

# Et lokalsøgningssystem til at løse diskrete optimeringsproblemer

Bo Stentebjerg-Hansen

Vejleder: Marco Chiarandini

Syddansk Universitet

Institut for Matematik og Datalogi

3. marts 2016

# Overblik

- 1 Introduktion
- 2 Elementer i lokalsøgning
- 3 Opbygning af systemet
- 4 Experimentel evaluering

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

Kan være NP-hårde problemer

Eksempel: Skemalægningsinstans



# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

Kan være NP-hårde problemer

Eksempel: Skemalægningsinstans

- Variable: Klasser der skal skemalægges

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

Kan være NP-hårde problemer

Eksempel: Skemalægningsinstans

- Variable: Klasser der skal skemalægges
- Betingelser: Ingen overlap, krav til lokaler, tidspunkter, osv

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

Kan være NP-hårde problemer

Eksempel: Skemalægningsinstans

- Variable: Klasser der skal skemalægges
- Betingelser: Ingen overlap, krav til lokaler, tidspunkter, osv
- Evaluering: Totale antal af mellemtimer

# Diskrete optimeringsproblemer

En diskret optimeringsinstans  $I$ :

- $n$  variable  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$
- $m$  betingelser  $\mathbf{C}$
- Evaluerings funktion  $f(\mathbf{x})$

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \text{feas}(I) \}$$

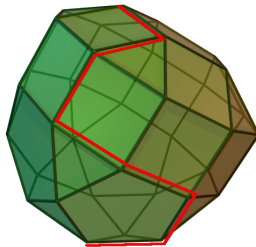
Kan være NP-hårde problemer

Eksempel: Skemalægningsinstans

- Variable: Klasser der skal skemalægges
- Betingelser: Ingen overlap, krav til lokaler, tidspunkter, osv
- Evaluering: Totale antal af mellemtimer
- Bedste løsning: Den løsning som overholder alle betingelser og giver færrest mellemtimer

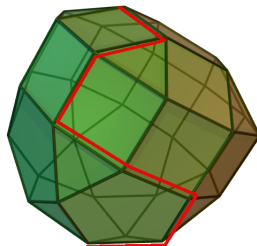
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer



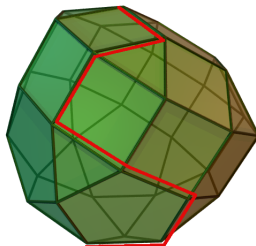
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algorithmer



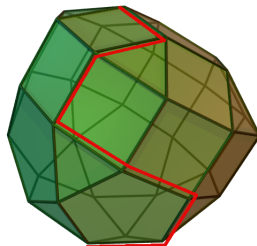
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering



# Løsningsmetoder

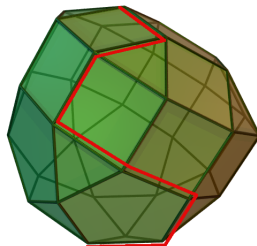
- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering
- Satisfiability solver





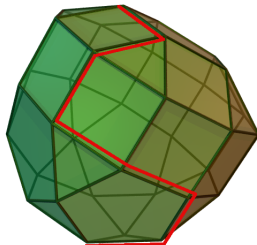
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering
- Satisfiability solver
- Lineær heltalsprogrammering



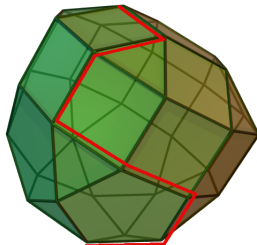
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering
- Satisfiability solver
- Lineær heltalsprogrammering
- **Constraint Programming**



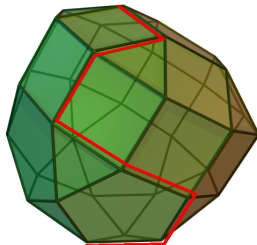
# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering
- Satisfiability solver
- Lineær heltalsprogrammering
- **Constraint Programming**
- **Lokalsøgning**



# Løsningsmetoder

- Algoritmer til specifikke problemer
  - Approximations algoritmer
  - Dynamisk programmering
- Satisfiability solver
- Lineær heltalsprogrammering
- **Constraint Programming**
- **Lokalsøgning**
- Flere andre



# Lineær heltalsprogrammering

- Model baseret på uligheder

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+
 \end{array}$$

# Lineær heltalsprogrammering

- Model baseret på uligheder

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+
 \end{array}$$

- Gurobi, CPLEX, SCIP, GLPK

# Lineær heltalsprogrammering

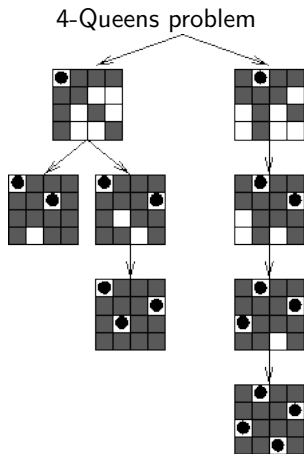
- Model baseret på uligheder

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+
 \end{array}$$

- Gurobi, CPLEX, SCIP, GLPK
- Kan ikke altid finde en (optimal) løsning inden for rimelig tid

# Constraint Programming (CP)

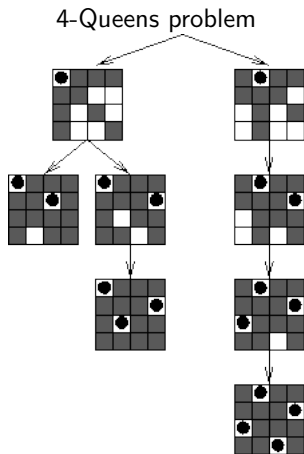
- Bruger søgetræer + propagation til at finde en løsning





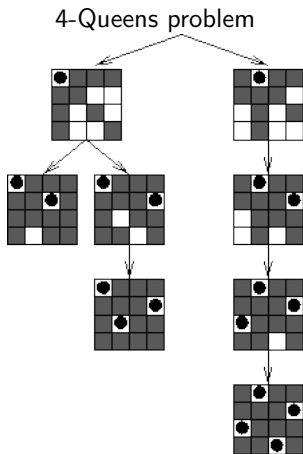
# Constraint Programming (CP)

- Bruger søgetræer + propagation til at finde en løsning
- Mere naturlig formulering af problemer



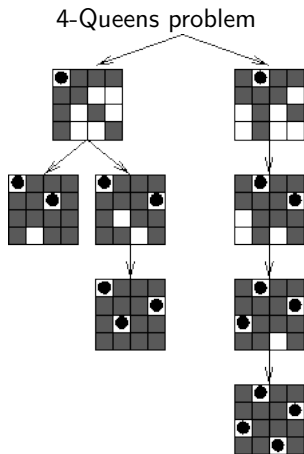
# Constraint Programming (CP)

- Bruger søgetræer + propagation til at finde en løsning
- Mere naturlig formulering af problemer
- Flere muligheder for at modellere et problem



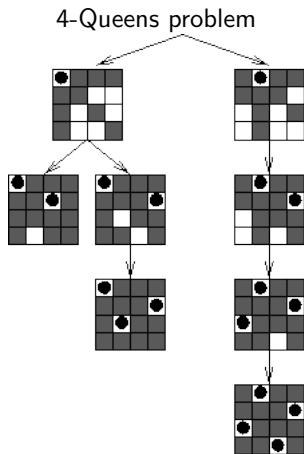
# Constraint Programming (CP)

- Bruger søgetræer + propagation til at finde en løsning
- Mere naturlig formulering af problemer
- Flere muligheder for at modellere et problem
- Men mindre egnet til optimeringsproblemer



# Constraint Programming (CP)

- Bruger søgetræer + propagation til at finde en løsning
- Mere naturlig formulering af problemer
- Flere muligheder for at modellere et problem
- Men mindre egnet til optimeringsproblemer
- Fx Gecode, CHIP, Prolog



# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik

2	6	3	7	8	9	4	1	5		6	8	4	7	3	5	1	2	9		
5	8	9	4	1	3	7	6	2		5	1	2	4	6	9	3	7	8		
1	4	7	2	5	6	8	9	3		7	9	3	2	1	8	4	5	6		
7	9	8	6	2	1	5	3	4		4	2	5	9	7	6	8	1	3		
4	5	1	8	3	7	9	2	6		8	3	1	5	2	4	9	6	7		
6	3	2	5	9	4	1	8	7		9	7	6	1	8	3	2	4	5		
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6	8	2
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7	9	1
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5	3	4
						7	6	2	4	9	3	5	8	1						
						1	8	3	7	6	5	9	2	4						
						5	9	4	1	2	8	6	7	3						
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6	7	9
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3	4	5
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1	2	8
4	6	2	5	3	7	1	9	8		6	4	1	8	5	7	2	9	3		
7	5	3	9	1	8	6	4	2		5	2	8	3	9	1	4	6	7		
8	9	1	4	6	2	5	7	3		3	7	9	2	4	6	5	8	1		
2	1	4	6	7	5	3	8	9		1	5	7	9	6	2	8	3	4		
5	3	7	8	9	1	2	6	4		2	8	4	7	1	3	9	5	6		
9	8	6	2	4	3	7	5	1		9	6	3	4	8	5	7	1	2		

# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik
- Alle variable skal have en værdi først

2	6	3	7	8	9	4	1	5				6	8	4	7	3	5	1	2	9
5	8	9	4	1	3	7	6	2				5	1	2	4	6	9	3	7	8
1	4	7	2	5	6	8	9	3				7	9	3	2	1	8	4	5	6
7	9	8	6	2	1	5	3	4				4	2	5	9	7	6	8	1	3
4	5	1	8	3	7	9	2	6				8	3	1	5	2	4	9	6	7
6	3	2	5	9	4	1	8	7				9	7	6	1	8	3	2	4	5
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6	8	2
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7	9	1
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5	3	4
						7	6	2	4	9	3	5	8	1						
						1	8	3	7	6	5	9	2	4						
						5	9	4	1	2	8	6	7	3						
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6	7	9
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3	4	5
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1	2	8
4	6	2	5	3	7	1	9	8				6	4	1	8	5	7	2	9	3
7	5	3	9	1	8	6	4	2				5	2	8	3	9	1	4	6	7
8	9	1	4	6	2	5	7	3				3	7	9	2	4	6	5	8	1
2	1	4	6	7	5	3	8	9				1	5	7	9	6	2	8	3	4
5	3	7	8	9	1	2	6	4				2	8	4	7	1	3	9	5	6
9	8	6	2	4	3	7	5	1				9	6	3	4	8	5	7	1	2

# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik
- Alle variable skal have en værdi først
- Delt op implicitte og bløde betingelser

2	6	3	7	8	9	4	1	5				6	8	4	7	3	5	1	2	9
5	8	9	4	1	3	7	6	2				5	1	2	4	6	9	3	7	8
1	4	7	2	5	6	8	9	3				7	9	3	2	1	8	4	5	6
7	9	8	6	2	1	5	3	4				4	2	5	9	7	6	8	1	3
4	5	1	8	3	7	9	2	6				8	3	1	5	2	4	9	6	7
6	3	2	5	9	4	1	8	7				9	7	6	1	8	3	2	4	5
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6	8	2
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7	9	1
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5	3	4
						7	6	2	4	9	3	5	8	1						
						1	8	3	7	6	5	9	2	4						
						5	9	4	1	2	8	6	7	3						
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6	7	9
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3	4	5
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1	2	8
4	6	2	5	3	7	1	9	8				6	4	1	8	5	7	2	9	3
7	5	3	9	1	8	6	4	2				5	2	8	3	9	1	4	6	7
8	9	1	4	6	2	5	7	3				3	7	9	2	4	6	5	8	1
2	1	4	6	7	5	3	8	9				1	5	7	9	6	2	8	3	4
5	3	7	8	9	1	2	6	4				2	8	4	7	1	3	9	5	6
9	8	6	2	4	3	7	5	1				9	6	3	4	8	5	7	1	2

# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik
- Alle variable skal have en værdi først
- Delt op implicitte og bløde betingelser
- Ændre få variable ad gangen og beregner effekten.

2	6	3	7	8	9	4	1	5				6	8	4	7	3	5	1	2	9
5	8	9	4	1	3	7	6	2				5	1	2	4	6	9	3	7	8
1	4	7	2	5	6	8	9	3				7	9	3	2	1	8	4	5	6
7	9	8	6	2	1	5	3	4				4	2	5	9	7	6	8	1	3
4	5	1	8	3	7	9	2	6				8	3	1	5	2	4	9	6	7
6	3	2	5	9	4	1	8	7				9	7	6	1	8	3	2	4	5
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6	8	2
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7	9	1
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5	3	4
						7	6	2	4	9	3	5	8	1						
						1	8	3	7	6	5	9	2	4						
						5	9	4	1	2	8	6	7	3						
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6	7	9
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3	4	5
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1	2	8
4	6	2	5	3	7	1	9	8				6	4	1	8	5	7	2	9	3
7	5	3	9	1	8	6	4	2				5	2	8	3	9	1	4	6	7
8	9	1	4	6	2	5	7	3				3	7	9	2	4	6	5	8	1
2	1	4	6	7	5	3	8	9				1	5	7	9	6	2	8	3	4
5	3	7	8	9	1	2	6	4				2	8	4	7	1	3	9	5	6
9	8	6	2	4	3	7	5	1				9	6	3	4	8	5	7	1	2



# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik
- Alle variable skal have en værdi først
- Delt op implicitte og bløde betingelser
- Ændre få variable ad gangen og beregner effekten.
- Kan ikke garantere optimalitet

2	6	3	7	8	9	4	1	5		6	8	4	7	3	5	1	2	9
5	8	9	4	1	3	7	6	2		5	1	2	4	6	9	3	7	8
1	4	7	2	5	6	8	9	3		7	9	3	2	1	8	4	5	6
7	9	8	6	2	1	5	3	4		4	2	5	9	7	6	8	1	3
4	5	1	8	3	7	9	2	6		8	3	1	5	2	4	9	6	7
6	3	2	5	9	4	1	8	7		9	7	6	1	8	3	2	4	5
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5
						7	6	2	4	9	3	5	8	1				
						1	8	3	7	6	5	9	2	4				
						5	9	4	1	2	8	6	7	3				
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1
4	6	2	5	3	7	1	9	8					6	4	1	8	5	7
7	5	3	9	1	8	6	4	2					5	2	8	3	9	1
8	9	1	4	6	2	5	7	3					3	7	9	2	4	6
2	1	4	6	7	5	3	8	9					1	5	7	9	6	2
5	3	7	8	9	1	2	6	4					2	8	4	7	1	3
9	8	6	2	4	3	7	5	1					9	6	3	4	8	5

# Lokalsøgning

- “Trial and error” teknik
- Alle variable skal have en værdi først
- Delt op implicitte og bløde betingelser
- Ændre få variable ad gangen og beregner effekten.
- Kan ikke garantere optimalitet
- Ofte implementeret for fra til specifikke problemer.

2	6	3	7	8	9	4	1	5				6	8	4	7	3	5	1	2	9
5	8	9	4	1	3	7	6	2				5	1	2	4	6	9	3	7	8
1	4	7	2	5	6	8	9	3				7	9	3	2	1	8	4	5	6
7	9	8	6	2	1	5	3	4				4	2	5	9	7	6	8	1	3
4	5	1	8	3	7	9	2	6				8	3	1	5	2	4	9	6	7
6	3	2	5	9	4	1	8	7				9	7	6	1	8	3	2	4	5
3	1	5	9	4	2	6	7	8	2	3	4	1	5	9	3	4	7	6	8	2
9	7	4	3	6	8	2	5	1	6	7	9	3	4	8	6	5	2	7	9	1
8	2	6	1	7	5	3	4	9	5	8	1	2	6	7	8	9	1	5	3	4
						7	6	2	4	9	3	5	8	1						
						1	8	3	7	6	5	9	2	4						
						5	9	4	1	2	8	6	7	3						
1	2	5	7	8	9	4	3	6	9	5	7	8	1	2	5	3	4	6	7	9
6	7	9	3	2	4	8	1	5	3	4	2	7	9	6	1	2	8	3	4	5
3	4	8	1	5	6	9	2	7	8	1	6	4	3	5	6	7	9	1	2	8
4	6	2	5	3	7	1	9	8				6	4	1	8	5	7	2	9	3
7	5	3	9	1	8	6	4	2				5	2	8	3	9	1	4	6	7
8	9	1	4	6	2	5	7	3				3	7	9	2	4	6	5	8	1
2	1	4	6	7	5	3	8	9				1	5	7	9	6	2	8	3	4
5	3	7	8	9	1	2	6	4				2	8	4	7	1	3	9	5	6
9	8	6	2	4	3	7	5	1				9	6	3	4	8	5	7	1	2

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver<sup>1</sup>

- Matematisk modellering

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver<sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>



# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem
- Mulighed for udvidelse

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem
- Mulighed for udvidelse
- Ikke længere vedligeholdt

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem
- Mulighed for udvidelse
- Ikke længere vedligeholdt

## 4 Oscala <sup>4</sup>

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

<sup>4</sup><http://oscalib.bitbucket.org/cbls.html>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem
- Mulighed for udvidelse
- Ikke længere vedligeholdt

## 4 OslaR <sup>4</sup>

- Inspireret af Comet

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

<sup>4</sup><http://oscarlib.bitbucket.org/cbls.html>

# Sammensætning af løsningsmetoder

## 1 LocalSolver <sup>1</sup>

- Matematisk modellering
- Lineær- og  
heltalsprogrammering
- Kommerciel Solver

## 2 EasyLocal++ <sup>2</sup>

- Lokalsøgningsalgoritmer  
implementeret
- Bruger definere hvilke der  
skal bruges

## 3 Comet <sup>3</sup>

- Først betingelsesbaseret  
lokalsøgningssystem
- Mulighed for udvidelse
- Ikke længere vedligeholdt

## 4 OslaR <sup>4</sup>

- Inspireret af Comet
- Forholdsvis nyt

---

<sup>1</sup><http://www.localsolver.com/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/satt/easylocal-3>

<sup>3</sup>Constrained-Based Local Search, P. Hentenryck & L. Michel

<sup>4</sup><http://oscarlib.bitbucket.org/cbls.html>



# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”
- Undersøger effekten af (offline) CP domæne reducering

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”
- Undersøger effekten af (offline) CP domæne reducering
- Bruger CP som konstruktions heuristik

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”
- Undersøger effekten af (offline) CP domæne reducere
- Bruger CP som konstruktions heuristik
- Tester effekten af envejsbetingelser

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”
- Undersøger effekten af (offline) CP domæne reducering
- Bruger CP som konstruktions heuristik
- Tester effekten af envejsbetingelser
- Introducerer en ny evalueringsmetode

# Hvorfor et andet lokalsøgningssystem?

- Kombinerer CP og lokalsøgning på en ny måde:
  - Ikke kun modelleringsmæssigt
  - Ikke som “large scale neighborhood search”
- Undersøger effekten af (offline) CP domæne reducering
- Bruger CP som konstruktions heuristik
- Tester effekten af envejsbetingelser
- Introducerer en ny evalueringsmetode
  - Leksikografisk vægtning



# Begreber i lokalsøgning

Modellering:

# Begreber i lokalsøgning

Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$

Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$
- Betingelser:

Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

Modellering:

- Variable:  
  løsningsrepræsentation, search  
  space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser

Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser

## Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser

## Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten  
af en løsning

## Søgning:



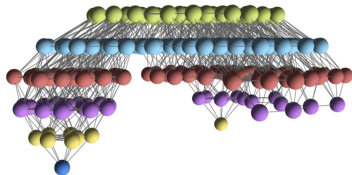
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search  
space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten  
af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood



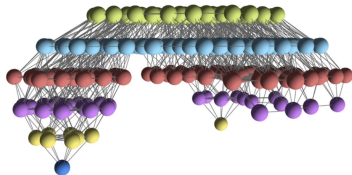
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood
- Konstruktions heuristik



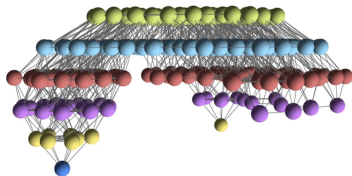
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood
- Konstruktions heuristik
- Lokalsøgning



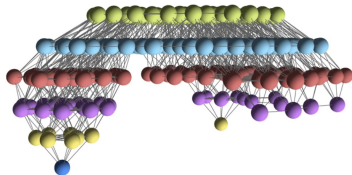
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood
- Konstruktions heuristik
- Lokalsøgning
- Metaheuristikker



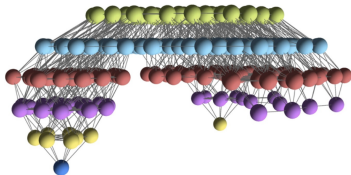
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:
  - løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood
- Konstruktions heuristik
- Lokalsøgning
- Metaheuristikker
  - Tabu søgning



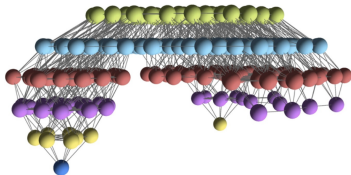
# Begreber i lokalsøgning

## Modellering:

- Variable:  
løsningsrepræsentation, search space  $S(I)$
- Betingelser:
  - Bløde betingelser
  - Envejsbetingelser
  - Implicitte betingelser
- Evaluerings funktion: kvaliteten af en løsning

## Søgning:

- Neighborhood
- Konstruktions heuristik
- Lokalsøgning
- Metaheuristikker
  - Tabu søgning
  - Iterativ lokalsøgning



# Binære optimeringsproblemer

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, \forall i \in \{1..m\} \right\}$$

# Binære optimeringsproblemer

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, \forall i \in \{1..m\} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$



# Binære optimeringsproblemer

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, \forall i \in \{1..m\} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- Mange problemer kan modelleres som binære optimeringsproblemer

# Binære optimeringsproblemer

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, \forall i \in \{1..m\} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Mange problemer kan modelleres som binære optimeringsproblemer
- Fx: traveling salesman problem, knapsack, vertex cover, ...

# Binære optimeringsproblemer

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, \forall i \in \{1..m\} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- Mange problemer kan modelleres som binære optimeringsproblemer
- Fx: traveling salesman problem, knapsack, vertex cover, ...

Bliver oprettet i systemet med *linear*:

*linear*(int[] *coefficients*, Variable[] *variables*, int *relation*, int *ub*, int *priority*)

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning

Behandling af betingelser:



# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne
  - Tilfældig tildeling af værdi inden for domæne

Behandling af betingelser:

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne
  - Tilfældig tildeling af værdi inden for domæne

Behandling af betingelser:

- 1 Invarianter: Variable defineret af betingelser

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne
  - Tilfældig tildeling af værdi inden for domæne

Behandling af betingelser:

- 1 Invarianter: Variable defineret af betingelser
- 2 Graf over afhængighed

# Før lokalsøgning kan startes

## Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducere lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne
  - Tilfældig tildeling af værdi inden for domæne

## Behandling af betingelser:

- 1 Invarianter: Variable defineret af betingelser
- 2 Graf over afhængighed
- 3 Auxiliary invarianter: Betingelser behandlet som invarianter

# Før lokalsøgning kan startes

Find en startløsning:

- Opret variable og begrænsninger
- Domæne reducering lavet af Gecode
- Oprettelse af søgningsstrategi
- Find en gyldig løsning
  - til 50 % af betingelserne
  - til 25 % af betingelserne
  - til 12,5 % af betingelserne
  - Tilfældig tildeling af værdi inden for domæne

Behandling af betingelser:

- 1 Invarianter: Variable defineret af betingelser
- 2 Graf over afhængighed
- 3 Auxiliary invarianter: Betingelser behandlet som invarianter
- 4 Topologisk sortering af invarianter.



# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves

# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$

# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$

$x_1$



$x_2$



$x_3$



$x_4$



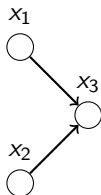
$x_5$



# Invarianter og afhængighedsgraf

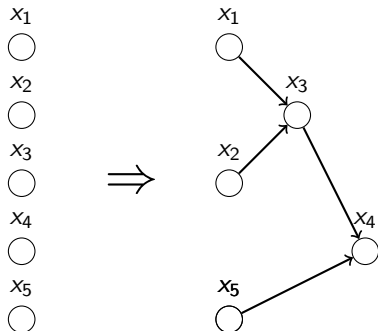
- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$

$x_1$   
 $x_2$   
 $x_3$   
 $x_4$   
 $x_5$



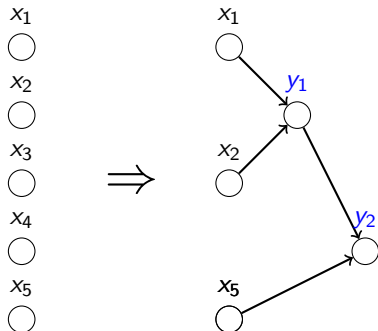
# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



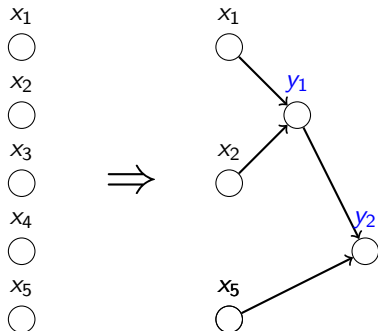
# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$

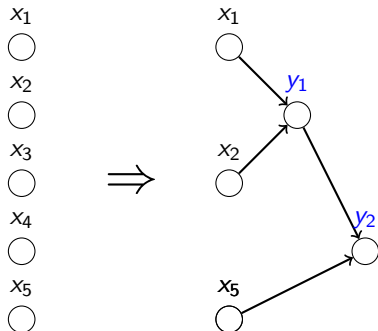
 $x_1$  $x_2$  $x_3$  $x_4$  $x_5$  $x_1$  $y_1$  $x_2$  $y_2$  $x_5$ 

- Færre mulige løsninger der skal undersøges



# Invarianter og afhængighedsgraf

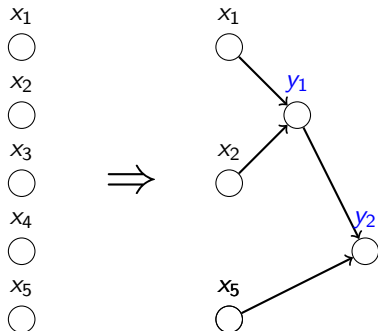
- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



- Færre mulige løsninger der skal undersøges
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning

# Invarianter og afhængighedsgraf

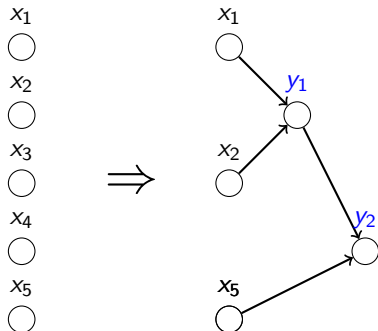
- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



- Færre mulige løsninger der skal undersøges
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning
- $x_3$  er gjort afhængig af  $x_1$  og  $x_2$

# Invarianter og afhængighedsgraf

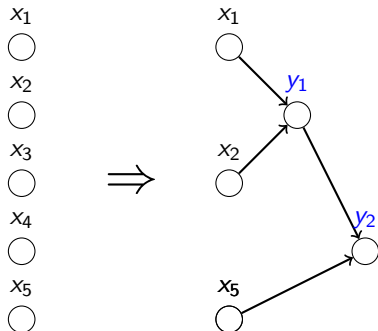
- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



- Færre mulige løsninger der skal undersøges
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning
- $x_3$  er gjort afhængig af  $x_1$  og  $x_2$
- $x_4$  indirekte afhængig af  $x_1$  og  $x_2$

# Invarianter og afhængighedsgraf

- Betingelses bestemt om envejsbetingelse kan laves
- $x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 - 1$
- $x_3 - x_4 + x_5 = 1 \Leftrightarrow x_4 = x_3 + x_5 - 1$



- Færre mulige løsninger der skal undersøges
- Bruger lidt mere tid på at evaluere en løsning
- $x_3$  er gjort afhængig af  $x_1$  og  $x_2$
- $x_4$  indirekte afhængig af  $x_1$  og  $x_2$
- Variable valgt efter udgående kanter og antallet af betingelser den optræder i

# Kredse i grafen

# Kredse i grafen

$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

# Kredse i grafen

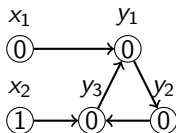
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



# Kredse i grafen

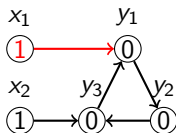
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$





# Kredse i grafen

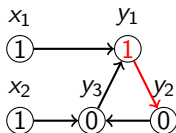
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



# Kredse i grafen

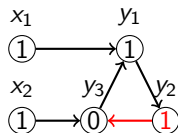
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



# Kredse i grafen

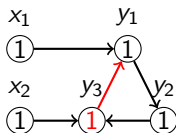
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



# Kredse i grafen

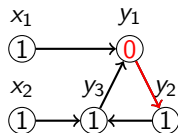
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



# Kredse i grafen

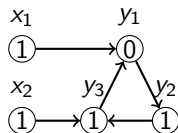
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$

# Kredse i grafen

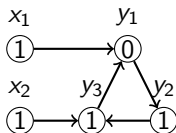
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$ 
  - Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC)

# Kredse i grafen

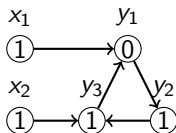
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$ 
  - Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC)
  - Fjerne en invariant  $\rightarrow$  genskaber en variable fra hver SCC

# Kredse i grafen

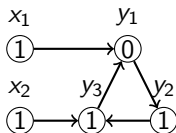
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$ 
  - Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC)
  - Fjerne en invariant  $\rightarrow$  genskaber en variable fra hver SCC
  - Vælger invariant efter antal indgående kanter



# Kredse i grafen

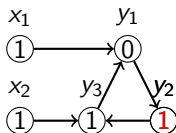
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = x_2 + y_2 - 1$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$ 
  - Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC)
  - Fjerne en invariant  $\rightarrow$  genskaber en variable fra hver SCC
  - Vælger invariant efter antal indgående kanter
- Gentager indtil ingen stærke sammenhængskomponenter er fundet

# Kredse i grafen

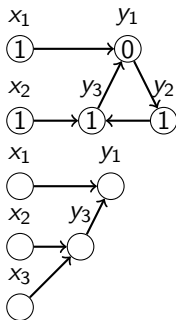
$$y_1 = x_1 - y_3$$

$$x_3 - y_1 = 0$$

$$y_3 = x_2 + x_3 - 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_3 \in \{0, 1\}$$



Identificering af kredse:

- Dybde først lignende algoritme, af Tarjan  $O(V + E)$ 
  - Finder stærke sammenhængskomponenter (SCC)
  - Fjerne en invariant  $\rightarrow$  genskaber en variable fra hver SCC
  - Vælger invariant efter antal indgående kanter
- Gentager indtil ingen stærke sammenhængskomponenter er fundet
- Ikke minimalt antal invarianter der fjernes

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Invarianter til summering af overtrædelse betingelser.

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Invarianter til summering af overtrædelse betingelser.

## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Invarianter til summering af overtrædelse betingelser.

For en **linear** betingelsen:

- Summering af venstresiden:

$$\underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{w_1} \leq 2$$



## Yderligere invarianter

- Betingelser som ikke er brugt til at definere variable.
- Betingelses specifik oprettelse af invarianter.
- Tilføj invarianter til grafen.
- Invarianter til summering af overtrædelse betingelser.

For en **linear** betingelsen:

- Summering af venstresiden:

$$\underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{w_1} \leq 2$$

- Overtrædelse af betingelsen:

$$\underbrace{w_1}_{w_2} \leq 2$$

$$w_2 = \begin{cases} w_1 - 2, & \text{if } w_1 > 2. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

# Endelige graf

$x_1$



$x_2$



$x_3$

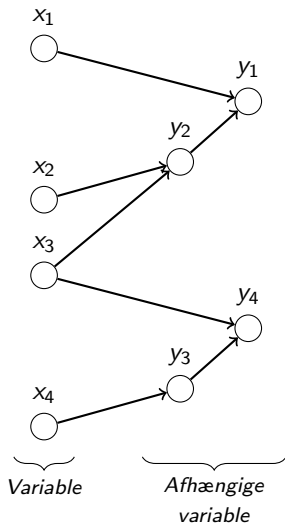


$x_4$

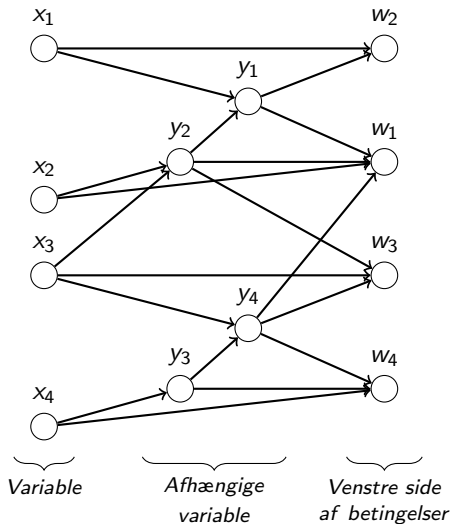


  
*Variable*

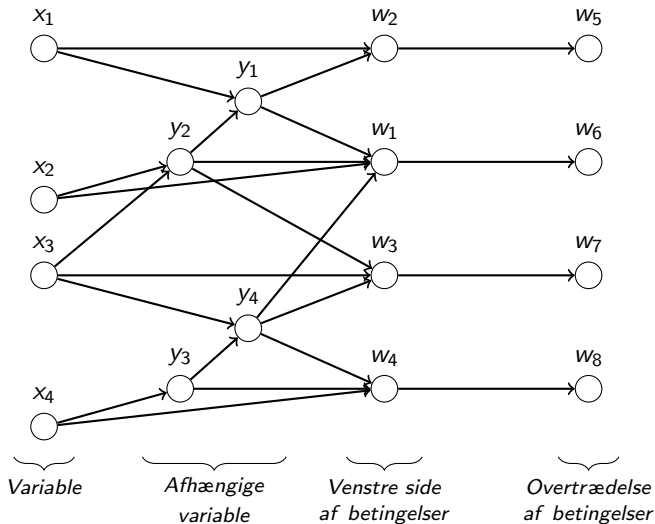
# Endelige graf



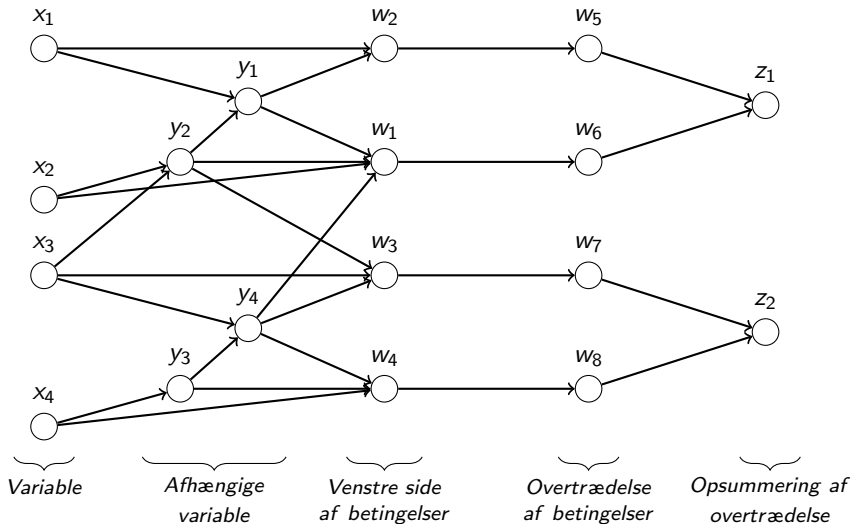
# Endelige graf



# Endelige graf



# Endelige graf



# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.

# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.



# Ordning af invarianter

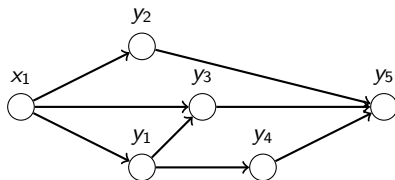
- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.

# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.

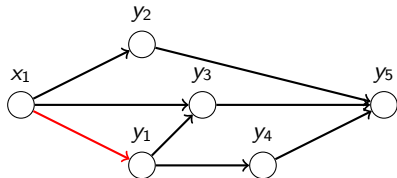
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



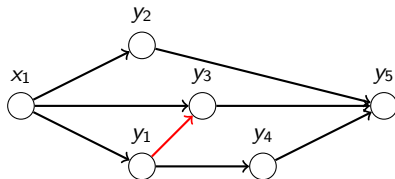
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



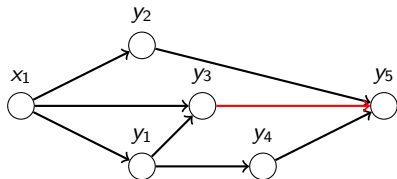
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



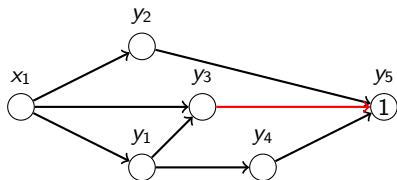
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



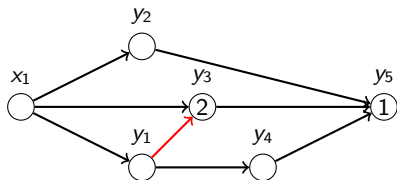
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



# Ordning af invarianter

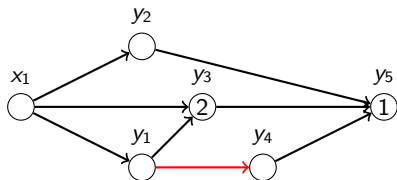
- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.





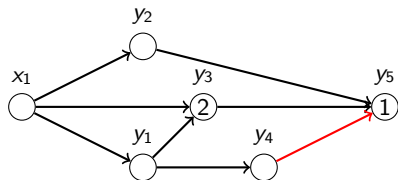
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



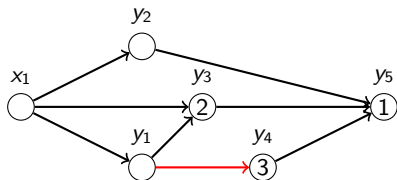
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



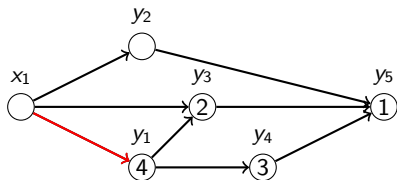
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



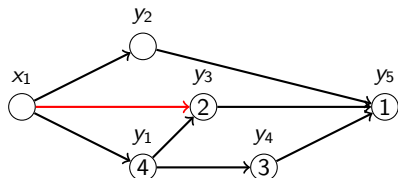
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



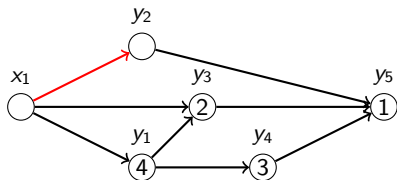
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



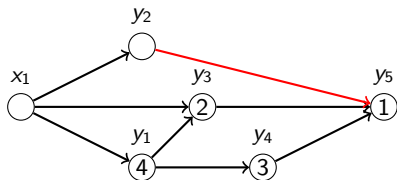
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



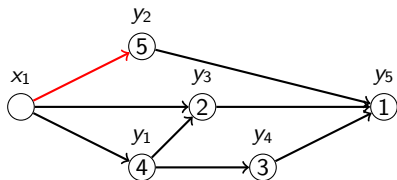
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



# Ordning af invarianter

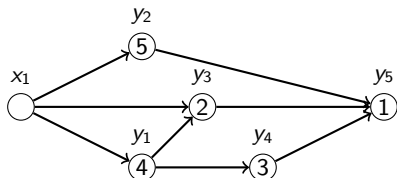
- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.





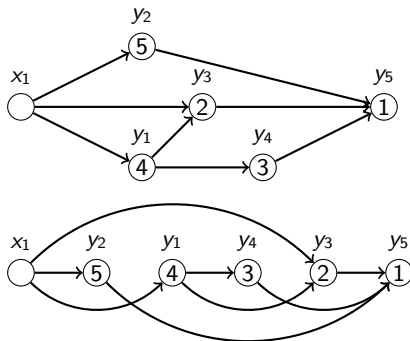
# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



# Ordning af invarianter

- Lav ordning af invarianter til når de skal opdateres.
- Forhindre flere opdateringer af samme invariant.
- Ordningen kan laves med dybde først søgning i grafen.
- Opret en liste for hver uafhængig variable.



## Test og resultater