 \end{array}$$

(Pour multiplier 12 par 11, nous utilisons la méthode distributive : $(10+2) \times (10+1)$. On obtient $120+12=132$.)
Explication : Nous multiplions 12 par 11 en utilisant la méthode distributive :

— Décomposez 11 en $10+1$.

— Multipliez 12 par 10 pour obtenir 120.

— Multipliez 12 par 1 pour obtenir 12.

— Additionnez les deux résultats : $120+12=132$.

Déroulement des Multiplications :

1. Pour 10×5 :
   (a) On peut visualiser cela comme ajouter 10 cinq fois :
   $$10+10+10+10+10=50$$
2. Pour 12×11 :
   (a) On peut visualiser cela comme ajouter 12 onze fois :
   $$12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12=132$$

Définition

Multiple : Un multiple d'un nombre est le produit de ce nombre par un autre nombre entier. Par exemple, 24 est un multiple de 4 (car $4 \times 6 = 24$).

2.3.3 Division Euclidienne

Définition

La division euclidienne consiste à diviser un nombre, appelé dividende, par un autre nombre, appelé diviseur, pour obtenir un quotient et un reste. Cette division est utile pour déterminer combien de fois un nombre peut être réparti en parts égales, et ce qui reste.

Voici les termes importants :

- Dividende : Le nombre que l'on souhaite diviser.
- Diviseur : Le nombre par lequel on divise.
- Quotient : Le résultat entier de la division.
- Reste : Ce qui reste après la division.

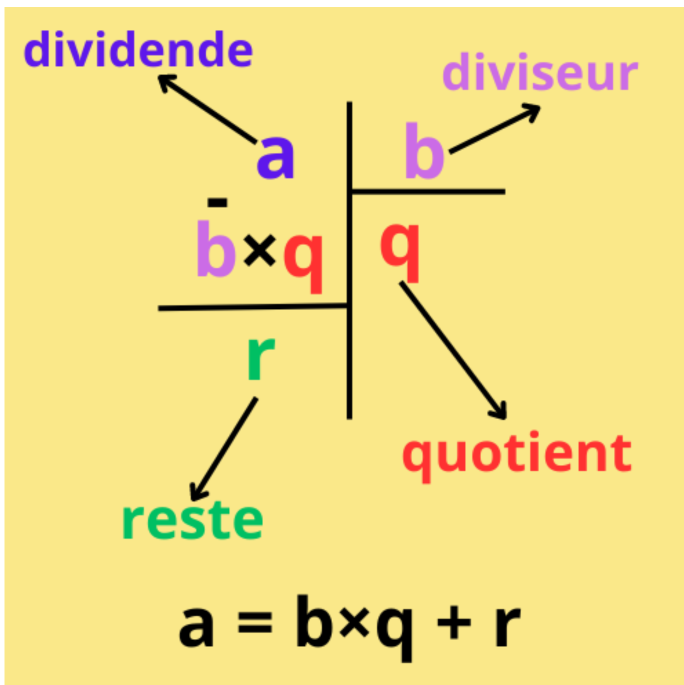


Figure 7 – Illustration de la Division Euclidienne

Les types de divisions

En mathématiques, il existe principalement deux types de divisions lorsque l'on travaille avec des nombres entiers.

1. **Division avec reste non nul** : Lorsque l'on divise un nombre entier (appelé **dividende**) par un autre nombre entier (appelé **diviseur**), il se peut que le diviseur ne se divise pas exactement dans le dividende. Dans ce cas, après avoir trouvé combien de fois le diviseur peut entrer dans le dividende (c'est le **quotient**), il reste une certaine quantité, appelée le **reste**. Par exemple, si l'on divise 27 par 4, on obtient un quotient de 6 et un reste de 3, car $27 = 4 \times 6 + 3$.

2. **Division avec reste zéro** : Dans ce type de division, le diviseur se divise exactement dans le dividende, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de reste. Le quotient est donc le nombre entier de fois que le diviseur peut être multiplié pour atteindre le dividende. Par exemple, si l'on divise 24 par 6, on obtient un quotient de 4 et un reste de 0, car $24 = 6 \times 4$. Cela signifie que 6 est un diviseur exact de 24, et que 24 est un multiple de 6.

Ces deux types de divisions sont importants pour comprendre comment les nombres peuvent être décomposés et regroupés. Dans le cas où le reste est zéro, cela indique une relation particulière entre le dividende et le diviseur, où le diviseur est un facteur exact du dividende.

Exemple

Division Euclidienne de 27 par 4 avec reste non nul

$$\begin{array}{rr|l} - & 27 & 4 \\ \cline{3-3} & 24 & 6 \\ \cline{2-2} & 3 & \end{array}$$

Explication du déroulement :

1. **Division :** Nous commençons par diviser 27 par 4. On cherche combien de fois 4 peut entrer dans 27 sans dépasser ce nombre. La réponse est 6 fois, car $4 \times 6 = 24$.
2. **Soustraction :** Ensuite, on soustrait 24 de 27. Cette soustraction donne un reste de 3, car $27 - 24 = 3$.
3. **Résultat :** La division euclidienne nous donne donc un quotient de 6 et un reste de 3. En d'autres termes, 27 divisé par 4 donne 6 avec un reste de 3.

Ainsi, la division euclidienne de 27 par 4 s'écrit :

$$27 = 4 \times 6 + 3$$

Cette méthode nous permet de comprendre comment un nombre peut être divisé en parties égales et combien il en reste après avoir divisé complètement.

Division Euclidienne de 27 par 4 avec reste zéro

$$\begin{array}{rr|l} - & 27 & 3 \\ \cline{3-3} & 27 & 9 \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Explication du déroulement :

1. **Division :** Nous commençons par diviser 27 par 3. On cherche combien de fois 3 peut entrer dans 27 sans dépasser ce nombre. La réponse est 9 fois, car $3 \times 9 = 27$.

2. **Soustraction :** Ensuite, on soustrait 27 de 27. Cette soustraction donne un reste de 0, car $27 - 27 = 0$.
3. **Résultat :** La division euclidienne nous donne donc un quotient de 9 et un reste de 0. En d'autres termes, 27 divisé par 3 donne 9 sans reste.

Ainsi, la division euclidienne de 27 par 3 s'écrit :

$$27 = 3 \times 9 + 0$$

Cette méthode nous montre que 27 peut être divisé en parties égales de 3 sans qu'il reste de quantité. Cela signifie que 3 est un diviseur exact de 27.

Remarque

Il est possible de mélanger les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division dans une même expression. Cependant, certaines opérations ont des priorités sur d'autres. Par exemple, les multiplications et les divisions doivent être effectuées avant les additions et les soustractions. Nous verrons plus en détail ces priorités opératoires par la suite.

2.3.4 Priorités Opératoires

Définition

Les priorités opératoires déterminent l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées dans une expression mathématique pour obtenir le bon résultat.

Lors de la résolution d'expressions arithmétiques, il est important de suivre un ordre précis pour effectuer les opérations correctement. Voici les priorités opératoires à respecter :

1. **Parenthèses** : Les opérations à l'intérieur des parenthèses doivent être effectuées en premier. Cela permet de regrouper les calculs et d'assurer leur exécution dans le bon ordre.
2. **Multiplications et Divisions** : Ensuite, on effectue les multiplications et les divisions de gauche à droite. Ces opérations ont la même priorité, donc on les traite dans l'ordre où elles apparaissent.
3. **Additions et Soustractions** : Enfin, on réalise les additions et les soustractions de gauche à droite. Comme pour les multiplications et divisions, ces opérations ont la même priorité.

Voici un exemple simple pour illustrer ces règles :

- Considérons l'expression : $4 + 3 \times 2$.
  - Il n'y a pas de parenthèses, donc on passe directement aux multiplications et divisions.
  - Nous devons effectuer la multiplication avant l'addition. Calculons donc $3 \times 2 = 6$.
  - Ensuite, on effectue l'addition : $4 + 6 = 10$.
- Un autre exemple : $(8 - 3) \times 2$.
  - Nous commençons par les opérations à l'intérieur des parenthèses : $8 - 3 = 5$.
  - Ensuite, nous effectuons la multiplication : $5 \times 2 = 10$.
- Un dernier exemple : $6 \div 2 + 1$.
  - Il n'y a pas de parenthèses, donc nous procédons aux multiplications et divisions avant les additions et soustractions.
  - Effectuons la division : $6 \div 2 = 3$.
  - Puis nous réalisons l'addition : $3 + 1 = 4$.

En suivant cet ordre des opérations, nous pouvons résoudre les expressions mathématiques de manière précise et cohérente.

2.4 Exercices et Corrections

Exercices

1. **Addition de nombres :** Calculez les sommes suivantes :
   (a) 45 + 27
   (b) 76 + 89
   (c) 123 + 54
   (d) 35 + 48
   (e) 67 + 29
   (f) 88 + 32
   (g) 56 + 44
2. **Soustraction de nombres :** Calculez les différences suivantes :
   (a) 92 - 38
   (b) 150 - 77
   (c) 84 - 29
   (d) 100 - 42
   (e) 60 - 15
   (f) 70 - 28
   (g) 45 - 18
3. **Multiplication :** Effectuez les multiplications suivantes :
   (a) 7×6
   (b) 9×8
   (c) 12×5
   (d) 4×7
   (e) 15×3
   (f) 6×9
   (g) 8×7
4. **Division :** Effectuez les divisions suivantes :
   (a) $37 \div 5$
   (b) $55 \div 8$
   (c) $72 \div 10$
   (d) $50 \div 6$
   (e) $83 \div 7$
   (f) $99 \div 9$
   (g) $63 \div 4$
5. **Problème de multiplication :** Léo a 5 paquets de crayons, chaque paquet contient 9 crayons. Combien de crayons a-t-il en tout ?
6. **Problème de soustraction :** Julie a 50 billes. Elle en donne 23 à son ami. Combien de billes lui reste-t-il ?
7. **Problème de partage :** Une pizza est coupée en 8 parts égales. Si 3 parts sont mangées, combien de parts restent-elles ?
8. **Problème de division :** Si une boîte contient 54 bonbons et qu'on veut les partager également entre 6 amis, combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ?

Corrections

1. Addition de nombres :

— 45 + 27 = 72 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 4 & 5 \\ + & & 2 & 7 \\ \hline & & 7 & 2 \end{array}$$

— 76 + 89 = 165 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 7 & 6 \\ + & & 8 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 5 \end{array}$$

— 123 + 54 = 177 **car**

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ + & & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 7 & 7 \end{array}$$

— 35 + 48 = 83 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 3 & 5 \\ + & & 4 & 8 \\ \hline & & 8 & 3 \end{array}$$

— 67 + 29 = 96 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 6 & 7 \\ + & & 2 & 9 \\ \hline & & 9 & 6 \end{array}$$

— 88 + 32 = 120 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 8 & 8 \\ + & & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

— 56 + 44 = 100 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 5 & 6 \\ + & & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Soustraction de nombres :

— 92 - 38 = 54 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 2 \\ - & & 3 & 8 \\ \hline & & 5 & 4 \end{array}$$

— 150 - 77 = 73 **car**

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 5 & 0 \\ - & & 7 & 7 \\ \hline & & 7 & 3 \end{array}$$

— 84 - 29 = 55 **car**

$$\begin{array}{cccc} & & 8 & 4 \\ - & & 2 & 9 \\ \hline & & 5 & 5 \end{array}$$

Corrections

— 100 - 42 = 58 **car**

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 42 \\ \hline 58 \end{array}$$

— 60 - 15 = 45 **car**

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 15 \\ \hline 45 \end{array}$$

— 70 - 28 = 42 **car**

$$\begin{array}{r} 70 \\ -\ 28 \\ \hline 42 \end{array}$$

— 45 - 18 = 27 **car**

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 18 \\ \hline 27 \end{array}$$

3. Multiplication :

— $7 \times 6 = 42$ **car**

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 6 \\ \hline 42 \end{array}$$

— $9 \times 8 = 72$ **car**

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 8 \\ \hline 72 \end{array}$$

— $12 \times 5 = 60$ **car**

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 5 \\ \hline 60 \end{array}$$

— $4 \times 7 = 28$ **car**

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 7 \\ \hline 28 \end{array}$$

— $15 \times 3 = 45$ **car**

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array}$$

— $6 \times 9 = 54$ **car**

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline 54 \end{array}$$

— $8 \times 7 = 56$ **car**

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 7 \\ \hline 56 \end{array}$$

Corrections

4. Division :

— $37 \div 5 = 7$ **avec un reste de** 2 **car**

$$37 = 5 \times 7 + 2$$

En effet, si nous divisons 37 par 5, nous obtenons un quotient de 7 et un reste de 2. Voici le calcul détaillé :

$$\begin{array}{r|l} 3\ 7 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 7 \end{array}$$

On peut vérifier que :

$$5 \times 7 + 2 = 37$$

— $55 \div 8 = 6$ **avec un reste de** 7 **car**

$$55 = 8 \times 6 + 7$$

En effet, si nous divisons 55 par 8, nous obtenons un quotient de 6 et un reste de 7. Vérifions :

$$8 \times 6 + 7 = 55$$

— $72 \div 10 = 7$ **avec un reste de** 2 **car**

$$72 = 10 \times 7 + 2$$

— $50 \div 6 = 8$ **avec un reste de** 2 **car**

$$50 = 6 \times 8 + 2$$

— $83 \div 7 = 11$ **avec un reste de** 6 **car**

$$83 = 7 \times 11 + 6$$

— $94 \div 9 = 10$ **avec un reste de** 4 **car**

$$94 = 9 \times 10 + 4$$

— $63 \div 4 = 15$ **avec un reste de** 3 **car**

$$63 = 4 \times 15 + 3$$

5. Problème de multiplication :

— Léo a 5 paquets de crayons, chaque paquet contenant 9 crayons. Donc, il a :

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 9 \\ \hline 4\ 5 \end{array}$$

Léo a 45 crayons en tout.

Corrections

6. Problème de soustraction :

— Julie a 50 billes, elle en donne 23 à son ami. Donc, il lui reste :

$$\begin{array}{r} 5\,0 \\ -\;2\,3 \\ \hline 2\,7 \end{array}$$

Il lui reste 27 billes.

7. Problème de partage :

— Une pizza est coupée en 8 parts égales. Si 3 parts sont mangées, il reste :

$$\begin{array}{r} 8 \\ -\;3 \\ \hline 5 \end{array}$$

Il reste 5 parts.

8. Problème de division :

— Si une boîte contient 54 bonbons et qu'on veut les partager également entre 6 amis, chaque ami recevra :

$$\begin{array}{r|l} 5\,4 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 9 \end{array}$$

Chaque ami recevra 9 bonbons.

3 Les nombres Décimaux

3.1 Définition et Représentation des nombres décimaux

Définition

Les **nombres décimaux** sont des nombres qui ont une partie entière et une partie fractionnaire, séparées par une virgule (ou un point en anglais). Par exemple, dans le nombre 3,75, 3 est la partie entière et 75 est la partie fractionnaire. Les nombres décimaux permettent de représenter des valeurs plus précises entre les entiers.

Classe des milliers			Unités simples			Virgule	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	**Virgule**	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes
X	X	X	X	X	0	,	0	6	7	9
X	X	X	9	0	1	,	2	3	4	5
X	9	0	0	1	8	,	6	7	8	9

Table 2 – **Représentation des différentes parties d'un nombre entier et décimal.**

3.2 Addition et Soustraction de Nombres Décimaux

3.2.1 Addition de Nombres Décimaux

Additionner des nombres décimaux suit les mêmes principes que pour les nombres entiers, mais il est crucial de bien aligner les virgules pour obtenir un résultat précis. Voici les étapes :

— Alignez les virgules des nombres décimaux.

— Ajoutez les chiffres à partir de la droite.

— Si la somme dépasse 10, reportez l'excédent à la colonne suivante.

Exemple d'Addition

Additionnez 3.45 et 2.67 :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;1\;\,} \\ 3.4\;5 \\ +\;2.6\;7 \\ \hline 6.1\;2 \end{array}$$

(Alignez les virgules, ajoutez les chiffres de droite à gauche, et reportez si nécessaire.)

Explication : Ici, nous avons aligné les nombres selon leurs virgules. On additionne chaque colonne en commençant par la droite. Le résultat est 6.12, car $5 + 7 = 12$, on place 2 et on reporte 1.

Exemple d'Addition

Additionnez 7.89 et 4.1 :

$$\begin{array}{r} 7.89 \\ + \quad 4.1 \\ \hline 11.99 \end{array}$$

(Complétez les zéros pour aligner les colonnes correctement.)
Explication : Nous avons aligné les nombres en ajoutant un zéro à 4.1 pour obtenir 4.10. La somme est alors 11.99, où chaque colonne est additionnée correctement.

3.2.2 Soustraction de Nombres Décimaux

Soustraire des nombres décimaux nécessite également un alignement précis des virgules. Suivez ces étapes pour obtenir un résultat correct :

— Alignez les virgules des nombres décimaux.

— Soustrayez les chiffres de droite à gauche.

— Si nécessaire, empruntez de la colonne voisine pour effectuer la soustraction.

Exemple de Soustraction

Soustrayez 5.6 de 8.3 :

$$\begin{array}{r} 8.3 \\ - \; 5.6 \\ \hline 2.7 \end{array}$$

(Alignez les virgules et empruntez si nécessaire.)
Explication : Nous avons aligné les nombres en ajoutant un zéro à 5.6 pour obtenir 5.60. La soustraction se fait colonne par colonne, avec emprunt si nécessaire pour obtenir 2.70.

Exemple de Soustraction

Soustrayez 3.45 de 6.2 :

$$\begin{array}{r} 6.20 \\ - \; 3.45 \\ \hline 2.75 \end{array}$$

(Complétez les zéros pour une soustraction correcte.)
Explication : Nous avons aligné les nombres en ajoutant un zéro à 6.2 pour obtenir 6.20. La soustraction est effectuée colonne par colonne, avec un résultat de 2.75.

3.3 Multiplication et Division de Nombres Décimaux

3.3.1 Multiplication de Nombres Décimaux

Multiplier des nombres décimaux peut être un peu plus complexe car il faut compter le nombre total de décimales dans les facteurs pour placer correctement la virgule dans le produit :

— Ignorez les virgules et multipliez les nombres comme s'ils étaient entiers.

— Comptez le total des chiffres après la virgule dans les deux nombres.

— Placez la virgule dans le produit en comptant le même nombre de chiffres après la virgule.

Exemple de Multiplication

Multipliez 2.5 par 3.4 :

$$\begin{array}{r}
2.5 \\
\times \quad 3.4 \\
\hline
1\,0\,0 \\
7\,5 \\
\hline
8.5\,0
\end{array}$$

(Ignorez les virgules pour multiplier, puis placez la virgule dans le produit en fonction du nombre total de décimales.)

Explication : Nous avons multiplié 25 par 34 pour obtenir 850. Puisque les deux facteurs ont un total de deux chiffres après la virgule, nous plaçons la virgule après deux chiffres dans le produit, obtenant 8.50.

Exemple de Multiplication

Multipliez 4.12 par 1.3 :

$$\begin{array}{r}
4.1\,2 \\
\times \quad 1.3 \\
\hline
1\,2\,3\,6 \\
4\,1\,2 \\
\hline
5.3\,5\,6
\end{array}$$

(Ignorez les virgules pour multiplier, puis placez la virgule dans le produit en fonction du nombre total de décimales.)

Explication : Nous avons multiplié 412 par 13 pour obtenir 5356. Comme il y a trois chiffres après la virgule au total, nous plaçons la virgule après trois chiffres, obtenant 5.356.

3.3.2 Division de Nombres Décimaux

Diviser des nombres décimaux implique de déplacer la virgule pour simplifier la division, en traitant le problème comme une division entière :

- Déplacez la virgule dans le diviseur pour le rendre entier.
- Déplacez également la virgule dans le dividende du même nombre de positions.
- Divisez normalement comme avec des entiers.

Exemple de Division

Divisez 7.2 par 1.5 :

$$\begin{array}{r|l}
7\,2 & 1\,5 \\
\cline{2-2}
-\,6\,0 & 4 \\
\cline{1-1}
1\,2 &
\end{array}$$

(Déplacez la virgule dans le dividende et le diviseur pour simplifier la division.)

Explication : En déplaçant la virgule dans les deux nombres, nous obtenons une division entière. Diviser 72 par 15 donne 4.8.

Exemple de Division

Divisez 5.4 par 0.6 :

$$\begin{array}{r|l} -\;5\,4 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{5\,4} & 9 \\ 0 & \end{array}$$

(Déplacez la virgule pour obtenir une division entière.)

Explication : Nous avons déplacé la virgule pour rendre le diviseur entier. Diviser 54 par 6 donne 9.

Récapitulatif

Dans cette section, nous avons étudié les nombres décimaux, leur définition, ainsi que les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division impliquant des nombres décimaux. Voici les points clés à retenir :

— **Définition :** Les nombres décimaux ont une partie entière et une partie fractionnaire, séparées par une virgule. Exemple : $3,75$ où 3 est la partie entière et 75 est la partie fractionnaire.

— **Addition et Soustraction :** Il est crucial d'aligner les virgules pour assurer la précision. Complétez avec des zéros si nécessaire pour aligner correctement les chiffres.

— **Multiplication :** Ignorez temporairement les virgules, multipliez les nombres comme des entiers, puis placez la virgule dans le produit en fonction du nombre total de décimales dans les facteurs.

— **Division :** Déplacez la virgule pour transformer le diviseur en un entier, puis divisez comme pour des nombres entiers.

En maîtrisant ces concepts, vous serez capable de manipuler les nombres décimaux avec précision dans divers contextes mathématiques.

Applications directes

Introduction aux Nombres Décimaux : Les nombres décimaux sont des nombres qui utilisent une virgule pour séparer les parties entières des parties fractionnaires. Cette section vous aidera à comprendre comment utiliser ces nombres dans divers contextes.

1. Conversion des Nombres Entiers en Nombres Décimaux : Pour convertir un nombre entier en nombre décimal, vous ajoutez une virgule à la fin du nombre, suivie de zéros. Par exemple, 45 devient 45.00.

2. Lecture et Écriture des Nombres Décimaux : Savoir lire et écrire les nombres décimaux est crucial pour comprendre leur valeur. Par exemple, 3.76 se lit "trois virgule soixante-seize".

3. Comparaison des Nombres Décimaux : Pour comparer les nombres décimaux, comparez d'abord les chiffres avant la virgule, puis les chiffres après la virgule. Par exemple, 2.75 est plus grand que 2.5.

4. Arrondissement des Nombres Décimaux : L'arrondissement permet de simplifier les nombres décimaux en les rendant plus faciles à utiliser. Par exemple, 4.678 arrondi à deux chiffres après la virgule est 4.68.

5. Opérations avec les Nombres Décimaux : Les opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) avec les nombres décimaux suivent les mêmes principes que pour les entiers, mais nécessitent une attention particulière à la position de la virgule.

6. Application des Nombres Décimaux dans la Vie Quotidienne : Les nombres décimaux sont souvent utilisés pour mesurer, gérer des finances, ou lire des résultats précis. Par exemple, vous pouvez utiliser des nombres décimaux pour lire les prix, les distances ou les poids.

3.4 Exercices et Corrections

Exercices

1. **Conversion :** Convertissez les nombres entiers suivants en nombres décimaux :
   (a) 17
   (b) 92
   (c) 123
   (d) 500
   (e) 1000
2. **Lecture :** Écrivez en toutes lettres les nombres décimaux suivants :
   (a) 0.85
   (b) 4.32
   (c) 7.1
   (d) 12.9
   (e) 0.007
3. **Comparaison :** Placez les nombres décimaux suivants dans l'ordre croissant :
   (a) 3.56, 3.5, 3.60
   (b) 2.75, 2.7, 2.76
   (c) 1.89, 1.8, 1.88
4. **Arrondissement :** Arrondissez les nombres décimaux suivants à deux chiffres après la virgule :
   (a) 5.678
   (b) 9.123
   (c) 3.456
   (d) 7.891
   (e) 2.345
5. **Addition :** Effectuez les additions suivantes :
   (a) $4.56 + 3.45$
   (b) $12.78 + 2.34$
   (c) $7.90 + 0.65$
   (d) $5.12 + 8.22$
6. **Soustraction :** Effectuez les soustractions suivantes :
   (a) 9.87 - 4.56
   (b) 15.00 - 3.21
   (c) 7.45 - 2.30
   (d) 10.10 - 5.05
7. **Multiplication :** Effectuez les multiplications suivantes :
   (a) 2.5×4
   (b) 6.3×3
   (c) 1.2×7
   (d) 5.6×5
8. **Division :** Effectuez les divisions suivantes :
   (a) $8.4 \div 2$
   (b) $9.6 \div 3$
   (c) $7.5 \div 5$
   (d) $12.0 \div 4$

Corrections

1. Conversion :

- 17 devient 17.00
- 92 devient 92.00
- 123 devient 123.00
- 500 devient 500.00
- 1000 devient 1000.00

2. Lecture :

- 0.85 se lit "zéro virgule quatre-vingt-cinq"
- 4.32 se lit "quatre virgule trente-deux"
- 7.1 se lit "sept virgule un"
- 12.9 se lit "douze virgule neuf"
- 0.007 se lit "zéro virgule zéro zéro sept"

3. Comparaison :

- Ordre croissant : 3.5, 3.56, 3.60
- Ordre croissant : 2.7, 2.75, 2.76
- Ordre croissant : 1.8, 1.88, 1.89

4. Arrondissement :

- 5.678 arrondi à deux chiffres après la virgule devient 5.68
- 9.123 arrondi à deux chiffres après la virgule devient 9.12
- 3.456 arrondi à deux chiffres après la virgule devient 3.46
- 7.891 arrondi à deux chiffres après la virgule devient 7.89
- 2.345 arrondi à deux chiffres après la virgule devient 2.35

5. Addition :

- $4.56 + 3.45 = 8.01$

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 4.5\,6 \\ +\;3.4\,5 \\ \hline 8.0\,1 \end{array}$$

- $12.78 + 2.34 = 15.12$

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 1\,2.7\,8 \\ +\;2.3\,4 \\ \hline 1\,5.1\,2 \end{array}$$

- $7.90 + 0.65 = 8.55$

$$\begin{array}{l} {}^{1} \\ 7.9 \\ +\;0.6\,5 \\ \hline 8.5\,5 \end{array}$$

- $5.12 + 8.22 = 13.34$

$$\begin{array}{r} 5.1\,2 \\ +\;8.2\,2 \\ \hline 1\,3.3\,4 \end{array}$$

Corrections

6. Soustraction :

— 9.87 - 4.56 = 5.31

$$\begin{array}{r} 9.8\,7 \\ -\;4.5\,6 \\ \hline 5.3\,1 \end{array}$$

— 15.00 - 3.21 = 11.79

$$\begin{array}{r} 1\,5.0\,0 \\ -\;3.2\,1 \\ \hline 1\,1.7\,9 \end{array}$$

— 7.45 - 2.30 = 5.15

$$\begin{array}{r} 7.4\,5 \\ -\;2.3 \\ \hline 5.1\,5 \end{array}$$

— 10.10 - 5.05 = 5.05

$$\begin{array}{r} 1\,0.1\,0 \\ -\;5.0\,5 \\ \hline 5.0\,5 \end{array}$$

7. Multiplication :

— $2.5 \times 4 = 10.0$

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ \times\;4 \\ \hline 1\,0\,0 \\ \hline 1\,0.0 \end{array}$$

— $6.3 \times 3 = 18.9$

$$\begin{array}{r} 6.3 \\ \times\;3 \\ \hline 1\,8\,9 \\ \hline 1\,8.9 \end{array}$$

— $1.2 \times 7 = 8.4$

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times\;7 \\ \hline 8\,4 \\ \hline 8.4 \end{array}$$

— $5.6 \times 5 = 28.0$

$$\begin{array}{r} 5.6 \\ \times\;5 \\ \hline 2\,8\,0 \\ \hline 2\,8.0 \end{array}$$

Corrections

8. Division :

— $37 \div 5 = 7$ **avec un reste de** 2 **car**

$$37 = 5 \times 7 + 2$$

En effet, si nous divisons 37 par 5, nous obtenons un quotient de 7 et un reste de 2. Voici le calcul détaillé :

$$\begin{array}{r|l} 3\;7 & 5 \\ \cline{2-2} -\;3\;5 & 7 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

On peut vérifier que :

$$5 \times 7 + 2 = 37$$

— $56 \div 9 = 6$ **avec un reste de** 2 **car**

$$56 = 9 \times 6 + 2$$

En effet, si nous divisons 56 par 9, nous obtenons un quotient de 6 et un reste de 2. Voici le calcul détaillé :

$$\begin{array}{r|l} 5\;6 & 9 \\ \cline{2-2} -\;5\;4 & 6 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

On peut vérifier que :

$$9 \times 6 + 2 = 56$$

— $85 \div 4 = 21$ **avec un reste de** 1 **car**

$$85 = 4 \times 21 + 1$$

En effet, si nous divisons 85 par 4, nous obtenons un quotient de 21 et un reste de 1. Voici le calcul détaillé :

$$\begin{array}{r|l} 8\;5 & 4 \\ \cline{2-2} -\;8 & 2\;1 \\ \cline{1-1} 0\;5 & \\ -\;4 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

On peut vérifier que :

$$4 \times 21 + 1 = 85$$

4 Fraction et Proportionnalité

4.1 Fraction

4.1.1 Définitions et Illustrations

Définition

Une **fraction** est une expression mathématique qui représente une partie d'un tout. Elle est composée de deux nombres : le numérateur (au-dessus de la barre de fraction), qui indique combien de parties sont prises, et le dénominateur (en dessous de la barre de fraction), qui indique en combien de parties égales le tout est divisé.

Exemple

Considérons la fraction $\frac{2}{5}$. Cela signifie que nous avons 2 parts sur un total de 5 parts égales. Par exemple, si un gâteau est divisé en 5 parts égales, prendre 2 parts correspond à la fraction $\frac{2}{5}$ du gâteau.

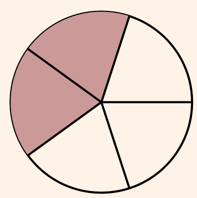
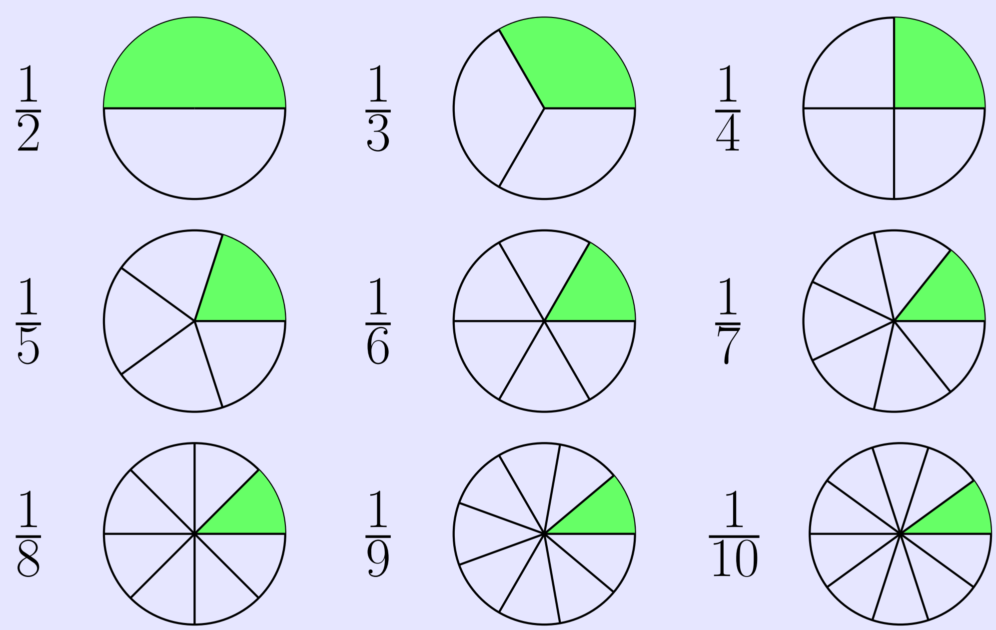


Illustration de Fraction



Note

Note : Les illustrations ci-dessus montrent les fractions de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{10}$ sous forme de parts égales d'un cercle. La portion colorée en vert représente la partie de la fraction par rapport au total.

4.1.2 Opérations sur les fractions

Définitions et Règles

Addition et Soustraction : Pour additionner ou soustraire des fractions, les dénominateurs doivent être identiques. Si ce n'est pas le cas, il faut trouver un dénominateur commun.

Multiplication : Pour multiplier deux fractions, multipliez les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Division : Pour diviser une fraction par une autre, multipliez la première fraction par l'inverse de la seconde.

Dans cette sous-section, nous allons explorer les règles et les méthodes pour effectuer des opérations sur les fractions.

Exemples d'Opérations

1. Addition de fractions avec dénominateurs identiques

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

2. Addition de fractions avec dénominateurs différents
Trouvons un dénominateur commun pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

3. Soustraction de fractions

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Multiplication de fractions

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

5. Division de fractions

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

6. Simplification des fractions après opérations

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Exercices d'Application

1. Addition de fractions avec dénominateurs différents

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \_\_\_\_$$

2. Soustraction de fractions

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \_\_\_\_$$

3. Multiplication de fractions

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \_\_\_\_$$

4. Division de fractions

$$\frac{7}{10} \div \frac{2}{5} = \_\_\_\_$$

5. Simplification après addition

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \_\_\_\_$$

6. Trouver un dénominateur commun
Additionnez les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \_\_\_\_$$

7. Multiplication et simplification

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \_\_\_\_$$

8. Division et simplification

$$\frac{6}{7} \div \frac{3}{14} = \_\_\_\_$$

9. Addition avec simplification

$$\frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \_\_\_\_$$

10. Problème pratique
Si une tarte est divisée en 8 parts égales et que vous en mangez $\frac{3}{8}$, combien de parts reste-t-il ?

$$\frac{3}{8} \text{ de la tarte a été mangée, il reste } \_\_\_\_ \text{ parts}$$

Exercices d'Application

11. Dessinez un cercle et divisez-le en 8 parts égales. Coloriez $\frac{3}{8}$ du cercle en bleu.
12. Si vous avez une pizza coupée en 12 parts égales et que vous en avez mangé 5, quelle fraction de la pizza reste-t-il ?
13. Complétez les fractions suivantes avec des fractions équivalentes : $\frac{2}{4} = \_\_\_\_\_\_$, $\frac{3}{6} = \_\_\_\_\_\_$.
14. Convertissez les fractions suivantes en pourcentages : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$.
15. Trouvez une fraction équivalente pour chaque fraction donnée : $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{9}{12}$.
16. Additionnez les fractions suivantes et simplifiez votre réponse : $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$.
17. Si un gâteau est coupé en 8 parts égales et que vous en mangez $\frac{5}{8}$, quelle fraction du gâteau reste-t-il ?
18. Multipliez les fractions suivantes : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$.
19. Divisez $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ et simplifiez votre réponse.
20. Identifiez les fractions équivalentes suivantes : $\frac{3}{9} = \_\_\_\_\_\_$.

Comparaison des Fractions

Fraction	**Proportions**
$\frac{1}{2}$	50%
$\frac{1}{3}$	33.33%
$\frac{1}{4}$	25%
$\frac{1}{5}$	20%
$\frac{1}{6}$	16.67%
$\frac{1}{7}$	14.29%
$\frac{1}{8}$	12.5%
$\frac{1}{9}$	11.11%
$\frac{1}{10}$	10%

Récapitulatif

En résumé :

- Les fractions représentent une partie d'un tout et sont composées d'un numérateur et d'un dénominateur.
- Les illustrations montrent comment les fractions se divisent visuellement dans un cercle.
- **Addition et Soustraction** : Assurez-vous que les dénominateurs sont identiques avant d'additionner ou de soustraire les numérateurs.
- **Multiplication** : Multipliez les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- **Division** : Multipliez la première fraction par l'inverse de la seconde.
- **Simplification** : Réduisez les fractions après les opérations pour obtenir une forme simplifiée.
- **Dénominateur Commun** : Pour additionner ou soustraire des fractions avec des dénominateurs différents, trouvez un dénominateur commun.

4.2 Proportionnalité

4.2.1 Définitions

Définition

La **proportionnalité** est une relation entre deux grandeurs qui varient de manière constante l'une par rapport à l'autre. on dit que deux suites de nombres sont proportionnelles quand, en multipliant (ou en divisant) par une même constante non nulle, les termes de l'une on obtient les termes de l'autre. Le facteur constant entre l'une et l'autre de ces suites est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemples

Exemple 1 : Imaginons que vous ayez une recette pour 4 personnes et qu'elle demande 200 grammes de farine. Si vous souhaitez préparer la recette pour 8 personnes, vous aurez besoin de 400 grammes de farine. Ici, la quantité de farine et le nombre de personnes sont proportionnels.

Exemple 2 : Vous conduisez une voiture à une vitesse constante de 60 km/h. Si vous doublez le temps de conduite, vous doublerez également la distance parcourue. La distance parcourue est proportionnelle au temps de conduite.

Note

La proportionnalité nous aide à comprendre comment deux choses changent ensemble de manière régulière. C'est comme si on gardait le même rapport entre elles tout le temps.

Remarque

Pour vérifier si deux grandeurs sont proportionnelles, vous pouvez diviser l'une par l'autre et voir si le rapport est toujours le même. Si oui, alors elles sont proportionnelles.

La proportionnalité est une notion que nous rencontrons fréquemment dans notre vie quotidienne. Par exemple, lorsque nous faisons des courses, nous pouvons comparer les prix des produits en utilisant leur coût par kilo ou par litre. Si deux produits ont le même prix par kilo, cela signifie que leur coût est proportionnel à leur poids.

Pour mieux comprendre la proportionnalité, essayons quelques activités simples :

Activité 1 : Vous avez une boîte de crayons qui contient 12 crayons pour un prix de 3 euros. Si vous souhaitez acheter 24 crayons, combien devrez-vous payer ? Utilisez la proportionnalité pour trouver la réponse.

Activité 2 : Vous regardez un film avec une durée de 90 minutes. Si vous avez regardé 30 minutes du film, quelle fraction du film avez-vous regardée ? Comment pouvez-vous utiliser la proportionnalité pour vérifier votre réponse ?

Activité 3 : Si une bouteille de jus de fruit de 1 litre coûte 2 euros, combien coûteront 3 bouteilles ? Vérifiez en utilisant la proportionnalité.

Ces activités vous aideront à voir comment la proportionnalité est utilisée dans des situations réelles et comment vous pouvez l'appliquer pour résoudre des problèmes quotidiens.

N'oubliez pas que la proportionnalité est une compétence très utile qui vous permet de maintenir un rapport constant entre deux grandeurs. Cela vous aidera non seulement dans vos études mais aussi dans de nombreux aspects de votre vie quotidienne !

4.2.2 Tableaux de proportionnalité

Définition

Un **tableau de proportionnalité** est un outil utilisé pour organiser et résoudre des problèmes de proportionnalité. Il permet de comparer deux grandeurs et de déterminer des valeurs manquantes en utilisant le coefficient de proportionnalité.

Comment construire un tableau de proportionnalité ?

- Créez un tableau avec deux colonnes, une pour chaque grandeur à comparer.
- Inscrivez les valeurs connues dans les cases appropriées.
- Utilisez la proportionnalité pour compléter les valeurs manquantes.

Exemple 1

Un paquet de 4 crayons coûte 2 euros. Nous voulons savoir combien coûteront 10 crayons.

Nombre de crayons	Coût (en euros)
4	2
10	?

Méthode :

- Calculez le coefficient de proportionnalité : $\frac{2}{4} = 0.5$ euros par crayon.
- Multipliez ce coefficient par le nombre de crayons désiré : $0.5 \times 10 = 5$ euros.

Tableau Complété :

Nombre de crayons	Coût (en euros)
4	2
10	5

Exemple 2

Un livre de 300 pages coûte 15 euros. Combien coûteront 450 pages ?
Étapes :

- Créez un tableau pour comparer le nombre de pages et le prix :

Nombre de pages	Prix (en euros)
300	15
450	?

Méthode de Résolution :

- Calculez le coefficient de proportionnalité : $\frac{15}{300} = 0.05$ euros par page.
- Multipliez ce coefficient par le nombre de pages désiré : $0.05 \times 450 = 22.5$ euros.

Tableau Complété :

Nombre de pages	Prix (en euros)
300	15
450	22.5

Exercices

Exercice 1 : Un paquet de 8 gommes coûte 4 euros. Complétez le tableau pour savoir combien coûteront 20 gommes.

Nombre de gommes	Coût (en euros)
8	4
20	?

Exercice 2 : Un ticket de cinéma coûte 7 euros pour 1 film. Complétez le tableau pour savoir combien coûteront les billets pour 5 films.

Nombre de films	Coût (en euros)
1	7
5	?

Exercice 3 : Un abonnement mensuel à une salle de sport coûte 30 euros pour 1 mois. Complétez le tableau pour savoir combien coûtera un abonnement de 6 mois.

Nombre de mois	Coût (en euros)
1	30
6	?

Exercice 4 : Un paquet de 3 litres de lait coûte 2.4 euros. Complétez le tableau pour savoir combien coûteront 7 litres de lait.

Quantité (litres)	Coût (en euros)
3	2.4
7	?

Exercice 5 : Un travailleur gagne 150 euros pour 20 heures de travail. Complétez le tableau pour savoir combien il gagnera pour 35 heures de travail.

Nombre d'heures	Salaire (en euros)
20	150
35	?

Exercice 6 : Une machine produit 120 pièces en 4 heures. Complétez le tableau pour savoir combien de pièces seront produites en 6 heures.

Temps (heures)	Nombre de pièces
4	120
6	?
7	?
?	270
10	?

Récapitulatif

- Un tableau de proportionnalité est un outil pour organiser les valeurs et résoudre des problèmes proportionnels.
- Il est constitué de lignes et de colonnes, chaque ligne représentant une paire de valeurs proportionnelles.
- Pour compléter un tableau, utilisez le coefficient de proportionnalité, qui est le rapport constant entre les valeurs.
- Vérifiez les résultats en calculant le produit du coefficient de proportionnalité par les valeurs connues ou en vérifiant si le rapport reste constant.

4.3 Exercices et Corrections

Exercices

Exercices sur les Fractions :

1. Simplifiez les fractions suivantes :

$$\frac{24}{36}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{9}{12}$$

2. Effectuez les opérations suivantes et simplifiez le résultat :

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}, \quad \frac{5}{6}-\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7}\div\frac{2}{3}$$

3. Convertissez les fractions suivantes en pourcentages :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{8}$$

4. Trouvez des fractions équivalentes aux suivantes :

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{9}$$

Exercices sur la Proportionnalité :

5. Un sac de pommes de terre pèse 5 kg et coûte 15 euros. Combien coûteront 8 kg de pommes de terre au même tarif ?

6. Une imprimante peut imprimer 180 pages en 3 heures. Combien de pages pourra-t-elle imprimer en 5 heures au même rythme ?

7. Complétez le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre de crayons	Coût (en euros)
6	3
10	?
15	7.5
?	12

Exercices

Exercices sur les Tableaux de Proportionnalité :

8. Un tableau de proportionnalité est donné pour la relation entre le nombre d'heures travaillées et le salaire gagné. Complétez les cases manquantes.

Heures travaillées	Salaire (en euros)
4	120
6	?
10	300
?	450

9. Remplissez le tableau de proportionnalité pour la recette de cuisine :

Nombre de personnes	Quantité de sucre (en grammes)
2	100
5	?
8	400
?	250

Exercices Combinés (Fractions et Proportionnalité) :

10. Une recette nécessite $\frac{3}{4}$ de tasse de sucre pour 6 muffins. Combien de tasses de sucre seront nécessaires pour faire 18 muffins ?

11. Un cycliste parcourt $\frac{5}{6}$ de la distance totale en 2 heures. Si la distance totale est de 36 km, quelle distance a-t-il parcourue en 2 heures et combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir la distance totale au même rythme ?

Corrections

Corrections des Exercices sur les Fractions :

1. Simplifications des fractions :

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \quad \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \quad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

2. Résultats des opérations :

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1.25, \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

3. Conversion en pourcentages :

$$\frac{1}{2} = 50\%, \quad \frac{3}{5} = 60\%, \quad \frac{7}{8} = 87.5\%$$

4. Fractions équivalentes :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}, \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15}, \quad \frac{6}{9} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27}$$

Corrections

Corrections des Exercices sur la Proportionnalité :

5. Coût pour 8 kg :

$$\text{Prix pour 8 kg} = \left(\frac{15\,\text{euros}}{5\,\text{kg}}\right) \times 8\,\text{kg} = 24\,\text{euros}$$

6. Pages imprimées en 5 heures :

$$\text{Pages en 5 heures} = \left(\frac{180\,\text{pages}}{3\,\text{heures}}\right) \times 5\,\text{heures} = 300\,\text{pages}$$

7. Tableau de proportionnalité complété :

Nombre de crayons	Coût (en euros)
6	3
10	5
15	7.5
10	5

Corrections des Exercices sur les Tableaux de Proportionnalité :

8. Tableau complété :

Heures travaillées	Salaire (en euros)
4	120
6	180
10	300
15	450

9. Tableau complété pour la recette :

Nombre de personnes	Quantité de sucre (en grammes)
2	100
5	250
8	400
10	500

Corrections des Exercices Combinés :

10. Tasses de sucre pour 18 muffins :

$$\text{Pour 18 muffins} = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2.25\,\text{tasses}$$

11. Distance parcourue et temps :

$$\text{Distance parcourue en 2 heures} = \frac{5}{6} \times 36\,\text{km} = 30\,\text{km}$$

$$\text{Temps pour la distance totale} = \frac{36\,\text{km}}{15\,\text{km/h}} = 2.4\,\text{heures} \approx 2\,\text{heures}\,24\,\text{minutes}$$

5 Géométrie

5.1 Distances et Droites

5.1.1 Distances

Définitions

La **distance** est la longueur entre deux points. Pour trouver cette distance, on utilise la formule :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

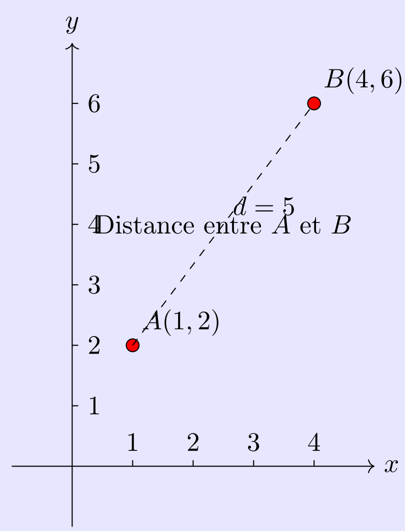
où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées des points.

Exemple d'application

Exemple : Trouvons la distance entre les points $A(1, 2)$ et $B(4, 6)$.

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Illustration



5.1.2 Droites

Définitions

Il existe plusieurs types de droites :

— **Droite :** s'étend indéfiniment dans les deux sens.

— **Demi-droite :** part d'un point et s'étend indéfiniment dans un sens.

— **Segment de droite :** a deux points d'extrémité et a une longueur finie.

Définitions

— **Droites parallèles :** Deux droites sont parallèles si elles ne se rencontrent jamais, quelle que soit leur extension.

— **Droites perpendiculaires :** Deux droites sont perpendiculaires si elles se croisent en formant un angle droit (90°).

— **Droites sécantes :** Deux droites sont sécantes si elles se rencontrent en un point.

— **Droites confondues :** Deux droites sont confondues si elles se superposent exactement, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes points.

Exemple de traçage

Exemple : Pour tracer un segment de droite entre deux points A et B :

1. Placez les points A et B sur la feuille.
2. Utilisez une règle pour relier ces deux points par une ligne droite.

5.1.3 Illustrations des droites parallèles, perpendiculaires, sécantes et confondues

Illustration des droites parallèles

Droites parallèles

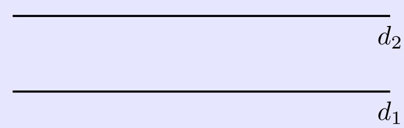


Illustration des droites perpendiculaires

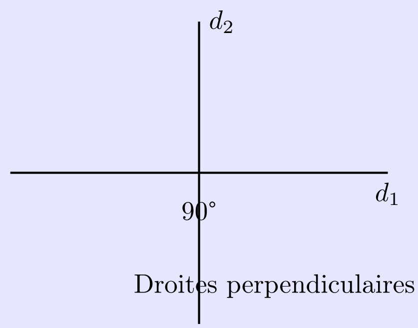


Illustration des droites sécantes

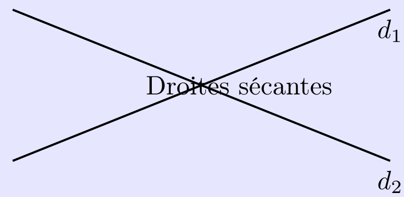
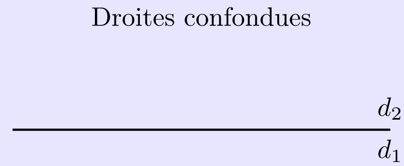


Illustration des droites confondues



Exercices supplémentaires

Exercice 3 : Tracez deux droites parallèles d_1 et d_2 et vérifiez qu'elles ne se coupent pas.
Exercice 4 : Tracez deux droites perpendiculaires et mesurez l'angle entre elles pour vérifier qu'il est de 90°.
Exercice 5 : Tracez deux droites sécantes et trouvez leur point d'intersection.
Exercice 6 : Tracez deux droites confondues et expliquez pourquoi elles sont identiques.

5.2 Figures : Carrés, Rectangles, Triangles et Cercles

5.2.1 Carrés et Rectangles

Définitions

- Un **carré** a quatre côtés égaux et quatre angles droits (90°).
- Un **rectangle** a deux paires de côtés égaux et quatre angles droits.

Exemple de traçage

Exemple : Pour tracer un carré de côté 4 cm :

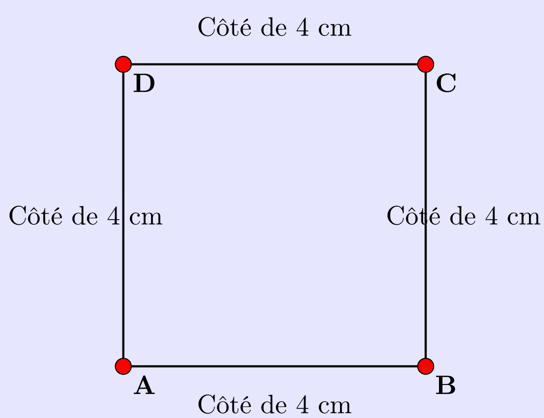
1. Tracez un segment de 4 cm avec une règle.
2. À chaque extrémité, utilisez l'équerre pour former un angle droit (90°) et tracez 4 cm.
3. Reliez les points pour former le carré.

Résolution :

1. **Tracez un segment de 4 cm :**
   — Prenez une règle et placez-la sur votre feuille.
   — Marquez un point A à 0 cm et un point B à 4 cm.
   — Reliez les deux points pour obtenir le segment AB.
2. **Formez des angles droits :**
   — Placez l'équerre à l'une des extrémités (point A).
   — Tracez une ligne perpendiculaire au segment AB en utilisant l'équerre pour créer l'angle droit, jusqu'à 4 cm. Marquez ce point C.
   — Répétez cette étape à l'autre extrémité (point B) pour tracer une ligne perpendiculaire jusqu'à 4 cm. Marquez ce point D.
3. **Reliez les points :**
   — Tracez un segment entre C et D.
   — Ensuite, reliez C à D pour former le carré. Vous devriez avoir un carré $ABCD$.

Illustration :

Illustration



Exercices

Exercice 1 : Tracez un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 3 cm.
Exercice 2 : Tracez un carré de côté 5 cm.

5.2.2 Triangles

Définitions

Un **triangle** a trois côtés. La somme de ses angles est toujours égale à 180°.

Exemple de traçage

Exemple : Pour tracer un triangle :

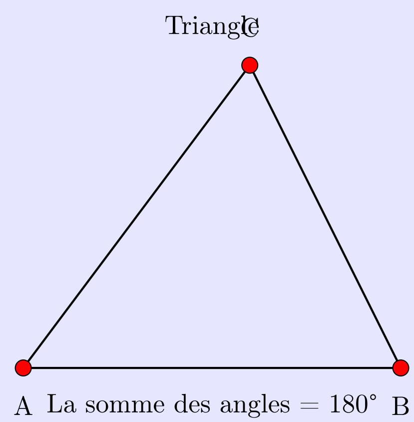
1. Tracez un segment de 5 cm.
2. Placez un point à 3 cm du premier point et un autre point à 4 cm du second point, formant un triangle.
3. Reliez les points pour créer le triangle.

Résolution :

1. **Tracez un segment de 5 cm :**
   — Prenez votre règle et tracez un segment horizontal de 5 cm. Marquez les extrémités de ce segment par les points A et B.
   — Vérifiez que le segment mesure exactement 5 cm pour garantir la précision du triangle.
2. **Placez un point à 3 cm du premier point :**
   — À partir du point A, mesurez 3 cm à l'aide de votre règle et marquez ce point comme C.
   — Ce point C doit être hors du segment AB pour que les points puissent former un triangle.
3. **Placez un autre point à 4 cm du second point :**
   — À partir du point B, mesurez 4 cm pour trouver un point D. Assurez-vous que ce point est également situé de manière à ce que les trois points ne soient pas alignés.
4. **Reliez les points pour créer le triangle :**
   — Reliez les points A, C, et B pour former le triangle ABC.
   — Utilisez une règle pour tracer les segments AC et BC.

Illustration :

Illustration



Exercices

Exercice 1 : Tracez un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 4 cm.
Exercice 2 : Calculez la somme des angles d'un triangle que vous avez tracé.

5.2.3 Cercle

Définitions

Un **cercle** est l'ensemble des points à une distance donnée (le **rayon**) d'un point central (le **centre**). Le **diamètre** est le double du rayon et passe par le centre.

Exemple de traçage

Exemple : Pour tracer un cercle :

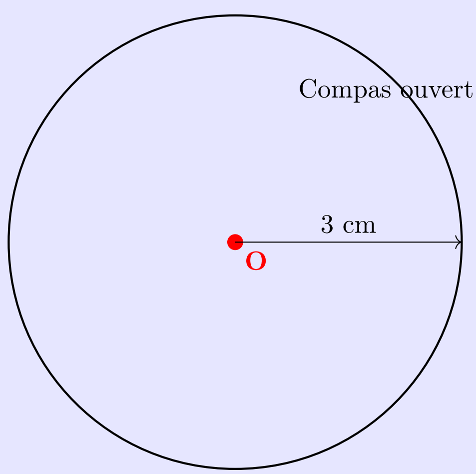
1. Placez le compas au centre du cercle.
2. Ouvrez-le à la distance souhaitée pour le rayon.
3. Faites tourner le compas pour tracer le cercle.

Résolution :

1. **Placez le compas au centre du cercle :**
   — Choisissez un point sur votre feuille. Ce point sera le centre du cercle, que nous allons appeler O.
   — Positionnez la pointe du compas sur ce point O. La pointe doit être stable et ne pas bouger pour assurer un cercle bien tracé.
2. **Ouvrez le compas à la distance souhaitée pour le rayon :**
   — Écartez les deux branches du compas jusqu'à obtenir la distance souhaitée pour le rayon. Par exemple, si vous voulez un cercle de rayon 3 cm, ouvrez le compas à 3 cm entre la pointe et le crayon.
   — Vérifiez que le compas est bien ouvert à la bonne mesure pour obtenir un cercle précis.
3. **Faites tourner le compas pour tracer le cercle :**
   — En gardant la pointe du compas sur le point O, faites tourner doucement le compas à 360° pour tracer le cercle.
   — Assurez-vous que le crayon reste en contact avec le papier tout au long du mouvement pour former un cercle continu.

Illustration :

Illustration



Exercices

Exercice 1 : Tracez un cercle de rayon 3 cm.
Exercice 2 : Identifiez le centre et le rayon du cercle que vous avez tracé.

5.3 Angles et Mesures

5.3.1 Définition d'un angle

Définition : Angle

Un **angle** est formé par deux demi-droites qui se rencontrent en un point appelé le **sommet** de l'angle. Les deux demi-droites qui forment l'angle sont appelées les **côtés** de l'angle. L'ouverture entre les deux côtés est mesurée en **degrés (°)**.

Note

Il existe plusieurs types d'angles :

— **Angle aigu** : un angle inférieur à 90°.
— **Angle droit** : un angle exactement égal à 90°.
— **Angle obtus** : un angle supérieur à 90° mais inférieur à 180°.
— **Angle plat** : un angle de 180°.

Propriété : Somme des angles dans un triangle

Dans un **triangle**, la somme des mesures des trois angles est toujours égale à **180°**.

Exemple de vérification

Exemple : Pour vérifier que la somme des angles dans un triangle est bien égale à 180° :

1. Tracez un triangle quelconque avec une règle.
2. Mesurez les trois angles avec un rapporteur.
3. Additionnez les trois mesures d'angles. Le résultat doit être égal à 180°.

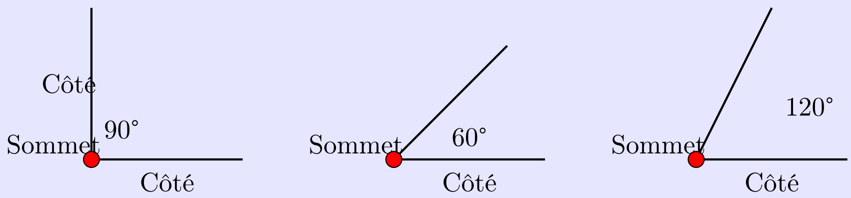
5.3.2 Mesurer un angle avec un rapporteur

Exemple de mesure d'angle

Exemple : Pour mesurer un angle avec un rapporteur :

1. Placez le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle.
2. Alignez une des lignes de l'angle avec la ligne de 0° du rapporteur.
3. Lisez la mesure de l'angle où l'autre ligne de l'angle coupe l'échelle du rapporteur. Cette valeur vous donne la mesure de l'angle en degrés.

Illustration : Types d'angles



Erreurs fréquentes à éviter :

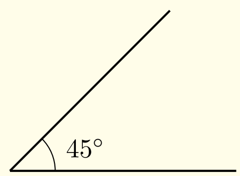
— Ne pas confondre un angle aigu et un angle obtus : l'angle aigu est plus petit que l'angle droit, tandis que l'angle obtus est plus grand.

— Lors de la mesure, assurez-vous d'utiliser le bon côté du rapporteur, car il a deux échelles (de 0° à 180° et de 180° à 0°).

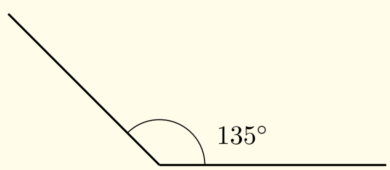
Exercice d'application 1

Exercice 1 : Mesurez les angles suivants avec un rapporteur et identifiez s'ils sont aigus, droits ou obtus :

— **Un angle de 45° :**



— **Un angle de 135° :**



Exercice d'application 2

Exercice 2 : Tracez deux angles droits, un angle aigu et un angle obtus. Utilisez un rapporteur pour vérifier les mesures.

Exercice d'application 3

Exercice 3 : Tracez un triangle équilatéral (trois côtés égaux). Mesurez ses angles. Que remarquez-vous ?

Récapitulatif

- Un **angle** est formé de deux côtés partant d'un même point appelé sommet.
- Les angles se mesurent en **degrés (°)**.
- Les principaux types d'angles sont : **angle aigu** (moins de 90°), **angle droit** (90°), et **angle obtus** (plus de 90°).
- La **somme des angles dans un triangle** est toujours égale à **180°**.
- Pour mesurer un angle, on utilise un **rapporteur**.
- Utilisez toujours une règle et un rapporteur pour tracer et vérifier les angles.

5.4 Géométrie de l'Espace : Solides et Volumes

5.4.1 Solides de base

Définition : Solide

Un **solide** est une figure géométrique en trois dimensions qui occupe un espace. Les solides ont une longueur, une largeur et une hauteur.

Les solides les plus courants en géométrie de l'espace sont le cube, le pavé droit, la pyramide, le cylindre, le cône et la sphère. Ces solides ont des propriétés spécifiques que nous allons découvrir.

Exemples de solides

1. **Le cube** : Toutes ses faces sont des carrés, et ses arêtes ont la même longueur.
2. **Le pavé droit** : C'est un solide ayant des faces rectangulaires.
3. **La pyramide** : Elle a une base polygonale et des faces triangulaires qui se rejoignent à un sommet.
4. **Le cylindre** : Il a deux bases circulaires identiques et une surface latérale courbe.
5. **Le cône** : Il a une base circulaire et une face courbe qui rejoint un sommet.
6. **La sphère** : C'est un solide parfaitement rond, comme une balle.

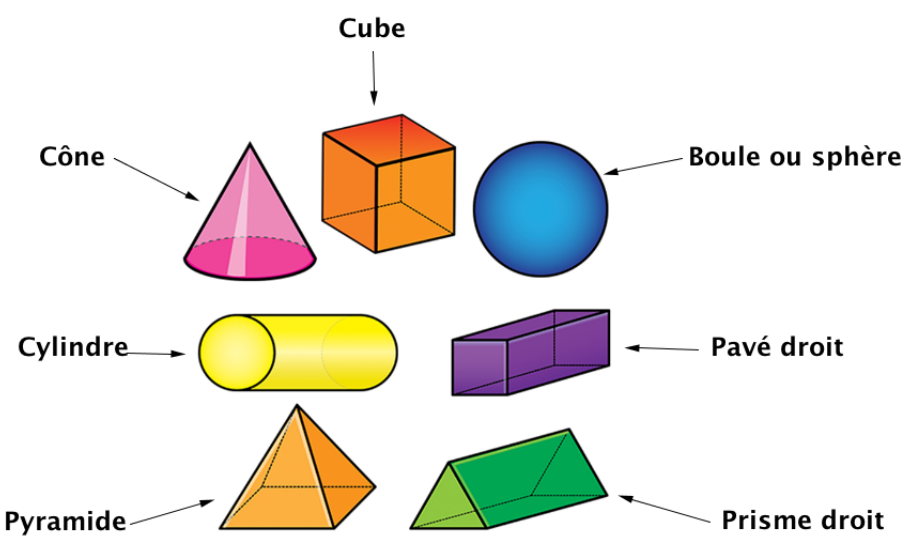


FIGURE 8 – Les solides de base

5.4.2 Volumes des solides

Définition : Volume

Le **volume** d'un solide est la quantité d'espace qu'il occupe. Il se mesure en unités cubiques (cm^3, m^3, etc.).

Note

Pour calculer le volume d'un solide, il faut appliquer des formules spécifiques en fonction du type de solide :

— Volume du cube = côté × côté × côté.

— Volume du pavé droit = longueur × largeur × hauteur.

— Volume d'un cylindre = aire de la base × hauteur.

— Volume d'une pyramide = $\frac{1}{3}$ aire de la base × hauteur.

Exercice d'application 1

Exercice 1 : Calculez le volume des solides suivants :

— Un cube de côté 3 cm.

— Un pavé droit de longueur 5 cm, largeur 4 cm et hauteur 3 cm.

— Un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 5 cm.

Exercice d'application 2

Exercice 2 : Parmi les solides suivants, identifiez lesquels ont un volume plus grand et expliquez pourquoi :

— Une pyramide de base carrée avec un côté de 4 cm et une hauteur de 6 cm.

— Un cube de côté 5 cm.

Récapitulatif

- Un **solide** est une figure en trois dimensions. Les solides courants incluent le cube, le pavé droit, la pyramide, le cylindre, le cône et la sphère.
- Le **volume** mesure l'espace occupé par un solide et se calcule avec des formules spécifiques.
- Utilisez les propriétés des solides pour calculer leur volume, et n'oubliez pas que le volume se mesure en unités cubiques.

Conseils Pédagogiques

— **Pratique avec les outils :** Encouragez les élèves à utiliser correctement les outils géométriques (*règle*, *équerre*, *compas*) pour garantir la précision dans le traçage des figures et la mesure des angles.

— **Vérification des résultats :** Après chaque exercice, il est important de vérifier les réponses avec les élèves pour s'assurer de leur compréhension et corriger les éventuelles erreurs.

— **Illustrations :** Utilisez des schémas et des illustrations pour chaque exercice lorsque cela est possible, afin de rendre les concepts plus visuels et concrets.

5.5 Exercices et Corrections

Exercices

Exercices sur les Distances et Droites :

Exercice 1 : Calculez la distance entre les points $A(2,3)$ et $B(5,7)$.
Exercice 2 : Tracez une demi-droite à partir du point $C(1,1)$ qui passe par le point $D(4,5)$.
Exercice 3 : Tracez un segment de droite entre les points $E(-2,3)$ et $F(1,-1)$.

Exercices sur les Figures Géométriques :

Exercice 4 : Tracez un carré de côté 5 cm en suivant les étapes ci-dessous :

1. Tracez un segment de 5 cm avec une règle.
2. À chaque extrémité, utilisez une équerre pour former un angle droit (90°) et tracez un autre segment de 5 cm.
3. Reliez les points pour compléter le carré.

Exercice 5 : Tracez un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 3 cm.
Exercice 6 : Tracez un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 4 cm.
Exercice 7 : Tracez un cercle de rayon 3 cm en utilisant un compas.

Exercices sur les Angles et Mesures :

Exercice 8 : Mesurez les angles suivants avec un rapporteur et identifiez s'ils sont aigus, droits ou obtus :

— Un angle de 45°
— Un angle de 90°
— Un angle de 135°

Exercice 9 : Tracez deux angles droits, un angle aigu de 60° et un angle obtus de 120°. Utilisez un rapporteur pour vérifier les mesures.

Exercices sur la Géométrie de l'Espace : Solides et Volumes :

Exercice 10 : Calculez le volume des solides suivants :

— Un cube de côté 3 cm.
— Un pavé droit de longueur 5 cm, largeur 4 cm et hauteur 3 cm.
— Un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 5 cm.

Exercice 11 : Parmi les solides suivants, identifiez lesquels ont un volume plus grand et expliquez pourquoi :

— Une pyramide de base carrée avec un côté de 4 cm et une hauteur de 6 cm.
— Un cube de côté 5 cm.

Exercice 12 : Dessinez le patron d'un cube (déplié) et découpez-le pour le replier en cube.
Exercice 13 : Dessinez le patron d'un cylindre (déplié) et découpez-le pour le replier en cylindre.

Exercices Combinés :

Exercice 14 : Tracez un carré de 4 cm de côté et mesurez tous ses angles. Vérifiez que la somme des angles dans le carré est bien égale à 360°.
Exercice 15 : Tracez un triangle avec un angle aigu de 50°, un angle droit de 90°, et un angle obtus de 40°. Vérifiez la somme de ces angles.

Corrections

Exercices sur les Distances et Droites :

— **Exercice 1 :**

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

— **Exercice 2 :**

  — Tracez une demi-droite à partir du point $C(1,1)$ vers le point $D(4,5)$ en utilisant une règle. Prolongez la ligne au-delà de D.

— **Exercice 3 :**

  — Tracez le segment de droite entre $E(-2,3)$ et $F(1,-1)$ à l'aide d'une règle.

Exercices sur les Figures Géométriques :

— **Exercice 4 :**

  — Pour tracer un carré de 5 cm :

    1. Tracez un segment de 5 cm.
    2. À chaque extrémité, tracez un angle droit et tracez des segments de 5 cm.
    3. Reliez les points pour compléter le carré.

— **Exercice 5 :**

  — Tracez un rectangle de 6 cm de long et 3 cm de large, en utilisant une règle et une équerre pour former des angles droits.

— **Exercice 6 :**

  — Tracez un triangle équilatéral dont chaque côté mesure 4 cm. Utilisez un compas pour vérifier les longueurs.

— **Exercice 7 :**

  — Pour tracer un cercle de rayon 3 cm :

    1. Placez le compas au centre.
    2. Ouvrez-le à 3 cm.
    3. Tracez le cercle.

Exercices sur les Angles et Mesures :

— **Exercice 8 :**

  — Un angle de 45° (aigu), un angle de 90° (droit), et un angle de 135° (obtus).

— **Exercice 9 :**

  — Tracez deux angles droits (90°), un angle aigu de 60° et un angle obtus de 120°. Vérifiez les mesures avec un rapporteur.

Exercices sur la Géométrie de l'Espace : Solides et Volumes :

— **Exercice 10 :**

  — Volume du cube :

$$V = c^3 = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$$

  — Volume du pavé droit :

$$V = L \times l \times h = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$$

  — Volume du cylindre :

$$V = \pi r^2 h \approx 3.14 \times 2^2 \times 5 \approx 25.12 \text{ cm}^3$$

Corrections

- **Exercice 11 :**
  - Volume de la pyramide :
  $$V = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 = 32 \text{ cm}^3$$
  - Volume du cube :
  $$V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$
  - Conclusion : Le cube a un volume plus grand que la pyramide ($125 \text{ cm}^3 > 32 \text{ cm}^3$).
- **Exercice 12 :**
  - Le patron d'un cube se compose de 6 carrés. Découpez-le et pliez-le pour former un cube.
- **Exercice 13 :**
  - Le patron d'un cylindre comprend un rectangle et deux cercles. Découpez-le et pliez-le pour former un cylindre.

Exercices Combinés :

- **Exercice 14 :**
  - Vérifiez que la somme des angles dans le carré est égale à 360° : $90 + 90 + 90 + 90 = 360$.
- **Exercice 15 :**
  - Somme des angles : $50 + 90 + 40 = 180$.
  - Remarque : Il s'agit d'une erreur, car la somme devrait être 180° et non 180°.

6 Symétrie

6.1 Symétrie Axiale

6.1.1 Définitions

Définition : Symétrie Axiale

Deux figures sont dites symétriques par rapport à une droite (d) si elles se superposent par pliage le long de la droite (d).

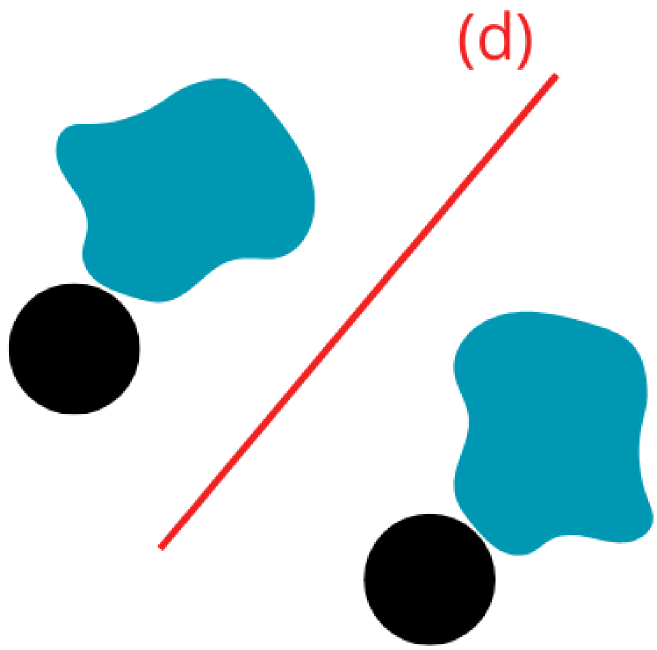


Figure 9 – Symétrie axiale par rappot à la droite (d)

Vocabulaire

- **Axe de symétrie** : Droite par rapport à laquelle la symétrie est effectuée.
- **Point symétrique** : Point obtenu par la symétrie d'un autre point par rapport à l'axe de symétrie.
- **Médiatrice** : Droite qui coupe un segment en son milieu et est perpendiculaire à ce segment.

Note

Deux figures symétriques ont les mêmes formes et dimensions.

6.1.2 Les propriétés de la symétrie axiale

Propriétés

Voici les principales propriétés de la symétrie axiale :

- **Conservation des longueurs :** La symétrie axiale conserve la longueur des segments.
- **Conservation des angles :** Elle conserve aussi les mesures des angles.
- **Conservation des aires :** Les figures symétriques ont la même aire.
- **Conservation de l'alignement :** Si trois points sont alignés, leurs symétriques le sont aussi.
- **Symétrique d'une droite :** Le symétrique d'une droite par rapport à un axe est une droite.
- **Symétrique d'un cercle :** Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.

Exemple : Symétrie axiale d'un point

Pour construire le symétrique d'un point A par rapport à une droite d, il suffit de :

1. Tracer la perpendiculaire à la droite d passant par A.
2. Mesurer la distance entre A et d, et reporter cette distance de l'autre côté de d pour obtenir le point A', symétrique de A.

Pour construire le symétrique d'une figure, on construit le symétrique de chacun des points qui la définissent et on reproduit la forme.

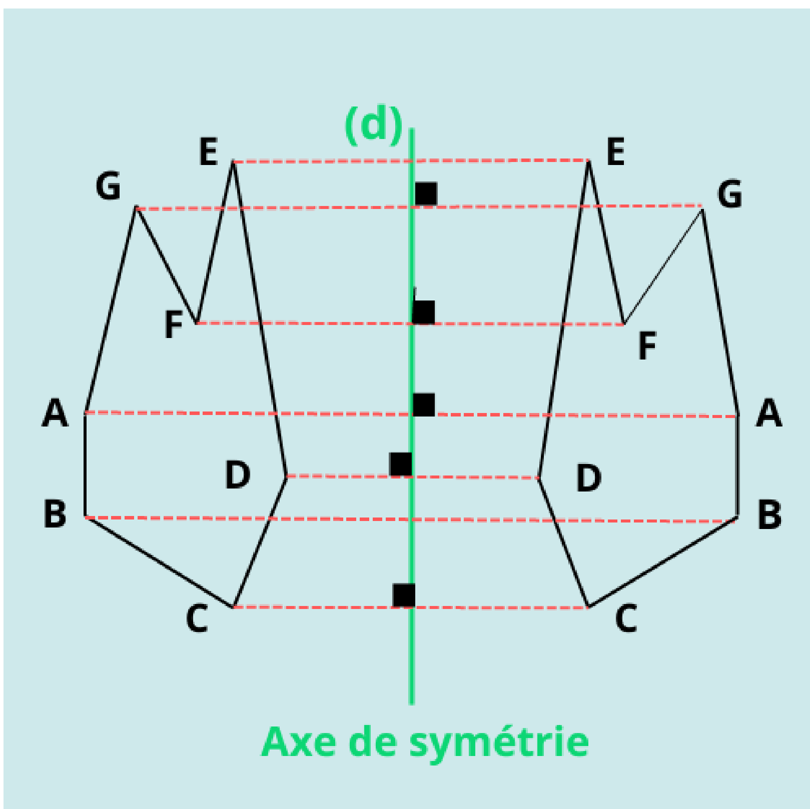


Figure 10 – La construction du symétrique d'une figure

6.2 Les axes de symétrie d'une figure

6.2.1 Symétrie d'une figure

Définition : Symétrie d'une figure

Une figure possède un axe de symétrie si, lorsqu'on la plie le long de cet axe, ses deux parties se superposent exactement. La droite de symétrie est appelée *axe de symétrie*. La symétrie axiale est une transformation géométrique qui conserve les distances, les angles, les aires et les longueurs.

Une figure peut avoir plusieurs axes de symétrie, comme un carré, qui en possède quatre (les deux axes diagonaux et les deux axes passant par les milieux de ses côtés opposés), ou bien aucun axe de symétrie, comme certaines figures irrégulières.

Exemples de figures avec différents nombres d'axes de symétrie :

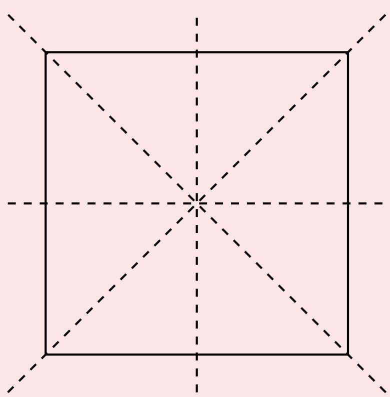
— **Cercle** : Le cercle possède une infinité d'axes de symétrie. Chaque diamètre constitue un axe de symétrie.

— **Triangle équilatéral** : Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie, chacun passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

— **Rectangle (non carré)** : Un rectangle possède deux axes de symétrie, les deux axes passant par les milieux des côtés opposés.

— **Triangle scalène** : Un triangle scalène, sans côtés égaux, ne possède aucun axe de symétrie.

Illustration : Figures avec et sans axes de symétrie



Carré avec 4 axes de symétrie

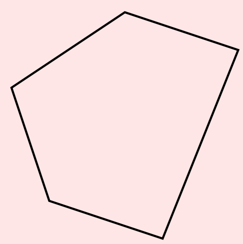


Figure irrégulière sans symétrie

6.2.2 Médiatrice d'un segment

Définition : Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment en son milieu et qui est perpendiculaire à ce segment. Chaque point situé sur la médiatrice est équidistant des deux extrémités du segment. Elle est également l'axe de symétrie du segment.

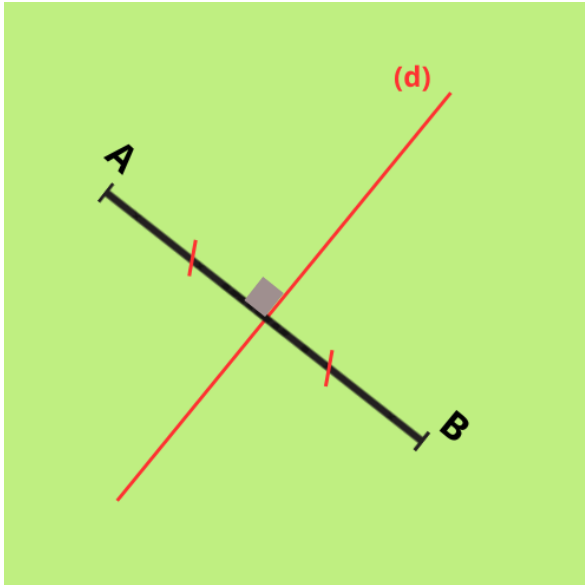


Figure 11 – La droite (d) et la médiatrice du segment[AB]

Propriété

La médiatrice d'un segment est l'axede symétrie de ce segment. Si (d) est la médiatrice du segment [AB], on dit que le point B est le symétrique du point A rapport à (d). Inversement, le symétrique du point A par rapport à une droite (d) est le point B tel que (d) soit la médiatrice du segment [AB]. SI le point A est sur la droite (d), son symétrique est lui-même : le point A est alors dit invariant.

Propriété

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de ce segment.

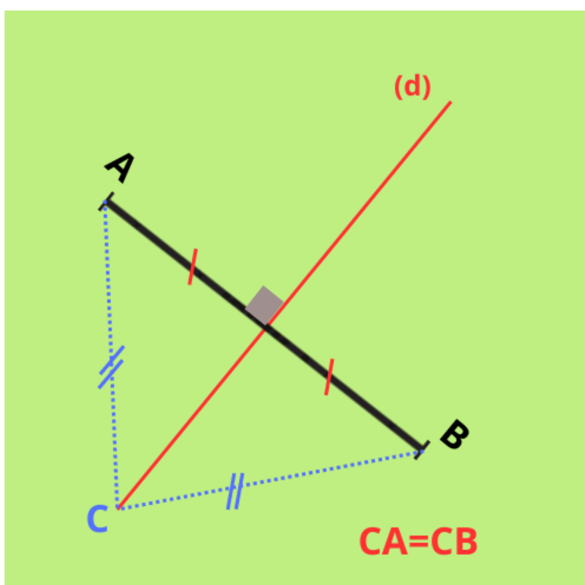


Figure 12 – Équidistance d'un point sur la Médiatrice d'un segment

Propriété

Inversement, si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, appartient à la médiatrice de ce segment.

6.2.3 Cerfs-volants

Définition : Cerf-volant

Un cerf-volant est un quadrilatère dont une diagonale est un axe de symétrie.

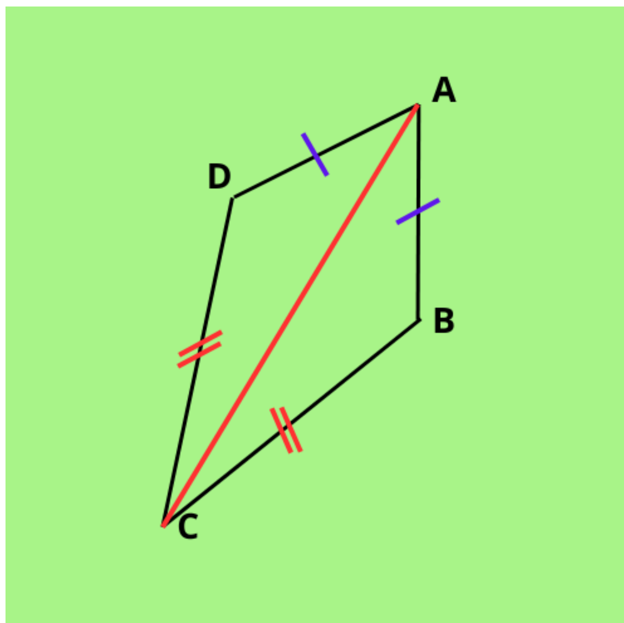


FIGURE 13 – l'axe de symétrie dans le cerf-volant

Le cerf-volant est un exemple de figure qui possède exactement un axe de symétrie. Les propriétés géométriques de cette figure sont importantes dans les études sur les quadrilatères particuliers.

Définition : Bissectrice

Dans un cerf-volant $ABCD$ d'axe de symétrie (AC) :

— $AB = AC$

— $CB = CD$

— $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

— $AC \perp BD$

6.2.4 Bissectrice d'un angle

Définition : Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de meme mesre. Chaque point de la bissectrice est équidistant des deux côtés de l'angle. Elle est aussi un axe de symétrie pour cet angle.

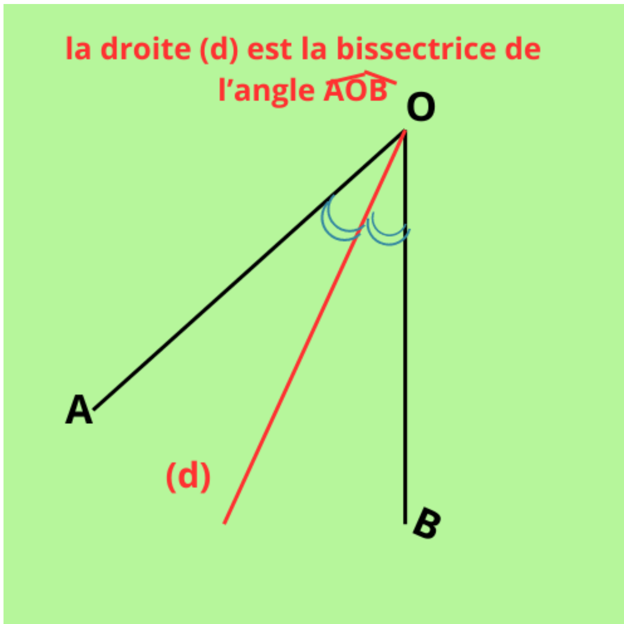


Figure 14 – Bissectrice d'un angle

La bissectrice est une droite fondamentale dans la géométrie, notamment dans la construction des angles égaux et la résolution de problèmes géométriques impliquant la distance à des côtés d'un angle.

Récapitulatif

- La symétrie axiale consiste à superposer deux figures par rapport à une droite appelée **axe de symétrie**.
- Le **point symétrique** d'un point A par rapport à une droite d est obtenu en traçant une perpendiculaire à d depuis A et en mesurant la distance de A à d.
- Les figures symétriques conservent leurs longueurs, angles et aires.
- Les axes de symétrie d'une figure peuvent varier. Par exemple :
  - Un cercle a une infinité d'axes de symétrie.
  - Un triangle équilatéral en a trois.
  - Un rectangle a deux axes de symétrie.
  - Un triangle scalène n'en a aucun.
- La **médiatrice** d'un segment est la droite qui coupe ce segment en son milieu et est perpendiculaire à celui-ci. Chaque point sur la médiatrice est à la même distance des extrémités du segment.

6.3 Exercices et corrections

Exercices

1. **Exercice 1 :** Tracer le symétrique du point $A(2, 3)$ par rapport à la droite $d : y = 1$. Donnez les coordonnées du point symétrique A'.
2. **Exercice 2 :** Considérez le triangle suivant avec les sommets $A(1, 2)$, $B(5, 6)$ et $C(3, 8)$. Trouvez les coordonnées des points symétriques A', B' et C' par rapport à l'axe $d : x = 4$.
3. **Exercice 3 :** Montrer que le rectangle R avec les sommets $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, $C(5, 4)$, et $D(5, 1)$ a deux axes de symétrie. Indiquez ces axes.
4. **Exercice 4 :** Donnez un exemple d'une figure qui n'a aucun axe de symétrie et expliquez pourquoi.
5. **Exercice 5 :** Trouver la médiatrice du segment $[PQ]$ avec $P(-2, 1)$ et $Q(4, 1)$. Quelle est la relation entre la médiatrice et les points P et Q ?
6. **Exercice 6 :** Construisez le symétrique d'un cercle de centre $O(3, 2)$ et de rayon 2 par rapport à une droite $d : x = 5$.
7. **Exercice 7 :** Tracer un triangle isocèle dont un axe de symétrie est la droite $d : x = 0$. Indiquez les coordonnées des sommets du triangle et tracez son symétrique.
8. **Exercice 8 :** Un trapèze $ABCD$ a deux bases parallèles AB et CD, avec $AB = 4$ cm, $CD = 6$ cm, et la hauteur $h = 3$ cm. Tracer le symétrique du trapèze par rapport à sa hauteur.
9. **Exercice 9 :** Soit un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Trouvez le nombre d'axes de symétrie de cet hexagone et expliquez votre démarche.
10. **Exercice 10 :** Tracer un cerf-volant $ABCD$ où $AB = AC$ et BD est perpendiculaire à AC. Indiquez l'axe de symétrie de la figure et vérifiez la propriété de la bissectrice.
11. **Exercice 11 :** Soit le triangle équilatéral ABC avec $AB = BC = CA = 6$ cm. Trouvez les trois axes de symétrie du triangle, et vérifiez si le centre du cercle circonscrit au triangle coïncide avec le point d'intersection de ces axes.
12. **Exercice 12 :** Dans un carré $ABCD$, tracez ses deux diagonales AC et BD. Montrez que ces diagonales sont des axes de symétrie du carré et vérifiez que $AC \perp BD$. Trouvez également le point d'intersection des diagonales.
13. **Exercice 13 :** Un losange $ABCD$ a pour diagonales AC et BD, qui se coupent perpendiculairement en leur milieu. Trouvez les axes de symétrie du losange et montrez que chaque diagonale est un axe de symétrie de la figure.

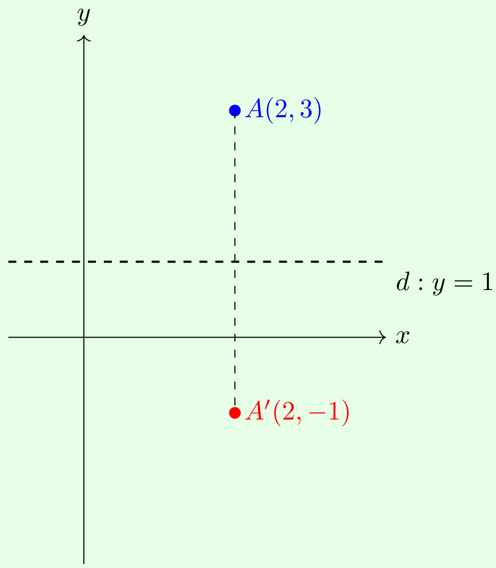
Pour allez plus loin

1. **Exercice 14 :** Tracez un rectangle dont les sommets sont $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 4)$, et $D(0, 4)$. Trouvez les deux axes de symétrie du rectangle et vérifiez si l'intersection des diagonales est un point de symétrie.
2. **Exercice 15 :** Soit un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O. Trouvez les axes de symétrie du pentagone et expliquez comment ils se relient à la symétrie axiale du cercle. Justifiez votre réponse en utilisant les propriétés de la médiatrice.

Corrections des Exercices avec Graphiques

Exercice 1 : Le symétrique du point $A(2,3)$ par rapport à la droite $d : y = 1$:

— Le point symétrique $A'(2,-1)$ est situé à une distance égale de la droite d.

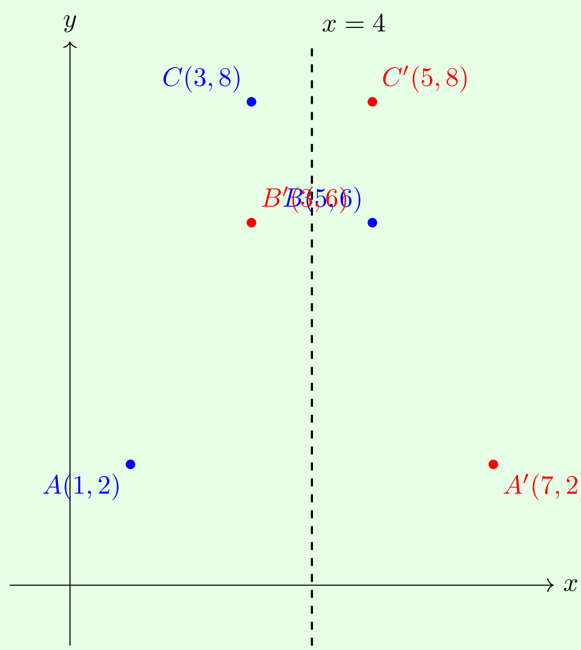


Exercice 2 : Symétrie des points $A(1,2)$, $B(5,6)$, $C(3,8)$ par rapport à l'axe $x = 4$:

— $A(1,2) \to A'(7,2)$

— $B(5,6) \to B'(3,6)$

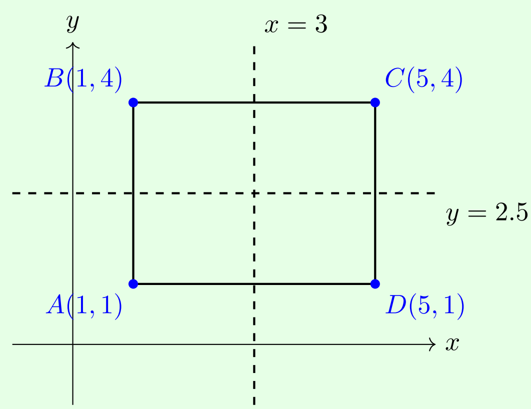
— $C(3,8) \to C'(5,8)$



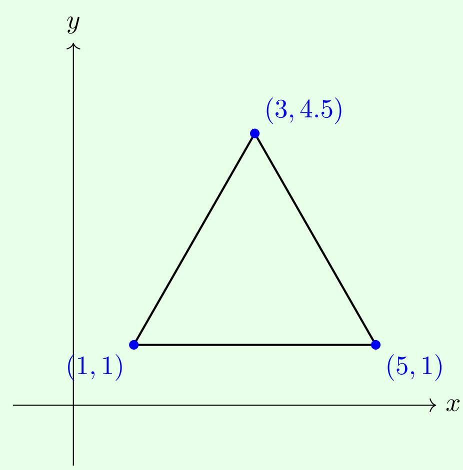
Corrections des Exercices avec Graphiques

Exercice 3 : Le rectangle R avec les sommets $A(1,1), B(1,4), C(5,4), D(5,1)$ a deux axes de symétrie :

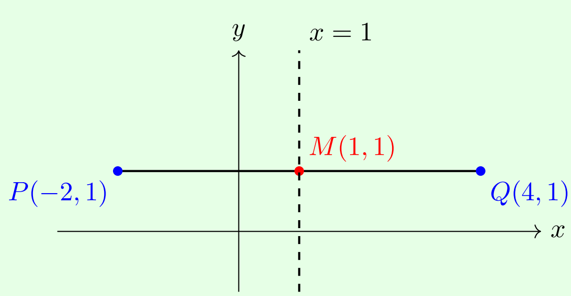
- L'axe vertical $x = 3$,
- L'axe horizontal $y = 2.5$.



Exercice 4 : Un triangle scalène n'a pas d'axe de symétrie car ses côtés et ses angles sont tous différents.

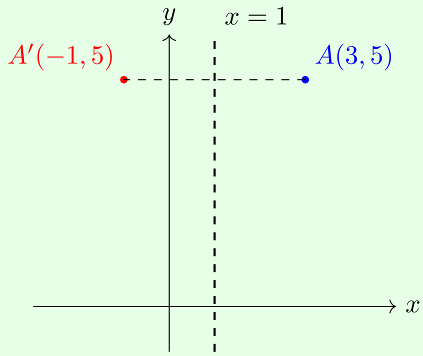


Exercice 5 : La médiatrice du segment $[PQ]$ avec $P(-2,1)$ et $Q(4,1)$ est la droite $x = 1$.

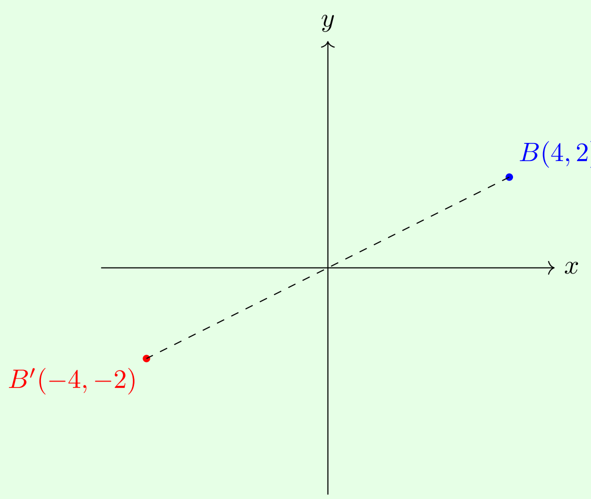


Corrections des Exercices avec Graphiques

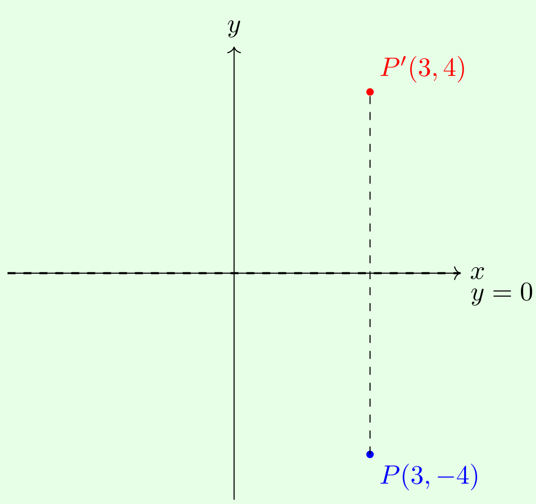
Exercice 6 : Soit le point $A(3, 5)$ et la droite $d : x = 1$. Le symétrique de A par rapport à cette droite est le point $A'(-1, 5)$, car la droite d est une droite verticale.



Exercice 7 : Symétrie centrale : Le symétrique du point $B(4, 2)$ par rapport à l'origine est $B'(-4, -2)$.

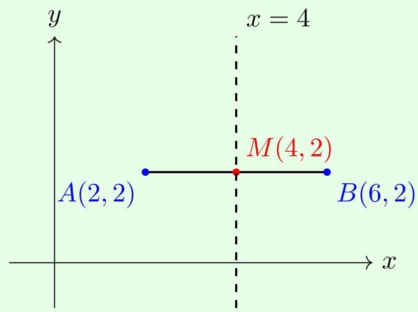


Exercice 8 : Soit le point $P(3, -4)$ et la droite $d : y = 0$. Le symétrique de P par rapport à cette droite est $P'(3, 4)$, car d est l'axe des abscisses.

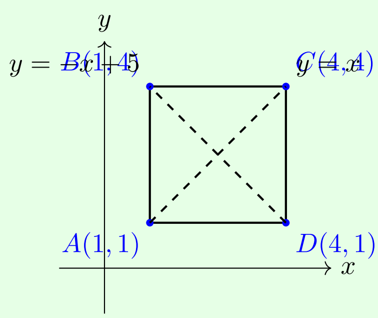


Corrections des Exercices avec Graphiques

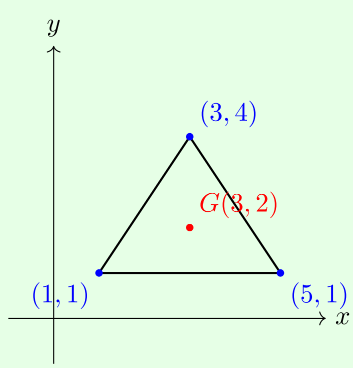
Exercice 9 : Soit le segment $[AB]$ avec $A(2,2)$ et $B(6,2)$. Sa médiatrice est la droite $x = 4$, car le milieu du segment est $M(4,2)$ et la médiatrice est perpendiculaire au segment.



Exercice 10 : Soit le carré $ABCD$ avec les sommets $A(1,1), B(1,4), C(4,4), D(4,1)$. Les axes de symétrie sont les deux diagonales $y = x$ et $y = -x + 5$, ainsi que les axes verticaux et horizontaux passant par les milieux des côtés.

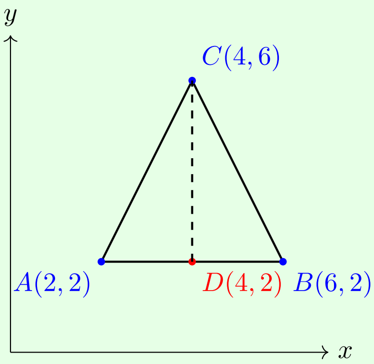


Exercice 11 : Le triangle ABC a pour sommets $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(3,4)$. Son centre de gravité G est donné par les coordonnées $G\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+1+4}{3}\right) = G(3,2)$.



Corrections des Exercices avec Graphiques

Exercice 12 : Les points $A(2,2)$, $B(6,2)$, $C(4,6)$ forment un triangle isocèle. Sa hauteur h est le segment $[CD]$ perpendiculaire à AB en $D(4,2)$.



Exercice 13 : La distance entre les points $A(1,2)$ et $B(4,6)$ est donnée par la formule :

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$