Et Lokalsøgningssystem til at Løse Diskrete Optimeringsproblemer

Bo Stentebjerg-Hansen

Syddansk Universitet

Institut for Matematik og Datalogi

19. februar 2016

Overblik

Introduktion

-

Introduktion

Binære optimeringsproblemer

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} && (1) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} && (2) \\ & \mathbf{x} \in \{0,1\}^n && (3) \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ er en $m \times n$ matrice, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{b}$ er n dimensionale vectorer, alle tre består af heltal. $\mathbf{x}$ er en n dimensional vector bestående af binære variable.

Eksempel

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\text{Minimize} & z = & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \\
\text{subject to} & & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 1 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 2 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}} &
\end{array}
$$

En mulig løsning:

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$

$$z = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3$$

Helttals programmering

- Simplex metode.

Helttals programmering

- Simplex metode.
- Ligningsbaseret model.

Helttals programmering

- Simplex metode.
- Ligningsbaseret model.
- Kan ikke altid finde en (optimal) løsning inden for rimelig tid.

Helttals programmering

- Simplex metode.
- Ligningsbaseret model.
- Kan ikke altid finde en (optimal) løsning inden for rimelig tid.
- Gurobi, GLPK, SCIP.

Constraint programming

- Bruger søgetræer til at finde en løsning.

Constraint programming

- Bruger søgetræer til at finde en løsning.
- Mere naturlig formulering af problemer.

Constraint programming

- Bruger søgetræer til at finde en løsning.
- Mere naturlig formulering af problemer.
- bl.a. Gecode, prolog.

Lokal søgning

- Ændre få variable ad gangen og ser beregner effekten.

Lokal søgning

- Ændre få variable ad gangen og ser beregner effekten.
- Kan undersøge mange mulige løsninger.

Lokal søgning

- Ændre få variable ad gangen og ser beregner effekten.
- Kan undersøge mange mulige løsninger.
- Kan ikke garantere optimalitet.

Lokal søgning

- Ændre få variable ad gangen og ser beregner effekten.
- Kan undersøge mange mulige løsninger.
- Kan ikke garantere optimalitet.
- Ofte implementeret til specifikke problemer.

Constraint programming med lokalsøgning

- Formulering af problem som i Constraint programming.

Constraint programming med lokalsøgning

- Formulering af problem som i Constraint programming.
- Genanvendelse af algoritmer.

Constraint programming med lokalsøgning

- Formulering af problem som i Constraint programming.
- Genanvendelse af algoritmer.
- Giver mulighed for at fokusere på modellering.

Constraint programming med lokalsøgning

- Formulering af problem som i Constraint programming.
- Genanvendelse af algoritmer.
- Giver mulighed for at fokusere på modellering.
- Solver fx Comet og OscaR.

Hvad er gjort i det her projekt

- Kombinere Gecode og lokal søgning.

Hvad er gjort i det her projekt

- Kombinere Gecode og lokal søgning.
- Undersøger effekten af Gecode.

Hvad er gjort i det her projekt

- Kombinere Gecode og lokal søgning.
- Undersøger effekten af Gecode.
- Tester brugen af invarianter.

Hvad er gjort i det her projekt

- Kombinere Gecode og lokal søgning.
- Undersøger effekten af Gecode.
- Tester brugen af invarianter.
- Introducerer en ny evalueringsmetode.

Overblik

- Objekter, en kasse med værktøj og information.

Her er et flot billed af formulering -¿ GPSolver -¿ GecodeEngine -¿ LocalSearcEngine.

Overblik

- Objekter, en kasse med værktøj og information.
- Brugerflade og to delt system.

Her er et flot billed af formulering -¿ GPSolver -¿ GecodeEngine -¿ LocalSearcEngine.

Start løsning - GecodeEngine

Start løsning - GecodeEngine

- Opret variable og begrænsninger.

Start løsning - GecodeEngine

- Opret variable og begrænsninger.
- Preprocessering af Gecode.

Start løsning - GecodeEngine

- Opret variable og begrænsninger.
- Preprocessering af Gecode.
- Oprettelse af søgningsstrategi.

Start løsning - GecodeEngine

- Opret variable og begrænsninger.
- Preprocessering af Gecode.
- Oprettelse af søgningsstrategi.
- Finder måske en gyldig løsning.

Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.

Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.
- Graf over afhængighed.

Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.
- Graf over afhængighed.
- Betingelser lavet som invarianter.

Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.
- Graf over afhængighed.
- Betingelser lavet som invarianter.
- Ordning af invarianter.

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning.

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning.
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning.
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1.$
- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning.
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.
- $x_3 = x_1 + x_2 - 1$.
- x_3 er gjort afhængig af x_1 og x_2.

Uafhængige variable gjort afhængige

- Færre mulige løsninger der skal undersøges.
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning.
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.
- $x_3 = x_1 + x_2 - 1$.
- x_3 er gjort afhængig af x_1 og x_2.
- Fjerner betingelsen da den altid vil være overholdt.

Graf over afhængigheder

- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$

Graf over afhængigheder

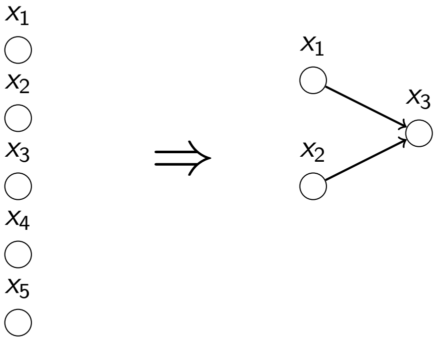
- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$
- $x_4 = x_3 + x_5 - 1.$

Graf over afhængigheder

- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$
- $x_4 = x_3 + x_5 - 1.$

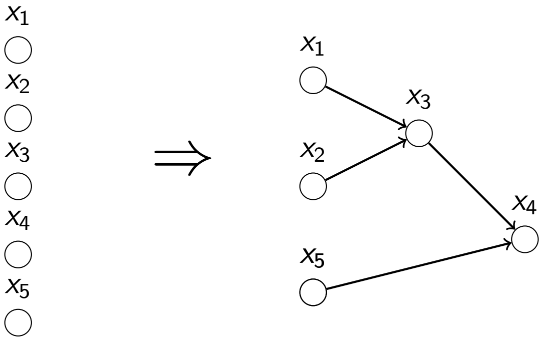
Graf over afhængigheder

- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$
- $x_4 = x_3 + x_5 - 1.$



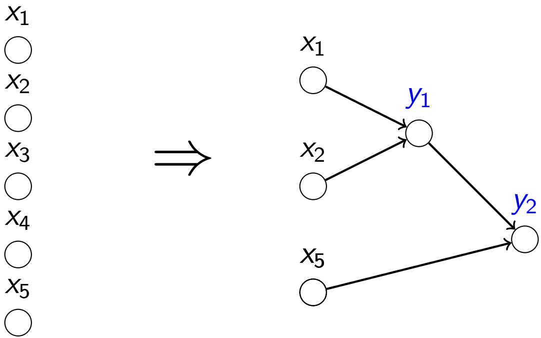
Graf over afhængigheder

- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$
- $x_4 = x_3 + x_5 - 1.$



Graf over afhængigheder

- $x_3 = x_1 + x_2 - 1.$
- $x_4 = x_3 + x_5 - 1.$



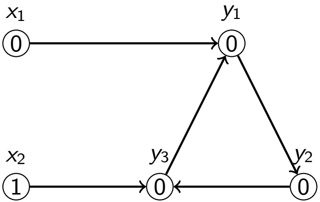
Problemer med kredse

Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

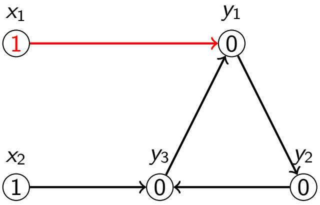
Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



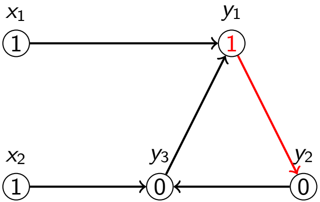
Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



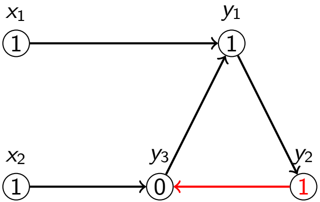
Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



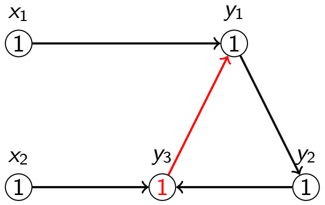
Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



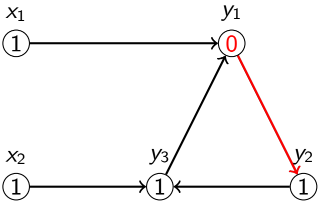
Problemer med kredse

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - y_3 \\
y_2 &= y_1 \\
y_3 &= x_3 + y_2 - 1 \\
x_1&, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$



Problemer med kredse

$$y_1 = x_1 - y_3$$
$$y_2 = y_1$$
$$y_3 = x_3 + y_2 - 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan.

Identificering af kredse

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan.
- Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC).

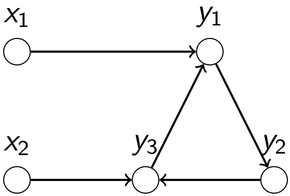
Identificering af kredse

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan.
- Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC).
- Genopretter en betingelse og variable fra hver SCC.

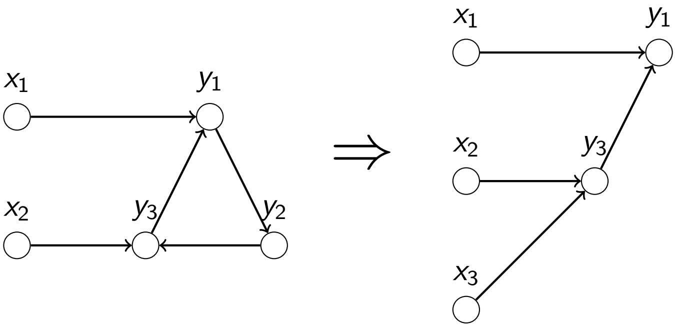
Identificering af kredse

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan.
- Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC).
- Genopretter en betingelse og variable fra hver SCC.
- Gentager indtil ingen stærke sammenhængskomponenter er fundet.

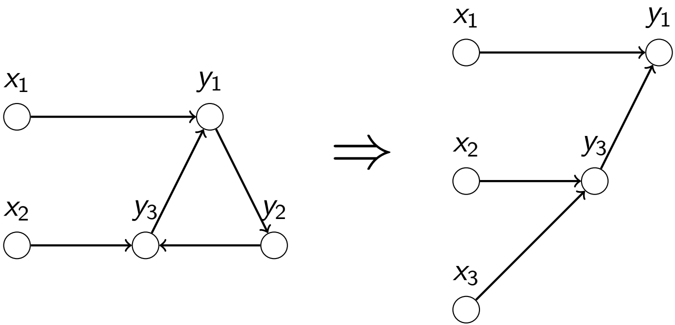
Identificering af kredse



Identificering af kredse



Identificering af kredse



- Genindfører variablen x_3 og betingelsen.
- $y_2 = y_1 \Leftrightarrow y_1 - x_3 = 0.$

Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.
- Graf over afhængighed.
- **Betingelser lavet som invarianter.**
- Ordning af invarianter.

Betingelser erstattet af invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.

Betingelser erstattet af invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.

Betingelser erstattet af invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.

Betingelser erstattet af invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Linear betingelsen opretter to invarianter.

Betingelser erstattet af invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Linear betingelsen opretter to invarianter.
- Invarianter til summering af overtrædelse betingelser.

Invarianter for linear

- Summering af venstresiden: $\underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{y_1} \leq 2$

$$y_2 = \begin{cases} y_1 - 2, & \text{if } y_1 > 2. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

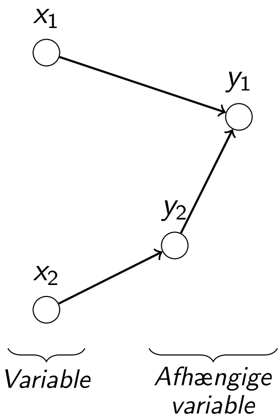
Invarianter for linear

- Summering af venstresiden: $\underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{y_1} \leq 2$
- Overtrædelse af betingelsen: $\underbrace{y_1 \leq 2}_{y_2}$,

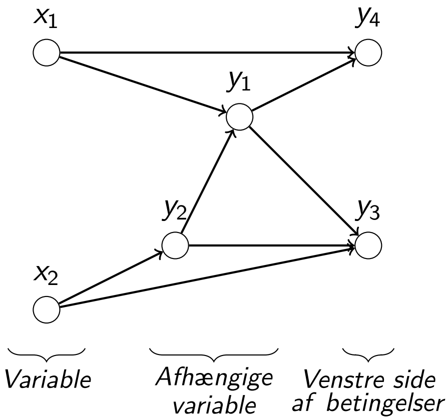
$$y_2 = \begin{cases} y_1 - 2, & \text{if } y_1 > 2. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Endelige graf

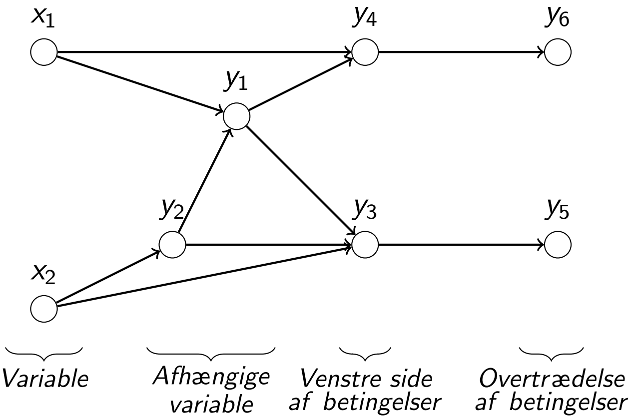
Endelige graf



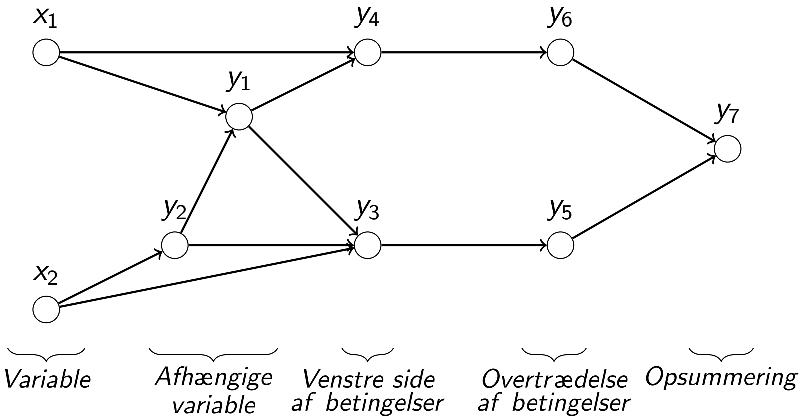
Endelige graf



Endelige graf



Endelige graf



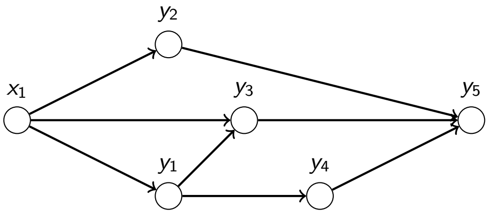
Forberedelse til lokalsøgning

- Definer variable ud fra betingelser hvis muligt.
- Graf over afhængighed.
- Betingelser omdannet til invarianter.
- **Ordning af invarianter.**

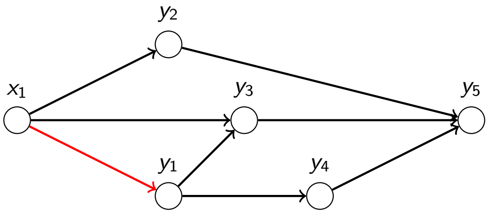
Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.

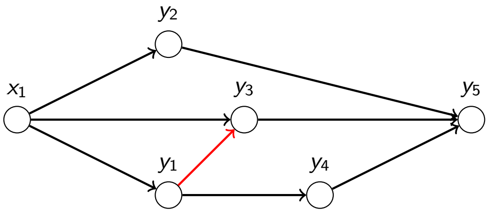
Eksempel for en variable



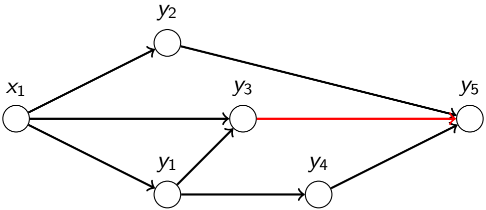
Eksempel for en variable



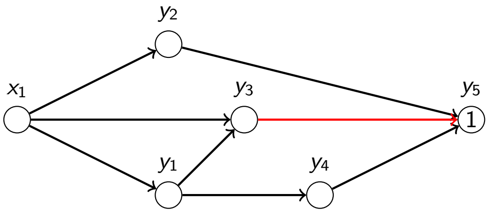
Eksempel for en variable



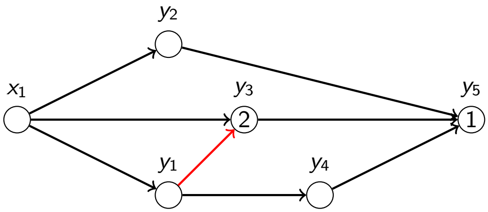
Eksempel for en variable



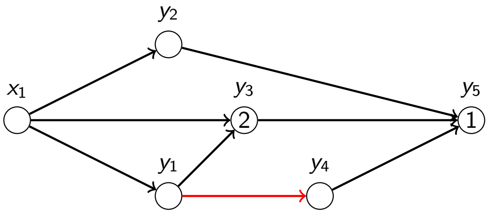
Eksempel for en variable



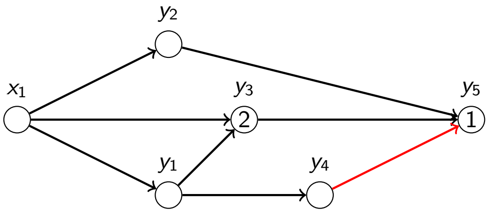
Eksempel for en variable



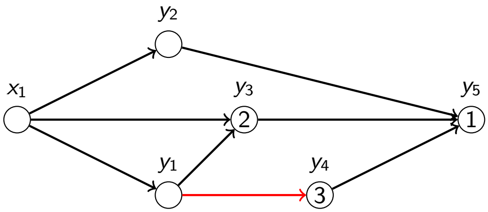
Eksempel for en variable



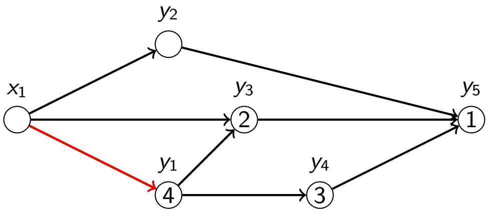
Eksempel for en variable



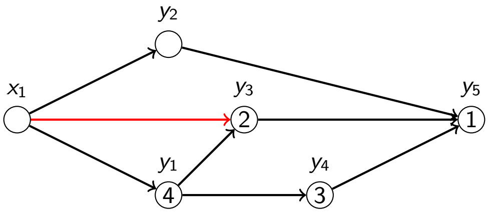
Eksempel for en variable



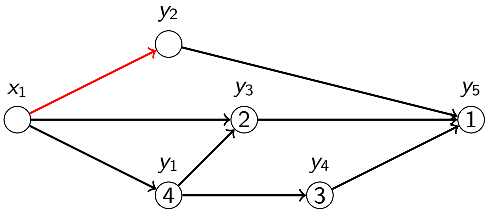
Eksempel for en variable



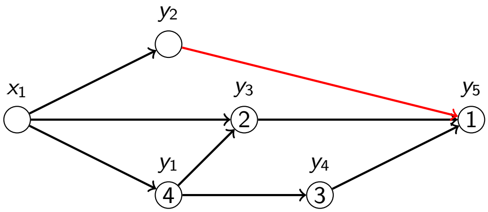
Eksempel for en variable



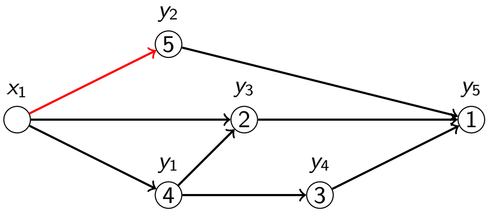
Eksempel for en variable



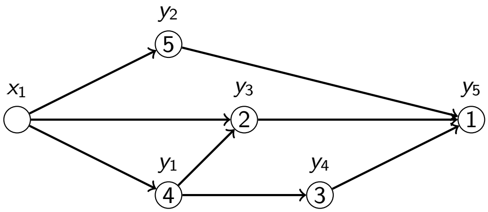
Eksempel for en variable



Eksempel for en variable



Eksempel for en variable



Eksempel for en variable