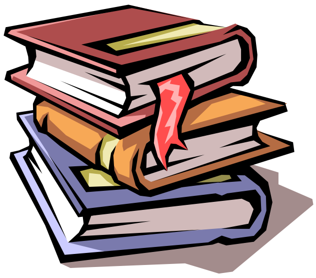
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



BÀI TẬP TOÁN 9
THEO CHƯƠNG TRÌNH MỚI

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038)

Tài liệu sưu tầm, ngày 06 tháng 5 năm 2023

CHƯƠNG 1
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 2
KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x,y là hệ thức dạng: $ax+by=c$, trong đó a,b,c là các số cho trước, $a\neq 0$ hoặc $b\neq 0$.

Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x,y: $ax+by=c$. Nếu $ax_0+by_0=c$ là khẳng định đúng thì cặp số $(x_0;y_0)$ được gọi là **một nghiệm của phương trình** $ax+by=c$.

Chú ý:

- Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm.
- Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y)$ thỏa mãn phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$ là một đường thẳng . Đường thẳng đó gọi là đường thẳng $ax+by=c$.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (I), ở đó mỗi phương trình $a_1x+b_1y=c_1$ và $a_2x+b_2y=c_2$ đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Nếu cặp số $(x_0;y_0)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ (I) thì cặp $(x_0;y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ (I).
- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

Bài 1. Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình: $x-3y=5$

a) $(2;-1)$ b) $(-5;0)$ c) $\left(0;-\dfrac{5}{3}\right)$

Lời giải

a) Thay $x=2; y=-1$ ta có: $2-3.(-1)=5$

Vậy $(2;-1)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

b) Thay $x=-5; y=0$ ta có: $-5-3.0\neq 5$

Vậy $(-5;0)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Thay $x=0; y=-\dfrac{5}{3}$ ta có: $0-3.\left(-\dfrac{5}{3}\right)=5$

Vậy $\left(0;-\dfrac{5}{3}\right)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 2. Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số $x;y = 1;1$ có phải là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=3\\2x-y=1\end{cases}$ hay không?

Lời giải

Thay $x;y = 1;1$ vào hệ phương trình: $\begin{cases}2.1+1=3\\2.1-1=1\end{cases}$ đúng.

Vậy $1;1$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 3. Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y=3\\x-y=2\end{cases}$

a) $(1;-1)$ b) $(2;0)$

Lời giải

a) Thay $x=1; y=-1$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có:

$1-2.(-1)=3$

$1-(-1)=2$

Suy ra cặp số $(1;-1)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ

Vậy $(1;-1)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay $x=2; y=0$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có:

$2-2.0\neq 3$

$2-0=2$

Suy ra cặp số $(2;0)$ không là nghiệm của phương trình thứ nhất trong hệ đã cho

Vậy $(2;0)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bài 4. Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình

a) $4x-y=1$ b) $x+3y=-2$

Lời giải

a) Giải phương trình: $4x-y=1$ (1)

Ta có: $(1)\Leftrightarrow y=4x-1$

Nếu cho x một giá trị bất kỳ thì cặp số $(x;y)$ trong đó $y=4x-1$, là một nghiệm của phương trình (1)

Như vậy ta có tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{(x;4x-1)/x\in R\}$

b) Ta có: $x+3y=-2$ $(2)\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}-\frac{x}{3}$

Nếu cho x một giá trị bất kì thì cặp số $(x;y)$ trong đó $y=\frac{-2}{3}-\frac{x}{3}$, là một nghiệm của phương trình (2)

Như vậy ta có tập nghiệm của phương trình (2) là: $S=\left\{\left(x;-\frac{2}{3}-\frac{x}{3}\right)/x\in R\right\}$

Bài 5. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình sau: $x+2y-3=0$.

Lời giải

♦ Tìm nghiệm tổng quát

$$x+2y-3=0\Rightarrow x=-2y+3\Rightarrow\begin{cases}y\in\mathbb{R}\\x=-2y+3\end{cases}$$

Hoặc $x+2y-3=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$

Vậy nhiệm của phương trình $x+2y-3=0$ là $\begin{cases}y\in\mathbb{R}\\x=-2y+3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$

♦ Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình

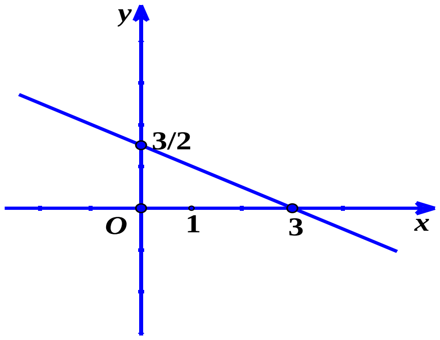
$$x+2y-3=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Bảng giá trị

x	0	3
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0

Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ đi qua $A\ \ 3;0$, $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Vẽ đồ thị



Nghiệm của phương trình $x+2y-3=0$ là tập hợp các điểm $\ x;y\ $ thuộc đường thẳng $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Bài 6. Hãy tìm giá trị của để điểm $A\ \ 1;-2\ $ thuộc đường thẳng $\ m-2\ \ x-y+m+3=0$.

Lời giải

Do điểm $A\ \ 1;-2\ $ thuộc đường thẳng $\ m-2\ \ x-y+m+3=0$ nên :

$\ m-2\ .1-\ -2\ +m+3=0$

$\Leftrightarrow 2m+3=0$

$\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$

Vậy $m=-\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Nếu là phương trình bậc nhất hai ẩn thì hãy xác định các hệ số a,b,c .

a) $2024x-2025y=2026$ b) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=1$ c) $0x-2y=-3$

d) $x-0y=0$ e) $0x+0y=-1$

Bài 8. Trong các cặp số sau $(12;1);(1;1);(2;-3);(1;-2)$ cặp số nào là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $2x-5y=19$.

Lời giải

Ta có các cặp số: $(12;1);(2;-3)$ là nghiệm của phương trình $2x-5y=19$

Còn các cặp số $(1;1);(1;-2)$ không là nghiệm của phương trình $2x-5y=19$

Bài 9. Tìm tập nghiệm của những phương trình sau

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ b) $|x|-y=1$ c) $\frac{1}{x}+2y=3$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{x}{2}=\frac{y}{5} \Leftrightarrow y=\frac{5}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ y=\frac{5}{2}x \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{x\in R\,/\,y=\frac{5x}{2}\right\}$

b) Ta có: $|x|-y=1$

- Nếu $x\geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, x>0 \\ y=x-1 \end{cases}$

- Nếu $x<0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x-y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, x<0 \\ y=-x-1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{x\geq 0\,/\,y=x-1\}\cup\{x<0\,/\,y=-x-1\}$

c) Ta có: $\frac{1}{x}+2y=3\ (1)$ với điều kiện $x\neq 0$

Đặt $\frac{1}{x}=t \Rightarrow t\neq 0, \forall t\neq 0, \exists x=\frac{1}{t}$

Từ $(1) \Rightarrow t+2y=3 \Leftrightarrow \begin{cases} y\in R \\ t=3-3y \end{cases}$

Với $t\neq 0 \Leftrightarrow 3-2y\neq 0 \Leftrightarrow y\neq \frac{3}{2}$

Vậy khi đó phương trình (1) có nghiệm $(x;y)$ là: $\begin{cases} y\in R, y\neq \frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{3-2y} \end{cases}$

Bài 10. Kiểm tra xem cặp số (-4; 5) là nghiệm của hệ phương trình nào trong các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -3x+2y=21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=-12 \\ x+\frac{1}{3}=\frac{-7}{3} \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $x=-5; y=5$ vào $-3x+2y=21$ ta được: $-1.(-4)+2.5=21$ (vô lý)

Vậy cặp số $(-4;5)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -3x+2y=21 \end{cases}$

b) Tương tự ta có cặp số $(-4;5)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-2y=-12 \\ x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-7}{3} \end{cases}$

Bài 11. Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không

a) $(1;2)$ và $\begin{cases} 3x-5y=-7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ b) $(-2;5)$ và $\begin{cases} 2x-3y=-19 \\ -3x+2y=7 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $x=1; y=2$ vào hệ phương trình ta được:

$\begin{cases} 3.1-5.2=-7 \\ 2.1+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7=-7 \\ 4=4 \end{cases}$ (luôn đúng)

Vậy cặp số $(1;2)$ là nghiệm của hệ phương trình

b) Thay $x=-2; y=5$ vào hệ phương trình ta được:

$\begin{cases} 2.(-2)-3.5=-19 \\ -3.(-2)+2.5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4-15=-19 \\ 6+10=7 \end{cases}$ (vô lý)

Vậy cặp số $(-2;5)$ không là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-3y=-19 \\ -3x+2y=7 \end{cases}$

Bài 12. Tìm các giá trị của tham số m để cặp số $(2;-1)$ là nghiệm của phương trình $mx-5y=3m-1$

Lời giải

Để cặp số $(2;-1)$ là nghiệm của phương trình $mx-5y=3m-1$ ta phải có:

$2m-5(-1)=3m-1 \Leftrightarrow m=6$

Vậy $m=6$ là giá trị cần tìm.

Bài 13. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm giá trị của m để:

a) điểm $M(-1;3)$ thuộc đường thẳng $mx+2y=4$.

b) điểm $N(1;-1)$ thuộc đường thẳng $(m-2)x+(3m-1)y=6m-2$.

c) điểm $Q(2;1)$ thuộc đường thẳng $(2m-1)x+3(m-1)y=4m-2.$.

Lời giải

a) Điểm $M(-1;3)$ thuộc đồ thị hàm số $mx+2y=4$ khi $m.(-1)+2.3=4 \Leftrightarrow m=2$

b) Điểm $N(1;-1)$ thuộc đồ thị hàm số $(m-2)x+(3m-1)y=6m-2$ khi

$(m-2)-(3m-1)=6m-2 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{8}$.

c) Điểm $Q(2;1)$ thuộc đồ thị hàm số $(2m-1)x+3(m-1)y=4m-2.$ khi

$(2m-1).1+3(m-1)(-1)=4m-2 \Leftrightarrow m=1$

Bài 14. Cho phương trình sau: $3x+2y=9-m\ (1)$. Tìm $m\in N$ để phương trình (1) có nghiệm nguyên dương

Lời giải

Ta có: $m\in N\Rightarrow 9-m\le 9$

$3x+2y\le 9\Leftrightarrow x\le\dfrac{9-2y}{3}$

Lại có: $y\in N^*\Rightarrow y\ge 1\Rightarrow x\le\dfrac{9-2}{3}<3\Rightarrow x\in\{1;2\}$

- Nếu $x=1\Rightarrow 2y=6-m\Leftrightarrow y=3-\dfrac{m}{2}$, mà $y\in N^*\Rightarrow m\in\{0;2;4\}$

- Nếu $x=2\Rightarrow 2y=3-m\Leftrightarrow y=1+\dfrac{1-m}{2}$, mà $y\in N^*\Rightarrow m=1$

Vậy điều kiện cần tìm của m là: $m\in\{0;1;2;4\}$

BÀI 3
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế theo các bước sau:

- **Bước 1: Thế để đưa về phương trình một ẩn**

Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.

- **Bước 2: Giải phương trình một ẩn**

Giải phương trình một ẩn ở **bước 1** để tìm giá trị ẩn đó.

- **Bước 3: Tìm ẩn còn lại và kết luận**

Thế giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở **bước 2** vào biểu thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia ở **bước 1** để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Chú ý: *Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số theo các bước sau:

- **Bước 1: Làm cho hai hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau hoặc đối nhau**

Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

- **Bước 2: Đưa về phương trình một ẩn**

Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình nhận được ở **bước 1** để được một phương trình một ẩn. Rồi giải phương trình một ẩn đó.

- **Bước 3: Tìm ẩn còn lại và kết luận**

Thế giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở **bước 2** vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

DẠNG 1
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN CƠ BẢN

Bài 1. Giải hệ các phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x-2y=10 \\ -4x+y=3 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$

Cách 1: Thế y theo x ở phương trình thứ nhất

Ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 4x-3(5-x)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 7x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Cách 2: Thế x theo y ở phương trình thứ nhất

Ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ 4(5-y)-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -7y=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$

b) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$

Cách 1: Ta có $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2y \\ 2(2+2y)-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2y \\ 0y=0 \end{cases}$

Ta thấy rằng $0y=0$ có nghiệm đúng với mọi $y \in R$

Do đó hệ phương trình vô số nghiệm.

Cụ thể, tập nghiệm của nó cũng là tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $x=2+2y$

Do đó, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ tính bởi công thức $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2y \\ y \in R \end{cases}$

Cách 2: Ta có $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1 \\ 2x-4\left(\frac{1}{2}x-1\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1 \\ 0x=0 \end{cases}$

Ta thấy rằng $0x=0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in R$

Do đó hệ phương trình vô số nghiệm.

Cụ thể, tập nghiệm của nó cũng là tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $y=\frac{1}{2}x-1$

Do đó, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ tính bởi công thức $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1 \\ x\in R \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x-2y=10 \\ -4x+y=3 \end{cases}$

Cách 1: Ta có $\begin{cases} 8x-2y=10 \\ -4x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2(3+4x)=10 \\ y=3+4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=16 \\ y=3+4x \end{cases}$

Ta thấy phương trình $Ox=16$ vô nghiệm với mọi $x\in R$

Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} 8x-2y=10 \\ -4x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}\right)-2y=10 \\ y-3=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y=16 \\ x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{4} \end{cases}$

Ta thấy phương trình $Oy=16$ vô nghiệm với mọi $y\in R$

Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 2. Giải hệ các phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

Bài giải

a) Ta có $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y=5 \\ 2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y=5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$

b) Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất với 2 ta được phương trình tương đương

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=4 \\ 2x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=0 \\ x-2=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=0 \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình có vô số nghiệm

Cụ thể, tập nghiệm của nó cũng là tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $y=\frac{1}{2}x-1$

Do đó, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ tính bởi công thức $\begin{cases} x\in R \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=12 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=6 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-4;5)$

Bài 3. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 5x-2y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 4x-y=7 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=20 \\ x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(5;2)$

b) Ta có: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 5x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=10 \\ 5x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=18 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2.2+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x\,;\,y)=(2\,;1)$.

c) $\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 4x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=4 \\ 4x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 4x-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;1)$.

Bài 4. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y-10=0 \\ 2x-3y+2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases}$

Bài giải

a) Ta có: $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;2)$.

b) Ta có:

$$\begin{cases} 3x+2y-10=0 \\ 2x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+6y=30 \\ 4x-6y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=26 \\ 3y=2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2x+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

c) Ta có $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3x \\ x-2(1-3x)=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3x \\ x-2+6x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3x \\ 7x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3.1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;-2)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x-y=4\\x+3y=-5\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+y=5\\3x-y=5\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+3y=8\\-x+y=1\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}2x-y=4\\x+3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-3y=12\\x+3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=7\\y=2x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2.1-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(1;-2)\}$.

b) $\begin{cases}2x+y=5\\3x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=10\\3x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\3.2-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$; $y=1$.

c) $\begin{cases}2x+3y=8\\-x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=8\\-2x+2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=10\\-x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Bài 6. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}x-y=3\\3x+y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-3y=1\\x+2y=4\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-y=4\\x+2y=7\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}x-y=3\\3x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=4\\y=x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $S=\{(1;-2)\}$.

b) $\begin{cases}2x-3y=1\\x+2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=1\\2x+4y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=1\\7y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

c) $\begin{cases}2x-y=4\\x+2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y=8\\x+2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=15\\y=2x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$.

Bài 7. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}x-2y=5\\2x-y=7\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=5\\4x+5y=9\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y=4\\x-2y=-4\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}x-2y=5\\2x-y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=10\\2x-y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y=-3\\2x-y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\2x=7+(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=3\end{cases}$

Vậy $S=\{(3;-1)\}$

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=20 \\ 4x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-11 \\ x=5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=-11 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(16;-11)$

c) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(0;2)$

Bài 8. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 5x+2y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y-8=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y+4=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 5x+2y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-2 \\ 5x+2y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4y-2}{3} \\ 5.\left(\dfrac{4y-2}{3}\right)+2y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4y-2}{3} \\ 26y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$

b) $\begin{cases} 3x+2y-8=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=8 \\ 3x-4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y=6 \\ x=\dfrac{8-2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{8-2.1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(2;1)\}$.

c) $\begin{cases} 3x-y+4=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=-4 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=-8 \\ 6x+9y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=11 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(-1;1)$.

DẠNG 2
HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 9. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{4} \\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ 5x-8y=3 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{4} \\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=2x-2y \\ 5x=3y+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=0 \\ 5x-3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{6}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{6}\right)$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ 5x-8y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x-8y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-8y=24 \\ 5x-8y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=21 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$

Bài 10. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2(x+y)-5y=3 \\ 4(x-1)-2(y+1)=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)=xy-1 \\ (x-3)(y-3)=xy-3 \end{cases}$

Bài giải

a) Ta có $\begin{cases} 2(x+y)-5y=3 \\ 4(x-1)-2(y+1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4(x-1)-2(y+1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6y=6 \\ 4x-2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phuương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;1)$.

b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)=xy-1 \\ (x-3)(y-3)=xy-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-x+y-1=xy-1 \\ xy-3x-3y+9=xy-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -3x-3y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+y)(x-1)=(x-y)(x+1)+2(xy+1)\\(y-x)(y+1)=(y+x)(y-2)-2xy\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$

$\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{2}\\y=\dfrac{27}{2}\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{27}{2}\right)$

b) $\begin{cases}(x+y)(x-1)=(x-y)(x+1)+2(xy+1)\\(y-x)(y+1)=(y+x)(y-2)-2xy\end{cases}$

$\begin{cases}(x+y)(x-1)=(x-y)(x+1)+2(xy+1)\\(y-x)(y+1)=(y+x)(y-2)-2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 12. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}5(x+2y)-3(x-y)=99\\x-3y=7x-4y-17\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x-3)(2y+5)=(2x+7)(y-1)\\(4x+1)(3y-6)=(6x-1)(2y+3)\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}5(x+2y)-3(x-y)=99\\x-3y=7x-4y-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10y-3x+3y=99\\x-3y-7x+4y=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+13y=99\\-6x+y=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;7)$

b) $\begin{cases}(x-3)(2y+5)=(2x+7)(y-1)\\(4x+1)(3y-6)=(6x-1)(2y+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-79}{511}\\y=\dfrac{-51}{73}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{-79}{511};\dfrac{-51}{73}\right)$.

Bài 13. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}5(x+2y)-3(x-y)=99\\x-3y=7x-4y-17\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x-2)(6y+1)=(2x-3)(3y+1)\\(2x+1)(12y-9)=(4x-1)(6y-5)\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}5(x+2y)-3(x-y)=99\\x-3y=7x-4y-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+13y=99\\6x-y=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;7)$

b) $\begin{cases}(x-2)(6y+1)=(2x-3)(3y+1)\\(2x+1)(12y-9)=(4x-1)(6y-5)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6xy+x-12y=6xy+2x-9y-3\\24xy-18x+12y-9=24xy-20x-6y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;1)$

Bài 14. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}3(y-5)+2(x-3)=0\\7(x-4)+3(x+y-1)-14=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+1)(y-1)=(x-2)(y+1)-1\\2(x-2)y-x=2xy-3\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}3(y-5)+2(x-3)=0\\7(x-4)+3(x+y-1)-14=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=21\\10x+3y=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;5)$

b) $\begin{cases}(x+1)(y-1)=(x-2)(y+1)-1\\2(x-2)y-x=2xy-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=2\\x+4y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{11}\\y=\dfrac{4}{11}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{17}{11};\dfrac{4}{11}\right)$

Bài 15. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+1)(y-1)=xy-1\\(x-3)(y+3)=xy-3\end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{2}\\y=\dfrac{-13}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x+1)(y-1)=xy-1\\(x-3)(y+3)=xy-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\varnothing\\y=\varnothing\end{cases}$

Bài 16. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + 2y = 0 \\ \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Điều kiện $x \neq 0;\ y \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x = -y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-y+1) - 2y = 0 \\ x = -y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + 2y = 0 \\ \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 3(x+y) - 4y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; -3)$

Bài 17. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 1 \\ \dfrac{4x+y}{4} + \dfrac{y+1}{2} = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y = 7 \\ \dfrac{5}{3}x - \dfrac{3}{2}y = 1 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 1 \\ \dfrac{4x+y}{4} + \dfrac{y+1}{2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 5 \\ 4x + 3y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{2} \\ y = -14 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{19}{2}; -14\right)$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y = 7 \\ \dfrac{5}{3}x - \dfrac{3}{2}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 42 \\ 10x - 9y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (6; 6)$

Bài 18. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ 3(3y+2)-4(x+2y)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=\dfrac{4x-3}{5} \\ x+3y=\dfrac{15-9y}{14} \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ 3(3y+2)-4(x+2y)=0 \end{cases}$ $(3y-2\neq 0 \Leftrightarrow y\neq \dfrac{2}{3})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=3y-2 \\ 9y+6-4x-8y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,3 \\ y=3,2 \end{cases} (tm)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2,3;3,2)$

b) $\begin{cases} x+y=\dfrac{4x-3}{5} \\ x+3y=\dfrac{15-9y}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+5y=4x-3 \\ 14x+42y=15-9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy hệ phuương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(12;-3)$

Bài 19. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+27 \\ (x-2)(y+1)=xy+8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{4}-\dfrac{x+y-1}{5}=2x-y-1 \\ \dfrac{4x+y-2}{4}=\dfrac{2x-y-3}{6}-\dfrac{x-y-1}{3} \end{cases}$

Bài giải

a)

$\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+27 \\ (x-2)(y+1)=xy+8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+3x-y-3=xy+27 \\ xy+x-2y-2=xy+8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=30 \\ x-2y=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x;y)=(10;0)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(10;0)$

b) Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{4}-\dfrac{x+y-1}{5}=2x-y-1 \\ \dfrac{4x+y-2}{4}=\dfrac{2x-y-3}{6}-\dfrac{x-y-1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(2x-3y)-4(x+y-1)=20(2x-y-1) \\ 3(4x+y-2)=2(2x-y-3)-4(x-y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{-4}{3}\right)$

DẠNG 3

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 20. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{x}+\dfrac{15}{y}=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-1 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+2y}+\dfrac{1}{y+2x}=3 \\ \dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{3}{y+2x}=1 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{x}+\dfrac{15}{y}=1 \end{cases}$

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Đặt $\dfrac{1}{x}=a; \dfrac{1}{y}=b \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{12} \\ 8a+15b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+8b=\dfrac{2}{3} \\ 8a+15b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{28} \\ b=\dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=28 \\ y=21 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(28;21)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-1 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=7 \end{cases}$

Điều kiện $x, y \neq 0$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a; \dfrac{1}{y}=b \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a-2b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(1;-\dfrac{1}{2})$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-\dfrac{1}{2})$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+2y}+\dfrac{1}{y+2x}=3 \\ \dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{3}{y+2x}=1 \end{cases} (x \neq -2y; y \neq -2x)$

Đặt $a=\dfrac{1}{x+2y}; b=\dfrac{1}{y+2x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 4a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{10}{7} \\ b=\dfrac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{1}{3}$

Bài 21. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{5x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4y}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{2y-1}=1 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{5x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4y}=\dfrac{1}{12} \end{cases} (x, y \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{5}u+v=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{3}{4}u+\dfrac{3}{4}v=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{36} \\ v=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ y=12 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(36;12)$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{2y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{19}{7} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{19}{7};\dfrac{4}{3}\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 22. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y+1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y+1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y+1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases} (x+y \neq 3; x-y \neq -1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5u-2v=8 \\ 3u+v=1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-3}=1 \\ \dfrac{1}{x-y+1}=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=1 \\ 3(x-y+1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\dfrac{1}{6} \\ y=2\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1\dfrac{1}{6};2\dfrac{5}{6}\right)$

b. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4u-5v=\dfrac{5}{2} \\ 3u+v=\dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u-10v=5 \\ 15u+5v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x=\dfrac{-10}{3} \\ y=\dfrac{19}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{-10}{3};\dfrac{19}{3}\right)$

Bài 23. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{3y}{y+1}=-4 \\ \dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2y}{y+1}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a$ và $\dfrac{1}{y}=b$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a+2b=1 \\ 3a-b=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ 6a-2b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ 7a=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Từ đó suy ra $x=2;\ y=4$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;4)$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{3y}{y+1} = -4 \\ \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2y}{y+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Đặt $\dfrac{x}{x+2} = a;\ \dfrac{y}{y+1} = b$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2a-3b=-4 \\ a+2b=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b=-4 \\ 2a+4b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b=-4 \\ 7b=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Với $a=-1 \Rightarrow \dfrac{x}{x+2} = -1 \Rightarrow x = -x-2 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

Với $b=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3y = 2y+2 \Leftrightarrow y=2$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $(-1;2)$

Bài 24. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{4x-y} - \dfrac{10}{2x+3y} = -1 \\ \dfrac{4}{4x-y} + \dfrac{3}{2x+3y} = \dfrac{29}{15} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3y+1} - \dfrac{4x-6}{3-2y} = -1 \\ \dfrac{2-4x}{3y+1} + \dfrac{3-2x}{3-2y} = -3 \end{cases}$

Bài giải

a. $\begin{cases} \dfrac{3}{4x-y} - \dfrac{10}{2x+3y} = -1 \\ \dfrac{4}{4x-y} + \dfrac{3}{2x+3y} = \dfrac{29}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-10b=-1 \\ 4a+3b=\dfrac{29}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất

là: $(x;y)=(1;1)$

b. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3y+1} - \dfrac{4x-6}{3-2y} = -1 \\ \dfrac{2-4x}{3y+1} + \dfrac{3-2x}{3-2y} = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=-1 \\ -2a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{3y+1} = 1 \\ \dfrac{2x-3}{3-2y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 2x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{4}{5}\right)$

Bài 25. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{y}{y-1}=3 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3y}{y-1}=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{7}{x-y+2}-\dfrac{5}{x+y-1}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{x-y+2}+\dfrac{2}{x+y-1}=4 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{y}{y-1}=3 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3y}{y-1}=-1 \end{cases}$ Điều kiện $x \neq -1, y \neq 1$.

Đặt $u=\dfrac{x}{x+1}; v=\dfrac{y}{y-1}$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u-v=3 \\ u+3v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3+v \\ 3+v+3v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3+v \\ 4v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=-1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}=2 \\ \dfrac{y}{y-1}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x+2 \\ y=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ thỏa điều kiện

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=-2; y=\dfrac{1}{2}$

b) $\begin{cases} \dfrac{7}{x-y+2}-\dfrac{5}{x+y-1}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{x-y+2}+\dfrac{2}{x+y-1}=4 \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{1}{x-y+2}; b=\dfrac{1}{x+y-1}$

$\begin{cases} \dfrac{7}{x-y+2}-\dfrac{5}{x+y-1}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{x-y+2}+\dfrac{2}{x+y-1}=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 7a-5b=\dfrac{9}{2} \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a-10b=9 \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a-10b=9 \\ 15a+10b=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$

Bài 26. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} 7x^2+13y=-39 \\ 5x^2-11y=33 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+y^2=10 \\ x^2-2y^2=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x+3)^2-2y^3=6 \\ 3(x+2)^2+5y^3=7 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} 7x^2+13y=-39 \\ 5x^2-11y=33 \end{cases}$

Đặt $x^2=u\geq 0; y=v \Rightarrow \begin{cases} 7u-13v=-39 \\ 5u-11v=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-3)$

b) $\begin{cases} 2x^2+y^2=10 \\ x^2-2y^2=5 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x^2=u\geq 0 \\ y^2=v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+v=10 \\ u-2v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 5 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(5;0);(-5;0)$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(-1;-1);(-5;-1)$

Bài 27. Giải hệ các phương trình sau:

a) $\begin{cases} (x+3)^2-2y^3=6 \\ 3(x+2)^2+5y^3=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+2(y^2+2y)=10 \\ 3x^2-(y^2+2y)=9 \end{cases}$

Bài giải

a) $\begin{cases} (x+3)^2-2y^3=6 \\ 3(x+2)^2+5y^3=7 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} (x+3)^2=u\geq 0 \\ v=y^3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u-2v=6 \\ 3u+5v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2=4 \\ y^3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \end{array}\right. \\ y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+2(y^2+2y)=10 \\ 3x^2-(y^2+2y)=9 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x^2\geq 0 \\ v=y^2+2y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u+2v=10 \\ 6u-2v=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(2;1);(2;-3);(-2;1);(-2;-3)\}$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x;y)\in\{(2;1),(2;-3),(-2;1),(-2;-3)\}$

DẠNG 4

ỨNG DỤNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG BÀI TOÁN TÌM HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 28. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = m \\ x - my = -1 - 6m \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số m để cặp số $(-2;1)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Lời giải

Thay $x = -2; y = 1$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} 2m.(-2) + 1 = m \\ -2 - m = -1 - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 1 = m \\ 5m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{5}$.

Vậy $m = \dfrac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

Bài 29. Xác định a và b, biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;5)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B có dạng: $(d): y = ax + b$

Vì (d) đi qua điểm $A(1;2)$,nên ta có : $a + b = 2(1)$

(d) đi qua điểm $B(-2;5)$,nên ta có : $-2a + b = 5(2)$

Kết hợp $(1);(2)$ ta có hệ: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy $a = -1; b = 3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 30. Cho hệ phương trình $\begin{cases} -mx + y = -2m \\ x - m^2 y = -7 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số m để cặp số $(1;2)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Lời giải

Thay $x = 1; y = 2$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} -m + 2 = -2m \\ 1 - 2m^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 31. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + by = -2 \\ bx - ay = -3 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b biết rằng hệ phương trình có nghiệm là $(1;-2)$.

Lời giải

Thay $x=1; y=-2$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases}1-2b=-2\\ b+2a=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-9}{4}\\ b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Bài 32. Cho hệ phương trình $\begin{cases}4x+ay=6\\ bx-2ay=8\end{cases}$. Xác định các hệ số a và b biết rằng hệ phương trình có nghiệm là $(1;\,-1)$.

Lời giải

Vì $(1;\,-1)$ là một nghiệm của phương trình, nên thay giá trị này vào hệ phương trình ta được:

$\begin{cases}4.1+a.(-1)=6\\ b.1-2a.(-1)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-a=6\\ b+2a=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=8-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=12\end{cases}$

Vậy $a=-2;\, b=12$

Bài 33. Cho hệ phương trình $\begin{cases}ax-2y=b\\ 2x-by=-2a\end{cases}$. Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2;-1)$.

Lời giải

Ta có: $(2;-1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}ax-2y=b\\ 2x-by=-2a\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a\cdot 2-2\cdot(-1)=b\\ 2.2-b\cdot(-1)=-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+2=b\\ 4+b=-2a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=-2\\ 2a+b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a=-6\\ b=2a+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\ b=2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\ b=-1\end{cases}$

Vậy $a=-\dfrac{3}{2}$ và $b=-1$ thỏa mãn bài toán.

Bài 34. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-y=\dfrac{2}{b}\\ x-\dfrac{y}{b}=-\dfrac{1}{a}\end{cases}$

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (3;2)$

Lời giải

$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - y = \dfrac{2}{b} \\ x - \dfrac{y}{b} = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$. Điều kiện $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (3;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a} - 2 = \dfrac{2}{b} \\ 3 - \dfrac{2}{b} = -\dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 2 \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{b} = -3 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}$ $(u, v \neq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3u - 2v = 2 \\ u - 2v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = 5 \\ u - 2v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{2} \\ v = \dfrac{u+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{2} \text{ (TM)} \\ v = \dfrac{11}{4} \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = u = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{b} = v = \dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \text{ (TM)} \\ b = \dfrac{4}{11} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $a = \dfrac{2}{5}, b = \dfrac{4}{11}$

Bài 35. Xác định các hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình sau $\begin{cases} (3a-2)x + 2(2b+1)y = 30 \\ (a+2)x - 2(3b-1)y = -20 \end{cases}$ có nghiệm là $(3;-1)$.

Lời giải

Thay $x = 3; y = -1$ vào hệ phương trình ta được $a = 2; b = -5$

Bài 36. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (3a+b)x + (4a-b+1)y = 35 \\ bx + 4ay = 29 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b biết rằng hệ phương trình có nghiệm là $(1;-3)$.

Lời giải

Thay $x = 1; y = -3$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} (3a+b).1 + (4a-b+1).(-3) = 35 \\ b.1 + 4a.(-3) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b - 12a + 3b - 3 = 35 \\ b - 12a = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9a + 4b = 38 \\ b - 12a = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy $a = -2; b = 5$

Bài 37. Xác định các hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ để:

a) Đồ thị của nó đi qua hai điểm $A(1;3), B(2;4)$

b) Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

a) Đồ thị của nó đi qua hai điểm $A(1;3), B(2;4)$

Thay tọa độ các điểm A, B vào phương trình của đường thẳng ta được:

$\begin{cases} 3 = a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ 4 = 2a + 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - a = 2 \end{cases}$. Vậy $a = 1, b = 2$.

b) Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Tương tự phần (1) ta có hệ: $\begin{cases} -4 = a.0 + b \\ 0 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ 2a = -b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Vậy $a = 2, b = -4$.

DẠNG 5

ỨNG DỤNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG PHẢN ỨNG HÓA HỌC

Bài 38. Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hóa học đã được cân bằng sau:

a) $x\,Fe + y\,O_2 \to Fe_3O_4$ b) $x\,NO + O_2 \to y\,NO_2$

Lời giải

a) Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O ta có:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình cân bằng như sau: $3\,Fe + 2\,O_2 \to Fe_3O_4$

b) Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với N và O ta có:

$$\begin{cases} x = y \\ x + 2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y + 2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình cân bằng như sau: $2\,NO + O_2 \to 2\,NO_2$

Bài 39. Cân bằng phương trình ứng hóa học sau bằng phương pháp đại số:

a) $FeO + O_2 \to Fe_3O_4$ b) $NO + O_2 \to N_2O_5$

Lời giải

a) Gọi lần lượt là hệ số của FeO và O_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học:

$x\,FeO + y\,O_2 \to Fe_3O_4$

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O ta có:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $3\,Fe + \dfrac{1}{2}O_2 \to Fe_3O_4$

Do các hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế phương trình hóa học trên với 2 ta có: $6\,FeO + O_2 \to 2\,Fe_3O_4$

Vậy ta có phương trình cân bằng như sau: $6\,FeO + O_2 \to 2\,Fe_3O_4$

b) Gọi lần lượt là hệ số của NO và O_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học:

$x\,NO + y\,O_2 \to N_2O_5$

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với N và O ta có:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có: $2\,NO + \frac{3}{2}\,O_2 \rightarrow N_2O_5$

Do các hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế phương trình hóa học trên với 2 ta có: $4\,NO + 3\,O_2 \rightarrow 2\,N_2O_5$

Vậy ta có phương trình cân bằng như sau: $4\,NO + 3\,O_2 \rightarrow 2\,N_2O_5$

BÀI 3
GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1: Lập hệ phương trình**

  + Chọn hai ẩn biểu thị hai đại lượng chưa biết và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

  + Biểu diễn các đại lượng liên quan theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

  + Lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- **Bước 2:** Giải hệ hai phương trình nói trên.

- **Bước 3:** Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

DẠNG 1
TOÁN VỀ QUAN HỆ CÁC SỐ

Phương pháp

Ta phải chú ý tới cấu tạo của một số có hai chữ số , ba chữ số …viết trong hệ thập phân. điều kiện của các chữ số .

- Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$ với $0 < a \le 9;\ 0 \le b \le 9; a, b \in N$

- Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ với $0 < a \le 9;\ 0 \le b, c \le 9; a, b, c \in N$

Bài 1. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 2021 và hiệu của số lớn và số bé bằng 15.

Lời giải

Gọi số lớn là x $(x > 15, x \in \mathbb{N})$, số bé là y $(y \in \mathbb{N})$.

Tổng của hai số là 2021 nên ta có phương trình: $x + y = 2021 \quad (1)$

Hiệu của số lớn và số bé bằng 15 nên ta có phương trình: $x - y = 15 \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2021 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2036 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1018 (\text{t/m}) \\ y = 1003 (\text{t/m}) \end{cases}$

Vậy số lớn là 1018, số bé là 1003.

Bài 2. Tổng các chữ số của một số có hai chữ số là 9. Nếu thêm vào số đó 63 đơn vị thì số thu được cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó?

Lời giải

Gọi chữ số hàng chục là x $(0 < x \le 9; x \in N)$

Gọi chữ số hàng đơn vị là y $(0 < y \le 9; y \in N)$

Vì tổng hai chữ số là 9 nên: $x + y = 9$ (1)

Số cần tìm là: $\overline{xy} = 10x + y \Rightarrow \overline{yx} = 10y + x$

Ta có: $\overline{xy} + 63 = \overline{yx} \Rightarrow 10x + y + 63 = 10y + x \Leftrightarrow x - y = -7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \overline{xy} = 18$$

Vậy số cần tìm là 18

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm hai số biết rằng 4 lần số thứ hai cộng với 5 lần số thứ nhất bằng 18040, và 3 lần số thứ nhất hơn 2 lần số thứ hai là 2002.

Lời giải

- gọi số thứ nhất là x, số thứ hai là y $(x, y \in N)$

- theo bài ra, ta có : $\begin{cases} 5x + 4y = 18040 \\ 3x - 2y = 2002 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2004 \\ y = 2005 \end{cases}$

Bài 4. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Lời giải

Gọi số có hai chữ số là: $\overline{ab}(a, b > 0; a, b \le 9; a + b = 11)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ 10b + a - (10a + b) = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases}$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 47

Bài 5. Tìm hai số tự nhiên hơn kém nhau 12 đơn vị biết tích của chúng bằng 20 lần số lớn cộng với 6 lần số bé.

Lời giải

Cách 1: giải bằng cách lập hệ phương trình

Gọi số lớn là x

Gọi số bé là $y\,(x, y \in N; x > y)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 12 \\ xy = 20x + 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 36 \end{cases}$

Cách 2: giải bằng cách lập phương trình

Gọi số bé là $x(x \in N)$

Khi đó số lớn là $x + 12$

Vì tích của chúng bằng 20 lần số lớn cộng với 6 lần số bé nên ta có phương trình:

$x.(x+12)=20(x+12)+6x \Leftrightarrow x=24$

Vậy số bé là 24; số lớn là 36.

Bài 6. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 4 lần tổng các chữ số của nó. Nếu viết hai chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì đc số mới lớn hơn số ban đầu 36 đơn vị.

Lời giải

gọi số tự nhiên cần tìm có dạng: $\overline{ab}\left(a,b\in N;0<a,b\le 9\right)$

theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\overline{ab}=4(a+b)\\ \overline{ba}-\overline{ab}=36\end{cases}\begin{cases}10a+b=4(a+b)\\ 10b+a-\left(10+b\right)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=8\end{cases}\Leftrightarrow\overline{ab}=48$

Bài 7. Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng nếu viết thêm số 1 vào bên phải số này thì được một số có ba chữ số hơn số phải tìm 577 và số phải tìm hơn số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại là 18 đơn vị.

Lời giải

gọi số tự nhiên cần tìm có dạng: $\overline{ab}\left(a,b\in N;0<a\le 9;0\le b\le 9\right)$

theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases}\overline{ab1}-\overline{ab}=577\\ \overline{ab}-\overline{ba}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}100a+10b+1-\left(10a+b\right)=577\\ 10a+b-\left(10b+a\right)=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+b=64\\ a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\overline{ab}=64$$

Bài 8. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được số mới lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số có hai chữ số là: $\overline{xy}(x,y\ne 0;x,y\in N)$

Số ngược lại là: $\overline{yx}$

Theo bài ta có: $\begin{cases}\overline{yx}-\overline{xy}=63\\ \overline{yx}+\overline{xy}=99\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(10y+x\right)-\left(10x+y\right)=63\\ \left(10y+x\right)+\left(10x+y\right)=99\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=8\end{cases}$

Vậy số cần tìm là 18

Bài 9. Đem một số có hai chữ số nhân với tổng các chữ số của nó thì được 405. Nếu lấy số được viết bởi hai chữ số ấy nhưng theo thứ tự ngược lại nhân với tổng các chữ số của nó thì được 486. Hãy tìm số có hai chữ số đó.

Lời giải

Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là $y\,(x,y\in N;0<x,y\le 9)$

$$\begin{cases}\overline{xy}.(x+y)=405\\ \overline{yx}.(x+y)=486\end{cases}\Leftrightarrow\Rightarrow\begin{cases}(10x+y)(x+y)=405\\ (10y+x)(x+y)=486\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 54

Bài 10. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm 99 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{x4y} \Rightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ 100x+40+y-(100y+40+x)=99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow 647$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 647

Bài 11. Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị nhỏ hơn chữ số hàng chục là 2 và tích của hai chữ số đó của nó luôn lớn hơn tổng hai chữ số của nó là 34.

Lời giải

Gọi chữ số phải tìm là: $\overline{ab}(0 \le a,b \le 9; a \ne 0) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ ab-(a+b)=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=6 \end{cases}$

Vậy số cần tìm là 86.

Bài 12. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó bằng 85

Lời giải

Gọi số bé là $x\ (x \in N; x<85)$.

Gọi số lớn là $y\ (y \in N; y<85)$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x+1=y \\ x^2+y^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2+y^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ y^2-y-42=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ y^2+6y-7y-42=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ y(y+6)-7(y-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ (y+6)(y-7)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=-6(L) \\ y=7(N) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 6 và 7

Bài 13. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần và thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số phải tìm.

Lời giải

gọi số tự nhiên cần tìm có dạng: $\overline{ab}\ (a,b \in N; 0<a,b \le 9)$

theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases} \overline{ab}=6(a+b) \\ ab+25=\overline{ba} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+b=6(a+b) \\ ab+25=10b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=5b \\ ab-10b-a+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{4}b \\ b^2-9b+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{25}{4} \\ b=5 \end{cases} loai \\ \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases} thoa\,man \end{array}\right.$$

vậy số cần tìm là : 54

DẠNG 2

TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC

Phương pháp:

- Ghi nhớ công thức tính chu vi của các loại hình sau

  + Chu vi tam giác: Bằng tổng độ dài ba cạnh

  + Chu vi hình chữ nhật: $(a+b).2$

- Ghi nhớ diện tích các hình: Tam giác, hình chữ nhật, tam giác vuông, hình vuông, hình thang

Bài 14. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45 m. Tính diện tích thửa ruộng, biết rằng nếu chiều dài giảm đi 2 lần và chiều rộng tăng lên 3 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi.

Lời giải

Gọi chiều rộng của thửa ruộng là x (m), chiều dài của thửa ruộng là y (m). (x> 0, y > 0).

Khi đó ta có hệ phương trình $\Rightarrow \begin{cases} y - x = 45 \\ 2(x+y) = 2(3x + \dfrac{y}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 60 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Diện tích của thửa ruộng là : 900 m^2.

Bài 15. Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 280 người ta làm đường đi xung quanh rộng 2m nên diện tích phần còn lại để trồng vườn là 4256m^2**.** Tính kích thước ban đầu của khu vườn.

Lời giải

Gọi chiều rộng khu vườn là x (m) đ/k x >0

chiều dài khu vườn là y (m) đ/k y>0

Nửa chu vi là 280:2 =140 (m)

theo bài ra ta có Pt $x+y=140$ (1)

Khi bớt chiều rộng đi 4 mlà $x-4$ (m)

khi bớt chiều dài đi 4 (m) là $y-4$ (m) ta có PT $(x-4)(y-4)=4256$

Theo bài ra ta có HPT : $\begin{cases} x+y=140 \\ (x-4)(y-4)=4256 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=60 \\ y=80 \end{cases}$

Giải ra được chiều rộng là 60m ,chiều dài là 80m

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16. Một hình thang có diện tích là 140cm^2, chiều cao 8cm. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết chúng hơn kém nhau 5cm

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{(x+y).8}{2}=140 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=35 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=15 \end{cases}$

Vậy độ dài hai đáy của hình thang lần lượt là 20 và 15cm.

Bài 17. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m^2. Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn?

Lời giải

Gọi chiều dài mảnh vườn là $x(m)$

Gọi chiều rộng là $y(m)(0<x,y<17)$

Theo bài ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=17 \\ (x+3)(y+2)=xy+45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy chiều dài là 12 (m); chiều rộng là 5(m)

Bài 18. Một sân trường hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 16 mét. Hai lần chiều dài kém 5 lần chiều rộng 28 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường?

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của sân trường hình chữ nhật lần lượt là $x(m), y(m)(x>y>16)$

Theo bài ra ta có hệ $\begin{cases} x-y=16 \\ 2x-5y=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ y=20 \end{cases}$

Vậy chiều dài là $36(m)$ và chiều rộng là $20(m)$.

Bài 19. Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi bằng 198 m, diện tích bằng $2430\ m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật đó cho.

Lời giải

Gọi x (m) là chiều dài và y (m) là chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật, với ($0 \prec y \prec x \prec 99$).

Theo bài ra thửa đất có :

Chu vi : 2(x + y) = 198 (m)

Diện tich : xy = 2430 (m^2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2(x+y)=198 \\ xy=2430 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=99 \\ xy=2430 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=54 \\ y=45 \end{cases}$

Vậy chiều dài và chiều rộng thửa đất hình chữ nhật là : x = 54 (m) và y = 45 (m).

Bài 20. Một hình chữ nhật có chu vi là 70 m ,nếu giảm chiều rộng đi 3m và tăng chiều dài 5m thì diện tích như cũ .Hãy tìm chiều rộng và chiều dài ?

Lời giải

Gọi chiều rộng là x (m), chiều dài là y (m) đ/k x,y>0

Nửa chu vi là $\frac{70}{2}=35 \Rightarrow x+y=35\,70$

Khi chiều rộng tăng và chiều giảm ta có $(x-3)(y+5)=xy$

Theo bài ra ta HPT : $\begin{cases} x+y=35 \\ (x-3)(y+5)=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=20 \end{cases}$

Vậy chiều rộng là 15m và chiều dài là 20m.

Bài 21. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 168 m^2. Nếu giảm chiều dài đi 1m và tăng chiều rộng thêm 1m thì mảnh vườn đó trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng lần lượt là $x, y(m)(x>y>0)$

Diện tích mảnh vườn là $168m^2 \Rightarrow xy=168 \;\; (1)$

Giảm chiều dài 1m và tăng chều rộng 1m thì mảnh vườn là hình vuông nên ta có $x-1=y+1$

$\Rightarrow x=y+2 \;\; (2)$

Thế 2 vào 1 ta được: $y^2+2y-168=0 \Leftrightarrow y=12 \Rightarrow x=14$

Vậy chiều dài là 14m, chiều rộng là 12m.

Bài 22. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải

Gọi chiều dài của mảnh đất đó là x và chiều rộng của mảnh đất đó là y (m, $x>y>0$)

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} y+7=x \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 5m và chiều dài là 12m.

Bài 23. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi chiều dài là $x(m)(0<x<28)$

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là $y(m)(x>y>0)$

Chu vi của hình chữ nhật là 28m nên $x+y=14$

Đường chéo của hình chữ nhật là 10m nên $x^2+y^2=100$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta nhận được $(x;y)=(6;8)$

Bài 24. Nhà bạn Minh Hiền được ông bà Nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Hiền chơi, Hiền đố Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi cho biết: mảnh đất đó có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm 20m^2. Các em hãy giúp Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Hiền

Lời giải

Cách 1: Giải bằng cách lập hệ phương trình

Gọi chiều dài là $x(m)$

Gọi chiều rộng là $y(m)$

$\Rightarrow x=4y \Rightarrow S=x.y=4y^2$

Diện tích mới là: $2x.(y-2)=4y^2+20 \Leftrightarrow y^2-4y-5=0 \Leftrightarrow y=5 \Rightarrow x=20$

Vậy chiều rộng là $5(m)$; chiều dài là $20(m)$.

Cách 2: Giải bằng cách lập phương trình

Gọi chiều rộng của mảnh đất là $x(m)(x>2)$

Vậy chiều dài là: $4x(m)$

Diện tích mảnh đất là: $4x^2\left(m^2\right)$

Diện tích mảnh đất sau khi giảm chiều rộng $2m$ và tăng chiều dài lên gấp đôi là: $8x(x-2)$

Theo bài ra ta có phương trình: $8x(x-2)-4x^2=20 \Leftrightarrow x=5$

Vậy chiều rộng là $5(m)$; chiều dài là $20(m)$

DẠNG 3
TOÁN CHUYỂN ĐỘNG BỘ

Phương pháp: Áp dụng công thức: $S = v.t \Rightarrow v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}$

Chú ý:

- Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:
- Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.
- Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

Bài 25. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định trong một thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian đi tăng hơn 3 giờ so với dự định. tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h, $x > 3$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ, $y > 2$). Khi đó quãng đường từ A đến B dài xy (km).

Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì vận tốc lúc đó là $x+3$ (km/h). khi đó thời gian đi sẽ là: $y-2$ (giờ).

Ta có phương trình: $(x+3)(y-2) = xy$ (1)

Tương tự nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng 3 giờ nên ta có phương trình: $(x-3)(y+3) = xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)(y-2) = xy \\ (x-3)(y+3) = xy\end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases}x = 15 \\ y = 12\end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy quãng đường AB dài là: $12.15 = 180$ (km).

Bài 26. Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau $200\,km$, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm $10\,km/h$ và vận tốc của xe máy giảm đi $5\,km/h$ thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy.

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô và vận tốc của xe máy lần lượt là $x, y\ (km/h)$ (ĐK: $x, y > 0$)

Sau 2 giờ ô tô đi được quãng đường là: $2x\ (km)$

Sau 2 giờ xe máy đi được quãng đường là: $2y\ (km)$

Vì hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau $200\,km$, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ nên ta có phương trình: $2x+2y=200 \Leftrightarrow x+y=100 \quad (1)$

Nếu vận tốc của ô tô tăng thêm $10\,km/h$ thì vận tốc mới của ô tô là: $x+10\ (km/h)$

Nếu vận tốc của xe máy giảm đi $5\,km/h$ thì vận tốc mới của xe máy là: $y-5\ (km/h)$

Vì vận tốc của ô tô tăng thêm $10\,km/h$ và vận tốc của xe máy giảm đi $5\,km/h$ thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy nên ta có phương trình: $x+10=2(y-5) \Leftrightarrow x-2y=-20 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=100 \\ x-2y=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=120 \\ x-2y=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=40 \\ x=60 \end{cases}\ (t/m)$

Vậy vận tốc của ô tô là $60\ km/h$ và vận tốc của xe máy là $40\ km/h$.

Bài 27. Trên quãng đường AB dài 210 m , tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ôt ô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Lời giải

Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) Điều kiện $x > 0$.

Gọi vận tốc ô tô là y (k,/h). Điều kiện $y > 0$.

Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là: $\frac{210}{x}$ giờ. Thời gian ô tô dự định đi từ B đến A là: $\frac{210}{y}$ giờ.

Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là : $4x$ (km).

Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là : $\frac{9}{4}y$ (km).

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{210}{x}-\frac{210}{y}=4-\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}x+2y=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{210}{x}-\frac{210}{y}=\frac{7}{4} \\ 4x+\frac{9}{4}y=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+\frac{9}{4}y}{x}-\frac{4x+\frac{9}{4}y}{y}=\frac{7}{4} & (1) \\ 4x+\frac{9}{4}y=210 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra $\frac{4x+\frac{9}{4}y}{x}-\frac{4x+\frac{9}{4}y}{y}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{9y}{4x}-\frac{4x}{y}=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}y$.

Thay vào phương trình (2) ta thu được: $\frac{12}{4}y+\frac{9}{4}y=210 \Leftrightarrow y=40$, $x=30$.

Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h. Vận tốc ô tô là 40 km/h.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 28. Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A và B cách nhau 180km, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô là $x\left(km/h\right)$ $(x>10)$

Gọi vận tốc của xe máy là $y\left(km/h\right)$ $(0<y<0)$

Ta có phương trình: $x-y=10$ $\quad(1)$

Sau 2 giờ ô tô đi được: $2x\left(km\right)$

Sau 2 giờ ô tô đi được: $2y\left(km\right)$

Theo đầu bài ta có phương trình $2x+2y=180$ $\quad(2)$

Từ (1)(2) ta được $x=50; y=40(km/h)$.

Bài 29. Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50km/h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên môi quãng đường?

Lời giải

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $x\left(h\right)\left(x>0\right) \Rightarrow S_{AB}=50x$

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là $y\left(h\right)\left(y>0\right) \Rightarrow S_{BC}=45y$

$$\Rightarrow \begin{cases}50x+45y=165\\ x+0,5=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=2\end{cases}$$

Bài 30. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 5km và một đoạn xuống dốc dài 10km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi từ B về A hết 1 giờ 20 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc, lúc xuống dốc của người đi xe đạp.

Lời giải

Đổi 1 giờ 10 phút $=\frac{7}{6}\left(\text{h}\right)$, 1 giờ 20 phút $=\frac{4}{3}\left(\text{h}\right)$.

Gọi vận tốc lên dốc và xuống dốc của người đó lần lượt là $x\left(\text{km/h}\right)$ và $y\left(\text{km/h}\right)$ với $y>x>0$

Lúc đi: Thời gian lên dốc là $\frac{5}{x}\left(\text{h}\right)$, xuống dốc là $\frac{10}{y}\left(h\right)$

Tổng thời gian đi hết 1 giờ 10 phút nên ta có phương trình: $\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=\frac{7}{6}$ (1)

Lúc về: Thời gian lên dốc là $\frac{10}{x}(\mathrm{h})$, xuống dốc là $\frac{5}{y}(h)$

Tổng thời gian đi hết 1 giờ 20 phút nên ta có phương trình: $\frac{10}{x}+\frac{5}{y}=\frac{4}{3}$ (2)

Từ (1) và (2), ta lập hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=\frac{7}{6}\\ \frac{10}{x}+\frac{5}{y}=\frac{4}{3}\end{cases}$

Đặt $a=\frac{1}{x}$ và $b=\frac{1}{y}$ với $a>0$, $b>0$, ta được:

$$\begin{cases}5a+10b=\frac{7}{6}\\ 10a+5b=\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+20b=\frac{7}{3}\\ 10a+5b=\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+5b=\frac{4}{3}\\ 15b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+5.\frac{1}{15}=\frac{4}{3}\\ b=\frac{1}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{10}\\ b=\frac{1}{15}\end{cases}\text{ (Nhận)}$$

Từ đây ta suy ra $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{10}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\ y=15\end{cases}$ (Nhận)

Vậy vận tốc lúc lên dốc là $10(\mathrm{km/h})$ và vận tốc xuống dốc là $15(\mathrm{km/h})$.

Bài 31. Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tầng 20km/h thì đến sớm 1 giờ, nếu vận tốc giảm đi 10km/h thì đến muộn 1 giờ. Tính quãng đường AB.

Lời giải

Để tính quãng đường AB ta tính đại lượng là vận tốc dự định và thời gian dự định.

Gọi vận tốc dự định là x giờ, thời gian dự định là y km/h $(x>10, y>1)$.

Quãng đường AB dài là $x.y$ (km)

Nếu vận tốc tăng thêm 20km/h thì đến sớm 1 giờ, quãng đường được tính bằng công thức: $(x+20).(y-1)$ (km)

Nếu giảm vận tốc đi 10km/h thì đến muộn 1 giờ, quãng đường đi được tính bằng công thức $(x-10).(y+1)$ (km)

Ta có hệ: $\begin{cases}(x+20)(y-1)=xy\\ (x-10)(y+1)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-x+20y-20=xy\\ xy+x-10y-10=xy\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x+20y=20\\ x-10y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y=30\\ x=10y+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\ x=40\end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta thấy giá trị $x = 40, y = 3$ thỏa mãn

Vậy vận tốc dự định là 40km/h, thời gian dự định là 3 giờ. Quãng đường AB dài là: $40.3 = 120$ km.

Bài 32. Hằng ngày, Nam đạp xe đi học với vận tốc không đổi trên quãng đường dài 10km. Nam tính toán và thấy rằng nếu đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút so với đạp xe với vận tốc hằng ngày. Tuy nhiên, thực tế sang nay lại khác dự kiến. Nam chỉ đạp xe với vận tốc lớn nhất trên nửa quãng đường (dài 5km), nửa quãng đường còn lại đường phố đông đúc nên Nam đã đạp xe với vận tốc hằng ngày. Vì vậy, thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút. Hãy tính vận tốc đạp xe hằng ngày và vận tốc xe đạp lớn nhất của Nam (lấy đơn vị vận tốc là km/h).

Lời giải

Gọi vận tốc đạp xe hằng ngày của Nam là $x\left(km/h\right)\ \left(x > 0\right)$

Vận tốc xe đạp lớn nhất của Nam là $y\left(km/h\right)\ \left(y > 0\right)$

Thời gian Nam đi học khi đạp xe với vận tốc hằng ngày là $\dfrac{10}{x}\left(h\right)$

Thời gian Nam đi học nếu đạp xe với vận tốc lớn nhất là $\dfrac{10}{y}\left(h\right)$

Thời gian đạp xe đến trường theo dự kiến ít hơn thời gian đạp xe đến trường hằng ngày là 10 phút $= \dfrac{1}{6}(h)$ nên ta có: $\dfrac{10}{x} - \dfrac{10}{y} = \dfrac{1}{6}$

Thời gian đạp xe thực tế hôm nay là 35 phút $= \dfrac{7}{12}(h)$ nên ta có: $\dfrac{5}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{7}{12}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{10}{x} - \dfrac{10}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$

Vậy vận tốc đạp xe hằng ngày là 15 (km/h)

Vận tốc đạp xe lớn nhất là 20 (km/h)

Bài 33. Một ô tô và một mô tô cùng đi từ A đến B dài 120km. Xe ô tô đến sớm hơn xe mô tô là 1 giờ. Lúc trở về xe mô tô tăng vận tốc thêm 5km/h mỗi giờ, xe ô tô vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một địa điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến A cùng một lúc với xe mô tô. Tính vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Lời giải

Gọi vận tốc xe ô tô và mô tô lần lượt là x và y $(x, y > 0)$

$\Rightarrow \dfrac{120}{x} + 1 = \dfrac{120}{y}$ (1)

Lại có tiếp: $\dfrac{120}{y+5} = \dfrac{120}{x} + \dfrac{2}{3}$ (2)

Từ (1)(2) ta có $x = 60;\ y = 40(km/h)$

DẠNG 4
TOÁN CHUYỂN ĐỘNG TRÊN SÔNG

Phương pháp: Nắm vững công thức sau

- Nếu gọi quãng đường là S; Vận tốc là v; Thời gian là t, ta có các công thức sau:

$$S = vt; v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}$$

- Gọi vận tốc thực của canô là v_1; vận tốc dòng nước là v_2, khi đó ta có:

  + Vận tốc canô xuôi dòng là $v_1 + v_2$

  + Vận tốc canô ngược dòng là $v_1 - v_2$

Từ đó ta có $v_{xuoi} + v_{nguoc} = 2.v_{thuc}$.

Bài 34. Một ca nô chạy xuôi dòng một khúc sông dài $72(km)$, rồi chạy ngược dòng khúc sông ấy $64(km)$ hết tất cả $7h$. Nếu ca nô chạy xuôi dòng $120(km)$ rồi chạy ngược dòng $32(km)$ cũng hết $7h$. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của nước.

Lời giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô là $x(km/h)$

Gọi vận tốc của nước là $y(km/h)(x, y > 0)$

Vận tốc ca nô khi xuôi dòng là $x + y \Rightarrow t_{xuôi} = \frac{72}{x+y}(h)$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng là $x - y \Rightarrow t_{nguoc} = \frac{64}{x-y}(h)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{72}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 7 \\ \frac{120}{x+y} + \frac{32}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy vận tốc riêng của canô là $20(km/h)$ và vận tốc của dòng nước là $4(km/h)$

Bài 35. Một chiếc thuyền xuôi dòng và ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4 giờ 30 phút. Biết thời gian thuyền xuôi dòng 5km bằng thời gian ngược dòng 4km. Tính vận tốc của dòng nước?

Lời giải

Gọi x là vận tốc của thuyền trong nước yên lặng ($x>0$)

y là vận tốc của dòng nước ($y>0$)

Thời gian xuôi dòng 40km là $\dfrac{40}{x+y}$ và ngược dòng là $\dfrac{40}{x-y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{40}{x+y}+\dfrac{40}{x-y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{5}{x+y}=\dfrac{4}{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ x-y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy vận tốc của dòng nước là $2\left(km/h\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 36. Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau $85km$ và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng nước là $3km/h$. (vận tốc thật của ca nô không đổi).

Lời giải

Gọi vận tốc thật của ca nô đi xuôi dòng là $x\left(km/h\right)\left(x>0\right)$

Vận tốc thật của ca nô đi ngược dòng là $y\left(km/h\right)\left(y>3\right)$

Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x+3\left(km/h\right)$

Vận tốc ca nô ngược dòng là $y-3\left(km/h\right)\Rightarrow(x+3)-(y-3)=9$ (1)

Quãng đường ca nô xuôi dòng là $\dfrac{5}{3}(x+3)\ \left(km\right)$

Quãng đường ca nô ngược dòng là $\dfrac{5}{3}(y-3)\Rightarrow\dfrac{5}{3}(x+3)+\dfrac{5}{3}(y-3)=85$ (2)

Từ $\left(1\right)\left(2\right)\Rightarrow x=27;y=24$

Bài 37. Một ca nô xuôi dòng 78km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dong 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Lời giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x>0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y>0$

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x+y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\dfrac{78}{x+y}$ (giờ).

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x-y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\dfrac{44}{x-y}$ (giờ).

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{78}{x+y}+\frac{44}{x-y}=5$ (1).

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình:

$\frac{13}{x+y}+\frac{11}{x-y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{78}{x+y}+\frac{44}{x-y}=5\\ \frac{13}{x+y}+\frac{11}{x-y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=26\\ x-y=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\ y=2\end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Bài 38. Một tàu tuần tra chạy ngược dòng $6km$. Sau đó chạy xuôi dòng $48km$ trên cùng một dòng song có vận tốc của dòng nước là $2(km/h)$. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Lời giải

Cách 1:

Gọi thời gian tàu chạy xuôi dòng là $t_1(h)$

Gọi thời gian tàu chạy ngược dòng là $t_2(h)$

Gọi V là vận tốc của tàu khi nước yên lặng, ta có: $t_1+1=t_2$ (1)

Vận tốc xuôi dòng là: $V_{xuôi}=\frac{48}{t_1}$

Vận tốc ngược dòng là: $V_{nguoc}=\frac{60}{t_2}$

Ta có: $V_{xuôi}=V_{thuc}+2\Leftrightarrow\frac{48}{t_1}=V+2$

$\Leftrightarrow\frac{48}{t_1}=V+2;V_{nguoc}=V_{thuc}-2\Leftrightarrow\frac{60}{t_2}=V-2$

$\Rightarrow\frac{60}{t_2}+2=\frac{48}{t_1}-2\Leftrightarrow\frac{60}{t_2}-\frac{48}{t_1}=-4(2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{60}{t_2}-\frac{48}{t_1}=-4\\ t_2-t_1=1\end{cases}\Rightarrow 4t_1^2+16t_1^2-48=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-6\\ t_1=2\end{array}\right.\Rightarrow V=22(km/h)$

Cách 2:

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là $x(km/h)(x>2)$

Vận tốc xuôi dòng là $x+2(km/h)\Rightarrow$ thời gian xuôi dòng là $\frac{48}{x+2}(h)$

Vận tốc ngược dòng là $x-2\left(km/h\right)$ $\Rightarrow$thời gian ngược dòng là $\dfrac{60}{x-2}\left(h\right)$

Theo đầu bài ta có phương trình: $\dfrac{48}{x+2}+1=\dfrac{60}{x-2}\Leftrightarrow x=22$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là $22\left(km/h\right)$

Bài 39. Một ca nô chạy trên song trong 8 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc song đó, ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi

Lời giải

Gọi x là vận tốc xuôi dòng ($x>0$)

Gọi y là vận tốc ngược dòng ($y>0$)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{81}{x}+\dfrac{105}{y}=8\\ \dfrac{54}{x}+\dfrac{42}{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=27\\ y=21\end{cases}$ (thỏa mãn).

DẠNG 5
TOÁN CÔNG VIỆC

Có rất nhiều cách phân tích đề bài nhưng ở đây dùng cách phân tích bằng cách lập bảng, như sau:

	Thời gian hoàn thành công việc	**Năng suất làm việc trong 1 ngày *(1 giờ..)***
Hai đội *(2 vòi ..)*	***a***	$\frac{1}{a}$
Đội 1 *(vòi 1 ..)*	***x***	$\frac{1}{x}$
Đội 2 *(vòi 2 ..)*	***y***	$\frac{1}{y}$

- Nếu một đội (người) làm xong công việc trong x (đơn vị thời gian: Ngày, giờ, phút,...) thì một đơn vị thời gian đội (người) đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc (xem toàn bộ công việc là 1)
- Nếu một vòi nước chảy đầy bể trong x (đơn vị thời gian: Ngày, giừo, phút,...) thì một đơn vị thời gian vòi nước đó chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)
- Ta thường xem toàn bộ công việc là 1

Bài 40. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu mở vòi 1 chảy một mình trong 20 phút rồi khóa lại, mở tiếp vòi 2 chảy trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải

Gọi thời gian để vòi 1 chảy 1 mình đầy bể là: $x\,(h)$; $x > 0$.

Gọi thời gian để vòi 2 chảy 1 mình đầy bể là: $y\,(h)$; $y > 0$.

Một giờ vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể)

Một giờ vòi 2 chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể)

Một giờ cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{3}$ (bể)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{6x}=\frac{1}{24}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=12\end{cases}(TM)$$

Vậy vòi 1 chảy 1 mình đầy bể là: $4\,(h)$. Vòi 2 chảy 1 mình đầy bể là: $12\,(h)$.

Bài 41. Hai ban An và Bình cùng may khẩu trang để ủng hộ đia phương đang có dịch bệnh Covid-19, thì mất hai ngày mới hoàn thành công việc. Nếu chỉ có một mình bạn An làm việc trong 4 ngày rồi nghi và bạn Bình làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Hỏi mỗi người làm riêng một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Lời giải

Gọi thời gian An làm riêng một mình thì hoàn thành công việc là x (ngày, $x>4$)

Gọi thời gian Bình làm riêng một mình thì hoàn thành công việc là y (ngày, $y>1$)

Theo bài dễ dàng ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}(t/m)$

Bài 42. Một đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tiếp tục làm phần việc còn lại. Kể từ khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất của đội B tăng gấp đôi, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian đội A và đội B làm một mình xong công việc lần lượt là $x,\ y$ (ngày).

ĐK $x,\ y>12$

Mỗi ngày, đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Mỗi ngày, đội B làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Mỗi ngày, hai đội làm được $\frac{1}{12}$ công việc

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ (1)

Trong 8 ngày làm chung, hai đội làm được $\frac{2}{3}$ công việc

Trong 8 ngày tiếp theo, do tăng năng suất gấp đôi nên đội B làm được $\frac{16}{y}$ công việc

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}+\frac{16}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{2}{3}+\frac{16}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{16}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ y=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\ y=48\end{cases}$ $(TMDK)$

Vậy thời gian đội A và đội B làm một mình xong công việc lần lượt là $16; 48$ (ngày).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 43. Để hoàn thành một công việc, nếu hai tổ cùng làm chung thì hết 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một tiếp tục làm và đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sẽ hoàn thành công việc này trong thời gian bao nhiêu?

Lời giải

Gọi thời gian tổ một làm riêng và hoàn thành công việc là x (giờ, $x>6$).

Gọi thời gian tổ hai làm riêng và hoàn thành công việc là y (giờ, $y>6$)

Mỗi giờ tổ một làm được $\frac{1}{x}$ (phần công việc)

Mỗi giờ tổ hai làm được $\frac{1}{y}$ (phần công việc)

Biết hai tổ làm chung trong 6 giờ thì hoàn thành được công việc nên ta có phương trình: $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$. (1).

Thực tế để hoàn thành công việc này thì tổ hai làm trong 2 giờ và tổ một làm trong $2+10=12$ (giờ), ta có phương trình: $\frac{12}{x}+\frac{2}{y}=1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1\\ \frac{12}{x}+\frac{2}{y}=1\end{cases}$.

Giải hệ ta được: $\begin{cases}x=15\\ y=10\end{cases}$ thỏa mãn điều kiện.

Nếu làm riêng thì tổ một hoàn thành công việc trong 15 giờ và tổ hai hoàn thành công việc trong 10 giờ.

Bài 44. Hai bạn A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Hỏi nếu A làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì B hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu? Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày.

Lời giải

Gọi thời gian A,B làm riêng xong công việc lần lượt là x, y (ngày), $x, y > 0$.

Mỗi ngày đội A làm riêng được $\frac{1}{x}$ công việc.

Mỗi ngày đội B làm riêng được $\frac{1}{y}$ công việc.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 18 \end{cases}$

Vì A làm 9 ngày xong nên 3 ngày làm được $\frac{1}{3}$ công việc.

Vì B làm 18 ngày xong nên 3 ngày B làm được $\frac{1}{18}$ công việc, số ngày làm xong $\frac{2}{3}$ công việc còn lại là $\frac{2}{3} : \frac{1}{18} = 12$ ngày.

Bài 45. Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi công nhân làm một mình thì trong bao lâu xong công việc

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là $x(h)(x > 0)$

Gọi thời gian người thứ hai làm xong công việc là $y(h)(y > 0)$

Trong 1(h) người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong 1(h) người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}$

Vậy thời gian người thứ nhất hoàn làm xong công việc là $24(h)$

thời gian người thứ hai hoàn làm xong công việc là $48(h)$.

Bài 46. Hai tổ công nhân cùng làm chung một công việc và dự định hoàn thành công việc trong 6 giờ. Nhưng khi làm chung được 5 giờ thì tổ 2 được điều động đi làm việc khác. Do cải tiến cách làm năng suất của tổ 1 tăng 1,5 lần nên tổ 1 đã hoàn thành nốt phần công việc còn lại trong 2 giờ. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi tổ làm một mình thì sau bao lâu mới xong công việc?

Lời giải

Gọi thời gian để một minh tổ 1 làm xong công việc là $x\left(h\right)$

Thời gian một mình tổ 2 làm xong công việc là $y\left(h\right)\left(x>6;y>6\right)$

Trong 1 giờ tổ 1 làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong 1(h) người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc $\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)

Trong 5 giờ cùng làm cả hai tổ làm được $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Trong 2(h) tổ 1 làm với năng suất 1,5 lần nên được: $2.\frac{1,5}{x}=\frac{3}{x}$ công việc

$$\Rightarrow 5(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})+\frac{3}{x}=1(2)\Rightarrow \begin{cases} x=18(h) \\ y=9(h) \end{cases}$$

Vậy thời gian tổ một một mình làm xong công việc là $18\left(h\right)$

Vậy thời gian tổ một một mình làm xong công việc là $9\left(h\right)$

Bài 47. Hưởng ứng chiến dịch tình nguyện " Mùa hè xanh" để giúp học sinh vùng cao đến trường thuận lợi hơn, hai tổ thanh niên A và B tham gia sửa một đoạn đường. Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sửa xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Lời giải

Gọi x (giờ) là thời gian tổ thanh niên A sửa xong đoạn đường đó một mình.

Gọi y (giờ) là thời gian tổ thanh niên B sửa xong đoạn đường đó một mình.

Điều kiện: $x,y>0$.

Trong 1 giờ, tổ thanh niên A làm riêng sửa được $\frac{1}{x}$ đoạn đường và tổ thanh niên B làm riêng sửa được $\frac{1}{y}$ đoạn đường.

Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ là xong việc nên ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}\quad\left(1\right)$.

Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ nên ta có phương trình $y-x=12\quad\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8} \\ y-x=12 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{8} \\ y=x+12 \end{cases}\quad\left(*\right)$.

Xét phương trình $(*) \Rightarrow 8.(x+12)+8x = x(x+12)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-96=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12(TM) \Rightarrow y=24(TM) \\ x=-8(L) \end{array}\right.$

Vậy: Thời gian tổ thanh niên A sửa xong đoạn đường đó một mình là 12 giờ.

Thời gian tổ thanh niên B sửa xong đoạn đường đó một mình là 24 giờ.

Bài 48. Hai máy cày có công suất khác nhau cùng làm việc đã cày được $\frac{1}{6}$ cánh đồng trong 15 giờ. Nếu máy 1 cày trong 12 giờ, máy 2 cày trong 20 giờ thì cả hai máy cày được 20% cánh đồng. Hỏi nếu mỗi máy làm việc riêng thì sẽ cày xong cánh đồng trong bao lâu?

Lời giải

Gọi $x(h)$, $y(h)$ là thời gian để máy thứ nhất, thứ hai cày xong cánh đồng $(x, y > 90)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{15}{x}+\frac{15}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{12}{x}+\frac{20}{y}=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=200 \end{cases}$

Bài 49. Cho một bể cạn (không có nước). Nếu hai vòi nước cùng được mở để chảy vào bể này thì sẽ đầy bể sau 4 giờ 48 phút. Nếu mở riêng từng vòi chảy vào bể thì thời gian vòi một chảy đầy bể sẽ ít hơn thời gian vòi hai chảy đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải

Đổi 4 giờ 48 phút = $4\frac{4}{5}$ giờ $=\frac{24}{5}$ giờ

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể trong x (giờ, $x>\frac{24}{5}$)

Gọi thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể trong y (giờ, $y>\frac{24}{5}$)

Biết hai vòi cùng chảy thì sau $\frac{24}{5}$ giờ thì đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{24}{5x}+\frac{24}{5y}=1$ (1)

Nếu chảy riêng thì vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi hai là 4 giờ nên ta có phương trình: $x=y-4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{24}{5x}+\frac{24}{5y}=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vòi một chảy một mình trong 8 giờ thì đầy bể và vòi hai chảy một mình trong 12 giờ thì đầy bể.

Bài 50. Hai máy bơm nước vào ruộng. Nếu cho máy thứ nhất bơm suốt trong 8 giờ mới mở máy thứ hai cùng bơm them 4 giờ nữa mới đầy bể. Nếu cho máy bơm thứ nhất bơm suốt trong 16 giờ 30 phút mới mở máy thứ hai cùng bơm them 3 giờ nữa thì mới đầy ruộng. Nếu dung một máy bơm thì phải bơm trong bao lâu nước mới đầy ruộng?

Lời giải

Gọi thời gian máy 1 bơm đầy bể là $x(h)$

Gọi thời gian máy 2 bơm đầy bể là $y(h)(x > y > 1)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{8}{x}+4(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=1 \\ \dfrac{21}{2x}+3(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=12 \end{cases}$

Vậy thời gian máy 1 bơm đầy bể là $18(h)$

thời gian máy 2 bơm đầy bể là $12(h)$.

Bài 51. Hai vòi nước cùng chảy vào 1 cái bể không có nước trong 6(h) thì đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy riêng cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy đầy bể trong bao lâu?

Lời giải

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ y-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases}$

Vậy vòi thứ nhất chảy trong 10 giờ

Vòi thứ hai chảy trong 15 giờ thì đầy bể.

DẠNG 6
TOÁN VỀ TỈ SỐ PHẦN TRĂM

- Chú ý rằng: $a\% = \frac{a}{100}$
- Tỉ số của hai số a và b là $\frac{a}{b}$

Bài 52. Nhằm đáp ứng nhu cầu sử dụng khẩu trang chống dịch COVID-19, theo kế hoạch, 1 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720000 khẩu trang. Do áp dụng kĩ thuật mới nên I đã sản xuất vượt kế hoạch 15% và tổ II vượt kế hoạch 12%, vì vậy họ đã làm được 819000 khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch số khẩu trang của mỗi tổ sản xuất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số khẩu trang tổ I sản xuất theo kế hoạch.

Gọi y là số khẩu trang tổ II sản xuất theo kế hoạch.

(Điều kiện: $x,y \in N$; $0 < x,y < 720000$)

Theo dự định: $x + y = 720000$

Theo thực tế:

Số khẩu trang tổ I làm được: $115\%.x$ hay $1.15.x$ (khẩu trang)

Số khẩu trang tổ II làm được: $112\%.y$ hay $1.12.y$ (khẩu trang)

Ta có phương trình $1,15.x + 1,12.y = 819000$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720000 \\ 1,15.x + 1,12.y = 819000 \end{cases}$

Giải tìm được $\begin{cases} x = 420000 \\ y = 300000 \end{cases}$ (Nhận)

Vậy theo kế hoạch tổ I sản xuất 420000 khẩu trang, tổ II sản xuất 300000 khẩu trang

Bài 53. Trong một kỳ thi, hai trường A,B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả là hai trường có tổng cộng 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có 97% và trường B có 96% học sinh dự thi trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu thí sinh dự thi?

Lời giải

Gọi số thí sinh tham dự của trường A và trường B lần lượt là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 350\right)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=350 \\ \dfrac{97}{100}x+\dfrac{96}{100}y=338 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=200 \\ y=150 \end{cases}$

Bài 54. Có hai loại quặng sắt, quặng loại A chứa 60% sắt, quặng loại B chứa 50% sắt. Người ta trộn một lượng quặng loại A với một lượng quặng loại B thì được hỗn hợp chứa $\dfrac{8}{15}$ sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại A và lấy giảm hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại B thì được hỗn hợp quặng chứa $\dfrac{17}{30}$ sắt. Tính khối lượng quặng mỗi loại đem trộn lúc đầu.

Lời giải

Gọi khối lượng quặng đem trộn lúc đầu quặng loại A là x (tấn), quặng loại B là y (tấn), $x > 0, y > 10$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{60}{100}x+\dfrac{50}{100}y=\dfrac{8}{15}(x+y) \\ \dfrac{60}{100}(x+10)+\dfrac{50}{100}(y-10)=\dfrac{17}{30}(x+10+y-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases}$ (thỏa mãn).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 55. Hai tổ sản xuất được giao làm 800 sản phẩm trong 1 thời gian quy định, nhờ tăng năng suất lao động, tổ 1 vượt mức 10%, tổ hai vượt mức 20% nên cả hai tổ đã làm được 910 sản phẩm. Tính số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của mỗi tổ?

Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ 1,2 là theo kế hoạch là x, y $(x, y \in N^*; x, y < 800)$

$\Rightarrow x+y=800$ (1)

Nhờ tăng năng suất lao động, tổ 1 vượt mức 10% tức là: $\dfrac{10}{100}.x$

Nhờ tăng năng suất lao động, tổ 2 vượt mức 10% tức là: $\dfrac{20}{100}.y$

Vì cả hai tổ làm được 910 sản phẩm nên: $(x+\dfrac{10}{100}.x)+(y+\dfrac{20}{100}.y)=910(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \begin{cases} x+y=800 \\ 2+2y=910 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=500 \\ y=300 \end{cases}$

Vậy số sản phẩm tổ 1 làm được là 500 (sản phẩm) số sản phẩm tổ 2 làm được là 300 (sản phẩm)

Bài 56. Trên địa bàn thành phố X, có 1850 học sinh lớp 9 đăng ký dự thi tuyển sinh vào lớp 10 của hai trường THPT A và B, kết quả có 680 học sinh trúng tuyển. Biết tỉ lệ trúng tuyển của trường A là 30% và trường B là $80\%.$ Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh lớp 9 đăng ký dự thi vào lớp 10.

Lời giải

Gọi số học sinh đăng ký vào trường A và B lần lượt là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}, x < 1850, y < 1850\right)$

Do cả hai trường đăng ký 1850 học sinh nên ta có: $x + y = 1850\left(1\right)$

Vì tỉ lệ trúng tuyển của trường A và B lần lượt là $30\%\&80\%$ nên ta có phương trình

$0,3x + 0,8 = 680\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1850 \\ 0,3x + 0,8y = 680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1600 \\ y = 250 \end{cases}$

Vậy số học sinh đăng ký của hai trường A và B lần lượt là $1600hs$; $250hs$

Bài 57. Để chuẩn bị trao thưởng cho học sinh giỏi cuối năm học, trường THCS X cần mua 2000 quyển vở và 400 cây bút để làm phần thưởng. Nhà trường dự tính để mua với giá niêm yết sẽ cần 18 triệu 400 nghìn đồng. Vì mua với số lượng lớn nên đại lý bán quyết định giảm giá 5% cho mỗi quyển vở và 6% cho mỗi cây bút, vì thế nhà trường chỉ cần trả 17 triệu 456 nghìn đồng. Tính giá tiền niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút

Lời giải

Gọi giá niêm yết của mỗi quyển vở là x (đồng), mỗi cây bút là y (đồng)

$\left(x > 0, y > 0\right)$

Vì mua 2000 quyển vở và 400 cây bút với giá niêm yết sẽ cần 18 triệu 400 nghìn đồng nên ta có phương trình $2000x + 400y = 18\,400\,000\left(1\right)$

Giá mỗi quyển vở sau khi giảm 5% là : $0,95x($ đồng)

Giá mỗi cây bút sau khi giảm 6% là $0,94y$ (đồng)

Vì nhà trường chỉ cần trả 17 triệu 456 nghìn đồng nên ta có phương trình :

$0,95.2000x + 0,94.400y = 17456000 \Leftrightarrow 190x + 376y = 17456000(2)$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} 2000x + 400y = 18400000 \\ 1900x + 376y = 17456000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8000 \\ y = 6000 \end{cases}(tm)$

Vậy giá niêm yết mỗi quyển vở là 8000 đồng, mỗi cây bút là 6000 đồng

Bài 58. Một máy giặt và một tivi có giá tổng cộng $28\,690\,000$ đồng. Sau khi giảm giá 10% cho một máy giặt và 15% cho một tivi, tổng số tiền mua hai sản phẩm này chỉ còn lại 24961000 đồng. Tính giá tiền mỗi sản phẩm trước khi giảm giá.

Lời giải

Gọi giá tiền của máy giặt và ti vi là x, y (ngàn đồng) $(0 < x, y < 28690)$

Vì giảm giá 10% cho một máy giặt và 15% cho một tivi, tổng số tiền mua hai sản phẩm này chỉ còn lại 24961000 đồng nên ta có phương trình :

$0,9x + 0,85y = 24961 (1)$

Và một máy giặt và một tivi có giá tổng cộng 28690000 đồng nên ta có phương trình :

$x + y = 28690(2)$. Từ (1),(2) ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y = 28690 \\ 0,9x + 0,85y = 24961 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11490 \\ y = 17200 \end{cases} (tm)$$

Vậy giá tiền 1 máy giặt , 1 ti vi lần lượt là 11490000 đồng, 17200000 đồng

Bài 59. Hưởng ứng ngày ‘‘Ngày sách và văn hóa đọc Việt Nam năm 2022’’, một nhà sách đã có chương trình giảm giá cho tất cả loại sách. Bạn Nam đến mua một cuốn sách tham khảo môn Toán và một cuốn sách tham khảo môn Ngữ Văn với tổng giá ghi trên hai quyển sách đó là 195000 đồng. Nhưng do quyển sách tham khảo môn Toán được giảm giá 20% và quyển sách tham khảo môn Ngữ văn được giảm giá 35% nên bạn Nam chỉ phải trả cho nhà sách 138000 đồng để mua hai quyển sách đó. Hỏi giá ghi trên mỗi quyển sách tham khảo đó là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi giá ghi trên hai quyển sách tham khảo môn Toán và môn Ngữ văn lần lượt là x, y (nghìn đồng) (ĐK: $x, y > 0$)

Do tổng giá ghi trên hai quyển sách đó là 195000 đồng nên ta có phương trình

$x + y = 195 \quad (1)$

Giá tiền quyển sách tham khảo môn Toán được giảm giá 20% là $(1-20\%)x = 0,8x$ (nghìn đồng)

Giá tiền quyển sách tham khảo môn Ngữ văn được giảm giá 35% là $(1-35\%)y = 0,65y$ (nghìn đồng)

Theo bài ra ta có phương trình: $0,8x + 0,65y = 138 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 195 \\ 0.8x + 0,65y = 138 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.8x + 0.8y = 156 \\ 0.8x + 0,65y = 138 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15y = 18 \\ x + y = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 \\ x + 120 = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 \\ x = 75 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện $x = 75$ và $y = 120$ (thỏa mãn)

Vậy giá ghi trên quyển sách tham khảo môn Toán là 75000 đồng và giá ghi trên quyển sách tham khảo môn Ngữ văn là 120000 đồng.

Bài 60. Trong tháng đầu, hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy, sang tháng thứ hai, tổ 1 vượt mức 15% và tổ 2 vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng một mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Lời giải

	2 tổ	Tổ 1	Tổ 2
Tháng 1	800	x	y
Tháng 2	945	$115\%.x$	$120\%.y$
Phương trình	$\begin{cases} x+y=800 \\ 115\%.x+120\%.y=945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=500 \end{cases}$		

Bài 61. Một dung dịch chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitơric .Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100lít dung dịch 50% axit nitơric?

Đáp số: $(20;80)$

Bài 62. Một hợp kim gồm đồng và kẽm trong đó có 5 gam kẽm. Nếu thêm 15 gam kẽm vào hợp kim này thì được một hợp kim mới mà trong đó lượng đồng đã giảm so với lúc đầu là 30%. Tìm khối lượng ban đầu của hợp kim?

Đáp số: 25 gam hoặc 10 gam.

Bài 63. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu động , kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai . Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại .

Đáp số: $(0,5;1,5)$

Bài 64. Hai anh Quang và Hùng góp vốn cùng kinh doanh . Anh Quang góp 15 triệu đồng . Anh Hùng góp 13 triệu đồng . Sau một thời gian được lãi 7 triệu đồng . Lãi được chia tỉ lệ với vốn đã góp . Hãy tính tiền lãi mỗi anh được hưởng .

Đáp số: (3750 000 ; 3250 000)

Bài 65. Giả sử giá tiền điện hàng tháng được tính theo bậc thang như sau:

Bậc 1: Từ $1kWh$ đến $100kWh$ thì giá điện là: 1500đ/kWh

Bậc 2: Từ $101kWh$ đến $150kWh$ thì giá điện là: 2000đ/kWh

Bậc 3: Từ $151kWh$ trở lên thì giá điện là: 4000đ/kWh

(Ví dụ: Nếu dùng $170kWh$ thì có $100kWh$ tính theo giá bậc 1, có $50kWh$ tính theo giá bâck 2 và có $20kWh$ tính theo giá bậc 3).

Tháng 4 năm 2021 tổng số tiền điện của nhà bạn A và nhà bạn B là 560000 đ. So với tháng 4 thì tháng 5 tiền điện của nhà bạn A tăng 30%, nhà bạn B tăng 20%, do đó tổng số tiền điện của cả hai nhà trong tháng 5 là 701000 đ. Hỏi tháng 4 nhà bạn A phải trả bao nhiêu tiền điện và dùng hết bao nhiêu kWh ? (biết rằng số tiền điện ở trên không tính thuế giá trị gia tăng).

Lời giải

Giả sử giá tiền điện hàng tháng được tính theo bậc thang như sau:

Bậc 1: Từ $1kWh$ đến $100kWh$ thì giá điện là: 1500đ/kWh

Bậc 2: Từ $101kWh$ đến $150kWh$ thì giá điện là: 2000đ/kWh

Bậc 3: Từ $151kWh$ trở lên thì giá điện là: 4000đ/kWh

(Vi dụ: Nếu dùng $170kWh$ thi có $100kWh$ tính theo giá bậc 1, có $50kWh$ tính theo giá bâck 2 và có $20kWh$ tính theo giá bậc 3).

Tháng 4 năm 2021 tổng số tiền điện của nhà bạn A và nhà bạn B là 560000 đ. So với tháng 4 thì tháng 5 tiền điện của nhà bạn A tăng 30%, nhà bạn B tăng 20%, do đó tổng số tiền điện của cả hai nhà trong tháng 5 là 701000 đ. Hỏi tháng 4 nhà bạn A phải trả bao nhiêu tiền điện và dùng hết bao nhiêu kWh ? (biết rằng số tiền điện ở trên không tính thuế giá trị gia tăng).

Gọi số tiền điện nhà bạn A phải trả trong tháng 4 là $x(x > 0)$ (đồng)

Số tiền điện nhà bạn B phải trà trong tháng 4 là $y(y > 0)$ (đồng)

Theo bài ta có tổng số tiền điện trong tháng 4 nhà bạn A và nhà bạn B phải trả là 560000 nên ta có phương trình $x + y = 560000$ (1)

Số tiền điện trong tháng 5 nhà bạn A phải trả là $x + 30\%x = 1,3x$ (đồng)

Số tiền điện trong tháng 5 nhà bạn B phải trả là: $y + 20\%y = 1,2y$ (đồng)

Theo bài ta có tổng số tiền điện trong tháng 5 nhà bạn A và nhà bạn B phải trả là 701000 nên ta có phương trình: $1,3x + 1,2y = 701000$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 560000 \\ 1,3x + 1,2y = 701000 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 560000 - y \\ 1,3(560000 - y) + 1,2y = 701000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 560000 - y \\ 728000 - 0,1y = 701000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 560000 - y \\ 0,1y = 27000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 290000 \\ y = 270000 \end{cases}$$

Vậy số tiền điện nhà bạn A phải trả trong tháng 4 là 290000 đồng.

Nhận thấy: $290000 = 100.1500 + 50.2000 + 10.4000$

Vậy số điện nhà bạn A dùng trong tháng 4 là $100 + 50 + 10 = 160(kWh)$.

DẠNG 7
TOÁN THỰC TẾ

Bài 66. Trong một phòng học có một số bàn, nếu xếp mỗi bàn 3 học sinh thì 6 học sinh không có chỗ ngồi, nếu xếp mỗi bàn 4 học sinh thì thừa 1 bàn. Hỏi lớp đó có bao nhiêu bàn và bao nhiêu học sinh.

Lời giải

- Gọi số bàn là $x\left(x \in Z^{+}\right)$

- Gọi số học sinh là $y\left(y \in Z^{+}\right)$

- Nếu xếp mỗi bàn 3 học sinh thì số học sinh là $3x$

Còn 6 học sinh không có chỗ nên số học sinh là $3x+6$

$\Rightarrow 3x+6=y \quad (1)$

- Nếu xếp mỗi bàn 4 học sinh thì thừa 1 bàn nên số học sinh là: $4(x-1) \Rightarrow 4(x-1)=y \quad (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow x=10; y=36$

Vậy lớp đó có 10 bàn và 36 học sinh

Bài 67. Ban đầu, khán đài của nhà thi đấu các nội dung thuộc môn Bơi tại SEA Games chứa 1188 ghế được xếp thành các dãy, số lượng ghế ở các dãy bằng nhau. Để phục vụ đông đảo khán giả hơn, khán đài sau đó đã được lắp thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy được lắp thêm 4 ghế. Vì thế, khán đài được tăng thêm 254 ghế. Tìm số dãy ghế ban đầu của khán đài.

Lời giải

Gọi số dãy ghế ban đầu của khán đài là x (dãy) $\left(x \in N^*\right)$

Số ghế mỗi dãy ban đầu là y (ghế) $\left(y \in \mathbb{N}^*\right)$

Vì ban đầu, khán đài của Nhà thi đấu các nội dung thuộc môn Bơi tại SEA Games chứa 1188 ghế nên ta có phương trình : $xy=1188(1)$

Lúc sau :

Số dãy ghế là $x+2$ (dãy), số ghế ở mỗi dãy là $y+4$ (ghế)

Vì, lúc sau, khán đài được tăng thêm 254 ghế nên ta có phương trình :

$(x+2)(y+4)=xy+254(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}xy=1188\\(x+2)(y+4)=xy+254\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1188\\xy+4x+2y+8=xy+254\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1188\\4x+2y=246\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1188\\2x+y=123\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1188\\y=123-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(123-2x)=1188\\y=123-2x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{99}{2}(ktm)\\x=12(tm)\end{array}\right.$$

Vậy số dãy ghế ban đầu của khán đài là 12 dãy

Bài 68. Bạn A dự định mua $2kg$ quả xoài và $2kg$ quả vải hết 100 000 đồng. Thực tế, A mua 3kg quả xoài và 1kg quả vải hết $90\,000$ đồng. Tính giá tiền của 1kg xoài và giá của 1kg quả vải

Lời giải

Gọi giá tiền của 1kg quả xoài là x (đồng)

Giá tiền của 1kg quả vải là y (đồng) $(x>0, y>0)$

Bạn A dự định mua $2kg$ quả xoài và $2kg$ quả vải hết 100 000 đồng

$\Rightarrow 2x+2y=100\,000 \Leftrightarrow x+y=50\,000(1)$

Thực tế, A mua 3kg quả xoài và 1kg quả vải hết $90\,000$ đồng

$\Rightarrow 3x+y=90\,000(2)$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=50\,000\\3x+y=90\,000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\,000\\y=30\,000\end{cases}(tm)$

Vậy 1kg xoài giá $20\,000$ đồng và giá 1kg vải giá $30\,000$ đồng .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 69. Lớp 9A giao cho An đi mua bánh và kẹo để tổ chức liên hoan. An mua tất cả 15 hộp bánh và 5 túi kẹo với số tiền phải trả là 850 nghìn đồng. Biết rằng, giá mỗi hộp bánh là như nhau, giá mỗi túi kẹo là như nhau và giá mỗi hộp bánh hơn giá mỗi túi kẹo là 10 nghìn đồng. Tính giá tiền để mua một hộp bánh và giá tiền để mua một túi kẹo.

Lời giải

Gọi giá tiền 1 hộp bánh là x (nghìn đồng) $(x>0)$

Giá tiền 1 túi kẹo là y (nghìn đồng) $(y>0)$

An mua tất cả 15 hộp bánh và 5 túi kẹo với số tiền phải trả là 850 nghìn đồng.

$15x+5y=850(1)$

Vì giá mỗi túi kẹo là như nhau và giá mỗi hộp bánh hơn giá mỗi túi kẹo là 10 nghìn đồng nên ta có phương trình $x-y=10(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}15x+5y=850\\x-y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15x+5y=850\\5x-5y=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}20x=900\\y=x-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=45\\y=35\end{cases}(tmdk)$$

Vậy giá tiền 1 hộp bánh và 1 túi kẹo lần lượt là 45000 đồng và 35000 đồng.

Bài 70. Một tổ may gồm 47 công nhân cả nam và nữ được giao nhiệm vụ may 350 chiếc áo cho cổ động viên để cổ vũ đội tuyển U23 Việt Nam tại SEA GAME 31. Để hoàn thành nhiệm vụ, mỗi công nhân nam may 8 chiếc áo, mỗi công nhân nữ may 7 chiếc áo.Tính số công nhân nam và số công nhân nữ của tổ may đó.

Lời giải

Gọi số công nhân nam nữ lần lượt là x, y (người) $\left(x, y\in\mathbb{N}^*, x; y<47\right)$

Vì tổ may gồm 47 công nhân $\Rightarrow x+y=47(1)$

Và mỗi công nhân nam may 8 chiếc áo, mỗi công nhân nữ may 7 chiếc áo, may được tổng cộng 350 chiếc áo nên ta có phương trình $8x+7y=350(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=47\\8x+7y=350\end{cases}\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow\begin{cases}x=26\\y=21\end{cases}(tmdk)$$

Vậy tổ có 26 công nhân nam và 21 công nhân nữ

Bài 71. Một đoàn khách du lịch gồm 40 người dự định tham quan đỉnh núi Bà Đen, nóc nhà Đông Nam Bộ bằng cáp treo khứ hồi (gồm lượt lên và lượt xuống). Nhưng khi tới nơi có 5 bạn trẻ muốn khám phá bằng đường bộ khi leo lên còn lúc xuống sẽ đi cáp treo để trải nghiệm nên 5 bạn chỉ mua vé lượt xuống, do đó đoàn đã chi ra $9.450.000$ đồng để mua vé. Hỏi giá cáp treo khứ hồi và giá vé 1 lượt là bao nhiêu? Biết rằng giá vé 1 lượt rẻ hơn giá vé khứ hồi là 110.000 đồng.

Lời giải

Gọi giá vé cáp treo khứ hồi và giá vé cáp treo 1 lượt lần lượt là x và y (đồng),

$(x>y>0, x>110.000)$.

Vì giá vé cáp treo 1 lượt rẻ hơn giá vé cáp treo khứ hồi là 110.000 đồng nên ta có phương trình: $x-y=110.000$

Có $40-5=35$ người mua vé cáp treo khứ hồi và 5 người mua vé cáp treo 1 lượt nên ta có phương trình: $35x+5y=9.450.000\Leftrightarrow 7x+y=1.890.000(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y=110.000\\7x+y=1.890.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=2.000.000\\y=x-110.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=250.000(tm)\\y=250.000-110.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=250.000\\y=140.000(tm)\end{cases}$$

Vậy giá vé cáp treo khứ hồi là 250.000 đồng và giá vé cáp treo 1 lượt là 140.000 đồng.

Bài 72. Theo các chuyên gia về sức khỏe, người trưởng thành cần đi bộ từ 5000 bước mỗi ngày sẽ rất tốt cho sức khỏe. Để rèn luyện sức khỏe, anh Sơn và chị Hà đề ra mục tiêu mỗi ngày một người phải đi bộ ít nhất 6000 bước. Hai người cùng đi bộ ở công viên và thấy rằng, nếu cùng đi trong 2 phút thì anh Sơn bước nhiều hơn chị Hà 20 bước. Hai người cùng giữ nguyên tốc độ đi như vậy nhưng chị Hà đi trong 5 phút thì lại nhiều hơn anh Sơn đi trong 3 phút là 160 bước. Hỏi mỗi ngày anh Sơn và chị Hà cùng đi bộ trong 1 giờ thì họ đã đạt được số bước tối thiểu mà mục tiêu đề ra hay chưa? (Giả sử tốc độ đi bộ hàng ngày của hai người không đổi).

Lời giải

Gọi số bước anh Sơn đi bộ trong 1 phút là x (bước) ($x \in N^*$).

Gọi số bước chị Hà đi bộ trong 1 phút là y (bước) ($y \in N^*$, $y < x$).

2 phút anh Sơn đi được 2x (bước)

2 phút chị Hà đi được 2y (bước)

Nếu đi cùng trong 2 phút thì anh Sơn đi nhiều hơn chị Hà 20 bước nên: $2x – 2y = 20$ (1)

3 phút anh Sơn đi được 3x (bước)

5 phút chị Hà đi được 5y (bước)

Do chị Hà đi trong 5 phút thì nhiều hơn anh Sơn đi trong 3 phút là 160 bước nên: $5y – 3x = 160$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-2y=20\\5y-3x=160\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=10\\5y-3x=160\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10+y\\5y-3(10+y)=160\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10+y\\2y=190\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10+y\\y=95\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=105\\y=95\end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra x = 105, y = 95

Mỗi ngày anh Sơn đi bộ trong 1 giờ nên số bước anh Sơn đi là 105.60 = 6300 (bước)

Mỗi ngày chị Hà đi bộ trong 1 giờ nên số bước chị Hà đi là 95.60 = 5700 (bước)

Vậy anh Sơn đạt được mục tiêu đề ra còn chị Hà thì không đạt được mục tiêu đề ra là 6000 bước mỗi ngày.

Bài 73. Đại hội Thể thao Đông Nam Á – SEA Games (South East Asian Games) là sự kiện thể thao được tổ chức 2 năm 1 lần với sự tham gia của các vận động viên trong khu vực Đông Nam Á. Việt Nam là chủ nhà của SEA Games 31 diễn ra từ ngày $12/5/2022$ đến ngày $23/5/2022$.

Ở môn bóng đá nam, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là $10, 9, 6, 4, 0$. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Lời giải

a) Nếu có 5 đội tham gia thi đấu, mỗi đội phải đấu với 4 đội còn lại nên với 5 đội tham gia thì có $5.4 = 20$ trận đấu. Nhưng mỗi trận đấu có 2 đội tham gia nên tổng số trận đấu khi có 5 đội tham gia là $\frac{5.4}{2} = 10$ trận đấu.

b) Tổng số điểm của các đội là $10 + 9 + 6 + 4 + 0 = 29$ điểm.

Gọi x là số trận thắng – thua và y là số trận hòa.

Vì có 10 trận nên ta có: $x + y = 10 (1)$

Mỗi trận thắng – thua có tổng số điểm là 3 và mỗi trận hòa có tổng số điểm là 2 nên ta có phương trình: $3x + 2y = 29 (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $x = 9$ và $y = 1$.

Mỗi đội có 4 trận đấu với các đội còn lại mà đội A có 10 điểm tức đội A thắng 3 trận hòa 1 trận. Đội B có 9 điểm tức thắng 3 trận thua 1 trận. Đội C có 6 điểm tức thắng 2 trận thua 2 trận. Đội D có 4 điểm tức thắng 1 trận hòa 1 trận. Đội E không có điểm tức thua hết 4 trận. Vậy trận hòa là của đội A và đội D.

CHƯƠNG 1
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 1
PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1.Phương trình tích

Để giải giải phương trình $(ax+b)(cx+d)=0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$ ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax+b=0$ và $cx+d=0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

2.Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình.**
- **Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:**

Bước 1: Tìm **điều kiện xác định** của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

DẠNG 1
PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN

Để giải giải phương trình $(ax+b)(cx+d)=0\ \ (a \neq 0, b \neq 0)$ ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax+b=0$ và $cx+d=0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

Bài 1. Giải các phương trình

a) $(x-3)(3x+2)=0$

b) $(x^2+2024)(6x-3)=0$

c) $\left(\frac{3}{4}x-2\right)\left(\frac{5}{3}x+1\right)=0$

d) $2\ \ x+4\ \ \ 2x-3\ =0$

Lời giải

a) $(x-3)(3x+2)=0$

Ta có $(x-3)(3x+2)=0$ nên $x-3=0$ hoặc $3x+2=0$

- $x-3=0$

  $x=3$

- $3x+2=0$

  $3x=-2$

  $x=-\frac{2}{3}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=3$ và $x=-\frac{2}{3}$

b) $(x^2+2024)(6x-3)=0$

Ta có $(x^2+2024)(6x-3)=0$ nên $x^2+2024=0$ hoặc $6x-3=0$

- $x^2+2024=0$

  Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2+2024>0$ nên do đó phương trình $x^2+2024=0$ vô nghiệm

- $6x-3=0$

  $6x=3$

  $x=\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{1}{2}$

c) $\left(\dfrac{3}{4}x-2\right)\left(\dfrac{5}{3}x+1\right)=0$

Ta có $\left(\dfrac{3}{4}x-2\right)\left(\dfrac{5}{3}x+1\right)=0$ nên $\dfrac{3}{4}x-2=0$ hoặc $\dfrac{5}{3}x+1=0$

- $\dfrac{3}{4}x-2=0$

$\dfrac{3}{4}x=2$

$x=\dfrac{8}{3}$

- $\dfrac{5}{3}x+1=0$

$\dfrac{5}{3}x=-1$

$x=-\dfrac{3}{5}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\dfrac{8}{3}$ và $x=-\dfrac{3}{5}$

d) $2\ \ x+4\ \ 2x-3\ =0$

Ta có $2\ \ x+4\ \ 2x-3\ =0$ nên $x+4=0$ hoặc $2x-3=0$

- $x+4=0$

$x=-4$

- $2x-3=0$

$2x=3$

$x=\dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-4$ và $x=\dfrac{3}{2}$

Bài 2. Giải các phương trình

a) $\left(x^2-9\right)\left(4-x\right)=0$

b) $5x+3\ \left(\dfrac{3x+11}{4}-\dfrac{x-7}{12}\right)=0$

Lời giải

a) $\left(x^2-9\right)\left(4-x\right)=0$

Ta có $(x^2-9)(4-x)=0$ nên $x^2-9=0$ hoặc $4-x=0$

- $x^2-9=0$

  $x^2=9$

  $x=-3$ hoặc $x=3$

- $4-x=0$

  $x=4$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-3$; $x=3$ và $x=4$

b) $5x+3\left(\frac{3x+11}{4}-\frac{x-7}{12}\right)=0$

$5x+3\left(\frac{9x+33-x+7}{12}\right)=0$

$5x+3\left(\frac{8x+40}{12}\right)=0$

$5x+3\left(\frac{2x+10}{3}\right)=0$

Ta có $5x+3\left(\frac{2x+10}{3}\right)=0$ nên $5x+3=0$ hoặc $\frac{2x+10}{3}=0$

- $5x+3=0$

  $5x=-3$

  $x=-\frac{3}{5}$

- $\frac{2x+10}{3}=0$

  $2x+10=0$

  $2x=-10$

  $x=-5$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-5$ và $x=-\frac{3}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x-3)(2x+1)=0$

b) $(5x-7)(2x-6)=0$

c) $(4x-10)(24+5x)=0$

d) $(3x-2)(x+1)=0$

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $(x-5)(3-2x)(3x+4)=0$

e) $(2x-1)(3x+2)(5-x)=0$

c) $(x+3)(2x+4)(x-5)=0$

d) $(x+1)(x+3)(x+5)(x-6)=0$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x^2(7x-3)=0$

b) $(2x+1)(-x^2-2)=0$

c) $\left(x^2+4\right)\left(2x-3\right)=0$

d) $\left(x+6\right)\left(\dfrac{x^2+3}{2}-1\right)=0$

e) $(x^2+x+1)(6-2x)=0$

f) $(8x-4)(-x^2+2x-2)=0$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\left(x+2\right)\left(\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{3-2x}{4}\right)=0$

b) $\left(3-2x\right)\left(\dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{x+3}{4}\right)=0$

c) $\left(4x-10\right)\left[\dfrac{4x-3}{5}-\dfrac{2(x+3)}{7}\right]=0$

d) $\left(x^2+1\right)\left[\dfrac{3(3-x)}{8}+\dfrac{2(5-x)}{3}\right]=0$

e) $\left(-2x^2-5\right)\left(\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{x-2}{3}\right)=0$

f) $\left(2x^2+3\right)\left(\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+5}{6}\right)=0$

DẠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN

Bài 7. Giải các phương trình

a) $2x\ \ 3x-1\ =\ 3x-1$

b) $3\ \ x-5\ \ \ x+2\ \ =x^2-5x$

c) $x-1\ \ \ 2x+3\ \ +2x=2$

d) $\dfrac{7-x}{2}+\dfrac{2}{3}\ \ x-7\ \ \ x-3\ \ =0$

Lời giải

a) $2x\ \ 3x-1\ =\ 3x-1$

$2x\ \ 3x-1\ -\ \ 3x-1\ \ =0$

$3x-1\ \ \ 2x-1\ \ =0$

Ta có $3x-1\ \ \ 2x-1\ \ =0$ nên $3x-1=0$ hoặc $2x-1=0$

- $3x-1=0$

  $3x=1$

  $x=\dfrac{1}{3}$

- $2x-1=0$

  $2x=1$

  $x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\dfrac{1}{3}$ và $x=\dfrac{1}{2}$

b) $3\ \ x-5\ \ \ x+2\ \ =x^2-5x$

$3\ \ x-5\ \ \ x+2\ \ -x\ \ x-5\ \ =0$

$x-5\ \left[3\ \ x+2\ \ -x\right]=0$

$x-5\ \ \ 2x+6\ \ =0$

Ta có $x-5\ \ \ 2x+6\ \ =0$ nên $x-5=0$ hoặc $2x+6=0$

- $x-5=0$

  $x=5$

- $2x+6=0$

  $2x=-6$

  $x=-3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-3$ và $x=5$

c) $x-1 \quad 2x+3 \quad +2x=2$

$x-1 \quad 2x+3 \quad +2x-2=0$

$x-1 \quad 2x+3 \quad +2 \quad x-1 \quad =0$

$x-1 \quad 2x+5 \quad =0$

Ta có $x-1 \quad 2x+5 \quad =0$ nên $x-1=0$ hoặc $2x+5=0$

- $x-1=0$

  $x=1$

- $2x+5=0$

  $2x=-5$

  $x=-\dfrac{5}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-\dfrac{5}{2}$

d) $\dfrac{7-x}{2}+\dfrac{2}{3} \quad x-7 \quad x-3 \quad =0$

$-3 \quad x-7 \quad +4 \quad x-7 \quad x-3 \quad =0$

$x-7 \quad \left[-3+4 \quad x-3 \quad\right]=0$

$x-7 \quad 4x-15 \quad =0$

Ta có $x-7 \quad 4x-15 \quad =0$ nên $x-7=0$ hoặc $4x-15=0$

- $x-7=0$

  $x=7$

- $4x-15=0$

  $4x=15$

  $x=\dfrac{15}{4}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=7$ và $x=\dfrac{15}{4}$

Bài 8. Giải các phương trình:

a) $x-3 \quad ^2 = \quad 2x+7 \quad ^2$

b) $2 \quad x+2 \quad ^2 - x^3-8=0$

c) $x-1 \quad x^2+5x-2 \quad -x^3+1=0$

d) $x+2 \quad 3-4x \quad =x^2+4x+4$

Lời giải

a) $(x-3)^2=(2x+7)^2$

$(x-3)^2-(2x+7)^2=0$

$\left[x-3-(2x+7)\right](x-3+2x+7)=0$

$(-x-10)(3x+4)=0$

Ta có $(-x-10)(3x+4)=0$ nên $-x-10=0$ hoặc $3x+4=0$

- $-x-10=0$

  $-x=10$

  $x=-10$

- $3x+4=0$

  $3x=-4$

  $x=-\dfrac{4}{3}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-10$ và $x=-\dfrac{4}{3}$

b) $2(x+2)^2-x^3-8=0$

$2(x+2)^2-(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$(x+2)\left[2(x+2)-(x^2-2x+4)\right]=0$

$(x+2)(-x^2-4x)=0$

$-x(x+2)(x+4)=0$

Ta có $-x(x+2)(x+4)=0$ nên $x=0$ hoặc $x+2=0$ hoặc $x+4=0$

- $x+2=0$

  $x=-2$

- $x+4=0$

  $x=-4$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-4$, $x=-2$ và $x=0$

c) $(x-1)(x^2+5x-2)-x^3+1=0$

$(x-1)(x^2+5x-2)-(x-1)(x^2+x+1)=0$

$(x-1)\left[(x^2+5x-2)-(x^2+x+1)\right]=0$

$(x-1)(4x-3)=0$

Ta có $(x-1)(4x-3)=0$ nên $x-1=0$ hoặc $4x-3=0$

- $x-1=0$

  $x=1$

- $4x-3=0$

  $4x=3$

  $x=\dfrac{3}{4}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\dfrac{3}{4}$

d) $(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

$(x+2)(3-4x)=(x+2)^2$

$(x+2)(3-4x)-(x+2)^2=0$

$(x+2)\left[(3-4x)-(x+2)\right]=0$

$(x+2)(-5x+1)=0$

Ta có $(x+2)(-5x+1)=0$ nên $x+2=0$ hoặc $-5x+1=0$

- $x+2=0$

  $x=-2$

- $-5x+1=0$

  $-5x=-1$

  $x=\dfrac{1}{5}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-2$ và $x=\dfrac{1}{5}$

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $x^2+7x+12=0$ b) $3x^2-5x+2=0$

Lời giải

a) $x^2+7x+12=0$

$x^2+3x+4x+12=0$

$x(x+3)+4(x+3)=0$

$(x+3)(x+4)=0$

Ta có $(x+3)(x+4)=0$ nên $x+3=0$ hoặc $x+4=0$

- $x+3=0$

$x=-3$

- $x+4=0$

$x=-4$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-4$ và $x=-3$

b) $3x^2-5x+2=0$

$3x^2-3x-2x+2=0$

$3x\ \ x-1\ -\ \ x-1\ \ =0$

$x-1\ \ 3x-1\ \ =0$

Ta có $x-1\ \ 3x-1\ \ =0$ nên $x-1=0$ hoặc $3x-1=0$

- $x-1=0$

$x=1$

- $3x-1=0$

$3x=1$

$x=\dfrac{1}{3}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\dfrac{1}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Giải các phương trình

a) $(x-2)^2-(2x+3)^2=0$

b) $(3-2x)^2+4x^2-9=0$

c) $(x+2)^3-9(x+2)=0$

d) $9(2x+1)^2-4(x+1)^2=0$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $(2x-1)^2=49$

b) $(5x-3)^2-(4x-7)^2=0$

c) $(2x+7)^2=9(x+2)^2$

d) $(x+2)^2=9(x^2-4x+4)$

e) $4(2x+7)^2-9(x+3)^2=0$

f) $(5x^2-2x+10)^2=(3x^2+10x-8)^2$

Bài 12. Giải các phương trình

a) $(2x-1)^2+(x-3)(2x-1)=0$

b) $4(3x-2)+(2-3x)^3=0$

c) $(x-1)(x^2-9)=-x-3$

d) $(x+1)^2+2(x+1)+1=0$

Bài 13. Giải các phương trình sau:

a) $(x-2)(3x+5)=(2x-4)(x+1)$

b) $(2x+5)(x-4)=(x-5)(4-x)$

c) $9x^2-1=(3x+1)(2x-3)$

d) $2(9x^2+6x+1)=(3x+1)(x-2)$

e) $27x^2(x+3)-12(x^2+3x)=0$

f) $16x^2-8x+1=4(x+3)(4x-1)$

Bài 14. Giải phương trình

a) $3x^2-11x+6=0$

b) $-2x^2+5x-3=0$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $x^2-4x-5=0$

Bài 15. Giải phương trình

a) $2x^4+3x^2-5=0$

b) $x^4-8x^3-9x^2=0$

c) $x^3-4x^2+4-x=0$

d) $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

Bài 16. Giải các phương trình sau:

a) $(9x^2-4)(x+1)=(3x+2)(x^2-1)$

b) $(x-1)^2-1+x^2=(1-x)(x+3)$

c) $(x^2-1)(x+2)(x-3)=(x-1)(x^2-4)(x+5)$

d) $x^4+x^3+x+1=0$

e) $x^3-7x+6=0$

f) $x^4-4x^3+12x-9=0$

g) $x^5-5x^3+4x=0$

h) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$

DẠNG 3

ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 17. Giải các phương trình:

a) $\left(x^2-5x\right)^2+10\left(x^2-5x\right)+24=0$.

b) $\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)=24$.

Lời giải

a) $\left(x^2-5x\right)^2+10\left(x^2-5x\right)+24=0$ (1)

Đặt $x^2-5x=t$ khi đó (1) trở thành:

$t^2+10t+24=0$

$t^2+4t+6t+24=0$

$t(t+4)+6(t+4)=0$

$(t+4)(t+6)=0$

$t+4=0$ hoặc $t+6=0$

$t=-4$ hoặc $t=-6$

Với $t=-4$ ta có

$x^2-5x=-4$

$x^2-5x+4=0$

$x^2-x-4x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ hoặc $x=4$

Với $t=-6$ ta có

$x^2-5x=-6$

$x^2-5x+6=0$

$x^2-2x-3x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2$ hoặc $x=3$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x=1; x=2; x=3; x=4$.

b) $\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)=24$ (1)

Đặt $x^2+5x=t$ khi đó (1) trở thành:

$t^2-2t-24=0$

$t^2+4t-6t-24=0$

$(t+4)(t-6)=0$

$t=-4$ hoặc $t=6$

Với $t=-4$ ta có:

$x^2+5x=-4$

$x^2+5x+4=0$

$(x+1)(x+4)=0$

$x=-1$ hoặc $x=-4$

Với $t=6$ ta có:

$x^2+5x=6$

$x^2+5x-6=0$

$(x-1)(x+6)=0$

$x=1$ hoặc $x=-6$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x=1; x=-1; x=-4; x=-6.$

Bài 18. Giải các phương trình:

a) $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$.

b) $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180$.

Lời giải

a) $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$

$(x^2+x)(x^2+x-2)=24$

Đặt $x^2+x=y$ ta được:

$y(y-2)=24$

$y^2-2y-24=0$

$y^2+4y-6y-24=0$

$y(y+4)-6(y+4)=0$

$(y+4)(y-6)=0$

$y=-4$ hoặc $y=6$

Với $y=-4$ ta có: $x^2+x+4=0$

$x^2+x+4=x^2+2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ suy ra phương trình $x^2+x+4=0$ vô nghiệm.

Với $y=6$ ta có:

$x^2+x-6=0$

$x^2-2x+3x-6=0$

$x(x-2)+3(x-2)=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$x=2$ hoặc $x=-3$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-3, x=2$.

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180$.

$\left[(x+2)(x-5)\right]\left[(x+3)(x-6)\right]=180$

$\left(x^2-3x-10\right)\left(x^2-3x-18\right)=180$

Đặt $x^2-3x-14=y$ ta được:

$(y+4)(y-4)=180$

$y^2=196$

$y=\pm 14$

Với $y=-14$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0$ hoặc $x=3$

Với $y=14$

$x^2-3x-28=0$

$x^2+4x-7x-28=0$

$x(x+4)-7(x+4)=0$

$(x+4)(x-7)=0$

$x=-4$ hoặc $x=7$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x=-4, x=0, x=3, x=7$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 19. Giải các phương trình sau:

a) $(2x+1)^2-2x-1=2$;

b) $\left(x^2-3x\right)^2+5\left(x^2-3x\right)+6=0$;

c) $\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x\right)-2=0$.

d) $(5-2x)^2+4x-10=8$;

e) $\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2+2x+1\right)=3$;

f) $x(x-1)\left(x^2-x+1\right)-6=0$.

Bài 20. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$

b) $(x^2+2x+3)^2-9(x^2+2x+3)+18=0$

c) $(x-2)(x+2)(x^2-10)=72$

d) $x(x+1)(x^2+x+1)=42$

e) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)-297=0$

f) $x^4-2x^2-144x-1295=0$

CHỦ ĐỀ 2
PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

- Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình.**
- **Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:**

Bước 1: Tìm **điều kiện xác định** của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 21. Giải phương trình

a) $\dfrac{4x-8+\ \ 4-2x}{x^2+1}=0$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=0$

c) $\dfrac{2x-5}{x+5}=3$

d) $\dfrac{4}{x-2}-2=0$

Lời giải

a) $\dfrac{4x-8+\ \ 4-2x}{x^2+1}=0$

vì $x^2+1>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $x^2+1\neq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\dfrac{4x-8+\ \ 4-2x}{x^2+1}=0$$
$$4x-8+\ \ 4-2x\ \ =0$$
$$2x-4=0$$
$$x=2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=2$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=0$

Điều kiện xác định $x\neq -1$

$$\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=0$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$x+1^{\ 2}=0$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Ta thấy $x=-1$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

c) $\dfrac{2x-5}{x+5}=3$

Điều kiện xác định $x\neq -5$

$$\frac{2x-5}{x+5}=3$$
$$\frac{2x-5}{x+5}=\frac{3.\ x+5}{x+5}$$
$$2x-5=3.\ x+5$$
$$2x-5=3x+15$$
$$x=-20$$

Ta thấy $x=-20$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-20$

d) $\dfrac{4}{x-2}-2=0$

Điều kiện xác định $x\neq 2$

$$\frac{4}{x-2}-2=0$$
$$\frac{4}{x-2}-\frac{2.\ x-2}{x-2}=0$$
$$4-2.\ x-2\ =0$$
$$4-2x+4=0$$
$$-2x=-8$$
$$x=4$$

Ta thấy $x=4$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=4$

Bài 22. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{7x+7}{x-1}=\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{1}{3-7x}$

c) $\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{3-x}{x-2}$ d) $\dfrac{14}{3x-12}-\dfrac{2+x}{x-4}=\dfrac{3}{8-2x}-\dfrac{5}{6}$

Lời giải

a) $\dfrac{7x-7}{x-1}=\dfrac{2}{3}$

Điều kiện xác định $x\neq 1$

$$\frac{7x-7}{x-1}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{3\ \ 7x-7}{3\ \ x-1}=\frac{2\ \ x-1}{3\ \ x-1}$$
$$3(7x+7)=2(x-1)$$
$$21x+21=2x-2$$
$$19x=-23$$
$$x=-\frac{23}{19}$$

Ta thấy $x=-\frac{23}{19}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-\frac{23}{19}$

b) $\frac{2}{1+x}=\frac{1}{3-7x}$

Điều kiện xác định $x\neq -1; x\neq \frac{3}{7}$

$$\frac{2}{1+x}=\frac{1}{3-7x}$$
$$\frac{2\ \ 3-7x}{1+x\ \ \ 3-7x}=\frac{1+x}{1+x\ \ \ 3-7x}$$
$$6-14x=x+1$$
$$15x=5$$
$$x=\frac{1}{3}$$

Ta thấy $x=\frac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$

Điều kiện xác định $x\neq 2$

$$\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$$
$$\frac{1}{x-2}+\frac{3(x-2)}{x-2}=\frac{3-x}{x-2}$$
$$\frac{1+3x-6}{x-2}=\frac{3-x}{x-2}$$
$$3x-5=3-x$$
$$4x=8$$
$$x=2$$

Ta thấy $x=2$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

d) $\frac{14}{3x-12}-\frac{2+x}{x-4}=\frac{3}{8-2x}-\frac{5}{6}$

Điều kiện xác định $x \neq 4$

$$\frac{14}{3x-12}-\frac{2+x}{x-4}=\frac{3}{8-2x}-\frac{5}{6}$$
$$\frac{14}{3(x-4)}-\frac{2+x}{x-4}=\frac{3}{2(4-x)}-\frac{5}{6}$$
$$\frac{14.4}{12(x-4)}-\frac{12\ 2+x}{12(x-4)}=\frac{-3.6}{12(x-4)}-\frac{5.2(x-4)}{12(x-4)}$$
$$\frac{56-24-12x}{12(x-4)}=\frac{-18-10x+40}{12(x-4)}$$
$$32-12x=58-10x$$
$$-26=2x$$
$$x=-13$$

Ta thấy $x=-13$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-13$

Bài 23. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x-2}=-3$

b) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}$

c) $\frac{6x+1}{x^2-7x+10}+\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-5}$

d) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x+25}{2x^2-50}=\frac{x-5}{2x^2+10x}$

Lời giải

a) $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x-2}=-3$

Điều kiện xác định $x \neq 1; x \neq 2$

$$\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x-2}=-3$$

$$\frac{4(x-2)}{(x-1)(x-2)}-\frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$4(x-2)-5(x-1)=-3(x-1)(x-2)$$

$$4x-8-5x+5=-3(x^2-3x+2)$$

$$-x-3=-3x^2+9x-6$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$$3x^2-9x-x+3=0$$

$$3x(x-3)-(x-3)=0$$

$$(x-3)(3x-1)=0$$

$x-3=0$ hoặc $3x-1=0$

$x=3$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$

Ta thấy $x=3$ và $x=\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=3$ và $x=\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{12}{1-9x^2}=\dfrac{1-3x}{1+3x}-\dfrac{1+3x}{1-3x}$

Điều kiện xác định $x\neq -\dfrac{1}{3};x\neq \dfrac{1}{3}$

$$\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}$$

$$\frac{12}{1+3x\quad 1-3x}=\frac{1-3x\quad 1-3x}{1+3x\quad 1-3x}-\frac{1+3x\quad 1+3x}{1+3x\quad 1-3x}$$

$$12=\ 1-3x\quad 1-3x\ -\ 1+3x\quad 1+3x$$

$$12=\ 1-6x+9x^2\ -\ 1+6x+9x^2$$

$12=12x$

$x=1$

Ta thấy $x=1$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=1$

c) $\dfrac{6x+1}{x^2-7x+10}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{3}{x-5}$

Điều kiện xác định $x\neq 2;x\neq 5$

$$\frac{6x+1}{x^2-7x+10}+\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x^2-2x-5x+10}+\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x\ \ x-2\ -5\ \ x-2}+\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x-2\quad x-5}+\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x-2\quad x-5}+\frac{5\ \ x-5}{x-2\quad x-5}-\frac{3\ \ x-2}{x-2\quad x-5}=0$$

$6x+1+5x-25-3x+6=0$

$8x-18=0$

$x=\dfrac{9}{4}$

Ta thấy $x=\dfrac{9}{4}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=\dfrac{9}{4}$

d) $\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x+25}{2x^2-50}=\dfrac{x-5}{2x^2+10x}$

Điều kiện xác định $x\neq 0; x\neq 5$

$\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x+25}{2x^2-50}=\dfrac{x-5}{2x^2+10x}$

$\dfrac{x+5}{x(x-5)}-\dfrac{x+25}{2(x-5)(x+5)}-\dfrac{x-5}{2x(x+5)}=0$

$\dfrac{2(x+5)^2}{2x(x-5)(x+5)}-\dfrac{x+25}{2(x-5)(x+5)}-\dfrac{(x-5)^2}{2x(x+5)(x-5)}=0$

$2(x^2+10x+25)-(x+25)-(x^2-10x+25)=0$

$x^2+29x=0$

$x(x+29)=0$

$x=0$ hoặc $x+29=0$

$x=0$ hoặc $x=-29$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-29$

Bài 24. Tìm x sau cho biểu thức $\dfrac{2x-9}{2x-5}+\dfrac{3x}{3x-2}$ có giá trị bằng 2.

Lời giải

Biểu thức có giá trị bằng 2 tức là $\dfrac{2x-9}{2x-5}+\dfrac{3x}{3x-2}=2$. Ta sẽ đi giải phương trình này.

Điều kiện xác định $x\neq\dfrac{2}{3}; x\neq\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{2x-9}{2x-5}+\dfrac{3x}{3x-2}=2$

$\dfrac{(2x-9)(3x-2)}{(2x-5)(3x-2)}+\dfrac{3x(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)}=\dfrac{2.(3x-2)(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)}$

$(2x-9)(3x-2)+3x(2x-5)=2.(3x-2)(2x-5)$

$6x^2-4x-27x+18+6x^2-15x=12x^2-30x-8x+20$

$-8x=2$

$x=-\dfrac{1}{4}$

Ta thấy $x=-\dfrac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện xác định

Vậy $x=-\dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm

Bài 25. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với $A=\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^2; B=\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)^2$

Lời giải

A và B có giá trị bằng nhau nên $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)^2$

Điều kiện xác định $x\neq 0$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)^2$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)^2=0$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}+x-1-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+1+\dfrac{1}{x}-x+1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

$2x\left(2+\dfrac{2}{x}\right)=0$

$2x=0$ hoặc $2+\dfrac{2}{x}=0$

$x=0$ hoặc $\dfrac{2}{x}=-2$

$x=0$ hoặc $x=-1$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-1$

Bài 26. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với $A=x+\dfrac{1}{x}; B=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải

A và B có giá trị bằng nhau nên $x+\dfrac{1}{x}=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

Cách 1:

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x + \frac{1}{x} - x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^3 + x - x^4 - 1 = 0$$

$$- \; x^4 - x^3 \; + \; x - 1 \; = 0$$

$$-x^3 \; x - 1 \; + \; x - 1 \; = 0$$

$$x - 1 \;\; 1 - x^3 \;\; = 0$$

$$x - 1 \;\; 1 - x \;\; 1 + x + x^2 \;\; = 0$$

$x - 1 = 0$ hoặc $1 - x = 0$ hoặc $1 + x + x^2 = 0$

$x = 1$ hoặc $x = 1$ hoặc $1 + x + x^2 = 0$ vô nghiệm vì $1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x\mathbb{R}$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

Cách 2:

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x.\frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, phương trình trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2t - 2 = 0$$

$$t(t+1) - 2(t+1) = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

$t = 2$ hoặc $t = -1$

Với $t = 2$, ta có :

$$x+\frac{1}{x}=2$$
$$x^2+1=2x$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1$$

Ta thấy $x=1$ thỏa mãn điều kiện xác định

Với $t=-1$, ta có

$$x+\frac{1}{x}=-1$$
$$x^2+1=-x$$
$$x^2+x+1=0$$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (vô nghiệm) vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\forall x$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 27. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4x-3}{x-5}=\frac{29}{3}$ b) $\frac{2x-1}{5-3x}=2$ c) $\frac{4x-5}{x-1}=2+\frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{3x}{x+3}=1$ e) $\frac{x^2-15x+1}{x+17}=x-2$ d) $\frac{x^2+6x-16}{x-2}=x+8$

Bài 28. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x+5}{2x}-\frac{x}{x+5}=0$ b) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0$

c) $\frac{7}{x+2}=\frac{3}{x-5}$ d) $\frac{2x+5}{2x}-\frac{x}{x+5}=0$

e) $\frac{4}{x-1}=\frac{x}{x-2}$ f) $\frac{12x+1}{11x-4}+\frac{10x-4}{9}=\frac{20x+17}{18}$

Bài 29. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{11}{x}=\frac{9}{x+1}+\frac{2}{x-4}$ b) $\frac{14}{3x-12}-\frac{2+x}{x-4}=\frac{3}{8-2x}-\frac{5}{6}$

c) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{16}{x^2-1}$ d) $1+\frac{1}{2+x}=\frac{12}{x^3+8}$

e) $3x-\frac{1}{x-2}=\frac{x-1}{2-x}$ f) $\frac{x-1}{x-2}-3+x=\frac{1}{x-2}$

Bài 30. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\dfrac{6x-1}{3x+2}$ và $\dfrac{2x+5}{x-3}$ bằng nhau.

Bài 31. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-3}$ và $\dfrac{-8}{(x-1)(x-3)}$ bằng nhau.

Bài 32. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x(x-2)}+\dfrac{x-4}{x(x+2)}=0$

b) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{x-4}{x(x+2)}=0$

c) $\dfrac{3}{4(x-5)}+\dfrac{15}{50-2x^2}=\dfrac{7}{6x+30}$

d) $\dfrac{12x+1}{6x-2}-\dfrac{9x-5}{3x+1}=\dfrac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$

e) $\dfrac{1}{x}-2025-\left(\dfrac{1}{x}-2025\right)\ x^2\ +2024\ \ =0$

f) $\dfrac{1}{x}+2=\left(\dfrac{1}{x}+2\right)\ x^2\ +2$

Bài 33. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$

b) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{5}{6-x^2-x}$

c) $\dfrac{4x}{x^2+4x+3}-1=6\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2x+2}\right)$

d) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2x^2+16}{x^3+8}=\dfrac{5}{x^2-2x+4}$

e) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x^2-5}{x^3-1}=\dfrac{4}{x^2+x+1}$

f) $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{2x+5}{x^2-4x+3}$

Bài 34. *Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{8}{x-8}+\dfrac{11}{x-11}=\dfrac{9}{x-9}+\dfrac{10}{x-10}$

b) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x}{x-6}$

c) $\dfrac{4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{6}{x-6}+\dfrac{3}{x-3}$

Bài 35. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

b) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

c) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$

Lời giải

a) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

Điều kiện xác định $x\neq 0$

$$\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{3}{x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$(x+1)(x^2-x+1).x-(x-1)(x^2+x+1)x=3$

$(x^3+1)x-(x^3-1)x=3$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

Ta thấy $x=\frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$

Điều kiện xác định: $x\neq -4, x\neq -5, x\neq -6, x\neq -7$

$$\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$(x+7).18-(x+4).18=(x+4)(x+7)$

$18x+126-18x-72=x^2+11x+28$

$x^2+11x-26=0$

$(x-2)(x+13)=0$

$x-2=0$ hoặc $x+13=0$

$x=2$ hoặc $x=-13$

Ta thấy $x=2$ và $x=-13$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=2$ và $x=-13$

c) $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$.

Đặt $x^2-2x+2=t, t>0$

$$\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$$

$$\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}=\frac{6}{t+2}$$

$(t+1)(t+2)+2t(t+2)=6t(t+1)$

$t^2+3t+2+2t^2+4t=6t^2+6t$

$3t^2-t-2=0$

$(3t+2)(t-1)=0$

$t=-\frac{2}{3}$ hoặc $t=1$

Ta thấy $t=-\frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện

Với $t=1$

$\Rightarrow x^2-2x+2=1$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=1$

Bài 36. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{x^2+2x+2}+\frac{x^2}{x^2-2x+2}-\frac{4x^2-20}{x^4+4}=\frac{322}{65}$

b) $\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}=\frac{1}{8}$

c) $\frac{2}{x^2+4x+3}+\frac{5}{x^2+11x+24}+\frac{2}{x^2+18x+80}=\frac{9}{52}$

d) $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2}+6$

Lời giải

a) $\frac{x^2}{x^2+2x+2}+\frac{x^2}{x^2-2x+2}-\frac{4x^2-20}{x^4+4}=\frac{322}{65}$

Điều kiện với mọi $x\in R$

Ta có $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2=\left(x^2+2\right)^2-2.2x^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)$

$$\frac{x^2}{x^2+2x+2}+\frac{x^2}{x^2-2x+2}-\frac{4x^2-20}{x^4+4}=\frac{322}{65}$$

$$\frac{65x^2(x^2-2x+2)}{65(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}+\frac{65x^2(x^2+2x+2)}{65(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}-\frac{65(4x^2-20)}{65(x^4+4)}=\frac{322(x^4+4)}{65(x^4+4)}$$

$65x^4-130x^3+130x^2+65x^4+130x^3+130x^2-260x^2+1300=322x^4+1288$

$130x^4+1300=322x^4+1288$

$192x^4=12$

$x^4 = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$

$x = \pm\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \pm\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$

Điều kiện xác định: $x \neq \ -2; -3; -4; -6 -; 6$

$$\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{8(x+6)}{8(x+2)(x+6)} - \frac{8(x+2)}{8(x+6)(x+2)} = \frac{(x+6)(x+2)}{8(x+6)(x+2)}$$

$8x + 48 - 8x - 16 = x^2 + 8x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 - 2x + 10x - 20 = 0$

$x(x-2) + 10(x-2) = 0$

$(x-2)(x+10) = 0$

$x - 2 = 0$ hoặc $x + 10 = 0$

$x = 2$ hoặc $x = -10$

Ta thấy $x = -10$ và $x = 2$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -10$ và $x = 2$

c) $\frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$

Điều kiện xác định: $x \neq \ -1; -3; -8; -10$

$$\frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$$

$$\frac{2}{(x+3)(x+1)} + \frac{5}{(x+8)(x+3)} + \frac{2}{(x+8)(x+10)} = \frac{9}{52}$$

$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}=\frac{9}{52}$

$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}=\frac{9}{52}$

$\frac{52(x+10)}{52(x+1)(x+10)}-\frac{52(x+1)}{52(x+10)(x+1)}=\frac{9(x+10)(x+1)}{52(x+10)(x+1)}$

$52(x+10)-52(x+1)=9(x+10)(x+1)$

$52x+520-52x-52=9x^2+99x+90$

$9x^2+99x-378=0$

$x^2+11x-42=0$

$x-3 \quad x+14 \; =0$

$x-3=0$ hoặc $x+14=0$

$x=3$ hoặc $x=-14$

Ta thấy $x=-14$ và $x=3$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=-14$ và $x=3$

d) $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2}+6$

Điều kiện xác định: $x\neq\pm1; x\neq 2$

$\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2}+6$

$1+\frac{5}{x-1}+1+\frac{-5}{x+1}=1+\frac{10}{x-2}+1+\frac{-10}{x+2}+6$

$5\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}\right)-10\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)=6$

$\frac{5.2}{(x-1)(x+1)}-\frac{10.4}{(x-2)(x+2)}=6$

$10(x^2-4)-40(x^2-1)=6(x^2-1)(x^2-4)$

$10x^2-40-40x^2+40=6(x^4-5x^2+4)$

$6x^4+24=0$

$6(x^4+4)=0$ (vô nghiệm) vì $x^4+4>0\forall x$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

CHỦ ĐỀ 3
GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Trả lời

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Bài 37. Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1 giờ 30 phút một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Lời giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h) (x>0)

Vận tốc người đi xe máy là: $\frac{5x}{2}$ km/h

Thời gian người đi xe đạp đi là: $\frac{50}{x}$h

Thời gian người đi xe máy đi là: $\frac{20}{x}$ h

Do xe máy đi sau 1h30' và đến sớm hơn 1h nên ta có phương trình:

$$\frac{50}{x}=\frac{20}{x}+\frac{3}{2}+1$$

$$\frac{100}{2x}=\frac{40}{2x}+\frac{3x}{2x}+\frac{2x}{2x}$$

$$100=40+3x+2x$$

$$5x=60$$

$x=12$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vận tốc người đi xe đạp là 12km/h.

Bài 38. Một ô tô phải đi quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đến đúng dự định. Tính thời gian dự định đi quãng đường AB ?

Lời giải

Gọi vận tốc ô tô dự định đi quãng đường AB là: x (km/h) (x > 6)

Xe đi nửa quãng đường đầu với vận tốc là: x + 10 (km/h)

Xe đi nửa quãng đường sau với vận tốc là: x – 6 (km/h)

Theo bài ra ta có:

$\frac{60}{x}=\frac{30}{x+10}+\frac{30}{x-6}$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x-6}$

$\frac{2(x+10)(x-6)}{x(x+10)(x-6)}=\frac{x(x-6)}{x+10}+\frac{x(x+10)}{x-6}$

$2(x+10)(x-6)=x(x-6)+x(x+10)$

$2x^2+8x-120=x^2-6x+x^2+10x$

$4x=120$

$x=30$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy thời gian dự định đi quãng đường AB là: 60 : 30 = 2 (giờ)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 39. Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Đáp số: $120km$.

Bài 40. Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài $35km$. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài $42km$ với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h. Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về.

Đáp số: *Vận tốc lượt đi là 30 km/h; vận tốc lượt về là 24 km/h.*

Bài 41. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Đáp số: $80km$.

Bài 42. Một ô tô đi quãng đường dài 60 *km* trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 *km/h* và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn dự định là 6 *km/h* nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

Đáp số: 2 *giờ*.

Bài 43. Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hoá. Sau khi đi được 43 km thì dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hoá đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu, biết rằng quãng đường Hà Nội - Thanh Hoá dài 163 km.

Đáp số: 30 *km*.

BÀI 2
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

1. Bất đẳng thức

a. Nhắc lại thứ tự trong tập hợp số thực

- Nếu số thực a nhỏ hơn số thực b thì ta viết $a<b$ hay $b>a$.
- Số thực lớn hơn 0 gọi là số thực dương.
- Số thực nhỏ hơn 0 gọi là số thực âm.
- Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a<b$ hay $b>a$.

- Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.
- Với hai số thực a,b, ta có:

  $ab>0$ thì a,b cùng dấu (hay cùng dương hoặc cùng âm) và ngược lại.

  $ab<0$ thì a,b trái dấu và ngược lại.

- Với hai số thực a,b dương , nếu $a>b$ thì $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

b. Khái niệm bất đẳng thức

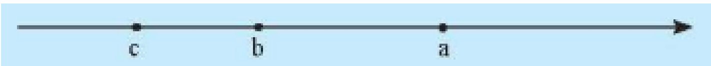
Ta gọi hệ thức dạng $a>b$ (hay $a<b, a\ge b, a\le b$) là **bất đẳng thức** và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý:

- Hai bất đẳng thức $a<b$ và $c<d$ (hay $a>b$ và $c>d$) được gọi là bất **đẳng thức cùng chiều**.
- Hai bất đẳng thức $a<b$ và $c>d$ (hay $a>b$ và $c<d$) được gọi là bất **đẳng thức ngược chiều.**

c. Tính chất bắc cầu

Cho ba số a,b,c. Nếu $a>b$ và $b>c$ thì $a>c$.



Chú ý: Tính chất bắc cầu vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<,\le,\ge$.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a,b,c. Nếu $a>b$ thì $a+c>b+c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<,\le,\ge$.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **dương** ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **âm** ta được bất đẳng thức mới **ngược chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a,b,c và $a>b$

- Nếu $c>0$ thì $a.c>b.c$.
- Nếu $c<0$ thì $a.c<b.c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<,\le,\ge$.

DẠNG 1
DIỄN TẢ MỘT KHẲNG ĐỊNH NÀO ĐÓ

Bài 1. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) x nhỏ hơn 5. b) a không lớn hơn b. c) m không nhỏ hơn n.

Lời giải

a) Để diễn tả x nhỏ hơn 5, ta có bất đẳng thức $x < 5$.

b) Ta có a không lớn hơn b hay a nhỏ hơn hoặc bằng b.

Do đó, để diễn tả a không lớn hơn b, ta có bất đẳng thức $a \le b$;

c) Ta có m không nhỏ hơn n hay m lớn hơn hoặc bằng n.

Do đó, để diễn tả m không nhỏ hơn n, ta có bất đẳng thức $m \ge n$.

Bài 2. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;

b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;

c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng.

Lời giải

a) Gọi x (tuổi) là số tuổi của bạn, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô" là $x \ge 18$.

b) Gọi y (người) là số người xe buýt có thể chở được, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Xe buýt chở được tối đa 45 người" là $y \le 45$.

c) Gọi z (đồng) là mức lương cho một giờ làm việc của người lao động, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng" là $z \ge 20\,000$.

Bài 3. Khi đi đường, chúng ta có thể thấy các biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe cơ giới được phép đi.

Em có biết ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.3 (biển báo giới hạn tốc độ tối đa cho phép theo xe, trên từng làn đường) không?

Hình 2.3. Biển báo giao thông P.127c

Lời giải

– Hình 2.3 là Biển ghép tốc độ tối đa cho phép theo phương tiện, trên từng làn đường.

– Ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.3:

Làn trái: chỉ dành riêng cho ô tô với tốc độ tối đa là 60 km/h.

Làn giữa: dành cho ô tô và xe máy với tốc độ tối đa là 50 km/h.

Làn phải: dành cho xe máy, xe ba bánh và xe đạp với tốc độ tối đa là 50 km/h.

Bài 4. Dùng các dấu >, <, ≥, ≤ để diễn tả:

a) Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4a.

b) Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4b.

Hình 4

Lời giải

a) Trong Hình 4a, biển báo chỉ tốc độ tối đa cho phép là 70 km/h.

Do đó ta có v ≤ 70.

b) Trong Hình 4a, biển báo chỉ trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu không vượt quá 10 tấn.

Do đó ta có P ≤ 10.

Bài 5. Theo quy định của một hãng bay, khối lượng hành lí xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg. Gọi m là khối lượng hành lí xách tay của một khách hàng phổ thông. Hệ thức nào biểu diễn khối lượng hành lí đúng quy định của hãng bay?

Lời giải

Khối lượng hành lí xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg, nghĩa là khối lượng hành lí đúng quy định của hãng bay nhỏ hoặc bằng 12 kg.

Vậy hệ thức biểu diễn khối lượng hành lí đúng quy định của hãng bay là: m ≤ 12.

Bài 6. Gọi x là số tuổi của bạn Việt, y là số tuổi của bạn Nam, biết rằng bạn Nam lớn tuổi hơn bạn Việt. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau 5 năm nữa.

Lời giải

Để biểu diễn bạn Nam lớn tuổi hơn bạn Việt, ta có bất đẳng thức $x < y$.

Để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn Việt và Nam sau ba năm nữa, ta cộng 2 vế của bất đẳng thức với 3, ta được: $x + 5 < y + 5$.

Vậy bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau ba năm nữa là $x+5<y+5$

DẠNG 2
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh:

a) $\sqrt{2025}-\sqrt{5}>\sqrt{2024}-\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{2024}+2023<\frac{1}{2025}+2023$

Lời giải

a) Do $2025>2024$ nên $\sqrt{2025}>\sqrt{2024}$ do đó $\sqrt{2025}-\sqrt{5}>\sqrt{2024}-\sqrt{5}$

Vậy $\sqrt{2025}-\sqrt{5}>\sqrt{2024}-\sqrt{5}$

b) Do $\frac{1}{2024}<\frac{1}{2025}$ nên $\frac{1}{2024}+2023<\frac{1}{2025}+2023$

Vậy $\frac{1}{2024}+2023<\frac{1}{2025}+2023$

Bài 2. Cho $a\geq 2b$. Chứng minh:

a) $2a+7>a+2b+7$

b) $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

Lời giải

Do $a\geq 2b$ nên $a – 2b \geq 0$.

a) Xét hiệu $(2a +7) – (a + 2b +7) = 2a +7 – a – 2b – 7 = a – 2b \geq 0$.

Vậy $2a+7>a+2b+7$.

b) Xét hiệu $(5a + 2b) – (4b + 4a) = 5a + 2b – 4b – 4a = a – 2b \geq 0$.

Vậy $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

Bài 3. Chứng minh:

a) $2m + 4 > 2n + 3$ với $m > n$.

b) $–3a + 5 > –3b + 5$ với $a < b$.

c) $(a – 1)^2 \geq 4 – 2a$ với $a^2 \geq 3$.

Lời giải

a) Do $m > n$ nên $2m > 2n$, suy ra $2m + 3 > 2n + 3$, do đó $2m + 4 > 2n + 3$.

Vậy $–3a + 5 > –3b + 5$ với $m > n$;

b) Do $a < b$ nên $–3a > –3b$, suy ra $–3a + 5 > –3b + 5$.

Vậy$–3a + 5 > –3b + 5$ với $a < b$.

c) Do $a^2 \geq 3$ nên $a^2 – 2a + 1 \geq 3 – 2a + 1$, suy ra $(a – 1)^2 \geq 4 – 2a$.

Vậy $(a – 1)^2 \geq 4 – 2a$ với $a^2 \geq 3$.

Bài 4. Cho $a \leq 1$. Chứng minh: $(a – 1)^2 \geq a^2 – 1$.

Lời giải

Xét hiệu $(a – 1)^2 – (a^2 – 1) = a^2 – 2a + 1 – a^2 + 1 = 2 – 2a$.

Do a ≤ 1 nên 2a ≤ 2, suy ra 2 – 2a ≥ 0, hay $(a-1)^2 - (a^2-1) \geq 0$.

Vậy $(a-1)^2 \geq a^2 - 1$.

DẠNG 3

SO SÁNH CÁC SỐ

Bài 1. So sánh hai số a và b, nếu:

a) a + 2024 < b + 2024

b) − 2025a + 9 > − 2025b + 9.

Lời giải

a) Ta có: a + 2024 < b + 2024

Suy ra: a + 2024 – 2024< b + 2024 – 2024 hay a < b.

Vậy a < b.

b) Ta có: − 2025a + 9 > − 2025b + 9..

− 2025a + 9 −9 > − 2025b + 9 −9

− 2025a > − 2025b

$$-2025a\left(-\frac{1}{2025}\right) < -2025b\left(-\frac{1}{2025}\right)$$

Hay a < b

Vậy a < b.

Bài 2. So sánh hai số $3 + 23^{2024}$ và $4 + 23^{2024}$.

Lời giải

Ta có 3 < 4.

Cộng hai vế của bất đẳng thức với 23^{2024}, ta được: $3 + 23^{2024} < 4 + 23^{2024}$

Bài 3. Hãy so sánh: $(-163) . (-75)^{15}$ và $(-162) . (-75)^{15}$.

Lời giải

Ta có –163 < –162.

Nhân cả hai vế bất đẳng thức với (–75) . 15, ta được: $(-163) . (-75)^{15} > (-162) . (-75)^{15}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. So sánh x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x-\frac{1}{3} \leq y-\frac{1}{3}$ b) $2x+2023>2y+2023$ c) $-\frac{2024}{2025}-3x \geq -\frac{2024}{2025}-3y$

Bài 5. Số a là âm hay dương nếu:

a) $-4a \leq 2a$ b) $3a \geq 15a$ c) $6a > 24a$

Bài 6. So sánh m và n biết $m-\frac{1}{2}=n$

Lời giải

Ta có: $m-\frac{1}{2}=n\Rightarrow m-n=\frac{1}{2}\Rightarrow m-n>0\Rightarrow m>n$

Bài 7. Cho $a-2\le b-1$. So sánh hai biểu thức $2a-4$ và $2b-2$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với 2 ta được:

$2(a-2)\le 2(b-1)\Leftrightarrow 2a-4\le 2b-2$

Bài 8. So sánh m và m^2 với $0<m<1$.

Lời giải

Xét hiệu: $m-m^2=m\left(1-m\right)$

Vì $0<m<1$ nên $m>0;1-m>0\Rightarrow m\left(1-m\right)>0$

hay $m-m^2>0$ do đó $m>m^2$

Bài 9. Cho bất đẳng thức a > b và cho số thực c.

a) Xác định dấu của hiệu: (a + c) – (b + c).

b) Hãy so sánh: a + c và b + c.

Lời giải

Do a > b nên a – b > 0.

a) Ta xét hiệu: (a + c) – (b + c) = a + c – b – c = a – b > 0.

Vậy (a + c) – (b + c) > 0.

b) Theo câu a, ta có (a + c) – (b + c) > 0, nên a + c > b + c.

Vậy a + c > b + c.

Bài 10. Cho bất đẳng thức a > b và số thực c > 0.

a) Xác định dấu của hiệu: ac – bc.

b) Hãy so sánh: ac và bc.

Lời giải

Do a > b nên a – b > 0.

a) Xét hiệu ac – bc = c(a – b).

Vì c > 0 và a – b > 0 nên c(a – b) > 0, suy ra ac – bc > 0.

Vậy ac – bc > 0.

b) Theo câu a, ta có ac – bc > 0, suy ra ac > bc.

Bài 11. Cho các bất đẳng thức a > b và b > c.

a) Xác định dấu của các hiệu: a – b, b – c, a – c.

b) Hãy so sánh: a và c.

Lời giải

a) Do a > b nên a – b > 0.

Do b > c nên b – c > 0.

Xét tổng (a – b) + (b – c) = a – b + b – c = a – c.

Do a – b > 0 và b – c > 0 nên (a – b) + (b – c) > 0.

Do đó a – c > 0.

b) Theo câu a, ta có a – c > 0 nên a > c. Vậy a > c.

DẠNG 4
TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Nồng độ cồn trong máu (tiếng Anh là *Blood Alcohol Content*, viết tắt: BAC) được định nghĩa là tỉ lệ phần trăm lượng rượu (ethyl alcohol hoặc ethanol) trong máu của một người. Chẳng hạn, nồng độ cồn trong máu là 0,05% nghĩa là có 50 mg rượu trong 100 ml máu. Càng uống nhiều rượu bia thì nồng độ cồn trong máu càng cao và càng nguy hiểm khi tham gia giao thông. Nghị định 100/2019/NĐ-CP quy định mức xử phạt vi phạm hành chính đối với người điều khiển xe gắn máy uống rượu bia khi tham gia giao thông như sau:

Mức độ vi phạm	Hình thức xử phạt
Mức 1: Nồng độ cồn trong máu dương và chưa vượt quá 50 mg/100 ml máu	Từ 2 triệu đồng đến 3 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 10 tháng đến 12 tháng
Mức 2: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 50 mg/100 ml máu và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng
Mức 3: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 80 mg / 100 ml máu	Từ 6 triệu đồng đến 8 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 22 tháng đến 24 tháng

Giả sử nồng độ cồn trong máu của một người sau khi uống rượu bia được tính theo công thức sau: y = 0,076 – 0,008t, trong đó y được tính theo đơn vị % và t là số giờ tính từ thời điểm uống rượu bia.

a) Hỏi 3 giờ sau khi uống rượu bia, nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức nào?

a) Nếu người này đã uống rượu bia, thì sau bao lâu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt.

Lời giải

a) Sau 3 giờ uống rượu bia, nồng độ cồn trong máu của người đó là:

y = 0,076 – 0,008.3 = 0,052 (%)

Tức là, nồng độ cồn trong máu là 52 mg rượu trong 100ml máu.

Do 50 < 52 < 80 nên nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức 2, với hình thức xử phạt từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng.

b) người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt khi y = 0 hay

0,076 – 0,008t = 0

– 0,008t = 0,076

t = 9,5 giờ

Vậy, nếu người này đã uống rượu bia thì sau 9,5 giờ, người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt.

Bài 2. Một nhà tài trợ dự kiến tổ chức một buổi đi dã ngoại tập thể nhằm giúp các bạn học sinh vùng cao trải nghiệm thực tế tại một trang trại trong 1 ngày (từ 14h00 ngày hôm trước đến 12h00 ngày hôm sau). Cho biết số tiền tài trợ dự kiến là 30 triệu đồng và giá thuê các dịch vụ và phòng nghỉ là 17 triệu đồng 1 ngày, giá mỗi suất ăn trưa, ăn tối là 60 000 đồng và mỗi suất ăn sáng là 30 000 đồng. Hỏi có thể tổ chức cho nhiều nhất bao nhiêu bạn tham gia được?

Lời giải

Gọi x là số bạn học sinh có thể tham gia được (học sinh) (x ∈ ℕ*).

Theo bài, số tiền còn lại sau khi thu dịch vụ và phòng nghỉ là: 30 – 17 = 13 (triệu đồng) = 13 000 (nghìn đồng).

Số tiền ăn sáng, ăn trưa và ăn tối của 1 bạn là: 60 000 + 30 000 + 60 000 = 150 000 (đồng) = 150 (nghìn đồng).

Như vậy, số tiền ăn của x bạn học sinh trong chuyến đi là 150x (nghìn đồng).

Khi đó ta có: 150x ≤ 13 000.

Suy ra $x \le \frac{13000}{150}$ hay $x \le \frac{260}{3} \approx 86,7$

Mà $x \in N*$ nên số bạn học sinh nhiều nhất có thể tham gia được là 86 bạn.

Vậy nhà tài trợ có thể tổ chức cho nhiều nhất 86 bạn tham gia được chuyến đi.

DẠNG 5

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Mức độ khó

Để chứng minh $A > B$, Ta chứng minh $A - B > 0$

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall M$

Bài 1. Với mọi x, y, z, chứng minh:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Lời giải

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$

Xét hiệu ta có:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$

$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

Xét hiệu ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2zx + z^2 \geq 0$

$(x-y)^2 - 2(x-y)z + z^2 \geq 0$

$(x - y + z)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x + z = y$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Xét hiệu ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) \geq 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$

Dấu bằng khi $x=y=z=1$

Bài 2. Với mọi a,b, chứng minh:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ b) $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$ c) $\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$

d) $a^2+\dfrac{b^2}{4}\ge ab$ e) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

Lời giải

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

Xét hiệu ta có :

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\ge 0$$

$$2a^2+2b^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0$$

$$a^2+2ab+b^2\ge 0$$

$$(a+b)^2\ge 0$$

Dấu bằng khi $a=b$

b) $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$

Ta có:

$$2a^2+2b^2\ge a^2+2ab+b^2$$

$$a^2+b^2-2ab\ge 0$$

$$(a-b)^2\ge 0$$

Dấu bằng khi $a=b$

c) $\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$

Ta có:

$$a^2+2ab+b^2\ge 4ab$$

$$a^2+2ab+b^2-4ab\ge 0$$

$$a^2-2ab+b^2\ge 0$$

$$(a-b)^2\ge 0$$

Dấu bằng khi $a=b$

d) $a^2+\dfrac{b^2}{4}\ge ab$

Ta có:

$4a^2+b^2-4ab\ge 0$

$(2a)^2-4ab+b^2\ge 0$

$(2a-b)^2\ge 0$

Dấu bằng khi $2a=b$

e) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

Ta có:

$a^2+b^2+1-ab-a-b\ge 0$

$2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b\ge 0$

$\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right)\ge 0$

$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$

Dấu bằng khi $a=b=1$

Bài 3. Với mọi a,b,c, chứng minh:

a) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

b) $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

c) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$

Lời giải

a) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

Ta có:

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{9}$

$3a^2+3b^2+3c^2-\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)\ge 0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\ge 0$

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2\ge 0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

Dấu bằng khi $a=b=c$

b) $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Ta có:

$3a^2+3b^2+3c^2\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\ge 0$

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2\ge 0$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

Dấu bằng khi $a=b=c$

c) $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$

Ta có:

$$a^2+4b^2+4c^2-4ab+4ac-8bc\ge 0$$

$$a^2-4a(b-c)+4(b^2+c^2-2bc)\ge 0$$

$$a^2-4a(b-c)+4(b-c)^2\ge 0$$

$$(a-2b+2c)^2\ge 0$$

Dấu bằng khi $a+2c=2b$

Bài 4. Với mọi a,b,c,d,e, chứng minh: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

Lời giải

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae\ge 0$$

$$4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4ab-4ac-4ad-4ae\ge 0$$

$$(a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ae+4e^2)\ge 0$$

$$(a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2b=2c=2d=2e$

Bài 5. Với mọi a,b,c, chứng minh:

a) $a^2+b^2\ge ab$

b) $2a^2+b^2+c^2\ge 2a(b+c)$

c) $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4\ge 0$

d) $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(ab^2-a+c+1)$

e) $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\ge(a+b+c)$

f) $a^2+b^2+c^2\ge a(b+c)$

Lời giải

a) $a^2+b^2\ge ab$

ta có:

$$a^2+b^2-ab\ge 0$$

$$a^2-2a.\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}\ge 0$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge 0$$

b) $2a^2+b^2+c^2\ge 2a(b+c)$

Ta có:

$2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac\ge 0$

$\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)\ge 0$

$\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2\ge 0$

c) $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4\ge 0$

Ta có:

$\left(a^4-2a^2.ab+a^2b^2\right)+\left(b^4-2ab.b^2+a^2b^2\right)\ge 0$

$\left(a^2-ab\right)^2+\left(b^2-ab\right)^2\ge 0$

d) $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a\left(ab^2-a+c+1\right)$

Ta có:

$a^4+b^4+c^2+1-2a^2b^2+2a^2-2ac-2a\ge 0$

$\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)+\left(a^2-2a+1\right)\ge 0$

$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(a-1\right)^2\ge 0$

e) $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\ge\left(a+b+c\right)$

Ta có:

$\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)+\left(c^2-c\right)+\frac{3}{4}\ge 0$

$\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\left(b^2-b+\frac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\frac{1}{4}\right)\ge 0$

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$

f) $a^2+b^2+c^2\ge a\left(b+c\right)$

ta có:

$a^2+b^2+c^2-ab-ac\ge 0$

$4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac\ge 0$

$\left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+2a^2\ge 0$

$\left(a-2b\right)^2+\left(a-2c\right)^2+2a^2\ge 0$

Bài 6. Với mọi a,b,c, chứng minh:

a) $a^4+a^3b+ab^3+b^4\ge 0$

b) $\left(a^2+b^2\right)^2\ge ab\left(a+b\right)^2$

c) $a^3+b^3+abc\ge ab\left(a+b+c\right)$

d) $4\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)^3$

e) $2\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)$

f) $\left(a+b\right)\left(a^3+b^3\right)\le 2\left(a^4+b^4\right)$

Lời giải

a) $a^4+a^3b+ab^3+b^4\ge 0$

ta có:

$a^3(a+b)+b^3(a+b)\ge 0$

$(a^3+b^3)(a+b)\ge 0$

$(a+b)^2(a^2-ab+b^2)\ge 0$

b) $(a^2+b^2)^2\ge ab(a+b)^2$

Ta có:

$a^4+2a^2b^2+b^4\ge ab(a^2+2ab+b^2)=a^3b+2a^2b^2+ab^3$

$(a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\ge 0$

$a^3(a-b)+b^3(b-a)\ge 0$

$(a^3-b^3)(a-b)\ge 0$

$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$

c) $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)$

Ta có:

$a^3+b^3+abc\ge a^2b+ab^2+abc$

$a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$

$a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$(a-b)^2(a+b)\ge 0$

d) $4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3$

Ta có:

$4a^3+4b^3\ge a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$3a^3-3a^2b+3b^3-3ab^2\ge 0$

$3a^2(a-b)+3b^2(b-a)\ge 0$

$3(a-b)(a^2-b^2)\ge 0$

$3(a-b)^2(a+b)\ge 0$

e) $2(a^3+b^3)\ge (a+b)(a^2+b^2)$

Ta có:

$2a^3+2b^3\ge a^3+ab^2+a^2b+b^3$

$a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$

$a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$(a-b)^2(a+b)\ge 0$

f) $(a+b)(a^3+b^3)\le 2(a^4+b^4)$

Ta có:

$a^4+ab^3+a^3b+b^4\le 2a^4+2b^4$

$a^4-ab^3+b^4-a^3b\ge 0$

$a^3(a-b)+b^3(b-a)\ge 0$

$(a^3-b^3)(a-b)\ge 0$

$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$

BÀI 3
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn

a. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình có dạng $ax+b<0$ (hay $ax+b>0$; $ax+b\le 0$; $ax+b\ge 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a\ne 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Nghiệm của bất phương trình

Số x_0 được gọi là nghiệm của bất phương trình $A(x)\le B(x)$ nếu $A(x_0)\le B(x_0)$ là khẳng định đúng.

Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình $ax+b>0$ (với $a>0$) được giải như sau:	Bất phương trình $ax+b>0$ (với $a<0$) được giải như sau:
$ax+b>0$	$ax+b>0$
$ax>-b$	$ax>-b$
$x>\dfrac{-b}{a}$.	$x<\dfrac{-b}{a}$.
Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:	Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:
$x>\dfrac{-b}{a}$.	$x<\dfrac{-b}{a}$.

Nhận xét: Các bất phương trình bậc nhất $ax+b>0$; $ax+b\le 0$; $ax+b\ge 0$, trong đó a và b là hai số đã cho và $a\ne 0$ được giải bằng cách tương tự.

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax+b<0$ (hay $ax+b>0$; $ax+b\le 0$; $ax+b\ge 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a\ne 0$.

Bài 1. Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

a) $0x-2024\ge 0$ b) $2024x+2025<0$ c) $-\frac{1}{11}x\le 0$ d) $\frac{x^2}{2}-1>0$

e) $-|x|+2024>0$ f) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=0$ g) $\frac{1}{x}-3\le 0$ h) $\frac{-2x+1}{2025}\ge 0$

Lời giải

a) Không, vì hệ số của ẩn x là 0

b) Có

c) Có.

d) Không, vì x^2 là ẩn bậc hai chữ không phải bậc một.

e) Không, vì ẩn x nằm trong dấu giá trị tuyệt đối.

f) Không, vì dấu "=" thể hiện đó là phương trình.

h) Không, vì ẩn x nằm ở mẫu số.

h) Có.

Bài 2. Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m:

a) $\left(m^2+\frac{1}{2}\right)x-1\le 0$ b) $-\left(m^2+m+2\right)x\le -m+2024$

Lời giải

a) $\left(m^2+\frac{1}{2}\right)x-1\le 0$

Ta có: $m^2+\frac{1}{2}>0$ với mọi m

Nên $m^2+\frac{1}{2}\ne 0$ với mọi m

b) $-\left(m^2+m+2\right)x\le -m+2024$

Ta có: $-\left(m^2+m+2\right)=-\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]<0$ với mọi m

Nên $-\left(m^2+m+2\right)\ne 0$ với mọi m

DẠNG 2
GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CƠ BẢN

Cách giải bất phương trình cơ bản

Bất phương trình $ax+b>0$ (với $a>0$) được giải như sau:

$$ax+b>0$$
$$ax>-b$$
$$x>\frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$x>\frac{-b}{a}.$$

Bất phương trình $ax+b>0$ (với $a<0$) được giải như sau:

$$ax+b>0$$
$$ax>-b$$
$$x<\frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$x<\frac{-b}{a}.$$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x-8>0$ b) $9-3x\le 0$ c) $5-\frac{1}{3}x<1$

Lời giải

a)

$2x-8>0$

$2x>8$

$x>4$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x>4$

b)

$9-3x\le 0$

$-3x\le -9$.

$x\ge 3$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge 3$

c)

$5-\frac{1}{3}x<1$

$-\frac{1}{3}x<-4$.

$x>12$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x>12$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3x+5}{2}-x\ge 1+\frac{x+2}{3}$ b) $\frac{x-2}{3}-x-2\le \frac{x-17}{2}$ c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-4}{4}\le \frac{3x+1}{6}-\frac{x-4}{12}$

Lời giải

a)

$\frac{3x+5}{2}-x\ge 1+\frac{x+2}{3}$

$\frac{3(3x+5)}{6}-\frac{6x}{6}\ge \frac{6}{6}+\frac{2(x+2)}{6}$

$9x+15-6x\ge 6+2x+4$.

$9x-6x-2x\ge 6+4-15$

$x\ge -5$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge -5$

b)

$\frac{x-2}{3}-x-2\le \frac{x-17}{2}$

$\frac{2(x-2)-6x-6.2}{6}\le \frac{3(x-17)}{6}$

$2x-4-6x-12\le 3x-51$

$-4x-16\le 3x-51$

$-4x-3x\le -51+16$

$-7x\le -35$

$x\ge 5$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge 5$

c)

$\frac{2x+1}{3}-\frac{x-4}{4}\le \frac{3x+1}{6}-\frac{x-4}{12}$

$\frac{4(2x+1)-3(x-4)}{12}\le \frac{2(3x+1)-(x-4)}{12}$

$8x+4-3x+12\le 6x+2-x+4$

$5x+16\le 5x+6$

$5x-5x\le 6-16$

$0x\le -10$

$x\in \varnothing$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 3. Giải các bất phương trình

a) $x^2-3x+1>2(x-1)-x(3-x)$ b) $(x-1)^2+x^2\le (x+1)^2+(x+2)^2$

c) $(x^2+1)(x-6)\le (x-2)^3$

Lời giải

a) $x^2-3x+1>2(x-1)-x(3-x)$

$x^2-3x+1>2x-2-3x+x^2$

$-2x>-3$

$x<\frac{3}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x<\frac{3}{2}$

b)

$(x-1)^2+x^2\le(x+1)^2+\left(x+2\right)^2$

$2x^2-2x+1\le 2x^2+6x+5$

$-8x\le 4$

$x\ge-\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge-\frac{1}{2}$

c)

$(x^2+1)(x-6)\le(x-2)^3\Leftrightarrow$

$x^3-6x^2+x-6\le x^3-6x^2+12x-8$

$-11x\le-2$

$x\ge\frac{2}{11}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge\frac{2}{11}$

Bài 4. Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm x để $A>0$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases}1-x\ne0\\1+x\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne1\\x\ne-1\end{cases}$

Ta có $A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

$$A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{(1-x)(x+1)}\right):\frac{2x-1}{1-x^2}$$

$$A=\left(\frac{x+1}{(1-x)(1+x)}+\frac{2(1-x)}{(x+1)(1-x)}-\frac{5-x}{(1-x)(x+1)}\right):\frac{2x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$A=\left(\frac{x+1+2-2x-5+x}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{2x-1}$$

$$A=\left(\frac{-2}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{2x-1}=\frac{-2}{2x-1}$$

b) Để $A>0$ thì

$\frac{-2}{2x-1}>0$

$2x-1<0$ vì $-2<0$

$x<\frac{1}{2}$ (nhận)

Vậy $x<\frac{1}{2}$ thì $A>0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x-3)\geq 4(2-x)+13$

b) $6x-1-(3x+9)\leq 8x-7-(2x-1)$

c) $8x+17-3(2x+3)\leq 10(x+2)$

d) $17(x+5)+41x\geq -15(x+4)-1$

e) $4(2-3x)-(5-x)>11-x$

f) $2(3-x)-1,5(x-4)<3-x$

ĐS: a) $x\geq 3$ *b)* $x\geq -\frac{4}{3}$ *c)* $x\geq -\frac{3}{2}$ *d)* $x\geq -\frac{83}{73}$ *e)* $x<-\frac{4}{5}$ *f)* $x>\frac{18}{5}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+3)(2x-1)>4x(x+2)$

b) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$

c) $(x-1)^2+(x-3)^2>x^2+(x+1)^2$

d) $3(x+1)+2x(x-1)<2x^2$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{3}<\frac{x+6}{2}$

b) $\frac{5(x-1)}{6}-1\geq\frac{2(x+1)}{3}$

c) $2+\frac{3(x+1)}{8}\leq 3-\frac{x-1}{4}$

d) $\frac{3x+5}{2}-1\leq\frac{x+2}{3}+x$

a) $8x-3<5\left(\frac{8x}{5}+3\right)$

b) $2x+\frac{2x+1}{2}>3x-\frac{1}{5}$

c) $\frac{x+5}{6}+\frac{x-1}{3}\leq\frac{x+3}{2}-1$

d) $x-\frac{5x}{6}-3>\frac{x}{3}-\frac{x}{6}$

Bài 8. Với những giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của biểu thức $7-3(x+1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x-3)-4$.

b) Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3}-x+1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x+3$.

c) Giá trị của biểu thức $(x+1)^2-4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-3)^2$.

d) Giá trị của biểu thức $x-\frac{1-\frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2-\frac{1}{4}x}{3}+2$.

ĐS: a) $x \le \frac{14}{5}$ *b)* $x < -2$ *c)* $x \le \frac{3}{2}$ *d)* $x < 2$.

Bài 9. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \le \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$

b) $\frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$

c) $\frac{4x-2}{3} - x + 3 \le \frac{1-5x}{4}$

d) $\frac{x+4}{5} - x - 5 \ge \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$

Lời giải

a)

$$\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \le \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$$

$$\frac{15.(x-1)}{30} - \frac{2.(7x+3)}{30} \le \frac{10.(2x+1)}{30} + \frac{6.(3-2x)}{30}$$

$$15x - 15 - 14x - 6 \le 20x + 10 + 18 - 12x$$

$$x - 21 \le 8x + 28$$

$$7x \ge -49$$

$$x \ge -7$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \ge -7$

b)

$$\frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$$

$$\frac{-2x-1}{3} + \frac{2x^2+3}{4} > \frac{-x(5-3x)}{6} + \frac{4x+1}{5}$$

$$\frac{20.(-2x-1)+15.(2x^2+3)}{60} > \frac{-10x.(5-3x)+12.(4x+1)}{60}$$

$$\frac{-40x-20+30x^2+45}{60} > \frac{-50x+30x^2+48x+12}{60}$$

$$30x^2 - 40x + 25 > 30x^2 - 2x + 12$$

$$-38x > -13$$

$$x < \frac{13}{38}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{13}{38}$

c)

$\frac{4x-2}{3}-x+3\le\frac{1-5x}{4}$

$\frac{4.(4x-2)+12.(-x+3)}{12}\le\frac{3.(1-5x)}{12}$

$16x-8-12x+36\le 3-15x$

$4x+28\le 3-15x$

$19x\le -25$

$x\le -\frac{25}{19}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\le -\frac{25}{19}$

d)

$\frac{x+4}{5}-x-5\ge\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{2}$

$\frac{6.(x+4)-30.(x+5)}{30}\ge\frac{10.(x+3)-15.(x-2)}{30}$

$6x+24-30x-150\ge 10x+30-15x+30$

$-24x-126\ge -5x+60$

$-19x\ge 186$

$x\le -\frac{186}{19}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\le -\frac{186}{19}$

Bài 10. Giải các bất phương trình

a) $\frac{5x^2-3}{5}+\frac{3x-1}{4}<\frac{x(2x+3)}{2}-5$

b) $\frac{5x-2}{-3}-\frac{2x^2-x}{-2}>\frac{x(1-3x)}{-3}-\frac{5x}{-4}$

c) $2x+\frac{2x+1}{2}>3x-\frac{1}{5}$

d) $x-\frac{5x}{6}-3>\frac{x}{3}-\frac{x}{6}$

Lời giải

a)

$\frac{5x^2-3}{5}+\frac{3x-1}{4}<\frac{x(2x+3)}{2}-5$

$\frac{4.(5x^2-3)+5(3x-1)}{20}<\frac{10x.(2x+3)-5.20}{20}$

$\frac{20x^2-12+15x-5}{20}<\frac{20x^2+30x-100}{20}$

$20x^2+15x-17<20x^2+30x-100$

$-15x<-83$

$15x>83$

$x>\frac{83}{15}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > \frac{83}{15}$

b)

$$\frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} > \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4}$$

$$\frac{-5x+2}{3} + \frac{2x^2-x}{2} > \frac{-x+3x^2}{3} + \frac{5x}{4}$$

$$\frac{4(-5x+2)+6(2x^2-x)}{12} > \frac{4(-x+3x^2)+3.5x}{12}$$

$$-20x+8+12x^2-6x > -4x+12x^2+15x$$

$$-26x+8 > 11x$$

$$-37x > -8$$

$$37x < 8$$

$$x < \frac{8}{37}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{8}{37}$

c)

$$2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$$

$$\frac{10.2x+5(2x+1)}{10} > \frac{3x.10-2}{10}$$

$$20x+10x+5 > 30x-2$$

$0x > -7$ (vô lý)

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

d)

$$x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$$

$$\frac{6x-5x-18}{6} > \frac{2x-x}{6}$$

$$x-18 > x$$

$0x < -18$ (vô lý)

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 11. Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Tìm x để $B < -1$

Đáp số: a) $x \neq -3; x \neq 0;$ $B = \frac{-x-3}{x}$, b) $x > 0$

DẠNG 3
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BIẾN ĐỔI ĐẶC BIỆT

Bất phương trình dạng đặc biệt:

$$\frac{x+a}{b}+\frac{x+c}{d}<\frac{x+e}{f}+\frac{x+g}{h}$$

Phương pháp giải:

- Nếu $a+b=c+d=e+f=g+h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm 1.
- Nếu $a-b=c-d=e-f=g-h=k$.Ta cộng mỗi phân thức thêm -1.
- Sau đó quy đồng từng phân thức, chuyển vế nhóm nhân tử chung đưa về dạng $(x-k)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}-\frac{1}{h}\right)<0.$

Chú ý

- Cần xét xem $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}-\frac{1}{h}\right)$ là số âm hay dương để đưa ra đánh giá về dấu của $(x-k)$.
- Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{6}+\frac{x+5}{3}>\frac{x+3}{5}+\frac{x+6}{2}$ b) $\frac{x-2}{1007}+\frac{x-1}{1008}<\frac{2x-1}{2017}+\frac{2x-3}{2015}$.

Lời giải

a) $\frac{x+2}{6}+\frac{x+5}{3}>\frac{x+3}{5}+\frac{x+6}{2}$

Cộng thêm 1 mỗi phân thức, ta có:

$$\frac{x+2}{6}+1+\frac{x+5}{3}+1>\frac{x+3}{5}+1+\frac{x+6}{2}+1$$

$$\frac{x+8}{6}+\frac{x+8}{3}>\frac{x+8}{5}+\frac{x+8}{2}$$

$$\frac{x+8}{6}+\frac{x+8}{3}-\frac{x+8}{5}-\frac{x+8}{2}>0$$

$$(x+8)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)>0$$

$x+8<0$ vì $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}<0$

$x<-8$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x<-8$

b) $\dfrac{x-2}{1007}+\dfrac{x-1}{1008}<\dfrac{2x-1}{2017}+\dfrac{2x-3}{2015}$

Nhân thêm 2 cho cả tử và mẫu của mỗi phân thức vế trái, ta được:

$\dfrac{2x-4}{2014}+\dfrac{2x-2}{2016}<\dfrac{2x-1}{2017}+\dfrac{2x-3}{2015}$

Cộng thêm -1 mỗi phân thức, ta được:

$\dfrac{2x-4}{2014}-1+\dfrac{2x-2}{2016}-1<\dfrac{2x-1}{2017}-1+\dfrac{2x-3}{2015}-1$

$\dfrac{2x-2018}{2014}+\dfrac{2x-2018}{2016}<\dfrac{2x-2018}{2017}+\dfrac{2x-2018}{2015}$

$\dfrac{2x-2018}{2014}+\dfrac{2x-2018}{2016}-\dfrac{2x-2018}{2017}-\dfrac{2x-2018}{2015}<0$

$(2x-2018)\left(\dfrac{1}{2014}+\dfrac{1}{2016}-\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2015}\right)<0$.

$2x-2018<0$ vì $\dfrac{1}{2014}+\dfrac{1}{2016}-\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2015}>0$

$x<1009$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x<1009$

Bài 2. Giải các bất phương trình ẩn x sau:

a) $\dfrac{x+2004}{2005}+\dfrac{x+2005}{2006}<\dfrac{x+2006}{2007}+\dfrac{x+2007}{2008}$

b) $\dfrac{x-2}{2002}+\dfrac{x-4}{2000}<\dfrac{x-3}{2001}+\dfrac{x-5}{1999}$

c) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ac}{a+c}>a+b+c$ với $(a,b,c>0)$

Lời giải

a)

$\dfrac{x+2004}{2005}+\dfrac{x+2005}{2006}<\dfrac{x+2006}{2007}+\dfrac{x+2007}{2008}$

$\dfrac{x+2004}{2005}-1+\dfrac{x+2005}{2006}-1<\dfrac{x+2006}{2007}-1+\dfrac{x+2007}{2008}-1$

$\dfrac{x-1}{2005}+\dfrac{x-1}{2006}-\dfrac{x-1}{2007}-\dfrac{x-1}{2008}<0$

$(x-1)\left(\dfrac{1}{2005}+\dfrac{1}{2006}-\dfrac{1}{2007}-\dfrac{1}{2008}\right)<0$

$x-1<0$ (do $\dfrac{1}{2005}+\dfrac{1}{2006}-\dfrac{1}{2007}-\dfrac{1}{2008}>0$)

$x<1$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x<1$.

b)

$$\frac{x-2}{2002}+\frac{x-4}{2000}<\frac{x-3}{2001}+\frac{x-5}{1999}$$

$$\frac{x-2}{2002}-1+\frac{x-4}{2000}-1<\frac{x-3}{2001}-1+\frac{x-5}{1999}-1$$

$$\frac{x-2004}{2002}+\frac{x-2004}{2000}<\frac{x-2004}{2001}+\frac{x-2004}{1999}$$

$$(x-2004)\left(\frac{1}{2002}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}-\frac{1}{1999}\right)<0$$

$x-2004>0$ (do $\frac{1}{2002}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}-\frac{1}{1999}<0$)

$x>2004$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>2004$

c)

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ac}{a+c}>a+b+c$$

$$\frac{x-ab}{a+b}-c+\frac{x-bc}{b+c}-a+\frac{x-ac}{a+c}-b>0$$

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}+\frac{x-ac-bc-ab}{a+c}>0$$

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)>0$$

$x-ab-ac-bc>0$ (do a, b, c >0 $\Rightarrow \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>0$)

$x>ab+ac+bc$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>ab+ac+bc$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các bất phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

a) $\frac{x+1987}{2002}+\frac{x+1988}{2003}>\frac{x+1989}{2004}+\frac{x+1990}{2005}$

b) $\frac{x-1}{99}+\frac{x-3}{97}+\frac{x-5}{95}<\frac{x-2}{98}+\frac{x-4}{96}+\frac{x-6}{94}$

c) $\frac{x\text{-}1987}{2002}+\frac{x-1988}{2003}>\frac{x-1989}{2004}+\frac{x-1990}{2005}$

d) $\frac{x+1}{99}+\frac{x+3}{97}+\frac{x+5}{95}<\frac{x+2}{98}+\frac{x+4}{96}+\frac{x+6}{94}$

ĐS: a) $x>15$ *b)* $x>100$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

a) $\frac{x+1}{35}+\frac{x+3}{33}\geq\frac{x+5}{31}+\frac{x+7}{29}$

b) $\frac{x-85}{15}+\frac{x-74}{13}+\frac{x-67}{11}\leq 6$

c) $\frac{x-1}{13}-\frac{2x-13}{15}<\frac{3x-15}{27}-\frac{4x-27}{29}$

d) $\frac{x+1}{65}+\frac{x+3}{63}-\frac{x+5}{61}-\frac{x+7}{59}<0$

e) $\frac{x+29}{31}-\frac{x+27}{33}\leq\frac{x+17}{43}-\frac{x+15}{45}$

f) $\frac{x+6}{1999}+\frac{x+8}{1997}\geq\frac{x+10}{1995}+\frac{x+12}{1993}$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

a) $\frac{x-10}{1994}+\frac{x-8}{1996}+\frac{x-6}{1998}>\frac{x-1998}{6}+\frac{x-1996}{8}+\frac{x-1994}{10}$

b) $\frac{x-1995}{5}-\frac{x-5}{1995}+\frac{x-1997}{3}-\frac{x-3}{1997}+\frac{x-1999}{1}-\frac{x-1}{1999}<0$

c) $\frac{1909-x}{91}+\frac{1907-x}{93}+\frac{1905-x}{95}+\frac{1903-x}{91}>4$

d) $\frac{x-29}{1970}+\frac{x-27}{1972}+\frac{x-25}{1974}>\frac{x-1970}{29}+\frac{x-1972}{27}+\frac{x-1974}{25}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

a) $\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2018}<\frac{x-4}{2019}+\frac{x-5}{2020}$

b) $\frac{x-1009}{1001}+\frac{x-4}{1003}+\frac{x+2010}{1005}\ge 7$

c) $\frac{x-3}{2011}+\frac{x-2}{2012}\le\frac{x-2012}{2}+\frac{x-2011}{3}$

d) $\frac{x+1}{2009}+\frac{x+2}{2008}+\frac{x+3}{2007}+\frac{x+4}{2006}+4>0$

e) $\frac{x+1}{2013}+\frac{x+2}{2012}<\frac{x+3}{2011}+\frac{x+4}{2010}$

f) $\frac{x-21}{1978}-\frac{x-1978}{21}+\frac{x-19}{1980}-\frac{x-1980}{19}\ge 0$

DẠNG 4

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải (hình vẽ) lần lượt là $3x + 4$, $x + 6$. Do đĩa cân lệch về bên trái nên ta có hệ thức: $3x + 4 > x + 6$.

Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là gì?

Lời giải

Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là một bất phương trình ẩn x.

Bài 2. Để hưởng ứng phong trào "Trồng cây gây rừng", lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?

Lời giải

Gọi x là số cây xanh lớp 9A cần trồng thêm ít nhất ($x > 0$).

Số cây xanh lớp 9A trồng theo x là: $x + 54$ (cây xanh).

Theo đề bài, để lớp 9A đạt được kế hoạch đề ra thì:

$x + 54 \geq 100$

$x \geq 46$.

Vậy lớp 9A đạt được kế hoạch đề ra thì phải trồng ít nhất 46 cây xanh.

Bài 3. Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

Lời giải

Gọi số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là x.

Điều kiện : $x \in \mathbb{N}^*, x < 15$

Theo bài ra ta có bất phương trình:

$(15 - x).\ 2000 + x.\ 5000 \le 70000$

$(15 - x).\ 2 + x.\ 5 \le 70$

$x \le \dfrac{40}{3}$

Mà $x \in \mathbb{N}^*, x < 15 \Rightarrow x$ là các số nguyên từ 1 đến 13.

Vậy số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là các số nguyên từ 1 đến 13.

Bài 4. Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h.

Lời giải

Gọi quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h là x (km) .

Điều kiện : $0 < x < 18$

Theo bài ra ta có bất phương trình :

$\dfrac{x}{5} + \dfrac{18 - x}{4} \le 4$

$4x + 90 - 5x \le 80$

$x \ge 10$

Mà $0 < x < 18 \Rightarrow 10 \le x < 18$.

Vậy quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h là x (km) thỏa mãn $10 \le x < 18$.

Bài 5. Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi, mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng thi tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng Điều kiện : $x \in \mathbb{N}^*, x \le 12$

Suy ra $12 - x$ là số câu trả lời sai.

Số điểm được cộng là 5x, số điểm bị trừ là $2(12 - x)$.

Vì muốn vào vòng thi tiếp theo mỗi thí sinh cần có ít nhất 50 điểm, ban đầu mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm nên ta có:

$5x-2(12-x)+20\geq 50$

$5x-24+2x+20\geq 50$

$5x-2x\geq 50+24-20$

$7x\geq 54$

$x\geq \dfrac{54}{7}\approx 7,7$

Vậy muốn vào vòng thi tiếp theo, thí sinh cần trả lời đúng ít nhất 8 câu.

Bài 6. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho sau x ngày xuất hàng, khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn.

Lời giải

Sau x ngày, khối lượng xi măng xuất đi là: 20x (tấn).

Khi đó, khối lượng xi măng còn lại trong kho là: 100 – 20x (tấn).

Theo bài, khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn nên ta có bất phương trình: $100-20x\geq 10$.

Giải bất phương trình:

$100-20x\geq 10$

$-20x\geq -90$

$x\leq 4,5.$

Vậy $x\leq 4,5$.

Bài 7. Đến ngày 31/12/2024, gia đình Cô Thúy đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình Cô Thúy đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình Cô Thúy dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

Lời giải

Gọi x (tháng) là thời gian gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải bằng số tiền tiết kiệm được.

Sau x tháng, số tiền gia đình Cô Thúy tiết kiệm được là: 10x (triệu đồng).

Khi đó tổng số tiền gia đình Cô Thúy tiết kiệm được là: 250 + 10x (triệu đồng).

Theo bài, gia đình Cô Thúy dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng nên ta có bất phương trình: $250+10x\geq 370$.

Giải bất phương trình:

$250+10x\geq 370$

$10x\geq 120$

$x\geq 12.$

Vậy sau ít nhất 12 tháng, gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được.

Bài 8. Bạn Minh Hiền có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Minh Hiền mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

Gọi x (quyển) là số vở mà Minh Hiền có thể mua ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số tiền mua x quyển vở là 7x (nghìn đồng).

Số tiền mua một cái bút và một số quyển vở là 18 + 7x (nghìn đồng).

Theo bài, bạn Minh Hiền có 100 nghìn đồng nên ta có bất phương trình:

$18 + 7x \le 100$

$7x \le 100 - 18$

$7x \le 82$

$x \le \dfrac{82}{7} \approx 11,7$

Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên Minh Hiền có thể mua được nhiều nhất là 11 quyển vở.

Bài 9. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi x là số kilômét mà hành khách đó có thể di chuyển với 200 nghìn đồng (x > 0).

Giá tiền cho x km là 12x (nghìn đồng).

Giá mở cửa của taxi là 15 nghìn đồng nên số tiền cần thanh toán khi đi x km là: 15 + 12x (nghìn đồng).

Theo bài, ta có:

$15 + 12x \le 200$

$12x \le 185$

$x \le \dfrac{185}{12} \approx 15,4$

Mà x > 0 và làm tròn đến hàng đơn vị nên với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa 15 kilômét.

Bài 10. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường THCS Nguyễn Hiền, thầy Nam đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

Lời giải

Gọi x là số quả bóng học sinh cần ném vào rổ ($0 \le x \le 15$, $x \in \mathbb{N}^*$).

Số quả bóng ném ra ngoài là: 15 – x (quả).

Ném vào rổ x quả bóng được cộng 2x (điểm).

Ném ra ngoài 15 – x quả bóng bị trừ 15 – x (điểm).

Vì vậy, sau khi ném 15 quả bóng thì học sinh đó sẽ có số điểm là:

$2x - (15 - x) = 2x - 15 + x = 3x - 15$ (điểm).

Theo bài, để được vào đội tuyển thì học sinh cần có số điểm từ 15 trở lên, nên ta có bất phương trình:

$3x - 15 \geq 15$

$3x \geq 30$

$x \geq 10.$

Mà $0 \leq x \leq 15$, $x \in \mathbb{N}^*$ nên học sinh đó cần phải ném vào rổ ít nhất là 10 quả bóng thì mới được chọn vào đội tuyển.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Bác Hoàng dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng bác Hoàng chạy được 4 000 m. Gọi x là số mét bác Hoàng chạy bộ vào buổi chiều. Viết hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để bác Hoàng chạy được như dự định.

Lời giải

Quãng đường bác Hoàng chạy bộ buổi sáng và buổi chiều theo x là 4 000 + x.

Bác Hoàng dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày, nghĩa là tổng quãng đường bác Hoàng dự định chạy bộ trong ngày lớn hơn hoặc bằng 6 500 m.

Khi đó ta có: $4\,000 + x \geq 6\,500$.

Vậy hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để bác Hoàng chạy được như dự định là $4\,000 + x \geq 6500$.

Bài 12. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc, viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ năng này. Bạn Minh Nhi đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6,5; 6,5; 5,5. Hỏi bạn Minh Nhi cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để đạt được của bài thi ít nhất là 6,25?

Lời giải

Gọi x là điểm của kĩ năng nói.

Theo đề bài ta có

$\frac{6,5.2 + 5,5 + x}{4} \geq 6,25$

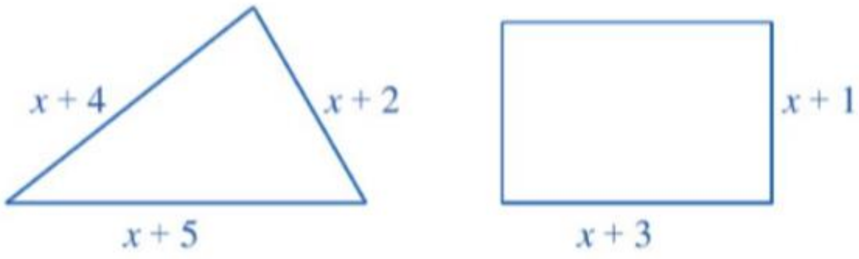
$18,5 + x \geq 25$

$x \geq 25 - 18,5$

$x \geq 6,5$

Vậy bạn Minh Nhi cần đạt ít nhất 6,5 điểm nói.

Bài 13. Tìm số thực dương x sao cho chu vi của hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật (ở hình vẽ dưới)



Lời giải

Chu vi của hình tam giác là: (x + 4) + (x + 2) + (x + 5) = 3x + 11.

Chu vi của hình chữ nhật là: 2.(x + 1 + x + 3) = 2.(2x + 4) = 4x + 8.

Theo bài, chu vi hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật nên ta có bất phương trình:

$$3x + 11 > 4x + 8.$$

Giải bất phương trình:

$3x + 11 > 4x + 8$

$3x - 4x > 8 - 11$

$-x > -3$

$x < 3.$

Mà x là số thực dương nên x > 0.

Vậy 0 < x < 3.

Bài 14. Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°F. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C?

b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°C. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F?

Lời giải

a) Theo bài, $F \geq 95$ nên $F - 32 \geq 95 - 32$ hay $F - 32 \geq 63$.

Suy ra $\frac{5}{9}(F - 32) \geq \frac{5}{9}.63$ hay $C \geq 35$

do đó $C \geq 35$.

Vậy nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°F, tức ít nhất là 35°C.

b) Theo bài, $C \geq 95$ nên $\frac{5}{9}(F - 32) \geq 95$

Giải bất phương trình:

$\frac{5}{9}(F-32) \geq 95$

$F-32 \geq 95 : \frac{5}{9}$

$F-32 \geq 171$

$F \geq 203$

Vậy nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°C, tức là ít nhất là 203°F.

Bài 15. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần sản xuất trong ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

Lời giải

Gọi x (ngày) là số ngày sản xuất xi măng của nhà máy đó (x > 0).

Khối lượng xi măng sản xuất được sau x ngày là: 100x (tấn).

Khối lượng xi măng tính cả lượng xi măng tồn trong kho sau x ngày là: 100x + 300 (tấn).

Theo bài, sau x ngày thì nhà máy xuất đi ít nhất 15 300 tấn xi măng nên ta có bất phương trình:

$100x + 300 \geq 15\,300$.

Giải bất phương trình:

$100x + 300 \geq 15\,300$

$100x \geq 15\,000$

$x \geq 150$.

Vậy nhà máy đó cần sản xuất trong ít nhất là 150 ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho).

Bài 16. Chỉ số khối cơ thể BMI cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau: $\mathrm{BMI} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.

Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo chỉ số BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương:

Nam	Nữ
BMI < 20: Gầy 20 ≤ BMI < 25: Bình thường 25 ≤ BMI < 30: Béo phì độ I (nhẹ) 30 ≤ BMI < 40: Béo phì độ II (trung bình) 40 ≤ BMI: Béo phì độ III (nặng)	BMI < 18: Gầy 18 ≤ BMI < 23: Bình thường 23 ≤ BMI < 30: Béo phì độ I (nhẹ) 30 ≤ BMI < 40: Béo phì độ II (trung bình) 40 ≤ BMI: Béo phì độ III (nặng)

a) Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

b) Giả sử Cô Hồng có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của Cô Hồng dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

Lời giải

a) Thay h = 1,68 m vào biểu thức $BMI = \frac{m}{h}$, ta được:

$$BMI = \frac{m}{h} = \frac{m}{1,68^2} = \frac{m}{12,8224}$$

Suy ra m = 2,8224.BMI.

Khi BMI < 20 thì 2,8224.BMI < 56,448 hay m < 56,448.

Khi $20 \le BMI < 25$ thì $56,448 \le 2,8224.BMI < 70,56$ hay $56,448 \le m < 70,56$.

Khi $25 \le BMI < 30$ thì $70,56 \le 2,8224.BMI < 84,672$ hay $70,56 \le m < 84,672$.

Khi $30 \le BMI < 40$ thì $84,672 \le 2,8224.BMI < 112,896$ hay $84,672 \le m < 112,896$.

Khi $40 \le BMI$ thì $112,896 \le 2,8224.BMI$ hay $112,896 \le m$.

Vậy ta có bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng như sau:

Cân nặng	***Thể trạng***
$m < 56,448$	Gầy
$56,448 \le m < 70,56$	Bình thường
$70,56 \le m < 84,672$	Béo phì độ I (nhẹ)
$84,672 \le m < 112,896$	Béo phì độ II (trung bình)
$112,896 \le m$	Béo phì độ III (nặng)

b) Thay h = 1,6 m vào biểu thức $BMI = \frac{m}{h}$, ta được:

$$BMI = \frac{m}{h} = \frac{m}{1,6^2} = \frac{m}{2,56}$$

Suy ra m = 2,56.BMI.

Khi BMI < 18 thì 2,56.BMI < 46,08 hay m < 46,08.

Khi $18 \le BMI < 23$ thì $46,08 \le 2,56.BMI < 58,88$ hay $46,08 \le m < 58,88$.

Khi $23 \le BMI < 30$ thì $58,88 \le 2,56.BMI < 76,8$ hay $58,88 \le m < 76,8$.

Khi $30 \le BMI < 40$ thì $76,8 \le 2,56.BMI < 102,4$ hay $76,8 \le m < 102,4$.

Khi $40 \le BMI$ thì $102,4 \le 2,56.BMI$ hay $102,4 \le m$.

Vậy ta có bảng về chỉ số cân nặng của Cô Hồng dựa theo bảng đánh giá thể trạng như sau:

Cân nặng	***Thể trạng***
$m < 46,08$	Gầy
$46,08 \le m < 58,88$	Bình thường
$58,88 \le m < 76,8$	Béo phì độ I (nhẹ)

$76,8 \le m < 102,4$	Béo phì độ II (trung bình)
$102,4 \le m$	Béo phì độ III (nặng)

Bài 17. Trong một cuộc thi tuyển dụng việc làm, ban tổ chức quy định mỗi người ứng tuyển phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có săn bốn đáp án, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Người ứng tuyển chọn đáp án đúng sẽ được cộng thêm 2 điểm, chọn đáp án sai bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 5 điểm và theo quy định người ứng tuyển phải trả lời hết 25 câu hỏi; người nào có số điểm từ 25 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được vào vòng tiếp theo?

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng ($0 \le x \le 25,\ x \in \mathbb{N}^*$).

Số câu trả lời sai là: 25 – x (câu).

Trả lời đúng x câu hỏi được cộng 2x (điểm).

Trả lời sai 25 – x câu hỏi bị trừ 25 – x (điểm).

Vì vậy, sau khi trả lời 25 câu thì người dự thi sẽ có số điểm là:

$2x - (25 - x) = 2x - 25 + x = 3x - 25$ (điểm).

Theo bài, để được dự thi tiếp vòng sau thì cần có số điểm từ 25 trở lên, nên ta có bất phương trình:

$3x - 25 \ge 25$

$3x \ge 50$

$x \le \dfrac{50}{3} \approx 16,7$

Mà $0 \le x \le 25,\ x \in \mathbb{N}^*$ nên người ứng tuyển cần phải trả lời chính xác ít nhất là 17 câu hỏi thì mới được dự thi tiếp vòng sau.

Bài 18. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%/ tháng. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hằng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi tiết kiệm (x > 0).

Khi đó số tiền lãi 1 tháng là 0,4%.x = 0,004x (triệu đồng).

Để số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì ta phải có:

$0,004x \ge 3$

$x \ge 750.$

Vậy số tiền tiết kiệm ít nhất là 750 triệu đồng để có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng.

Bài 19. Người ta dùng một loại xe tải để chở sữa tươi cho một nhà máy. Biết mỗi thùng sữa loại 180 ml nặng trung bình 10 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng sữa như vậy, biết bác lái xe nặng 65 kg?

Lời giải

Đổi đơn vị: 5,25 tấn = 5 250 kg.

Gọi x (thùng) là số sữa mà xe có thể chở ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó, khối lượng sữa mà xe chở là: 10x (kg).

Tổng khối lượng sữa và bác tài xế là: 65 + 10x (kg).

Do trọng tải (tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5 250 kg nên ta có:

$65 + 10x \le 5\,250$

$10x \le 5\,185$

$x \le 518{,}5$.

Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên xe tải đó có thể chở tối đa 518 thùng sữa.

Bài 20. Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau:

Gói cước A	**Gói cước B**
Cước thuê bao hằng tháng 32 USD 45 phút miễn phí 0,4 USD cho mỗi phút thêm	Cước thuê bao hằng tháng là 44 USD Không có phút miễn phí 0,25 USD/phút

a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.

b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

Lời giải

a) Gọi x (phút) là thời gian gọi trong một tháng (x > 0).

Theo bài, phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau, mà cước thuê bao hàng tháng của gói A nhỏ hơn gói B (32 < 44) nên thời gian gọi phải nhiều hơn 45 phút do tính thêm phí cho phút gọi thêm. Tức là x > 45.

– Đối với gói cước A:

Thời gian gọi thêm là: x – 45 (phút);

Phí cần trả cho số phút gọi thêm là: 0,4.(x – 45) (USD);

Phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_1 = 32 + 0{,}4.(x - 45)$ (USD).

– Đối với gói cước B:

Phí cần trả cho x phút gọi là: 0,25x (USD);

Phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_2 = 44 + 0{,}25x$ (USD).

Để phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau thì ta có phương trình sau: $T_1 = T_2$, hay 44 + 0,25x = 32 + 0,4.(x – 45). (*)

Giải phương trình (*):

$44 + 0{,}25x = 32 + 0{,}4.(x - 45)$

$44 + 0{,}25x = 32 + 0{,}4x - 0{,}4.45$

$0,25x - 0,4x = 32 - 18 - 44$

$-0,15x = -30$

$x = 200$ (thỏa mãn điều kiện $x > 45$).

Vậy thời gian gọi mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước như nhau là 200 phút.

b)

– Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng, tức là $x \le 180$ thì:

$x - 45 \le 180 - 45$ hay $x - 45 \le 135$

Suy ra $0,4.(x - 45) \le 54$ nên $32 + 0,4.(x - 45) \le 32 + 54$ hay $T_1 \le 86$.

$0,25x \le 45$ nên $44 + 0,25x \le 44 + 45$ hay $T_2 \le 89$.

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước A để mất chi phí rẻ hơn.

– Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng, tức là $x \le 500$ thì:

$x - 45 \le 500 - 45$ hay $x - 45 \le 455$

Suy ra $0,4.(x - 45) \le 182$ nên $32 + 0,4.(x - 45) \le 32 + 182$ hay $T_1 \le 214$.

$0,25x \le 125$ nên $44 + 0,25x \le 44 + 125$ hay $T_2 \le 169$.

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước B để mất chi phí rẻ hơn.

Bài 21. Bạn Trúc Linh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Trúc Linh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Trúc Linh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải

Tổng điểm của ba môn nghe, nói, đọc của bạn Trúc Linh khoảng: $6,7 . 3 = 20,1 \approx 20$ (do mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10).

Gọi x là điểm bài kiểm tra viết của Trúc Linh ($0 < x \le 10,\ x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó điểm trung bình bốn bài kiểm tra của Trúc Linh là: $\frac{20+x}{4}$.

Để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên thì:

$\frac{20+x}{4} \ge 7$

$20 + x \ge 28$

$x \ge 8$

$20 + x \ge 28$

$x \ge 8$.

Mà $0 < x \le 10,\ x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{8;9;10\}$

Vậy bài kiểm tra viết của Trúc Linh cần được 8 điểm hoặc 9 điểm hoặc 10 điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên.

CHƯƠNG 3
CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 1
CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

1. Căn bậc hai

a. Khái niệm căn bậc hai

Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

Nhận xét:

- Số âm không có căn bậc hai.
- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là chính nó, ta viết $\sqrt{0} = 0$
- Mỗi số thực dương $a\left(a \geq 0\right)$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau. Số dương kí hiệu là: $\sqrt{a}$,

số âm kí hiệu là: $-\sqrt{a}$. Ta gọi $\sqrt{a}$ là căn bậc hai số học của a.

b. Tính chất của căn bậc hai

Với mọi số a, ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

2. Căn thức bậc hai

a. Căn thức bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.
- $\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm và thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$.

b. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- Với $A \geq 0$, ta có $\sqrt{A} \geq 0$; $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$
- $\sqrt{A^2} = |A|$

DẠNG 1
TÌM CĂN BẬC HAI

- Nếu $a>0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm\sqrt{a}$.
- Với số $a\ge 0$, ta có $\sqrt{a^2}=a$; $\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(-\sqrt{a}\right)^2=a$

Bài 1. Tìm căn bậc hai của :

a) 169 b) $2,25$ c) $0,64$ d) $\dfrac{36}{121}$

Lời giải

a) 169

Ta có $13^2=169$ nên có hai căn bậc hai là 13 và -13.

b) $2,25$

Ta có $1,5^2=2,25$ nên có hai căn bậc hai là $1,5$ và $-1,5$.

c) $0,64$

Ta có $0,8^2=0,64$ nên có hai căn bậc hai là $0,8$ và $-0,8$.

d) $\dfrac{36}{121}$

Ta có $\left(\dfrac{6}{11}\right)^2=\dfrac{36}{121}$ nên có hai căn bậc hai là $\dfrac{6}{11}$ và $-\dfrac{6}{11}$.

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{\dfrac{121}{169}}$ c) $\left(-\sqrt{7}\right)^2$ d) $\sqrt{\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$

b) $\sqrt{\dfrac{121}{169}}=\sqrt{\left(\dfrac{11}{13}\right)^2}=\dfrac{11}{13}$

c) $\left(-\sqrt{7}\right)^2=7$

d) $\sqrt{\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm căn bậc hai của :

a) 64 b) 400 c) $0,49$ d) $\frac{25}{169}$

Lời giải

a) 64

Ta có $8^2=64$ nên có hai căn bậc hai là 8 và -8.

b) 400

Ta có $20^2=400$ nên có hai căn bậc hai là 20 và -20.

c) $0,49$

Ta có $0,7^2=0,49$ nên có hai căn bậc hai là $0,7$ và $-0,7$.

d) $\frac{25}{169}$

Ta có $\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$ nên có hai căn bậc hai là $\frac{5}{13}$ và $-\frac{5}{13}$.

Bài 4. Tính

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$ c) $-\sqrt{(-8)^2}$ d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{4}{49}}=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{2}{7}$

c) Ta có: $-\sqrt{(-8)^2}=-\sqrt{64}=-\sqrt{8^2}=-8$

d) Ta có: $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2==\frac{3}{4}$

DẠNG 2
SO SÁNH CĂN BẬC HAI

Phương pháp

Với: $a \ge 0, b \ge 0$ nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{120}$ và $\sqrt{97}$

b) $\sqrt{81}$ và 19

Lời giải

a) Ta có: $120 > 97 \Rightarrow \sqrt{120} > \sqrt{97}$

b) Ta có: $\sqrt{81} = 9 < 19$

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b. 3 và $\sqrt{8}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2}{3} < \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{3}{2}}$

b) Ta có: $3^2 = 9; \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \Rightarrow 3 > 2\sqrt{2}$

DẠNG 3

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2024-x}$ tại $x=2023;\ x=2015;\ x=1943$.

b) $\sqrt{x^2+5}$ tại $x=-2;\ x=2;\ x=\sqrt{11}$.

c) $\sqrt{x^2-x+4}$ tại $x=-3;\ x=0;\ x=4$.

Lời giải

a) $\sqrt{2024-x}$

- Thay $x=2023$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-2023}=\sqrt{1}=1$

- Thay $x=2015$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-2015}=\sqrt{9}=3$

- Thay $x=1943$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-1943}=\sqrt{81}=9$

b) $\sqrt{x^2+5}$

- Thay $x=-2$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{(-2)^2+5}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$

- Thay $x=2$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2^2+5}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$

- Thay $x=\sqrt{11}$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+5}=\sqrt{11+5}=\sqrt{16}=4$

c) $\sqrt{x^2-x+4}$

- Thay $x=-3$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{(-3)^2-(-3)+4}=\sqrt{9+3+4}=\sqrt{16}=4$

- Thay $x=0$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{0^2-0+4}=\sqrt{4}=2$

- Thay $x=4$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{4^2-4+4}=\sqrt{4^2}=4$

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2x+1}$ tại $x=0;\ x=4;\ x=12$.

b) $\sqrt{13-x^2}$ tại $x=-3;\ x=-2;\ x=0$.

c) $\sqrt{2x^2+x+6}$ tại $x=-3;\ x=1;\ x=2$.

DẠNG 4
TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC HAI CÓ NGHĨA

- $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- $\sqrt{A^2}$ có nghĩa $\forall x \in R$
- $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ A > 0
- $\dfrac{1}{\sqrt{A^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \neq 0$
- $A^2 \geq 0 \ \ \forall A \in \mathbb{R}$
- $A^2 > 0 \ \ \forall A \neq 0$

Bài 1. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-2024x}$ b) $\sqrt{3x-15}$ c) $\sqrt{-2x-5}$

Lời giải

a) $\sqrt{-2024x}$ có nghĩa khi $-2024x \geq 0$ hay $x \leq 0$.

b) $\sqrt{3x-15}$ có nghĩa khi $3x-15 \geq 0$ hay $3x \geq 15$ hay $x \geq 5$.

c) $\sqrt{-2x-5}$ có nghĩa khi $-2x-5 \geq 0$ hay $-2x \geq 5$ hay $x \leq -\dfrac{5}{2}$.

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\dfrac{2025}{2x+3}}$ b) $\sqrt{\dfrac{-1}{3x-1}}$ c.) $\sqrt{\dfrac{2-7x}{2024}}$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{2025}{2x+3}}$

Do $2025 > 0$ nên $\sqrt{\dfrac{2025}{2x+3}}$ có nghĩa khi $2x+3 > 0$ hay $2x \geq -3$ hay $x > \dfrac{-3}{2}$.

b) $\sqrt{\dfrac{-1}{3x-1}}$

Do $-1 < 0$ nên $\sqrt{\dfrac{-1}{3x-1}}$ có nghĩa khi $3x-1 < 0$ hay $3x < 1$ hay $x < \dfrac{1}{3}$.

c) $\sqrt{\dfrac{2-7x}{2024}}$

Do $2024 > 0$ nên $\sqrt{\dfrac{2-7x}{2024}}$ có nghĩa khi $2-7x \geq 0$ hay $-7x \geq -2$ hay $x \leq \dfrac{2}{7}$.

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\dfrac{2025}{x^2}}$ b) $\dfrac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{2025}{x^2}}$

Do $x^2 \geq 0$ mọi x nên $\sqrt{\dfrac{2025}{x^2}}$ có nghĩa khi $x \neq 0$

b) $\dfrac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $x-2 \neq 0$ và $x-2 \geq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \geq 2$ hay $x > 2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Với giá trị nào của *x* thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-2021x}$ b) $\sqrt{3-6x}$ c) $\dfrac{2021}{3-\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$

Lời giải

a) $\sqrt{-2021x}$ có nghĩa khi $-2021x \geq 0$ hay $x \leq 0$

b) $\sqrt{3-6x}$ có nghĩa khi $3-6x \geq 0$ hay $x \leq \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$ có nghĩa khi $4x-1>0$ hay $x > \dfrac{1}{4}$

Bài 5. Với giá trị nào của *x* thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+3}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{-x^2-2021}}$

Lời giải

e) $\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+3}$.

ta có $\dfrac{1}{2}x^2+3>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra biểu thức luôn có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy biểu thức luôn có nghĩa.

f) $\dfrac{3}{\sqrt{-x^2-2021}}$ có nghĩa khi $-x^2-2021>0$

ta có $-x^2-2021<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra biểu thức vô nghĩa

Bài 6. Với mỗi giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3x-5}}$ b) $\sqrt{-3x}$ c) $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$

d) $\sqrt{x^2+2}$ e) $\sqrt{\dfrac{3}{x^2+1}}$ f) $\sqrt{2x-1}$

g) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ h) $\sqrt{-|x+1|}$ i) $\sqrt{-x^2-3}$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3x-5}}$ có nghĩa khi $\dfrac{2}{3x-5}>0$

$\dfrac{2}{3x-5}>0$

$3x-5>0$

$3x>5$

$x>\dfrac{5}{3}$

b) $\sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $-3x\ge 0$ hay $x\le 0$

c) $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$ có nghĩa khi $\dfrac{1}{3-2x}>0$

$\dfrac{1}{3-2x}>0$

$3-2x>0$

$3>2x$

$\dfrac{3}{2}>x$

$x<\dfrac{3}{2}$

d) $\sqrt{x^2+2}$

Do $x^2+2\ge 0$ với mọi x nên biểu thức luôn có nghĩa

e) $\sqrt{\dfrac{3}{x^2+1}}$

Do $3>0$ và $x^2+1>0, \forall x\in R$ nên $\sqrt{\dfrac{3}{x^2+1}}$ có nghĩa với mọi $x\in R$

f) $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa khi $2x-1\ge 0$ hay $2x\ge 1$ hay $x\ge \dfrac{1}{2}$

g) Ta có: $-x^2+2x-1=-\left(x^2-2x+1\right)=-\left(x-1\right)^2\le 0, \forall x\in R$, nên $\sqrt{-x^2+2x-1}$ có nghĩa khi

$-\left(x-1\right)^2=0$ hay $x=1$

h) Ta có $|x+1|\ge 0$ hay $-|x+1|\le 0, \forall x\in R \Rightarrow \sqrt{-|x+1|}$ có nghĩa khi $-|x+1|=0 \Leftrightarrow x=-1$

i) Ta có $-x^2-3=-\left(x^2+3\right)$, do $x^2+3\ge 3>0 \Rightarrow -\left(x^2+3\right)<0$

Do đó không tồn tại x để $\sqrt{-x^2-3}$ có nghĩa.

Bài 7. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\dfrac{x}{x+2}+\sqrt{x-2}$ b) $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{-3x}$

Lời giải

a) $\dfrac{x}{x+2}+\sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $x-2\geq 0$ và $x+2\neq 0$ hay $x\geq 2$ và $x=-2$ hay $x\geq 2$

b) $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{-3x}=\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x}}+\sqrt{-3x}$

Do $x^2+3>0$ mọi x nên $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $x>0$ và $-3x\geq 0$ hay $x>0$ và $x\leq 0$ (vô lí)

Vậy không có giá trị nào của x làm biểu thức có nghĩa.

DẠNG 5
CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

- Với mọi số a, ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$
- Với mỗi biểu thức A, ta có: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{2024^2}$ b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$ c) $-\sqrt{(-8)^2}$ d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

Lời giải

a) $\sqrt{2024^2} = |2024| = 2024$

b) $\sqrt{\frac{4}{49}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$

c) $-\sqrt{(-8)^2} = -|-8| = -8$

d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ c) $(-\sqrt{2})^2$ d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $\sqrt{\frac{121}{169}} = \sqrt{\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{11}{13}$

c) $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$

Bài 3. Tính

a) $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}$ b) $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}=\left|\sqrt{24}-5\right|$

Do $\sqrt{24}<\sqrt{25}$ hay $\sqrt{24}<5$ nên $\sqrt{24}-5<0$

Vì thế $\left|\sqrt{24}-5\right|=-\left(\sqrt{24}-5\right)=5-\sqrt{24}$

Vậy $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}=\left|\sqrt{24}-5\right|=5-\sqrt{24}$

b) $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}=\left|4-\sqrt{15}\right|$

Do $\sqrt{16}>\sqrt{15}$ hay $4>\sqrt{15}$ nên $4-\sqrt{15}>0$

Vì thế $\left|4-\sqrt{15}\right|=4-\sqrt{15}$

Vậy $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}=\left|4-\sqrt{15}\right|=4-\sqrt{15}$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}=\left|\sqrt{8}-3\right|$

Do $\sqrt{8}<\sqrt{9}$ hay $\sqrt{8}<3$ nên $\sqrt{8}-3<0$

Vì thế $\left|\sqrt{8}-3\right|=-\left(\sqrt{8}-3\right)=3-\sqrt{8}$

Vậy $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}=\left|\sqrt{8}-3\right|=3-\sqrt{8}$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^2}+x-2024$ với $x<0$ b) $\sqrt{4x^2}+2025$ với $x\geq 0$

c) $\sqrt{x^2-2x+1}$ với $x<1$ d) $\sqrt{4x^2+4x+1}$ với $x\geq -\dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) $\sqrt{x^2}+x-2024=|x|+x-2024$

Với $x<0$ nên $|x|=-x$

Vì thế $\sqrt{x^2}+x-2024=|x|+x-2024=-x+x-2024=-2024$

Vậy $\sqrt{x^2}+x-2024=-2024$

b) $\sqrt{4x^2}+2025=\sqrt{(2x)^2}+2025=|2x|+2025$

Với $x\geq 0$ nên $|2x|=2x$

Vì thế $\sqrt{4x^2}+2025=\sqrt{(2x)^2}+2025=|2x|+2025=2x+2025$

Vậy $\sqrt{4x^2}+2025=2x+2025$

c) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Với $x<1$ nên $|x-1|=-(x-1)$

Vì thế $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=-(x-1)=1-x$

Vậy $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$

d) $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$

Với $x\geq-\frac{1}{2}$ nên $|2x+1|=2x+1$

Vì thế $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|=2x+1$

Vậy $\sqrt{4x^2+4x+1}=2x+1$

DẠNG 6
ỨNG DỤNG

Bài 1. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng 53 052 m^2. Hỏi độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

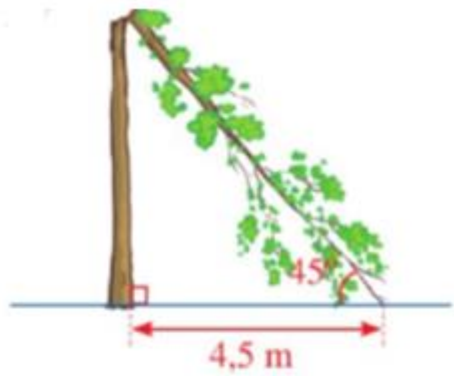
Gọi a (m) là độ dài cạnh của nền kim tự tháp dạng hình vuông (a > 0).

Diện tích của nền kim tự tháp đó là a^2 (m^2).

Theo bài, ta có: $a^2 = 53\,052$, suy ra $a = \sqrt{53052} \approx 230{,}3$ (m).

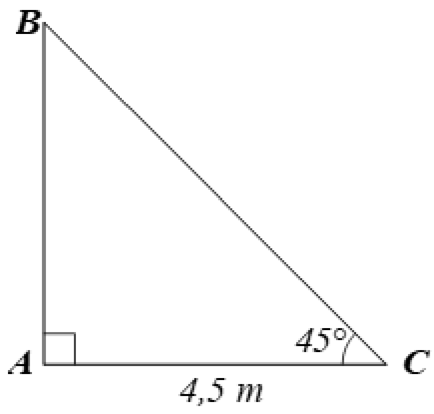
Vậy độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là khoảng 230,3 mét.

Bài 2. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở hình vẽ). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là 4,5 m. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Giả sử hình ảnh của cây được mô tả như hình vẽ dưới đây:



Vì ΔABC vuông cân tại A có $ACD = 45^0$ nên ΔABC vuông cân tại A.

Do đó AB = AC = 4,5 m.

Áp dụng định lí Pythagore vào ΔABC vuông cân tại A, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(4,5)^2 + (4,5)^2} = \sqrt{40,5} \approx 6,4$ (m).

Vậy chiều cao của cây đó là khoảng 4,5 + 6,4 = 10,9 mét.

Bài 3. Trong Vật lí, quãng đường S (tính bằng mét) của một vật rơi tự do được cho bởi công thức $S = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian rơi (tính bằng giây). Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét?

Lời giải

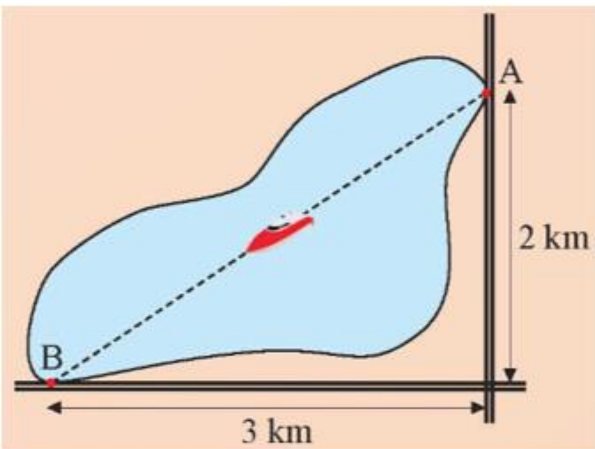
Quãng đường vật rơi tự do từ độ cao 122,5 mét đến khi chạm đất là S = 122,5 mét.

Từ công thức $S = 4,9t^2$, nên $t = \sqrt{\frac{S}{4,9}}$ (giây) (do t > 0).

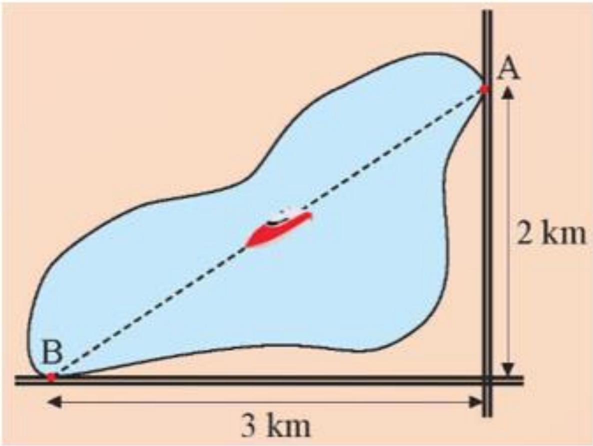
Suy ra $t = \sqrt{\frac{122,5}{4,9}} = \sqrt{25} = 5$ (giây).

Vậy sau 5 giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét.

Bài 4. Hai bến thuyền A và B nằm sát con đường vuông góc với nhau cách chỗ giao nhau lần lượt là 2 km và 3 km (hình vẽ bên dưới). Một ca nô chạy thẳng từ A đến B. Quãng đường ca nô đi được dài bao nhiêu kilômét?



Lời giải



Gọi C là giao điểm của hai con đường.

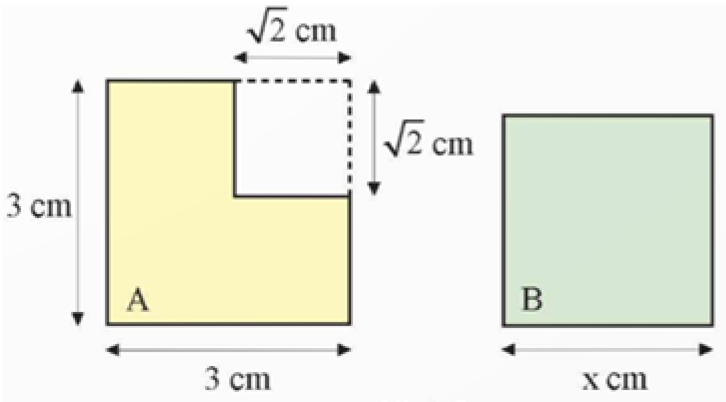
Xét tam giác ABC vuông tại C, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Suy ra $AB = \sqrt{13} \approx 3,6$ km.

Vậy quãng đường ca nô đi được dài $3,6$ kilômét.

Bài 5. Biết rằng hình A và hình vuông B trong hình vẽ dưới có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của hình vuông B.



Lời giải

• Xét hình A:

Diện tích cả hình vuông cạnh 3 cm là: 3 . 3 = 9 (cm^2).

Diện tích cả hình vuông cạnh $\sqrt{2}\left(cm\right)$là: $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2\left(cm\right)$

Do đó, diện tích hình A là: 9 – 2 = 7 (cm^2).

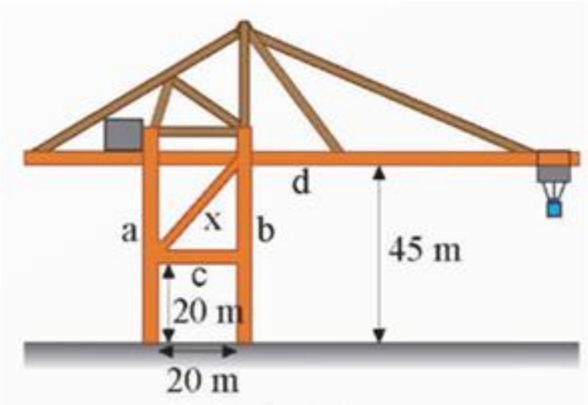
• Xét hình B:

Hình vuông B bằng diện tích hình A là 7 cm^2.

Do đó $x.x = x^2 = 7$ suy ra $x = \sqrt{7}\left(cm\right)$.

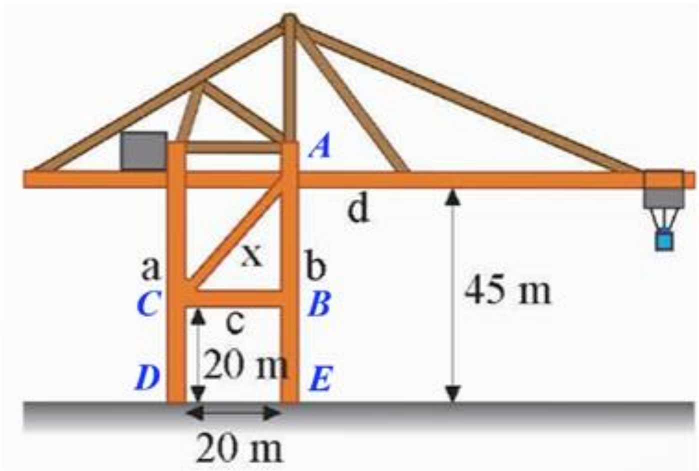
Vậy độ dài cạnh x của hình vuông B là √7cm7 cm.

Bài 6. Trên cần trục ở hình vẽ, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Gọi các điểm A, B, C, D, E như trên hình vẽ.



Vì hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m nên DE = BC = 20 m.

Vì xà ngang d có độ cao 45 m so với mặt đất nên AE = 45 m.

Suy ra AB = AE – BE = 45 – 20 = 25 (m).

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25^2 + 20^2 = 1025$.

Suy ra $x = AC = \sqrt{1025} \approx 32(m)$.

Vậy xà chéo x có độ dài khoảng 32 mét (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 7. Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, g = 9,8 m/s^2, μ là hệ số ma sát trượt của đường.

a) Hãy viết biểu thức tính v theo r khi biết $\mu = 0{,}12$.

b) Trong toán học, biểu thức đó được gọi là gì?

Lời giải

a) Theo bài, g = 9,8 m/s^2 và μ = 0,12.

Thay vào biểu thức $v=\sqrt{rg\mu}$, ta được: $v=\sqrt{r9,8.0,12}=\sqrt{1,176r}$ (m/s).

Vậy biểu thức tính v theo r là $v=\sqrt{1,176r}$ (m/s).

b) Trong toán học, biểu thứ trên được gọi là căn thức bậc hai.

Bài 8. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này có thể được tính gần đúng bằng công thức: $d=7\sqrt{t-12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất (t ≥ 12). Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

Lời giải

Với t = 13, đường kính của hình tròn do địa y tạo nên là:

$d=7\sqrt{13-12}=7(mm)$.

Với t = 16, đường kính của hình tròn do địa y tạo nên là:

$d=7\sqrt{16-12}=7\sqrt{4}=14(mm)$

Bài 9. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải

Vận tốc bay của một vật có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J là:

$$v=\sqrt{\frac{2.281,25}{2,5}}=\sqrt{\frac{5625}{25}}=\frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{25}}=\frac{75}{5}=15(m/s)$$

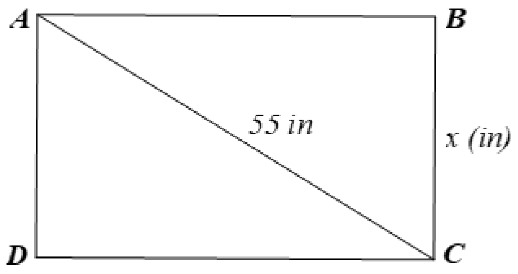
Vậy vận tốc bay của vật đó là 15 m/s.

Bài 10. Cửa hàng điện máy xanh trưng bày một chiếc ti vi màn hình phẳng 55 in, tức là độ dài đường chéo của màn hình ti vi bằng 55 in (1 in = 2,54 cm). Gọi x (in) là chiều rộng của màn hình ti vi (*Hình vẽ)*

Viết công thức tính chiều dài của màn hình ti vi theo x.

Lời giải

Giả sử hình ảnh chiếc ti vi được mô tả như hình vẽ dưới đây



Áp dụng định lí Pythagore cho ΔABC vuông tại B, ta có:

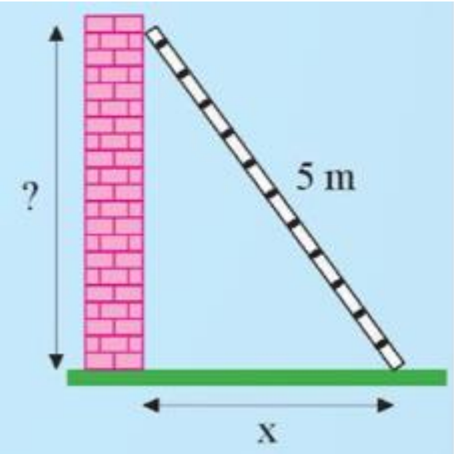
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

Suy ra $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 55^2 - x^2$

Do đó $AB = \sqrt{55^2 - x^2}$ (in).

Vậy công thức tính chiều dài của màn hình ti vi là $\sqrt{55^2 - x^2}$ (in).

Bài 11. Một chiếc thang dài 5 m tựa vào bức tường như hình vẽ.

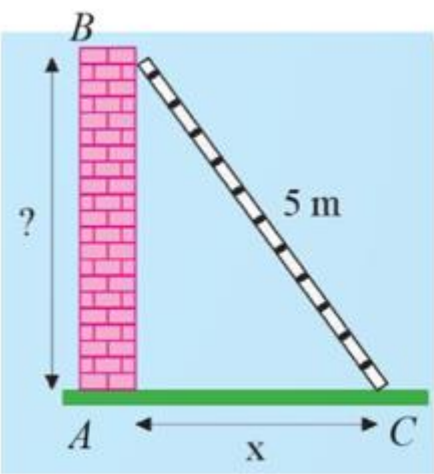


a) Nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao bao nhiêu so với chân tường?

b) Tính độ cao trên khi x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4.

Lời giải

a) Gọi tam giác ABC như hình vẽ.



a) Trong thực tế bức tường vuông góc với mặt đất nên AB ⊥ AC.

Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Suy ra $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$.

Do đó $AC = \sqrt{25 - x^2}$ (m).

Vậy nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao $\sqrt{25 - x^2}$ (m) so với chân tường.

b)

- Khi $x = 1$ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: $\sqrt{25 - 1^2} = \sqrt{24}\,(m)$

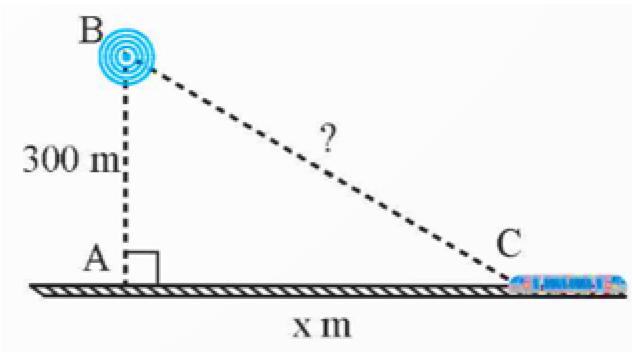
- Khi $x = 2$ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: $\sqrt{25 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}\,(m)$

- Khi $x = 3$ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: $\sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\,(m)$

- Khi $x = 4$ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: $\sqrt{25 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3\,(m)$

Vậy x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4. thì độ cao đỉnh thang so với chân tường lần lượt là $\sqrt{24}\,(m); \sqrt{21}\,(m); 4\,(m); 3\,(m)$

Bài 12. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng AB = 300 m. Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng AC = x (m) (Hình 4).



a) Viết biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.

b) Tính khoảng cách trên khi x = 400, x = 1 000 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 300^2 + x^2$.

Suy ra $BC = \sqrt{300^2 + x^2}$ (m).

Vậy biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là $\sqrt{300^2 + x^2}$ (m).

b) Thay x = 400 thì khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là:

$\sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{250000} = 500\,(m)$.

Thay x = 1 000 thì khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là:

$\sqrt{300^2 + 1000^2} = \sqrt{1090000} \approx 1044\,(m)$.

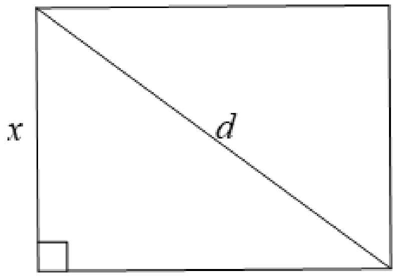
Bài 13. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3.

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình ti vi theo x.

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 40 inch.

Lời giải

a) Hình vẽ dưới đây mô tả màn hình ti vi hình chữ nhật có chiều rộng là x (inch).



Vì ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3 nên chiều dài của ti vi là: $\frac{4}{3}x$ (inch).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$d^2 = \left(\frac{4}{3}x\right)^2 + x^2 = \frac{25}{9}x^2$$

Suy ra $d = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}}.\sqrt{x^2} = \frac{5}{3}.|x| = \frac{5}{3}x$ (inch) (do d > 0 và x > 0).

Vậy công thức tính độ dài đường chéo d của màn hình ti vi là $\frac{5}{3}x$ (inch).

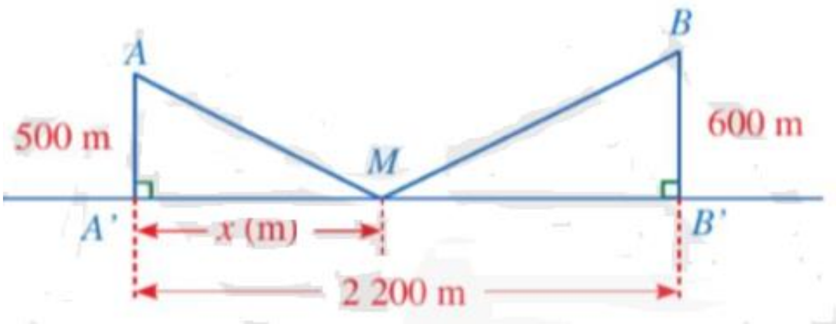
b) Màn hình ti vi loại 40 inch tức là d = 40.

Do đó $\frac{5}{3}x = 40$, suy ra $x = 40 : \frac{5}{3} = 24$.

Vì vậy, chiều rộng của màn hình ti vi đó là 24 inch ≈ 24.2,54 cm = 60,96 cm;

chiều dài của màn hình ti vi đó là $\frac{4}{3} = .24 = 32$ inch ≈ 32.2,54 cm = 81,28 cm.

Bài 14. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là AA' = 500 m, BB' = 600 m và khoảng cách A'B' = 2 200 m (minh họa ở *Hình vẽ*). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn A'B' với MA' = x (m), 0 < x < 2 200



a) Viết công thức tính tổng khoảng cách MA + MB theo x.

b) Tính tổng khoảng cách MA + MB khi x = 1 200 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Áp dụng định lí Pythagore cho ΔAA'M vuông tại A' ta có:

$MA^2 = AA'^2 + A'M^2 = 500^2 + x^2 = 250\,000 + x^2$

Suy ra $MA = \sqrt{250000 + x^2}$ (m).

Ta có A'B' = A'M + B'M, suy ra B'M = A'B' – A'M = 2 200 – x (m).

Áp dụng định lí Pythagore cho ΔBB'M vuông tại B' ta có:

$MB^2 = BB'^2 + B'M^2 = 600^2 + (2\,200 - x)^2 = 360\,000 + (2\,200 - x)^2$

Suy ra $MB = \sqrt{360\,000 + (2\,200 - x)^2}$ (m).

Khi đó, tổng khoảng cách MA + MB theo x là:

$MA + MB = \sqrt{250\,000 + x^2} + \sqrt{360\,000 + (2\,200 - x)^2}$ (m).

b) Khi x = 1 200, ta có tổng khoảng cách MA + MB là:

$$MA + MB = \sqrt{250\,000 + 1\,200^2} + \sqrt{360\,000 + (2\,200 - 1\,200)^2}$$

$$= \sqrt{1\,690\,000} + \sqrt{360\,000 + 1\,000^2}$$

$$= 1\,300 + \sqrt{1\,360\,000} \approx 2\,466\ (m).$$

Vậy tổng khoảng cách MA + MB khoảng 2 466 m khi x = 1 200.

Bài 15. Trò chơi "tìm kho báu" là một trò chơi quốc tế, rất phổ biến trong sinh hoạt Đoàn Đội. Ai đã một lần chơi sẽ cảm nhận được tính thú vị, hấp dẫn và lôi cuốn của nó, nhất là với các bạn yêu thích khám phá. Trong trò chơi bạn An phải giải bài toán có nội dung sau: "Số để bấm vào khóa mở được cửa kho báu bằng giá trị $\sqrt{(n^2 + 2)(n^2 + 4) + 1}$ khi n = 10". Em hãy trình bày cách tìm ra số để bạn An bấm vào ổ khóa số mở cửa kho báu nhé.

Lời giải

Thay n = 10 vào công thức $\sqrt{(n^2+2)(n^2+4)+1}$, ta được:

$\sqrt{(10^2+2)(10^2+4)+1}=\sqrt{(100+2)(100+4)+1}=\sqrt{102.104+1}=\sqrt{10609}=103$

Vậy số để bạn An bấm vào ổ khóa số mở cửa kho báu là 103

Bài 16. Vận tốc lăn v (tính bằng m/s) của một vật thể nặng m (tính bằng kg) được tác động một lực E_k (gọi là năng lượng Kinetic Energy, ký hiệu E_k, tính bằng Joule) được cho bởi công thức:

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$


a) Hãy tính vận tốc của một quả banh bowling nặng 3kg khi một người tác động một lực E_k = 18J?

b) Muốn lăng một quả bowling nặng 3kg với vận tốc 6m/s, thì cần sử dụng năng lượng Kinetic E_k bao nhiêu Joule?

Lời giải

a) Thay $E_k=18, m=3$ vào công thức $v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$, ta được: $v=\sqrt{\frac{2.18}{3}}\approx 3{,}46m/s$

Vậy vận tốc của một quả banh bowling là 3,46m/s

b) Thay $v=6, m=3$ vào công thức $v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$, ta được: $\sqrt{\frac{2E_k}{3}}=6\Rightarrow\frac{2E_k}{3}=36\Rightarrow E_k=54J$

Vậy cần sử dụng năng lượng Kinetic $E_k=54J$

Bài 17. Điện áp V (tính theo volt) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức $V=\sqrt{PR}$, trong đó P là công suất (tính theo watt) và R là điện trở trong (tính theo ohm).

a) Cần bao nhiêu volt để thắp sáng một bóng đèn A có công suất 100 watt và điện trở của mỗi bóng đèn là 110 ohm?

b) Bóng đèn B có điện áp bằng 110 volt, điện trở trong là 88 ohm có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Giải thích.

Lời giải

a) Thay $P=100, R=110$ vào công thức $V=\sqrt{PR}$, ta được: $V=\sqrt{100.110}\approx 104{,}88$ (volt)

Vậy số volt để thắp sáng một bóng đèn A là 104,88 (volt)

b) Thay $V=110, R=88$ vào công thức $V=\sqrt{PR}$, ta được:

$$\sqrt{P.88}=110 \Rightarrow P.88=(110)^2 \Rightarrow P=\frac{(110)^2}{88}\approx 137{,}50 \text{ (watt)} > 100 \text{ (watt)}$$

Vậy bóng đèn B có công suất lớn hơn bóng đèn A

Bài 18. Tốc độ của một chiếc canô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v=5\sqrt{l}$. Trong đó, l là độ dài đường nước sau đuôi canô (mét), v là vận tốc canô (m/giây).

a) Một canô đi từ Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài $7+4\sqrt{3}$m. Hỏi vận tốc của canô?

b) Khi canô chạy với vận tốc 54km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Thay $l=7+4\sqrt{3}$ vào công thức $v=5\sqrt{l}$, ta được:

$$v=5\sqrt{l}=5\sqrt{7+4\sqrt{3}}\approx 18{,}66\text{m/s} \approx 67{,}18\text{km/h}$$

Vậy vận tốc của canô là 18,66m/s hay 67,18km/h.

b) Thay v = 54km/h = 15m/s vào công thức $v=5\sqrt{l}$, ta được: $5\sqrt{l}=15 \Rightarrow \sqrt{l}=3 \Rightarrow l=9\text{m}$

Vậy đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài 9m

Bài 19. Sóng thần (tsunami) là một loạt các đợt sóng tạo nên khi một thể tích lớn của nước đại dương bị dịch chuyển chớp nhoáng trên một quy mô lớn. Động đất cùng những dịch chuyển địa chất lớn bên trên hoặc bên dưới mặt nước, núi lửa phun và va chạm thiên thạch đều có khả năng gây ra sóng thần. Cơn sóng thần khởi phát từ dưới đáy biển sâu, khi còn ngoài xa khơi, sóng có biên độ (chiều cao sóng) khá nhỏ nhưng chiều dài của cơn sóng lên đến hàng trăm km. Con sóng đi qua đại dương với tốc độ trung bình 500 dặm một giờ. Khi tiến tới đất liền, đáy biển trở nên nông, con sóng không còn dịch chuyển nhanh được nữa, vì thế nó bắt đầu "dựng đứng lên" có thể đạt chiều cao một tòa nhà sáu tầng hay hơn nữa và tàn phá khủng khiếp.

Tốc độ của con sóng thần và chiều sâu của đại dương liên hệ bởi công thức $s=\sqrt{dg}$. Trong đó, $g=9{,}81 m/s^2$, d (deep) là chiều sâu đại dương tính bằng m, s là vận tốc của sóng thần tính bằng m/s.

a) Biết độ sâu trung bình của đại dương trên trái đất là d = 3790 mét hãy tính tốc độ trung bình của các con sóng thần xuất phát từ đáy các đại dương theo km/h.

b) Susan Kieffer, một chuyên gia về cơ học chất lỏng địa chất của đại học Illinois tại Mỹ, đã nghiên cứu năng lượng của trận sóng thần Tohoku 2011 tại Nhật Bản. Những tính toán của Kieffer cho thấy tốc độ sóng thần vào xấp xỉ 220 m/giây. Hãy tính độ sâu của đại dương nơi xuất phát con sóng thần này.

Lời giải

a) Thay $d=3790; g=9{,}81$ vào công thức $s=\sqrt{dg}$, ta được:

$s=\sqrt{3790.9{,}81}\approx 193 m/s = 694{,}8 km/h$

Vậy tốc độ trung bình của các con sóng thần là 193m/s

b) Thay s = 220; g = 9,81 vào công thức $s=\sqrt{dg}$, ta được:

$$\sqrt{9{,}81.d}=220 \Rightarrow 9{,}81.d=(220)^2 \Rightarrow d=\frac{(220)^2}{9{,}81}\approx 4934m$$

Vậy độ sâu của đại dương nơi xuất phát con sóng thần này là 4934m

Bài 20. Vận tốc v (m/s) của một tàu lượn di chuyển trên một cung tròn có bán kính r(m) được cho bởi công thức: $v=\sqrt{ar}$. Trong đó a là gia tốc của tàu (m/s^2) (gia tốc là đại lượng vật lý đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian. Nó là một trong những đại lượng cơ bản dùng để mô tả chuyển động và là độ biến thiên của vận tốc theo thời gian).

a) Nếu tàu lượn đang chạy với vận tốc v = 14m/s và muốn đạt mức gia tốc tối đa cho phép là $a = 9m/s^2$ thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để xe không văng ra khỏi đường ray?

b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với vận tốc v = 8m/s xung quanh một cung tròn có bán kính r = 25m thì có gia tốc tối đa cho phép là bao nhiêu?

Lời giải

a) Thay $v = 14; a = 9$ vào công thức $v = \sqrt{ar}$, ta được:

$\sqrt{9r} = 14 \Rightarrow 9r = 196 \Rightarrow r = 21,8m$

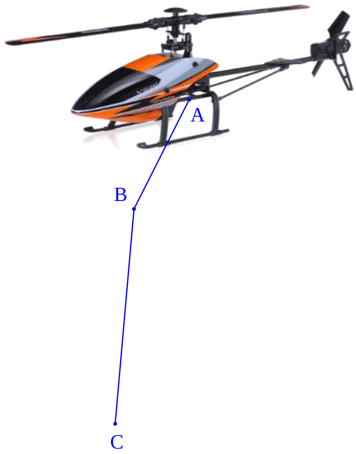
Vậy bán kính tối thiểu của cung tròn phải là 21,8m.

b) Thay $v = 8; r = 25$ vào công thức $v = \sqrt{ar}$, ta được:

$\sqrt{25a} = 8 \Rightarrow 25a = 64 \Rightarrow a = 2,56m/s^2$

Vậy gia tốc tối đa cho phép là $2,56m/s^2$

Bài 21. Quãng đường đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $S = \frac{1}{2}gt^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g \approx 9,8m/s^2$, t là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3500 mét (vị trí A) với vận tốc ban đầu không đáng kể. Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) vận động viên phải mở dù để khoảng cách từ (vị trí B) đến mặt đất (vị trí C) trong hình vẽ là 1500 mét.



Lời giải

Quãng đường vận động viên nhảy từ vị trí A đến vị trí B là: $S = 3500 - 1500 = 2000m$

Thay S = 2000; g = 9,8 vào công thức $S = \frac{1}{2}gt^2$, ta được:

$2000=\frac{1}{2}.9,8.t^2 \Rightarrow t^2=\frac{4000}{9,8} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{4000}{9,8}} \approx 20,2$ giây

Vậy vận động viên phải mở dù sau thời gian 20,2 giây.

Bài 22. Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y=5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao 55m trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)

a) Hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách đất 25m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

Lời giải

a) Thay $x=3$ vào công thức $y=5x^2$, ta được: $y=5.3^2=45$m

Vậy sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất là: 55 – 45 = 10m

b) Quãng đường chuyển động của vật nặng còn cách đất 25m là: 55 – 25 = 30m

Thay $y=30$ vào công thức $y=5x^2$, ta được:

$30=5x^2 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\sqrt{6} \approx 2,4$ (giây)

Vậy thời gian vật nặng rơi được là 2,4 giây

Bài 23. Thời gian t (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy bungee trên cao cách mặt nước d (tính bằng m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t=\sqrt{\frac{3d}{9,8}}$

a) Tìm thời gian một người nhảy bungee từ vị trí cao cách mặt nước 108m đến khi chạm mặt nước?

b) Nếu một người nhảy bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây. Hãy tìm độ cao của người nhảy bungee so với mặt nước?

Lời giải

a) Thay d = 108 vào công thức $t=\sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được:

$t=\sqrt{\frac{3.108}{9,8}}=5,75$ giây

Vậy thời gian một người nhảy bungee là 5,75 giây

b) Thay $t=7$ vào công thức $t=\sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được:

$\sqrt{\frac{3d}{9,8}}=7\Rightarrow\frac{3d}{9,8}=49\Rightarrow d=\frac{49.9,8}{3}=160,07m$

Vậy độ cao của người nhảy bungee so với mặt nước là 160,07m

BÀI 3
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

1. Khai căn bậc hai và phép nhân

Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B}$

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm.

Với các biểu thức A, B, C không âm, ta có: $\sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C} = \sqrt{A.B.C}$

2. Khai căn bậc hai và phép chia

Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$

CHỦ ĐỀ 1
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN

- Với hai số không âm a,b, ta có: $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$
- Với các biểu thức A,B không âm, ta có: $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$

DẠNG 1
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN KHÔNG CHỨA BIẾN

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{25.144}$ b) $\sqrt{52.13}$ c) $\sqrt{45.80}$ d) $\sqrt{7}.\sqrt{28}$

Lời giải

a) $\sqrt{25.144}=\sqrt{25}.\sqrt{144}=5.12=60$

b) $\sqrt{52.13}=\sqrt{52.13}=\sqrt{4.13.13}=\sqrt{4}.\sqrt{13^2}=26$

c) $\sqrt{45.80}=\sqrt{5.9.5.16}=\sqrt{5^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{4^2}=5.3.4=60$

d) $\sqrt{7}.\sqrt{28}=\sqrt{7.28}=\sqrt{7.7.4}=\sqrt{7^2}.\sqrt{2^2}=14$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{55.77.35}$ b) $\sqrt{\frac{1}{8}}.\sqrt{2}.\sqrt{125}.\sqrt{\frac{1}{5}}$ c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1}$

Lời giải

a) $\sqrt{55.77.35}=\sqrt{5.11.7.11.5.7}=\sqrt{5^2.11^2.7^2}=\sqrt{5^2}.\sqrt{11^2}.\sqrt{7^2}=5.7.11=385$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}}.\sqrt{2}.\sqrt{125}.\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1}{8}.2.125.\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{2.125}{8.5}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2-1}=1$

Bài 3. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{5^2-4^2}$ b) $\sqrt{26^2-24^2}$ c) $\sqrt{85^2-84^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{(5-4)(5+4)}=\sqrt{9}=3$

b) $\sqrt{26^2-24^2}=\sqrt{(26-24)(26+24)}=\sqrt{100}=10$

c) $\sqrt{85^2-84^2}=\sqrt{(85-84)(85+84)}=\sqrt{169}=13$

Bài 4. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{50}{3}}-\sqrt{24}\right).\sqrt{6}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{3}+5\sqrt{\frac{4}{3}}\right).\sqrt{12}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{8}$

Lời giải

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{50}{3}}-\sqrt{24}\right).\sqrt{6}=\sqrt{\frac{2}{3}.6}+\sqrt{\frac{50}{3}.6}-\sqrt{24.6}=\sqrt{4}+\sqrt{100}-\sqrt{144}=2+10-12=0$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{2}=\sqrt{3.2+2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{5}+1$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{3}+5\sqrt{\frac{4}{3}}\right).\sqrt{12}=\sqrt{\frac{3}{4}.12}-\sqrt{3.12}+5\sqrt{\frac{4}{3}.12}=\sqrt{9}-\sqrt{36}+5\sqrt{16}=3-6+5.4=7$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{8}=\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)8}=\sqrt{24-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)^2}=\left|2\sqrt{5}-2\right|=2\sqrt{5}-2$

Bài 5. Rút gọn

a) $A=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}$

b) $B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

c) $C=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

d) $D=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$

Lời giải

a) $A=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}.\sqrt{2}-\sqrt{5}.\sqrt{3}}{\sqrt{4}.\sqrt{2}-\sqrt{4}.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{7}\sqrt{5}-\sqrt{7}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{-\sqrt{21}}{7}$

c) $C=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) $D=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{2(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tính

a) $A=\sqrt{32.200}$

b) $B=\sqrt{5}.\sqrt{125}$

c) $C=\sqrt{\left(9+2\sqrt{14}\right)\left(9-2\sqrt{14}\right)}$

d) $D=\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{32.200}=\sqrt{4.8.2.10^2}=\sqrt{2^2.4^2.10^2}=2.4.10=80$

b) $B=\sqrt{5}.\sqrt{125}=\sqrt{5.5.25}=\sqrt{5^2.5^2}=5.5==25$

c) $C=\sqrt{\left(9+2\sqrt{14}\right)\left(9-2\sqrt{14}\right)}=\sqrt{9^2-\left(2\sqrt{14}\right)^2}=\sqrt{81-56}=\sqrt{25}=5$

d) $D=\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$

$=\sqrt{(117,5-26,5)(117,5+26,5)-1440}$

$=\sqrt{144.91-144.10}$

$=\sqrt{144.(91-10)}$

$=\sqrt{144.81}$

$=\sqrt{144}.\sqrt{81}$

$=12.9$

$=108$

Bài 7. Tính

a) $A=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

b) $B=\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ '

c) $C=(\sqrt{12}+12\sqrt{15}-4\sqrt{135})\sqrt{3}$

d) $D=2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

$A=\sqrt{\left(3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}$

$=\sqrt{3^2-(\sqrt{5+2\sqrt{3}})^2}$

$=\sqrt{9-(5+2\sqrt{3})}$

$=\sqrt{9-5-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

$=\left|\sqrt{3}-1\right|$

$=\sqrt{3}-1$

b) $B=\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$

$=\sqrt{4+\sqrt{4}.\sqrt{2}}.\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}.\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$=\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2.(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\sqrt{2.(4-2)}$

$=\sqrt{2.2}$

$=2$

c) $C=(\sqrt{12}+12\sqrt{15}-4\sqrt{135})\sqrt{3}$

$=\sqrt{12.3}+12\sqrt{15.3}-4\sqrt{135.3}$

$=\sqrt{36}+12\sqrt{9.5}-4\sqrt{9^2.5}$

$=6+36\sqrt{5}-36\sqrt{5}$

$=6$

d) $C=2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}$

$=2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-3\sqrt{20\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{80\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-6\sqrt{5\sqrt{3}}$

$8\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-6\sqrt{5\sqrt{3}}$

$=\sqrt{5\sqrt{3}}(8-2-6)$

$=0$

Bài 8. Tính

a) $A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

b) $B=(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$

c) $C=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

Lời giải

a) $A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$

$=\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}.\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})(4+\sqrt{15})}$

$=\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}.\sqrt{4\sqrt{10}+\sqrt{150}-4\sqrt{6}-\sqrt{90}}$

$=\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}.\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$

$=\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})}$

$=\sqrt{4}$

$=2$

b) $B=(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$

$=2(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}})$

$=\sqrt{2}(\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}(\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}})$

$=\sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}$

$=\sqrt{2}(\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1)$

$=2\sqrt{10}$

c) $C=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$

$=\sqrt{4-3}$

$=1$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$ b) $B=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$

$=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{4}.\sqrt{7}}$

$=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $B=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\sqrt{2}+1$

Bài 10. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$ b) $B=\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Lời giải

a) $A=\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

$=\frac{3.2\sqrt{2}-2.2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3.3\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

$=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\frac{2}{3}$

b) $B=\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

$$=\frac{2\sqrt{5.3}-2\sqrt{5.2}+\sqrt{3.2}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{5}.2-\sqrt{3}+\sqrt{3.2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

DẠNG 2
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN CHỨA BIẾN

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{\dfrac{-2t}{3}}.\sqrt{\dfrac{3t}{8}}\quad (t\le 0)$		b) $B=\dfrac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}}\quad (y<0)$

Lời giải

a) $A=\sqrt{\dfrac{-2t}{3}}.\sqrt{\dfrac{3t}{8}}=\sqrt{\dfrac{-2t}{3}.\left(\dfrac{-3t}{8}\right)}=\sqrt{\dfrac{t^2}{4}}=\dfrac{|t|}{2}=\dfrac{-t}{2}(t\le 0)$

b) $B=\dfrac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}}=\sqrt{\dfrac{28y^6}{7y^4}}=\sqrt{(2y)^2}=|2y|=-2y(y<0)$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\quad (x\ge 1)$		b) $B=\sqrt{\sqrt{x^4+4}-x^2}.\sqrt{\sqrt{x^4+4}+x^2}$

Lời giải

a) $C=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$

$=\sqrt{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

$=\sqrt{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$=\sqrt{x^2-\left(x^2-1\right)}$

$=1$

a) $B=\sqrt{\sqrt{x^4+4}-x^2}.\sqrt{\sqrt{x^4+4}+x^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x^4+4}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+4}+x^2\right)}$

$=\sqrt{(x^4+4)-(x^2)^2}$

$=\sqrt{4}$

$=2$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

a) $A=\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}-\dfrac{\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}}{u-v}(u,v\ge 0;u\ne v)$		b) $B=\dfrac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2}(x\ne\pm\sqrt{2})$

Lời giải

a) $A=\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}-\dfrac{\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}}{u-v}$

$$=\frac{\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}-\frac{\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)\left(u-\sqrt{uv}+v\right)}{\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)}$$

$$=\sqrt{u}-\sqrt{v}-\frac{u-\sqrt{uv}+v}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2-\left(u-\sqrt{uv}+v\right)}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$$

$$=\frac{u-2\sqrt{uv}+v-u+\sqrt{uv}-v}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$$

$$=\frac{-\sqrt{uv}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$$

b) $B=\dfrac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2}$

$$=\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y}\left(x\ge 0;y\ge 0;xy\ne 0\right)$

b) $B=\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-2\sqrt{xy}+y}(x\ge 0;y\ge 0;x\ne y)$

c) $C=\dfrac{3\sqrt{a}-2a-1}{4a-4\sqrt{a}+1}(a\ge 0;a\ne \dfrac{1}{4})$

Lời giải

a) $A=\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y}=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) $B=\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-2\sqrt{xy}+y}=\dfrac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

c) $C=\dfrac{3\sqrt{a}-2a-1}{4a-4\sqrt{a}+1}=\dfrac{(2\sqrt{a}-1)(1-\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}-1)^2}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$

Bài 5. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a) $A=\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$

b) $B=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\sqrt{\dfrac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}}$

Lời giải

b) $A=\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{x}-1\right|}{\sqrt{x}+1}$

c) $B=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\sqrt{\dfrac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{(x-1)^4}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{y}-1\right)^4}{(x-1)^4}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{\sqrt{y}-1}{x-1}$

Bài 6. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a) $A=\dfrac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{4-a}{\sqrt{a}-2}$ b) $B=\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

Lời giải

a) $A=\dfrac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{4-a}{\sqrt{a}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+2\right)^2}{\sqrt{a}+2}-\dfrac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\sqrt{a}-2}=\sqrt{a}+2-\left(\sqrt{a}+2\right)=0$

b) $B=\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)$

$=x-\sqrt{xy}+y-\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)$

$=\sqrt{xy}$

CHỦ ĐỀ 2
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA

- Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

DẠNG 1
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA KHÔNG CHỨA BIẾN

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$ b) $\dfrac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$ c) $\sqrt{\dfrac{25}{64}}$ d) $\dfrac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

Lời giải

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}} = \sqrt{\dfrac{12,5}{0,5}} = \sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \dfrac{5}{8}$

d) $\dfrac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}} = \sqrt{\dfrac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10$

Bài 2. Tính

a) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}} - \sqrt{\dfrac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$ b) $\sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}} - \sqrt{\dfrac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$ d) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{2}$

Lời giải

a) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}} - \sqrt{\dfrac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7} = \left(\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} - \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right) . \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{7} + 1 = \dfrac{4}{7}$

b) $\sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6} = \sqrt{6\left(6 - 2\sqrt{5}\right)} : \sqrt{6} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} = \sqrt{5} - 1$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{3}\right):\sqrt{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right):\sqrt{3}=\frac{2}{3}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}}:\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài 3. Tính

a) $A=\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}\right):\sqrt{15}$

b) $B=\left(12\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$

Lời giải

a) $A=\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}\right):\sqrt{15}$

$=\sqrt{\frac{12}{15}}+\sqrt{\frac{75}{15}}+\sqrt{\frac{27}{15}}$

$=\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}+\frac{3}{\sqrt{5}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

b) $B=\left(12\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$

$=12\sqrt{5}-8\sqrt{20}+7\sqrt{45}$

$=12\sqrt{5}-16\sqrt{5}+21\sqrt{5}$

$=17\sqrt{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Thực hiện phép tính

a) $A=\sqrt{1,6}.\sqrt{250}+\sqrt{19,6}:\sqrt{4,9}$

b) $B=\sqrt{1\frac{3}{4}.2\frac{2}{7}.5\frac{4}{9}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{1,6}.\sqrt{250}+\sqrt{19,6}:\sqrt{4,9}$

$=\sqrt{1,6.250}+\sqrt{\frac{19,6}{4,9}}$

$=\sqrt{16.25}+\sqrt{\frac{196}{49}}$

$=\sqrt{16}.\sqrt{25}+\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{49}}$

$=4.5+\frac{14}{7}$

$=22$

b) $B=\sqrt{1\frac{3}{4}.2\frac{2}{7}.5\frac{4}{9}}$

$=\sqrt{1\frac{3}{4}.2\frac{2}{7}.5\frac{4}{9}}$

$=\sqrt{\frac{7}{4}.\frac{16}{7}.\frac{49}{9}}$

$=\sqrt{4.\frac{49}{9}}$

$=\sqrt{4}.\sqrt{\frac{49}{9}}$

$=2.\frac{7}{3}$

$=\frac{14}{3}$

Bài 5. Thực hiện phép tính

a) $A=\left(20\sqrt{300}-15\sqrt{675}+5\sqrt{75}\right):\sqrt{15}$ b) $B=\left(\sqrt{325}-\sqrt{117}+2\sqrt{208}\right):\sqrt{13}$

Lời giải

a) $A=\left(20\sqrt{300}-15\sqrt{675}+5\sqrt{75}\right):\sqrt{15}$

$=20\sqrt{\frac{300}{15}}-15\sqrt{\frac{675}{15}}+5\sqrt{\frac{75}{15}}$

$=20\sqrt{20}-15\sqrt{45}+5\sqrt{5}$

$=20\sqrt{4.5}-15\sqrt{9.5}+5\sqrt{5}$

$=40\sqrt{5}-45\sqrt{5}+5\sqrt{5}$

$=(40-45+5)\sqrt{5}$

$=0$

b) $B=\left(\sqrt{325}-\sqrt{117}+2\sqrt{208}\right):\sqrt{13}$

$=\sqrt{\frac{325}{13}}-\sqrt{\frac{117}{13}}+2\sqrt{\frac{208}{13}}$

$=\sqrt{25}-\sqrt{9}+2\sqrt{16}$

$=5-3+2.4$

$=10$

Bài 6. Tính

a) $A=\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{6}\right):3\sqrt{3}$ b) $B=\left(\sqrt{12}-2\sqrt{18}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $C=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right):\sqrt{72}$ d) $D=\left(\frac{1}{\sqrt{3}-2}-\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right).\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

Lời giải

a) **Cách 1:**

$A=\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{6}\right):3\sqrt{3}$

$=\dfrac{\sqrt{27}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{27}{3}}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{12}{3}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{6}{3}}$

$=\dfrac{1}{3}.3-\dfrac{1}{3}.2+\dfrac{2}{3}.\sqrt{2}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

Cách 2:

$A=\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{6}\right):3\sqrt{3}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}.\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)}{3\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$

b) $B=\left(\sqrt{12}-2\sqrt{18}\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\left(\sqrt{12}-2\sqrt{18}\right).\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{12}{2}}-2\sqrt{\dfrac{18}{2}}$

$=\sqrt{6}-2\sqrt{9}$

$=\sqrt{6}-6$

c) $C=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right):\sqrt{72}$

$=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}:\sqrt{72}$

$=\dfrac{-2\sqrt{2}.2}{1-2}:\sqrt{72}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$

$=4.\sqrt{\dfrac{1}{36}}$

$=\dfrac{4}{6}$

$=\dfrac{2}{3}$

d) $D=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\right).\dfrac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4}{3-4}.\dfrac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}$

$=4\sqrt{2}$

Bài 7. Tính

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{6,5+\sqrt{12}}+\sqrt{6,5-\sqrt{12}}+2\sqrt{6}$

Lời giải

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\left|\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{2}}-\dfrac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{2}$

$=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}}-\sqrt{2}$

$=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

$=0$

c) $\sqrt{6,5+\sqrt{12}}+\sqrt{6,5-\sqrt{12}}+2\sqrt{6}$

$=\sqrt{\frac{13}{2}+\sqrt{12}}+\sqrt{\frac{13}{2}-\sqrt{12}}+2\sqrt{6}$

$=\sqrt{\frac{13+2\sqrt{12}}{2}}+\sqrt{\frac{13-2\sqrt{12}}{2}}+2\sqrt{6}$

$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{12}+1\right)^2}{2}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{12}-1\right)^2}{2}}+2\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{12}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{12}-1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{12}+1+\sqrt{12}-1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$

$=\frac{2\sqrt{2.6}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$

$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$

$=2\sqrt{6}+2\sqrt{6}$

$=4\sqrt{6}$

DẠNG 2
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA CHỨA BIẾN

Bài 1. Rút gọn các biểu thức

a) $P = xy^2\sqrt{\frac{5}{x^2y^4}}$ với $x<0; y\neq 0$ b) $Q=\sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}}$ với $a<4$

Lời giải

a) $P = xy^2\sqrt{\frac{5}{x^2y^4}} = xy^2\frac{5}{\sqrt{(xy^2)^2}} = \frac{xy^2\sqrt{5}}{|x|y^2} = \frac{xy^2\sqrt{5}}{-xy^2} = -\sqrt{5}\,(x<0; y\neq 0)$

b) $Q=\sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}} = \frac{6|a-4|}{12} = \frac{|a-4|}{2} = \frac{4-a}{2}(a<4)$

Bài 2. Cho $A=\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}:\sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị A tại $a=7,25; b=3,25$

Lời giải

a) $A=\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}:\sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}.\sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}} = \sqrt{\frac{a-1}{b-1}}$

b) Thay vào biểu thức ta được:

$A=\sqrt{\frac{a-1}{b-1}} = \sqrt{\frac{7,25-1}{3,25-1}} = \sqrt{\frac{6,25}{2,25}} = \sqrt{\frac{625}{225}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

Bài 3. Cho $A=\frac{x+3}{2-\sqrt{y}}.\sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị A, biết $x=2$ và $y=16$

Lời giải

a)T $A=\frac{x+3}{2-\sqrt{y}}.\sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}} = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}}.\sqrt{\frac{(\sqrt{y}-2)^2}{(x+4)^4}} = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}}.\frac{|\sqrt{y}-2|}{(x+3)^2} = \frac{|\sqrt{y}-2|}{(2-\sqrt{y})(x+3)}$

b)Thay $y=16, x=2$ vào biểu thức $A=\frac{|\sqrt{y}-2|}{(2-\sqrt{y})(x+3)}$, ta được: $A=\frac{|\sqrt{16}-2|}{(2-\sqrt{16})(2+3)} = \frac{|4-2|}{(2-4).5} = \frac{-1}{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{2u+\sqrt{uv}-3v}{2u-5\sqrt{uv}+3v}(u\ge 0;v\ge 0;u\ne \dfrac{9}{4}v)$

b) $B=\dfrac{x+\sqrt{5}}{x^2+2x\sqrt{5}+5}(x\ne -\sqrt{5})$

c) $C=0,2x^3y^3\sqrt{\dfrac{16}{x^4y^8}}\left(x\ne 0;y\ne 0\right)$

d) $D=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{2u+\sqrt{uv}-3v}{2u-5\sqrt{uv}+3v}=\dfrac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})(2\sqrt{u}+3\sqrt{v})}{(\sqrt{u}-\sqrt{v})(2\sqrt{u}-3\sqrt{v})}=\dfrac{2\sqrt{u}+3\sqrt{v}}{2\sqrt{u}-3\sqrt{v}}$

b) $B=\dfrac{x+\sqrt{5}}{x^2+2x\sqrt{5}+5}=\dfrac{x+\sqrt{5}}{\left(x+\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$

c) $C=0,2x^3y^3\sqrt{\dfrac{16}{x^4y^8}}=0,2x^3y^3\sqrt{\left(\dfrac{4}{x^2y^4}\right)^2}=0,2x^3y^3.\left|\dfrac{4}{x^2y^4}\right|=0,2x^3y^3.\dfrac{4}{x^2y^4}=0,8\dfrac{x}{y}$

d) $D=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{\sqrt{y}-1}{x-1}.$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức

a) $H=\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab\right):\sqrt{ab}$

b) $E=\sqrt{\dfrac{9-6x+x^2}{\left(x-3\right)^2}}$ với $x>3$

c) $F=\left(x-y\right)\sqrt{\dfrac{xy}{\left(x-y\right)^2}}$ với $x<y<0$

d) $T=\sqrt{\dfrac{\left(x-1\right)^4}{\left(2-x\right)^2}}+\dfrac{x^2-2}{x-2}$ với $x<2$

Lời giải

a) $H=\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab\right):\sqrt{ab}=\sqrt{a^3b}:\sqrt{ab}+\sqrt{ab^3}:\sqrt{ab}-ab:\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{ab}=a+b-\sqrt{ab}$

b) $E=\sqrt{\dfrac{9-6x+x^2}{\left(x-3\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\left(3-x\right)^2}{\left(x-3\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\left[-\left(x-3\right)\right]^2}{\left(x-3\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\left(x-3\right)^2}{\left(x-3\right)^2}}=\sqrt{1}=1$

c) $F=\left(x-y\right)\sqrt{\dfrac{xy}{\left(x-y\right)^2}}=\left(x-y\right).\dfrac{\sqrt{xy}}{\left|x-y\right|}$

Vì $x<y\Rightarrow\left|x-y\right|=-\left(x-y\right)\Rightarrow F=\left(x-y\right)\dfrac{\sqrt{xy}}{-\left(x-y\right)}=-\sqrt{xy}$

d) $T=\sqrt{\dfrac{\left(x-1\right)^4}{\left(2-x\right)^2}}+\dfrac{x^2-2}{x-2}=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{\left|2-x\right|}+\dfrac{x^2-2}{x-2}=\dfrac{-\left(x^2-2x+1\right)+x^2-2}{x-2}=\dfrac{2x-3}{x-2}$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A=\dfrac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2}\left(x\neq\pm\sqrt{2}\right)$ b) $B=\dfrac{x-2024}{x^2+2x\sqrt{2024}+2024}(x\neq-\sqrt{2024})$

Lời giải

a) $A=\dfrac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2}=\dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$

b) $B=\dfrac{x^2-2024}{x^2+2x\sqrt{2024}+2024}=\dfrac{\left(x-\sqrt{2024}\right)\left(x+\sqrt{2024}\right)}{\left(x+\sqrt{2024}\right)^2}=\dfrac{x-\sqrt{2024}}{x+\sqrt{2024}}$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức rồi tính

a) $A=5x-\sqrt{125}+\dfrac{\sqrt{x^3+5x^2}}{\sqrt{x+5}}(x\geq 0)$ tại $x=\sqrt{5}$

b) $B=\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$ tại $a=\sqrt{5}$

Lời giải

a) Ta có: $x\geq 0\Rightarrow\sqrt{x^3+5x^2}$ và $\sqrt{x+5}$. Vậy biểu thức luôn xác định

$$A=5x-\sqrt{125}+\frac{\sqrt{x^3+5x^2}}{\sqrt{x+5}}=5x-\sqrt{125}+\frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}=5x-\sqrt{125}+|x|=6x-5\sqrt{5}$$

Thay $x=\sqrt{5}$ vào biểu thức ta được:

$$A=6x-5\sqrt{5}=6\sqrt{5}-5\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

b) $B=\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$

$$=\sqrt{(a^2-1)+2\sqrt{a^2-1}+1}-\sqrt{(a^2-1)-2\sqrt{a^2-1}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a^2-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{a^2-1}-1)^2}$$

$$=\left|\sqrt{a^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{a^2-1}-1\right|$$

$$=\left|\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}-1\right|$$

Thay $a=\sqrt{5}$ vào biểu thức ta được:

$$B==\left|\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}-1\right|=\left|\sqrt{4}+1\right|-\left|\sqrt{4}-1\right|=|2+1|-|2-1|=2$$

CHỦ ĐỀ 3
SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI

Bài 1. So sánh các cặp số dưới dây

a) $2\sqrt{29}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$

d) $\sqrt{7}$ và $3\sqrt{5}$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} 2\sqrt{29} = \sqrt{2^2.29} = \sqrt{116} \\ 3\sqrt{13} = \sqrt{117} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$

b) Ta có: $\begin{cases} \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2.2} = \sqrt{\frac{25}{8}} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2.\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) Ta có: $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2.3} = \sqrt{27} > \sqrt{12}$

d) Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2.5} = \sqrt{45} > \sqrt{7}$

Bài 2. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}; 2\sqrt{6} = \sqrt{24}; 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

Vậy: $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. So sánh các cặp số dưới dây

a) $5\sqrt{2}$ và $3\sqrt{13}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

a) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Lời giải

a) Ta có:

$\left.\begin{matrix} 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \\ 4\sqrt{3} = \sqrt{48} \end{matrix}\right\} \to 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$

b) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{25}{24}}\\6\sqrt{\frac{1}{37}}=\sqrt{\frac{36}{37}}\end{array}\right\}\to\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}>6\sqrt{\frac{1}{37}}\left(\frac{25}{4}>1>\frac{36}{37}\right)$$

c) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\sqrt{51}=\sqrt{\frac{51}{9}}=\sqrt{\frac{17.3}{9}}=\sqrt{\frac{17}{3}}\\\frac{1}{5}\sqrt{150}=\sqrt{\frac{150}{25}}=\sqrt{6}\end{array}\right\}, \text{ mà } \sqrt{\frac{17}{3}}<\sqrt{6}\Rightarrow\frac{1}{3}\sqrt{51}<\frac{1}{5}\sqrt{150}$$

d) Ta có: $\frac{1}{2}\sqrt{6}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2.6}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}};6\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{6^2.\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{36}{2}}=\sqrt{18}$

mà $\sqrt{18}>\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow6\sqrt{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Bài 4. Tìm số lớn hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{6}$ và $3\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ và $\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases}2\sqrt{6}=\sqrt{24}\\3\sqrt{3}=\sqrt{27}\end{cases}\Rightarrow2\sqrt{6}<3\sqrt{3}$

b) Ta có:

$$\frac{2}{5}\sqrt{6}=\sqrt{\frac{4}{25}.6}=\sqrt{\frac{24}{25}};$$

$$\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{49}{16}.\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{49}{48}}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{5}\sqrt{6}<\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{24}{25}<1<\frac{49}{48}\right)$$

Bài 5. Tìm số bé hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{23}$ và $3\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{21}$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases}2\sqrt{23}=\sqrt{4.23}=\sqrt{92}\\3\sqrt{10}=\sqrt{3^2.10}=\sqrt{90}\end{cases}\Rightarrow2\sqrt{23}>3\sqrt{10}$

b) Ta có:

$2\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}};$

$\frac{1}{5}\sqrt{21}=\frac{21}{25};$

$\frac{4}{5}>\frac{21}{25}\Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{5}}>\frac{1}{5}\sqrt{21}$

Bài 6. Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $7\sqrt{2};2\sqrt{8};\sqrt{28};5\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $2\sqrt{8}=4\sqrt{2};\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

Vậy: $7\sqrt{2}>5\sqrt{2}>2\sqrt{8}>\sqrt{28}$

Bài 7. Sắp xếp các số

a) $2\sqrt{5};3\sqrt{2};5;\sqrt{23}$ theo thứ tự tăng dần

b) $5\sqrt{2};2\sqrt{13};4\sqrt{3};\sqrt{47}$ theo thứ tự giảm dần

Lời giải

a) Ta có: $3\sqrt{2}<2\sqrt{5}<\sqrt{23}<5$

b) Ta có: $2\sqrt{13}>5\sqrt{2}>4\sqrt{3}>\sqrt{47}$

CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG

Bài 1. Khi một quả bóng rổ được thả xuống, nó sẽ nảy trở lại, nhưng do tiêu hao năng lượng nên nó không đạt được chiều cao như lúc bắt đầu. Hệ số phục hồi của quả bóng rổ được tính theo công thức $C_R = \sqrt{\frac{h}{H}}$, trong đó H là độ cao mà quả bóng được thả rơi và h là độ cao mà quả bóng bật lại. Một quả bóng rổ rơi từ độ cao 3,24 m và bật lại độ cao 2,25 m. Làm thế nào để viết hệ số phục hồi của quả bóng đó dưới dạng phân số?

Lời giải

Thay H = 3,24 m và h = 2,25 m, ta được:

$$C_R = \sqrt{\frac{2,25}{3,24}} = \sqrt{\frac{225}{324}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{324}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

Vậy $C_R = \frac{5}{6}$

Bài 2. Trong Vật lí, ta có định luật Joule – Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua: $Q = I^2Rt$.

Trong đó: Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm (Ω);

t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở R = 80 Ω. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

Lời giải

Theo bài, ta có R = 80 (Ω), t = 1 (s) và Q = 500 (J).

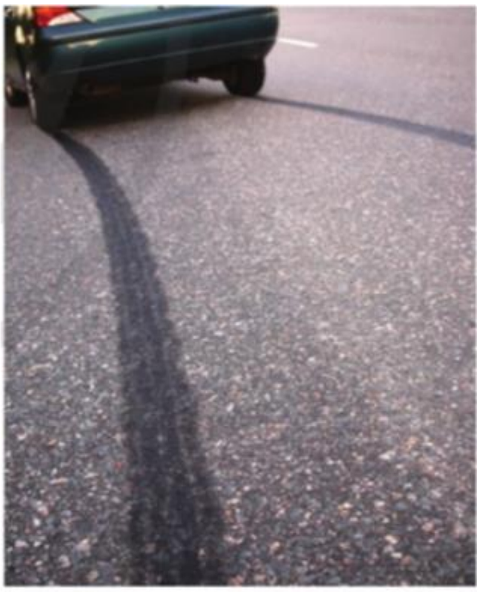
Áp dụng công thức $Q = I^2RT$, ta có: $500 = I^2.80.1$

Suy ra $80I^2 = 500$, nên $I^2 = \frac{500}{80} = \frac{25}{4}$.

Do đó $I=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}=2,5(A)$ (do I > 0).

Vậy cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn là 2,5 Ampe.

Bài 3. Tốc độ gần đúng của một ô tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v=\sqrt{2\lambda gd}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, g = 9,8 m/s^2.Nếu một chiếc ô tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda=0,7$.



Vết trượt của ô tô

Lời giải

Theo bài, ta có λ = 0,7; d = 20 (m) ; g = 9,8 m/s^2.

Do đó tốc độ của ô tô đó trước khi đạp phanh là: $v=\sqrt{2\lambda gd}=\sqrt{2.0,7.9,8.20}=\sqrt{274,4}\approx 17(m/s)$

Vậy tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng 17 m/s.

Bài 4. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải

Vận tốc bay của một vật có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J là:

$$v=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2.281,25}{2,5}}=\sqrt{\frac{562,5}{2,5}}=\sqrt{\frac{5625}{25}}=\frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{25}}=\frac{75}{5}=5(m/s)$$

Vậy vận tốc bay của vật đó là 15 m/s.

Bài 5. Công suất P (W), hiệu điện thế U (V), điện trở R (Ω) trong đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức $U=\sqrt{PR}$. Nếu công suất tăng gấp 8 lần, điện trở giảm 2 lần thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi công suất ban đầu là P_1 (W), điện trở ban đầu là R_1 (Ω) và hiệu điện thế ban đầu là U_1(V). Khi đó $U_1=\sqrt{P_1R_1}$.

Nếu công suất tăng gấp 8 lần thì công suất lúc này là $P_2 = 6P_1$.

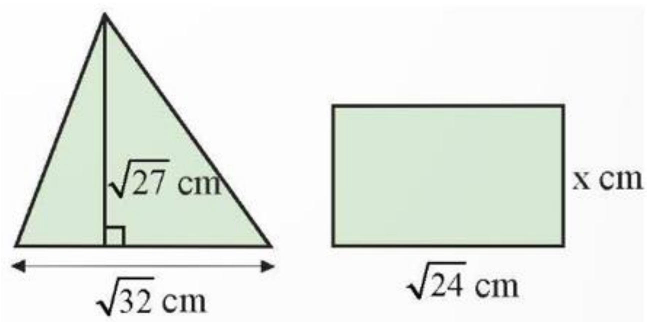
Nếu điện trở giảm 2 lần thì điện trở lúc này là $R_2=\dfrac{R_1}{2}$.

Khi đó, $U_2=\sqrt{P_2R_2}=\sqrt{8P_1\cdot\dfrac{R_1}{2}}=\sqrt{4P_1R_1}$.

Do đó $\dfrac{U_2}{U_1}=\dfrac{\sqrt{4P_1R_1}}{\sqrt{P_1R_1}}=\dfrac{\sqrt{2^2\cdot P_1R_1}}{\sqrt{P_1R_1}}=\dfrac{2\sqrt{P_1R_1}}{\sqrt{P_1R_1}}=2$.

Vậy tỉ số giữa hiệu điện thế lúc sau và hiệu điện thế ban đầu bằng 2.

Bài 6. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.



Lời giải

Diện tích hình tam giác là:

$\dfrac{1}{2}.\sqrt{32}.\sqrt{27}=\dfrac{1}{2}.\sqrt{32.27}$

$=\dfrac{1}{2}.\sqrt{16.2.9.3}=\dfrac{1}{2}.\sqrt{16}.\sqrt{9}.\sqrt{6}$

$=\dfrac{1}{2}.4.3.\sqrt{6}=6\sqrt{6}\left(cm^2\right)$.

Vì hình tam giác và hình chữ nhật ở Hình 3 có diện tích bằng nhau nên diện tích hình chữ nhật bằng $6\sqrt{6}\ cm^2$.

Chiều rộng x của hình chữ nhật là: $6\sqrt{6}:\sqrt{24}=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6.4}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=3$ (cm).

Vậy chiều rộng x của hình chữ nhật là 3 cm.

Bài 7. Cho hình chữ nhật có chiều rộng a (cm), chiều dài b (cm) và diện tích S (cm^2).

a) Tìm S, biết $a=\sqrt{8}, b\sqrt{32}$.

b) Tìm b, biết $S=3\sqrt{2}, a=2\sqrt{3}$

Lời giải

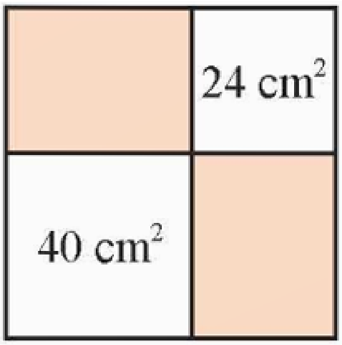
a) Diện tích S của hình chữ nhật là: $S=a.b=\sqrt{8}.\sqrt{32}=\sqrt{256}=16\left(cm^2\right)$

Vậy $S=16\left(cm^2\right)$

b) Chiều rộng b của hình chữ nhật là: $b=\dfrac{S}{a}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3^2.2}}{\sqrt{2^2.3}}=\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{18}{12}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}(cm)$

Vậy $b=\sqrt{\dfrac{3}{2}}(cm)$).

Bài 8. Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình chữ nhật có diện tích lần lượt là 24 cm^2 và 40 cm^2 như hình vẽ. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép



Lời giải

Cạnh của hình vuông có diện tích 24 cm^2 là: $\sqrt{24}=\sqrt{4.6}=\sqrt{4}.\sqrt{6}=2\sqrt{6}\left(cm^2\right)$

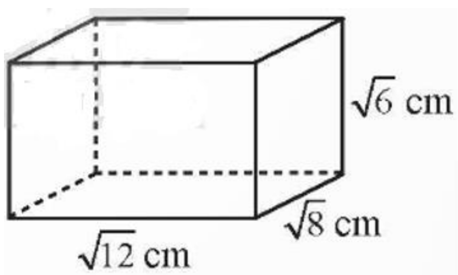
Cạnh của hình vuông có diện tích 40 cm^2 là: $\sqrt{40}=\sqrt{4.10}=\sqrt{4}.\sqrt{10}=2\sqrt{10}\left(cm^2\right)$.

Hai hình chữ nhật còn lại có chiều dài bằng nhau (đều bằng cạnh của hình vuông có diện tích 40 cm^2) và có chiều rộng bằng nhau (đều bằng cạnh của hình vuông có diện tích 24 cm^2).

Diện tích phần còn lại của tấm thép (bằng tổng diện tích hai hình chữ nhật trong hình vẽ) là: $2.2\sqrt{6}.2\sqrt{10}=8\sqrt{6.10}=8\sqrt{4.15}=8\sqrt{4}.\sqrt{15}=16\sqrt{15}\left(cm^2\right)$.

Vậy diện tích phần còn lại của tấm thép là $16\sqrt{15}\left(cm^2\right)$.

Bài 9. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm, như hình vẽ.



a) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

b) Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

a) Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là: $\sqrt{12}.\sqrt{8}.\sqrt{6} = \sqrt{12.8.6} = \sqrt{576} = 24\left(cm^3\right)$

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là 24 cm^3.

b) Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó là:

$2\left(\sqrt{12} + \sqrt{8}\right).\sqrt{6} = 2\left(\sqrt{72} + \sqrt{48}\right) = 2\left(6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{2} + 8\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là $12\sqrt{2} + 8\sqrt{3}\left(cm^2\right)$.

BÀI 3
BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

- Cho hai số a,b, với $b\geq 0$. Khi đó: $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$

  Cụ thể, ta có:

  $+$ Nếu $a\geq 0$ thì $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

  $+$ Nếu $a<0$ thì $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

- Với các biểu thức A,B mà $B\geq 0$, ta có: $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

- Với $a\geq 0$ và $b\geq 0$, ta có: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$
- Với $a<0$ và $b\geq 0$, ta có: $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$
- Với các biểu thức $A\geq 0, B\geq 0$, ta có: $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$
- Với các biểu thức $A<0, B\geq 0$, ta có: $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$

3. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A,B và $B>0$, ta có: $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}(B>0)$
- Với các biểu thức A,B,C và $A\geq 0, A\neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B}=\frac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{A}-B}=\frac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}$$

- Với các biểu thức A,B,C và $A\geq 0, B\geq 0; A\neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B}$$

$$\frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}$$

Chú ý: Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

- $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B$
- $\left(A-\sqrt{B}\right)\left(A+\sqrt{B}\right)=A^2-B$

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai, ta thường vận dụng thích hợp các tính chất giáo hoán, kết hợp, phân phối của các phép tính, quy tắc về thứ tự thực hiện phép tính và các phép biến đổi đã biết (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu)

CHỦ ĐỀ 1
ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI CĂN THỨC

- Với mọi số a, ta có: $\sqrt{a^2}=|a|$
- Với mỗi biểu thức A, ta có: $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A,(A\ge 0)\\-A,(A<0)\end{cases}$
- $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}=\left[\begin{array}{l}A\sqrt{B}(A\ge 0;B\ge 0)\\-A\sqrt{B}(A<0;B\ge 0)\end{array}\right.$
- $A\sqrt{B}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{A^2B}(khi\ A\ge 0;B\ge 0)\\-\sqrt{A^2B}(khi\ A<0;B\ge 0)\end{array}\right.$

DẠNG 1
CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG KHÔNG CHỨA BIẾN

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{144}.\sqrt{-\frac{-49}{64}}.\sqrt{0,01}$

b) $B=\left(\sqrt{0,25}-\sqrt{(-15)^2}+\sqrt{2,25}\right):\sqrt{169}$

c) $C=\left(\sqrt{0,04}-\sqrt{(-1,2)^2}+\sqrt{121}\right)\sqrt{81}$

d) $D=75:\sqrt{3^2+(-4)^2}-3\sqrt{(-5)^2-3^2}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{144}.\sqrt{-\frac{-49}{64}}.\sqrt{0,01}=\sqrt{12^2}.\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}.\sqrt{(0,1)^2}=12.\frac{7}{8}.0,1=1,05$

b) $B=\left(\sqrt{0,25}-\sqrt{(-15)^2}+\sqrt{2,25}\right):\sqrt{169}$

$=\left(\sqrt{(0,5)^2}-\sqrt{15^2}+\sqrt{(1,5)^2}\right):\sqrt{13^2}$

$=(0,5-15+1,5):13$

$=-13:13=-1$

c) $C=\left(\sqrt{0,04}-\sqrt{(-1,2)^2}+\sqrt{121}\right)\sqrt{81}$

$=\left(\sqrt{(0,2)^2}-\sqrt{(-1,2)^2}+\sqrt{11^2}\right)\sqrt{9^2}$

$=(0,2-|-1,2|+11)9$

$=10.9=90$

d) $D=75:\sqrt{3^2+(-4)^2}-3\sqrt{(-5)^2-3^2}$

$=75:\sqrt{9+16}-3\sqrt{25-9}$

$=75:\sqrt{25}-3\sqrt{16}$

$=75:5-3.4$

$=3$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $3\sqrt{5}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2}$

c) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

Lời giải

a) $3\sqrt{5}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

$=3\sqrt{5}-\left|1-\sqrt{5}\right|$

$=3\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)$ (do $1-\sqrt{5}<0$)

$=2\sqrt{5}+1$

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2}$

$=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

$=\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2}$

$=\left|2-\sqrt{2}\right|+\left|3\sqrt{2}-2\right|$

$=2-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2$

$=2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

$=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}$

$=\left|3-2\sqrt{2}\right|+\left|2\sqrt{2}+1\right|$

$=3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1$

$=4$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

b) $B=\sqrt{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$

c) $C=\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ d) $D=\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

$=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|$

$=-\left(2-\sqrt{5}\right)+2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

$=-2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

$=2\sqrt{2}-2$

b) $B=\sqrt{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$

$=\left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right|+\left|3-2\sqrt{2}\right|$

$=-\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)-\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$=3-\sqrt{7}$

c) $C=\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

$=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}$

$=\left|3+\sqrt{2}\right|-\left|3-\sqrt{2}\right|$

$=3+\sqrt{2}-\left(3-\sqrt{2}\right)$

$=2\sqrt{2}$

d) $D=\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$=\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$=\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=\left|3+2\sqrt{2}\right|+\left|3-2\sqrt{2}\right|$

$=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}$

$=6$

Bài 4. Chứng minh rằng

a) $11+6\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$ b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$

Lời giải

a) Ta có: $VT=11+6\sqrt{2}=9+2.3\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{3}+2\right)^2=VP\Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $VT=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\left|\sqrt{2}+3\right|+\left|\sqrt{2}-3\right|=6=VP\Rightarrow$ đpcm

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=0,5\sqrt{0,04}+5\sqrt{0,36}$

b) $B=-4\sqrt{\dfrac{-25}{-16}}+5\sqrt{-\dfrac{-9}{25}}$

c) $C=\dfrac{2}{3}\sqrt{81}-\dfrac{1}{2}\sqrt{16}$

d) $D=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{9}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25}{16}}$

Lời giải

a) $A=0,5\sqrt{0,04}+5\sqrt{0,36}=0,5\sqrt{(0,2)^2}+5\sqrt{(0,6)^2}=0,5.0,2+5.0,6=3,1$

b) $B=-4\sqrt{\dfrac{-25}{-16}}+5\sqrt{-\dfrac{-9}{25}}=-4\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}+5\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=-4.\dfrac{5}{4}+5.\dfrac{3}{5}=-2$

c) $C=\dfrac{2}{3}\sqrt{81}-\dfrac{1}{2}\sqrt{16}=\dfrac{2}{3}\sqrt{9^2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2}=\dfrac{2}{3}.9-\dfrac{1}{2}.4=6-2=4$

d) $D=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{9}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}-\dfrac{2}{5}\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}.\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$

Bài 6. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{49}.\sqrt{144}+\sqrt{256}:\sqrt{64}$

b) $B=72:\sqrt{2^2.36.3^2}-\sqrt{225}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{49}.\sqrt{144}+\sqrt{256}:\sqrt{64}=\sqrt{7^2}.\sqrt{12^2}+\sqrt{16^2}:\sqrt{8^2}=7.12+16:8=86$

b) $B=72:\sqrt{2^2.36.3^2}-\sqrt{225}=72:\sqrt{2^2.6^2.3^2}-\sqrt{15^2}=72:\sqrt{(2.6.3)^2}-\sqrt{15^2}=72:36-15=-13$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}+\sqrt{15}$

b) $B=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

c) $C=\sqrt{49-12\sqrt{5}}-\sqrt{49+12\sqrt{5}}$

d) $D=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}+\sqrt{15}=\left|4-\sqrt{15}\right|+\sqrt{15}=4-\sqrt{15}+\sqrt{15}=4$

b) $B=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|+\left|1-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)=1$

c) $C=\sqrt{49-12\sqrt{5}}-\sqrt{49+12\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\left(2-3\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(2+3\sqrt{5}\right)^2}$

$=\left|2-3\sqrt{5}\right|-\left|2+3\sqrt{5}\right|$

$=-\left(2-3\sqrt{5}\right)-\left(2+3\sqrt{5}\right)$

$=-4$

d) $D=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}$

$=\left|3+2\sqrt{5}\right|-\left|3-2\sqrt{5}\right|$

$=3+2\sqrt{5}+\left(3-2\sqrt{5}\right)=6$

Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{41-12\sqrt{5}}-\sqrt{41+12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

$=\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-1\right|$

$=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1=2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$

$=\left|\sqrt{2}+1\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$

$=\sqrt{2}+1+2-\sqrt{2}=3$

c) $\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$=\sqrt{4(6+2\sqrt{5})}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

$=2\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-2\right|=3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{41-12\sqrt{5}}-\sqrt{41+12\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\left(6-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(6+\sqrt{5}\right)^2}$

$=\left|6-\sqrt{5}\right|-\left|6+\sqrt{5}\right|=-2\sqrt{5}$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

c) $C=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

Lời giải

a) $A=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$

$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=1$

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{20-12\sqrt{5}+9}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{\left(2\sqrt{5}+3\right)^2}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}$

$=1$

c) $C=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

$=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}}$

$=\sqrt{13+30\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}}$

$=\sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

$=\sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}$

$=\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)}$

$=\sqrt{43+30\sqrt{2}}$

$=\sqrt{25+2.5.3\sqrt{2}+18}$

$=\sqrt{(5+3\sqrt{2})^2}$

$=5+3\sqrt{2}$

Bài 10. Chứng minh rằng

a) $8-2\sqrt{7}=\left(\sqrt{7}-1\right)^2$ b) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}=-2$

Lời giải

a) $8-2\sqrt{7}=7-2\sqrt{7}+1=\left(\sqrt{7}-1\right)^2\Rightarrow$ đpcm

b) $VT=\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}=-2=VP\Rightarrow$ đpcm

DẠNG 2
ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI KHÔNG CHỨA BIẾN

Bài 1. Viết gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{25.90}$ b) $\sqrt{96.125}$ c) $\sqrt{75.54}$ d) $\sqrt{245.35}$

Lời giải

a) $\sqrt{25.90}=\sqrt{25.9.10}=\sqrt{(5.3)^2.10}=15\sqrt{10}$

b) $\sqrt{96.125}=\sqrt{16.6.5.25}=\sqrt{16.25.30}=\sqrt{(4.5)^2.30}=20\sqrt{30}$

c) $\sqrt{75.54}=\sqrt{25.3.9.3.2}=\sqrt{(5.9)^2.2}=45\sqrt{2}$

d) $\sqrt{245.35}=\sqrt{49.5.5.7}=\sqrt{(7.5)^2 7}=35\sqrt{7}$

Bài 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{245}$ b) $4\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{45}+\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2}$

Lời giải

a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{245}=\sqrt{3^2.5}+\sqrt{2^2 5}-\sqrt{7^2.5}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-7\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{45}+\sqrt{5}=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{5}=7\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\left|\sqrt{5}+1\right|=\sqrt{5}+1$

d) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|+\sqrt{2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{125}+\sqrt{45}-\sqrt{405}$ b) $B=\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{162}-\sqrt{18}$

c) $C=\sqrt{63}-\sqrt{252}-\sqrt{343}+\sqrt{175}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{125}+\sqrt{45}-\sqrt{405}=\sqrt{25.5}+\sqrt{9.5}-\sqrt{81.5}=5\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

b) $B=\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{162}-\sqrt{18}=\sqrt{25.2}-\sqrt{64.2}+\sqrt{81.2}-\sqrt{9.2}=5\sqrt{2}+9\sqrt{2}-8\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

c) $C=\sqrt{63}-\sqrt{252}-\sqrt{343}+\sqrt{175}=\sqrt{7.9}-\sqrt{7.36}-\sqrt{7.49}+\sqrt{7.25}=3\sqrt{7}-6\sqrt{7}-7\sqrt{7}+5\sqrt{7}=-5\sqrt{7}$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{200}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$

b) $B=4\sqrt{20}-3\sqrt{125}+5\sqrt{45}-15\sqrt{\frac{1}{5}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{200}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$

$=10\sqrt{2}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=12\sqrt{2}$

b) $B=4\sqrt{20}-3\sqrt{125}+5\sqrt{45}-15\sqrt{\frac{1}{5}}$

$=4.2\sqrt{5}-3.5\sqrt{5}+5.3\sqrt{5}-3\sqrt{\frac{25}{5}}$

$=8\sqrt{5}-15\sqrt{5}-3\sqrt{5}+15\sqrt{5}$

$=5\sqrt{5}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$

c) $C=\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

d) $D=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(\sqrt{20}-3)^2}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3-(\sqrt{20}-3)}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

$=\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)$

$=1$

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}$

$=1$

c) $C=\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}$

$=\sqrt{3}+1$

d) $D=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10(2+\sqrt{3})}}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{25}}$

$=\sqrt{9}$

$=3$

DẠNG 3
CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG
ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI CĂN THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{27x^2}\,(x\ge 0)$

b) $\sqrt{8xy^2}\,(x\ge 0; y\le 0)$

c) $\sqrt{25x^3}\,(x>0)$

d) $\sqrt{48xy^4}\,(x\ge 0; y\in R)$

Lời giải

a) $\sqrt{27x^2}=\sqrt{(3x)^2.3}=|3x|\sqrt{3}=3\sqrt{3}x\,(x\ge 0)$

b) $\sqrt{8xy^2}=\sqrt{(2y)^2.2x}=|2y|\sqrt{2x}=-2y\sqrt{2x}\,(x\ge 0; y\le 0)$

c) $\sqrt{25x^3}=\sqrt{(5x)^2x}=|5x|\sqrt{x}=5x\sqrt{x}\,(x>0)$

d) $\sqrt{48xy^4}=\sqrt{16.3xy^4}=\sqrt{(4y^2)^2 3x}=|4y^2|\sqrt{3x}=4y^2\sqrt{3x}\,(y^2\ge 0)$

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $a\sqrt{13}\,(a\ge 0)$

b) $a\sqrt{\dfrac{-15}{a}}\,(a<0)$

c) $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{12}{a}}\,(a>0)$

d) $a\sqrt{2}\,(a\le 0)$

Lời giải

a) $a\sqrt{13}=\sqrt{13a^2}\,(a\ge 0)$

b) $a\sqrt{\dfrac{-15}{a}}=-(-a)\sqrt{\dfrac{-15}{a}}=-\sqrt{\dfrac{-15a^2}{a}}=-\sqrt{-15a}\,(a<0)$

c) $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{12}{a}}=\sqrt{\dfrac{12}{a}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{12.a^2}{4.a}}=\sqrt{3a}\,(a>0)$

d) $a\sqrt{2}=(-a)\sqrt{2}=-\sqrt{2a^2}\,(a\le 0)$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{64a^2}+2a\ (a\ge 0)$

b) $5\sqrt{25a^2}-25a\ (a<0)$

c) $\sqrt{16a^4}+6a^2$

Lời giải

a) $\sqrt{64a^2}+2a=\sqrt{(8a)^2}+2a=|8a|+2a=10a\ (a\ge 0)$

b) $5\sqrt{25a^2}-25a=5\sqrt{(5a)^2}-25a=5.|5a|-25a=5.(-5a)-25a=-50a\,(a<0)$

c) $\sqrt{16a^4}+6a^2=\left|4a^2\right|+6a^2=4a^2+6a^2=10a^2$ (với a bất kỳ)

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=3\sqrt{9a^6}-6a^3$

b) $B=\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$

Lời giải

b) $A=3\sqrt{9a^6}-6a^3=3\sqrt{\left(3a^3\right)^2}-6a^3=3\left|3a^3\right|-6a^3$

+ Với $a<0\Rightarrow A=3.\left|3a^3\right|-6a^3=3.(-3a^3)-6a^3=-15a^3$

+ Với $a\geq 0\Rightarrow A=3.\left|3a^3\right|-6a^3=9a^3-6a^3=3a^3$

b) $B=\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}=|a+3|+|a-3|$

+ Với $a<3\Rightarrow B=|a+3|+|a-3|=-a-3+3-a=-2a$

+ Với $-3\leq a\leq a\ \Rightarrow B=|a+3|+|a-3|=a+3+3-a=6$

+ Với $a>3\ \Rightarrow B=|a+3|+|a-3|=a+3+a-3=2a$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=4\sqrt{x}-\dfrac{\left(x+6\sqrt{x}+9\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{x-9}\left(0\leq x;x\neq 9\right)$

b) $B=\dfrac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2}\left(x\neq\dfrac{-2}{3}\right)$

Lời giải

a) $A=4\sqrt{x}-\dfrac{\left(x+6\sqrt{x}+9\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{x-9}=4\sqrt{x}-\dfrac{\left(\sqrt{x}+3\right)^2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=4\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}+3\right)=3\left(\sqrt{x}-1\right)$

b) $B=\dfrac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2}=\dfrac{\sqrt{\left(3x+2\right)^2}}{3x+2}=\dfrac{|3x+2|}{3x+2}$

+ Với $x>-\dfrac{2}{3}\Rightarrow B=\dfrac{|3x+2|}{3x+2}=\dfrac{3x+2}{3x+2}=1$

+ Với $x<-\dfrac{2}{3}\Rightarrow B=\dfrac{|3x+2|}{3x+2}=\dfrac{-\left(3x+2\right)}{3x+2}=-1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{5a^2}\left(a\leq 0\right)$

b) $\sqrt{18a^2}\left(a\geq 0\right)$

c) $\sqrt{-9b^3}\left(b\leq 0\right)$

d) $\sqrt{24a^4b^8}\left(a,b\in R\right)$

Lời giải

a) $\sqrt{5a^2}=|a|\sqrt{5}=-a\sqrt{5}\left(a\leq 0\right)$

b) $\sqrt{18a^2}=\sqrt{2\left(3a\right)^2}=|3a|\sqrt{2}=3a\sqrt{2}\left(a\geq 0\right)$

c) $\sqrt{-9b^3}=\sqrt{-b(3b)^2}=|3b|\sqrt{-b}=-3b\sqrt{-b}\,(b\le 0)$

d) $\sqrt{24a^4b^8}=\sqrt{6(2a^2b^4)^2}=|2a^2b^4|\sqrt{6}=2\sqrt{6}a^2b^4\,(a,b\in R)$

Bài 7. Đưa thừa số vào trong đấu căn:

a) $x\sqrt{7}\,(x\ge 0)$ b) $x\sqrt{15}\,(x\le 0)$ c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y}\,(y>0)$ d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}}\,(y\le 0)$

Lời giải

a) $x\sqrt{7}=\sqrt{7x^2}\,(x\ge 0)$

b) $x\sqrt{15}=(-x)\sqrt{15}=-\sqrt{15x^2}$

c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y}=\sqrt{19y.\frac{1}{y^2}}=\sqrt{\frac{19}{y}}\,(y>0)$

d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}}=\left(-\frac{1}{3}y\right)\sqrt{\frac{27}{y^2}}=-\sqrt{\frac{27}{y^2}\left(\frac{1}{3}y\right)^2}=-\sqrt{\frac{27}{y^2}.\frac{1}{9}y^2}=-\sqrt{3}\,(y\le 0)$

Bài 8. Rút gọn biểu thức

a) $A=4\sqrt{\frac{25x}{4}}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}}-\frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}}\ \ (x\ge 0)$ b) $B=\frac{y}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2}-\frac{3}{2}\ \left(y\le\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

a) $A=4\sqrt{\frac{25x}{4}}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}}-\frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}}=\frac{11}{2}\sqrt{x}$

b) $B=\frac{y}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2}-\frac{3}{2}=-y-\frac{3}{4}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}\ \ (-3\le a\le 3)$

b) $B=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}\ \ (1\le a\le 2)$

Lời giải

a) $A=\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-3)^2}=|a+3|+|a-3|=a+3+3-a=6$

b) $B=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$

$= \sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1} + \sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}$

$= \left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1}-1\right|$

$= \sqrt{a-1}+1-\left(\sqrt{a-1}-1\right)$

$= 2$

Bài 10. Thực hiện các phép tính

a) $A = 5\sqrt{x} - \dfrac{\left(x-10\sqrt{x}+25\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}{x-25}\left(0 \le x \ne 25\right)$

b) $B = \dfrac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1}\left(x \ne \dfrac{1}{2}\right)$

Lời giải

a) $A = 5\sqrt{x} - \dfrac{\left(x-10\sqrt{x}+25\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}{x-25}$

$= 5\sqrt{x} - \dfrac{\left(\sqrt{x}-5\right)^2\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$

$= 4\sqrt{x}+5$

b) $B = \dfrac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1} = \dfrac{|2x-1|}{2x-1}\left[\begin{array}{l} 1\left(x > \dfrac{1}{2}\right) \\ -1\left(x < \dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right.$

+ Với $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = \dfrac{|2x-1|}{2x-1} = \dfrac{2x-1}{2x-1} = 1$

+ Với $x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = \dfrac{|2x-1|}{2x-1} = \dfrac{-(2x-1)}{2x-1} = -1$

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}(1 \le a \le 2)$

b) $B = 4x - \sqrt{x^2-4x+4}(x \ge 2)$

c) $C = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}(x \ne 2)$

d) $D = 2x-1-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}(1 \le a \le 2) = \left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1}-1\right|$

Với $1 \le a \le 2 \Rightarrow \sqrt{a-1}+1 > 0; \sqrt{a-1}-1 \le 0$, ta được:

$A = \left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1}-1\right| = \sqrt{a-1}+1-\sqrt{a-1}+1 = 2$

b) Ta có: $B = 4x - \sqrt{x^2-4x+4}(x \ge 2) = 4x - |x-2| = 4x-(x-2) = 3x+2$

c) $C=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}(x\neq 2)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$

- Nếu $x<-2$ thì $A=-1$

- Nếu $x>-2$ thì $A=1$

d) $D=2x-1-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}=2x-1-\dfrac{|x-5|}{x-5}$

+ Nếu $x-5\le 0\Leftrightarrow x\le 5\Rightarrow A=2x-1+1=2x$

+ Nếu $x\ge 5\Rightarrow A=2x-2$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a^2-4a+4)}(a\neq 2)$

b) $B=4\sqrt{25u}-\dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{16u}{9}}-\dfrac{2}{u}\sqrt{\dfrac{169u^3}{4}}(u>0)$

c) $C=5\sqrt{4x}-3\sqrt{\dfrac{100x}{9}}-\dfrac{4}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{4}}(x>0)$

d) $D=-\sqrt{36b}-\dfrac{1}{3}\sqrt{54b}+\dfrac{1}{5}\sqrt{150b}(b\ge 0)$

e) $E=\dfrac{1}{3}\sqrt{9+6v+v^2}+\dfrac{4v}{3}+5(v\le -3)$

f) $F=\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{4-4t+t^2}-2(t\le 2)$

Lời giải

a) $A=\dfrac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a^2-4a+4)}=\dfrac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a-2)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}a^4|a-2|}{a-2}$

+ Nếu $a-2>0\Rightarrow A=2\sqrt{2}a^4$

+ Nếu $a-2<0\Rightarrow A=-2\sqrt{2}a^4$

b) $B=4\sqrt{25u}-\dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{16u}{9}}-\dfrac{2}{u}\sqrt{\dfrac{169u^3}{4}}=20\sqrt{u}-10\sqrt{u}-13\sqrt{u}=-3\sqrt{u}(u\ge 0)$

c) $C=5\sqrt{4x}-3\sqrt{\dfrac{100x}{9}}-\dfrac{4}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{4}}=10\sqrt{x}-10\sqrt{x}-2\sqrt{x}=-2\sqrt{x}$

d) $D=-\sqrt{36b}-\dfrac{1}{3}\sqrt{54b}+\dfrac{1}{5}\sqrt{150b}=-6\sqrt{b}-\dfrac{1}{3}.3.\sqrt{6b}+\dfrac{1}{5}.5.\sqrt{6b}=-6\sqrt{b}-\sqrt{6b}+\sqrt{6b}=-6\sqrt{b}(b\ge 0)$

e) $E=\dfrac{1}{3}\sqrt{9+6v+v^2}+\dfrac{4v}{3}+5(v\le -3)=\dfrac{1}{3}\sqrt{(v+3)^2}+\dfrac{4v}{3}+5=v+4$

f) $F=\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{4-4t+t^2}-2(t\le 2)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{2}|2-t|-2=1-t(t\le 2)$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{64a^2}+2a$

b) $B=3\sqrt{9a^6}-6a^3$

c) $C=(x-y)\sqrt{\dfrac{xy}{(x-y)^2}}(xy>0)$

d) $D=\sqrt{\dfrac{9-6x+x^2}{25y^2}}$

e) $E=\dfrac{3}{2(2x-1)}\sqrt{8x^4(4x^2-2x+1)}$

f) $F=\dfrac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{64a^2}+2a=\sqrt{(8a)^2}+2a=|8a|+2a$

+ Với $a\ge 0\Rightarrow A=|8a|+2a=8a+2a=10a$

+ Với $a<0\Rightarrow A=|8a|+2a=-8a+2a=-6a$

b) $B=3\sqrt{9a^6}-6a^3=3\sqrt{(3a^3)^2}-6a^3=3|3a^3|-6a^3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B=-15a^3\,(a<0)\\ B=3a^3\,(a\ge 0)\end{array}\right.$

+ Với $a\ge 0\Rightarrow B=3|3a^3|-6a^3=3.3a^3-6a^3=3a^3$

+ Với $a<0\Rightarrow B=3|3a^3|-6a^3=3.(-3a^3)-6a^3=-12a^3$

c) Biểu thức có nghĩa khi $xy\ge 0; x\ne y$

$$C=(x-y)\sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}=(x-y).\frac{\sqrt{xy}}{|x-y|}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{xy}\,(x>y)\\ -\sqrt{xy}\,(x<y)\end{array}\right.$$

+ Với $x>y\Rightarrow C=(x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{|x-y|}=(x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}=\sqrt{xy}$

+ Với $x<y\Rightarrow C=(x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{|x-y|}=(x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{-(x-y)}=-\sqrt{xy}$

d) Biểu thức có nghĩa khi $y\ne 0$

$$D=\sqrt{\frac{9-6x+x^2}{25y^2}}=\sqrt{\frac{(x-3)^2}{25y^2}}=\sqrt{\left(\frac{x-3}{5y}\right)^2}=\left|\frac{x-3}{3y}\right|=\frac{|x-3|}{|3y|}$$

+ Với $x-3\ge 0$ và $y>0$ hoặc $x-3<0$ và $y<0$ $\Rightarrow D=\dfrac{|x-3|}{|3y|}=\dfrac{x-3}{3y}$

+ Với $x-3\ge 0$ và $y<0$ hoặc $x-3<0$ và $y>0$ $\Rightarrow D=\dfrac{|x-3|}{|3y|}=-\dfrac{x-3}{3y}$

e) $E=\dfrac{3}{2(2x-1)}\sqrt{8x^4(4x^2-2x+1)}=\dfrac{3}{2(2x-1)}.\sqrt{2.(2x^2)^2.(2x-1)^2}=\dfrac{3}{2(2x-1)}.2x^2.|2x-1|.\sqrt{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1}.|2x-1|$

+ Với $x>\dfrac{1}{2}\Rightarrow E=\dfrac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1}.|2x-1|=\dfrac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1}.(2x-1)=3\sqrt{2}x^2$

+ Với $x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow E=\dfrac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1}.|2x-1|=\dfrac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1}.[-(2x-1)]=-3\sqrt{2}x^2$

f) $F=\dfrac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}=\dfrac{2}{2a-1}\sqrt{5a^4(1-4a+4a^2)}=\dfrac{2}{2a-1}\sqrt{5a^4(2a-1)^2}=\dfrac{2}{2a-1}.5a^2|2a-1|$

+ Với $a > \dfrac{1}{2} \Rightarrow F = \dfrac{2}{2a-1}.5a^2\left|2a-1\right| = \dfrac{2}{2a-1}.5a^2\left(2a-1\right) = 10a^2$

+ Với $a > \dfrac{1}{2} \Rightarrow F = \dfrac{2}{2a-1}.5a^2\left|2a-1\right| = \dfrac{2}{2a-1}.5a^2\left[-\left(2a-1\right)\right] = -10a^2$

Bài 14. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$

Tính: $A = x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

Lời giải

Ta có: $1+y^2 = (xy+yz+zx)+y^2 = (x+y)(y+z); 1+z^2 = (y+z)(z+x); 1+x^2 = (x+z)(x+y)$

$\Rightarrow A = x(y+z)+y(z+x)+z(x+y) = 2(xy+yz+zx) = 2$

Vậy $A = 2$.

CHỦ ĐỀ 2
TRỤC CĂN THỨC

- $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}\,(B>0)$
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}+B}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2}\left(A\ge 0;A\ne B^2\right)$
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}-B}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}\left(A\ge 0;A\ne B^2\right)$
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B}\left(A,B\ge 0;A\ne B\right)$
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}\left(A,B\ge 0;A\ne B\right)$

Chú ý: Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $\left(a-b\right)\left(a+b\right)=a^2-b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

- $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B$
- $\left(A-\sqrt{B}\right)\left(A+\sqrt{B}\right)=A^2-B$

DẠNG 1
TRỤC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA SỐ THỰC

Bài 1. Khử căn thức ở mẫu số các phân số

a) $\sqrt{\dfrac{7}{108}}$ b) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ c) $\sqrt{\dfrac{10}{13}}$

d) $\sqrt{\dfrac{4}{75}}$ e) $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}$ f) $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{6}}{3}}$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{7}{108}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{36.3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}.\sqrt{3}}{6\sqrt{3}.3}=\dfrac{\sqrt{21}}{8}$

b) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

c) $\sqrt{\dfrac{10}{13}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{10}.\sqrt{13}}{13}=\dfrac{\sqrt{130}}{13}$

d) $\sqrt{\dfrac{4}{75}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25.3}}=\dfrac{2}{5\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$

e) $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right).\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

f) $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=1-\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$

Lời giải

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{8-27}=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{-19}=\dfrac{-\left(\sqrt{8}+\sqrt{27}\right)}{19}$

b) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}}=\sqrt{\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{4}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}$ b) $B=\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$

c) $C=\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$ d) $D=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

b) $B=\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{6}-1+1}-\dfrac{1}{\sqrt{6}+1-1}=0$

c) $C=\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)=\left[\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-2}+\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right]\left(\sqrt{6}+11\right)=-115$

d) $D=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=\sqrt{3}\left[\frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1\right)-\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1\right)}\right]=\sqrt{3}.\frac{2}{\sqrt{3}+1-1}=2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trục căn thức ở mẫu rồi rút gọn

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Lời giải

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{10}+\sqrt{6}$

b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=2-\sqrt{3}$

Bài 5. Trục căn thức và thực hiện phép tính

a) $A=\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$ b) $B=\left(1-\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}-1\right)$

Lời giải

a) $A=\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$

Ta có:

$$\frac{15}{\sqrt{6}+1}=\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}=3\left(\sqrt{6}-1\right)$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-2}=2\left(\sqrt{6}+2\right)$$

$$\frac{12}{3-\sqrt{6}}=4\left(3+\sqrt{6}\right)$$

$\Rightarrow A=-115$

b) $B=\left(1-\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}-1\right)$

Ta có:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B=\left(1-\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=-\left(-4\right)=4$$

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right).\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}$

b) $B=\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $A=(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}).\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}=\dfrac{1}{2}$

b) $B=(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$

DẠNG 2
TRỤC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a) $\sqrt{\dfrac{5x^3}{49y}}\left(x \geq 0; y > 0\right)$ b) $7xy\sqrt{\dfrac{-3}{xy}}\left(x < 0; y > 0\right)$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{5x^3}{49y}} = \dfrac{x}{7}\sqrt{\dfrac{5x}{y}} = \dfrac{x}{7}\sqrt{\dfrac{5xy}{y^2}} = \dfrac{x}{7|y|}\sqrt{5xy} = \dfrac{x}{7y}\sqrt{5xy}\left(x \geq 0; y > 0\right)$

b) $7xy\sqrt{\dfrac{-3}{xy}} = 7xy\sqrt{\dfrac{-3xy}{x^2y^2}} = \dfrac{7xy}{|xy|}\sqrt{-3xy} = -7\sqrt{-3xy}\left(x < 0; y > 0\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a) $\sqrt{\dfrac{5b}{49a^3}}\left(a > 0, b \geq 0\right)$ b) $\dfrac{-1}{4}ab\sqrt{\dfrac{16}{ab}}\left(a < 0, b < 0\right)$

Lời giải

a) $\sqrt{\dfrac{5b}{49a^3}} = \dfrac{1}{7a}\sqrt{\dfrac{5b}{a}} = \dfrac{1}{7a}\sqrt{\dfrac{5ab}{a^2}} = \dfrac{1}{7a^2}\sqrt{5ab}\left(a > 0, b \geq 0\right)$

b) $\dfrac{-1}{4}ab\sqrt{\dfrac{16}{ab}} = -ab\sqrt{\dfrac{1}{ab}} = -ab\sqrt{\dfrac{ab}{a^2b^2}} = -\sqrt{ab}$

Bài 3. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \quad (a, b > 0)$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a+b}{a-b} \quad (a, b \geq 0; a \neq b)$

c) $\dfrac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.\sqrt{\dfrac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}}=b\ \ (a,b>0)$

Lời giải

a) $VP=\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=VT$ Suy ra ĐPCM

b) $VP=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a+b}{a-b}=VT$ Suy ra ĐPCM

c) $VP=\dfrac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.\sqrt{\dfrac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}}$

$$\frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\sqrt{\frac{b[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2]}{a^2+2a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}}$$

$=\dfrac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}}=VT$ Suy ra ĐPCM

CHỦ ĐỀ 3

RÚT GỌN BIỂU THỨC

DẠNG1

RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Cho biểu thức $C=\dfrac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$ với $x\neq -2$

a) Rút gọn C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $x=2\sqrt{6}+3$.

Lời giải

a)

$$C=\frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}=\frac{\sqrt{x+2+x-2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}}}{\sqrt{(x+2)(x-2)}+x+2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

b) Thay $x=2\sqrt{6}+3$ vào $C=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

Ta được: $C=\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{6}+2+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Bài 2. Cho biểu thức $C=\dfrac{a}{a-16}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}$ với $a\geq 0, a\neq 16$

a) Rút gọn C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Lời giải

a) $C=\dfrac{a}{a-16}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}=\dfrac{a}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}$

$=\dfrac{a-2\left(\sqrt{a}+4\right)-2\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\dfrac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\dfrac{a-4\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}$.

b) Giá trị của C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Ta có: $a=a=9-4\sqrt{5}=4-4\sqrt{5}+5=\left(2-\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-2$

Vậy $C=\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=9-4\sqrt{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$ với v $a\geq 0, a\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của biểu thức M khi $a=16$.

Lời giải

a) $M=\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right]:\dfrac{\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}.\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$

b) Ta có $M=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{4}$

Bài 4. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{2}{a-1}\right)$ với $0<a\neq 1$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

a) $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{2}{a-1}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}\right)$

$=\frac{a-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}:\frac{\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}:\frac{\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)}$

$=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}.\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)}{1}$

$=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$

$\Rightarrow A=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a=4+2\sqrt{3}$.

$a=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

$\Rightarrow A=\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+1}=2$

Bài 5. Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$ với $x\geq 1; x\neq 2; x\neq 3$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x=3-2\sqrt{2}$.

Lời giải

a)

$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$

$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}\right]\left[\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}\right]$

$=\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)-2}\right].\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{x-3}\right).\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right).(-1)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

b) Tính giá trị của P với $x=3-2\sqrt{2}$.

Thay $x=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ vào biểu thức $P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}-\left|\sqrt{2}-1\right|}{\left|\sqrt{2}-1\right|}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Bài 6. Cho $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x\ge 0, x\ne 25$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A với $x=4-2\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A

với $x\ge 0, x\ne 25$

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$$

$$=\frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+5\right)-10\sqrt{x}-5.\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$$=\frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$$=\frac{x-10\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}.$$

$$=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$$

b) $x=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-5}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+5}=\frac{\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-4}=\frac{\left(\sqrt{3}-6\right)\left(\sqrt{3}+4\right)}{-13}=\frac{21+2\sqrt{3}}{13}$$

Bài 7. Cho biểu thức $A=\frac{1}{2+\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ $\left(x\ge 0, x\ne 4\right)$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A với $x=3$.

Lời giải

a) Rút gọn A .

$$A=\frac{1}{2+\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}$$

$$=\frac{2-\sqrt{x}}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}+\frac{2+\sqrt{x}}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}$$

$$=\frac{4}{4-x}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}=\frac{2\left(2-\sqrt{x}\right)}{4-x}=\frac{2}{2+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{2}{2+\sqrt{x}}$$

b) $A=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}=4-2\sqrt{3}$

Bài 8. Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0; x\ne 1$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với $x=\frac{25}{9}$.

Lời giải

a) Rút gọn P.

$$P=\left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\frac{25}{9}}+1}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{\frac{5}{3}+1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}$

Bài 9. Cho biểu thức $B=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B với $x=\dfrac{1}{121}$.

Lời giải

a) Rút gọn B.

$$B=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right).\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{2x+1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left[\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}-\sqrt{x}\right]$$

$$=\frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(1-2\sqrt{x}+x\right)$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(\sqrt{x}-1\right)^2$$

$$=\sqrt{x}-1$$

b) $B=\sqrt{x}-1=\sqrt{\dfrac{1}{121}}-1=\dfrac{1}{11}-1=-\dfrac{10}{11}$.

Bài 10. Cho biểu thức $P=\left[\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ $(x>0; x\neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x=64$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P.

$$P=\left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right]:\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]:\left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

b) $P=\dfrac{\sqrt{64}+1}{2\sqrt{64}}=\dfrac{8+1}{2.8}=\dfrac{9}{16}$

DẠNG 2

TÌM x ĐỂ BIỂU THỨC RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN

Bài toán: Cho biểu thức $A=\dfrac{a}{cx+d}$ **hoặc** $A=\dfrac{a}{c\sqrt{x}+d}$. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$

Phương pháp:

- Lập luận: $A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ Mẫu thức là Ư(a)
- Liệt kê Ư(a)
- Mẫu thức bằng Ư(a) tìm ra x

Chú ý: Giá trị $x\in\mathbb{Z}$ tìm được phải thoả mãn điều kiện của biểu thứcrút gọn mới nhận.

Bài 1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $(x>0,x\neq 4)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

a) Với $x>0,x\neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}:\frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3}=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x>0,x\neq 4$ thì $A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

b) Ta có $\sqrt{x}>0,\forall x>0,x\neq 4$ nên $A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}>0,x>0,x\neq 4$

$A=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}<\frac{5}{2},x>0,x\neq 4\Rightarrow 0<A<\frac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A\in\{1,2\}$.

$A=1\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2\sqrt{x}+1\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

$A=2\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=4\sqrt{x}+2\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x=\frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\geq 0,x\neq 16$).

Hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $M=B(A-1)$ là số nguyên.

Lời giải

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{x-16}+\frac{4\left(\sqrt{x}+4\right)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16}=\frac{(x+16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-16)(x+16)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.$$

Biểu thức $M=B(A-1)=\frac{\sqrt{x}+2}{x-16}\left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)=\frac{2}{x-16}$

$M=B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2)=\{\pm 1;\pm 2\}$.

Hay

$x-16=-1\Rightarrow x=15$

$x-16=1\Rightarrow x=17$

$x-16=-2\Rightarrow x=14$

$x-16=2\Rightarrow x=18$

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x\in\{14;15;17;18\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $A=\frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0;x\neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) $A=\frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3}(x\geq 0;x\neq 1)$

b) Ta có: $A\in Z\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3}\in Z\Leftrightarrow\frac{19}{\sqrt{x}+3}\in Z\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+3\in U(19)\\ \sqrt{x}+3\geq 3\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x}+3=19\Leftrightarrow x=256$ (thỏa mãn)

Bài 4. Cho biểu thức $M = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $M = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b) $M = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9) \Rightarrow x \in \{1;16;25;49\}$

Bài 5. Cho biểu thức $Q = \dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn được: $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b) $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}, Q \in Z \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right) \in U\left(2\right) = \{\pm1;\pm2\} \Rightarrow x \in \{0;4;9\}$

Bài 6. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \dfrac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\dfrac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x}\right)$$

$$= \left(\frac{6x+4-\left(\sqrt{3x}-2\right)\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}\right)$$

$$= \left(\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-2\sqrt{3x}+1\right) = \frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

$$\mathbf{A} = \frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2} = \frac{\left(\sqrt{3x}-2\right)^2+2\left(\sqrt{3x}-2\right)+1}{\sqrt{3x}-2} = \sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{3x}-2}$$

Với x là số nguyên không âm, để A là số nguyên thì $\begin{cases}\sqrt{3x}-2=\pm 1\\ \sqrt{3x}\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x}=3\\ \sqrt{3x}=1\end{array}\right.\\ \sqrt{3x}\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x=9\\ 3x=1\end{array}\right.\\ \sqrt{3x}\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\Rightarrow x=3$ (Vì $x\in\mathbb{Z}$ và $x\geq 0$ 0)

DẠNG 3

TÌM GTLN – GTNN CỦA BIỂU THỨC RÚT GỌN

Bài 1. Cho biểu thức: $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}$, với $x\geq 0, x\neq 9$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

a) Rút gọn P.

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Với $x\geq 0, P=\frac{3}{\sqrt{x}+3}\leq\frac{3}{0+3}=1\Rightarrow P_{\max}=1$ khi $x=0$ (TM).

Bài 2. Cho biểu thức: $P=\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x\geq 0, x\neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P

$$P=\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12-2\left(\sqrt{x}-3\right)^2-\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12-2x+12\sqrt{x}-18-x-5\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x\sqrt{x}-3x+12\sqrt{x}-36}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x}-3\right)+12\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(x+12\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}\Rightarrow P=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$$

b/ Vì $x\ge 0, x\ne 9$ nên: $P=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2+\frac{16}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}+2+\frac{16}{\sqrt{x}+2}-4$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $\sqrt{x}+2+\frac{16}{\sqrt{x}+2}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)\frac{16}{\sqrt{x}+2}}=8$

Dấu đăng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+2=\frac{16}{\sqrt{x}+2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+2\right)^2=4^2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $P=4\Leftrightarrow x=4$

Bài 3. Cho biểu thức $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}}$ với $x>0, y>0$

a) Rút gọn A.

b) Biết $x.y=16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

Lời giải

a) Rút gọn A.

$$A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}{\sqrt{xy}\,(x+y)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}.\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.$$

b/ Ta có $\left(\sqrt{\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{y}}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{\sqrt{xy}}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{xy}}.$$

Do đó $A=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\ge\frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}}=1$ (vì xy = 16)

Vậy min A = 1 khi $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}\\ xy=16\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+6\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 1$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị x tương ứng.

Lời giải

a)Với $x\ge 0;\ x\ne 1$.

$$P=\frac{3x+6\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}=\frac{3x+6\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{\sqrt{x^2}-1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}\Rightarrow P=1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

b) Do $\sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow P=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\le 1+\dfrac{1}{2}\Rightarrow P\le\dfrac{3}{2}$

Vậy GTLN của $P=\dfrac{3}{2}$ khi x=0

Bài 5. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A.

Điều kiện: $\sqrt{xy}\ne 1$.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:$$

$$=\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

b) Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $6=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$.

Vậy: maxA = 9, đạt được khi: $x=y=\frac{1}{9}$

CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG

Bài 1. Áp suất P (lb/in^2) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức: $P=0,00161.\frac{v^2L}{d}$

a) Hãy tính v theo P, L và d.

b) Cho P = 198,5; L = 11 560; d = 6. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).

1 in = 2,54 cm;

1 ft (feet) = 0,3048 m;

1 lb (pound) = 0,45359237 kg;

1 lb/in^2 = 6 894,75729 Pa (Pascal).

Lời giải

a) Từ công thức $P=0,00161.\frac{v^2L}{d}$ ta có

$$P=0,00161.\frac{v^2L}{d}$$

$$v^2L=\frac{Pd}{0,00161}$$

$$v^2=\frac{Pd}{0,00161L}$$

$$v=\sqrt{\frac{Pd}{0,00161L}}\left(ft/s\right)$$

b) Tốc độ khi P = 198,5; L = 11 560; d = 6 là:

$$v=\sqrt{\frac{Pd}{0,00161L}}=\sqrt{\frac{198,5.6}{0,00161.11560}}\approx 8\left(ft/s\right)$$

Vậy $v\approx 8\left(ft/s\right)$.

Bài 2. Trong thuyết tương đối, khối lượng m (kg) của một vật khi chuyển động với vận tốc v (m/s) được cho bởi công thức $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 (kg) là khối lượng của vật khi đứng yên, c (m/s) là vận tốc của ánh sáng trong chân không

a) Viết lại công thức tính khối lượng m dưới dạng không có căn thức ở mẫu.

b) Tính khối lượng m theo m_0 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) khi vật chuyển động với vận tốc $v=\dfrac{1}{10}c$.

Lời giải

a) Ta có: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{m_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

Vậy $m=\dfrac{m_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

b) Khi $v=\dfrac{1}{10}c$, ta có $\dfrac{v}{c}=\dfrac{\dfrac{1}{10}c}{c}=\dfrac{1}{10}$, suy ra $\dfrac{v^2}{c^2}=\left(\dfrac{v}{c}\right)^2=\left(\dfrac{1}{10}\right)^2=\dfrac{1}{100}$.

Thay vào $m=\dfrac{m_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, ta được:

$$m=\dfrac{m_0\sqrt{1-\dfrac{1}{100}}}{1-\dfrac{1}{100}}=\dfrac{m_0\sqrt{\dfrac{99}{100}}}{\dfrac{99}{100}}=\dfrac{m_0\sqrt{\dfrac{9}{100}\cdot 11}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$=\dfrac{m_0\sqrt{\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\cdot 11}}{\dfrac{99}{100}}=\dfrac{m_0\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\sqrt{11}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$=\dfrac{m_0\cdot\sqrt{11}}{\dfrac{33}{10}}=\dfrac{10\sqrt{11}}{33}m_0\approx 1{,}005m_0.$$

Vậy $m\approx 1{,}005m_0$ khi $v=\dfrac{1}{10}c$.

Bài 3. Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao h (m) được tính theo công thức: $P = \dfrac{28014.10^{12}}{\left(64.10^5 + h\right)^2}$

a) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Trọng lượng của phi hành gia khi cách mặt đất 10 000 m là:

$$P = \frac{28014.10^{12}}{\left(64.10^5 + h\right)^2} = \frac{28014.10^{12}}{\left(64.10^5 + 10000\right)^2} \approx 681,8(N)$$

b) Vì trọng lượng của phi hành gia là 619 N nên ta có:

$$619 = \frac{28014.10^{12}}{\left(64.10^5 + h\right)^2}$$

$$\left(64.10^5 + h\right)^2 = \frac{28014.10^{12}}{619}$$

$$64.10^5 + h = \sqrt{\frac{28014.10^{12}}{619}}$$

$$h = \sqrt{\frac{28014.10^{12}}{619}} - 64.10^5 \approx 327322,3(m)$$

Vậy ở độ cao khoảng 327 322,3 mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N.

Bài 4. Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesi (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó g = 9,81 m/s^2.

Sóng thần

a) Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).

b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m là:

$v=\sqrt{dg}=\sqrt{400.9,8}=\sqrt{3924}\approx 62,64$ (m/s).

b) Đổi $800(km/h)=\frac{800000}{3600}=\frac{2000}{9}(m/s)\Rightarrow v=\frac{2000}{9}(m/s)$

Khi đó:

$$\frac{2000}{9}=\sqrt{9,81d}$$

$$\left(\frac{2000}{9}\right)^2=9,81d$$

$$d=\frac{\left(\frac{2000}{9}\right)^2}{9,8}\approx 5,034(m)$$

Vậy chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần là khoảng $5,034(m)$

Bài 5. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức Q = I^2Rt, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J), R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có R = 10 Ω trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

I (A)	1	1,5	2
Q (J)	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J?

Lời giải

Thay R = 10 (Ω) và thời gian t = 5 (giây) vào công thức Q = I^2Rt, ta được: Q = $I^2.10.5 = 50I^2$ (J).

a) Thay I = 1 (A) vào biểu thức trên, ta được: Q = 50.1^2 = 50 (J).

Thay I = 1,5 (A) vào biểu thức trên, ta được: Q = $50.1,5^2$ = 112,5 (J).

Thay I = 2 (A) vào biểu thức trên, ta được: Q = 50.2^2 = 200 (J).

Vậy ta hoàn thành được bảng đã cho như sau:

I (A)	1	1,5	2

Q (J)	50	112,5	200

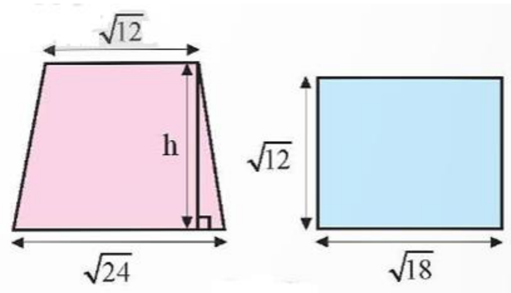
b) Để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J thì Q = 800 (J)

Suy ra $50I^2 = 800$.

Do đó $I^2 = 16$ nên $I = \sqrt{16} = 4\left(A\right)$ (A) (do I > 0).

Vậy cường độ dòng điện là 4 Ampe thì nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J.

Bài 6. Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao h của hình thang.



Lời giải

Diện tích hình chữ nhật là:

$\sqrt{18}\,.\,\sqrt{12}=\sqrt{18\,.\,12}=\sqrt{18\,.\,2\,.\,6}=\sqrt{36\,.\,6}=6\sqrt{6}$ (dvdt).

Vì hình thang và hình chữ nhật ở Hình 2 có diện tích bằng nhau nên diện tích hình thang bằng $6\sqrt{6}$ (đvdt).

Khi đó, diện tích hình thang là: $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{12}}{2}\cdot h=6\sqrt{6}$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{\sqrt{4\,.\,6}+\sqrt{4\,.\,3}}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

Do đó, $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\cdot h=6\sqrt{6}$

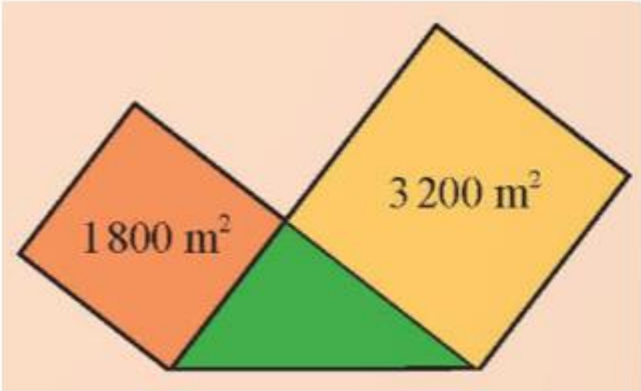
Suy ra $h=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{6\left(6-\sqrt{18}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{6\left(6-3\sqrt{2}\right)}{6-3}$

$=\dfrac{6\left(6-3\sqrt{2}\right)}{3}=2\left(6-3\sqrt{2}\right)=12-6\sqrt{2}$.

Vậy chiều cao h của hình thang $h=12-6\sqrt{2}$.

Bài 7. Một khu đất hình tam giác vuông tiếp giáp hai thửa ruộng hình vuông có diện tích như hình vẽ bên dưới. Khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng hình vuông bé không?



Lời giải

• Hình vuông bé (màu cam) có diện tích là 1 800 m^2.

Khi đó, cạnh thửa ruộng bé hình vuông là: $\sqrt{1800}=\sqrt{2.900}=30\sqrt{2}\,(m)$

Chu vi thửa ruộng bé là: $30\sqrt{2}.4=120\sqrt{2}\,(m)$

• Hình vuông lớn có diện tích (màu vàng) là 3 200 m^2.

Khi đó, cạnh thửa ruộng lớn hình vuông là: $\sqrt{3200}=\sqrt{2.1600}=40\sqrt{2}\,(m)$

• Hình tam giác vuông (màu xanh) có hai cạnh góc vuông là hai cạnh của của hai hình vuông trong hình vẽ trên.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông (màu xanh), ta có:

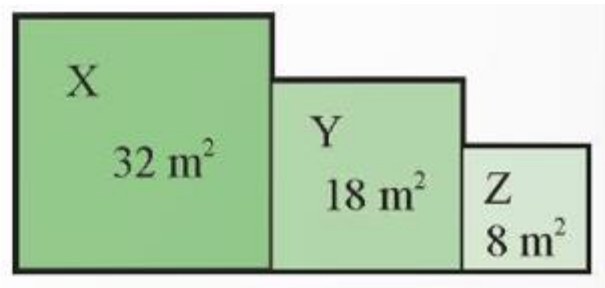
Độ dài cạnh huyền của tam giác vuông (màu xanh) là:

$$\sqrt{\left(30\sqrt{2}\right)^2+\left(40\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{900.2+1600.2}=\sqrt{2500.2}=50\sqrt{2}\,(m)$$

Chu vi tam giác vuông là: $30\sqrt{2}+40\sqrt{2}+50\sqrt{2}=120\sqrt{2}\,(m)$

Vậy khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng bé.

Bài 8. Một vườn hoa gồm ba thửa hình vuông X, Y, Z lần lượt có diện tích như hình vẽ. Tính chu vi của vườn hoa đó.



Lời giải

• Cạnh hình vuông X là: $\sqrt{32} = \sqrt{16 \,.\, 2} = 4\sqrt{2}$ (m).

Suy ra chu vi hình vuông X là: $4 \,.\, 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ (m).

• Cạnh hình vuông Y là: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \,.\, 2} = 3\sqrt{2}$ (m).

Suy ra chu vi hình vuông Y là: $4 \,.\, 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (m).

• Cạnh hình vuông Z là: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \,.\, 2} = 2\sqrt{2}$ (m).

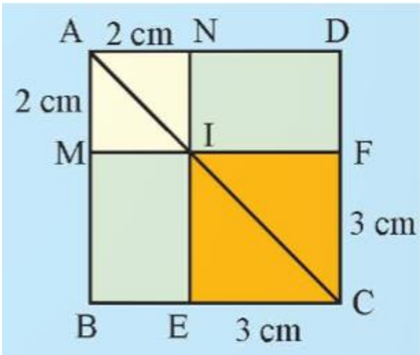
Suy ra chu vi hình vuông Z là: $4 \,.\, 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (m).

Do đó, chu vi của vườn hoa đó là:

$16\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ (m).

Vậy chu vi của vườn hoa đó là $36\sqrt{2}$ m.

Bài 9. Hình vuông ABCD được chia thành hai hình vuông và hai hình chữ nhật như hình vẽ.



a) Tính độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF.

b) Tính độ dài đường chéo của hình vuông ABCD theo hai cách khác nhau.

Lời giải

a) Vì AMIN là hình vuông nên AM = IN = 2 cm, $ANI = 90^0$

Xét tam giác ANI vuông tại N, áp dụng định lí Pythagore, ta có

$AI^2 = AN^2 + IN^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

Suy ra $AI = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,(cm)$

Vì CEIF là hình vuông nên IE = CF = 3 cm, $AEC = 90^0$

Xét tam giác IEC vuông tại E, áp dụng định lí Pythagore, ta có

$IC^2 = IE^2 + EC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.

Suy ra $IC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,(cm)$

Vậy độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF lần lượt là $2\sqrt{2}\,(cm)$ và $3\sqrt{2}\,(cm)$

b)

Cách 1: Độ dài đường chéo hình vuông là:

$AC = AI + IC = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,(cm)$

Cách 2:

• Vì BMIE là hình chữ nhật nên BM = IE = 3 cm.

• Vì DNIF là hình chữ nhật nên IN = DF = 2 cm.

Độ dài cạnh AB là: AB = AM + BM = 2 + 3 = 5 (cm).

Độ dài cạnh BC là: BC = BE + EC = 2 + 3 = 5 (cm).

Vì ABCD là hình vuông nên $BAC = 90^0$ suy ra tam giác ABC vuông tại B.

Xét tam giác ABC vuông tại B, áp dụng định lí Pythagore, ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.

Suy ra $AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\left(cm\right)$

Vậy độ dài đường chéo của hình vuông ABCD là $5\sqrt{2}\left(cm\right)$

BÀI 4
CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

1. Căn bậc ba của một số

Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.

Chú ý:

- Mỗi số thực đều có đúng một căn bậc ba, kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.
- Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ số căn. Phép toán tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.
- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.
- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

2. Căn thức bậc ba

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Chú ý:

- Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định biểu thức A.
- $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$.
- Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai hoặc bậc ba làm thành một biểu thức đại số.

DẠNG 1
TÌM CĂN BẬC BA

Phương pháp

Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

Bài 1. Tìm căn bậc ba của :

a) 216 b) $-\dfrac{1}{1000}$ c) $-0,0729$ d) $\dfrac{27}{512}$

Lời giải

a) 216

Ta có $6^3 = 216$ nên số 6 là căn bậc ba của 216.

b) $-\dfrac{1}{1000}$

Ta có $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^3 = -\dfrac{1}{1000}$ nên số $-\dfrac{1}{10}$ là căn bậc ba của $-\dfrac{1}{1000}$.

c) $-0,0729$

Ta có $(-0,9)^3 = -0,0729$ nên số $-0,9$ là căn bậc ba của $-0,0729$.

d) $\dfrac{27}{512}$

Ta có $\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 = \dfrac{27}{512}$ nên số $\dfrac{3}{8}$ là căn bậc ba của $\dfrac{27}{512}$.

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{\dfrac{121}{169}}$ c) $\left(-\sqrt{7}\right)^2$ d) $\sqrt{\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt{\dfrac{121}{169}} = \sqrt{\left(\dfrac{11}{13}\right)^2} = \dfrac{11}{13}$

c) $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = 7$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

Bài 3. Tính

a) $\sqrt[3]{0,008}$ b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$ c) $-\sqrt[3]{2024^3}$ d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{0,008}=\sqrt[3]{(0,8)^3}=0,8$

b) Ta có: $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{6}\right)^3}=-\frac{1}{6}$

c) Ta có: $-\sqrt[3]{2024^3}=-2024$

d) Ta có: $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3=-\frac{4}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm căn bậc ba của :

a) -64 b) $\frac{125}{8}$ c) $0,512$ d) $-\frac{1000}{216}$

Lời giải

a) -64

Ta có $(-4)^3=-64$ nên số -4 là căn bậc ba của -64.

b) $\frac{125}{8}$

Ta có $\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ nên số $\frac{5}{2}$ là căn bậc ba của $\frac{125}{8}$.

c) $0,512$

Ta có $(0,8)^3=0,512$ nên số $0,8$ là căn bậc ba của $0,512$.

d) $-\frac{1000}{216}$

Ta có $\left(-\frac{10}{6}\right)^3=-\frac{1000}{216}$ nên số $-\frac{10}{6}$ là căn bậc ba của $-\frac{1000}{216}$.

Bài 5. Tính

a) $\sqrt[3]{-0,027}$ b) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$ c) $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$ d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{-0,027} = \sqrt[3]{(-0,3)^3} = -0,3$

b) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{7}\right)^3} = \frac{4}{7}$

c) Ta có: $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^3} = -\frac{1}{8}$

d) Ta có: $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3 = \frac{2024}{2025}$

Bài 6. Tính

a) $\sqrt[3]{27}$ a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) Ta có: $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

c) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{5}$

d) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{1}{6}$

DẠNG 2
SO SÁNH CĂN BẬC BA

Phương pháp

- Nếu $a<b$ thì $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$ thì $a<b$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{-2024}$ và $\sqrt[3]{-2025}$ b. 8 và $\sqrt[3]{511}$

Lời giải

a) Ta có: $-2024>-2025$ nên $\sqrt[3]{-2024}>\sqrt[3]{-2025}$

b) Ta có: $8=\sqrt[3]{512}$

Do : $512>511$ nên $\sqrt[3]{512}>\sqrt[3]{511}$ hay $8>\sqrt[3]{511}$

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}}$ và $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1001}}$ b. -7 và $\sqrt[3]{-342}$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{1}{1000}>\dfrac{1}{1001}$ nên $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}}>\sqrt[3]{\dfrac{1}{1001}}$

b) Ta có: $-7=\sqrt[3]{-343}$

Do : $-343<-342$ nên $\sqrt[3]{-343}<\sqrt[3]{-342}$ hay $-7<\sqrt[3]{-342}$

Bài 3. So sánh cặp số sau

a) $2\sqrt[3]{3}$ và $\sqrt[3]{23}$ b) 15 và $3\sqrt[3]{126}$

Lời giải

a) Ta có: $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}>\sqrt[3]{23}$

b) Ta có: $15=3.5=3\sqrt[3]{125}\rightarrow 125<3\sqrt[3]{126}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. So sánh cặp số sau

a) 7 và $2\sqrt[3]{43}$ b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$

Lời giải

a) Ta có: $7<2\sqrt[3]{43}$

b) Ta có: $5\sqrt[3]{6}<6\sqrt[3]{5}$

Bài 5. Hãy so sánh

a) 33 và $3\sqrt[3]{133}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$ c) $4\sqrt[3]{1730}$ và 48 d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{18}$ và $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} 3\sqrt[3]{133} = \sqrt[3]{3591} \\ 33 = \sqrt[3]{35937} \end{cases} \Rightarrow 33 > 3\sqrt[3]{133}$

b) Ta có: $\begin{cases} 2\sqrt[2]{2} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} \\ 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$

c) Ta có: $12 = \sqrt[3]{12^3} = \sqrt[3]{1728} < \sqrt[3]{1730} \Rightarrow 48 < 4\sqrt[3]{1730}$

d) Ta có: $\begin{cases} \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}.18} = \sqrt[3]{5\dfrac{1}{3}} \\ \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{64}.12} = \sqrt[3]{5\dfrac{1}{16}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{18} > \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

Bài 6. So sánh

a) $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ và $B = 2\sqrt{5}$ hoặc $B = 2\sqrt[3]{9}$

b) $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ và $B = \sqrt{3}$ hoặc $B = \dfrac{4}{\sqrt[3]{9}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 4 = 2\sqrt[3]{8} \Rightarrow A < B$

b) Ta có: $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2 = \dfrac{4}{2} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{8}} > \dfrac{4}{\sqrt[3]{9}} \Rightarrow A > B$

DẠNG 3

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{2025-x}$ tại $x=2017;\ x=1998;\ x=1961$.

b) $\sqrt[3]{150-x^2}$ tại $x=-5;\ x=5;\ x=\sqrt{86}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{2025-x}$

- Thay $x=2017$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-1017}=\sqrt[3]{8}=2$

- Thay $x=1998$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-1998}=\sqrt[3]{27}=3$

- Thay $x=1961$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-1961}=\sqrt[3]{64}=4$

b) $\sqrt[3]{150-x^2}$

- Thay $x=-5$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-(-5)^2}=\sqrt[3]{150-25}=\sqrt[3]{125}=5$

- Thay $x=5$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-5^2}=\sqrt[3]{150-25}=\sqrt[3]{125}=5$

- Thay $x=\sqrt{86}$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-\left(\sqrt{86}\right)^2}=\sqrt[3]{150-86}=\sqrt[3]{64}=4$

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{4x+7}$ tại $x=-2;\ x=5;\ x=\dfrac{203}{4}$.

b) $\sqrt[3]{x^2+9}$ tại $x=-\sqrt{18};\ x=\sqrt{7};\ x=5$.

DẠNG 4
TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC BA CÓ NGHĨA

Bài 1. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{x-2024}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{2025-2024x}{2023}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{-2}{x-1}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{x-2024}$ xác định với mọi số thực x vì $x-2024$ xác định với mọi số thực x.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2025-2024x}{2023}}$ xác định với mọi số thực x vì $\dfrac{2025-2024x}{2023}$ xác định với mọi số thực x.

c) $\sqrt[3]{\dfrac{-2}{x-1}}$ xác định khi $x-1\neq 0$ hay $x\neq 1$.

Bài 2. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{2}}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2-4x+4}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+2x+3}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{2}}}$

Ta có $x^2+\dfrac{1}{2}>0$ với mọi số thực x nên $x^2+\dfrac{1}{2}\neq 0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{2}}}$ xác định với mọi số thực x

b) $\sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2-4x+4}}$

Ta có $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$ với mọi số thực x nên $x-2\neq 0$ hay $x\neq 2$

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{2}}}$ xác định khi $x\neq 2$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+2x+3}}$ xác định khi $x-1\neq 0$ hay $x\neq 1$.

Ta có $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+2x+3}}$ xác định với mọi số thực x

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x}$ b) $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2+12x+9}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x}$ xác định với mọi số thực x vì $1-\frac{1}{2}x$ xác định với mọi số thực x.

b) $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$ xác định với mọi số thực x vì $\frac{2x-3}{5}$ xác định với mọi số thực x.

c) $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$ xác định khi $4x-3\neq 0$ hay $x\neq\frac{3}{4}$.

d) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$

Ta có $2x^2+1$ với mọi số thực x nên $2x^2+1\neq 0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$ xác định với mọi số thực x

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2+12x+9}}$

Ta có $4x^2+12x+9=(2x+9)^2\geq 0$ với mọi số thực x nên $2x+9\neq 0$ hay $x\neq -\frac{9}{2}$

Do đó $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$ xác định khi $x\neq -\frac{9}{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$ xác định khi $x-1\neq 0$ hay $x\neq 1$.

Ta có $-x^2+x-4=-\left(x^2-2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-4=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4}<0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$ xác định với mọi số thực x

DẠNG 5
RÚT GỌN BIỂU THỨC CĂN BẬC BA KHÔNG CHỨA BIẾN

Bài 1. Thực hiện các phép tính

a) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}+\dfrac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}}$ b) $2\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{192}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{250}}-\sqrt[3]{160}.\sqrt[3]{1,2}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$

Lời giải

a) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}+\dfrac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}}=\sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{7,2}{0,9}}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=5$

b) $2\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{192}=2.2.\sqrt[3]{3}-5.3.\sqrt[3]{3}+4.4.\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{250}}-\sqrt[3]{160}.\sqrt[3]{1,2}=\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}=-3\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}=2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}=2$

Bài 2. Thực hiện các phép tính

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}-\sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{4}$ b) $B=\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)$

c) $C=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}-\sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\dfrac{135}{5}}-\sqrt[3]{54.4}=-3$

b) $B=\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=7$

a) $C=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$2C=\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3}=2\Rightarrow C=1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Thực hiện các phép tính

a) $\dfrac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}}+3\sqrt[3]{-54}+\sqrt[3]{432}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{512}}+\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{64}+\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$

c) $\sqrt[3]{-343}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{512}}+\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{64}+\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$

Lời giải

a) $\dfrac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}}+3\sqrt[3]{-54}+\sqrt[3]{432}=4\sqrt[3]{2}-3.3\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{512}}+\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{64}+\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}=\dfrac{-3}{8}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}.\dfrac{-2}{5}=\dfrac{-1}{8}$

c) $\sqrt[3]{-343}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}=-7\sqrt[3]{3}+3.3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=0$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{512}}+\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{64}+\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}=\dfrac{-3}{8}+4-\dfrac{2}{5}=\dfrac{-1}{8}$

Bài 4. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$

b) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$

c) $(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}):2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$

d) $2\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{192}-2\sqrt[3]{375}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1$

b) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)=\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=3-2=1$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9}:2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)-\left(2\sqrt[3]{3}:2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)+\left((3\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}:2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)=\dfrac{3}{4}-\sqrt[3]{3^2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9-4\sqrt[3]{9}}{4}$

d) $2\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{192}-2\sqrt[3]{375}=2\sqrt[3]{8.3}-3\sqrt{27.3}+4\sqrt{64.3}-2\sqrt[3]{125.3}=\sqrt[3]{3}\left(4-9+16-10\right)=\sqrt[3]{3}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

b) $B=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$

b) $B=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}=\sqrt{3}+1$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)$

b) $B=\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{5}}-3\sqrt[3]{\dfrac{-9}{5}}+4\sqrt[2]{\dfrac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$

Lời giải

a) $A=\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{2}$

$=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^3}=3+2=5$

b) $B=\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{5}}-3\sqrt[3]{\dfrac{-9}{5}}+4\sqrt[2]{\dfrac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{5}}-3\sqrt[3]{\dfrac{-9}{5}}+4\sqrt[2]{\dfrac{1}{3}}\right).\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{27}{5}}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{-27}{5}}+2\sqrt[3]{1}$

$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+2=6\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+2$

Bài 7. Tính

a) $A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$ b) $B=\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$ c) $C=\frac{\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{16}}$

Lời giải

a) $A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}=\frac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}$

b) $B=\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{3}+3\left(\sqrt{3}\right)^2.1+1}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\left(\sqrt{3}+1\right)$

c) $C=\frac{\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}}=\frac{-\sqrt[3]{2}}{7\sqrt[3]{2}}=\frac{-1}{7}$

DẠNG 6
RÚT GỌN BIỂU THỨC CĂN BẬC BA CHỨA BIẾN

Bài 1. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{64a^3}$ b) $\sqrt[3]{-8a^3b^6}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{343a^3b^6}{-216}}$ d) $\sqrt[3]{-64a^9b^9}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{64a^3}=\sqrt[3]{(4a)^3}=4a$

b) $\sqrt[3]{-8a^3b^6}=\sqrt[3]{\left(-2ab^2\right)^3}=-2ab^2$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{343a^3b^6}{-216}}=\dfrac{-7}{6}ab^2$

d) $\sqrt[3]{-64a^9b^9}=-4a^3b^3$

Bài 2. Rút gọn biểu thức

a) $A=\sqrt[3]{125x^3+75x^2+15x+1}-5x$ b) $B=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+1}.\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}-\sqrt[3]{1-x^3}$

Lời giải

a) $A=\sqrt[3]{125x^3+75x^2+15x+1}-5x=\sqrt[3]{(5x+1)^3}-5x=1$

b) $B=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+1}.\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}-\sqrt[3]{1-x^3}=\sqrt[3]{\left(x\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}-1\right)}-\sqrt[3]{1-x^3}=2\sqrt[3]{x^3-1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Làm phép tính

a) $\sqrt[3]{343a^3}$ b) $\sqrt[3]{-512a^3b^6}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{343a^3}=7a$

b) Ta có: $\sqrt[3]{-512a^3b^6}=-8ab^2$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=3x-\sqrt[3]{27x^3+27x^2+9x+1}$ b) $B=\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}-\sqrt[3]{x^3}$

Lời giải

a) $A=3x-\sqrt[3]{27x^3+27x^2+9x+1}=3x-\sqrt[3]{(3x+1)^3}=-1$

b) $B=\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}-\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{(2x+1)^3}-x=x+1$

Bài 5. Rút gọn biểu thức

a) $A=\sqrt[3]{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2x)^3}+3x$ b) $B=2\sqrt[3]{1-3x^2+3x-x^3}-x$

Lời giải

a) $A=\sqrt[3]{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2x)^3}+3x=x-1-\frac{1}{2}(1-2x)+3x=x-1-\frac{1}{2}+x+3x=5x-\frac{3}{2}$

b) $B=2\sqrt[3]{1-3x^2+3x-x^3}-x=2\sqrt[3]{(1-x)^3}-x=2(1-x)-2=2-3x$

Bài 6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

a) $A=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}-(\sqrt{x}+2)$ b) $B=(\sqrt[3]{x}+1)^3-(\sqrt[3]{x}-1)^3+6(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)$

Lời giải

a) $A=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}-(\sqrt{x}+2)=\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^3}-(\sqrt{x}+2)=-1\Rightarrow$ đpcm.

b) $B=(\sqrt[3]{x}+1)^3-(\sqrt[3]{x}-1)^3+6(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)=8\Rightarrow$ đpcm.

DẠNG 7
ỨNG DỤNG

Bài 1. Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng 220 348 cm^3. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu cetimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

Gọi a (cm) là độ dài cạnh của khối bê tông dạng hình lập phương (a > 0).

Thể tích của khối bê tông đó là : a^3 (cm^3).

Theo bài, ta có: a^3 = 220 348, suy ra $a = \sqrt[3]{220348} \approx 60,4(cm)$.

Vậy độ dài cạnh của khối bê tông đó là khoảng 60,4 cetimét.

Bài 2. Có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn được không ?

Lời giải

Thể tích của một khối lập phương đơn vị là: 1^3 = 1 (cm^3).

Thể tích của 125 khối lập phương đơn vị là: 125.1 = 125 (cm^3).

Giả sử 125 khối lập phương đơn vị xếp được thành một khối lập phương có cạnh là a (cm). Thể tích của khối lập phương cạnh a cm là: a^3 (cm^3).

Khi đó, ta có a^3 = 125, suy ra $a = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 3(cm)$ (cm).

Vậy ta có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn có cạnh bằng 5 cm.

Bài 3. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1 000 cm^3. Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ.

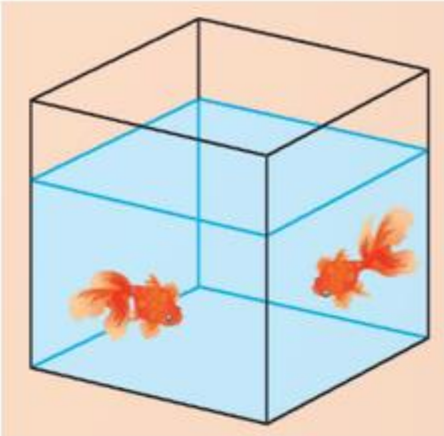
Lời giải

Thể tích 1 khối gỗ hình lập phương nhỏ là: $\frac{V}{8} = \frac{1000}{8} = 125(cm^3)$

Độ dài cạnh của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ là: $\sqrt[3]{125} = 5(cm)$

Vậy độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ là 5 cm.

Bài 4. Một bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm^3. Muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên bao nhiêu lần?



Lời giải

Bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm^3 nghĩa là thể tích của bể cá là 1 000 dm^3.

Độ dài mỗi cạnh của hình lập phương ban đầu là: $\sqrt[3]{1000} = 10\left(dm\right)$.

Sức chứa (hay thể tích) của bể sau khi tăng lên 10 lần là:

1 000 . 10 = 10 000 (dm^3).

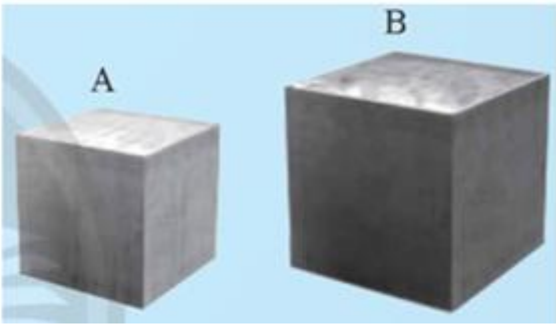
Độ dài mỗi cạnh của hình lập phương sau khi tăng sức chứa lên 10 lần là:

$\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10}\left(dm\right)$

Khi đó, phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên: $\dfrac{10\sqrt[3]{10}}{10} = \sqrt[3]{10} \approx 2,15$ (lần).

Vậy muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên khoảng 2,15 lần.

Bài 5. Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là 8 dm^3 và 15 dm^3 (Hình 1).



a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B. Thay $\boxed{?}$ bằng số thích hợp để có đẳng thức: $x^3 = \boxed{?}$

Lời giải

a) Khối bê tông hình lập phương A có thể tích là 8 dm^3.

Độ dài cạnh của khối bê tông A là: $\sqrt[3]{8} = 2\left(dm^3\right)$

Vậy độ dài cạnh của khối bê tông A là 2 dm^3.

b) Khối bê tông hình lập phương B có thể tích là 15 dm^3.

Độ dài cạnh của khối bê tông B là $\sqrt[3]{15}\left(dm^3\right)$

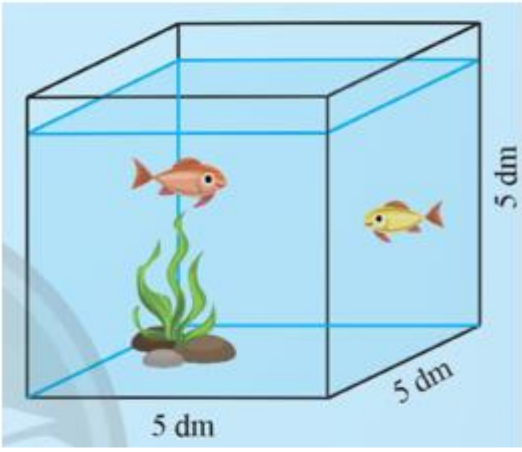
Vậy $x^3 = \boxed{15}$.

Bài 6. Thể tích V của một khối lập phương được tính bởi công thức: V = a^3 với a là độ dài cạnh của khối lập phương. Viết công thức tính độ dài cạnh của khối lập phương theo thể tích V của nó.

Lời giải

Từ công thức V = a^3, ta suy ra $a = \sqrt[3]{V}$

Bài 7. Ông An có một bể kính hình lập phương như Hình vẽ.



Ông An muốn làm thêm một bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ (bỏ qua bề dày của kính).

a) Gọi a (dm) là độ dài cạnh của bể kính mới.

Thay mỗi $\boxed{?}$ bằng biểu thức thích hợp để nhận được các đẳng thức: $a^3 = \boxed{?}$ hay $a = \boxed{?}$.

b) Tính giá trị của a khi n = 8 và khi n = 4 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thể tích của bể kính cũ là: $5^3 = 125$ (dm^3).

Thể tích của bể kính mới là: a^3 (dm^3).

Vì bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ nên

$a^3 = 125n$ hay $a = \sqrt[3]{125n} = 5\sqrt[3]{n}$

Vậy $a^3 = \boxed{125n}$ hay $a = \boxed{5\sqrt[3]{n}}$

b) Khi n = 8, ta được: $a = 5\sqrt[3]{8} = 5.2 = 10$.

Khi n = 4, ta được: $a = 5\sqrt[3]{4} \approx 7,94$

Bài 8. Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức: $h = 62,5.\sqrt[3]{t} + 75,8$ với t là tuổi của con voi tính theo năm.

a) Một con voi đực 8 tuổi ở châu Phi sẽ có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimét?

b) Nếu một con voi đực ở châu Phi có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Theo bài, t = 8 thay vào biểu thức $h = 62,5.\sqrt[3]{t} + 75,8$, ta được:

$h = 62,5.\sqrt[3]{8} + 75,8 = 62,5.2 + 75,8 = 200,8(cm)$.

Vậy nếu con voi đực 8 tuổi ở châu Phi thì có chiều cao ngang vai là 200,8 cm.

b) Theo bài, h = 205 (cm), khi đó ta có:

$205 = 62,5.\sqrt[3]{t} + 75,8$

$62,5.\sqrt[3]{t} = 205 - 75,8$

$\sqrt[3]{t} = \dfrac{205 - 75,8}{62,5}$

$\sqrt[3]{t} = 2,0673$

$t = (2,0673)^3$

$t \approx 9$

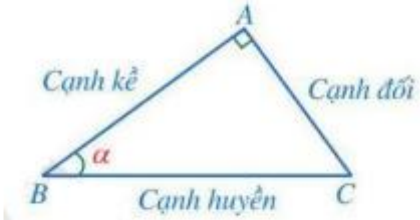
Vậy nếu con voi đực ở châu Phi có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó khoảng 9 tuổi.

CHƯƠNG 4
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Cho góc nhọn $\alpha\left(0^0<\alpha<90^0\right)$. Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=\alpha$.



Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α	Công thức
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$	$\sin\alpha=\frac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là côsin của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$	$\cos\alpha=\frac{AB}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$	$\tan\alpha=\frac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$	$\cot\alpha=\frac{BC}{AC}$

Chú ý: Với góc nhọn α, ta có:

- $0<\sin\alpha<1;\ 0<\cos\alpha<1$
- $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Hai góc phụ nhau là hai góc nhọn có tổng bằng 90^0.

Định lí: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Nhận xét: Với $0^0<\alpha<90^0$, ta có:

- $\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha$
- $\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$
- $\tan(90^0-\alpha)=\cot\alpha$
- $\cot(90^0-\alpha)=\tan\alpha$

Bảng tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt:

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

DẠNG 1
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1;\ 0 < \cos\alpha < 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Bài 1. Tìm các tỉ số lượng giác còn lại của góc α, biết:

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ c) $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} (\cos\alpha > 0)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$$

b) Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13} (\sin\alpha > 0)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{5}$$

c) Ta có:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{9}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}(\cos\alpha>0)$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha=1\Leftrightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\frac{3}{5}.\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$$

Bài 2. Tìm góc nhọn α, biết:

a) $\sin\alpha=\cos\alpha$ b) $\tan\alpha=\cot\alpha$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sin\left(90^0-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha=90^0-\alpha\Rightarrow\alpha=45^0$$

b) Ta có:

$$\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(90^0-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha=90^0-\alpha\Rightarrow\alpha=45^0$$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=4-\sin^2 45^0+2\cos^2 60^0-3\cot^3 45^0$ b) $B=\tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0$

c) $C=\cos^2 15^0+\cos^2 25^0+...+\cos^2 75^0$ d) $D=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+...+\sin^2 80^0$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=4-\sin^2 45^0+2\cos^2 60^0-3\cot^3 45^0=4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=1$$

b) Ta có: $B=\tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0=1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

c) Ta có:

$$C=\cos^2 15^0+\cos^2 25^0+...+\cos^2 75^0=\left(\cos^2 15^0+\cos^2 75^0\right)+...+\cos^2 45^0=1+1+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

d) Ta có:

$$D=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+...+\sin^2 80^0=\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)+...+\left(\sin^2 40^0+\cos^2 40^0\right)=1+1+1+1=4$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{\sin 30^0 + 2\cos 45^0 - 3\tan^{2024} 45^0}{\cos 60^0}$ b) $B = \dfrac{\sin 30^0 . \cos 60^0 . \cot 60^0}{\tan 45^0}$

Bài 5. Cho α là góc nhọn, biết $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos\alpha;\ \tan\alpha;\ \cot\alpha$

Bài 6.

a) Tính giá trị biểu thức $A = \cos^2 20° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 70°$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin 35° + \sin 67° - \cos 23° - \cos 55°$.

Bài 7. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

a) $\sin 70^\circ, \cos 30^\circ, \cos 40^\circ, \sin 51^\circ$ b) $\sin 20^\circ, \cos 31^\circ, \cos 47^\circ, \sin 14^\circ$.

c) $\tan 30^\circ, \cot 34^\circ, \cot 46^\circ, \tan 81^\circ$ d) $\cot 25^\circ, \tan 65^\circ, \cot 35^\circ, \tan 75^\circ$.

Bài 8. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $A = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

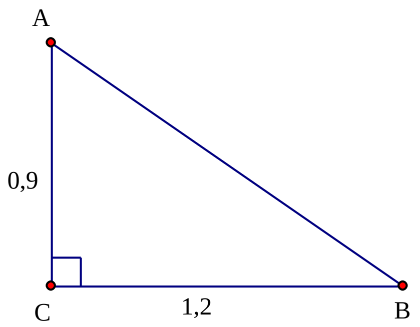
Bài 9. Biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2 a.$

Bài 10. Cho α là góc nhọn tính giá trị của biểu thức $E = \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha . \cos^2\alpha + \cos^6\alpha$

DẠNG 2
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2cm; AC = 0,9cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Lời giải



tam giác ABC vuông tại C nên theo Pythagone ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{2}$

Ta có:

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$

$\tan B = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$

$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$

Do $A + B = 90^0$ nên:

$\sin A = \cos B = \frac{4}{5}$

$\cos A = \sin B = \frac{3}{5}$

$\tan A = \cot B = \frac{4}{3}$

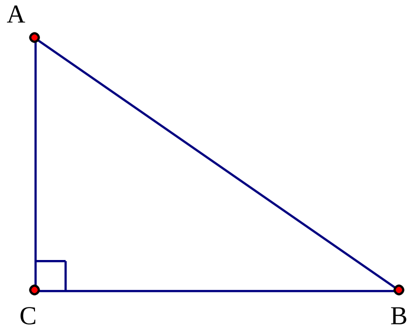
$\cot A = \tan B = \frac{3}{4}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}, BC = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A

Lời giải



a) ta có:

$AB^2 = 5a^2$

$AC^2 + BC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C (định lý Pythagone đảo).

b) Ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Do $A + B = 90^0$ nên:

$$\sin A = \cos B = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos A = \sin B = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

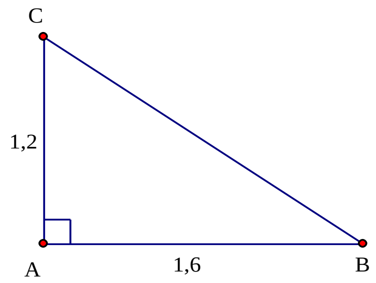
$$\tan A = \cot B = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cot A = \tan B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1,6cm; AC = 1,2cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Lời giải

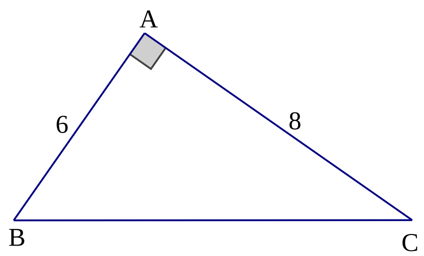


Ta có: $\sin B=\frac{3}{5};\cos B=\frac{4}{5};\tan B=\frac{3}{4};\cot B=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sin C=\frac{4}{5};\cos C=\frac{3}{5};\tan C=\frac{4}{3};\cot C=\frac{3}{4}$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=60mm; AC=8cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C

Lời giải

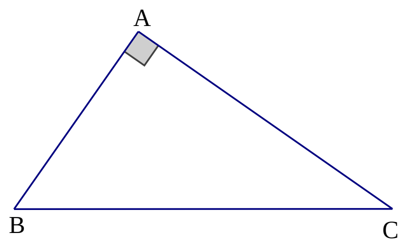


Ta có: $\sin B=\frac{8}{10}=\frac{4}{5};\cos B=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};\tan B=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\cot B=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin C=\frac{3}{5};\cos B=\frac{4}{5};\tan B=\frac{3}{4};\cot B=\frac{4}{3}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B=0,6$

Lời giải



Ta có: $\sin^2 B+\cos^2 B=1\Rightarrow \sin^2 B+0,6^2=1\Rightarrow \sin^2 B=0,64\Rightarrow \sin B=0,8$

$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{0,8}{0,6}=\frac{4}{3}$

$\cot B=\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{3}{4}$

Do $C+B=90^0$ nên:

$\sin C=\cos B=0,6$

$\cos C = \sin B = 0,8$

$\tan C = \cot B = \dfrac{3}{4}$

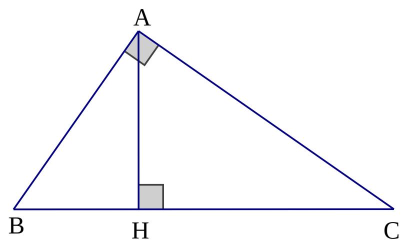
$\cot C = \tan B = \dfrac{4}{3}$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính $\sin B, \sin C$

a) $AB = 13cm, BH = 5cm$

b) $BH = 3cm, CH = 4cm$

Lời giải



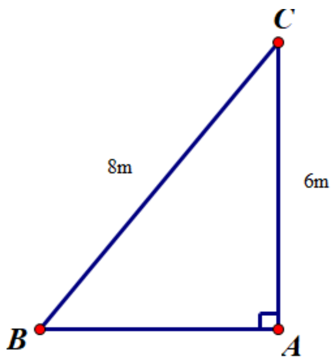
a) Ta có: $AB = 13cm, BH = 5cm \Rightarrow AH \Rightarrow BC \Rightarrow \sin B, \sin C$

b) Ta có: $BH = 3cm, CH = 4cm \Rightarrow AH \Rightarrow AB, AC \Rightarrow \sin B, \sin C$

DẠNG 3
BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút).

Lời giải



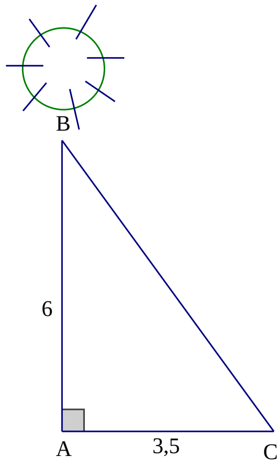
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

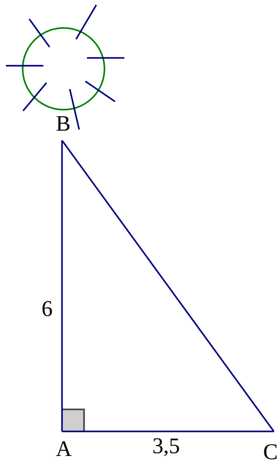
$\Rightarrow B \approx 48^\circ 35'$

Vậy góc giữa thang tre với mặt đất là $48^0 35'$.

Bài 2. Một cột đèn điện AB cao $6m$ có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5m. Hãy tính BCA (làm tròn đến phút) mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất



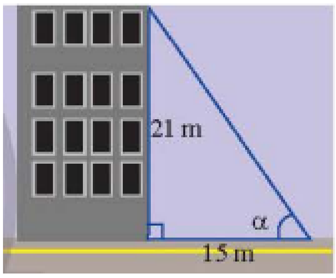
Lời giải



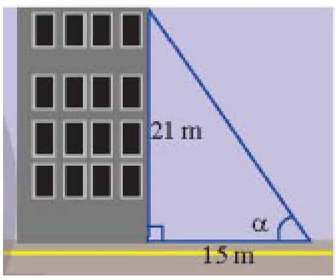
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

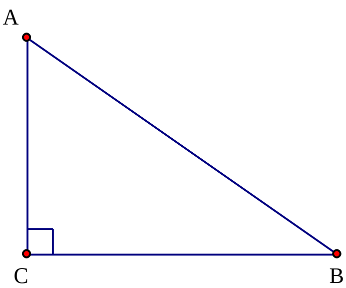
$\tan C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{6}{3,5} \Rightarrow C \approx 59^0 45'$

Bài 3. Tia nắng chiếu qua nóc của tòa nhà hợp với mặt đất một góc α. Cho biết tòa nhà cao 21m và bóng của nó trên mặt đất dài 15m. Tính góc α (làm tròn đến phút) .



Lời giải

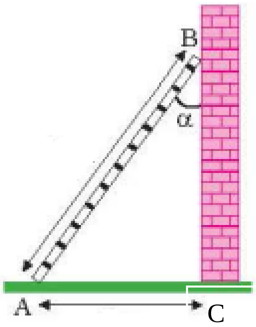




Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\tan B = \frac{AC}{CB} = \frac{21}{15} \Rightarrow C \approx 54^0 28'$$

Bài 4. Một cái thang dài 6m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 3m. Tính góc α tạo bởi thang với bức tường.



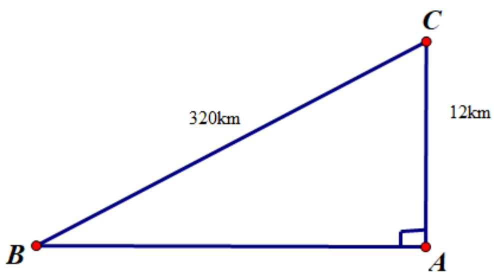
Lời giải

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 30^0$$

Bài 5. Một máy bay đang bay ở độ cao $12\,\text{km}$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất. Nếu cách sân bay $320\,\text{km}$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

Lời giải:



Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} = \frac{3}{80}$$

$$\Rightarrow B \approx 2^{\circ}9'$$

Vậy góc nghiêng là $2^{\circ}9'$.

DẠNG 4
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

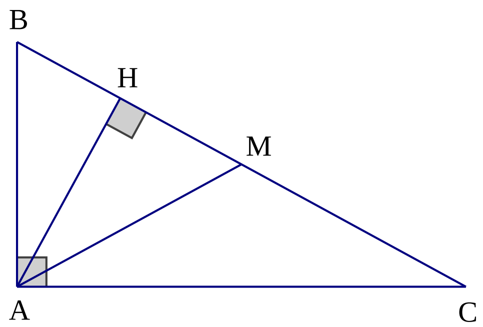
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB < AC\right)$, $C = \alpha < 45^0$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA = MB = MC = a$. Chứng minh rằng:

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

b) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

c) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

Lời giải



a) Ta có: $AMH = 2\alpha$;

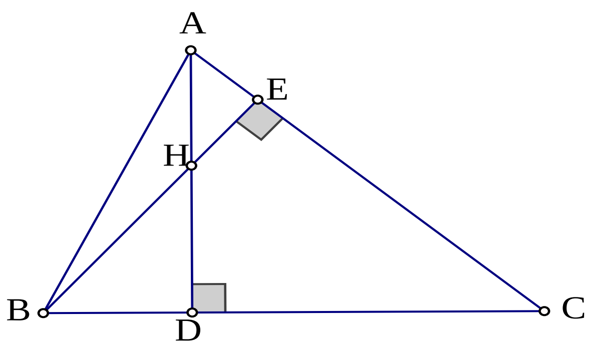
$$\sin 2\alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{2AM} = \frac{2AH}{BC} = 2.\frac{AB.AC}{BC^2} = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$$

b) $1+\cos 2\alpha = 1+\frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} = \frac{2HC}{BC} = 2.\frac{AC^2}{BC^2} = 2.\cos^2\alpha$

c) $1-\cos 2\alpha = 1-\frac{HM}{AM}\frac{HB}{AM} = \frac{2HB}{BC} = 2.\frac{AB^2}{BC^2} = 2.\sin^2\alpha$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $\frac{HD}{HA} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng $\tan B.\cot C = 3$.

Lời giải



Ta có: $\tan B = \dfrac{AD}{BD}; \tan C = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$ (1)

$HBD = CAD$ (cùng phụ với ACB); $HDB = ADC = 90^0$.

Do đó $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g), suy ra $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC = DH.AD$ (2).

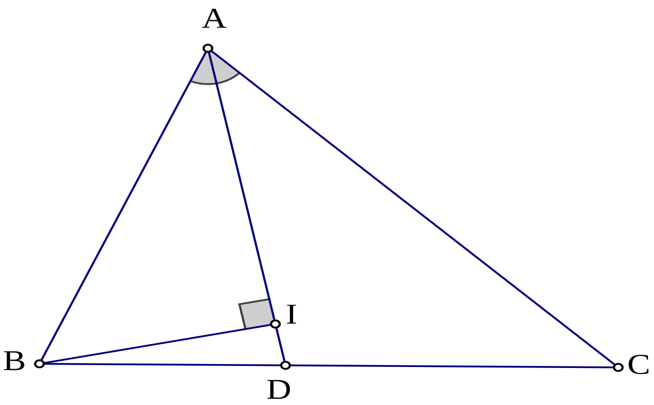
Từ (1) và (2) suy ra $\tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{DH.AD} = \dfrac{AD}{DH}$ (3).

Theo giả thiết $\dfrac{HD}{AH} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{HD}{AH + HD} = \dfrac{1}{2+1}$ hay $\dfrac{HD}{AD} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $AD = 3HD$.

Thay vào (3) ta được: $\tan B.\tan C = \dfrac{3HD}{DH} = 3$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$.

Lời giải



Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD + DC}{AB + AC} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.

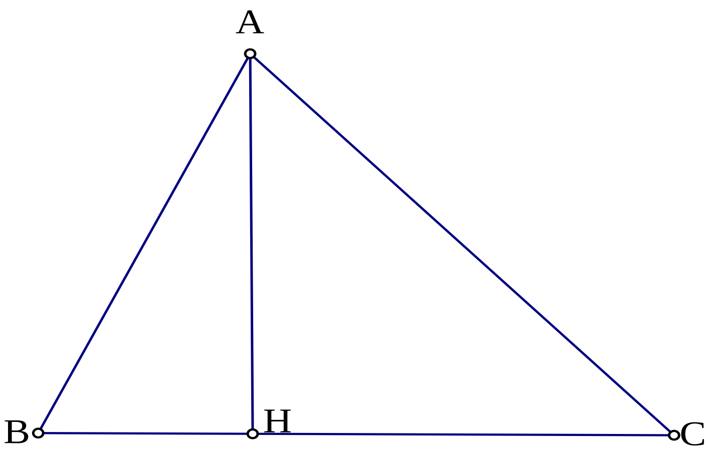
Vậy $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$.

Vẽ $BI \perp AD$ $I \in AD$, suy ra $BI \le BD$. ΔIAB có $AIB = 90^0$,

do đó $\sin BAI = \dfrac{BI}{AB}$; hay $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$; vì trong ΔHAB có $H = 90^0$ nên $\sin B = \dfrac{AH}{AB}$;

vì trong ΔHAC có $H = 90^0$ nên $\sin C = \dfrac{AH}{AC}$.

Do đó $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

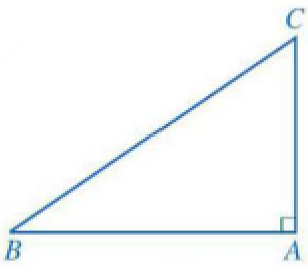
Vậy $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, Chứng minh rằng: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

BÀI 2
MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông

Định lí 1: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

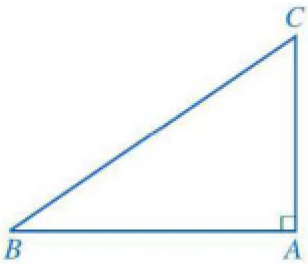


Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

- $AC = BC.\sin B = BC.\cos C$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B$

2. Hệ thức giữa hai cạnh góc vuông

Định lí 2: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân côtang với góc kề.



Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

- $AC = AB.\tan B = AB.\cot C$
- $AB = AC.\tan C = AC.\cot B$

3. Giải tam giác vuông

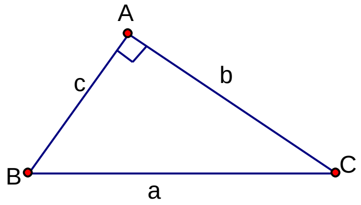
Giải tam giác vuông là tính các cạnh và góc của tam giác đó

CHỦ ĐỀ 1
GIẢI TAM GIÁC

Phương pháp: Để giải tam giác vuông ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$

- $b = a.\sin B = a.\cos C$
- $c = a.\sin C = a.\cos B$
- $b = c.\tan B = c.\cot C$
- $c = b.\tan C = b.\cot B$



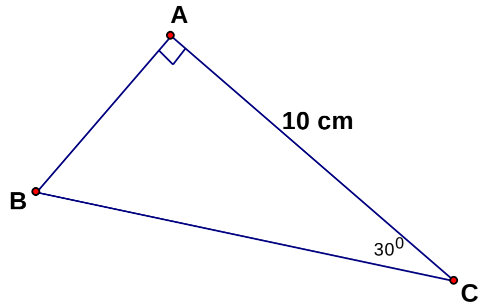
Chú ý: Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 1 cạnh và số đo 1 góc nhọn

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 2 cạnh

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AC = 10 cm, góc C bằng 30^0.

Lời giải



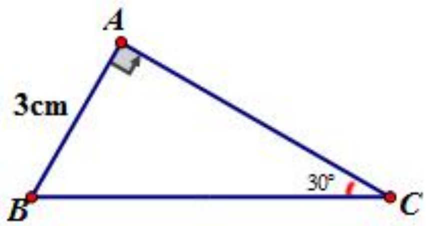
Ta có: $\hat{B} = 60^0$ (do phụ góc C)

AB = AC.tanC = 10 .tan30^0 = $\frac{10\sqrt{3}}{3} cm$

$$BC = \frac{AC}{\cos C} = \frac{10}{\cos 30^0} = \frac{20\sqrt{3}}{3} cm$$

Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AB = 3cm, góc C bằng 30^0

Lời giải



+ $\hat{B} = 60^0$ (do phụ góc C)

+ AC = AB.tanB = 3.tan60^0 = $3\sqrt{3}$ (cm)

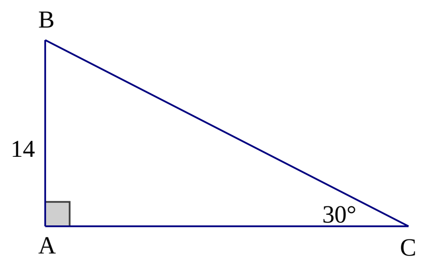
+ Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{3}{\sin 30^0} = 6$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB = 14cm, C = 30^0$

Lời giải



Ta có ABC vuông tại $A \Rightarrow B + C = 90^0$

Mà $C = 30^0 \Rightarrow B = 60^0$

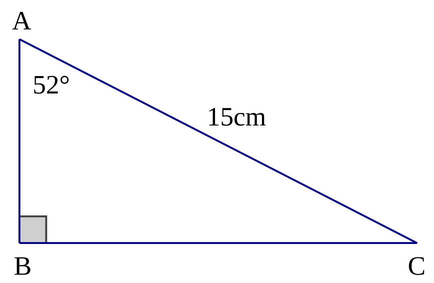
+ $AC = AB.\tan B = 14.\tan 60^0 \Rightarrow AC = 14\sqrt{3}(cm)$

+ $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{AB}{0,5} = 28(cm)$

Vậy $B = 60^0; AC = 14\sqrt{3}(cm); BC = 28(cm)$

Bài 4. Giải tam giác ABC vuông tại B. Cho biết $AC = 15cm, A = 52^0$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải



Ta có ABC vuông tại $B \Rightarrow A + C = 90^0$

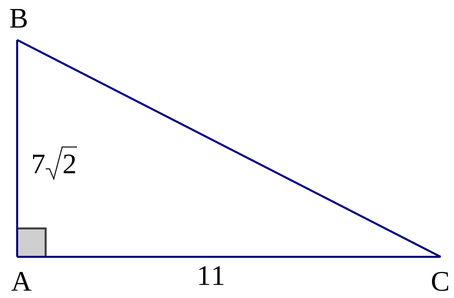
Mà $A = 52^0 \Rightarrow C = 38^0$

+ $AB = AC.\sin C = 15.\sin 38^0 \approx 9,2cm$

+ $BC = AC.\sin A = 15.\sin 52^0 \approx 11,8cm$

Bài 5. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB = 7\sqrt{2}cm, AC = 11cm$ (cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến độ).

Lời giải



Ta có: $\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{11}{7\sqrt{2}} = 1,1145 \Rightarrow B = 48^0$

Lại có: $B + C = 90^0 \Rightarrow C = 42^0$

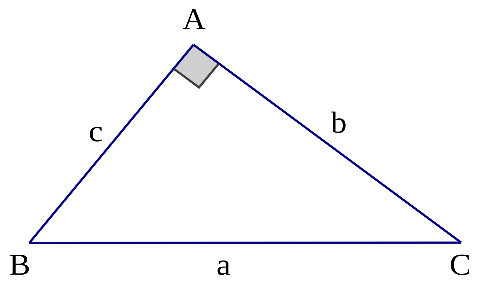
Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 + 11^2 = 219$

$\Rightarrow BC = \sqrt{219} \approx 14,80\left(cm\right)$.

Bài 6. Cho tam giác ΔABC vuông tại A. Gọi $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải ΔABC, biết:

a) $c = 3,8cm; B = 51^0$ b) $a = 11cm, C = 60^0$

Lời giải



a) Xét tam giác ΔABC vuông tại A.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

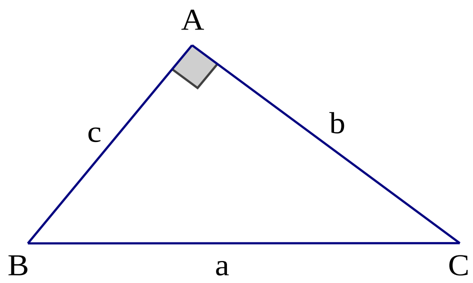
$\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow \cos 51^0 = \dfrac{3,8}{BC} \Rightarrow BC = 6cm; AC = 4,6cm$

b) Ta có: $C = 60^0 \Rightarrow B = 30^0 \Rightarrow AB = sin60^0.11 = 8,6cm; AC = 4,3cm$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 5,4cm; C = 30^0$ b) $c = 10cm; C = 45^0$

Lời giải



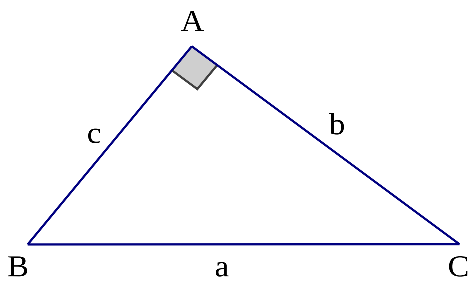
a) Xét tam giác ABC vuông tại A, có: $tanC = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow tan30^0 = \dfrac{AB}{5} \Rightarrow AB \Rightarrow BC \Rightarrow B$

b) Xét tam giác ABC vuông tại A, có: $tanC = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow tan45^0 = \dfrac{3}{AC} \Rightarrow AC \Rightarrow AB \Rightarrow B$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 15cm, b = 10cm$ b) $b = 12cm, c = 7cm$

Lời giải

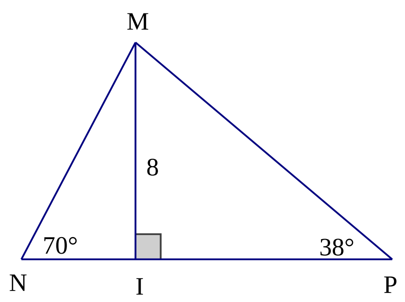


a) Dùng định lý Pythagore tính được $AB \Rightarrow B \Rightarrow C$

b) Dùng định lý Pythagore tính được $BC \Rightarrow B \Rightarrow C$

Bài 9. Giải tam giác MNP có $N = 70^0; P = 38^0$, đường cao $MI = 8cm$. Diện tích ΔMNP bằng? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có: $NI = MI.\cot N = 8.\cot 70^0 = 2,91(cm)$

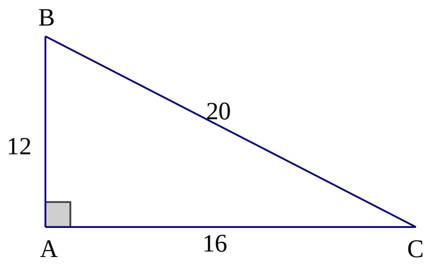
$+ \; PI = MI.\cot P = 8.\cot 38^0 = 8.\dfrac{1}{0,78} = 10,26(cm)$

$\Rightarrow NP = NI + IP = 2,91 + 10,26 = 13,17(cm)$

$\Rightarrow S_{MNP}=\frac{1}{2}.8.13,17=52,68\left(cm^2\right)$

Bài 10. Giải tam giác ABC có $AB=12cm, AC=12cm, BC=20cm$. Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB^2+AC^2=12^2+16^2=400 \\ BC^2=20^2=400 \end{cases}$ $\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (Pythagore đảo)

$\Rightarrow \sin A=\frac{AC}{BC}=\frac{16}{20}=0,8 \Rightarrow B=53^0$

Ta có: $C=90^0-B=90^0-53^0=37^0$.

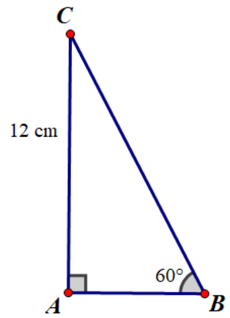
CHỦ ĐỀ 2
TÍNH CẠNH, GÓC VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Phương pháp

Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12cm, B = 60^0$. Hãy tính C, AB, BC và diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A nên $A = 90^\circ \Rightarrow B + C = 90^0 \rightarrow C = 90^0 - B = 90^0 - 60^0 = 30^0$

$AB = AC.\cot B = 12.\cot 60^0 = 12.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,9(cm)$

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 12^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 192$

$\rightarrow BC = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \approx 13,9(cm)$

Diện tích tam giác ABC:

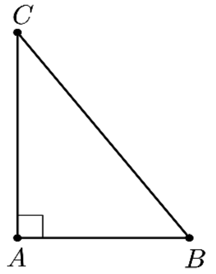
$S = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.4\sqrt{3}.12 = 24\sqrt{3} \approx 41,6\left(cm^2\right)$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 3$ cm, $BC = 3$ cm .

a) Tính độ dài cạnh AC.

b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Lời giải



a) Tính độ dài cạnh AC.

Tam giác ABC vuông tại A, Áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 16$$

$$\Rightarrow AC = 4(\text{cm}).$$

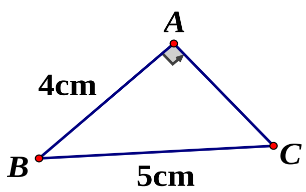
b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Tam giác ABC vuông tại A, Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có:

$$\sin A = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5};\ cosA = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4cm, BC = 5cm.$ Tính độ dài cạnh AC và $\sin C$

Lời giải



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 4^2 + AC^2 = 5^2 \Rightarrow AC = 3(cm)$$

Xét tam giác vuông ABC có : $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$

Vậy $AC = 3cm, \sin C = \dfrac{4}{5}$

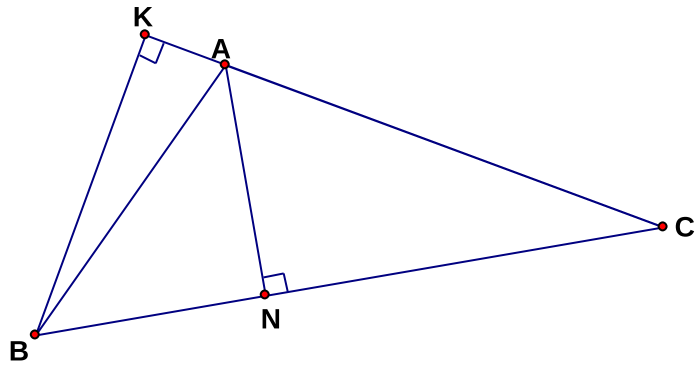
Bài 4. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 16 cm, $ABC = 45^0$; $ACB = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC.

a. Hãy tính đoạn thẳng AN.

b. Hãy tính cạnh AC.

(Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

Lời giải



a. Từ B kẻ BK vuông góc với AC tại K

ta có BK = BC.sinC = 16.sin30^0 = 8cm

$\angle KBA = 15^0$

$$AB = \frac{BK}{\cos KBA} = \frac{8}{\cos 15^0} \approx 8,28cm$$

Tam giác ANB vuông cân tại N nên $AN = \frac{AB}{\sqrt{2}} \approx 5,86cm$

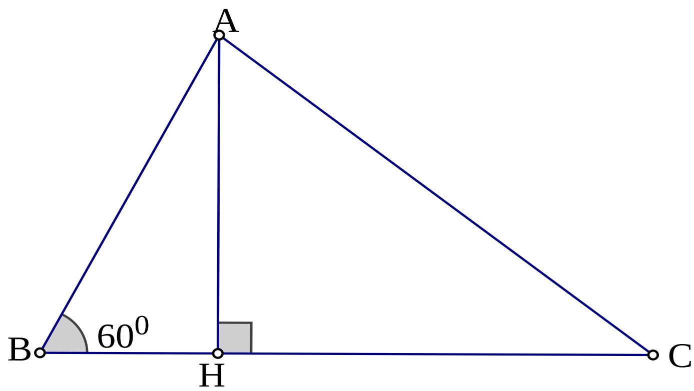
b) AN.BC = BK.AC = 2S$_{ABC}$ $\Rightarrow AC = \frac{AN.BC}{BK} \approx 11,72cm$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $B = 60^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH.

Xét tam giác vuông ABH, ta có:

$$BH = AB.\cos B = AB.\cos 60^0 = 16.\frac{1}{2} = 8$$

$$AH = AB.\sin B = AB.\sin 60^0 = 16.\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHC ta có:

$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 196 - 192 = 4 \Rightarrow HC = 2$.

Suy ra $BC = CH + HB = 2 + 8 = 10$.

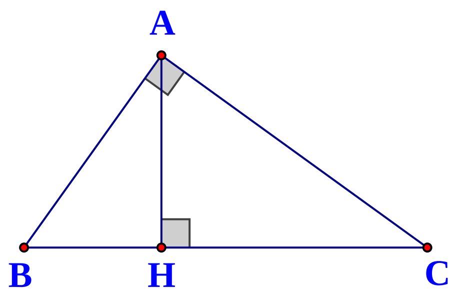
b) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.10.8\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Bài 6. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng $54\,\text{cm}^2$ và $96\,\text{cm}^2$. Độ dài cạnh huyền bằng

A. 27 cm. **B.** 48 cm. **C.** 25 cm. **D.** 21 cm.

Lời giải

Chọn C



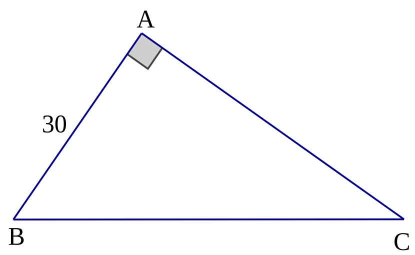
Ta có $S_{ABH}.S_{ACH} = 54.96 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\cdot AH^2.BH.CH = 54.96 \Leftrightarrow AH^4 = 4.54.96 = 12^4 \Leftrightarrow AH = 12$.

Lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow BC = \dfrac{2.S_{ABC}}{AH} = \dfrac{2(54+96)}{12} = 25\,(\text{cm})$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 30cm$, $B = \alpha, \tan\alpha = \dfrac{5}{12}$. Tính BC, AC

Lời giải

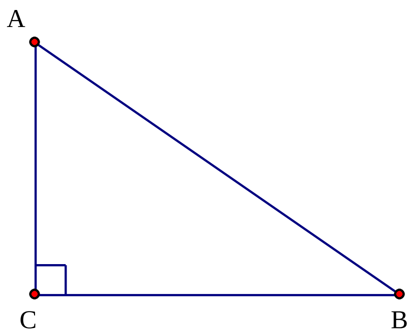


Ta có:

$$B = \alpha, \tan\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{30} = \frac{5}{12} \Rightarrow AC = \frac{150}{12} = 12{,}5 \Rightarrow BC$$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5cm$, $\cot B = \dfrac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC

Lời giải



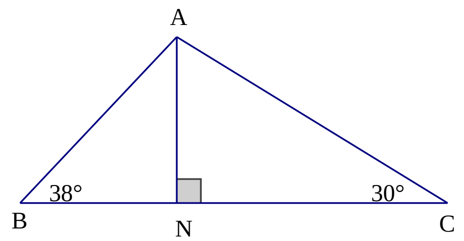
Áp dụng tỉ số $cotB$ trong tam giác vuông ABC và định lý pythagore ta tính được $AC = 8cm, BC = \sqrt{89}cm$

Bài 9. Cho tam giác ΔABC có $B = 38^0, C = 30^0$, $BC = 11cm$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính.

a) Độ dài đoạn thẳng AN.

b) Độ dài đoạn thẳng.

Lời giải



a) Cách 1: Sử dụng các tỉ số lượng giác trong các tam giác vuông NAB và NAC, ta có:

$BN.\tan B = NC.\tan C$

Chú ý: $BN + NC = BC \Rightarrow BN \approx 4,67cm; AN \approx 3,65cm$

Cách 2: Gợi ý: Kẻ $CH \perp AB = H$

b) Xét tam giác ANC vuông, có $AC = \dfrac{AN}{\sin C} \Rightarrow AC \approx 7,3cm$

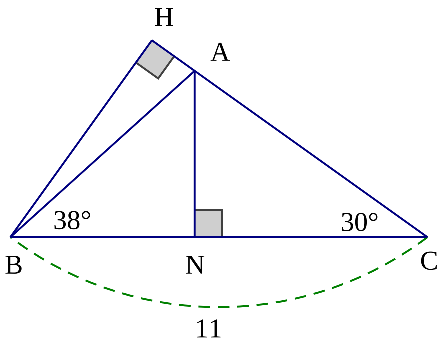
Bài 10. Cho tam giác ΔABC có $BC = 11cm$, $B = 38^0, C = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AN

b) Độ dài cạnh AC

c) Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \Delta BHC$ vuông tại $H \Rightarrow HBC = 60^0; HBA = 60^0 - 38^0 = 22^0$

Do đó $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.11 = 5,5(cm)$ (trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền)

a) Tam giác BHA vuông tại H, cạnh huyền BA và cạnh $BH = 5,5cm$ kề với $B = 22^0 \Rightarrow \cos 22^0 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5,5}{\cos 22^0} \approx 5,932(cm)$

Kẻ $AN \perp BC$

Trong tam giác vuông ABN vuông tại N có AN đối diện với góc 38^0 nên $\sin 38^0 = \frac{AN}{AB}$

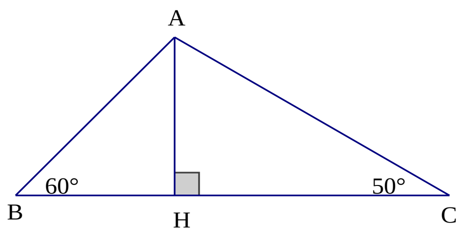
$\Rightarrow AN = AB.\sin 38^0 = 5,932.\sin 38^0 \approx 3,652(cm)$

b) Tam giác ANC vuông tại $N, C = 30^0 \Rightarrow AC = \frac{AN}{\sin 30^0} \approx \frac{3,652}{0,5} = 7,304(cm)$

c) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AN.BC = \frac{1}{2}.3,652.11 = 20,086(cm^2)$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $B = 60^0$, $C = 50^0, AC = 35cm$. Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải



Xét tam giác ABC, có: $A + B + C = 180^0 \Rightarrow A = 70^0$

Vẽ đường cao $AH\ (H \in BC)$

Ta có: $\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \sin C.AC = \sin 50^0.AC = 26,8(cm)$

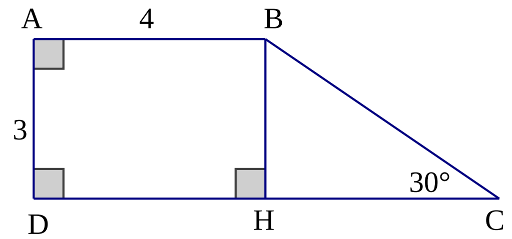
$\sin B = \frac{26,8}{AB} \Rightarrow AB = \frac{26,8}{\sin 60^0} = 38,5(cm)$

Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $BH = 15,8(cm) \Rightarrow CH = 22,7(cm) \Rightarrow BC \approx 38,5(cm)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}.BC.AH=\frac{1}{2}.26,8.38,5=510(cm^2)$

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$, có: $A=D=90^0, C=40^0$ $AB=4cm, AD=3cm.S_{ABCD}=?$

Lời giải



Kẻ $BH\perp CD\left(H\in CD\right)$, ta có tứ giác $ABHD$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

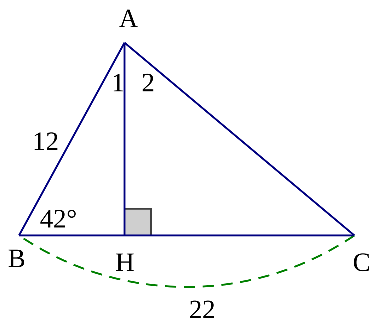
$\Rightarrow BH=3cm, DH=4cm$

Xét tam giác BHC vuông tại H, có: $\tan C=\tan 40^0=\frac{BH}{HC}\Rightarrow HC=\frac{3}{0,839}=3,58\left(cm\right)$

$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD).AD}{2}=\frac{(4+7,58).3}{2}=17,37(cm^2)$

Bài 13. Cho tam giác ABC, đường cao $AH\left(H\in BC\right)$, $B=42^0, AB=12cm, BC=22cm.$ Tính các cạnh và các góc của tam giác ABC.

Lời giải



Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $B=42^0\Rightarrow A_1=48^0$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có: $AH=AB.\sin B=12.\sin 42^0=8cm$

$BH=AB.cos B=8,916\left(cm\right)\Rightarrow HC=13\left(cm\right)$

Ta lại có: $\tan C=\frac{AH}{HC}=0,614\Rightarrow C=31^030'\Rightarrow A_2=58^030'\Rightarrow BAC=106^030'$

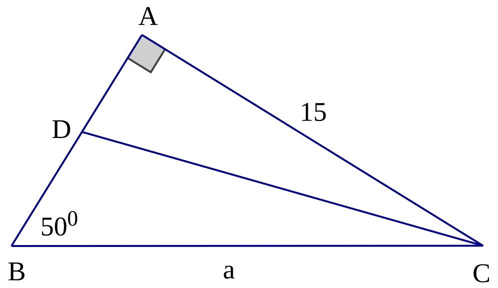
$AH=AC.\sin C\Rightarrow AC=\frac{AH}{\sin C}=15,350(cm)$

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC=15cm, B=50^0$. Hãy tính độ dài

a) AB, AC

b) phân giác CD

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông ở A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$AB = AC.\cot B = 15.\cot 50^0 \approx 15.0,8391 \approx 12,59(cm)$

$AC = BC.\sin B \Rightarrow BC = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{15}{\sin 50^0} \approx \dfrac{15}{0,7660} \approx 19,58(cm)$

b) Tam giác ABC vuông ở A nên: $B + C = 90^0 \Rightarrow C = 90^0 - B = 40^0$

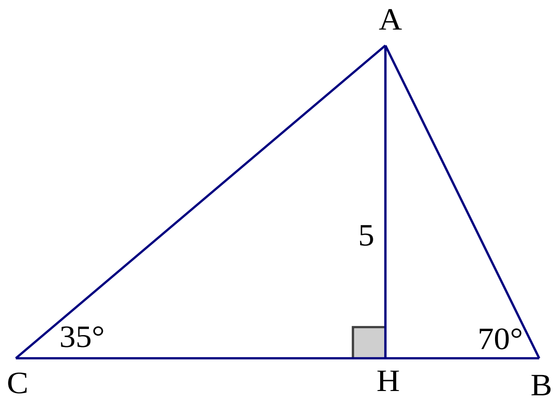
CD là tia phân giác của C, ta có: $ACD = \dfrac{1}{2}C = \dfrac{1}{2}.40^0 = 20^0$

Trong tam giác vuông ACD vuông tại A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc ta có:

$AC = CD.\cos ACD.\cos 20^0 \Rightarrow CD = \dfrac{AC}{\cos 20^0} = \dfrac{15}{0,9397} \approx 15,96(cm)$.

Bài 15. Cho tam giác ABC, đường cao $AH = 5(cm)$, $B = 70^0, C = 35^0$. Tính các cạnh của ΔABC

Lời giải



Tam giác AHB vuông tại $H \Rightarrow AH = AB.\sin B \Rightarrow AB = \dfrac{AH}{\sin B} = \dfrac{5}{\sin 70^0} \approx 5,32(cm)$

Tam giác AHC vuông tại $H \Rightarrow AH = AC.\sin C \Rightarrow AC = \dfrac{AH}{\sin C} = \dfrac{5}{\sin 35^0} \approx 8,72(cm)$

Ta lại có: $BH = AH.\cot B = AH.\cot 70^0 \approx 5.0,3640 \approx 1,82(cm)$

$CH = AH.\cot C = AH.\cot 35^0 \approx 5.1,4281 \approx 7,14(cm)$

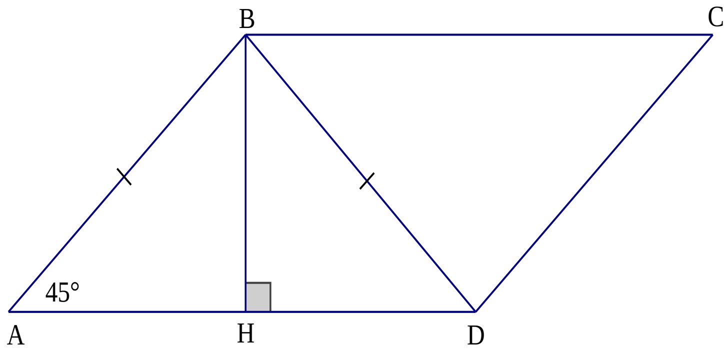
Vậy $BC = BH + HC = 1,82 + 7,14 = 8,96(cm)$

Bài 16. Cho hình bình hành $ABCD$, có: $A = 45^0$, $AB = BD = 18(cm)$

a) Tính AB

b) Tính S_{ABCD}

Lời giải



a) Xét tam giác ABD, có $AB = AD$ nên tam giác ABD cân tại B

Kẻ $BH \perp AD \Rightarrow H$ là trung điểm của AD

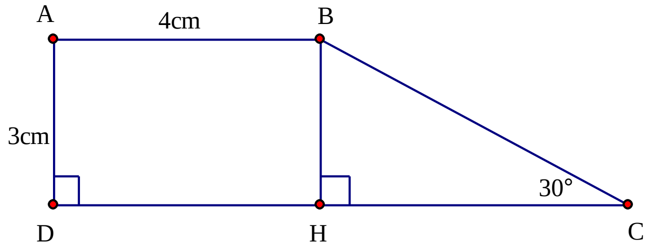
Xét tam giác AHB vuông tại H. Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{cases} BH = AB.\sin A = 45^0 = 9\sqrt{2}(cm) \\ AH = AB.\cos A = 9\sqrt{2}\left(cm\right) \end{cases} \Rightarrow AD = 2AH = 18\sqrt{2}(cm)$$

b) $S_{ABCD} = 2.S_{ABD} = 2.\frac{1}{2}.AD.BH = 342(cm^2)$

Bài 17. Cho tứ giác $ABCD$ có $A = D = 90^0; C = 30^0$ $AB = 4cm, AD = 3cm.$ Tính S_{ABCD}

Lời giải

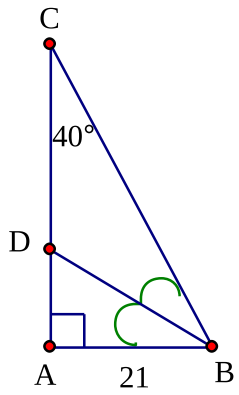


- Kẻ $BH \perp CD = H$

- Chú ý diện tích đa giác $ABCD$ bằng tổng diện tích hai đa giác $ABHD$ và BHC

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 21cm, C = 40^0$. Tính độ dài đường phân giác BD của ABC, với D nằm trên cạnh AC

Lời giải

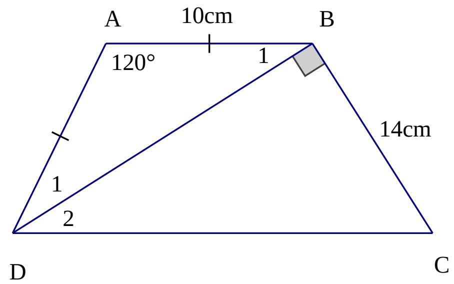


$ABD = 25^0$. Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABD ta có:

$BD = \dfrac{21}{cos25^0} \approx 21,19(cm)$

Bài 19. Cho hình thang $ABCD$ sao cho $AB = AD = 10cm, BC = 14cm, A = 120^0$, BC vuông góc với đường chéo BD. Tính chu vi của $ABCD$

Lời giải



Ta có: ΔABD cân tại $A(AB = AD = 10cm)$

$\Rightarrow B_1 = D_1 = \dfrac{180^0 - A_1}{2} = \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$

$\Rightarrow D_2 = B_1 = 30^0$ (so le trong)

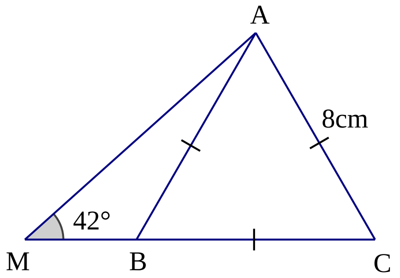
ΔBCD vuông tại B, có:

$sinD_2 = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow CD = \dfrac{BC}{sinD_2} = \dfrac{14}{0,5} = 28(cm)$

Do đó $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 62(cm)$

Bài 20. Hình vẽ cho biết ΔABC là tam giác đều cạnh $8cm$ và $AMB = 42^0$. Tính AM (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vẽ đường cao $AH\left(H\in BC\right)$

Do ΔABC đều nên AH cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow HB=HC=4cm$

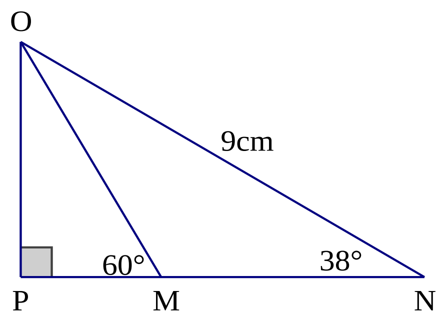
Từ ΔABH vuông tại H, ta có:

$AH^2=AB^2-BH^2=8^2-4^2=48\Rightarrow AH=4\sqrt{3}\left(cm\right)$

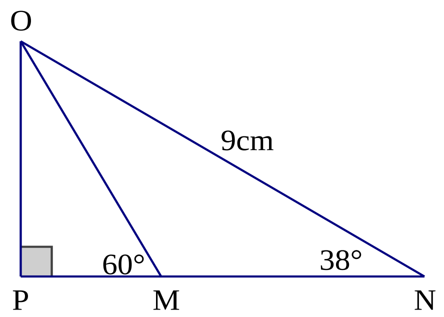
Từ ΔAHM vuông tại H, ta có:

$$sinM=\frac{AH}{AM}\Rightarrow AM=\frac{AH}{sinM}=\frac{4\sqrt{3}}{0,669}\approx 10,34\left(cm\right)$$

Bài 21. Với hình vẽ đã cho. Tính diện tích tam giác OMN (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)



Lời giải



ΔOPN vuông tại P nên ta có:

$+\ OP=ON.sinN=9.sin38^0\approx 5,54\left(cm\right)$

$+\ NP=ON.cosN=9.cos38^0\approx 7,09\left(cm\right)$

ΔOPM vuông tại P nên ta có:

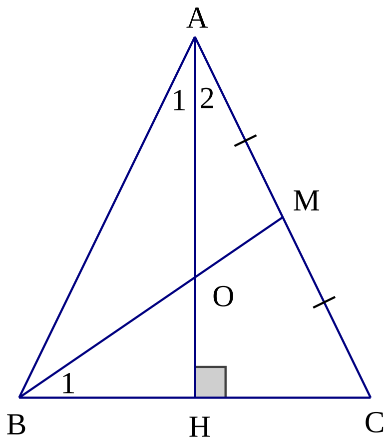
$+\ MP = \dfrac{OP}{tanM} = \dfrac{5,54}{tan60^0} = \dfrac{5,54}{\sqrt{3}} = 3,2(cm)$

Ta có: $MN = NP - MP = 7,09 - 3,2 = 3,89(cm)$

Do đó $S_{OMN} = \dfrac{1}{2}OP.MN = \dfrac{1}{2}.5,554.3,89 \approx 11(cm^2)$

Bài 22. Cho ΔABC cân tại A có $A = 30^0$, đường trung tuyến BM. Tính số đo CBM (làm tròn kết quả đến độ)

Lời giải



Vẽ đường cao AH của ΔABC cắt BM tại O

Do ΔABC cân tại A nên AH cũng là đường trung tuyến, đường phân giác

$\Rightarrow O$ là trọng tâm của ΔABC và $A_1 = A_2 = 15^0$

ΔABH vuông tại H, ta có $tanA_1 = \dfrac{BH}{AH}$ (1)

ΔOHB vuông tại H, ta có $tanB_1 = \dfrac{OH}{BH}$ (2)

Nhân (1) và (2) vế với vế, ta được:

$tanA_1.tanB_1 = \dfrac{BH}{AH}.\dfrac{OH}{BH} = \dfrac{OH}{AH} = \dfrac{1}{2}$ (O là trọng tâm của ΔABC)

$\Rightarrow tanB_1 = \dfrac{1}{3.tanA_1} = \dfrac{1}{3.tan15^0} = \dfrac{1}{3.0,2679} = 1,2442$

$\Rightarrow B_1 = 51^0 12' \approx 51^0$

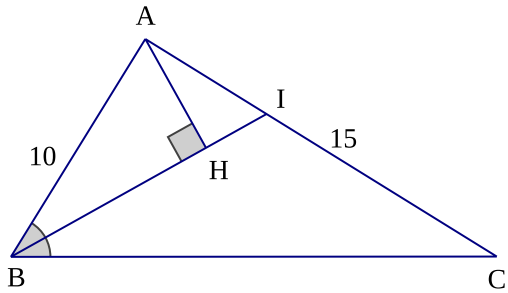
Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A, có: $AB = 10cm, AC = 15cm$

a. Tính góc B

b. Phân giác trong của góc B cắt AC tại I. Tính AI

c. Vẽ AH vuông góc với BI tại H. Tính AH

Lời giải



a) Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$tanB = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow B = 56^0$$

b) Ta có:

$$tanABI = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AI = AB.tanABI = 10.tan28^0 = 5,3(cm)$$

c) $SinABH = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.Sin28^0 = 4,7(cm)$

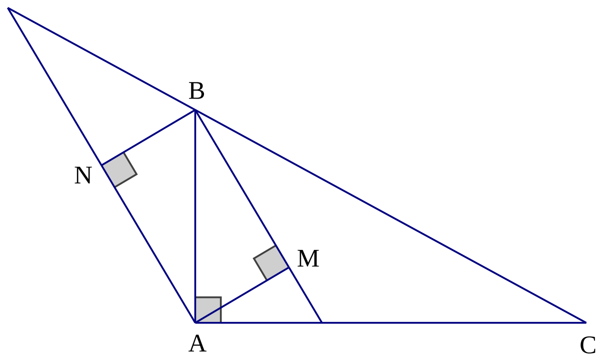
Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A, góc $C = 30^0$, $BC = 10cm$

a. Tính AB, AC

b. Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh $MN = AB$

c. Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

Lời giải



b) Chú ý: Hai đường phân giá của hai góc kề bù vuông góc với nhau

c) Ta có: BM là phân giác của góc B. Từ đó tính được số đo các góc của tam giác MAB

*) Chú ý: Tam giác MAB và ABC đều là các tam giác nửa đều, từ đó tính được tỉ số đồng dạng là 0,5.

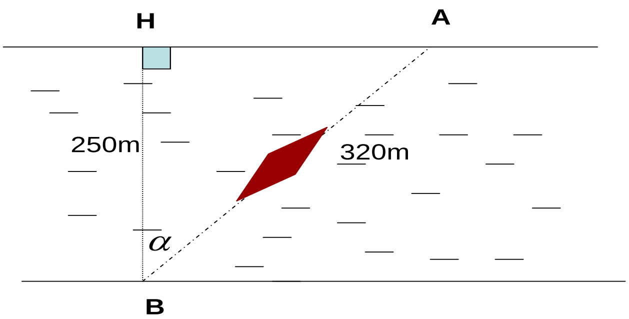
CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

DẠNG 1

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

Bài 11. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một con đò chéo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ.(góc α ở hình vẽ)

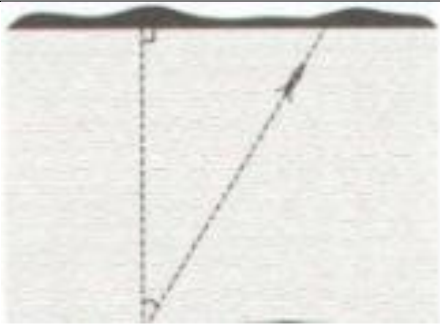


Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

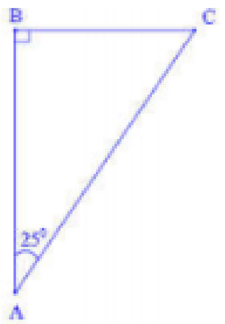
$$\cos\alpha = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{250}{350} \Rightarrow \alpha \approx 38^0 37'$$

Bài 12. Một con thuyền qua khúc sông với vận tốc $3,5km/h$ mất hết 6 phút. Do dòng nước chảy mạnh nên đã đẩy con thuyền đi qua con sông trên đường đi tạo với bờ một góc 25^0. Hãy tính chiều rộng của con sông?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán



Chuyển đổi: 6 phút $=\dfrac{1}{10}$ giờ.

Quãng đường con thuyền đi được là:

$AC = v.t = 3,5.\dfrac{1}{10} = 0,35km = 350m$

$\vartriangle AB$o

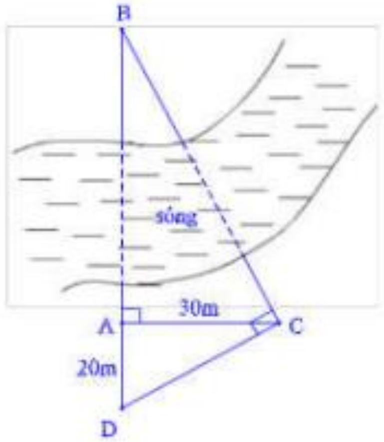
$\cos A = \dfrac{AB}{AC}$

Xét $\vartriangle ABC$ vuông tại B ta có : $\cos A = \dfrac{AB}{AC}$ (tỷ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AB = AC\sin A = 350cos25^0 \approx 317,21m$

Vậy chiều rộng của con sông là 147,92m.

Bài 13. Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B bên kia bờ sông, bạn Minh Hiền vạch một đường vuông góc với $AB.$ Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30$m., rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20$m, từ đó bạn Minh Hiền tính được khoảng cách từ A đến B. Em hãy tính độ dài AB và số đo góc $ACB.$



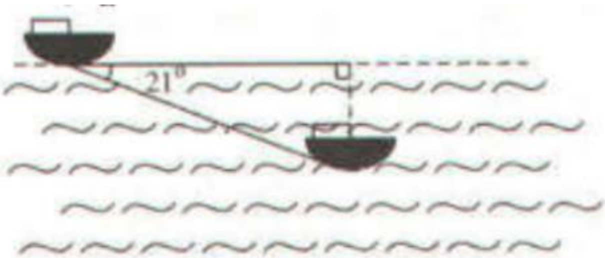
Lời giải

Xét ΔBCD vuông tại C và CA là đường cao, ta có: $AB.AD = AC^2 \Rightarrow AB = \dfrac{AC^2}{AD} = 45\text{m}.$

Xét ΔABC vuông tại A, ta có: $\tan ACB = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{45}{30} = 1,5 \Rightarrow ACB \approx 56°18'.$

Vậy $AB = 45\text{m},\ ACB = 56°18'.$

Bài 14. Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặng xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước một góc 21° .

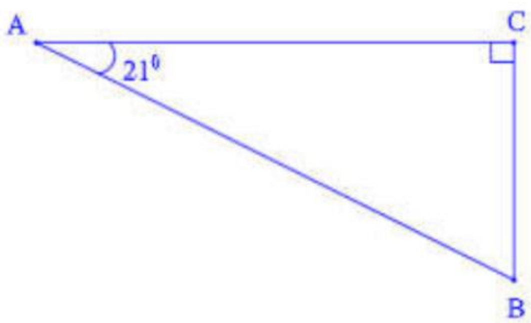


a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 250m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200m (cách mặt nước biển 200m) làm tròn đến phút.

Lời giải

Hình vẽ minh họa



a) Xét ΔABC vuông tại C ta có:

$\sin A = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow CB = AB.\sin A = 250.\sin 21^0 \approx 89,6m$

Vậy tàu đi được 250m thì tàu ở độ sâu 89,6m.

b) 9km/h=2,5m/s

Gọi t(s) là thời gian đi để tàu đạt được độ sâu 200m.

Quảng đường tàu đi được trong thời gian t(s) là:

$AB = S_{AB} = v_{AB}.t_{AB} = 2,5t(m)$

Xét ΔABC vuông tại C ta có:

$\sin A = \dfrac{CB}{AB}$

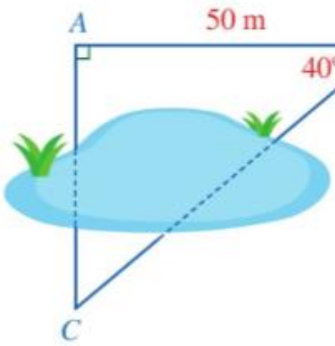
$\sin 21^0 = \dfrac{200}{2,5t}$

$t = \dfrac{200}{2,5.\sin 21^0} \approx 223s \approx 4\,phút$

Vậy thời gian tàu đi là 4 phút.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 15. Hình vẽ bên dưới mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50(m), ABC = 40^0$. Tính các khoảng cách CA và BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



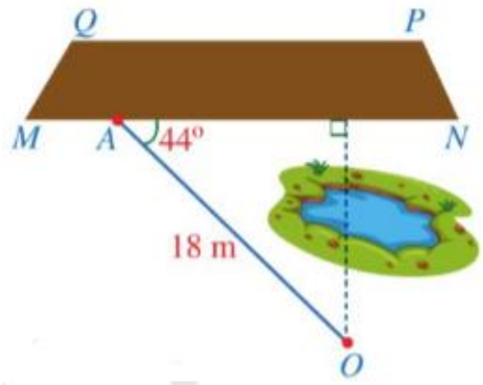
Lời giải

Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

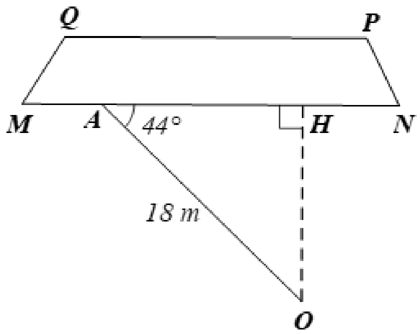
$AC = AB.\tan ABC = 50.\tan 40^0 \approx 42(m)$

$AB = BC.\tan ABC$ Suy ra $BC = \frac{\tan ABC}{AB} = \frac{50}{\cos 40^0} \approx 65(m)$

Bài 16. Người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang MNPQ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN. Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18(m), ABC = 44^0$ (Hình vẽ). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

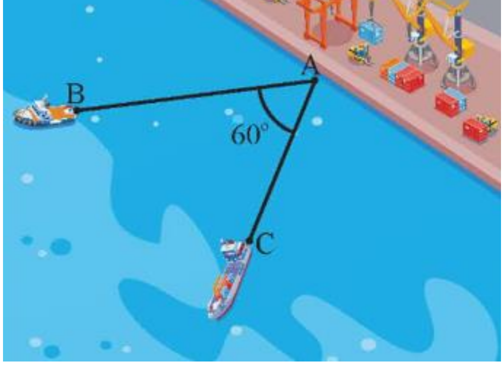


Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến MN.

Xét ΔOAH vuông tại H, ta có: OH = OA.sinA = 18.sin44° ≈ 12,5 (m).

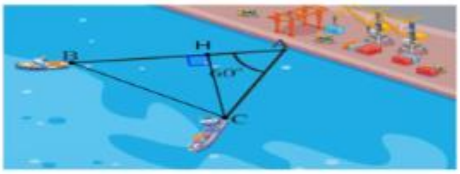
Vậy khoảng cách từ vị trí O đến khu đất khoảng 12,5 m.

Bài 17. Hai chiếc tàu thủy B và C cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo thành một góc 60° (Hình vẽ). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Nối B và C. Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$).



Sau 1,5 giờ tàu B chạy được quãng đường là: AB = 20.1,5 = 30 (hải lí).

Sau 1,5 giờ tàu C chạy được quãng đường là: AC = 15.1,5 = 22,5 (hải lí).

Xét tam giác AHC vuông tại H, ta có:

• $CH = AC \,.\, \sin A = 22,5 \,.\, \sin\, 60^\circ = \dfrac{45\sqrt{3}}{4}$ (hải lí).

• $AH = AC \,.\, \cos A = 22,5 \,.\, \cos 60^\circ = 11,25$ (hải lí).

Do đó $BH = AB - AH = 30 - 11,25 = 18,75$ (hải lí).

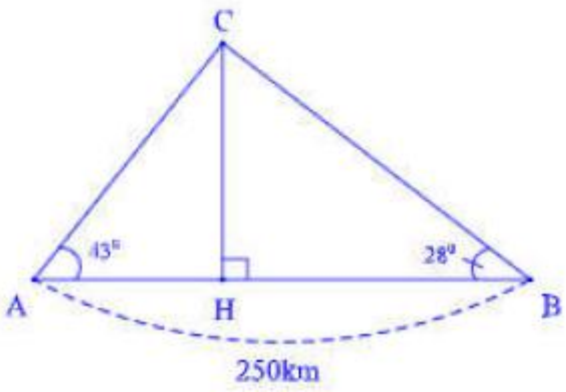
Mặt khác, tam giác CHB vuông tại H, áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{(18,75)^2 + \left(\frac{45\sqrt{3}}{4}\right)^2} \approx 27,04 \text{ (hải lí)}.$$

Vậy sau 1,5 giờ tàu B cách tàu C là 27,04 hải lí.

Bài 18. Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với một góc 43° so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với một góc 28° so với bờ sông. Hai người đứng cách nhau $250m$. Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng bao nhiêu m?

Lời giải



Xét tam giác AHC vuông tại A, ta có

$$\tan CAH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan CAH} = \frac{CH}{\tan 43^\circ} \ (1)$$

Xét tam giác BHC vuông tại B, ta có

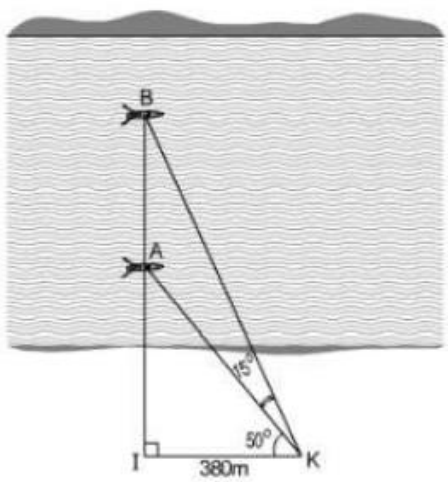
$$\tan CBH = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan CbH} = \frac{CH}{\tan 28^\circ} \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $AB = AH + HB = CH\left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ}\right) \Leftrightarrow 250 = CH\left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ}\right)$

Suy ra : $CH \approx 84,66m$

Vậy cồn cách bờ sông hai người đang đứng là $84,66m$

Bài 19. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình dưới dây. Tính khoảng cách giữa chúng. (làm tròn đến met)



Lời giải:

Xét tam giác AIK vuông tai I ta có:

$$\tan AKI = \frac{AI}{IK} \Rightarrow AI = IK.\tan AKI = 380.\tan 50 \approx 453m$$

Xét tam giác BIK vuông tai I ta có:

$$\tan BKI = \frac{BI}{IK} \Rightarrow BI = IK.\tan AKI = 380.\tan\left(15^\circ + 50^\circ\right) \approx 815m$$

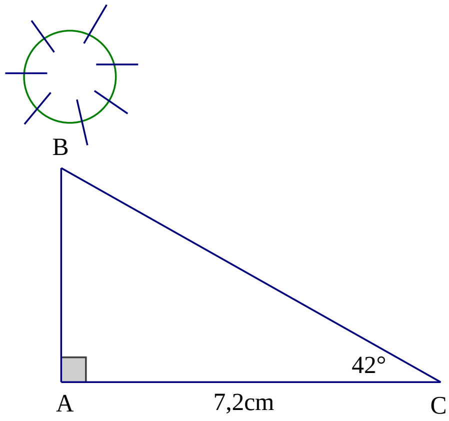
Ta có $AB + AI = BI \Rightarrow AB = BI - AI = 815 - 453 = 362m$

Vậy khoảng cách giữa chúng là $362m$

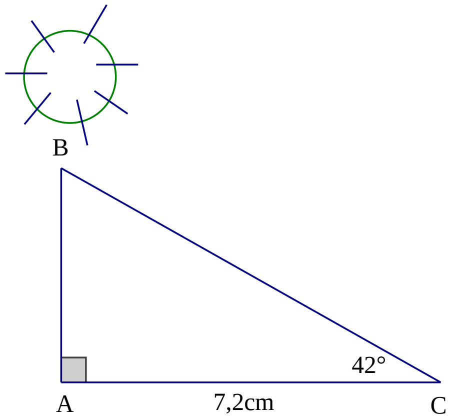
DẠNG 2

ƯỚC LƯỢNG CHIỀU CAO

Bài 20. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,2 cm. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42^0. Tính chiều cao của cột đèn?



Lời giải



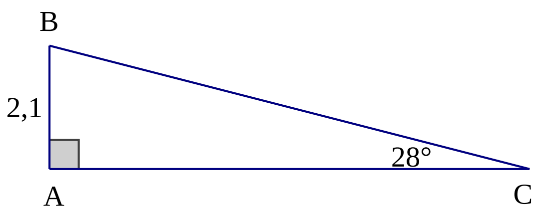
Gọi chiều cao của cột đèn là AB, bóng của cột đèn trên mặt đất là AC

Áp dụng hệ thức cạnh và góc trong tam giác ABC vuông tại A, ta có

$\tan C = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 7,2\tan 42^0 \Rightarrow AB \approx 6,75cm$

Bài 21. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28^0 và có độ cao là $2,1cm$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải



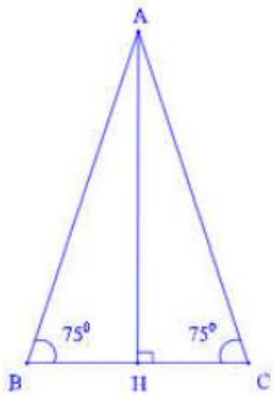
Gọi AB là chiều cao và BC là chiều dài của cầu trượt

Ta có độ dài cầu trượt là: $\dfrac{2,1}{\sin 28^0} \approx 4,5m$

Bài 22. Thang xếp chữ A gồm hai thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng $75°$. Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao 2m tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Do tam giác ABC cân nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC.

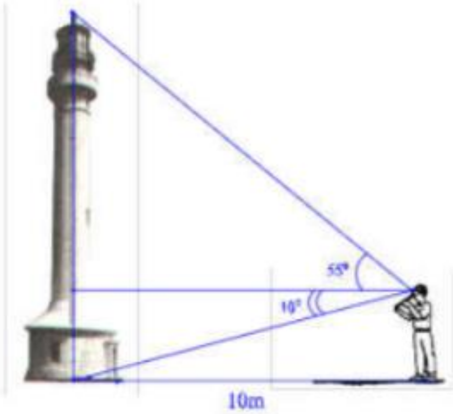
Xét ΔABH vuông tại H, ta có:

$\sin B = \dfrac{AH}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

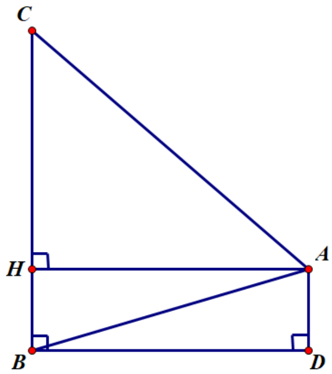
$\Rightarrow AB = \dfrac{AH}{\sin B} = \dfrac{2}{\sin 75°} \approx 2,07m$

Vậy thang đơn có chiều dài $2,07m$

Bài 23. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10m, nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Lời giải



Dựa vào hình vẽ minh họa, ta có: $AH = BD = 10m$.

Xét ΔAHB vuông tại H, ta có:

$\tan BAH = \dfrac{BH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AH \cdot \tan BAH = 10 \cdot \tan 10^\circ (m)$

Xét ΔAHC vuông tại H, ta có:

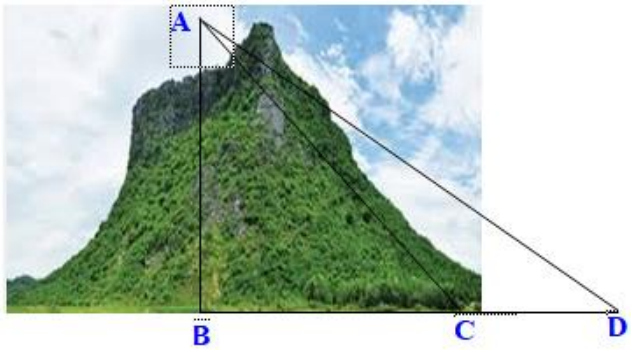
$\tan CAH = \dfrac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow CH = AH \cdot \tan CAH = 10 \cdot \tan 55^\circ (m)$

Ta có: $BC = BH + CH = 10 \cdot \tan 10^\circ + 10 \cdot \tan 55^\circ \approx 16m$

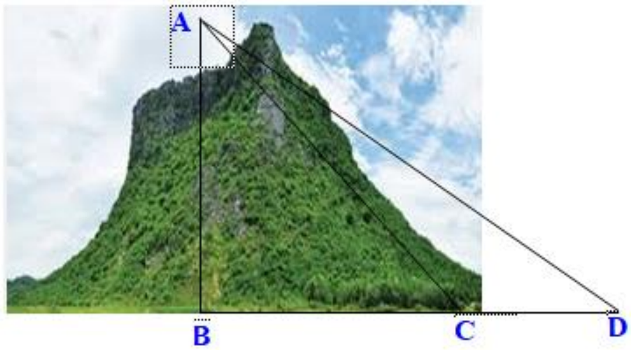
Vậy chiều cao của tháp là $16m$.

Bài 24. **Đo chiều cao quả núi** *(hình vẽ)*



Để đo chiều cao AB của một ngọn núi, ta chọn một điểm C và điểm D cách nhau 50m sao cho tia DC hướng về "tâm" ngọn núi. Dùng giác kế ta đo được hai góc $C \approx 22^0 18'$ và góc D $\approx 20^0 36'$. Tính chiều cao bằng mét của quả núi.

Lời giải



Trong tam giác vuông ABC ta có: BC = AB.cotC.

Trong tam giác vuông ABD ta có : BD = AB.cotD.

Suy ra: CD = BD – BC = AB.(cotD – cotC)

$$\Rightarrow AB = \frac{CD}{\cot D - \cot C} = \frac{50}{\cot 20^0 36' - \cot 22^0 18'} \approx 1802\text{m}$$

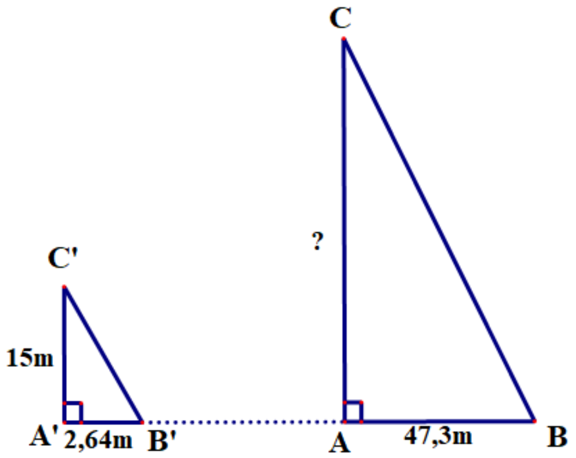
Bài 25. Tòa nhà Bitexco Financial (hay Tháp Tài chính Bitexco) là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi toà nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3 mét, thì cùng thời điểm đó có một cột cờ (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài 2,64 mét.

a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ).

b) Tính chiều cao của toà nhà, (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

Hình vẽ minh họa bài toán



a) Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc B bằng góc B’

$\Rightarrow \tan B = \tan B' = \dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{15}{2,64}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow B = B' \approx 80^o$

Vậy góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là 80^o

b) Ta có: $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$

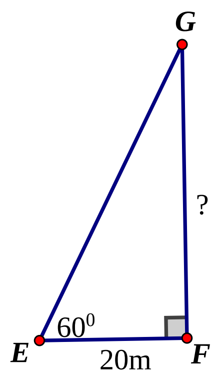
$\Rightarrow AC = AB.\tan B = 47,3.\dfrac{15}{2,64} \approx 268,8m$

Vậy chiều cao của tòa nhà là 268,8m

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 26. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $60°$ và bóng của một tòa tháp trên mặt đất dài 20 m. Khi đó chiều cao của tòa tháp bằng bao nhiêu?

Lời giải

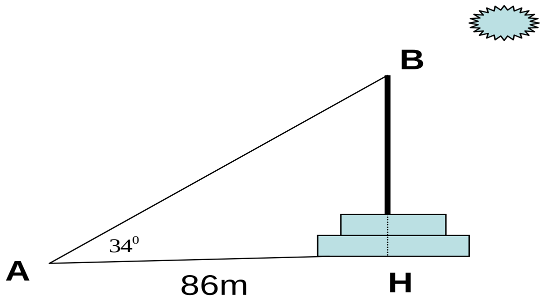


Bài toán được minh họa bởi hình vẽ trên. Trong đó chiều cao của tòa tháp là đoạn GF

Áp dụng hệ thức cạnh và góc trong tam giác vuông ta có

$GF = EF.\tan E = 20.\tan 60^0 = 20\sqrt{3}\,(m)$.

Bài 27. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34^0 và bóng của một ngọn tháp trên mặt đất dài 86m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét)

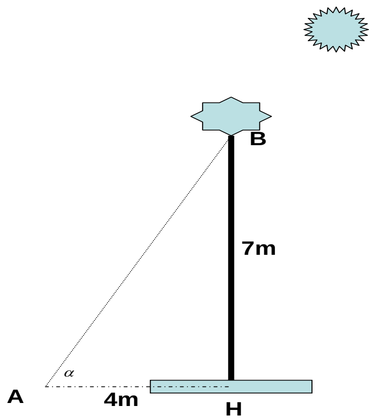


Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

BH=AH.tanA=86.tan $34^0 \approx 58$m

Bài 28. Một cột cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m.Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng Mặt Trời tạo với mặt đất (góc α ở hình vẽ)



Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

$$\tan\alpha = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^0 15'$$

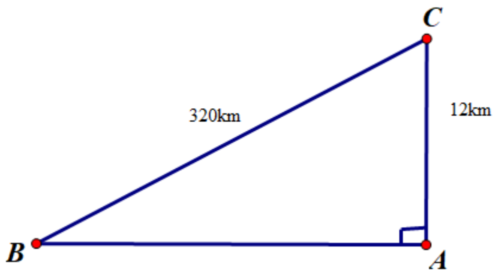
Bài 29. Một máy bay đang bay ở độ cao $12\,\text{km}$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

a) Nếu cách sân bay $320\,\text{km}$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải:

a)



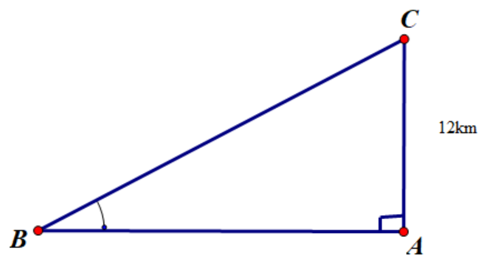
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{320} = \dfrac{3}{80}$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow B \approx 2^\circ 9'$

Vậy góc nghiêng là $2^\circ 9'$.

b)



Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BC = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{12}{\sin 5^\circ} \approx 137,7\,\text{km}$.

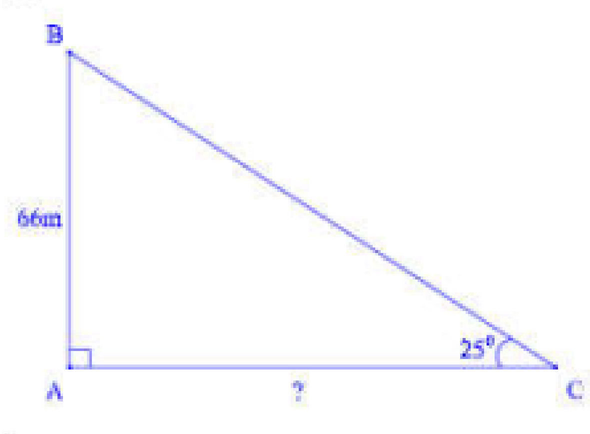
Vậy phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh khi máy bay cách sân bay $137,7\,km$.

Bài 30. Hải đăng Kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ luật Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897-1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao $66m$ so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương $40\,km$).

Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao $66m$, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiếu từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là $25°$. Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



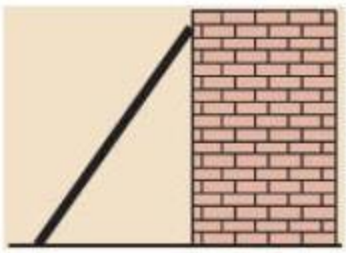
Xét ΔABC vuông tại $A,$ ta có:

$\tan C = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan C} = \dfrac{66}{\tan 25^\circ} \approx 142(m)$

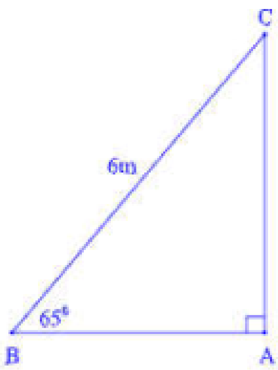
Vậy khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng là $142m.$

Bài 31. Trường bạn Trúc Linh có một chiếc thang dài $6m.$ Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc "an toàn" là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng).



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



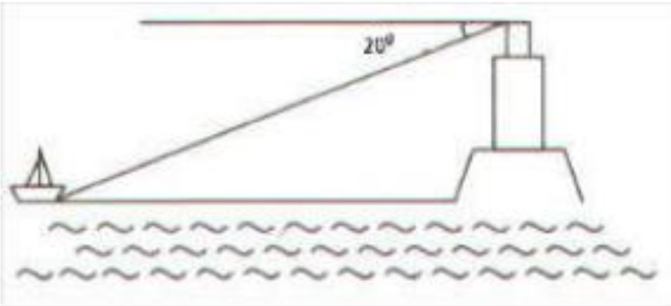
Xét ΔABC vuông tại $A,$ ta có:

$\cos B = \dfrac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AB = BC.\cos B = 6.\cos 65° \approx 2,5(m)$

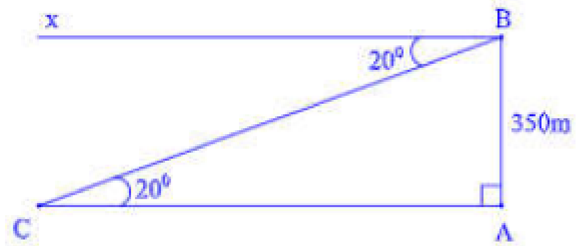
Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $2,5m$.

Bài 32. Từ một đài quan sát cao 350m so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc $20°$ so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Theo đề bài, ta có:

$\angle BCA = \angle CBx = 20°$ (vì AC // Bx và hai góc ở vị trí so le trong)

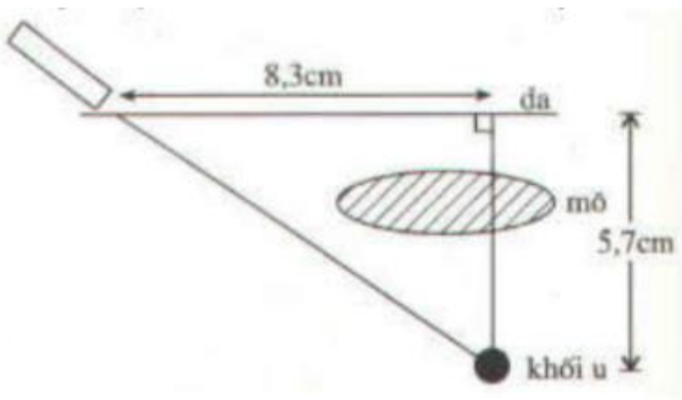
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan ACB = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

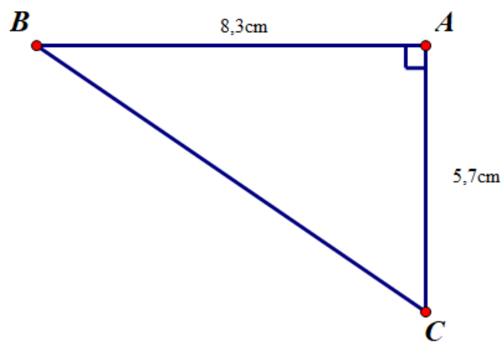
$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan ACB} = \dfrac{350}{\tan 20°} \simeq 961,6m$

Vậy muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài khoảng $961,6m$.

Bài 33. Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7$cm được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3$cm (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5,7}{8,3}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow B \approx 34^\circ 28'$

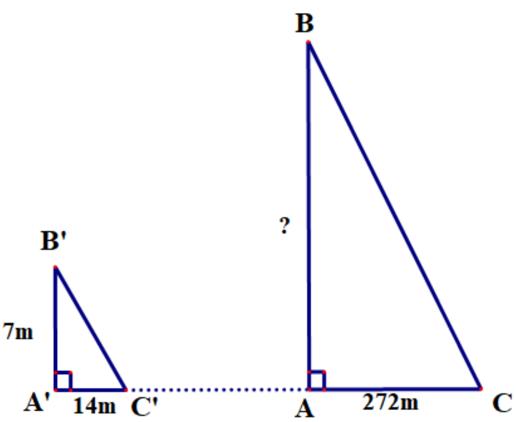
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pytago) $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(8,3)^2 + (5,7)^2} \approx 10,1(cm)$

Vậy góc tạo bởi chùm tia với mặt da là $34^\circ 28'$ và chùm tia phải đi một đoạn dài khoảng $10,1cm$ để đến được khối u.

Bài 34. Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 272m, cùng thời điểm đó một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 14m. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 3,4m?

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



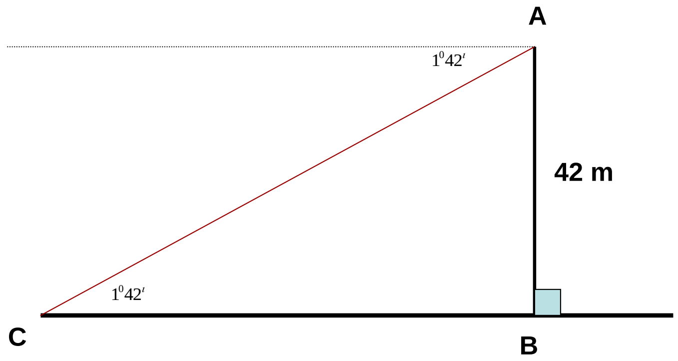
Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc C bằng góc C'

$\tan C = \tan C' \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow A'B' = \dfrac{AB.A'C'}{AC} = \dfrac{7.272}{14} = 136m$

Vậy tòa nhà có: $\dfrac{136}{3,4} = 40$ (tầng)

Bài 35. Một người quan sát ở đài hải đăng cao 42 mét so với mặt nước biển nhìn thấy một con tàu ở xa với góc $1^0 42'$ so với phương nằm ngang. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng là bao nhiêu hải lí ?(1 hải lí= 1852 mét)



Lời giải

Giả sử: A là đài hải đăng nơi người quan sát đứng nhìn thấy tàu.

B là chân đài hải đăng ở mặt nước biển.

C là vị trí con tàu trên mặt biển.

Khi đó BC là khoảng cách cần tìm.

Ta có: BC = $42.\cot 1^0 42' \approx 1415{,}13$ met $\approx 0{,}764$ (hải lí).

Bài 36. Để đo chiều cao của một đồn giặc nằm trên một quả đồi cao (đỉnh D mà không thể tới gần được) người ta sử dụng một phép đo như sau:

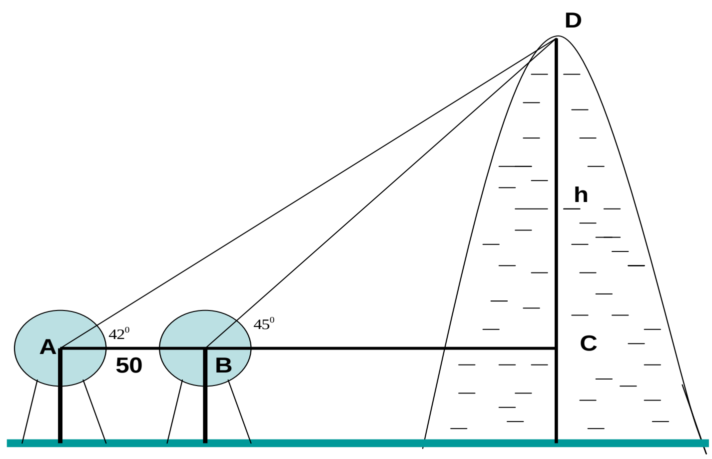
Chọn một điểm A trên mặt đất đặt một giác kế thẳng đứng(giác kế cao 1,5m).

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh D quả đồi. Đọc trên giác kế có số đo 42^0 của góc DAC.

Trên đoạn thẳng AC từ chân đồi tới điểm A ta chọn một điểm B cách A là 50m.

Quay thanh giác kế và khi ngắm theo thanh này ta cũng nhìn thấy đỉnh D của quả đồi. Đọc giác kế ta có số đo là 45^0 của góc DBC . Hãy tính chiều cao của quả đồi.

(hình vẽ minh họa bên dưới)



Lời giải

Gọi CD có độ dài là h.

Ta có:Trong tam giác vuông ACD thì $h = AC.\tan 42^0$

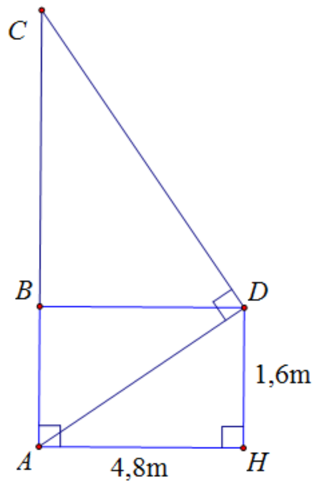
Trong tam giác vuoongBCD có: $BC = h.\cot 45^0$

Vậy ta có $h = (50+h.\cot 45^0).\tan 42^0$ từ đó suy ra $h \approx 500m$ do đó chiều cao của quả đồi là 500+1,5 = 501,5(m)

Bài 37. Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ góc cây đến chân người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người nhắm là $1,6m$. Hỏi với các kích thước trên, người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

Lời giải:

Hình vẽ minh họa bài toán:



Ta có, tứ giác ABDH là hình chữ nhật $\Rightarrow BA = DH = 1,6m;\ BD = AH = 4,8m$

Xét ΔADC vuông tại D có BD là đường cao: $BD^2 = BA.BC \Rightarrow BC = \dfrac{BD^2}{BA} = \dfrac{4,8^2}{1,6} = 14,4m$

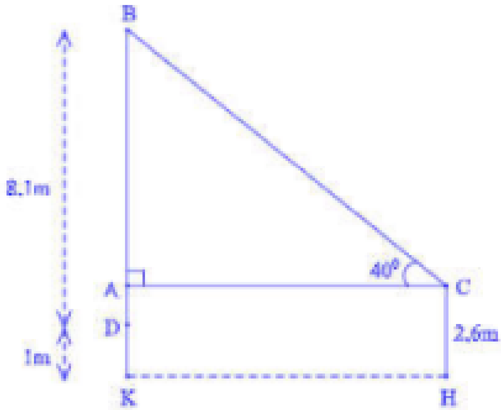
$\Rightarrow AC = AB + BC = 1,6 + 14,4 = 16m$.

Vậy chiều cao của cây dừa là $16m$.

Bài 38. Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40^0 .Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8{,}1$ mét thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2{,}6$ mét, chiều cao của vậ là 1 mét (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Ta có:

$AK = CH$

$\Rightarrow AD + DK = CH$

$\Rightarrow AD = CH - DK = 2{,}1 - 1 = 1{,}6m$

Mà:

$AB + AD = BD$

$\Rightarrow AB = BD - AD = 8{,}1 - 1{,}6 = 6{,}5m$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$\sin C = \dfrac{AB}{BC}$ (tỷ số lượng giác của góc nhọn)

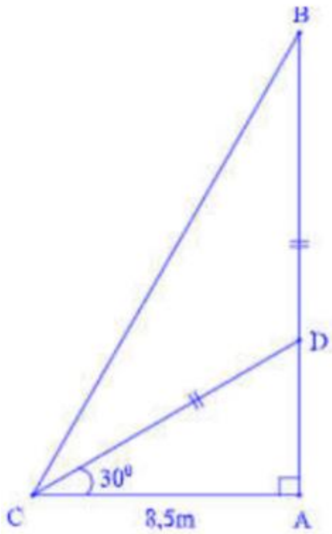
$\Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{6{,}5}{\sin 40^0} \approx 10{,}1m$.

Vậy cần cẩu phải dài 10,1 m.

Bài 39. Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30^o. Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất , hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét ΔADC vuông tại C, ta có: $\tan DCA = \dfrac{AD}{AC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$\Rightarrow AD = AC.\tan DCA = 8,5.\tan 30^o\ (m)$

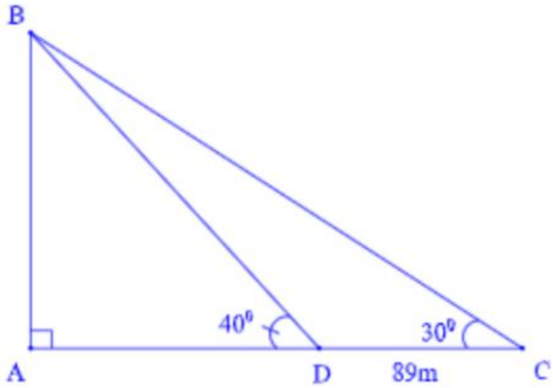
Và $\cos DCA = \dfrac{AC}{DC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn) $\Rightarrow DC = \dfrac{AC}{\cos DCA} = \dfrac{8,5}{\cos 30^o}(m)$

$\Rightarrow AB = AD + DC = 8,5.\tan 30^o + \dfrac{8,5}{\cos 30^o} = 14,72\,m$

Bài 40. Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu, cho biết tại hai điểm cách nhau $89m$ trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40^o và 30^o.

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét ΔABD vuông tại A, ta có

$\tan ADB = \dfrac{AB}{AD}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$AD = \dfrac{AB}{\tan ADB} = \dfrac{AB}{\tan 40^o} m \quad (1)$

Xét ΔABC vuông tại A, ta có

$\tan ACB = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$AC = \dfrac{AB}{\tan ACB} = \dfrac{AB}{\tan 30^o} m \quad (2)$

Ta có: $AD + DC = AC$ (vì D thuộc AC)

$$\frac{AB}{\tan 40^o} + 89 = \frac{AB}{\tan 30^o}$$

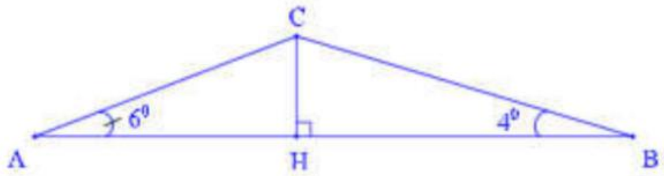
$$\frac{AB}{\tan 30^o} - \frac{AB}{\tan 40^o} = 89$$

$$\frac{AB}{\tan 30^o}\left(\frac{1}{\tan 30^o} - \frac{1}{\tan 40^o}\right) = 89$$

$$AB = \frac{89}{\frac{1}{\tan 30^o} - \frac{1}{\tan 40^o}}$$

$$AB \approx 164,7\, m$$

Bài 41. Lúc 6h sáng bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài 762m, góc $\hat{A} = 6^\circ$ và $\hat{B} = 4^\circ$



a) Tính chiều cao con dốc.

b) Hỏi An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc 4hm/h và tốc độ xuống dốc 19km/h.

Lời giải:

a) Xét ΔAHC vuông tại H ta có:

$$\tan CAH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan CAH} = \frac{CH}{\tan 6^\circ}(m) \quad (1)$$

Xét ΔBHC vuông tại H ta có:

$$\tan CBH = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan CBH} = \frac{CH}{\tan 4^\circ}(m) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$AH + BH = \frac{CH}{\tan 6^\circ} + \frac{CH}{\tan 4^\circ}$$

$$AB = CH\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)$$

$$672 = CH\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)$$

$$\Rightarrow CH = \frac{672}{\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)} \approx 32m$$

Vậy chiều cao của con dốc là 32m.

b) Xét ΔACH vuông tại H ta có: $\sin CAH = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin CAH} = \frac{32}{\sin 6^\circ}(m)$

Xét ΔBHC vuông tại H ta có: $\sin CBH = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CB = \frac{CH}{\sin CBH} = \frac{CH}{\sin 4^\circ}(m)$

Đổi đơn vị: $4km/h = \frac{10}{9}m/s; 19km/h = \frac{95}{18}m/s$

Thời gian lên dốc AC là: $t_{AC} = \dfrac{S_{AC}}{V_{AC}} = \dfrac{AC}{V_{AC}} = \dfrac{32/\sin 6^\circ}{14,4}(s)$

Thời gian xuống dốc CB là: $t_{CB} = \dfrac{S_{CB}}{V_{CB}} = \dfrac{CB}{V_{CB}} = \dfrac{32/\sin 4^\circ}{68,4}(s)$

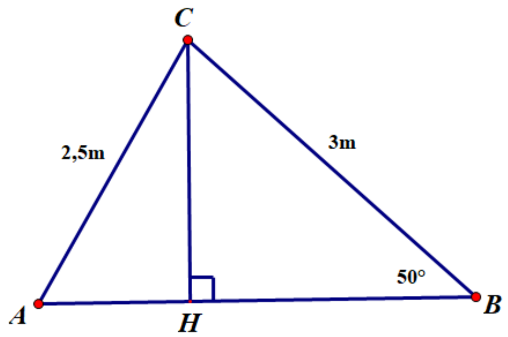
Thời gian đi từ A đến B là: $t_{AB} = t_{AC} + t_{CB} = \dfrac{32/\sin 6^\circ}{14,4} + \dfrac{32/\sin 4^\circ}{68,4} \approx 362,44(s)$

$362,44s \approx 6$ *phút* 3 *giây*

Bài 42. Một chiếc cầu trượt bao gồm phần cầu thang (để bước lên) và phần ống trượt (để trượt xuống) nối liền với nhau. Biết rằng khi xây dựng phần ống trượt cần phải đặt phần ống trượt nghiêng với mặt đất một góc 50°. Hãy tính khoảng cách từ chân cầu thang đến chân ống trượt nếu xem phần cầu thang như một đường thẳng dài 2,5m; ống trượt dài 3m.

Lời giải

Hình minh họa bài toán



Tam giác CHB vuông tại H nên:

$HB = CB.\cos 50^\circ = 3.\cos 50^\circ$

$HC = CB.\sin 50^\circ = 3.\sin 50^\circ$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ACH vuông tại H:

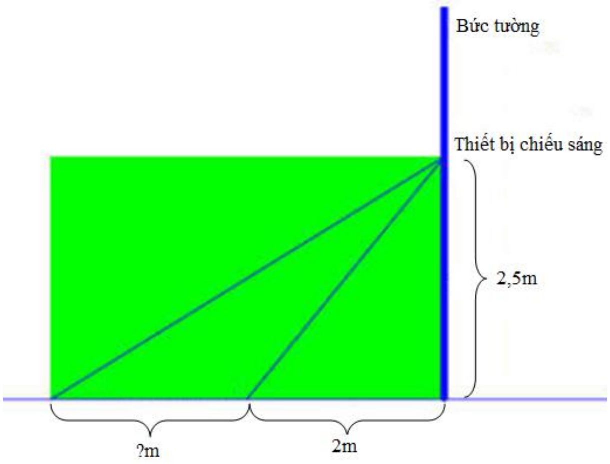
$AC^2 = CH^2 + AH^2$

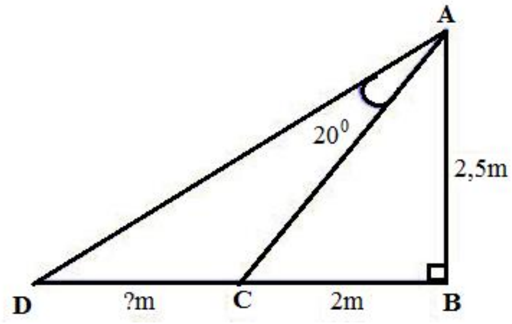
$\Leftrightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 = 2,5^2 - (3.\sin 50^\circ)^2$

$\Rightarrow AH = \sqrt{2,5^2 - (3.\sin 50^\circ)^2}$

Do đó: $AB = AH + HB = \sqrt{2.5^2 - (3.\sin 50^\circ)^2} + 3.\cos 50^\circ \approx 2,91$

Bài 43. Người ta cần lắp đặt một thiết bị chiếu sáng gắn trên tường cho một phòng triển lãm như hình vẽ. Thiết bị này có góc chiếu sáng là 20^o và cần đặt cao hơn mặt đất là 2,5m. Người ta đặt thiết bị chiếu sáng này sát tường và được canh chỉnh sao cho trên mặt đất dải ánh sáng bắt đầu từ vị trí cách tường 2m. Hãy tính độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất.





Lời giải

Xét ΔABC vuông tại B, ta có: $\tan BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2,5} = 0,8 \Rightarrow BAC \approx 38,7^o$

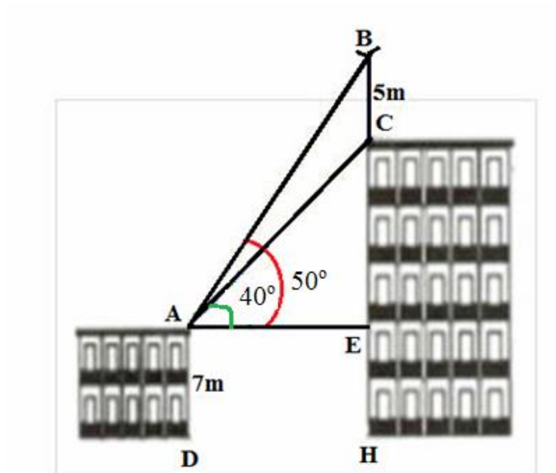
Ta có: $BAD = BAC + CAD = 38,7^o + 20^o = 58,7^o$

Xét ΔABD vuông tại B, Ta có: $BD = AB.\tan BAD = 2,5.\tan 58,7^o \approx 4,1(m)$

$\Rightarrow CD = BD - BC = 4,1 - 2 = 2,1(m)$

Vậy độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất là 2,1 (m).

Bài 44. Trên nóc của một tòa nhà có một cột ăng – ten cao 5m. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng – ten dưới góc 50^o và 40^o so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà.



Lời giải

+ Dựa vào hình vẽ bài toán, ta có:

BC = 5m

AD = EH = 7m

$\widehat{BAE} = 50^o;\ \widehat{CAE} = 40^o$

$\widehat{CEA} = \widehat{BEA} = 90^o$

+ Xét ΔCAE vuông tại E, ta có:

$\tan \widehat{CAE} = \dfrac{CE}{AE}$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow CE = AE.\tan \widehat{CAE} = AE.\tan 40^o\ \ (m)$ (1)

+ Xét ΔBAE vuông ở E ta có:

$\tan \widehat{BAE} = \dfrac{BE}{AE}$(Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BE = AE.\tan \widehat{BAE} = AE.\tan 50^o\ \ (m)$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta suy ra:

$BE - CE = AE\tan 50^o - AE\tan 40^o$

$BC = AE\left(\tan 50^o - \tan 40^o\right)$

$5 = AE\left(\tan 50^o - \tan 40^o\right)$

$AE = \dfrac{5}{\tan 50^o - \tan 40^o}\ \ (m)$

+ Thay AE vào (1) ta có: $CE = \dfrac{5}{\tan 50^o - \tan 40^o}\tan 40^o\ \ (m)$

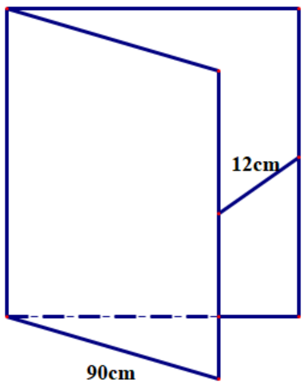
Suy ra: $BH = BC + CE + EH = 5 + \dfrac{5.\tan 40^o}{\tan 50^o - \tan 40^o} + 7 \approx 23{,}9\ \ (m)$

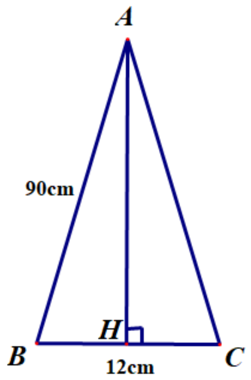
Vậy chiều cao của tòa nhà là 23,9 (m)

Bài 45. Trong phòng khách sạn, bên cạnh bộ khóa cửa chính còn có một phụ kiện hữu ích khác chính là door guard (chốt trượt mở an toàn). Thiết bị này phòng trường hợp khi nghe tiếng gõ cửa mà không biết chính xác đó là ai. Door guard là một dạng chốt nối, tạo một khoảng cỡ 12cm đủ để người bên trong nhận diện người bên ngoài và nói chuyện với nhau. Nếu chiều rộng cánh cửa vào khoảng 90cm. Hãy tính góc mở cánh cửa.

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:





Ta có: AB = AC nên ΔABC là tam giác cân tại A

Gọi H là trung điểm BC. Khi đó AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao.

BH = HC = 6cm.

Trong tam giác vuông ABH, ta có:

$$\sin BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{90} \Rightarrow BAH \approx 3{,}8^\circ$$

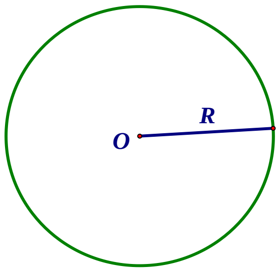
Do đó: $BAC \approx 7{,}6^\circ$

CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1
MỞ ĐẦU ĐƯỜNG TRÒN

1. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R (với $R>0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R, kí hiệu là: $(O;R)$



Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không chú ý đến bán kính của đường tròn $(O;R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn (O).

Nhận xét:

- Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

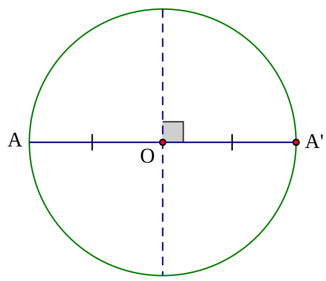
  + Điểm M nằm trên đường tròn (O) nếu $OM=R$

  + Điểm M nằm trong đường tròn (O) nếu $OM<R$

  + Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) nếu $OM>R$

- Hình tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn (O;R)

2. Tính chất đối xứng của đường tròn



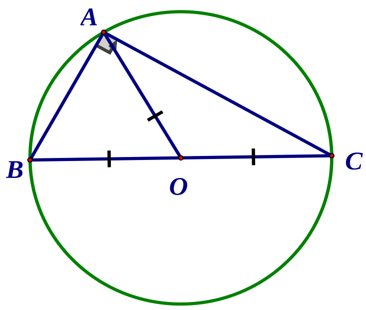
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.

CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $BAC = 90^0$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC.



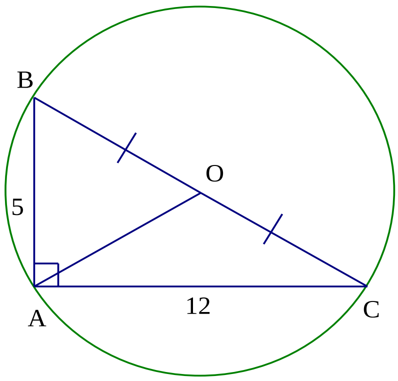
Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5cm, AC = 12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm BC

Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Do đó ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13cm$

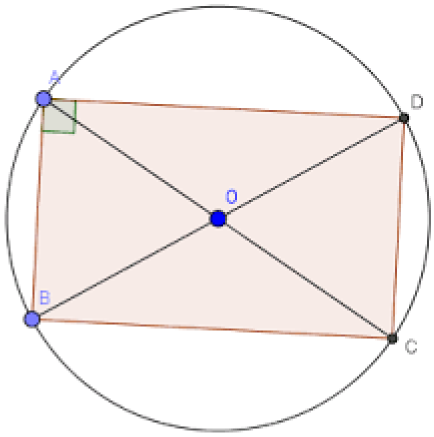
$\Rightarrow AO = OB = OC = \frac{1}{2}BC = 6,5cm$

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



a) Theo tính chất hình chữ nhật: Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$ABCD$ là hình chữ nhật, ta có: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D \in (O)$

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 15cm$

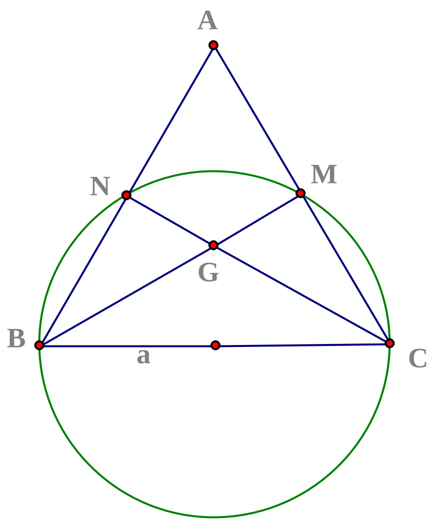
$\Rightarrow AO = OB = OC = OD = \frac{1}{2}BC = 7,5cm$

Bài 3. Cho tam giác đều ΔABC cạnh bằng a, các đường cao BM, CN. Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O).

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN. Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC.

Lời giải



a) Ta có:

Xét tam giác vuông BNC, có NO là đường trung tuyến nên $NO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow NO = OB = OC$

$\Rightarrow N \in \left(O;\dfrac{BC}{2}\right)$

Xét tam giác vuông BMC, có MO là đường trung tuyến nên $MO = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow MO = OB = OC$

$\Rightarrow M \in \left(O;\dfrac{BC}{2}\right)$

Vậy B, C, M, N cùng thuộc 1 đường tròn $\left(O;\dfrac{BC}{2}\right)$

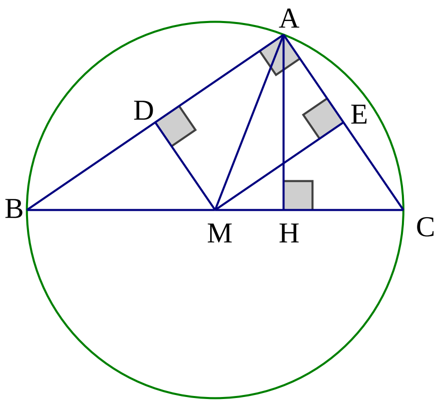
b) Ta có ΔABC đều có G trực tâm đồng thời là trọng tâm

Xét $\Delta AOB(O = 90^0), R = ON = \dfrac{a}{2}.OA = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (O)

Ta lại có: $OG = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} < R \Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 4. Cho tam giác $ABC\left(A = 90^0\right)$, đường cao AH. Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Lời giải



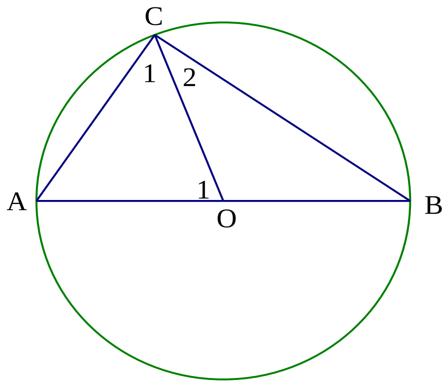
Vì ba tam giác ADM, AEM, AHM có chung cạnh huyền AM nên ba đỉnh góc vuông D, E, H

Nằm trên đường tròn đường kính AM có tâm là trung điểm của AM

Vậy 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của ΔABC.

Lời giải



Tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau $(AC = OA = OC)$ nên là tam giác đều $\Rightarrow A = C_1 = O_1 = 60^0$

Ta có: OAC có $OB = OC$ nên can tại $O \Rightarrow B = C_2$

O_1 là góc ngoài của $\Delta OBC \Rightarrow O_1 = B + C_2 = 2B = 2C_2 \Rightarrow B = C_2 = \frac{1}{2}O_1 = 30^0 \Rightarrow ACB = C_1 + C_2 = 90^0$

Vậy $A = 60^0; B = 30^0; C = 90^0$

Có thể lí giải như sau: ΔCAB có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối xứng AB nên vuông tại C

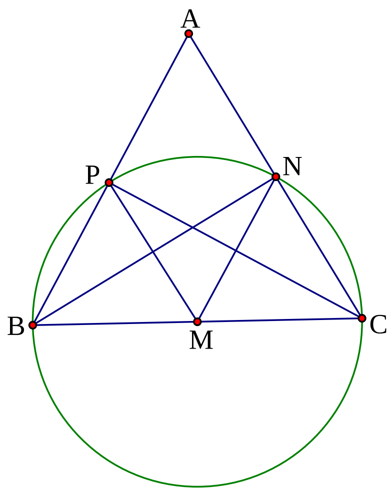
$ACB = 90^0 \Rightarrow A = 60^0 \Rightarrow B = 30^0$

Vậy ΔABC có $C = 90^0; A = 60^0; B = 30^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao, Suy ra AM, BN, CP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

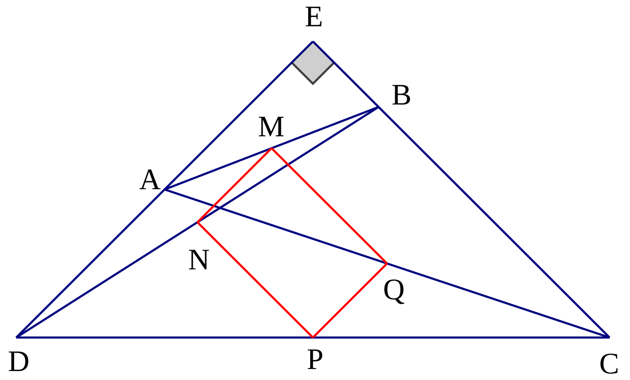
+ ΔBPC là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow MP = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ (1)

+ ΔBNC là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow NM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ (2)

Từ (1) và (2) $PM = NM = MB = MC$. Hay các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn, đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là trung điểm M của BC

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $C + D = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $MNPQ$, ta có: $\begin{cases} MQ // NP \\ MN // PQ \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành

Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E

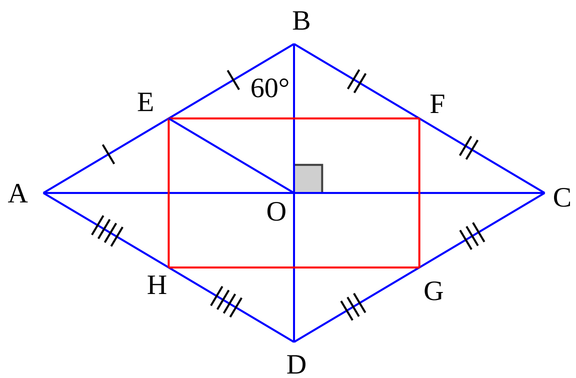
Ta có: $C + D = 90^0 \Rightarrow \widehat{E} = 90^0$

Lại có: $\begin{cases} MN // ED \\ MQ // EC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow M, N, P, Q$ nằm trên 1 đường tròn với tâm là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật, bán kính bằng nửa đường chéo.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $A = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $EFGH$, có: $\begin{cases} EF // GH \\ EH // FG \end{cases} \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành

Lại có: $HEF = 90^0 \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

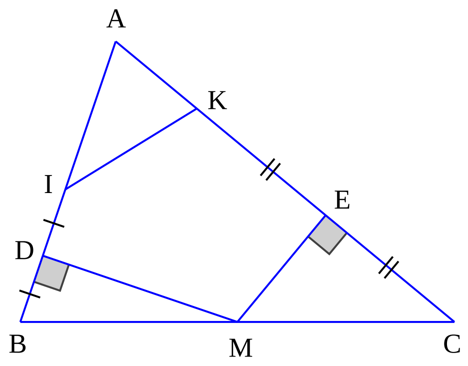
$\Rightarrow OE = OF = OG = OH(1)$

Xét tam giác OBE có: $\begin{cases} OE = BE \\ \widehat{B} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta OBE$ đều $\Rightarrow OE = OB = OD(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE = OB = OF = OG = OH = OD \Rightarrow E, B, F, G, D, H \in (O)$

Bài 9. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Lời giải



Cách 1: sử dụng định nghĩa

Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC(1)$

MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB(2)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MC = MK(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$ (đpcm)

Cách 2:

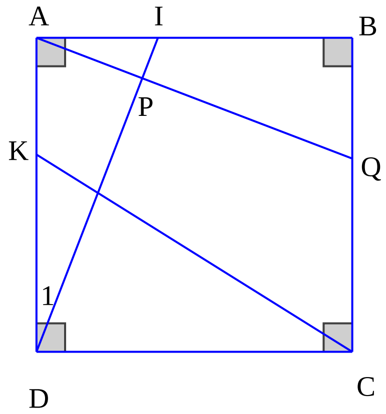
Ta có: MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BIC$ vuông tại I $\Rightarrow I \in (O; BC)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MK = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại $K \Rightarrow K \in (O; BC)$

Vậy: $B, I, C, K \in (O; BC)$.

Bài 10. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q. Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có $\Delta ADI = \Delta BAQ(g-c-g) \Rightarrow AI = BQ \Rightarrow \begin{cases} KD = CQ \\ KD//CQ \end{cases} \Rightarrow KDCQ$ là hình bình hành, mà $C = 60^0$

$\Rightarrow \lozenge CDKQ$ là hình chữ nhật.

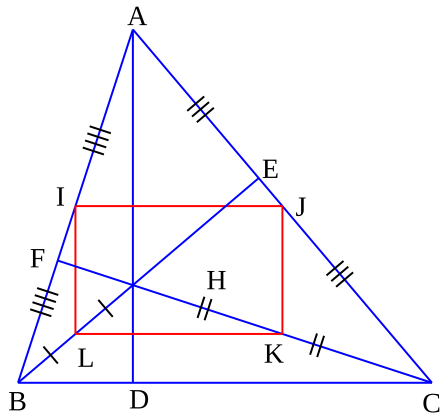
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo CK và DQ $\Rightarrow OC = OD = OK = OQ$

ΔPDQ vuông cân tại $P \Rightarrow PQ = OD = OC$

Vậy 5 điểm C, D, K, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có tứ giác $IJKL$ là hình bình hành (dhnb)

Mà $ILK = 90^0 \Rightarrow \lozenge IJKL$ là hình chữ nhật có hai đường chéo là LJ và IK

Xét tam giác vuông ELJ vuông tại $E \Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}LJ = OJ$

Xét tam giác vuông FLK vuông tại $I \Rightarrow OF = \dfrac{1}{2}IK = OJ$

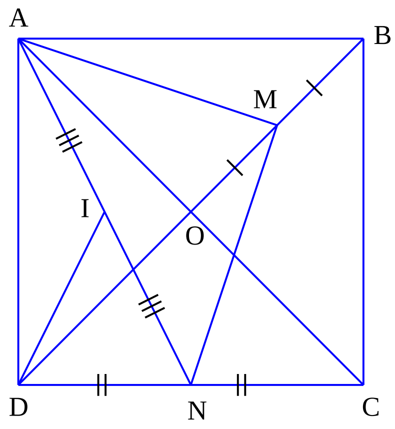
Vậy 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn đường kính là đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a) Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM.

Lời giải



a. Kẻ NH vuông góc với BD tại H

Xét tam giác OCD, có: $\begin{cases} DN = NC \\ NH // OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HO = HD = \frac{1}{2}CD \\ MO = MB = \frac{1}{2}OB \end{cases} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BD = OA$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta HNM (cgc) \Rightarrow \begin{cases} A_1 = M_1 \\ A_1 + M_2 = 90^0 \end{cases} \Rightarrow AMN = 90^0$

+) Gọi I là trung điểm của $AN \Rightarrow IA = IN = \frac{1}{2}AN (1)$

Xét $\Delta ADN (D = 90^0) \Rightarrow ID = \frac{1}{2}AN (2); \Delta AMN (M = 90^0) \Rightarrow MI = \frac{1}{2}AN (3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IA = IN = IM = ID \Rightarrow A, M, N, D \in (O)$

b. Xét đường tròn $(I; IA)$ có AN là đường kính, DM là dây không đi qua tâm $\Rightarrow AN > DM$

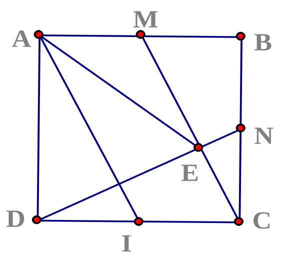
Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

b) Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

Lời giải



a) Chứng minh $\Delta CMB = \Delta DNC \Rightarrow NCE = CDN \Rightarrow CEN = 90^0$

b) Ta có: A, D, E, M thuộc đường tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm CD, chứng minh được $AI // MC$

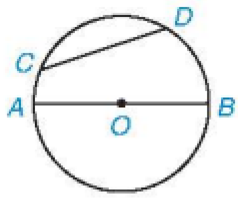
$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A $\Rightarrow B, D, E \in (A; AB)$

BÀI 2
CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

1. Dây và đường kính của đường tròn

• Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.

• Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn.

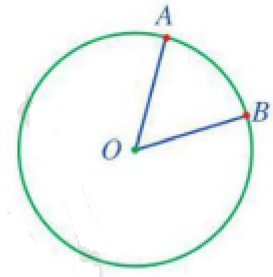


Định lí: Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

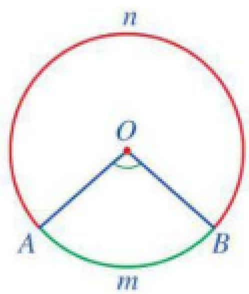
2. Góc ở tâm

a. Khái niệm góc ở tâm

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



b. Khái niệm cung tròn



• Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là cung AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.

• Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AmB}$.

• Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

c. Cách xác định số đo của một cung

• Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

• Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)

• Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.

- Số đo cung AB, kí hiệu là sđ AB

Nhận xét:

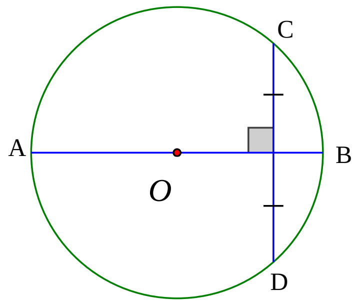
- Khi hai mút của cung trùng nhau ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo bằng 360^0.
- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0, cung lớn có số đo lớn hơn 180^0. Cung nửa đường tròn có số đo bằng 180^0.
- Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^0.
- Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau), hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau. Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.
- Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ $ACB =$ sđ $ACB +$ sđ CB

CHỦ ĐỀ 1
DÂY VÀ ĐƯỜNG KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

• Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.

• Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

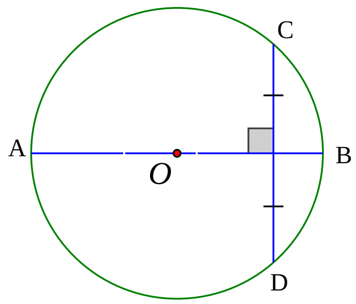
Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy



Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường cao nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB là trung tuyến vì vậy OB đi qua trung điểm CD.

Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

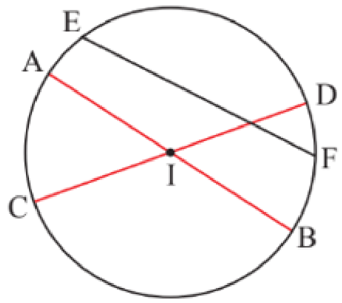


Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường trung tuyến nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB vuông góc CD.

Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (Hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



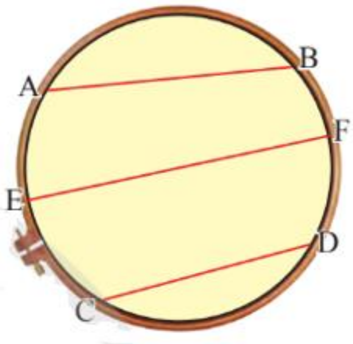
Lời giải

Trong đường tròn (I), AB và CD là đường kính đi qua tâm I, EF là dây cung không đi qua I.

Do đó AB = CD và EF < AB, EF < CD.

Vậy EF < AB = CD.

Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 32 cm, 28 cm và 40 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 20 cm (Hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Lời giải

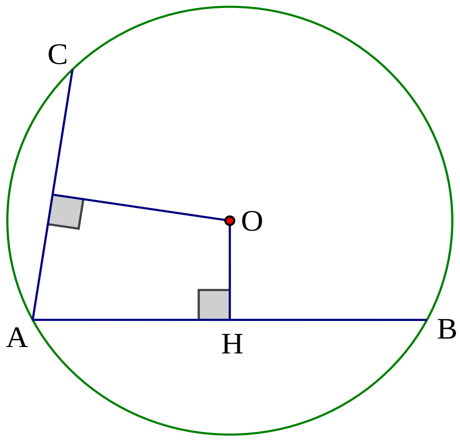
Gọi (O; R) là đường tròn có bán kính R = 20 cm, suy ra đường kính 40 cm.

Ta có EF = 40 cm = 2 . 20 cm = 2R.

Do đó, trong ba dây AB, CD và EF thì có dây EF đi qua tâm của đường tròn.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB và dây AC

Lời giải



Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, AC

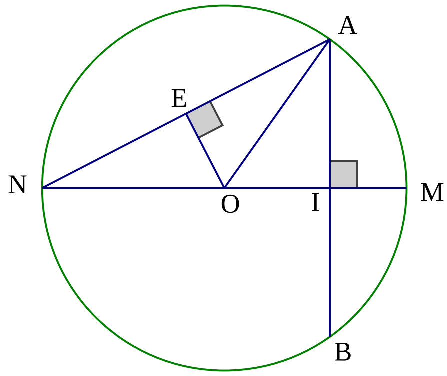
Tính được: $OH = \dfrac{\sqrt{11}}{2}(cm); OK = 2\sqrt{2}(cm)$

Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB Tia OI cắt cung AB tại M

a) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R

Lời giải



a) Vì I là trung điểm của dây AB nên: $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3(cm)$ và $OI \perp AB$

- $\Delta OIA\left(\hat{I} = 90^0\right) \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OI = 4cm \Rightarrow IM = 1cm$

- $\Delta AIM\left(\hat{I} = 90^0\right) \Rightarrow AM^2 = AI^2 + IM^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$

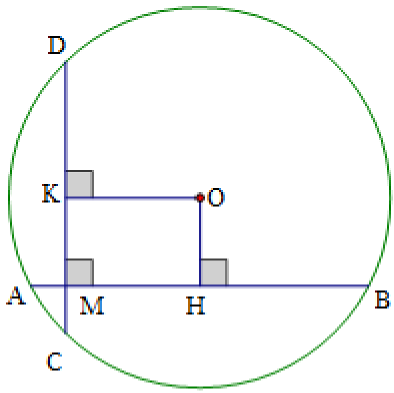
b) Gọi E là trung điểm của dây AN

Ta có: $OE \perp NA; NE = EA = 2,5cm$

- Xét $\Delta NEO \backsim \Delta NIA(gg) \Rightarrow \dfrac{NE}{NI} = \dfrac{ON}{NA} \Rightarrow ON = \dfrac{NA.NE}{NI} = \dfrac{2,5.5}{4} = 3,125(cm)$.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Lời giải



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O trên AB và CD

Ta có: $\begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = 9cm \\ OK \perp CD \Rightarrow KD = KC = 7cm \end{cases}$

Mà: $KC = KM + MC \Rightarrow KM = KC - MC = 7 - 4 = 3cm \Rightarrow OH = MK = 3cm$

Xét $\Delta OHB(H = 90^0) \Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = OD = 3\sqrt{10}(cm)$

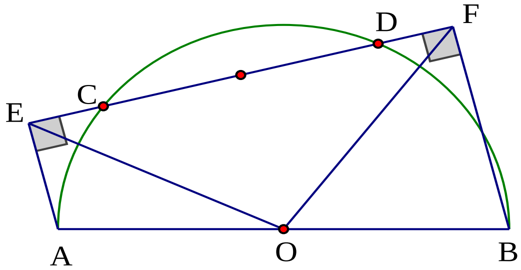
Xét $\Delta OKD(K = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OK^2 + DK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{41}(cm)$

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh:

a) $CE = DF$

b) E và F đều ở ngoài (O)

Lời giải



a) Gọi I là Trung điểm $CD \Rightarrow CI = ID$

Xét hình thang $AEFB$, I là trung điểm $EF \Rightarrow IE = IF \Rightarrow CE = DF$

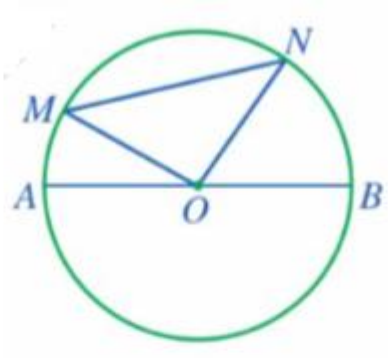
b) Ta có EAB và FBA bù nhau nên có một góc tù và một góc nhọn

Giả sử $EAB > 90^0 \Rightarrow \Delta EAO$ có $OE > OA = R \Rightarrow E$ ở ngoài đường tròn mà $OE = OF$

Nên F cũng ở ngoài đường tròn.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và OM + ON.

b) So sánh MN và AB.

Lời giải

a) Xét ΔOMN ta có MN < OM + ON (1) (Bất đẳng thức tam giác).

b) Vì A, M, N, B cùng thuộc đường tròn (O) nên OA = OM = ON = OB.

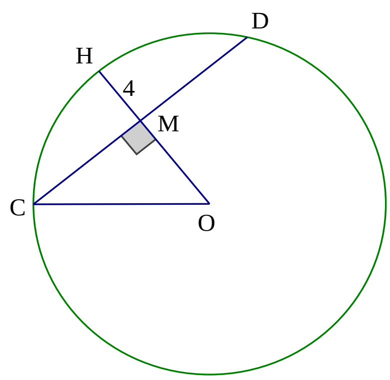
Ta có: OM + ON = OA + OB.

Lại có AB = OA + OB, do đó OM + ON < AB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN < AB.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16cm, MH = 4cm$

Lời giải



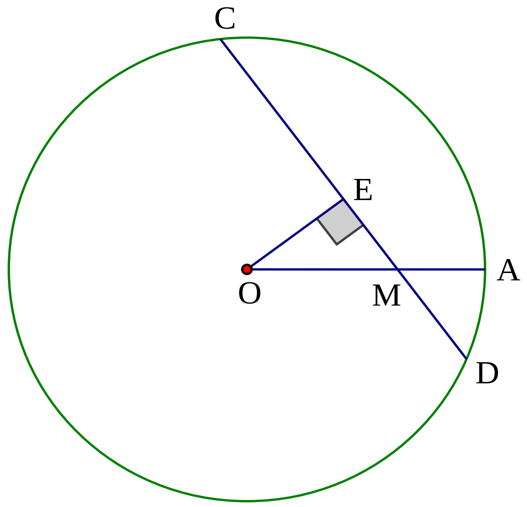
Đặt $OH = x(cm)$.

Ta có $OM = (x-4)(cm)$

Áp dụng định lý Pythagore ta được: $x = 10(cm)$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11cm$. Điểm M thộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Lời giải



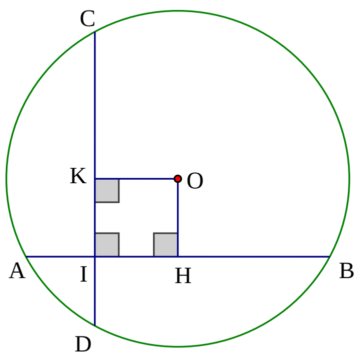
Kẻ $OE \perp CD, E \in CD.$ Ta có $OC = 11cm, CE = 9cm \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}cm$

$OM = 7cm \Rightarrow ME = 43cm \Rightarrow MC = 6cm, MD = 12cm$

Hoặc: $MD = 6cm, MC = 12cm$

Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm.$ Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây

Lời giải



Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD

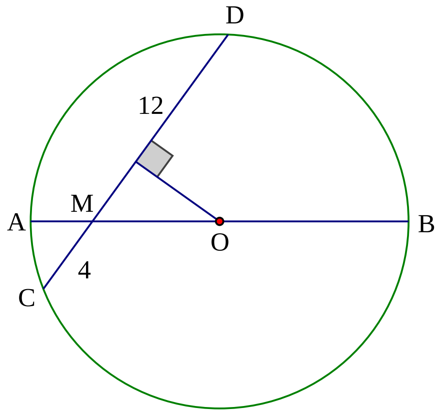
Ta có: $OH = OK = 1(cm)$

Bài 11. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt AB tại M, biết $MC = 4cm, MD = 12cm$. $BMD = 30^0$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Lời giải



a. Gọi OH là khoảng cách từ O đến $CD \Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow CH = HD = 8 \Rightarrow MH = 4cm$

Xét $\Delta MHO(H = 90^0), \tan 30^0 = \dfrac{OH}{MH} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(cm)$

b. Bán kính của đường tròn (O) chính là đoạn OD

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng OD dựa vào định lý pytago.

Xét $\Delta OHD(H = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OH^2 + HD^2(pytago) \Leftrightarrow OD^2 = 8^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow OD = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}(cm)$

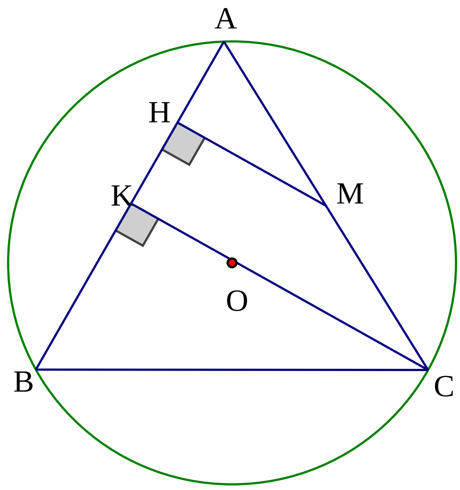
Bài 12. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, \mathrm{AC} = 20cm, BAC < 90^0$ và O nằm trong góc BAC.

Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng 8cm

a) Chứng minh tam giác ABC cân

b) Tính bán kính của (O)

Lời giải



a) Vẽ $MH \perp AB = H; CK \perp AB = K \Rightarrow MH$ là đường trung bình của

$\Delta CAK \Rightarrow AM = 10cm; AH = 6cm \Rightarrow AK = 12cm \Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}AB$

Từ đó chứng minh được ΔABC cân tại C

b) Ta có $CK = 2MH = 16cm$

Đặt $OC = x \Rightarrow OK = 16 - x \Rightarrow CO = 12,5cm$

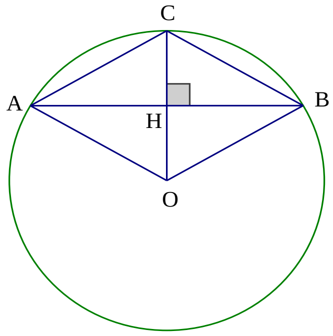
Bài 13. Cho đường tròn tâm $(O;R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $AOB = 120^0$. Vẽ $OH \perp AB = H$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại C. Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Lời giải



a) Ta có AB là dây cung của đường tròn (O); $OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AB

b) ΔOAB cân tại $O(OA = OB = R)$ có: OH là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác

$\Rightarrow AOH = HOB = \frac{1}{2}AOB = 60^0$

ΔHAO vuông tại H, có $AOH = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}; AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{3}{2}R; AB = 2AH = \sqrt{3}R$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ (đvdt)

c) $HC = OC - OH = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$

$\lozenge OACB$ có $HA = HB; HO = HC = \frac{1}{2}R \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình bình hành

Mà: $OA = OB(= R) \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình thoi.

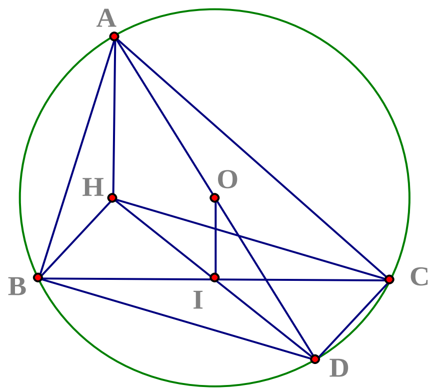
Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH = 2OI$

Lời giải



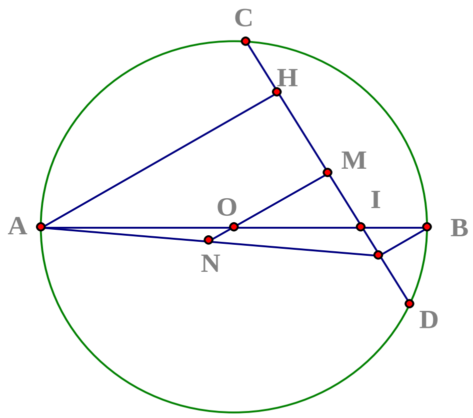
a. Ta có : $\begin{cases} BD//CH \\ BH//CD \end{cases} \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành

b. I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD

c. Ta có OI là đường trung bình $\Delta AHD \Rightarrow AH = 2OI$

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt AB tại I. Gọi H,K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$

Lời giải



Ta kẻ OM vuông góc với CD tại $M \Rightarrow MC = MD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Gọi N là giao điểm của OM và AK

Xét $\Delta AKB \Rightarrow NA = NK$

Xét $\Delta AHK \Rightarrow MH = MK \Rightarrow MC - MH = MD - MH \Leftrightarrow CH = DK$

Bài 16. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Lấy I là trung điểm của BC

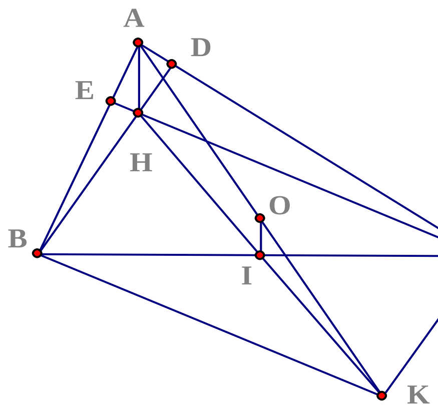
a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI//CH$

d) Chứng minh rằng: $BE.BA + CD.CA = BC^2$

Lời giải



a. Xét $BHCK$ có: $\begin{cases} HI = IK(gt) \\ BI = IC(gt) \end{cases} \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

b. Ta có $\Delta AKB, \Delta ACK$ vuông tại B và C nên bốn điểm A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AC tâm O.

c. Xét ΔAHB có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI // AH$

d. Gọi M là giao điểm của AH và BC

Ta có

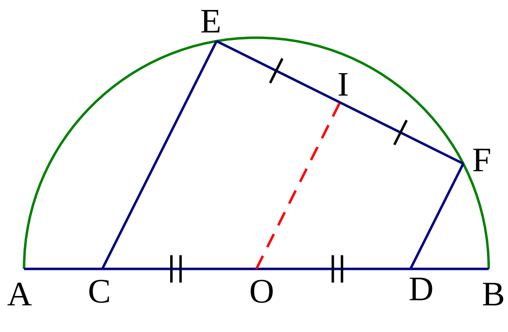
$\Delta BMA \backsim \Delta BEC(gg) \Rightarrow BE.BA = BM.BC$

$\Delta CMA \backsim \Delta CDB(gg) \Rightarrow CA.CD = CM.BC$

$\Rightarrow BE.BA + CD.CA = (BM + CM).BC = BC^2$ (đpcm)

Bài 17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

Lời giải



Vì I là trung điểm của EF nên $OI \perp EF$

Ta có: $CE // EF$ và O là trung điểm của CD nên $\lozenge CEFD$ là hình thang

Lại có OI là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow OI // CE // DF$

Mà $OI \perp EF \Rightarrow CE \perp EF; DF \perp EF \Rightarrow OI = \frac{1}{2}(CE + DF)$

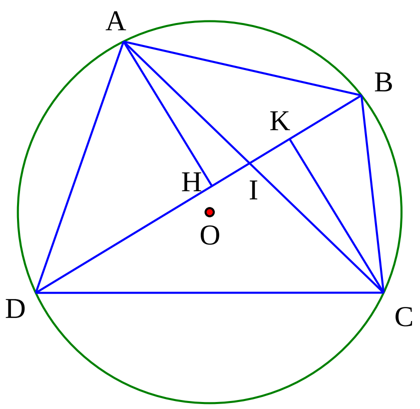
$S_{CEF} = \frac{1}{2}CE.EF$

$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE.EF$.

$\Rightarrow S_{CEF} + S_{DEF} = \frac{1}{2}CE.EF + \frac{1}{2}DE.EF = \frac{1}{2}EF\left(CE + DF\right) = EF.OI$

Bài 18. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$. Các điểm A, B, C, D thuộc $\left(O;R\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Lời giải



Vẽ $AH \perp BD\left(H \in BD\right), CK \perp BD\left(K \in BD\right)$

Gọi I là giao điểm của AC, BD

Ta có: $AH \perp HI \Rightarrow AH \le AI; CK \perp KI \Rightarrow CK \le CI \Rightarrow AH + CK \le AI + IC = AC$

Mà $AC, BD \le 2R$ (AC, BD là các dây cung của đường tròn $\left(O;R\right)$)

Ta có : $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.AH + \frac{1}{2}BD.CK = \frac{1}{2}BC\left(AH + CK\right) \le \frac{1}{2}BD.AC$

Do vậy $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}2R.2R = 2R^2$

Dấu '='' xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} BD = 2R \\ AC = 2R \\ H \equiv I \equiv K \end{cases} \Leftrightarrow AC, BD$ là hai đường kính vuông góc nhau

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $2R^2$.

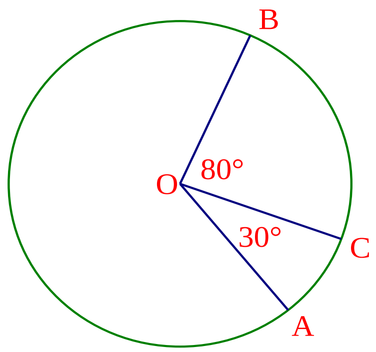
CHỦ ĐỀ 2
GÓC Ở TÂM

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

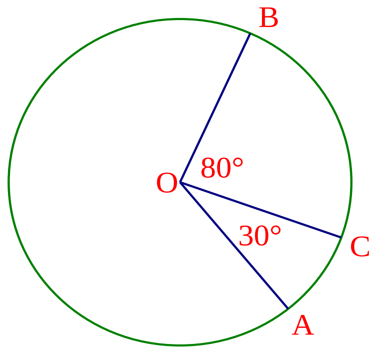
Phương pháp

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

Bài 1. Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $AOC = 30^0$ và $BOC = 80^0$.



Lời giải



Điểm C nằm trên cung nhỏ AB nên ta có: $sd\,AB = sd\,AC + sd\,BC$ $\quad(1)$

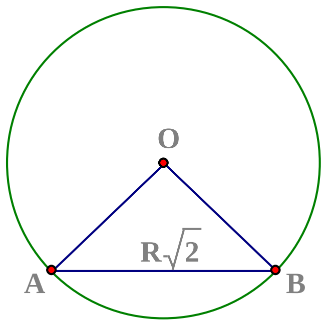
Góc ở tâm AOC chắn cung AC nên $sd\,AC = AOC = 30^0$

Góc ở tâm BOC chắn cung BC nên $sd\,BC = BOC = 80^0$

Thay vào (1) ta được: $sd\,AB = sd\,AC + sd\,BC = AOC + BOC = 30^0 + 80^0 = 110^0$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Lời giải



Xét ΔAOB có: $OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta AOB$ vuông tại O

$\Rightarrow$ sđ $AB = 90^0$

Vậy số đo cung lớn là $360^0 - 90^0 = 270^0$

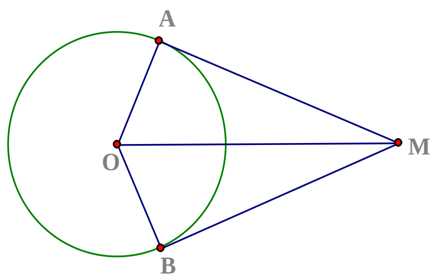
Bài 3. Cho đường tròn O, hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M, biết $AMB = 65^0$.

a) Tính số đo $AMO; AOM$.

b) Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

c)Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB.

Lời giải



a) Chứng minh được OM là tia phân giác của AMB

$\Rightarrow AMO = 32,5^0 \Rightarrow AOM = 180^0 - 90^0 - 32,5^0 = 57,5^0$

b) $AOB = 360^0 - 180^0 - 65^0 = 115^0$

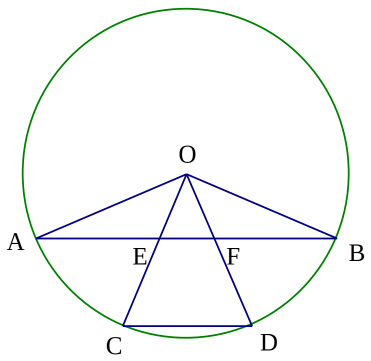
c) sđ AB_{nho} = sđ $AOB = 115^0$; sđ $AB_{lon} = 360^0 - 115^0 = 245^0$

Bài 4. Trên cung nhỏ AB của (O), cho hai điểm C và D sao cho cung AB được chia thành ba cung bằng nhau ($AC = CD = DB$). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F.

a) So sánh các đoạn thẳng AE và BF.

b) Chứng minh đường thẳng AB song song với đường thẳng CD.

Lời giải

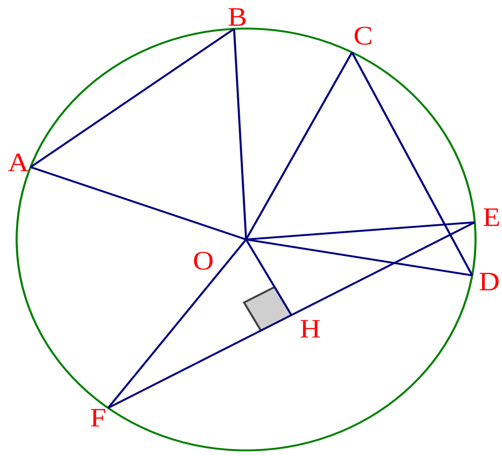


a) Chứng minh được: $\Delta OEA = \Delta OFB \Rightarrow AE = FB$

b) Chứng minh được: $OEF = OCD$, mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị nên $AB//CD$

Bài 5. Cho $(O;R)$ các dây AB, CD, EF có độ dài như sau $AB = R, CD = R\sqrt{2}, EF = R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB, CD, EF.

Lời giải



Ta có $OA = OB = AB(= R) \Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow AOB = 60^0 \Rightarrow sd\,AB = 60^0$

Lại có $OC^2 + OD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2; CD^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

ΔOCD có $OC^2 + OD^2 = CD^2$

Theo định lí Pitago đảo ta có ΔOCD vuông tại $O \Rightarrow sd\,CD = sd\,COD = 90^0$

Vẽ $OH \perp EF$ tại H, suy ra $EH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔOHE vuông tại H, ta có $EH = \dfrac{OE\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta OHE$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow EOH = 60^0$

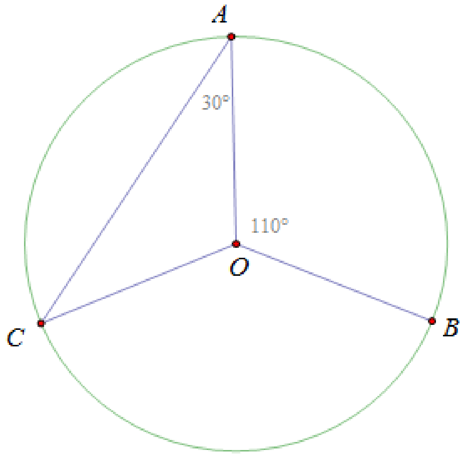
ΔOEF cân tại O (vì $OE = OF$) có OH là đường cao nên cũng là đường phân giác

Do đó $EOH = \dfrac{1}{2}EOF \Rightarrow EOF = 2.60^0 = 120^0$

sđ EF = sđ EOF = 120^0

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB

b) Tính số đo cung nhỏ AC

c) Tính số đo cung lớn BC

Lời giải

a) Tính số đo cung nhỏ AB

Ta có $sd\,AB = AOB = 110^0$ (góc ở tâm chắn cung AB)

b) Tính số đo cung nhỏ AC

Xét tam giác AOB có $OA = OB$ (bán kính)

$\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O $\Rightarrow ACO = CAO = 30^0$

$AOC + ACO + CAO = 180^0$ (tổng 3 góc của tam giác)

$AOC + 30^0 + 30^0 = 180^0 \Rightarrow AOC = 180^0 - \left(30^0 + 30^0\right) = 120^0$

$\Rightarrow sd\,AC = AOB = 120^0$ (góc ở tâm chắn cung AC)

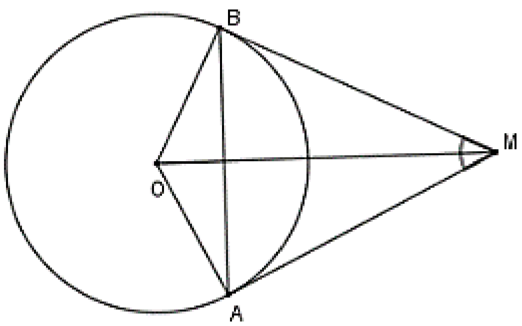
c) Tính số đo cung lớn BC

Ta có $BOC + AOC + AOB = 360^0$

$\Rightarrow BOC + 120^0 + 110^0 = 360^0 \Rightarrow BOC = 130^0$

Bài 7. Cho hai tiếp tuyến tại A và B cuả đường tròn (O) cắt nhau tại M , biết $AMB = 50^0$. Tính số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB.

Lời giải



Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O)

nên OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$;

MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

hay $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{50^0}{2} = 25^0$

Mà tam giác OAM vuông tại A (do MA là tiếp tuyến)

nên $\widehat{MOA} = 90^0 - \widehat{AMO} = 65^0$

Mà OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$

Nên $\widehat{MOB} = \widehat{MOA} = 65^0$

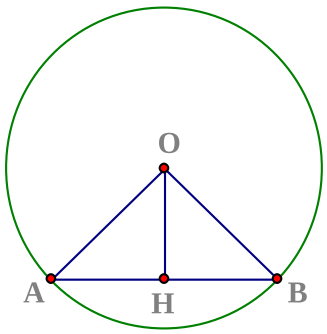
Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{MOB} + \widehat{MOA} = 65^0 + 65^0 = 130^0$

Nên số đo cung nhỏ AB là 130^0

Số đo cung lớn AB là $360^0 - 130^0 = 230^0$

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Vì số đo cung nhỏ bằng nửa số đo cung lớn

$\Rightarrow$ sđ $AB_{nho} = 360^0 : 3 = 120^0 \Rightarrow AOB = 120^0$

ΔAOB cân tại $O \Rightarrow A = B = 30^0$

Kẻ OH vuông góc với AB, ta được: $OH = OA.\sin A = R.\sin 30^0 = \frac{1}{2}R$

$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AB.OH = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

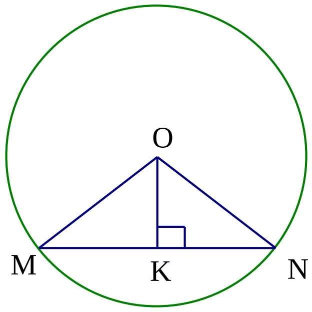
Bài 9. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K. Tính:

a) Độ dài OK theo R.

b) Số đo các góc $MOK; MON$.

c) Số đo cung nhỏ và cung lớn MN.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông OMK, tính được $OK = \dfrac{R}{2}$

b) Tính được $MOK = 60^0; MON = 120^0$

c) Số đo cung nhỏ MN là: $120^0 \Rightarrow$ số đo cung lớn MN là: 240^0

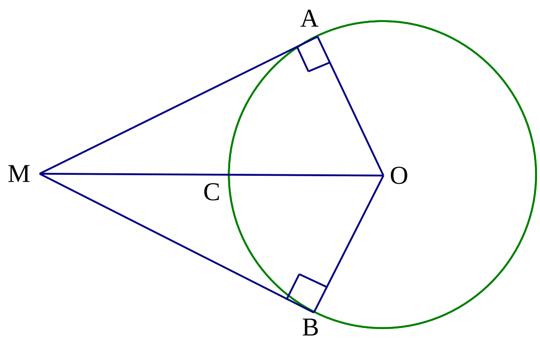
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm) .

a) Tính AOM .

b) Tính AOB và số đo cung nhỏ AB .

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB .

Lời giải



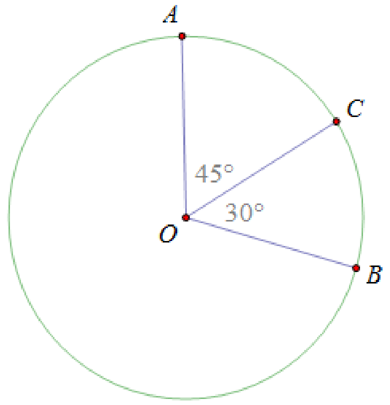
a) Xét tam giác vuông AMO, ta có: $AOM = 60^0$

(Sử dụng tỉ số lượng giác)

b) Tính được: $AOB = 120^0$, sđ $ACB = 120^0$

c) Ta có: $AOC = BOC \Rightarrow AC = BC.$

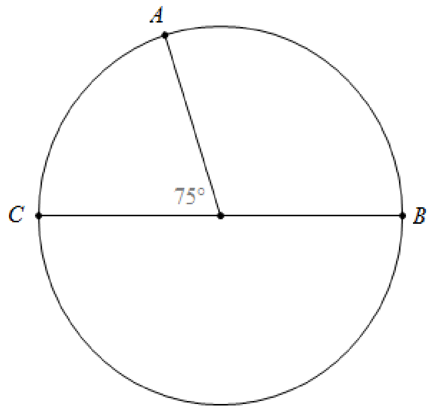
Bài 11. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ BC.

b) Tính số đo cung lớn AB.

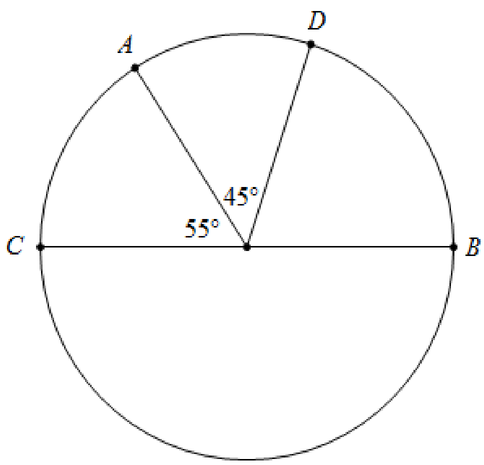
Bài 12. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là điểm trên đường tròn sao cho $AOC = 75^0$.



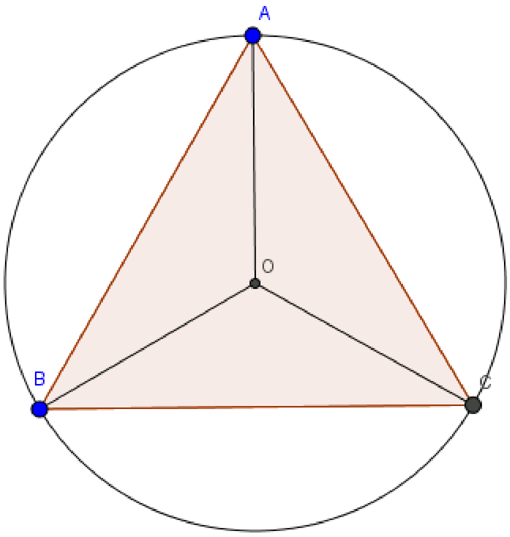
a) Tính số đo cung lớn BC

b) So sánh hai cung nhỏ AC và AB.

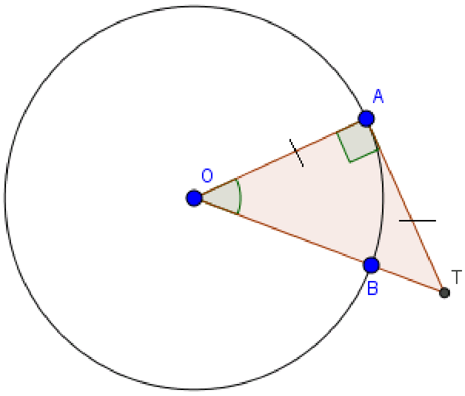
Bài 13. Cho hình vẽ sau, so sánh hai cung nhỏ CD và AB.



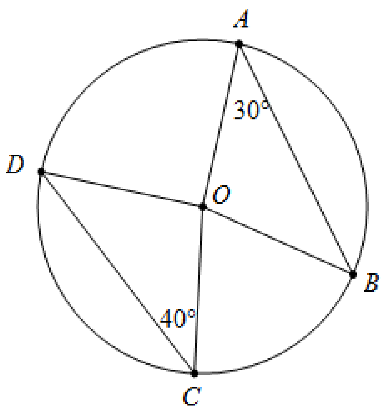
Bài 14. Cho hình vẽ sau, với ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Tính số đo các cung tạo ra trong 3 điểm A, B, C.



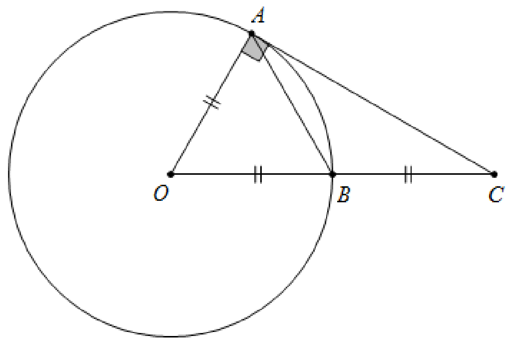
Bài 15. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB và góc ABO .



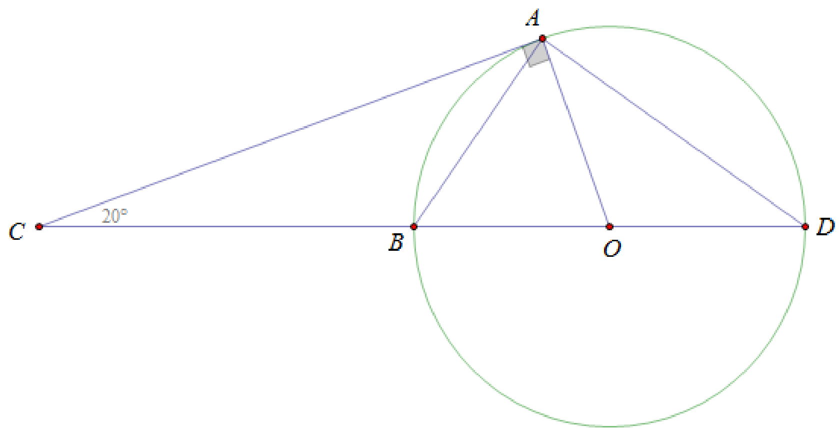
Bài 16. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn CD.



Bài 17. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB.



Bài 18. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính góc ADC .

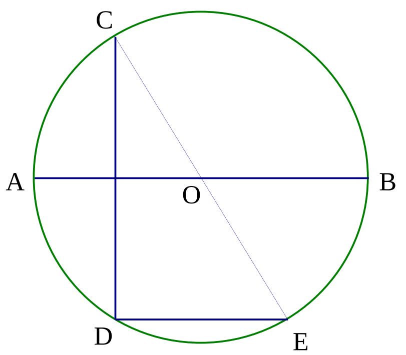
c) So sánh hai cung nhỏ AC và AD.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $AOC = 50^0$ với C nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

a) Tính số đo cung nhỏ BE.

b) Tính số đo cung CBE. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Lời giải



a) Tính được sđ $BE = 50^0$

b) Chứng minh được: sđ $CBE = 180^0 \Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (đpcm)

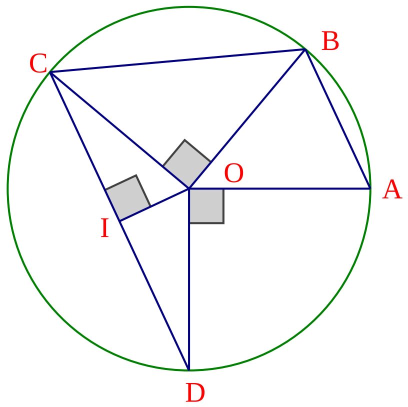
***) Cách khác:** Sử dụng $CDE = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Bài 20. Cho đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A, B, C, D sao cho các cung AB, BC, CD có số đo lần lượt là $60^0; 90^0; 120^0$.

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau ABC; BCD; ACD.

b) Tính độ dài các dây cung AB, BC, CD theo R.

Lời giải



a) Ta có: $AOB = 60^0; BOC = 90^0; COD = 120^0$

$sd\,ABC = sd\,AB + sd\,BC = 60^0 + 90^0 = 150^0$

$sd\,BCD = sd\,BC + sd\,CD = 90^0 + 120^0 = 210^0$

$sd\,ACD = sd\,AB + sd\,BC + sd\,CD = 60^0 + 90^0 + 120^0 = 270^0$

b) Ta có ΔAOB cân lại có $AOB = 60^0 \Rightarrow \Delta AOB$ đều $\Rightarrow AB = OA = R$

Theo định lí Pitago ta có: $BC^2 = BD^2 + OC^2 = 2R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{2}$

$AOD = 360^0 - 270^0 = 90^0 \Rightarrow AD = BC = R\sqrt{2}$

Vậy $OI \perp CD$

Tam giác vuông COI có $COI = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}OC = \frac{R}{2} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Do đó $CD = 2CI = R\sqrt{3}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp

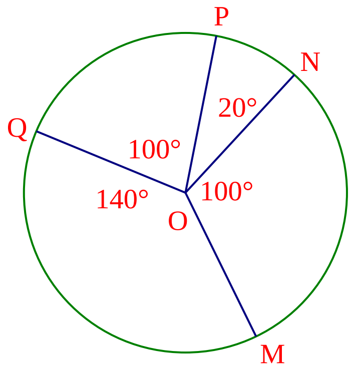
Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

Chú ý: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB//CD \Rightarrow AC = BD$

Bài 1. So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng $MON = 100^0; ONP = 20^0; POQ = 100^0$ $MOQ = 140^0$.

Lời giải



Ta có sđ $MQ = MOQ = 140^0$ (góc ở tâm MOQ chắn cung MQ)

sđ $MN = MON = 100^0$ (góc ở tâm MON chắn cung MN)

sđ $NP = NOP = 20^0$ (góc ở tâm NOP chắn cung NP)

sđ $PQ = POQ = 100^0$ (góc ở tâm POQ chắn cung PQ)

Lại có: $MON = POQ = 100^0 \Leftrightarrow sd\,MN = sd\,PQ \Leftrightarrow MN = PQ$

+ $100^0 < 140^0 \Leftrightarrow MON < MOQ \Leftrightarrow sd\,MN < sd\,MQ \Leftrightarrow MN < MQ$

+ $20^0 < 100^0 \Leftrightarrow NOP < MPN \Leftrightarrow sd\,NP < sd\,MN \Leftrightarrow NP < MN$

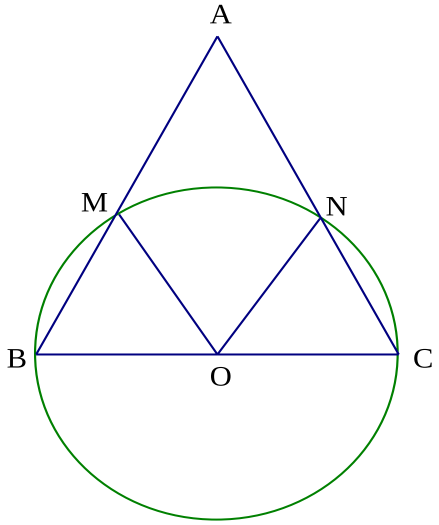
Vậy $NP < MN = PQ < MQ$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh các cung nhỏ BM và CN có số đo bằng nhau.

b) Tính MON, biết $BAC = 40^0$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\Delta BOM = \Delta CON\,(cgc) \Rightarrow BM = CN$

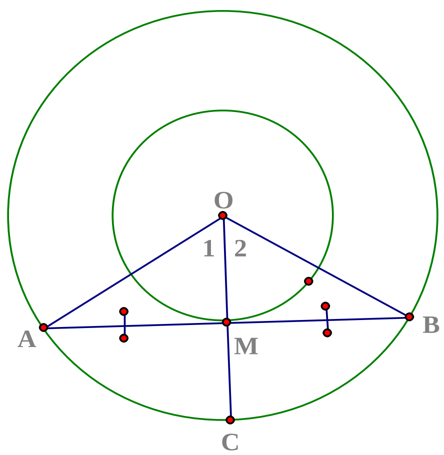
b) Tính được: $MON = 100^0$

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $\left(O;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng: $CA = CB$.

b) Tính số đo hai cung AB.

Lời giải



a) Ta có: $AM \perp OB$ (tính chất hai tiếp tuyến)

ΔAOB cân tại O $\Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow CA = CB$ (hai góc ở tâm bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

b) Ta có: $MA = MB$ (đường kính vuông góc với dây)

$$MA^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow MA = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = R$$

ΔAOB có ba cạnh bằng nhau $\Rightarrow AOB = 60^0 \Rightarrow$ sđ $AB = 60^0 \Rightarrow$ sđ $AB_{lon} = 300^0$.

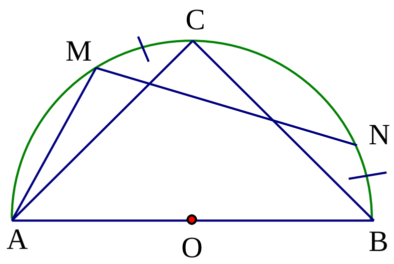
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $CM = BN$. Chứng minh:

a) $AM = CN$.

b) $MN = CA = CB$.

Lời giải



a) Ta có C là điểm chính giữa nửa đường tròn $\Rightarrow AC = BC$

mà $CM = BN \Rightarrow AM = CN$

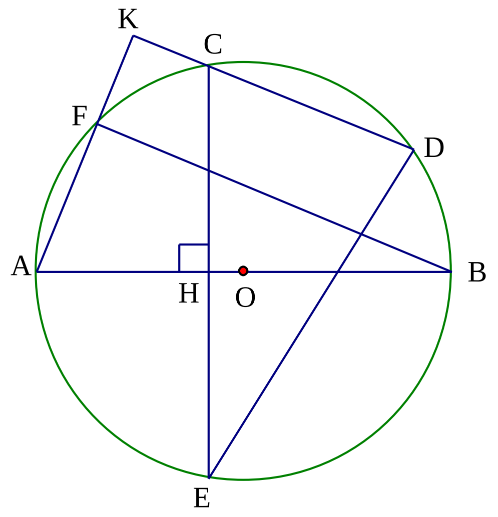
b) Chứng minh được $MN = CA = CB$

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.

Lời giải

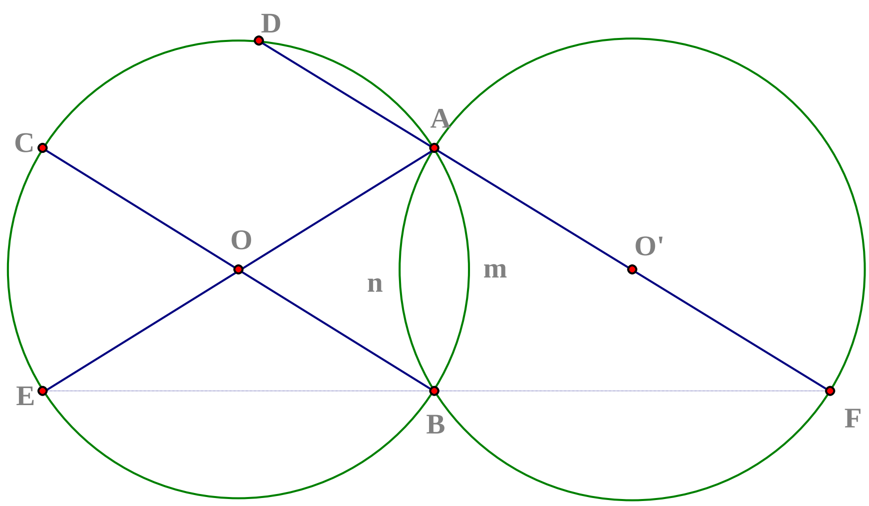


a) Ta có: $\left.\begin{matrix} DK \perp AK \\ BF \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow DK//BF \Rightarrow CF = DB \Rightarrow$ đpcm

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của CE $\Rightarrow BC = BE \Rightarrow BF = DE$

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

Lời giải



+) Dây AB là dây chung của hai đường tròn nên AB căng hai cung nhỏ bằng nhau $\rightarrow AmB = AnB\left(1\right)$

Lại có: $AOB = COE \Rightarrow AmB = CE\left(2\right)$

+) Chứng minh được:

$ABE = ABF = 90^0 \Rightarrow E, B, F$ thẳng hàng

+) $\Delta EAB = \Delta FAB \Rightarrow EB = FB \Rightarrow BO$ là đường trung bình của $\Delta FEA \Rightarrow BC//AD \Rightarrow CD = AmB(3)$

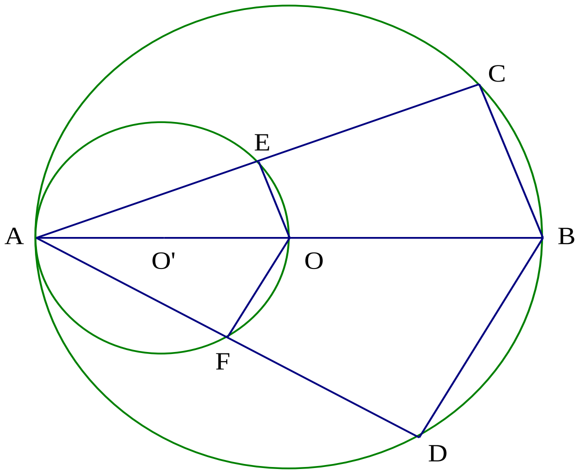
(Hai cung bị chắn giữa hai dây song song). Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow AmB = AnB = CE = CD$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in CD$ và $BC < BD$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:

a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) Số đo các cung AE và AF của đường tròn (O') .

Lời giải



a) Ta có: $OE \perp AC; BC \perp AC \Rightarrow OE//BC$

Xét ΔABC có $OE//BC, AO = OB$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $AC \Rightarrow OE = \frac{1}{2}BC$

Tương tự: $OF = \frac{1}{2}BD$

Mà $BC < BD \Rightarrow OE < OF$

b) Xét tam giác vuông OEA, AFO ta có: $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$

$\Rightarrow AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF \Rightarrow$ sđ $AE >$ sđ AF .

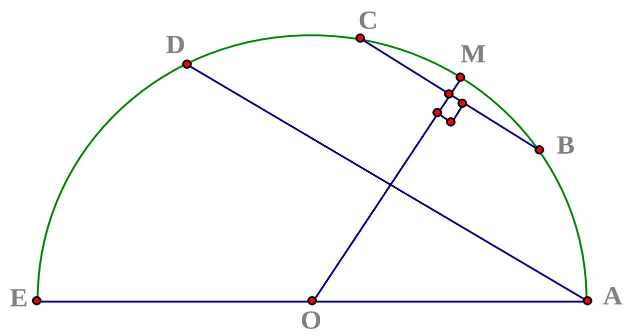
Bài 8. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết $AC = 2AB; AD = 3AB$

a) Chứng minh rằng: $AB = BC = CD$.

b) Chứng minh rằng: $AC = BD$.

c) Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa.

Lời giải



a) $BC = AC - AB = AB; CD = AD - AC = 3AB - 2AB = AB \Rightarrow AB = BC = CD$

b) $\left.\begin{matrix} AB = BC = CD \\ AC = AB + BC \\ BD = BC + CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC = BD$

c) Gọi M là điểm chính giữa cả cung BC $\Rightarrow MB = MC$

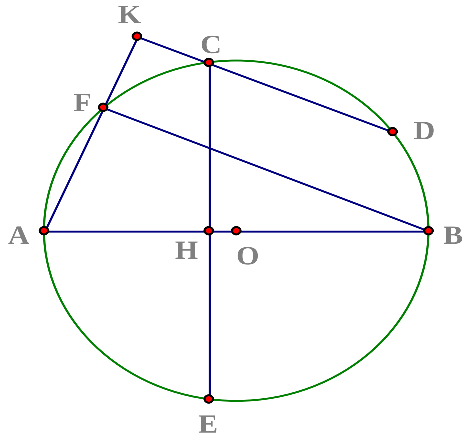
Có: $\left.\begin{matrix} MA = MB + AB \\ MD = MC + CD \end{matrix}\right\} \to MA = MD \Rightarrow dpcm$

Bài 9. Cho đường tròn O, trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D. Kẻ $CH \perp AB$ nó cắt đường tròn tại E. Kẻ $AK \perp DC$ nó cắt đường tròn tại F. Chứng minh rằng

a) $CF = DB$.

b) $BF = DE$.

Lời giải



a) Ta có: $AFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} BF \perp AK \equiv F \\ CD \perp AK \equiv K \end{cases} \Rightarrow BF // CD$

Xét đường tròn (O) có BF // CD $\Rightarrow CF = DB$ (chắn bởi hai dây song song)

b) Ta có: $AB \perp CE \Rightarrow B$ là điểm chính giữa CBE

$\Rightarrow BC = BE \Rightarrow$ sđ BC = sđ BE

mà $CF = BD \Rightarrow$ sđ CF = sđ BD $\Rightarrow$ sđ BC + sđ CF = sđ BE + sđ DB

$\Rightarrow$ sđ BF = sđ DE $\Rightarrow BF = DE \Rightarrow BF = DE$.

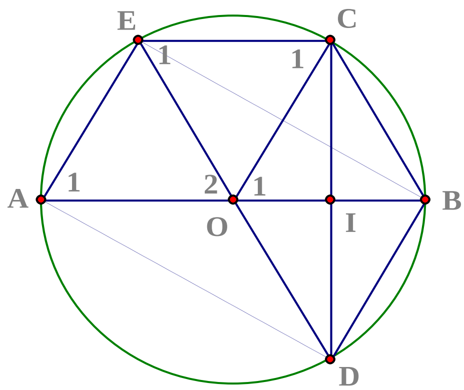
Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD \perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB. Chứng minh rằng:

a) $AE = BC = BD$.

b) E, O, D thẳng hàng.

c) ADBE là hình chữ nhật .

Lời giải



a) AB là trung trực của CD $\Rightarrow BC = BD(1)$

$$+)\ \left.\begin{array}{l}\hat{O}_2 = \hat{E}_1(slt)\\ \hat{O}_1 = \hat{C}_1(slt)\\ \hat{E}_1 = \hat{C}_1(tamgiaccan)\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_1 \Rightarrow AE = BC(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE = BC = BD$

b) ΔCOD cân tại O, OI là đường cao nên là đường phân giác COD

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}COB = DOB\\ BOC = AOE\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}BOD = AOE\\ BOD + DOA = 180^0\end{array}\right\} \Rightarrow DOA + AOE = 180^0 \Rightarrow E, O, D \text{ thẳng hàng (đpcm)}$$

c) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

BÀI 3

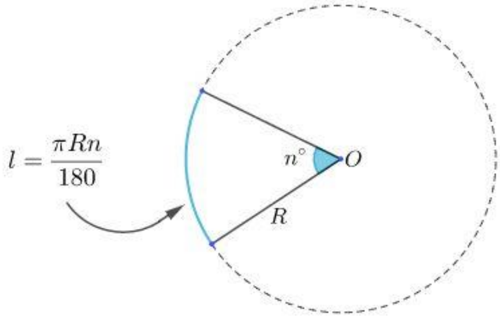
ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

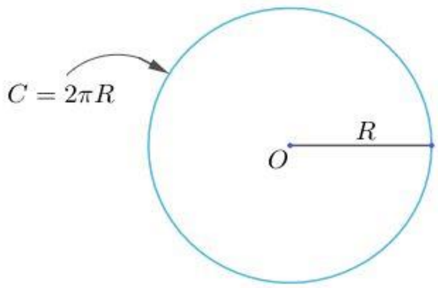
1. Độ dài cung tròn

Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.



Chú ý:

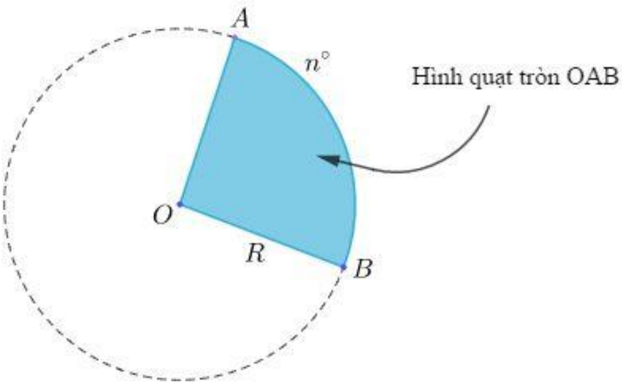
- Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$



2. Hình quạt tròn

Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$

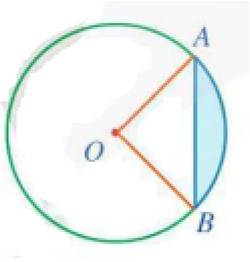


Chú ý:

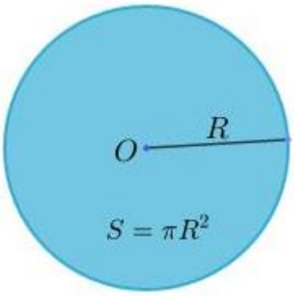
- Gọi l là độ dài cung tròn có số đo n^0 thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^0 là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{l.R}{2}$$

- Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung của đường tròn.



- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$

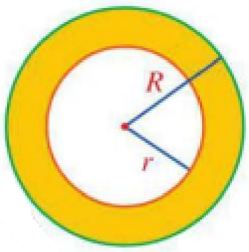


3. Hình vành khuyên

Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ (với $R > r$) có diện tích là:

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$



DẠNG 1

TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$
- Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.
- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, l là độ dài cung tròn có số đo n^0 là: $S = \dfrac{l.R}{2}$
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ có diện tích là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Bài 1. Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimet và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

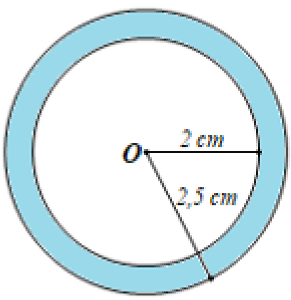
Lời giải

Chu vi của đường tròn là: C = 2π.5 = 10π ≈ 31,4 (cm).

Bài 2. Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

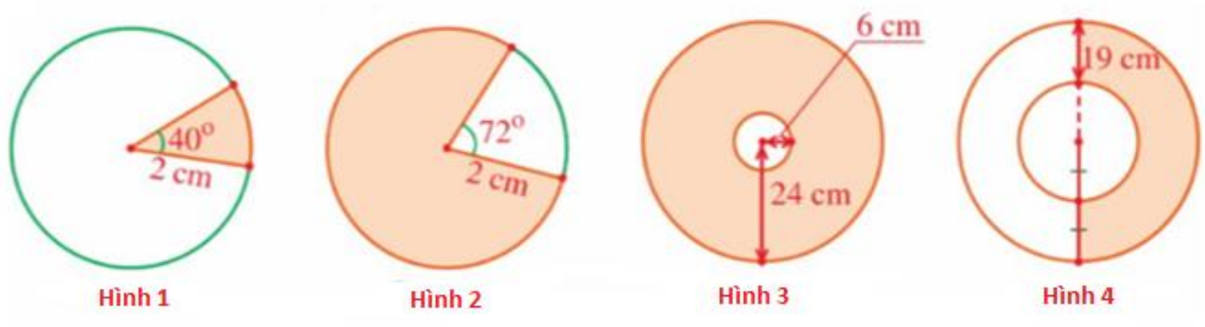
Lời giải

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm O và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm được tô màu xanh như hình vẽ dưới đây:



Diện tích của hình vành khuyên tô màu xanh là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(2,5^2 - 2^2\right) = \dfrac{9\pi}{4}\left(cm^2\right)$

Bài 3. Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



a) Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.

b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2

Lời giải

a)

- Hình 1: Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 40° là: $S = \frac{\pi.2^2.40}{360} = \frac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S = \frac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

- Hình 2: Diện tích hình tròn có bán kính 2 cm là $S_1 = \pi.2^2 = 4\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 72° là: $S_2 = \frac{\pi.2^2.72}{360} = \frac{4\pi}{5}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}\left(cm^2\right)$

- Hình 3: Diện tích phần được tô màu chính là diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm bán kính 24 cm và 6 cm, và bằng: $S = \pi\left(24^2 - 6^2\right) = 540\pi\left(cm^2\right)$

- Hình 4: Đường tròn nhỏ bên trong có bán kính là 19 cm. Đường tròn to bên ngoài có bán kính là 2.19 = 38 cm.

Diện tích phần được tô màu chính là nửa diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính 38 cm và 19 cm, và bằng: $S = \frac{1}{2}\pi\left(38^2 - 19^2\right) = \frac{1083\pi}{2}\left(cm^2\right)$

b) Tính độ dài cung tròn theo công thức $l = \frac{\pi R.n}{180}$.

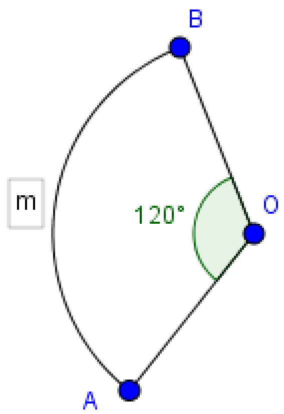
- Hình 1: Số đo cung tròn được tô màu xanh là: 360° – 40° = 320°.

Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l = \frac{\pi.2.320}{180} = \frac{32\pi}{9}(cm)$

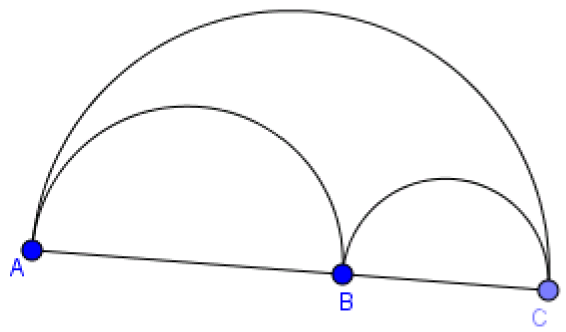
- Hình 2: Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l = \frac{\pi.2.72}{180} = \frac{4\pi}{5}(cm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

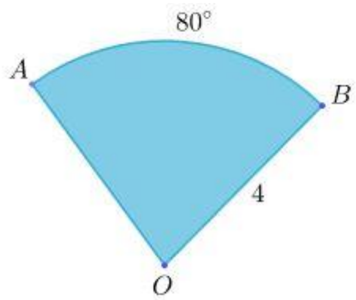
Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, So sánh độ dài cung AmB và đường gấp khúc AOB.



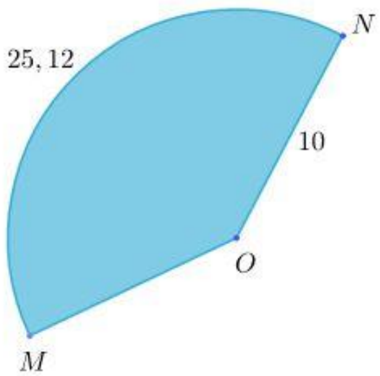
Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, chứng minh độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài nửa đường tròn đường kính AB và BC.



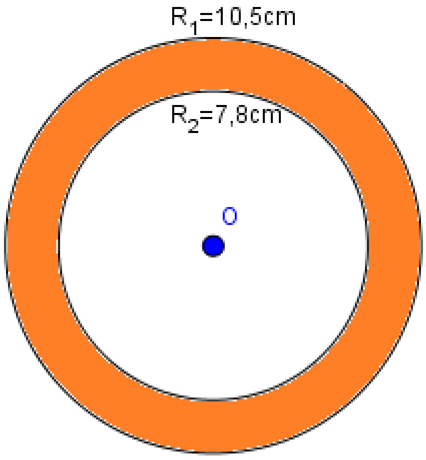
Bài 6. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



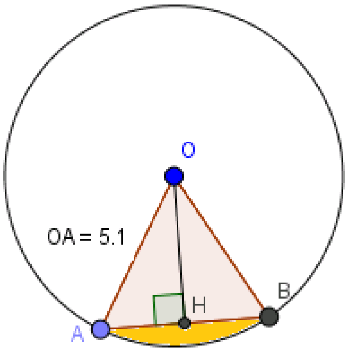
Bài 7. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



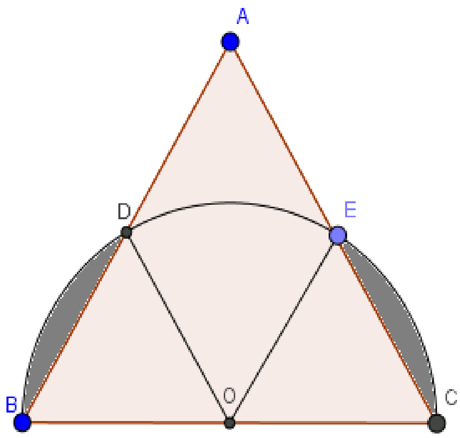
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện hình vành khăn tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính R_1, R_2.



Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân, biết $AOB = 60^0; OA = 5{,}1(cm)$

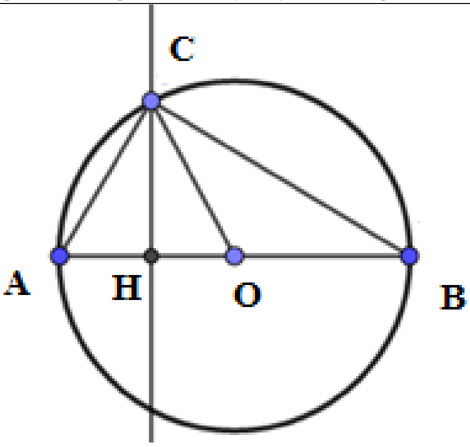


Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân tạo thành từ tam giác đều cạnh 10cm với đường tròn tâm O.



Bài 11. Cho (O) đường kính $AB = 4\sqrt{3}(cm)$, điểm C thuộc (O) sao cho $ABC = 30^0$. Tính diện tích viên phân AC.

Lời giải



Xét đường tròn (O) có: ABC, AOC là góc nội tiếp và góc ở tâm chắn cung AC

$\Rightarrow AOC = 2.ABC = 2.30^0 = 60^0$

Diện tích hình quạt tròn AOC là: $S_{quatAOC} = \dfrac{\pi R^2.60^0}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Xét tam giác AOC có:

$AOC = 60^0$

OA = OC = R

Do đó tam giác AOC là tam giác đều cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác AOC

Ta có: $\sin 60^0 = \dfrac{HC}{OC}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow CH = OC.\sin 60^0 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}(cm)$

Diện tích tam giác AOC là: $S_{AOC} = \dfrac{1}{2}HC.AO = \dfrac{1}{2}\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.R = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}(cm^2)$

Diện tích viên phân AC là :

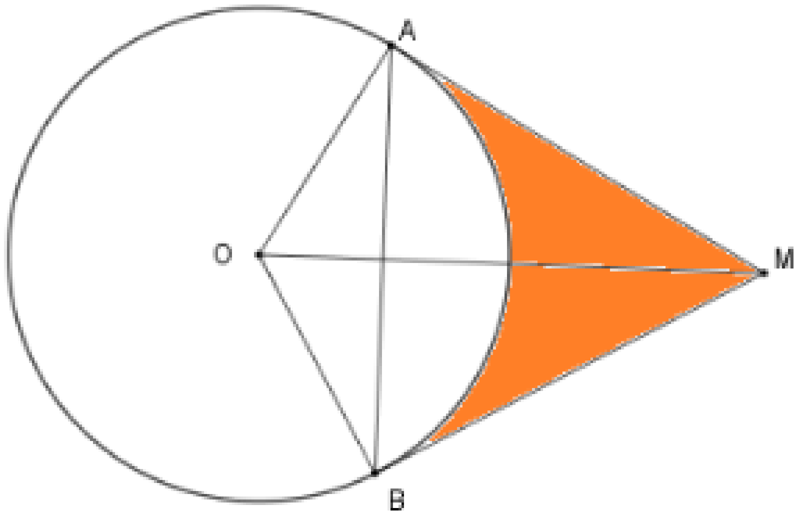
$S_{quatAOC} - S_{AOC} = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2 = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).\left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)(cm^2)$

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA và MB với A, B là các tiếp điểm.

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM; BM và cung nhỏ AB.

Lời giải



a) Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AM vuông góc với OA.

Xét tam giác OAM vuông tại A ta có:

$\cos AOM = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$ (tỉ số lượng giác trong tam giác vuông)

$\Rightarrow AOM = 60^0$.

Mà OM là tia phân giác của góc AOB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AOB = 120^0$

Độ dài cung AB là: $l = \dfrac{120.\pi R}{180} = \dfrac{2\pi R}{3}(cm)$

b) Xét tam giác OAM vuông tại A ta có:

$AM^2 + AO^2 = OM^2$ (định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AM^2 + R^2 = (2R)^2$

$\Leftrightarrow AM = R\sqrt{3}$

Diện tích tam giác OAM là: $S = \dfrac{1}{2}AM.OA = \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \dfrac{R^2.\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị diện tích)

Xét tam giác AOM và tam giác BOM có:

OM chung

AO = BO = R

AM = BM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó ΔAOM = ΔBOM (c – c – c)

$\Rightarrow S_{\Delta AOM} = S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{AMBO} = S_{\Delta AOM} + S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$

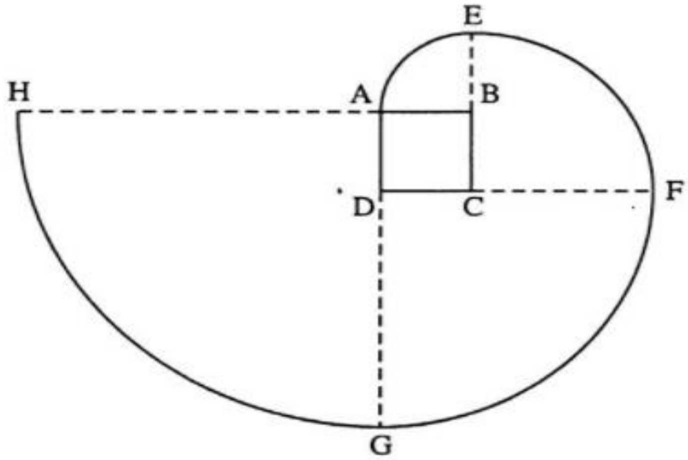
Diện tích quạt tròn AB là:

$S_{quat} = \dfrac{\pi R^2.120^0}{360^0} = \dfrac{\pi R^2}{3}$ (đơn vị diện tích)

Diện tích phần giới hạn bởi tiếp tuyến MA; MB và cung nhỏ AB là:

$S = S_{AMBO} - S_{quat} = R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi R^2}{3} = \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)R^2$ (đơn vị diện tích)

Bài 13. Cho hình vẽ:



Biết AB = 1cm Tính độ dài đường cong AEFGH.

Lời giải

Đường cong AE là cung của đường tròn bán kính AB = 1cm.

Độ dài đường cong AE là: $l_1 = \dfrac{1.90.\pi}{180} = \dfrac{\pi}{2}(cm)$

Đường cong EF là cung của đường tròn bán kính CE = CB + BE = 1 + 1 = 2cm.

Độ dài đường cong EF là: $l_2 = \dfrac{2.90.\pi}{180} = \pi(cm)$

Đường cong FG là cung của đường tròn bán kính DF = DC + CF = 1 + 2 = 3cm.

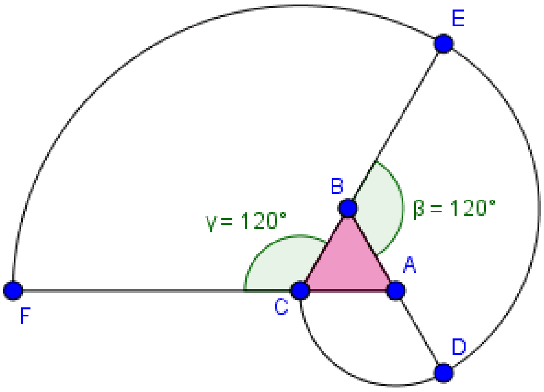
Độ dài đường cong FG là: $l_3 = \dfrac{3.90.\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{2}(cm)$

Đường cong GH là cung của đường tròn bán kính AG = AD + DG = 1 + 3 = 4cm

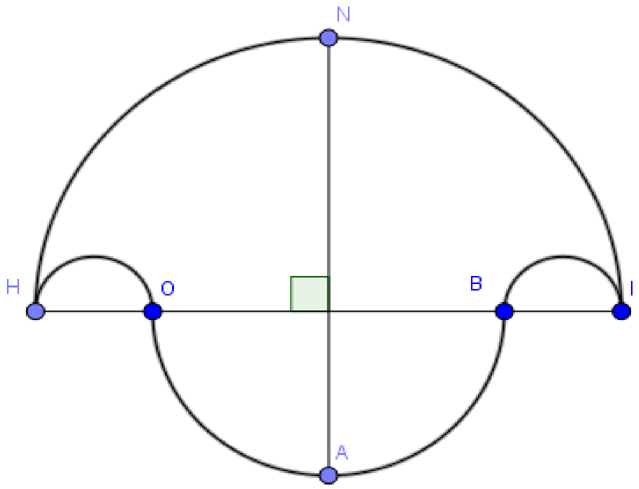
Độ dài đường cong HG là: $l_4 = \dfrac{4.90.\pi}{180} = 2\pi(cm)$

Độ dài đường cong AEFGH là: $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 5\pi(cm)$

Bài 14. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình quạt ACD, biết $AB = 5(cm)$.



Bài 15. Hình vẽ sau tạo thành từ các cung tròn của các đường tròn đường kính HI, HO, OB. Tính diện tích hình HOABINH, biết $HI = 20(cm), BI = 2(cm)$.



DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150°.

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

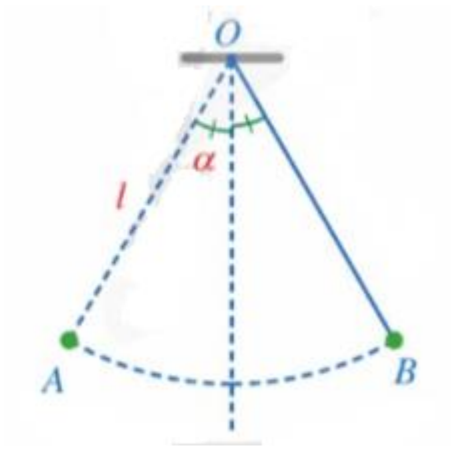
Lời giải

a) Diện tích hình quạt đó là: $l = \dfrac{\pi.2^2.150}{360} = \dfrac{5\pi}{3}(dm)$

b) Ta có $S = \dfrac{lR}{2} \Rightarrow l = \dfrac{2S}{R} = \dfrac{2.\dfrac{5\pi}{3}}{2} = \dfrac{5\pi}{3}(dm)$

Vậy độ dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó là: $\dfrac{5\pi}{3}(dm)$.

Bài 2. Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B *(Hình vẽ)*. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng $l = 2(cm)$ và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha = 15^0$.



Lời giải

Ta có $AOB = 2.\alpha = 2.15^0 = 30^0$ là số đo của cung AB.

Độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180} = \dfrac{\pi.2.30}{180} = \dfrac{\pi}{3}(cm)$

Bài 3. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng 3,3 vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?

Lời giải

Chu vi của bánh xe là: $C = 650\pi$ (mm).

Khi người đi xe đạp 10 vòng thì xe đạp di chuyển được quãng đường bằng:

$C = 650\pi \cdot 3{,}3 \cdot 10 = 21\,450\pi \approx 6\,738{,}72$ (mm) $= 6{,}738$ (m).

Vậy chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài khoảng 6,738 mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục.

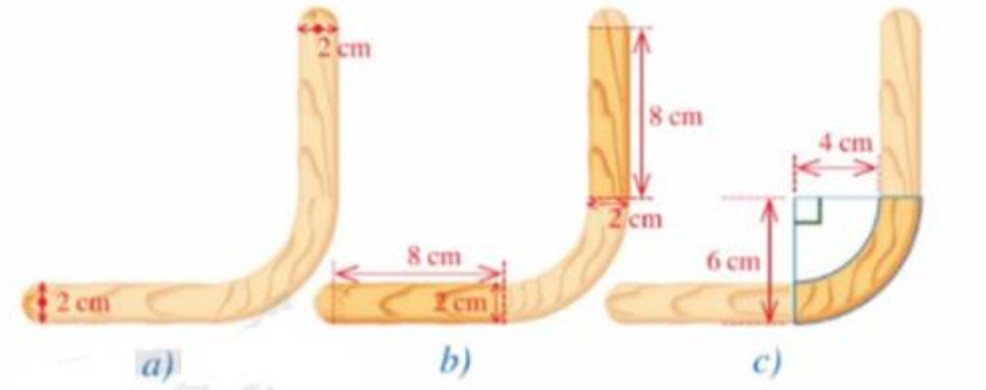
Bài 4. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

Lời giải

Diện tích hình vành khuyên bên trong là: $S_1 = \pi(18^2 - 15^2) = 99\pi$ (cm^2).

Diện tích hình vành khuyên bên ngoài là $S_1 = \pi(24^2 - 21^2) = 135\pi$ (cm^2).

Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



Lời giải

Tổng diện tích hai nửa hình tròn đường kính 2 cm (bán kính 1 cm) chính là diện tích của một hình tròn bán kính 1 cm, và bằng: $S_1 = \pi.1^2 = \pi\left(cm^2\right)$

Tổng diện tích hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm là: $S_2 = 2.2.8 = 32\left(cm^2\right)$

Diện tích một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm là: $S_3 = \frac{1}{4}\pi\left(6^2 - 4^2\right) = 5\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó là: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi + 32 + 54 = 32 + 6\pi\left(cm^2\right)$

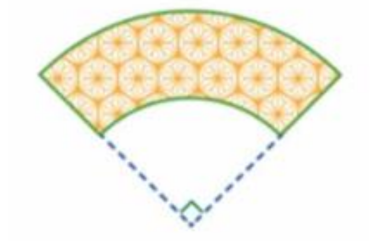
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Mặt đĩa CD ở *Hình 93* có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5 cm và 6 cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Diện tích mặt đĩa CD có dạng hình vành khuyên là: $S = \pi(6^2 - 1{,}5^2) = 33{,}75\pi \approx 106$ (cm^2).

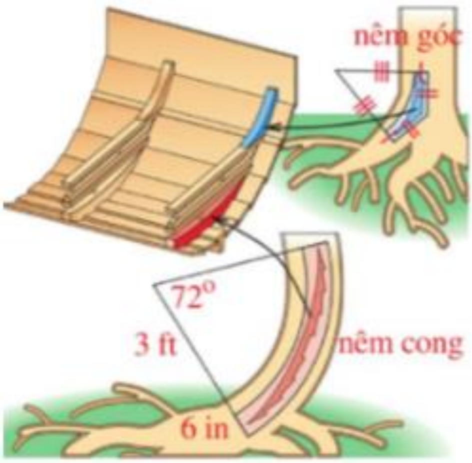
Bài 7. Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 3 dm và 5 dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



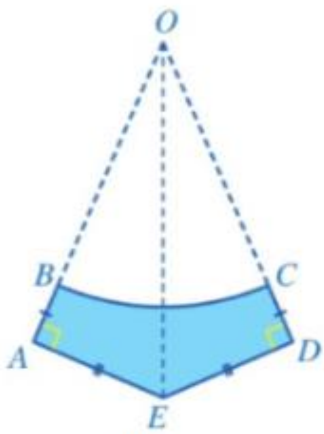
Lời giải

Diện tích mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên là: $S_3 = \frac{1}{4}\pi\left(5^2 - 3^2\right) = 4\pi \approx 12,6\left(dm^2\right)$

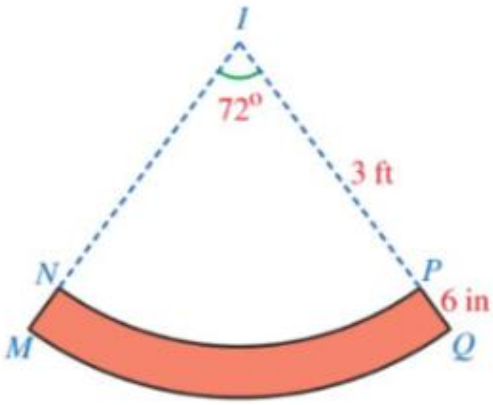
Bài 8. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 1*). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (*Hình 2*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 3*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 3*.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Lời giải

Đổi 3ft = 91,44 cm; 6 in = 15,24 cm.

a) Bán kính IQ là 91,44 + 15,24 = 106,68 (cm).

Diện tích của nêm cong MNPQ là: S = π(106,68^2 – 15,24^2) = 11148,3648π (cm^2) ≈ 35 024 (cm^2).

b) Diện tích nêm góc ABCD là:

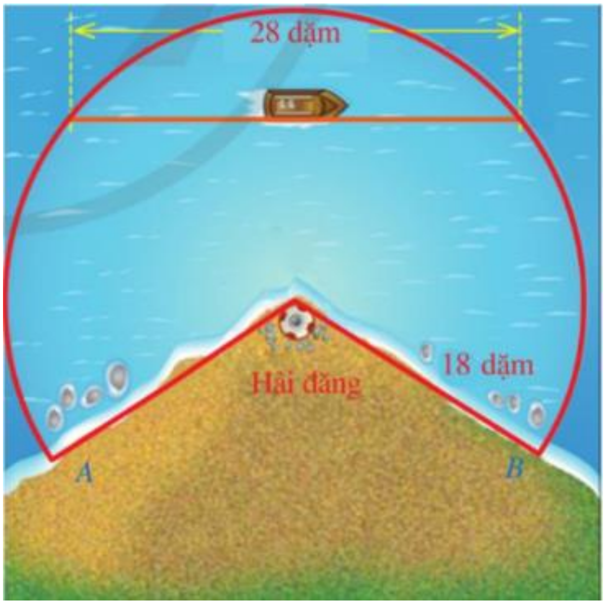
$$S = 2S_{\Delta AOE} - S_{hinhquatOBC} = 2.\frac{1}{2}OA.AE - \frac{\pi.OB^2.sđ\,BC}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.BOC}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.2AOE}{360}$$

Xét ΔOAE vuông tại A, ta có: $AE = OA.\tan AOE$

Do đó $S = OA.OA.\tan AOE - \frac{\pi.OB^2.2AOE}{360} = OA^2.\tan AOE - \frac{\pi.OB^2.2AOE}{360}$

Vậy để tính được diện tích của nêm góc ABCD, ta cần biết những kích thước: OB, OA và số đo AOE.

Bài 9. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.



a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

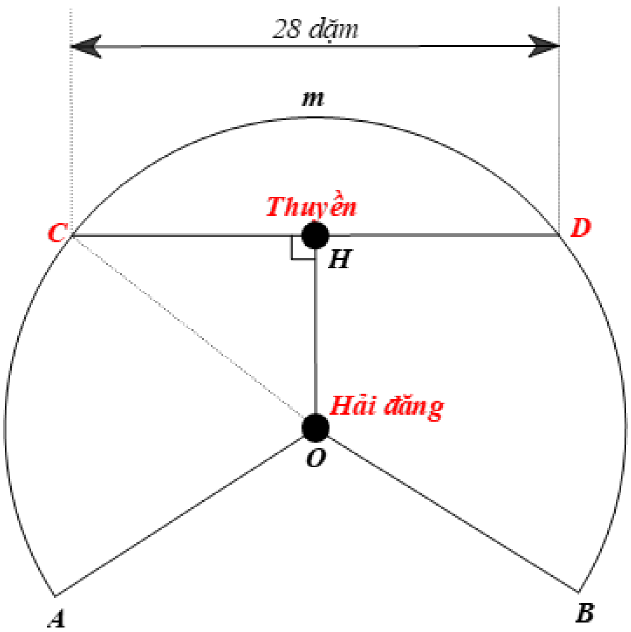
b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đổi 1 dặm = 1 609 m = 1,609 km.

a) Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng là: $S = \dfrac{\pi.(18.1,609)^2.245}{360} \approx 1793\left(km^2\right)$

b) Khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến ngọn hải đăng chính là đoạn thẳng vuông góc OH từ ngọn hải đăng (điểm O) đến dây cung CD được mô tả bởi hình vẽ sau:



Xét đường tròn (O) có OH $\perp$ CD tại H nên H là trung điểm của CD.

Khi đó $CH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.28 = 14\left(km^2\right)$ (dặm).

Xét ΔOHC vuông tại H, theo định lí Pythagore, ta có: $OC^2 = OH^2 + CH^2$

Suy ra $OH^2 = OC^2 - CH^2 = 18^2 - 14^2 = 128$.

Do đó $OH = \sqrt{128} \approx 11$ (dặm).

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ thuyền đến ngọn hải đăng khoảng 11 dặm.

BÀI 4

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

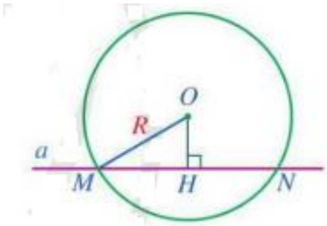
1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

a. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một giao điểm.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

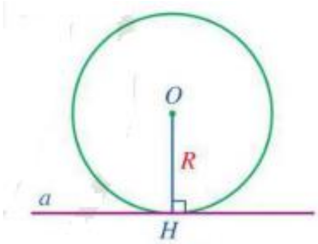


b. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung được gọi là **tiếp điểm**.

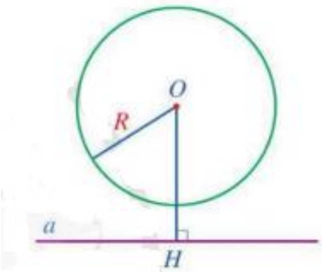
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.



c. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

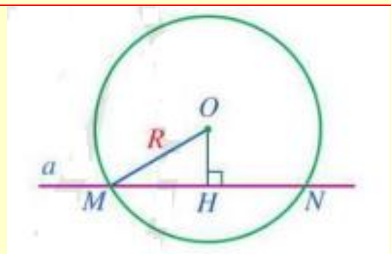
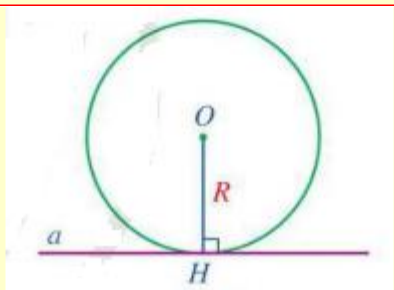
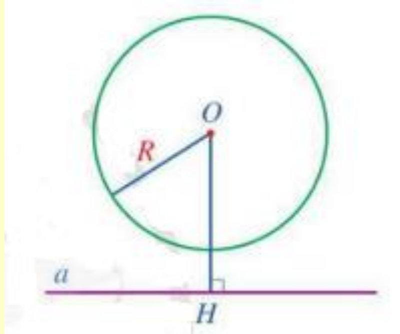
Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



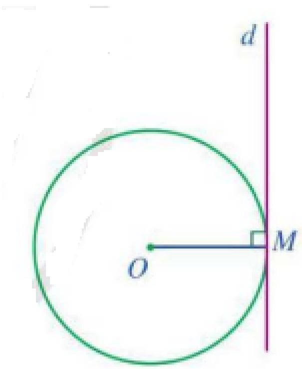
Bảng tóm vị trí tương đối đường thẳng và đường tròn

(d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O;R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O;R)$	

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.



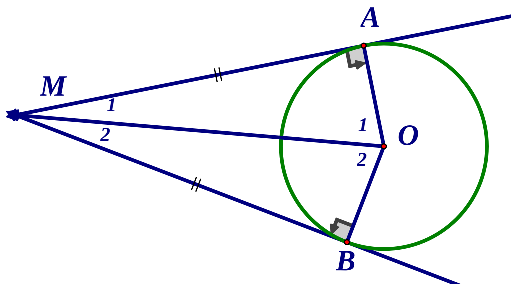
Chú ý: Ta có tính chất của tiếp tuyến như sau:

- Tiếp tuyến của một đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.
- Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến tiếp tuyến luôn bằng bán kính của đường tròn đó.

3. Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn

Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

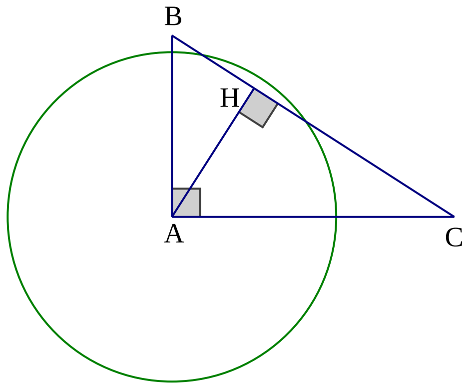


CHỦ ĐỀ 1

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Lời giải



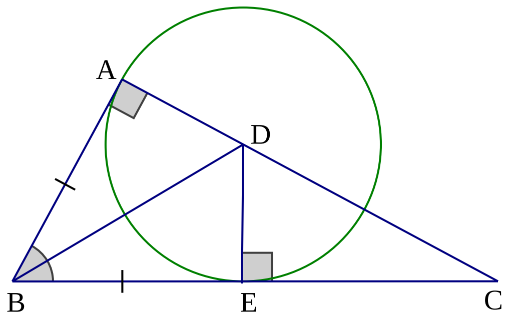
Vẽ AH là đường cao của tam giác vuông ABC

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \Rightarrow AH = 2,4cm < 2,8 \left(d < r\right)$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn $\left(A; 2,8cm\right)$ cắt nhau.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA

Lời giải



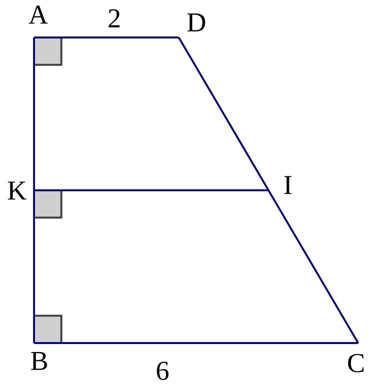
Vẽ $DE \perp BC \left(E \in BC\right)$

D thuộc tia phân giác $ABC; DA \perp AB, DE \perp BC \Rightarrow DE = DA$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA tiếp xúc nhau.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $A = B = 90^0$, $AD = 2cm, BC = 6m, CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Lời giải



Gọi I,K lần lượt là trung điểm của CD và AB

Ta có: IK là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IK = \dfrac{AD+BC}{2} = 4(cm)$

Lại có: $AD//IK, AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB; IK = \dfrac{CD}{2}(=4cm), IK \perp AB$

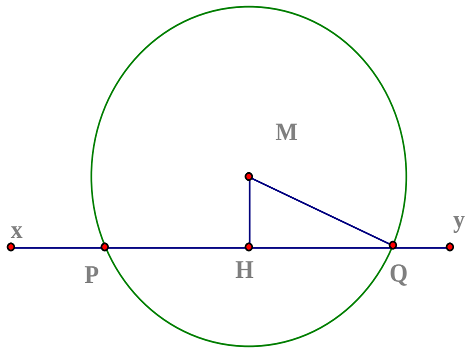
Do đó AB tiếp xúc với đường tròn tâm I đường kính CD.

Bài 4. Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6cm, vẽ đường tròn $(M;10cm)$

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau

b) Gọi hai giao điểm là P và Q. Tính PQ

Lời giải



a) Kẻ $MH \perp xy = H \Rightarrow MH$ là khoảng cách từ M đến xy

$$\Rightarrow \begin{cases} MH = 6cm \\ R = 10cm \end{cases} \Rightarrow MH < R \Rightarrow xy \text{ cắt } (O;10cm) \text{ tại } P \text{ và } Q$$

b) Xét tam giác PMQ cân tại M và $MH \perp PQ$ nên MH cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HP = HQ = \frac{1}{2}PQ$$

$$\Rightarrow PQ = 2.HQ$$

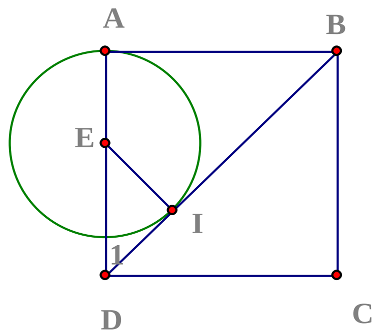
Xét $\Delta MHQ(H = 90^0) \Rightarrow HQ = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = 8cm \Rightarrow PQ = 16(cm)$

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E.

a) So sánh: AE, EI, ID

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E; EA)$

Lời giải



a) Ta có : $\Delta AEB = \Delta IEB(ch - cgv) \Rightarrow AE = EI(1)$

$\Delta EID(\hat{I} = 90^0), D_1 = 45^0 \Rightarrow$ vuông cân $\Rightarrow IE = ID(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AE = EI = ID$

b) Ta lại có $EI = EA \Rightarrow I \in (E; EA) \Rightarrow R = EI$

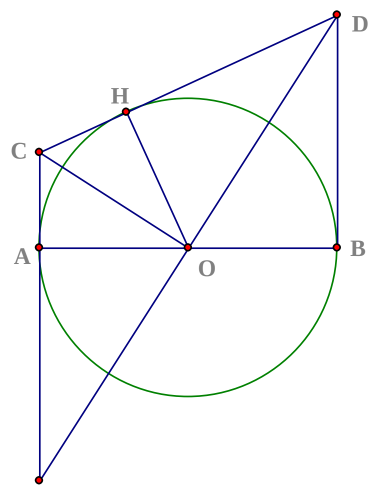
mặt khác: $EI \perp BD \Rightarrow d = EI \Rightarrow d = R \Rightarrow$ đường thẳng BD tiếp xúc với $(E; EA)$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $COD = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)

Lời giải



a) Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

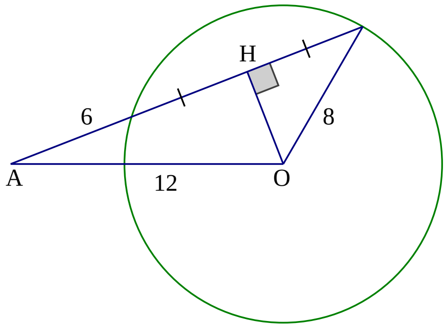
$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow E = D; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O). Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;8cm)$ sao cho $OA = 12cm$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30^0. Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax. Xét vị trí tương đối của tia Ax và đường tròn (O).

Lời giải



Từ ΔAOH vuông tại H, ta có: $OH = OA.sinA = 12.sin30^0 = 12.0,5 = 6(cm)$

$\Rightarrow OH < R$ (bán kính)

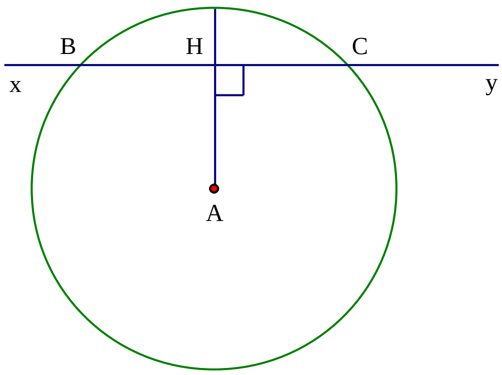
Vậy tia Ax và đường tròn (O) cắt nhau tại hai điểm.

Bài 8. Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B,C. Tính độ dài đoạn thẳng BC

Lời giải



a) Kẻ $AH \perp xy \Rightarrow AH = 12cm < R \Rightarrow (A)$ cắt xy tại hai điểm B và C

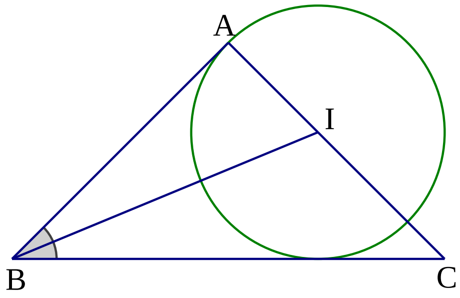
b) Tính được : $BC = 2.HC = 10cm.$

Bài 9. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tia phân giác BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I;IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA theo a.

Lời giải



a) Ta có $IA \perp BA \Leftrightarrow IA = d(I, BA) \Leftrightarrow (I, IA)$ tiếp xúc với BA tại A

mặt khác BI là tia phân giác của ABC

Do đó đường tròn (I, IA) tiếp xúc với BC

b) Áp dụng tính chất tia phân giác trong ΔABC, ta có:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{AB.\sqrt{2}}$$

$$\frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}.IA = a - IA$$

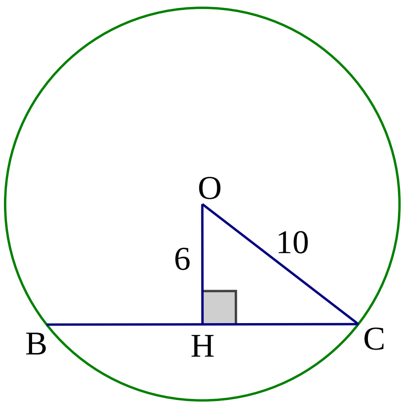
$$IA = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Bài 10. Cho điểm (O) cách đường thẳng a là $6cm$. Vẽ đường tròn $(O, 10cm)$

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC

Lời giải



a) Kẻ $OH \perp a \Rightarrow OH = 6cm$ là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a

Do $6 < 10 \Rightarrow (O)$ có hai giao điểm với đường thẳng a

b) Vì $OH \perp a \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2}$

Áp dụng hệ thức pythagore vào ΔOHC vuông tại H có cạnh huyền $OC = 10cm$, ta được:

$OC^2 = CH^2 + HO^2$

$10^2 = CH^2 + 6^2$

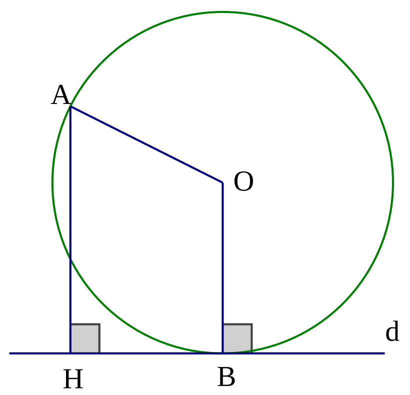
$CH^2 = 8^2$

$CH = 8(cm)(CH > 0)$

Vậy $BC = 16(cm)$.

Bài 11. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. A là điểm trên (O). Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất

Lời giải



Gọi H, B lần lượt là hình chiếu của A, O trên đường thẳng d, ta có: B cố định

$AH \perp HB \Rightarrow AH \le AB$

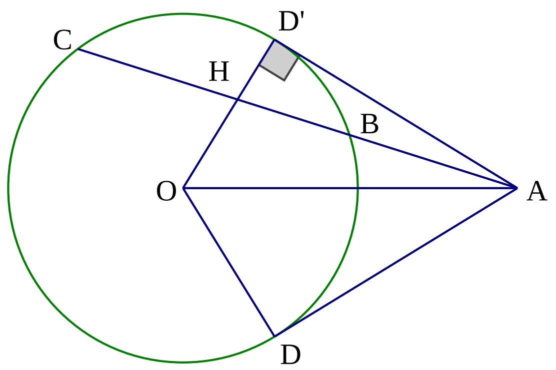
Xét ba điểm OA, B ta có: $AB \le OA + OB \Rightarrow AH \le R + OB, R + OB$ không đổi

Dấu ‘‘='' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} H \equiv B \\ O\, nam\, giua\, A\, va\, B \end{cases}$

Vậy khi A là giao điểm của tia đối tia OB và đường tròn (O) (B là hình chiếu của (O) trên d) thì khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng d qua A, gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB + AC$ lớn nhất

Lời giải



Vẽ đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn tại D và D', ta có D và D' cố định

- Nếu d trùng với AD hoặc AD'

Ta có các điểm B,C,D trùng nhau nên: $AB+AC=2AD=2AD'$

- Nếu d không trùng với AD hoặc AD'

Vẽ $OH\perp d\left(H\in d\right)$. Ta có H là trung điểm của BC (định lý đường kính vuông góc với dây cung) và có

$OH<R\Rightarrow AB+AC=AH+HB+AH-HC=2AH$

Xét ΔOAH vuông tại $H\Rightarrow OH^2+AH^2=OA^2$

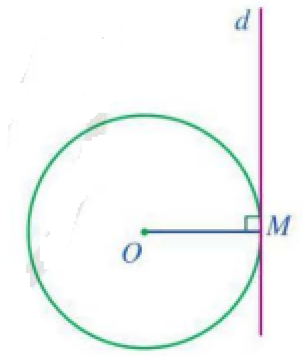
Xét ΔOAD vuông tại $D\Rightarrow OD^2+AD^2=OA^2$

Do đó : $OH^2+AH^2=OD^2+AD^2$, mà $OH<OD=R\Rightarrow AH>AD\Rightarrow AB+AC>2AD$

Vậy khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn thì $AB+AC$ nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 2
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



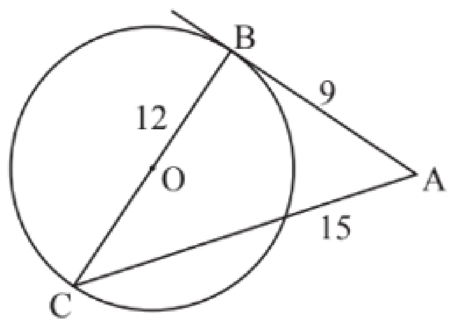
Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm M, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh M nằm trên (O) và OM vuông góc với d tại M.

Cách 2: Kẻ OH vuông góc với d tại H và chứng minh $OH = OM = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến d' của (O) và chứng minh d trùng với d'.

Bài 1. Trong hình vẽ bên dưới, AB = 9, BC = 12, AC = 15 và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải

Xét ΔABC có:

$AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$;

$AC^2 = 15^2 = 225$.

Do đó $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại B.

Suy ra AB ⊥ BC hay AB ⊥ OB.

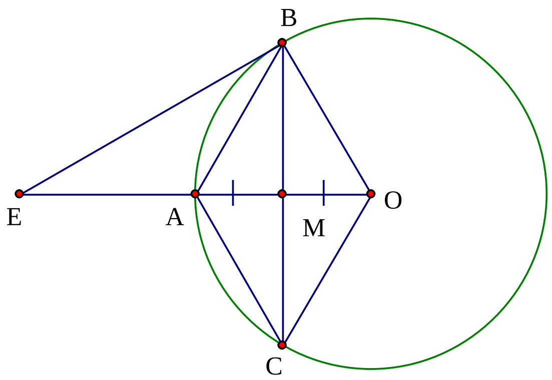
Xét đường tròn (O) có AB $\perp$ OB tại B thuộc đường tròn (O) nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OACB$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Lời giải



a) OA vuông góc với BC tại $M \Rightarrow M$ là trung điểm của $BC \Rightarrow \Diamond OCAB$ là hình thoi

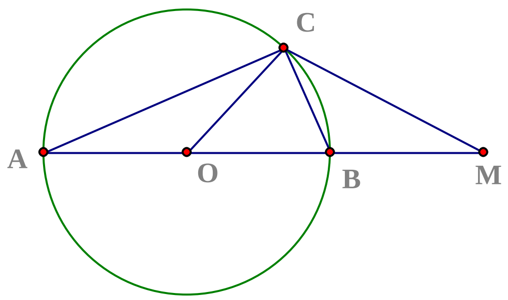
b) Tính được: $BE = R\sqrt{3}$

Bài 3. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $CAB = 30^0$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng :

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) $MC^2 = 3R^2$.

Lời giải



a) Ta có: $ACB = 90^0 \Rightarrow ABC = 60^0 \Rightarrow \Delta BOC$ đều $\Rightarrow BC = OB = BM = R$

Vậy ΔOCM vuông tại C (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) $\Rightarrow OM \perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) ΔBMC cân tại $B \Rightarrow BCM = M = 30^0$

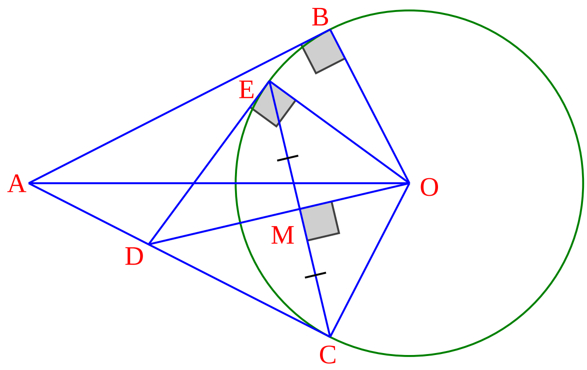
$$\Delta BCM \backsim \Delta CAM\,(gg) \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MB = 3R^2$$

Bài 4. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$.

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O).

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOAB, có: $OC = OB(=R); OA: chung; AC = AB(gt) \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OAB(ccc)$

$\Rightarrow OCA = OBA = 90^0 \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) $OD \perp EC(gt)$ và ΔCOE cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm của EC

OD là đường trung trực của đoạn thẳng $EC \Rightarrow DE = DC \Rightarrow OED = OCD = 90^0$ (tính chất đối xứng trục)

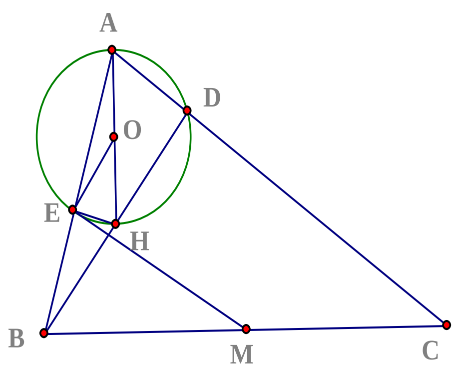
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

Lời giải



a) Xét $\Delta ADH\left(H=90^0\right)\Rightarrow D\in\left(O;\dfrac{AH}{2}\right);\Delta AEH\left(E=90^0\right)\Rightarrow E\in\left(O;\dfrac{AH}{2}\right)$

. Vậy 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Xét $\Delta BEC\left(E=90^0\right)$, M là trung điểm của $BC\Rightarrow EM=MC\Rightarrow\Delta EMC$ cân tại M $\Rightarrow CEM=ECM$

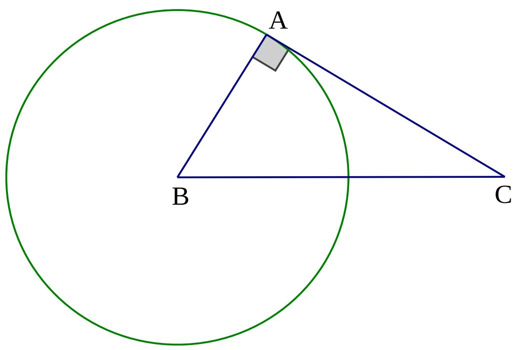
Ta lại có ΔAOE cân tại $O\Rightarrow AEO=EAO$

Mặt khác $EAO=EAM$ (cùng phụ với ABC) và $AEO+OEC=90^0\Rightarrow OE\perp ME\Rightarrow ME$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác ΔABC có $AB=6cm, AC=8cm, BC=10cm.$ Vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Lời giải



Xét ΔABC có:

$BC^2=100$

$AB^2+AC^2=36+64=100$

Do đó $BC^2=AB^2+AC^2$

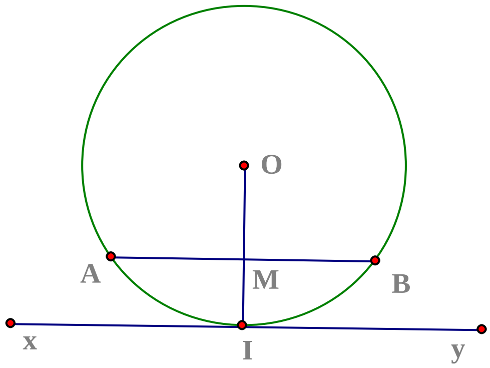
Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại A.

$\Rightarrow BAC=90^0\Rightarrow BA\perp AC$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 7. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy//AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải

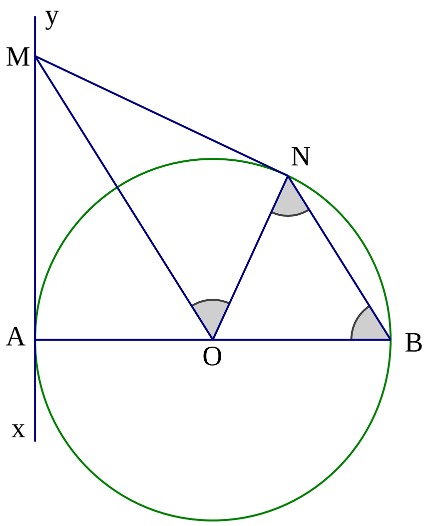


Xét đường tròn (O), ta có $OI \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây)

Mà $xy//AB \Rightarrow OI \perp xy \Rightarrow xy$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy. Trên xy lấy một điểm M, kẻ dây cung BN song song với OM. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Vì $BN//OM \Rightarrow AOM = ABN; MON = ONB$

Mà ΔOBN cân tại $O \Rightarrow OBM = ONB \Rightarrow MON = AOM$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta ONM \left(OA = ON = R; AOM = MON; OM : chung\right) \Rightarrow ONM = OAM$

Ta lại có: $OAM = 90^0$ (vì xy là tiếp tuyến tại A), nên ta có: $ONM = 90^0 \Leftrightarrow MN \perp ON$

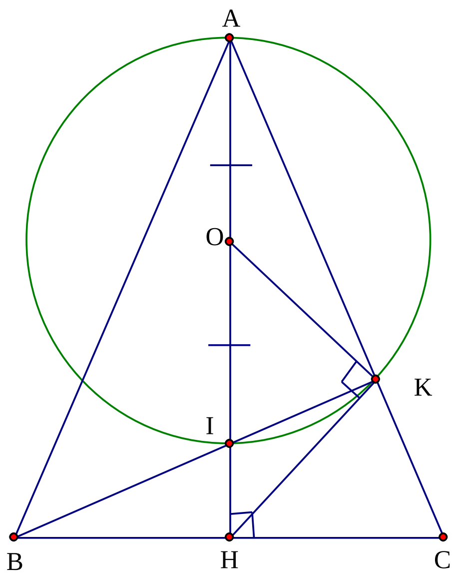
Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 9. Cho ΔABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K.

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Lời giải



a) Chứng minh được: $BKA = 90^0$

b) Gọi O là trung điểm của AI. Ta có:

- $OK = OA \Rightarrow OKA = OAK$

- $OAK = HBK$ (cùng phụ với ACB)

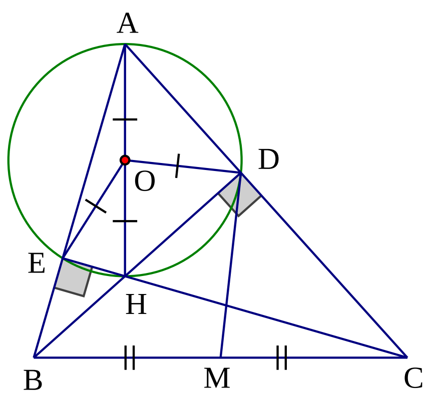
$HB = HK \Rightarrow HBK = HKB \Rightarrow OKA = HBK \Rightarrow HKO = 90^0$

Bài 10. Cho ΔABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của AH

Xét ΔADH và ΔAEH vuông tại D và E ta có: $OD = OE = OA = OH = \frac{1}{2}AH$

Suy ra bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Tam giác DBC vuông tại D có DM là đường trung tuyến nên $MD = MB = \frac{1}{2}BC$

Ta có: $ODA = OAD$ (ΔOAD cân)

$OAD = DBC$ (phụ với ACB)

$DBC = BDM$ (Vì ΔMBD cân)

Do đó: $ODA = BDM$

Ta có: $ODA + ODB = 90^0\,(BD \perp AC) \Rightarrow BDM + ODB = 90^0\,(ODA = BDM)$

Hay $ODM = 90^0 \Rightarrow MD \perp OD$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

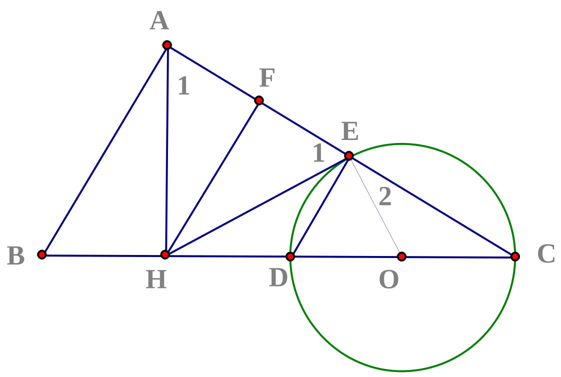
Tương tự ta chứng minh được ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính HE.

Lời giải



a) Ta có E thuộc đường tròn $(O) \Rightarrow DEC = 90^0 \Rightarrow DE // AB$

+ Gọi F là trung điểm của $AE \Rightarrow HF$ là đường trung bình của hình thang $ABDE \Rightarrow HF \perp AE \Rightarrow \Delta AHE$ cân tại $H \Rightarrow A_1 = E_1$

+Ta có: c cân tại

$O \Rightarrow E_2 = C \Rightarrow E_1 + E_2 = A_1 + C = 90^0 \Rightarrow HEO = 90^0 \Rightarrow HE \perp OE$ (đpcm)

b) Xét $\Delta ABC(A = 90^0) \Rightarrow BC = 17cm$

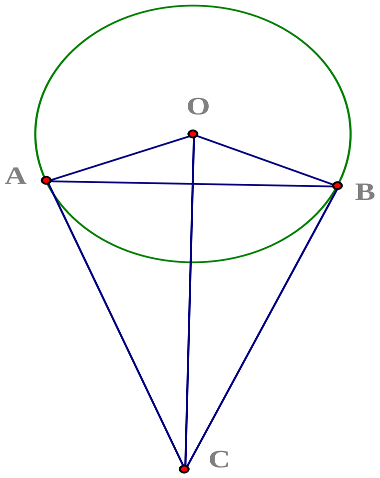
Ta có: $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = HE = \dfrac{120}{7}(cm)$

Bài 12. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn .

b) Cho bán kính của (O) bằng $15cm$ và dây $AB = 24cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOBC, có :

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OC : chung \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC(cgc) \Rightarrow OBC = OAC = 90^0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Xét $OBC; \Delta OBI(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow OI^2 = OB^2 - BI^2 \Rightarrow OI = 9cm$, áp dụng

Xét $\Delta OBC\left(B = 90^0\right)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

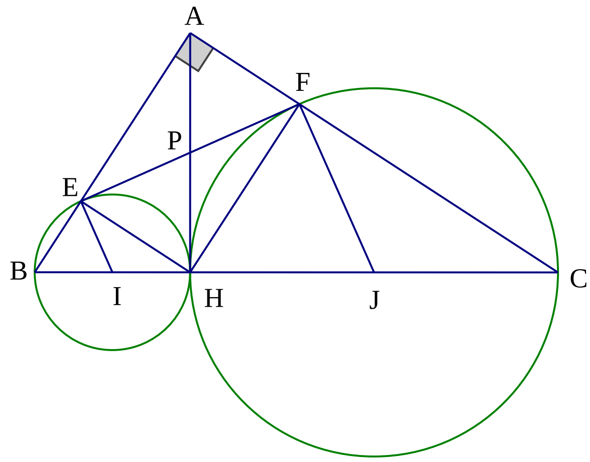
$$OB^2 = OI.OC \Rightarrow OC = \frac{OB^2}{OI} = \frac{225}{9} = 25(cm)$$

Bài 13. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

a) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b) EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của BH thì I là tâm của đường tròn đường kính BH

Gọi J là trung điểm của HC thì J là tâm của đường tròn đường kính HC

Ta có: $IH \perp AH \Rightarrow BH$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH

Cũng vậy BH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HC

Vậy AH là tiếp tuyến chung của đường tròn (I) và (J)

b) Ta có: $A = E = F = 90^0 \Rightarrow \lozenge AFHE$ là hình chữ nhật

Gọi P là giao điểm của AH và EF

Ta có: $PE = PF = PH = PA$

Lại có: $\Delta PEI = \Delta PHI\,(ccc) \Rightarrow IEP = IHP = 90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (I)

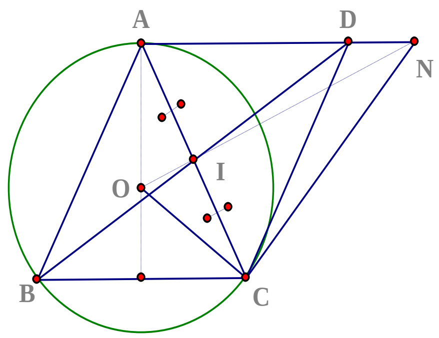
Chứng minh được: $\Delta PEJ = \Delta PHJ\,(ccc) \Rightarrow IFJ = PHJ = 90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (J).

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O). Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) AC, BD, ON đồng quy.

Lời giải



a) Ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD//BC$ (2)

$\Rightarrow AD // BC(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AD \perp OA \Rightarrow$ đpcm

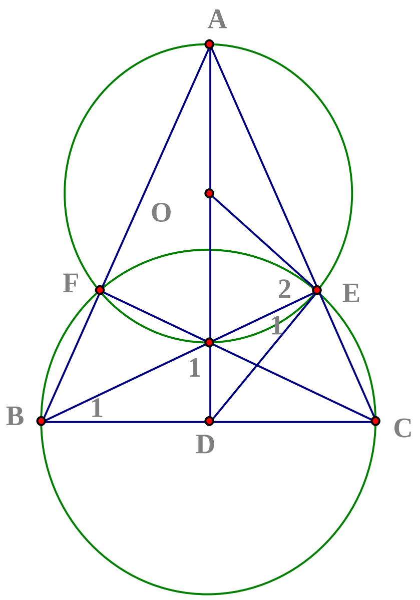
b.) Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I \in ON$ (NA, NC là tiếp tuyến) $\Rightarrow AC, BD, ON$ đồng quy (đpcm).

Bài 15. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng :

a) A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a.

Lời giải



a) Ta có D là tâm đường tròn đường kính $BC \Rightarrow DC = DB = DE = DF \Rightarrow \Delta BEC, \Delta BFC$ vuông.

+) Gọi O là trung điểm của $AH \Rightarrow OF = OE = \dfrac{AH}{2}$

Vậy 4 điểm A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

b) Có H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow A, H, D$ thẳng hàng

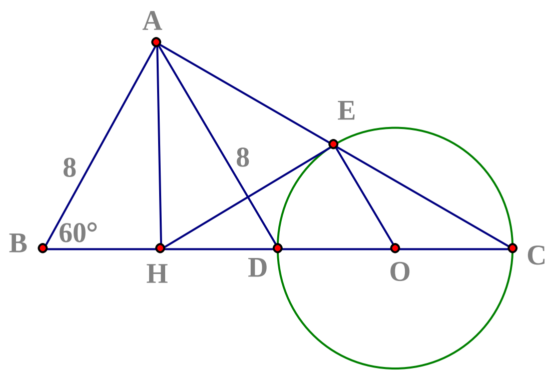
Mà $B_1 = E_1; E_2 = H_2 = H_1 \Rightarrow E_1 + E_2 = H_2 + H_1 = 90^0 \Rightarrow OED = 90^0 \Rightarrow DE$ là tiếp tuyến (đpcm)

Bài 16. Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng HE.

Lời giải



a. Xét $\Delta ABC\left(A = 90^0\right), \cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = 60^0$

Xét ΔABD có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABD cân tại A, $B = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều.

+) Ta có $OD = OE \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O

Có: $AB//DE \Rightarrow ABC = EDC = 60^0 \Rightarrow \Delta ODE$ đều

$\Rightarrow DE = DH = DO = \dfrac{BC}{4} \Rightarrow HEO = 90^0 \Rightarrow HE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b. Xét $\Delta HEO(E = 90^0) \Rightarrow HO^2 = HE^2 + EO^2 \Rightarrow HE^2 = 8^2 - 4^2 = 12 \Rightarrow HE = 4\sqrt{3}(cm)$

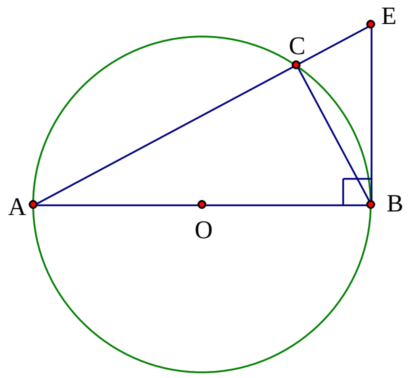
DẠNG 2
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, GÓC LIÊN QUAN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10cm$ và Bx là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $CAB = 30^0$ và E là giao điểm của các tia AC và Bx.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, EC và BC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng BE.

Lời giải

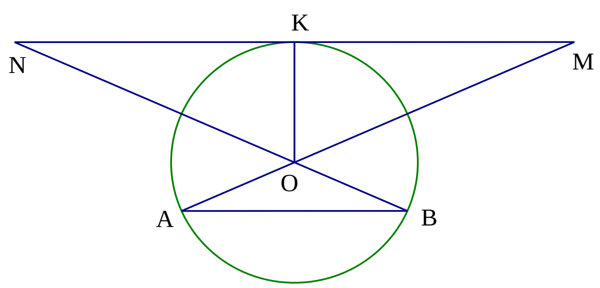


a) Tính được: $AC = 5\sqrt{3}cm, CE = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}cm$

b) Tính được: $BE = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm.$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = \dfrac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

Lời giải

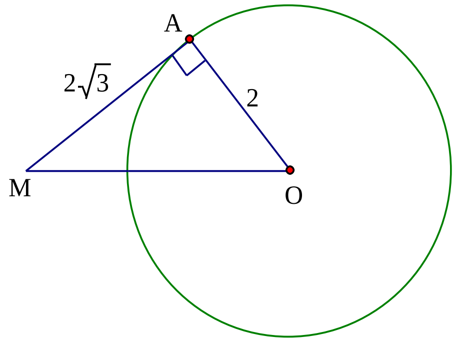


Tiếp tuyến MN, tiếp điểm K. Vì $AB // MN$ nên $OK \perp AB$

Ta tính được: $OK = \dfrac{3}{5}R \Rightarrow KN = \dfrac{4}{3}R \Rightarrow S_{OMN} = \dfrac{4}{3}R^2$

Bài 3. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(cm)$. Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O).

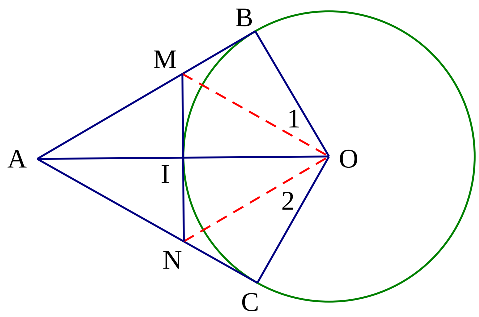
Lời giải



Tính được $OM = 4 \Rightarrow M$ di chuyển trên $(O;4cm)$

Bài 4. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$.

Lời giải



Xét tứ giác $AMON$, ta có:

$AM\,//\,ON\,(\perp OB); AN\,//\,OM\,(\perp OC)$

$\Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Mặt khác, xét hai tam giác vuông ΔOBM và ΔOCN, ta có:

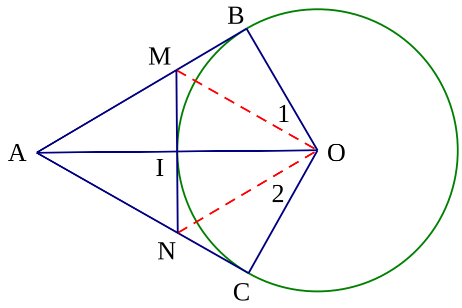
$OB = OC = R$; $O_1 = O_2$ (phụ với MON

Do đó $\Delta OBM = \Delta OCN\,(ch - gn) \Rightarrow OM = ON$

Vậy $AMON$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Để MN tiếp xúc với $(O;R)$ thì $d(O;MN)=R \Leftrightarrow OI=R \Leftrightarrow OA=2R$

Với $OA=2R \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M.

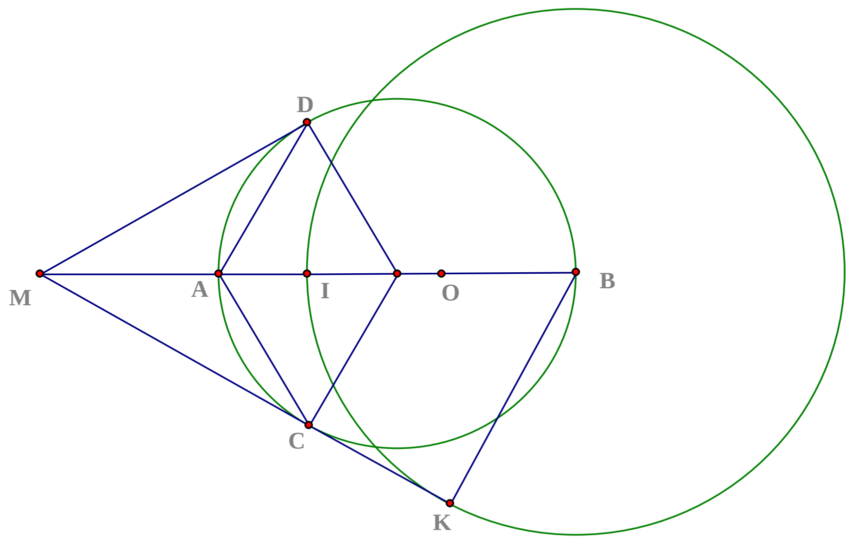
a) Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng.

b) Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?

c) Tính CMD.

d) Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BI)$.

Lời giải



a) AB là trung trực của CD, có $MC=MD$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow m$ thuộc đường trung trực của $CD \Rightarrow M \in AB \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng

b) Tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo vuông góc tại trung điểm mỗi đường nên là hình thoi

c) ΔAOC có $OA=OC=AC$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow AOC=60^0 \Rightarrow CMO=30^0 \Rightarrow CMD=60^0$

d) Hạ BK vuông góc MC, ta có: $C_1=C_2=30^0 \Rightarrow CA$ là phân giác MCD

$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác của $KCD \Rightarrow BI=BK \Rightarrow$ đpcm

(dựa vào tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

Ta có: MCD, DCK là hai góc kề bù, CA là phân giác MCD

$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác DCK d. $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow K\hat{B}C = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

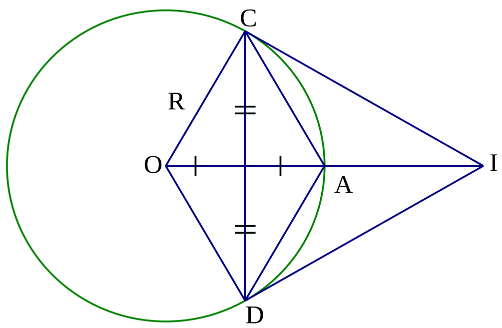
Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$, bán kính OA, dây CD là trung trực của OA. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh ΔOAC là tam giác đều.

b) Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

c) Tính CI theo R.

Lời giải



a) Gọi J là giao điểm của OA và CD

Do CD là đường trung trực của OA nên $CA = CO = R \Rightarrow OA = OC = CA = R$ (1)

Vậy ΔOAC là tam giác đều

b) Chứng minh tương tự: $OA = OD = AD = R(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow OC = OD = AC = AD = R$

$\Rightarrow \Diamond OCAD$ là hình thoi

c) Xét ΔOCI, ta có: $OCI = 90^0; COI = 60^0$

$\Rightarrow CI = OC.\tan COI = R.\tan 60^0 = R\sqrt{3}$

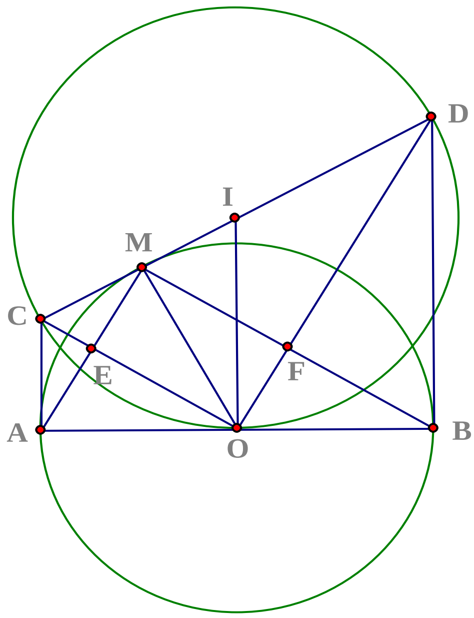
Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng AM cắt OC tại E, đường thẳng BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh $COD = 90^0$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

c) Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Dễ thấy $AMB = 90^0 \Rightarrow EMF = 90^0$

Có CM, CA là các tiếp tuyến $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow OEM = 90^0$

Tương tự ta có: $OFM = 90^0$

$\Delta CAO \backsim \Delta CMO \Rightarrow AOC = MCO \Rightarrow OC$ là phân giác của AMO

Tương tự OD là phân giác $BOM \Rightarrow OC \perp OD \Rightarrow COD = 90^0$

b) Do ΔAOM cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow OEM = 90^0$

Tương tự $OFM = 90^0 \Rightarrow \lozenge MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Gọi I là trung điểm của CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $IO = IC = ID$. Có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $IO // AC // BD$. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H. Đường thẳng AN cắt BM tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D.

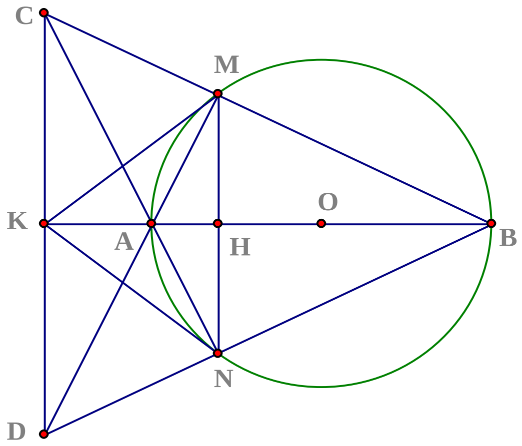
a) Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh BK là tia phân giác của MBN .

c) Chứng minh ΔKMC cân và KM là tiếp tuyến của (O).

d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi.

Lời giải



a) Ta có: $CKA = CMA = 90^0 \Rightarrow C, K, A, M \in (I; AC)$

b) ΔMBN cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác

c) ΔBCD có $BK \perp CD; CN \perp BN \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta BCD \Rightarrow D, A, M$ thẳng hàng

Ta có ΔDMC vuông tại M có MK là trung tuyến nên ΔKMC cân tại $K \Rightarrow KCM = KMC$

Lại có: $KBC = OMB \Rightarrow KMC + OMB = KCB + KBC = 90^0 \Rightarrow KMO = 90^0$

Mà OM là bán kính nên KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow K\hat{B}C = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

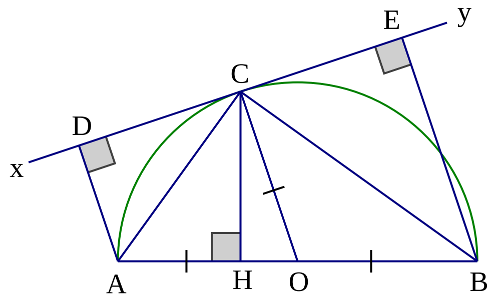
Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm $(O; R)$ đường kính AB. Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy. Chứng minh rằng:

a) C là trung điểm của DE.

b) Tổng $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn.

c) Tích $4.AD.BE = DE^2$.

Lời giải



a) Nối OC ta được $OC \perp xy$

Ta có: $AD // BE // OC (\perp xy)$

Mặt khác $OA = OB \Rightarrow CD = CE$

b) Kẻ $CH \perp AB$

Xét hai tam giác vuông ΔDAC và ΔHAC có:

+) $AC: chung$

+) $DAC = HAC\left(= ACO\right) \Rightarrow \Delta DAC = \Delta HAC \Rightarrow \begin{cases} AD = AH \\ CD = CH \end{cases}$

Chứng minh được: $BE = BH; CE = CH \Rightarrow AD.BC = AH.BH$ (1)

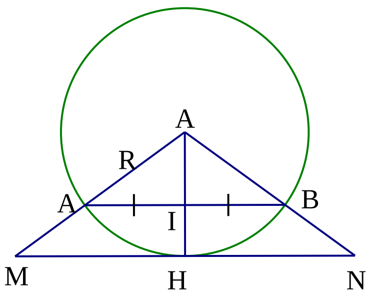
Điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên ΔCAB vuông tại C

Vậy $AH.BH = CH^2$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow AD.BE = CH^2 = CD.CE = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 = \frac{DE^2}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích ΔMON.

Lời giải



a) Nối OH ta được $OH \perp MN$ (tính chất tiếp tuyến)

Ta lại có $AB//MN \Rightarrow OH \perp AB = I$

Theo tính chất đường kính vuông góc với một dây ta được:

$IA = IB = \frac{1,6R}{2} = 0,8R$

Tam giác IOA vuông tại $I \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - (0,8R)^2 = 0,36R^2 \Rightarrow OI = 0,6R$

Xét ΔMON có $AB//MN \Rightarrow \Delta OAB \backsim \Delta OMN \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{OI}{OH}$ (tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng) $\Rightarrow MN = \frac{AB.OH}{OI} = \frac{1,6R}{0,6R} = \frac{8}{3}R$

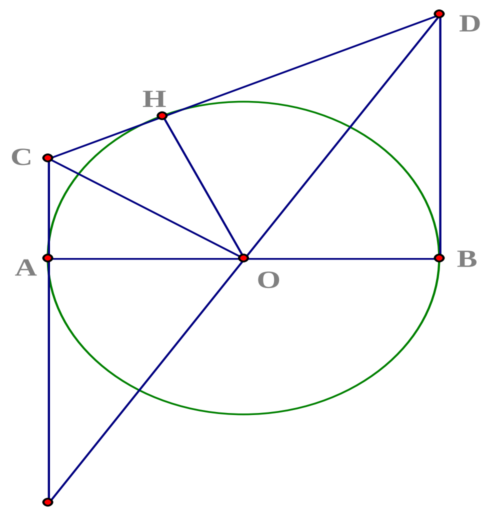
Diện tích tam giác MON là: $S_{MON} = \frac{1}{2}.MN.OH = \frac{1}{2}.\frac{8}{3}R.R = \frac{4}{3}R^2$

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $COD = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$.

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB.

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O).

Lời giải



a)Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow E = D; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch-gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O). Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

Bài 13. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

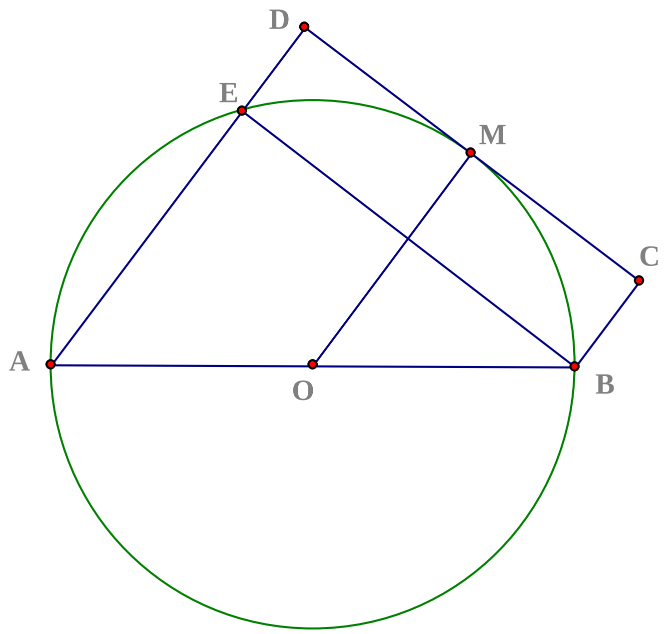
a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

b) Chứng minh: $AB = BC + AD$.

c) Giả sử: $AOM > BOM$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của nửa đường tròn đã cho.

Lời giải



a) Hình thang $ABCD$ có $AO = OB, OM // AD // BC \Rightarrow M$

là trung điểm của CD

b) Ta có: $AB = 2OM = BC + AD$

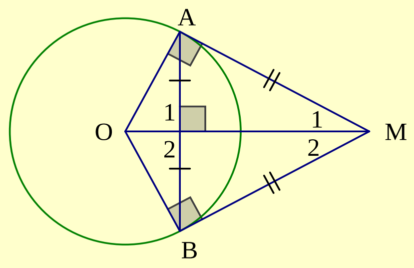
c) Tứ giác $BDCE$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông

dV $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.BE = OM.BE \le OM.AB = 2R^2$

$\Rightarrow maxS_{ABCD} = 2R^2 \Leftrightarrow OM \perp AB$

CHỦ ĐỀ 3
TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

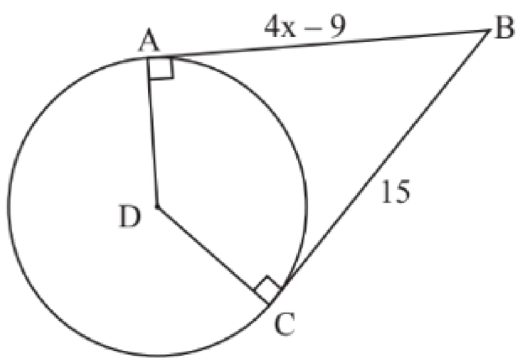
Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)	
Kết luận	- $MA = MB$ - $M_1 = M_2$ - $O_1 = O_2$ - MO là trung trực của AB	

Chú ý: MO là trung trực của AB thì phải chứng minh chứ không được dùng là giả thiết bài toán nhé. Ta chứng minh như sau:

ΔAMB cân tại (do $MA = MB$) và MO là đường phân giác AMB (do $M_1 = M_2$) nên là MO là trung trực của AB.

DẠNG 1
TÍNH ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, GÓC LIÊN QUAN TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Bài 1. Tìm giá trị của x trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của đường tròn (D) cắt nhau tại B nên:

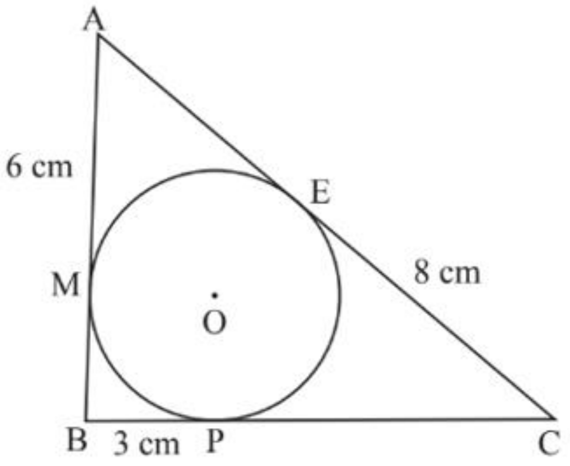
BA = BC

hay 4x – 9 = 15,

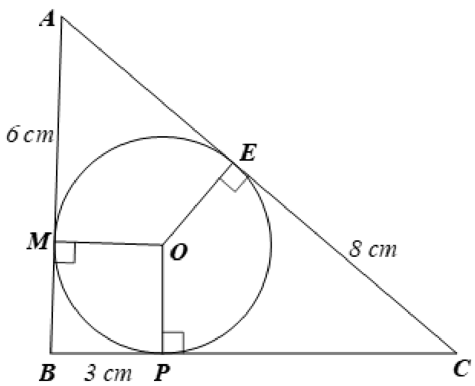
suy ra 4x = 24 hay x = 6.

Vậy x = 6.

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết AM = 6 cm, BP = 3 cm, CE = 8 cm (Hình vẽ). Tính chu vi tam giác ABC.



Lời giải



Ta có:

AE, AM là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên AE = AM = 6 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

BM, BP là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại B nên BM = BP = 3 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

CP, CE là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại C nên CP = CE = 8 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

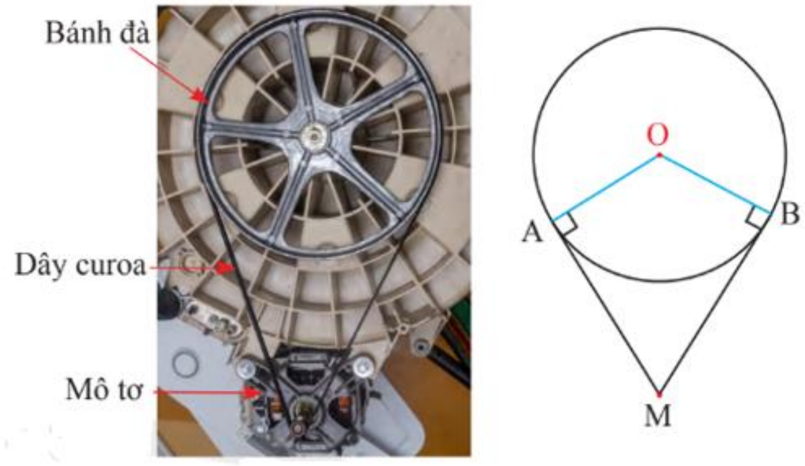
Chu vi tam giác ABC là:

AB + BC + CA = AM + BM + BP + CP + CE + AE = 6 + 3 + 3 + 8 + 8 + 6 = 34 (cm).

Vậy chu vi tam giác ABC bằng 34 (cm).

Bài 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



a) b)

b) Tính số đo AMB tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo AOB (kết quả làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Ta có MA, MB lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; 15 cm) tại A, B và cắt nhau tại M nên MA ⊥ OA, MB ⊥ OB và MA = MB.

Xét ΔOAM vuông tại A, theo định lí Pythagore ta có: $OM^2 = OA^2 + MA^2$.

Suy ra $MA^2 = OM^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2 = 1000$.

Do đó $MA = \sqrt{1000} \approx 31,6(cm)$

Vậy $MA = MB \approx 31,6(cm)$.

b) Xét ΔOAM vuông tại A, ta có: $\sin AMO = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$.

Suy ra $AMO \approx 25^0 23'$

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; 15 cm) cắt nhau tại M nên MA là tia phân giác của góc AMB.

Do đó $AMB = 2AMO \approx 2.25^0 23' \approx 50^0 26'$

Xét tứ giác OAMB có: $OAM + AMB + OBM + AOB = 360^0$ (tổng các góc của một tứ giác).

Suy ra $AOB = 360^0 - \left(OAM + AMB + OBM\right) \approx 360^0 - \left(90^0 + 50^0 26' + 90^0\right) \approx 129^0$

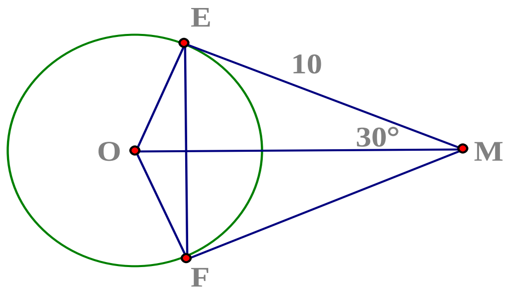
Do đó

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $EMO = 30^0$. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$OME = OMF = 30^0 \Rightarrow EMF = 60^0 \Rightarrow \Delta MEF$ đều $\Rightarrow EF = 10cm$

b) Xét $\Delta MEI(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow cos30^0 = \dfrac{MI}{ME} \Rightarrow MI = cos30^0.ME = 8,6cm \Rightarrow S_{MEF} = \dfrac{1}{2}.MI.EF = 25\sqrt{3}(cm^2)$

DẠNG 2

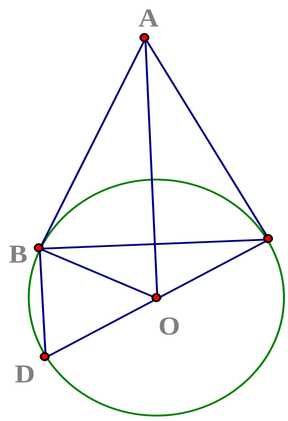
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A.

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD//AO$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AB = AC$

$\Rightarrow$ A thuộc đường trung trực của BC

Lại có: $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

Vậy AO là đường trung trực của đoạn BC

b) Ta có

$AO \perp BC$ (chứng minh trên)

$DB \perp BC$ (giả thiết)

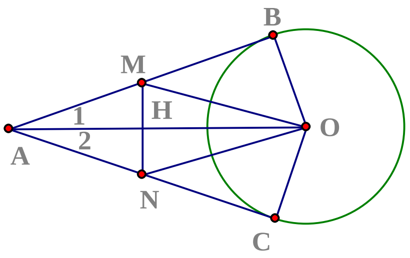
$\Rightarrow BD//AO$ (đpcm).

Bài 2. Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có :

$AB \perp OB$ (Tính chất tiếp tuyến)

$NO \perp OB$ (giả thiết)

$\Rightarrow ON//AM \quad (1)$

Tương tự

$AC \perp OC$ (Tính chất tiếp tuyến)

$MO \perp OC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AN//OM \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Lại có $A_1 = A_2 \Rightarrow AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

b)

Ta có : $AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

Để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) thì $OH = R$ hay $OA = 2OH = 2R \Rightarrow OA = 2R$

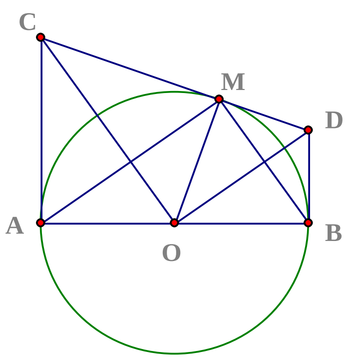
Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng: $\Delta COD \backsim \Delta AMB$.

b) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

Lời giải



a) Ta có $\Delta COD \backsim \Delta AMB (gg)$

b) Theo câu a ta có: $\Delta COD \backsim \Delta AMB \Rightarrow MC.MD = OM \Rightarrow$ đpcm

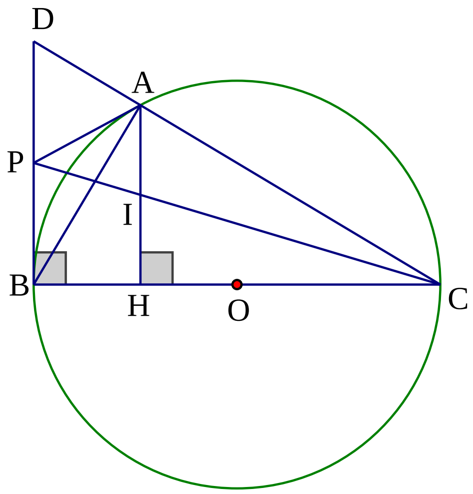
c) Xét $\Delta AOC(A = 90^0) \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2(pytago)$

$\Rightarrow AC = R\sqrt{3}(cm)$

Ta lại có: $AC.BD = MC.MD = R^2 \Rightarrow BD = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Bài 4. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Lời giải



CA cắt BP tại D; $BAC = 90^0$ (A thuộc đường tròn đường kính BC)

$PA = PB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow PBA = PAB$

ΔABD có $ABD + ADB = 90^0; BAP + PAD = BAD = 90^0$, do đó $PB = PD$ (1)

$DB \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow DB // AH$

ΔPBC có $IH // PB \Rightarrow \dfrac{IH}{PB} = \dfrac{IC}{PC}$ (2); ΔPDC có $AI // PD \Rightarrow \dfrac{IA}{PD} = \dfrac{IC}{PC}$ (3)

Từ $(1)(2)(3) \Rightarrow IH = IA \Rightarrow$ đpcm.

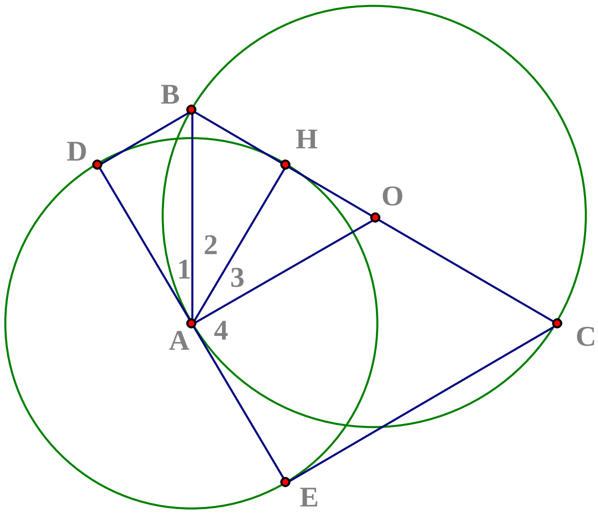
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC.

Lời giải



a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$A_1 = A_2; A_3 = A_4 \Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3BAC = 180^0 \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

b. Gọi O là trung điểm của BC

$\lozenge DBEC$ là hình thang $(DB, CE \perp ED)$

$\Rightarrow OA$ là đường trung bình của hình thang $DBEC$ $\Rightarrow OA // DB // EC \Rightarrow OA \perp DE$

Hay DE là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

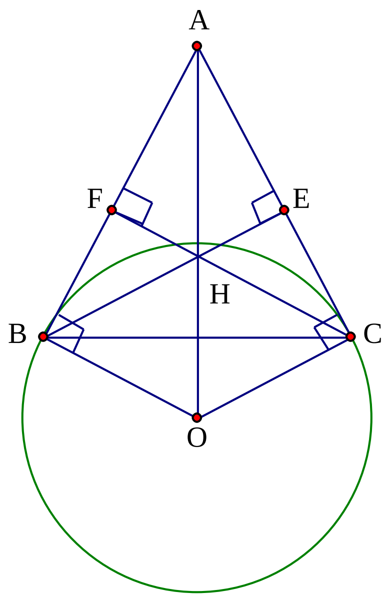
Bài 6. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC; CF \perp AB (E \in AC, F \in AB), BE \cap CF = H$.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O).

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Ta có A, H, O cùng nằn trên đường vuông góc với BC nên thẳng hàng nhau

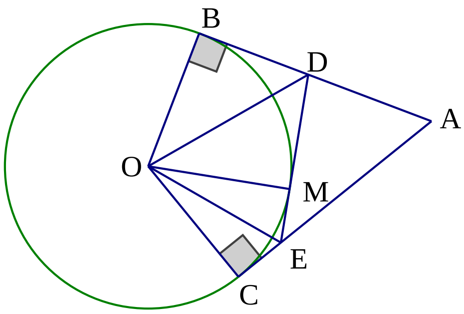
c) Để $H \in (O)$ thì $OH = OC \Rightarrow CAO = 60^0$

Bài 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh chu vi $\Delta ADE = 2AB$.

b) Chứng minh rằng: $BOC = 2DOE$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM; ME = CE; AB = AC$

Do đó chu vi ΔADE là:

$C_{\Delta ADE} = AD + DM + ME + AE = AD + DB + CE + AE = AB + AC = 2AB$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OD, OE lần lượt là các tia phân giác của các góc BOM, MOC

Ta có:

$$DOM = \frac{1}{2} BOM$$

$$MOE = \frac{1}{2} MOC$$

$$\Rightarrow DOE = DOM + MOE = \frac{1}{2}\left(BOM + MOC\right) = \frac{1}{2} BOC$$

$$\Rightarrow BOC = 2DOE$$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm.

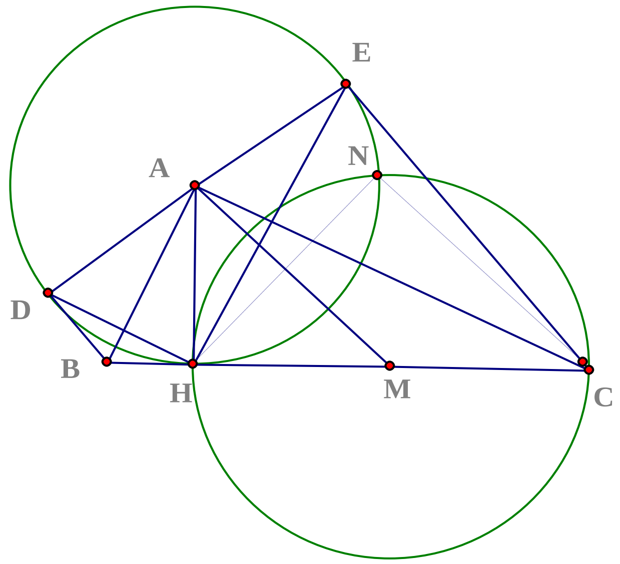
a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh: $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$.

c) Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H.

Chứng minh: $CN//AM$.

Lời giải



a) Ta có: AB là phân giác của DAH, AC là phân giác của $HAE \Rightarrow DAE = 180^0$

b) Theo tính chât hai tiếp tuyến cắt nhau và hệ thức lượng về đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền tròn tam giác vuông BAC

$$\Rightarrow BD.CE = BH.CH = AH^2 = \frac{DE^2}{4}$$

c) Ta có ΔHNC nội tiếp đường tròn (M) đường kính $HC \Rightarrow HN \perp CN$

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M), do đó $AM \perp HN \Rightarrow AM//NC$

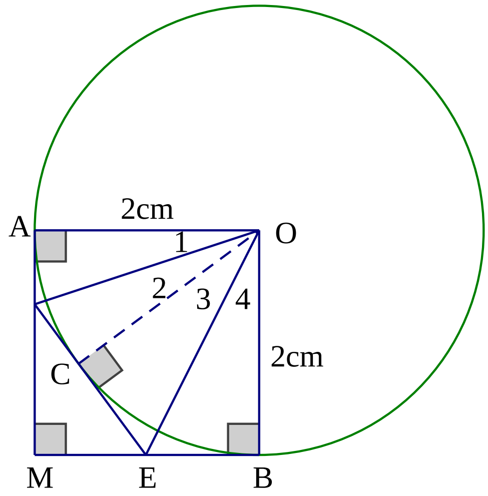
Bài 9. Cho đường tròn $(O;2cm)$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm).

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính DOE.

Lời giải



a) Xét hình chữ nhật $AMBO$ có: $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow AMBO$ là hình vuông .

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\begin{cases} DA = DC \\ EB = EC \end{cases}$

Chu vi $\Delta = MD + ME + ED = MD + ME + EB + DA = 2MA = 4cm$

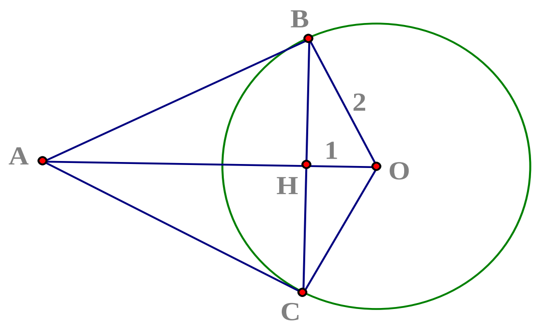
c) $DOE = DOC + COE = 2BOC = 45^0$

Bài 10. Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm, OH = 1cm$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Lời giải



b. Áp dụng định lý pytago ta tính được: $BH = \sqrt{3}(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta được:

$AB = AC = 2\sqrt{3}(cm) \Rightarrow P_{ABC} = 6\sqrt{3}cm; S_{ABC} = 3\sqrt{3}(cm^2)$

+) Ta có: $S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABOC} = 4\sqrt{3}(cm^2)$

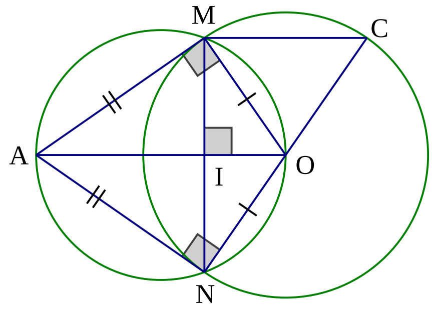
Bài 11. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm) .

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng $MC//AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$.

Lời giải



a) Vì $AM = AN, OM = ON$ $(1) \Rightarrow OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow OA \perp MN; MI = IN = \dfrac{MN}{2}$ (2) (I là giao điểm của OA với MN)

b) Từ $(1)(2) \Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $MNC \Rightarrow IO//MC; MC//AO$

c) Vì AM là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AM \perp MO$ hay ΔAMO vuông tại M có cạnh huyền $AO = 5cm$ thu được: $OM^2 = OI.OA \Leftrightarrow 3^2 = OI.5 \Leftrightarrow OI = 1,8(cm) \Rightarrow AI = 5 - 1,8 = 3,2(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh ta có: $AM^2 = 3,2.5 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4(cm)(AM > 0)$

Áp dụng hệ thức về đường cao, ta có: $MI^2 = 3,2.1,8 = 2,4^2 \Leftarrow MI = 2,4(cm)(MI > 0)$

Vậy $AM = AN = 4cm, MN = 4,8cm$.

Bài 12. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O).

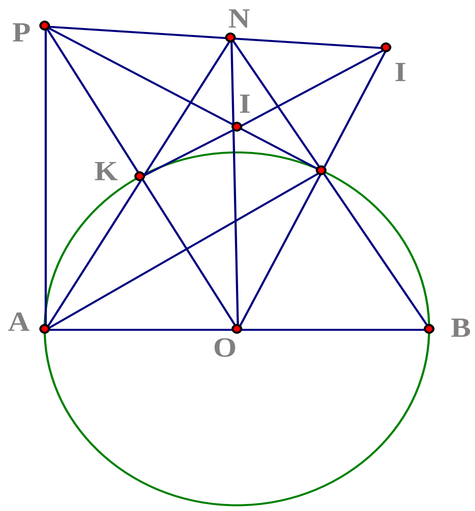
a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM//OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



a) A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b) Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM // OP$

c) $\Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN // OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d) Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$, mà $PM \cap ON \equiv I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP \ (1)$

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

Lại có: $APO = OPI = IOP \Rightarrow \Delta IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP \ (2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 13. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MP, kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

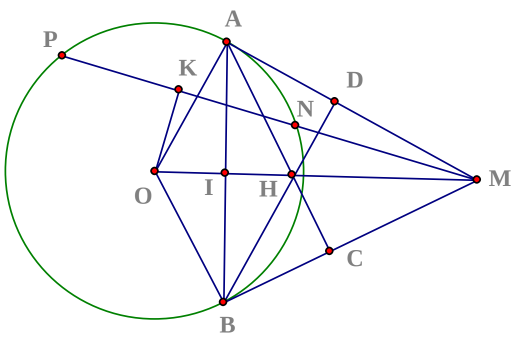
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

Gọi E là trung điểm OM.

Tam giác OAM vuông tại A và AE là đường trung tuyến nên $AE = EO = EM$

Tam giác OBM vuông tại B và BE là đường trung tuyến nên $BE = EO = EM$

Do đó $AE = EO = EM = BE$

Nên bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn đường kính OM

b) Ta có: $OKM = 90^0 \Rightarrow A, M, B, O, K \in \left(\dfrac{OM}{2}\right)$

c. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM (hoặc chứng minh tam giác đồng dạng)

d. Chứng minh $OAHB$ là hình bình hành và chú ý: $A, B \in (O; R) \Rightarrow OAHB$

là hình thoi

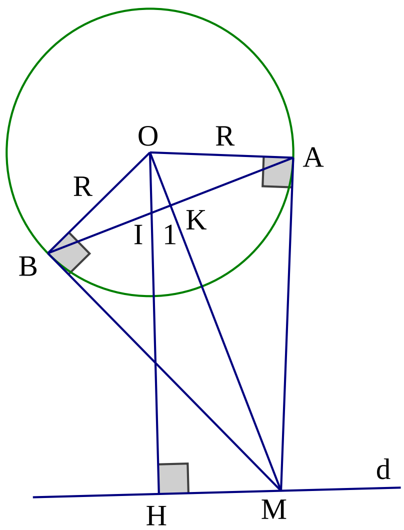
e. Chứng minh: $OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng.

Bài 14. Cho $(O; R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d, dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K. Chứng minh

a) $OI.OH = OK.OM = R^2$.

b) AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d.

Lời giải



a) Xét ΔOIK và ΔOMH có:

$$O_1: chung;\ H = K = 90^0 \Rightarrow \Delta OIK \backsim \Delta OMH\,(gg) \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Leftrightarrow OI.OH = OM.OK$$

Mà ΔOAM vuông tại A, nên theo hệ thức lượng ta có: $OA^2 = OK.OM \Rightarrow OI.OH = OK.OM = R^2$

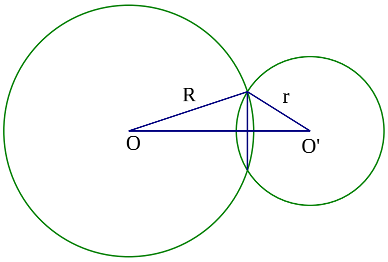
b) Ta có (O) cố định và đường thẳng d cố định $\Rightarrow$ điểm H cố định

Ta lại có $OI = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định, nên AB qua I cố định.

BÀI 5
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Hai đường tròn cắt nhau

Nếu hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là **hai đường tròn cắt nhau**. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm của chúng.



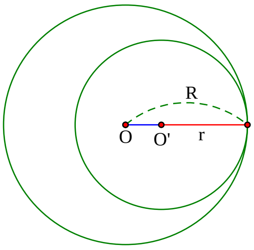
Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$ **cắt nhau** khi và chỉ khi $R-r<OO'<R+r$

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau

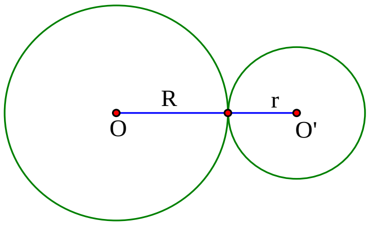
Nếu hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói đó là **hai đường tròn tiếp xúc nhau**. Điểm chung gọi là **tiếp điểm** của chúng.

Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$ **tiếp xúc trong** khi và chỉ khi $OO'=R-r>0$ **(Hình 1).**

Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$ **tiếp xúc ngoài** khi và chỉ khi $OO'>R+r$ **(Hình 2).**



Hình 1: Tiếp xúc trong.



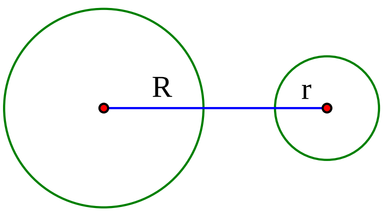
Hình 2: Tiếp xúc ngoài.

3. Hai đường tròn không giao nhau

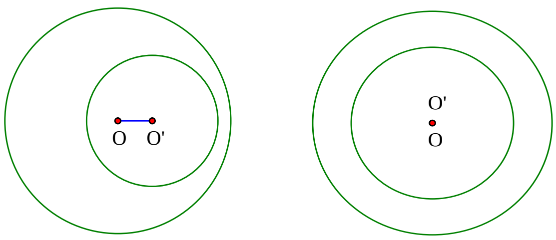
Nếu hai đường tròn không có điểm chung thì ta nói đó là **hai đường tròn không giao nhau**.

Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$ **ngoài nhau** khi và chỉ khi $OO'>R+r$ **(Hình 1).**

Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$ **đựng nhau** khi và chỉ khi $OO'<R-r$ **.** Đặc biệt, khi $OO' \equiv O$ thì ta có **hai đường tròn đồng tâm (Hình 2).**

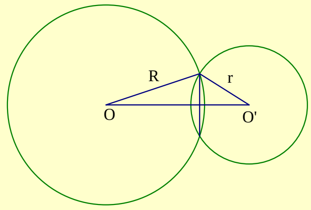
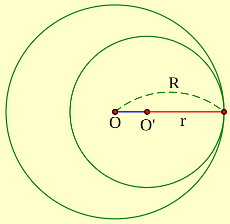
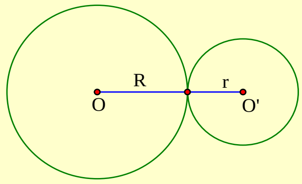
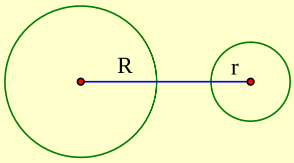
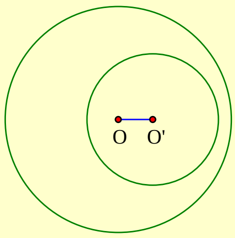
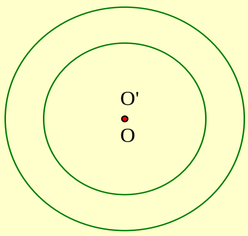


Hình 1: Hai đường tròn ngoài nhau.



Hình 2: Hai đường tròn đựng nhau.

Bảng tóm tắt vị trí của hai đường tròn

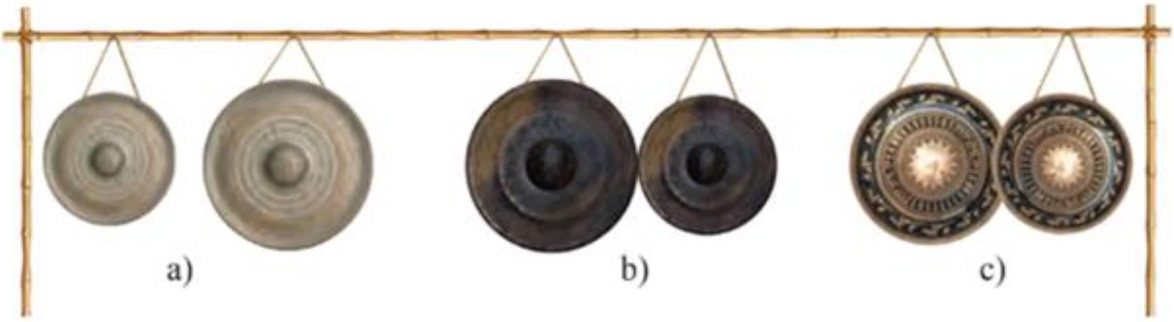
<table>
<tr><th colspan="2">Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$</th><th>Số điểm chung</th><th>Hệ thức</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Cắt nhau</td><td>2</td><td>$R-r<OO'<R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiếp xúc</td><td>Tiếp xúc trong</td><td rowspan="2">1</td><td>$OO'=R-r>0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tiếp xúc ngoài</td><td>$OO'=R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Không cắt nhau</td><td>Ngoài nhau</td><td rowspan="3">0</td><td>$OO'>R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Đựng nhau</td><td>$0 \neq OO'<R-r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$OO' \equiv O$</td><td>
</td></tr>
</table>

Chú ý:

- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

CHỦ ĐỀ 1
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

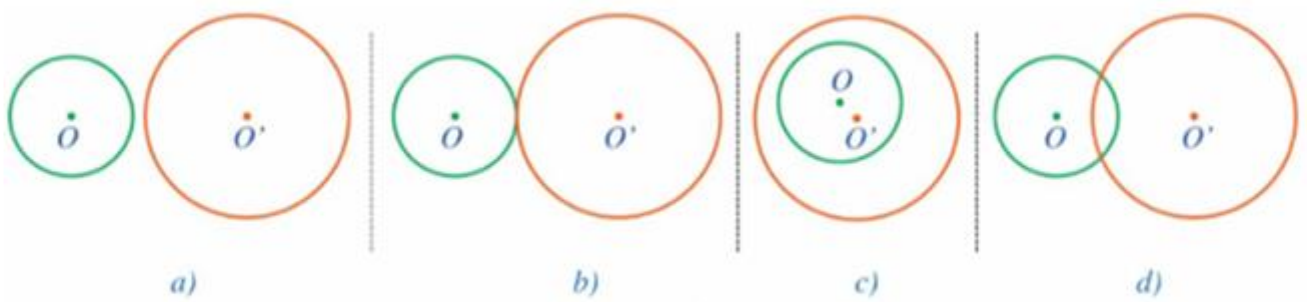
Hình a): Hai đường tròn ở ngoài nhau.

Hình b): Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Hình c): Hai đường tròn cắt nhau.

d) Một cặp đường tròn không giao nhau: Đường tròn màu vàng và đường tròn màu tím (quả lắc).

Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi hình a, b, c, d:



Lời giải

a) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung và OO’ > R + R’.

Do đó hai đường tròn (O) và (O’) ở ngoài nhau.

b) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) có 1 điểm chung duy nhất và OO’ = R + R’.

Do đó hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài.

c) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung và OO’ < R’ – R.

Do đó đường tròn (O’) đựng đường tròn (O).

d) Ta thấy hai đường tròn (O) và (O’) có 2 điểm chung nên hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau.

Bài 3. Xác định vị trí tương đối của (O; R) và (O’; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) OO’ = 18; R = 10; R’ = 6 b) OO’ = 2; R = 9; R’ = 3

c) OO’ = 13; R = 8; R’ = 5 d) OO’ = 17; R = 15; R’ = 4.

Lời giải

a) Ta có 18 > 10 + 6 nên OO’ > R + R’, suy ra hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) ở ngoài nhau.

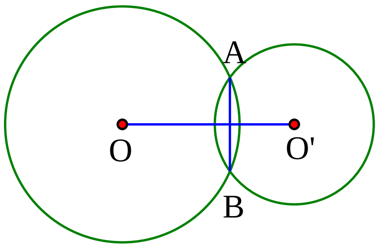
b) Ta có 2 < 9 – 3 nên OO' < R – R', suy ra đường tròn (O; R) đựng đường tròn (O'; R').

c) Ta có 13 = 8 + 5 nên OO' = R + R', suy ra hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài.

d) Ta có 15 – 4 < 17 < 15 + 4 nên R – R' < OO' = R + R', suy ra hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B. Chứng minh OO' là đường trung trực của AB.

Lời giải



Ta có:

$OA = OB = R$

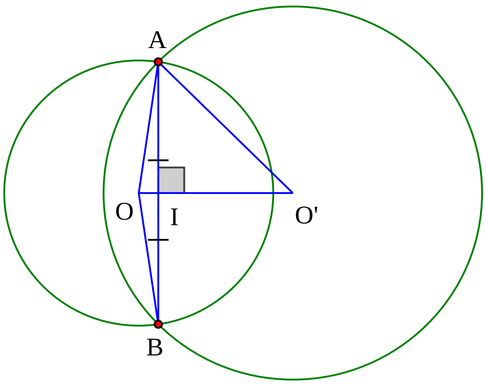
$O'A = O'B = R'$

Do đó O, O' thuộc đường trung trực của AB

Vậy OO' là đường trung trực của dây AB.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho $AB = 24(cm)$. Tính độ dài $O'O$.

Lời giải



Gọi $I = OO' \cap AB \Rightarrow \begin{cases} AIO = AIO' = 90^0 \\ IA = IB = \dfrac{1}{2}AB = 12(cm) \end{cases}$

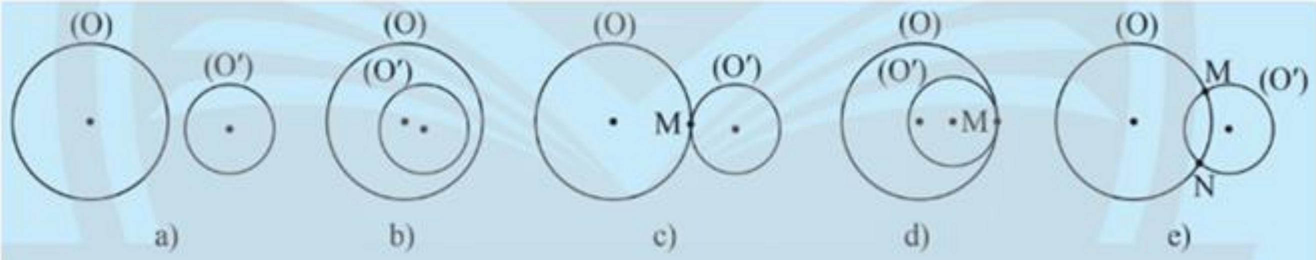
Từ ΔAIO vuông tại I, ta có: $OI = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5(cm)$

Từ $\Delta AIO'$ vuông tại I, ta có: $O'I = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9(cm)$

Do đó $OO' = 5 + 9 = 14(cm)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tìm số điểm chung của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi trường hợp sau:



Lời giải

Hình a): Hai đường tròn (O) và (O’) không có điểm chung.

Hình b): Hai đường tròn (O) và (O’) không có điểm chung.

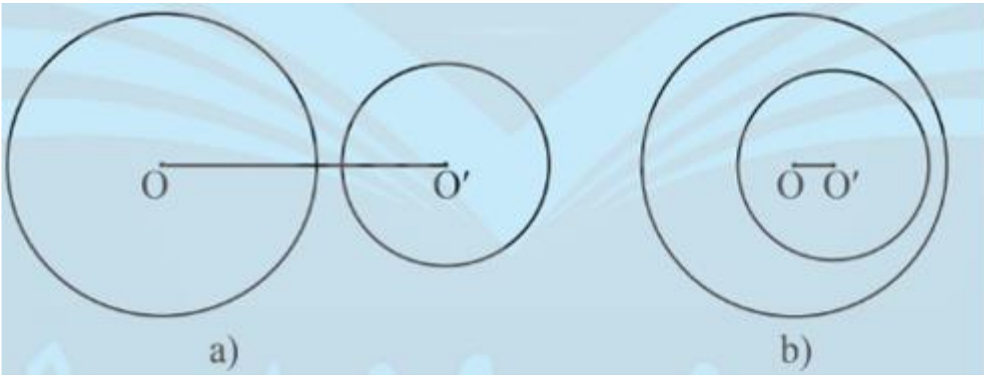
Hình c): Hai đường tròn (O) và (O’) có một điểm chung là điểm M.

Hình d): Hai đường tròn (O) và (O’) có một điểm chung là điểm M.

Hình e): Hai đường tròn (O) và (O’) có hai điểm chung là điểm M và điểm N.

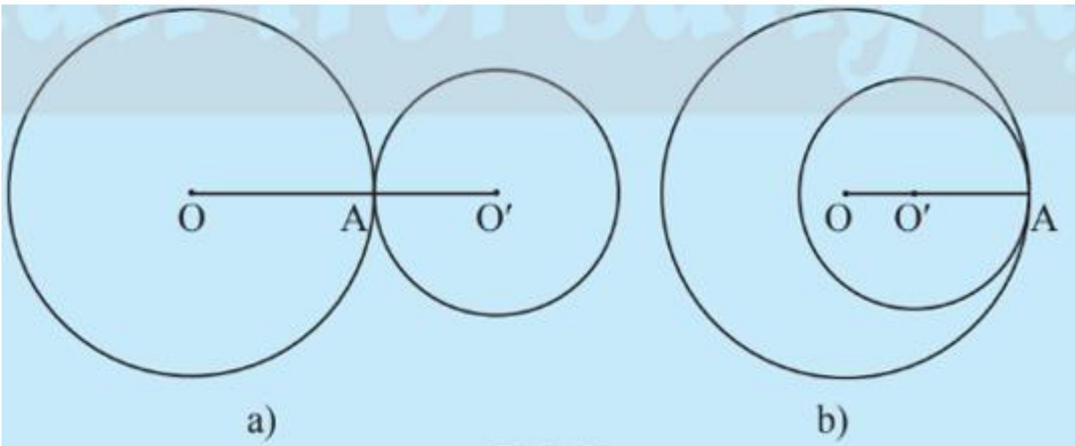
Bài 7. Cho hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O’; R’) với R ≥ R’. Hãy so sánh OO’ với R + R’ và R – R’ trong mỗi trường hợp sau:

Trường hợp 1: (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung (Hình 1).



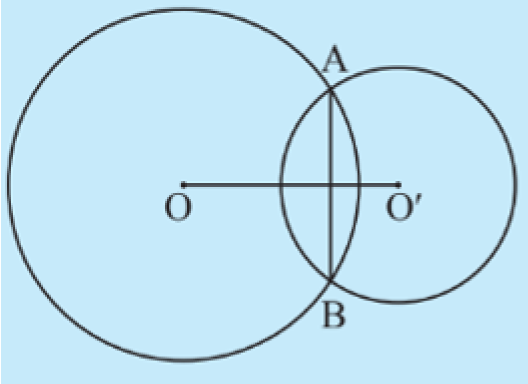
Hình 1

Trường hợp 2: (O; R) và (O’; R’) chỉ có một điểm chung (Hình 2).



Hình 2

Trường hợp 3: (O; R) và (O’; R’) có đúng hai điểm chung (Hình 3).



Hình 3

Lời giải

– *Trường hợp 1:* (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung (Hình 1).

Hình 1a): OO’ > R + R’; OO’ > R – R’;

Hình 1b): OO’ < R + R’; OO’ < R – R’.

– *Trường hợp 2:* (O; R) và (O’; R’) chỉ có một điểm chung (Hình 2).

Hình 2a): OO’ = R + R’; OO’ > R – R’;

Hình 2b): OO’ < R + R’; OO’ = R – R’.

– *Trường hợp 3:* (O; R) và (O’; R’) có đúng hai điểm chung (Hình 3).

OO’ < R + R’; OO’ > R – R’.

Bài 8. Cho hai đường tròn (O; 11,5 cm) và (O’; 6,5 cm). Biết rằng OO’ = 4 cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Lời giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O) và (O’) lần lượt là R = 11,5 cm và r = 6,5 cm.

Do R – r = 11,5 – 6,5 = 5 (cm) và 4 < 5 nên OO’ < R – r.

Vậy đường tròn (O; 11,5 cm) đựng đường tròn (O’; 6,5 cm).

Bài 9. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn (I; R) và (J; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) IJ = 5; R = 3; R’ = 2

b) IJ = 4; R = 11; R’ = 7

c) IJ = 6; R = 9; R’ = 4

d) IJ = 10; R = 4; R’ = 1.

Lời giải

a) Ta có 5 = 3 + 2 nên IJ = R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) tiếp xúc ngoài.

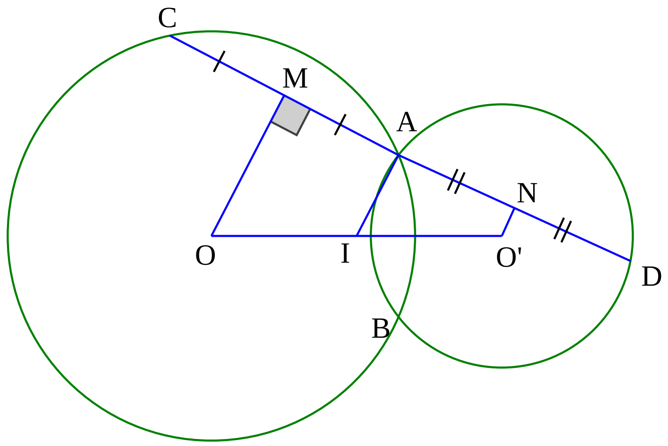
b) Ta có 4 = 11 – 7 nên IJ = R – R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) tiếp xúc trong.

c) Ta có: 9 – 4 < 6 < 9 + 4 nên R – R’ < IJ < R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) cắt nhau.

d) Ta có: 10 > 4 + 1 nên IJ > R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) ở ngoài nhau.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD.

Lời giải



Vẽ $OM \perp AC = M \Rightarrow MA = MC = \frac{1}{2}AC\,(1)$

$O'N \perp AD = N \Rightarrow NA = ND = \frac{1}{2}AD\;(2)$

Hình thang $OO'NM$ có: $IO = IO'$ và $IA//OM//O'N \Rightarrow MA = NA$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AC = AD$

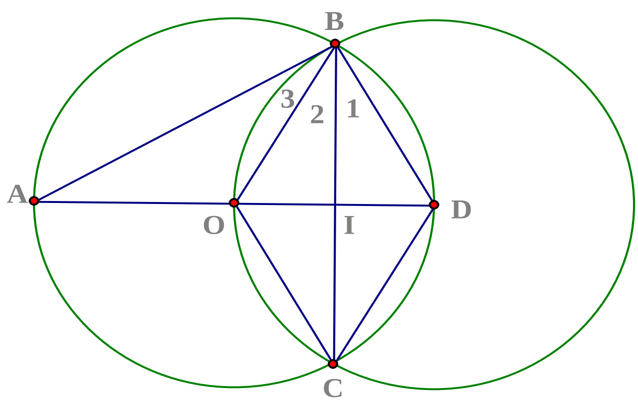
Bài 11. Cho đường tròn (O), đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì ? vì sao ?

b) Tính số đo các góc $CBD; CBO; OBA$

c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

Lời giải



a) Xét $\lozenge OBDC$, có: $OB = OC = DC = R \Rightarrow \lozenge OBDC$ là hình thoi

b) Xét ΔOBD, có: $OB = OD = BD = R \Rightarrow \Delta OBD$ là tam giác đều

$\Rightarrow OBD = 60^0 = ODB \Rightarrow$ BC là tia phân giác $OBD \Rightarrow B_1 = B_2 = \frac{1}{2}OBD = 30^0$

Ta có $B \in (O) \Rightarrow ABD = 90^0 \Rightarrow B_3 = 30^0$

c) $OBDC$ là hình thoi $\Rightarrow OD \perp BC \equiv I; IB = IC$

Xét ΔABC, có AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABC cân tại A

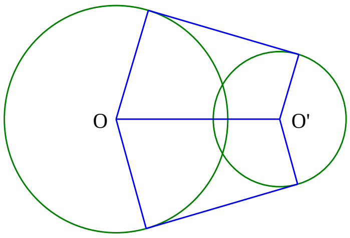
Mà $ABC = B_2 + B_3 = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

CHỦ ĐỀ 2

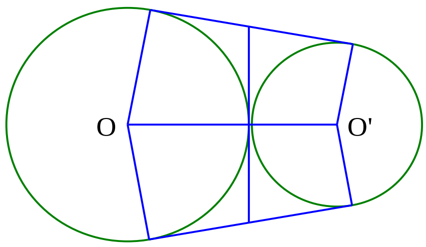
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Ta có các trường hợp tiếp tuyến chung của hai đường tròn như sau:

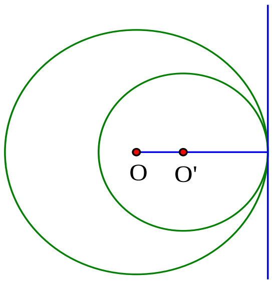
1) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài.



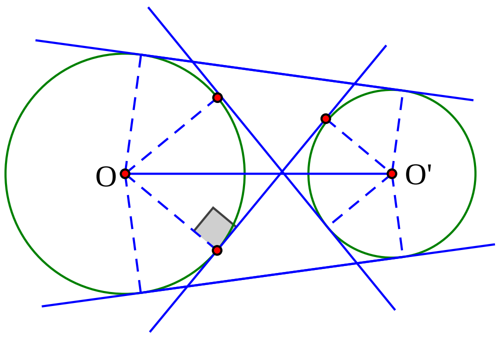
2) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung.



3) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.



4) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.



Chú ý:

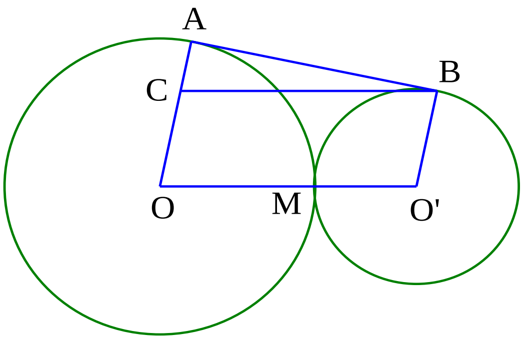
- Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung.
- Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung.

DẠNG 1

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A\in(O);B\in(O'))$. Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vẽ $BC//OO'(C\in OA)$ (1)

Ta có: $OA//O'B(\perp AB)$ (2)

Từ $(1)(2)\Rightarrow OCBO'$ là hình bình hành

Do đó $OC=O'B=5(cm); BC=OO'=13(cm)$

Có: $AC=OA-OC=8-5=3(cm)$

ΔABC vuông tại $A\Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}$

$=\sqrt{13^2-3^2}\approx 12,65(cm)$

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính DAE.

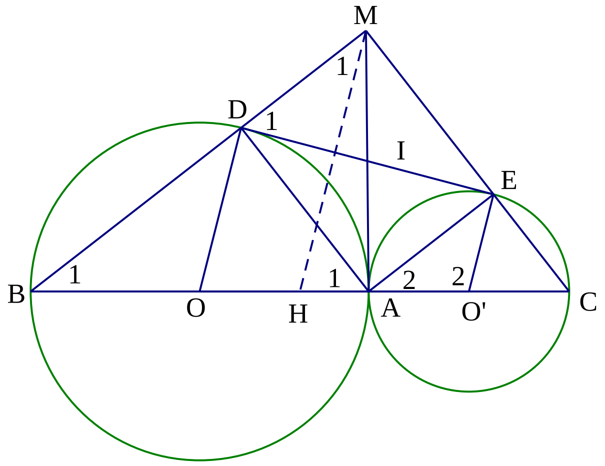
b) Tứ giác $ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

dv Chứng minh: $MD.MB=ME.MC$.

ev Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH\perp DE$.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} A_1 = \left(180^0 - O_1\right):2 \\ A_2 = \left(180^0 - O_2\right):2 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 = 90^0 \Rightarrow DAE = 90^0$

b) Có $ADME$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông là hình chữ nhật)

c) Gọi I là giao điểm của DE và $AM \Rightarrow ID = IA$

$\Delta IAO = \Delta IDO(ccc) \Rightarrow IAO = IDO = 90^0 \Rightarrow MA \perp OA \equiv A \in (O)$

Chứng minh tương tự: $MA \perp O'A \equiv A \in (O')$

Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

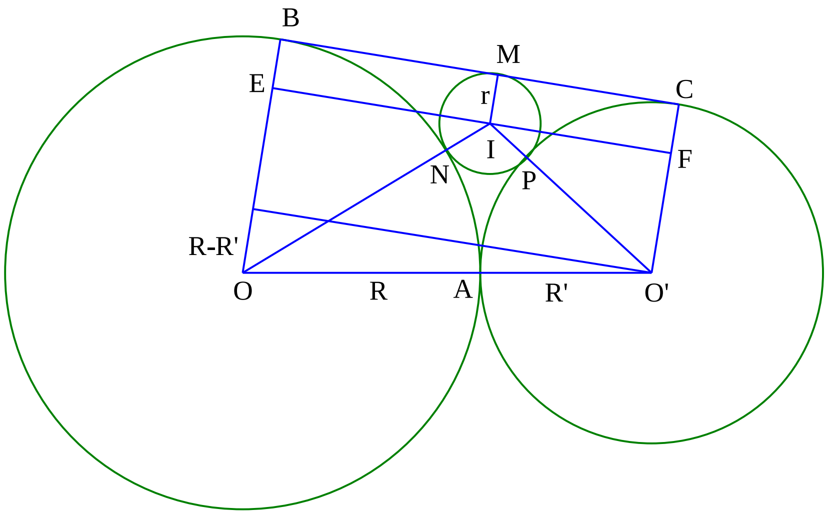
d. Ta có: $\Delta MAB(A = 90^0), AD \perp MB \Rightarrow MA^2 = MD.MB$

$\Delta MAC(A = 90^0), AE \perp MC \Rightarrow MA^2 = ME.MC \Rightarrow MB.MD = ME.MC$

e) $M_1 + D_1 = B_1 + BMA = 90^0 \Rightarrow MH \perp DE$

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC\left(B \in (O); C \in (O')\right)$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Qua I vẽ $EF//BC$

$$\Rightarrow BC = EF = \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}\ (1)$$

$$IE = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}\ \ (2)$$

$$IF = \sqrt{(R'+r)^2-(R'-r)^2} = 2\sqrt{R'r}\ \ (3)$$

Cộng vế theo vế của $(1)(2)(3)$ ta được:

$$IE + IF = EF \Leftrightarrow 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{R'r} = 2\sqrt{RR'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r}\left(\sqrt{R}+\sqrt{R'}\right) = \sqrt{RR'} \Rightarrow r\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 5.3$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{15}{8+2\sqrt{15}} = \frac{15}{15,75} = 0,95(cm)$$

Vậy $r = 0,95(cm)$.

Bài 4. Cho ba điểm J, I, J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ = 10cm$, $IJ' = 4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I.

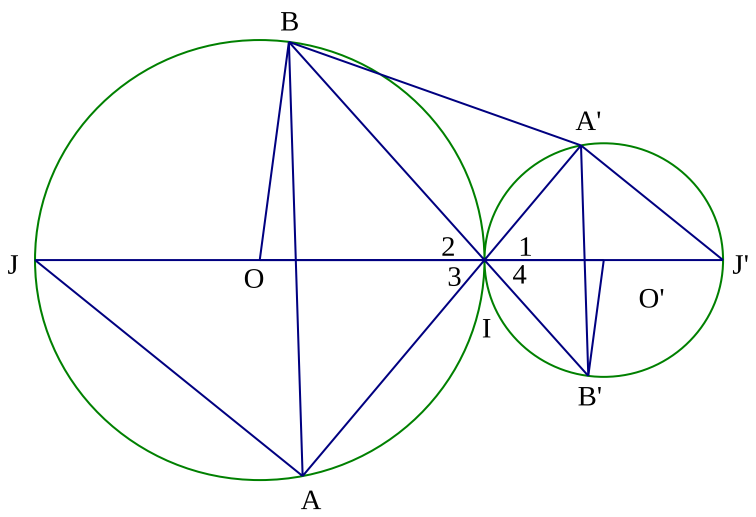
b) Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ \backsim \Delta A'IJ'$.

c) Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB \backsim \Delta IA'B'$.

d) Chứng minh rằng: $\Delta OAB \backsim \Delta O;A'B'$.

e) Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì vì sao ?

Lời giải



a) Ta có: $OO' = OI + O'I$. Vậy Hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại I

b) Xét ΔAIJ và $\Delta A'IJ'$ có: $\begin{cases} A = A' = 90^0 \\ I_1 = I_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta AIJ \backsim \Delta A'IJ'$

c) $\Delta AIJ \backsim \Delta A'IJ'(gg) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IJ}{JI'} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}\,(1)$

$\Delta OIB \backsim \Delta O'IB'(gg) \Rightarrow OB//O'B' \Rightarrow B_1 = B_1' \Rightarrow \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2}\,(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{5}{2}; AIB = A'IB \Rightarrow \Delta IAB \backsim \Delta IA'B'(cgc)$

d)

$\Delta IAB \sim \Delta IA'B'(cgc) \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{5}{2}; \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{AB}{A'B'} \Rightarrow \Delta AOB \sim \Delta A'O'B'$

e) $\Delta AOB \backsim \Delta A'O'B' \Rightarrow OBA = O'B'A'; OBI = O'B'I' \Rightarrow ABI = AB'I' \Rightarrow AB//A'B'$

Tứ giác $ABA'B'$ có hai cạnh đối song song vậy là hình thang.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

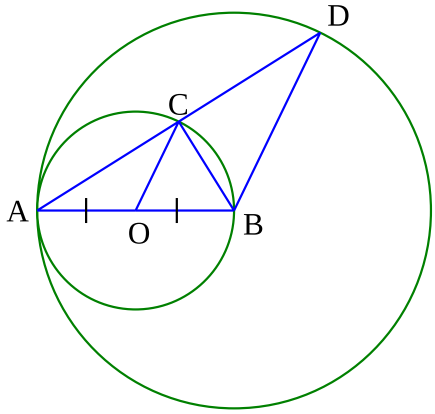
Bài 5. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O;OA)$ và $(B;BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) théo thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A.

b) Chứng minh $AB = CD$.

c) Chứng minh $OC//BD$.

Lời giải



a) Ta có A, O, B thẳng hàng (1)

$OB = AB - OA\,(2)$

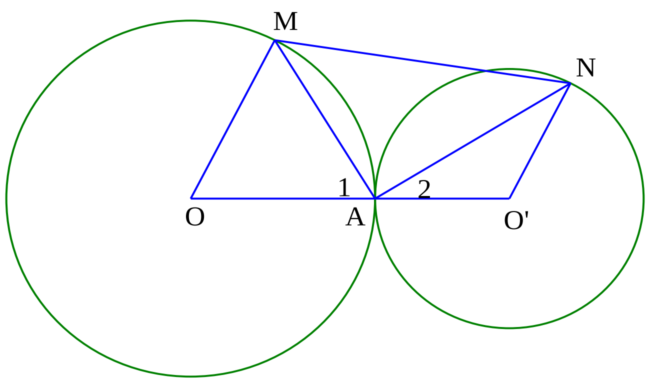
Từ $(1)(2) \Rightarrow (O;OA)$ và $(B;BA)$ tiếp xúc tại A

b) ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AB là đường kính nên tam giác này vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AC = CD$

c) OC là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow OC//BD$

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

Lời giải



Ta có ΔOAM cân tại $O \Rightarrow AOM = 180^0 - 2A_1$ (1)

$\Delta O'AN$ cân tại $O' \Rightarrow AO'N = 180^0 - 2A_2$ (2)

Cộng $(1)(2)$ theo vế, ta được:

$AOM + AO'N = 360^0 - 2\left(A_1 + A_2\right)$

$\Rightarrow A_1 + A_2 = \dfrac{360^0 - \left(AOM + AO'N\right)}{2}$ (3)

Mà $AOM + AO'N = 180^0$

Từ $(3) \Rightarrow A_1 + A_2 = \dfrac{360^0 - 180^0}{2} = 90^0$

Ta có: $MAN = 180^0 - \left(A_1 + A_2\right) = 90^0$

Vậy ΔMAN vuông tại A

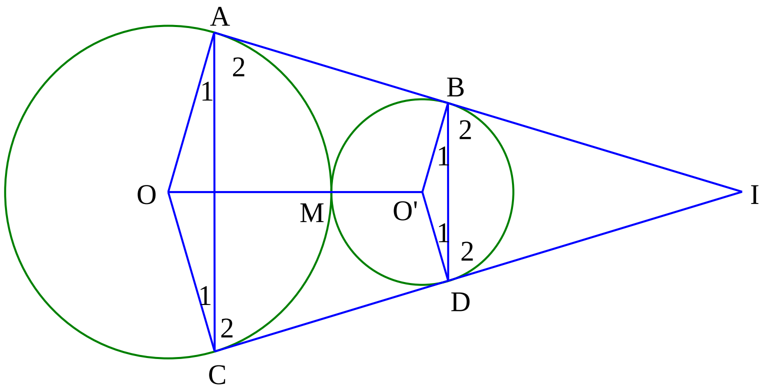
Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A, C \in (O)$ và $B, D \in (O')$.

a) Chứng minh $\Delta IBD \backsim \Delta IAC$.

b) Chứng minh $\Delta BO'D \backsim \Delta AOC$.

c) Chứng minh $BD // AC$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $IB = ID; IA = IC$

Hai tam giác IBD và IAC cùng cân tại I

Hai tam giác này có góc ở đỉnh chung là góc

$AIC \Rightarrow \Delta IBD \backsim \Delta IAC$

b) Do $\Delta IBD \backsim \Delta IAC \Rightarrow B_2 = A_2$

$\Rightarrow \underbrace{90^0 - B_2}_{B_1} = \underbrace{90^0 - A_2}_{A_1} \left(B = A = 90^0\right)$

Hai tam giác cân $BO'D$ và AOC có một góc ở đáy bằng nhau ($B_1 = A_1$) nên $\Delta BO'D \backsim \Delta AOC$

c) Ta có: $B_2 = A_2$, hai góc này ở vị trí đồng vị và bằng nhau nên $BD//AC$

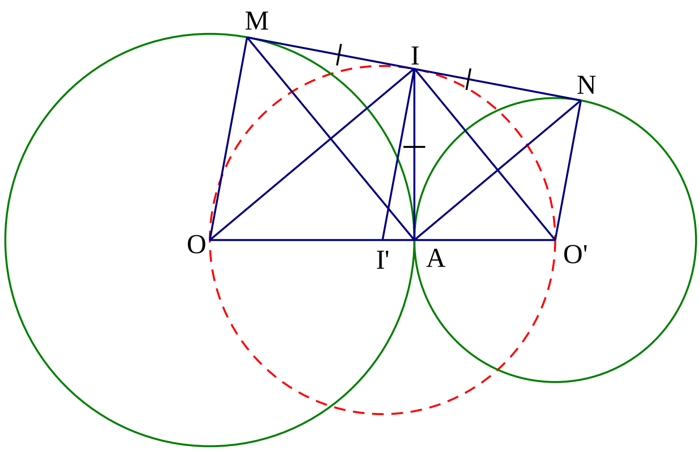
Bài 8. Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I.

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.

Lời giải



a) Ta có: $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A

Do đó OI và OI' lần lượt là phân giác của hai góc kề bù MIA và AIN nên $OI \perp IO' = I$

Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I

b) Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = I'O'$, nên II' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'

Mặt khác tứ giác $OMNO'$ là hình thang, II' là đường trung bình của hình thang này, do đó $II' // OM; OM \perp MN \Rightarrow II' \perp MN = I$

Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I

c) Tam giác OIO' vuông tại I ta có đường cao IA, nên ta có:

$IA^2 = OA.O'A = 48.27 \Longrightarrow IA = 36(cm)$

Diện tích tam giác OIO' là: $S_{OIO'} = \dfrac{OO'.IA}{2} = \dfrac{75.36}{2} = 1350(cm^2)$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB.

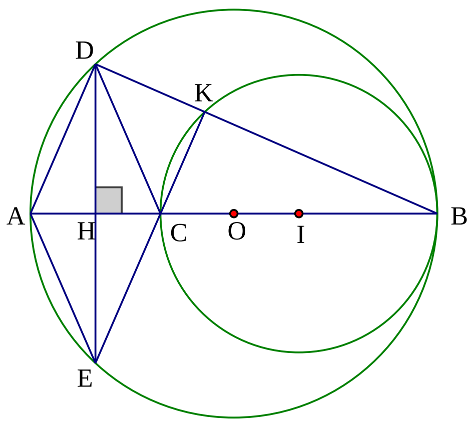
a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O).

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I).

Lời giải



a) Ta có (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) Tứ giác $ADCE$ là hình thoi

c) Có: $CK \perp AB, AD \perp DB \Rightarrow CK // AD$, mà $CE // AD \Rightarrow B, K, D$ thẳng hàng

d) Ta có: $HKD = HDK; IKB = IBK \Rightarrow HKD + IKB = HDK + IBK = 90^0 \Rightarrow IKH = 90^0$ đpcm

Bài 10. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

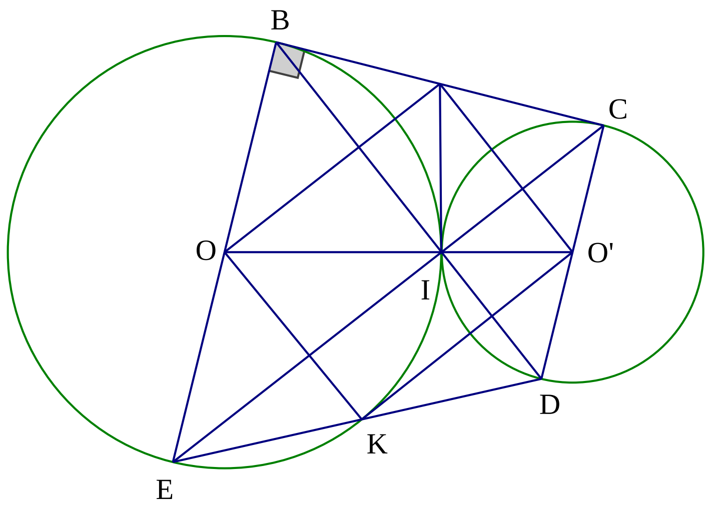
a) Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $\Delta BAC, \Delta DAE$ có diện tích bằng nhau.

c) Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC.

d) Cho $OA = 4,5cm; O'A = 2cm$. Tính AI, BC, CA.

Lời giải



a) Xét ΔABC, có $BI = IC = AI \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow BAC = 90^0$

Lại có: $BAD = CAE = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $\Delta BAD \backsim \Delta EAC\left(gg\right) \Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow S_{ABC} = S_{DAE}$

c) Có $\lozenge OIO'K$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông)

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, có đường kính là IK mà: $IK \perp BC \equiv I$

d) Ta có: $AI^2 = OA.O'A = 4,5.2 = 9 \Rightarrow AI = 3cm$

Xét $\Delta BCD(B = 90^0) \Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36} \Rightarrow AB = 2,68cm$

Xét $\Delta ABC(A = 90^0) \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow CA^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 7,2 \Rightarrow AC = 5,4cm$

Bài 11. Cho hai đường tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';r\right)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in \left(O\right), C \in \left(O'\right)$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

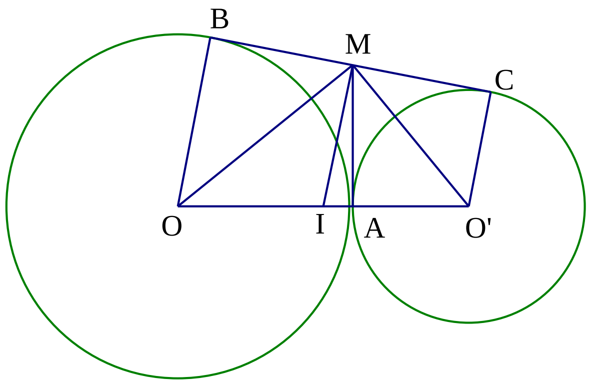
a) Tính MA theo R và r.

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r.

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(I; IM\right)$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $O'MO = 90^0$

tính được: $MA = \sqrt{Rr}$

b) Chứng minh $S_{BCOO'} = (R+r)\sqrt{Rr}$

c) Chứng minh được: $\Delta BAC \backsim \Delta OMO' \Rightarrow \dfrac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\dfrac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{S_{OMO'}.BC^2}{(OO')^2} = \dfrac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

d) Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = \{M\}$.

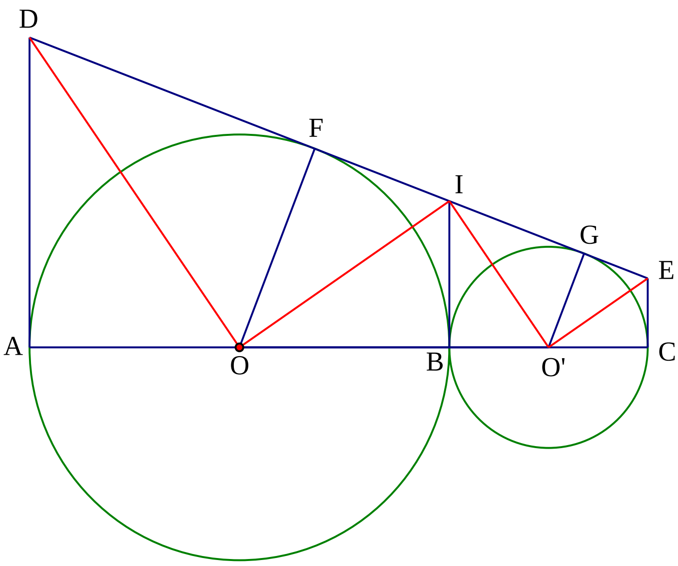
Bài 12. Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB = 4BC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn (O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông.

b) Đặt $O'C = a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI, EG và AD theo a.

c) Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta có: $\Delta IOO'$ vuông tại I , ΔOID vuông tại $O, \Delta IO'E$ vuông tại O'

b) Ta có: $OB = 2BC = 4a$

$\Delta IOO'(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow IB \perp OO' \Rightarrow IB^2 = OB.O'B = 4a^2 \Rightarrow IB = 2a$

$\Delta IO'E(O' = 90^0) \Rightarrow O'G^2 = EG.GI \Rightarrow GE = \dfrac{O'G^2}{GI} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}\left(IG = IB = IF = 2a\right) \Rightarrow AD = 8a$

c) Ta có: $S_{ACED} = \dfrac{1}{2}(EC + AD).AC = \dfrac{1}{2}(8a + \dfrac{a}{2}).10a = 42{,}5a^2$

Bài 13. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC.

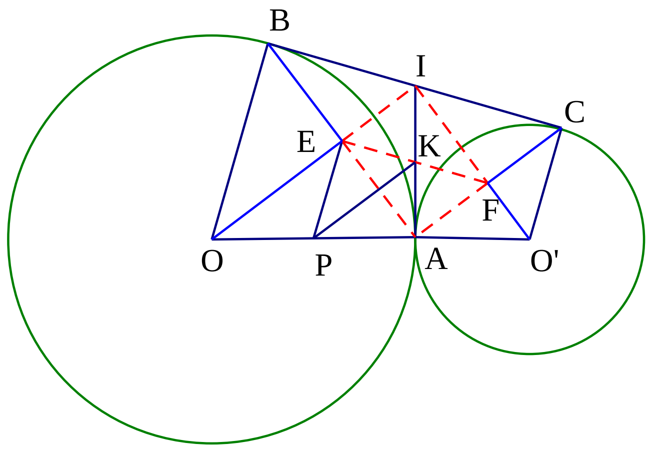
a) Chứng minh bốn điểm A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này.

b) Chứng minh: $IE.IO + IF.I'O = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$.

c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh được tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật và K là trung điểm của AI

b) Có: $IE.IO = IB^2 = \dfrac{BC^2}{4}; IF.IO' = IC^2 = \dfrac{BC^2}{4} \Rightarrow 2\left(IE.IO + IF.IO'\right) = AB^2 + AC^2$

c) PK là đường trung bình của ΔAOI và trung trực của EA

Ta có: $\Delta PEK = \Delta PAK \Rightarrow PEK = PAK \Rightarrow PEK = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

d) $\Delta ABC \backsim \Delta IOO' \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{IOO'}} = \left(\dfrac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{S_{IOO'}.BC^2}{O'O^2}$

mà $BC = 2IA; O'O = 2a; S_{OIO'} = \dfrac{1}{2}.2a.IA = a.IA \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{IA^2}{a}$

$IA^2 = R.R' \le \left(\dfrac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow IA$ lớn nhất bằng a khi $R = R'$.

Bài 14. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB.

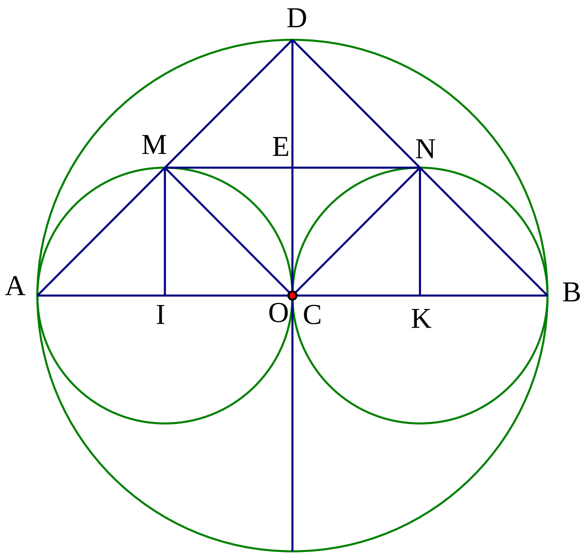
a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau.

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N.

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất.

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Đường tròn (I) và đường tròn (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C (vì $IK = IC + CK$)

b) Vì AC là đường kính của (I) nên ΔAMC vuông tại M

Tương tự ta có ΔBNC vuông tại N; ΔDAB vuông tại D

Suy ra tứ giác $DMCN$ là hình chữ nhật

Gọi E là giao điểm của MN và DC. Ta có $\Delta EMC, \Delta IMC$ cân

$\Rightarrow EMC = ECM; IMC = ICM$

Mà $ICM + ECM = ACD = 90^0$, do đó $IMN = 90^0 \Rightarrow MN \perp IM$

Tương tự ta cũng có $MN \perp NK \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

c) Vì $DMCN$ là hình chữ nhật nên $MN = CD \Rightarrow MN$ có độ dài lớn nhất khi CD có độ dài lớn nhất

Ta có $CD \le OD = R$ (không đổi), dấu "=" xảy ra khi $C \equiv O$

Vậy khi $C \equiv O$ thì MN có độ dài lớn nhất là R

d) $S_{DMCN} = DM.CN$, ΔCAD có $ACD = 90^0; CM \perp AD; DC^2 = DM.DA \Rightarrow DM = \dfrac{DC^2}{DA}$

ΔDCB có $DN = \dfrac{DC^2}{DB}$. Do đó $S_{DMCN} = \dfrac{DC^2}{DA}.\dfrac{DC^2}{DB} = \dfrac{DC^4}{DA.DB}$

Lại có $DA.DB = DC.AB\left(= 2S_{ADB}\right) \Rightarrow S_{DMCN} = \dfrac{DC^4}{DC.DB} = \dfrac{DC^3}{2R} \le \dfrac{R^3}{2R} = \dfrac{R^2}{2}\left(CD \le R\right)$

Vậy diện tích tứ giác $DMCN$ lớn nhất khi điểm C trùng với điểm O.

DẠNG 2

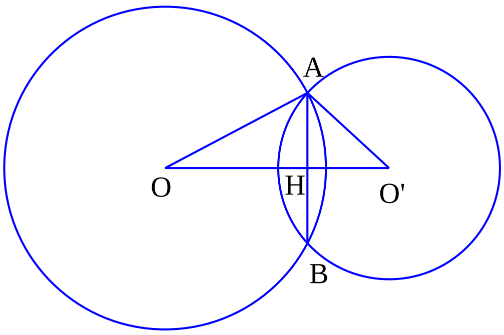
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO'=13cm$.

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A, B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB.

Lời giải



a) Ta có: $12-5<13<12+5\left(R-R'<d<R+R'\right)$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt

b) $OA^2+O'A^2=12^2+5^2=169; O'O^2=13^2=169$

$\Delta OAO'$ có: $OA^2+O'A^2=O'O^2$, theo định lý Pytago đảo tam giác $\Delta OAO'$ vuông tại A

Có $OA\perp O'A$ do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') và $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$O'O$ là đường trung trực của đoạn AB

Gọi H là giao điểm của $O'O$ và AB nên $AH.O'O=OA.O'A \Rightarrow AH=\dfrac{OA.O'A}{O'O}=\dfrac{12.5}{13}=\dfrac{60}{13}(cm)$

Vậy $AB=2AH=\dfrac{120}{13}(cm)$.

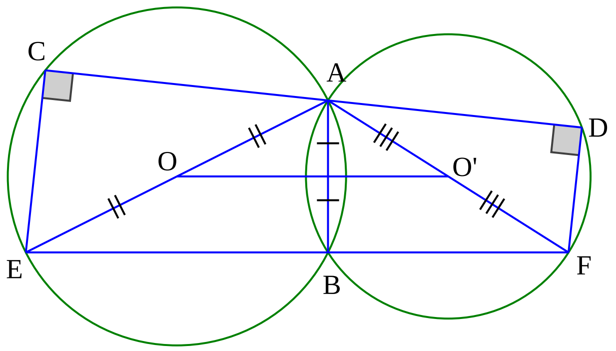
Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$.

a) Chứng minh ba điểm E, B, F thẳng hàng.

b) Chứng minh $EC//FD$.

c) Chứng minh $OO'=\dfrac{1}{2}EF$.

Lời giải



a) ΔABE nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AE là đường kính nên $ABE = 90^0$

Tương tự: $ABF = 90^0$

$\Rightarrow EBF = ABE + ABF = 180^0$

Vậy E, B, F thẳng hàng.

b) Tương tự ta có:

$ACE = ADF = 90^0 \Rightarrow EC \perp CD; FD \perp CD$

$\Rightarrow EC // FD (\perp CD)$

c) Ta có: $OA = OE; O'A = O'F$

$\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $\Delta AEF \Rightarrow OO' = \dfrac{1}{2} EF$

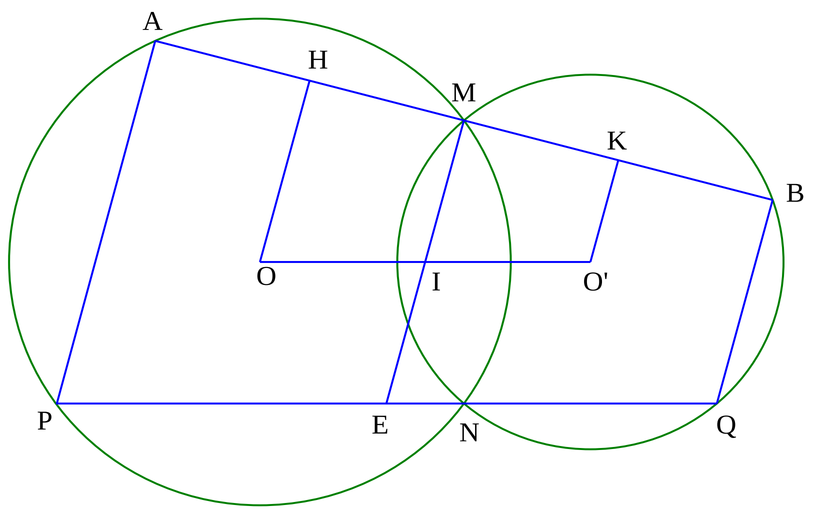
Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

b) MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP = EQ$.

c) Chứng minh: $IH = IK$.

Lời giải



a) Kẻ: $OH \perp AM; O'K \perp MB \Rightarrow OH // O'K$

Tứ giác $HKOO'$ là hình thang, $MI \perp AB \Rightarrow \begin{cases} MI // OH \\ IO // IO' \end{cases} \Rightarrow MH = MK$

Ta lại có: $OH \perp AM \Rightarrow HA = HM = MK = KB \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có ME là đường trung bình của hình thang $ABQP \Rightarrow EP = EQ$

c) Xét ΔHIK, có IM là đường trung tuyến, đường cao $\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại I (đpcm).

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox, Oy. Đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

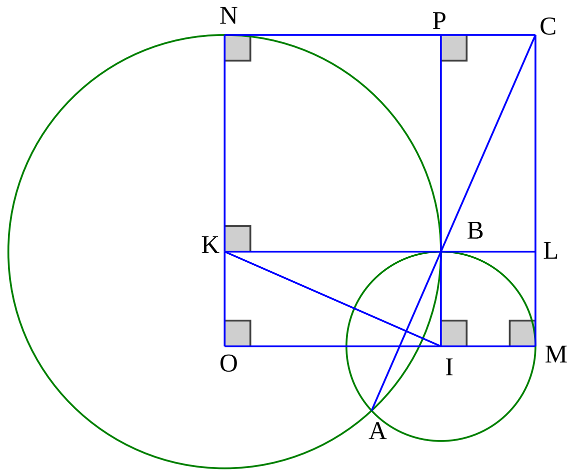
a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự đi động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) $|OI - OK| < IK < OI + OK \Rightarrow$ Ta có (I) và (K) luôn cắt nhau

b) Do $OI = NK; OK = IM \Rightarrow OM = ON$

Mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $OMCN$ là hình vuông

c) Gọi L là giao điểm của KB và MC; P là giao điểm của IB và $NC \Rightarrow OBKI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta BLC = \Delta KIO \Rightarrow LBC = OKI = BIK$

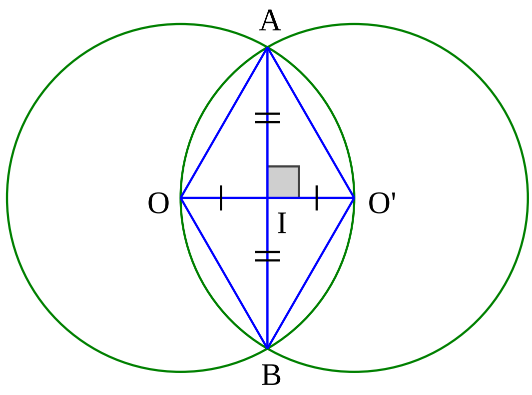
Mà: $BIK + IBA = 90^0 \Rightarrow LBC + IBA = 90^0$, có: $LBC + LBI + IBA = 180^0$

d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$.

Lời giải



Ta có: $OA = OB = O'A = O'B = R$

$\Diamond OAO'B$ là hình thoi $\Rightarrow S_{OAO'B} = \dfrac{OO'.AB}{2}$

$\Delta OAO'$ là tam giác đều có AI là đường cao

$AI = \dfrac{OA.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}; AB = 2AI = R\sqrt{3}$

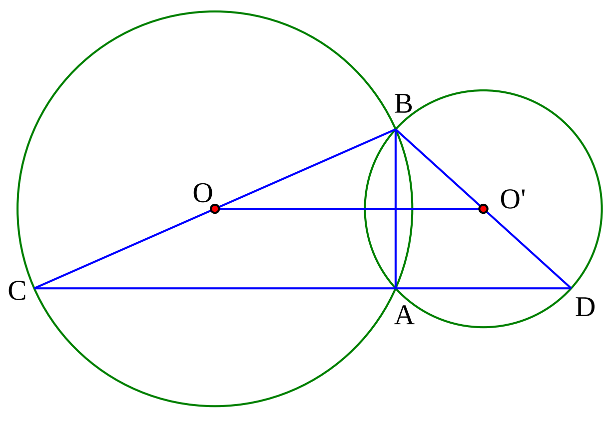
Do đó: $S_{OAO'B} = \dfrac{R.R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Biết $OO' = 5cm, OB = 4cm, O'B = 3cm$. Tính diện tích tam giác BCD.

Lời giải



a) Cách 1: $\Delta BAC(AO = \dfrac{1}{2}BC) \Rightarrow BAC = BAD = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Cách 2: ΔBCD có OO' là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CD$ (1)

ΔABC có OI là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CA$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng.

b) Ta có: $\Delta OBO'$ vuông tại $B \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại $B \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}.BC.BD = \frac{1}{2}.8.6 = 24(cm^2)$

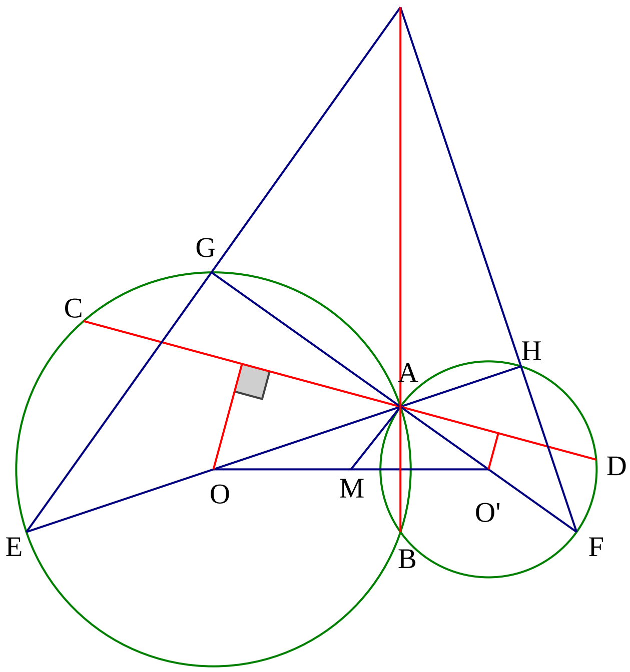
Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

a) Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$.

b) Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA. Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G.

- Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất.

Lời giải



Vẽ $OP \perp AC; O'Q \perp AD \Rightarrow \lozenge OPO'Q$ là hình thang vuông tại P và Q

a) Kẻ $OP, O'Q \perp CD \Rightarrow MA \perp CD$ và M là trung điểm của OO'

b) Xét ΔEAF có AB, FG, EH là ba đường cao nên đồng quy tại 1 điểm .

Ta có: $CD = 2PQ$

Hình thang $OPQO'$ vuông tại P và Q nên $OO' > PQ$

Vậy PQ lớn nhất khi $PQ//OO'$ hay tứ giác $OPQO'$ là hình chữ nhật.

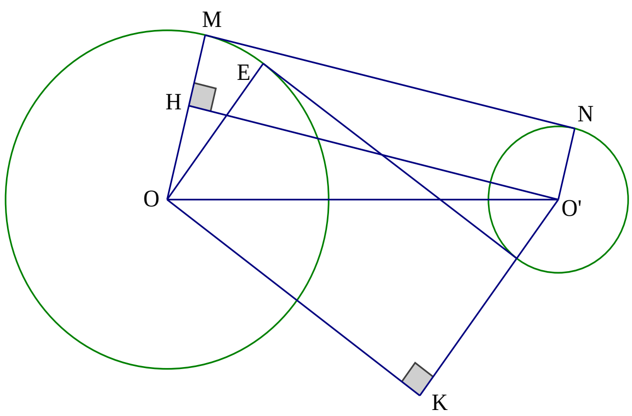
DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO'=10cm, MN=8cm, EF=6cm$.

b) $OO'=13cm, MN=12cm, EF=5cm$.

Lời giải



a) Kẻ $O'H\perp OM; OK\perp O'F$

Ta có: $OH=R-r; O'K=R+r$,

mà $OH^2=O'O^2-MN^2=36; O'K^2=O'O^2-EF^2=64 \Rightarrow OH=6; O'K=8 \Rightarrow R=7cm; r=1cm$

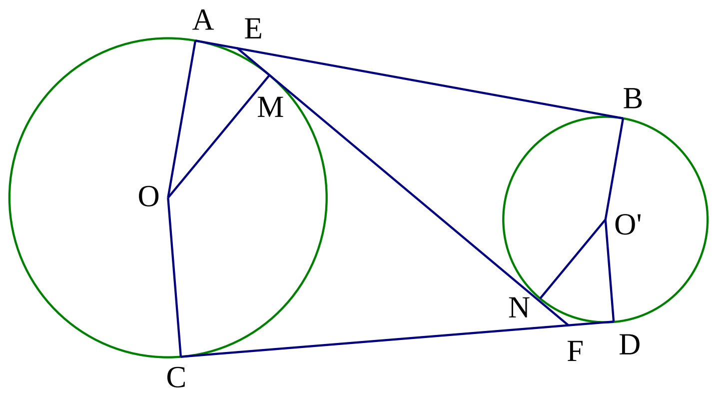
b) Tương tự tính được: $R=\dfrac{17}{2}cn, r=\dfrac{7}{2}cm$

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD ($A,C\in(O); B,D\in(O')$). Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB,CD theo thứ tự tại E,F, $(M\in(O), N\in(O'))$. Chứng minh:

a) $AB=EF$.

b) $EM=FN$.

Lời giải



a) Ta có: $AB = AE + BE = EM + EN$ và $CD = FD + FC = NF + NE$

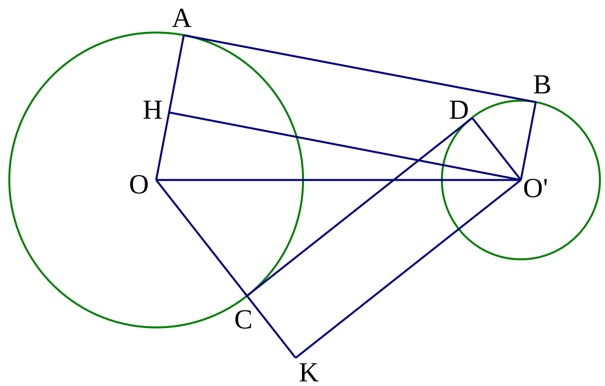
$\Rightarrow AB + CD = 2EF \Rightarrow AB = EF$

b) Ta có: $EM = AB - EB = EF - EN = NF$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;6cm)$ và $(O';2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($A,C \in (O); B,D \in (O')$). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

Lời giải



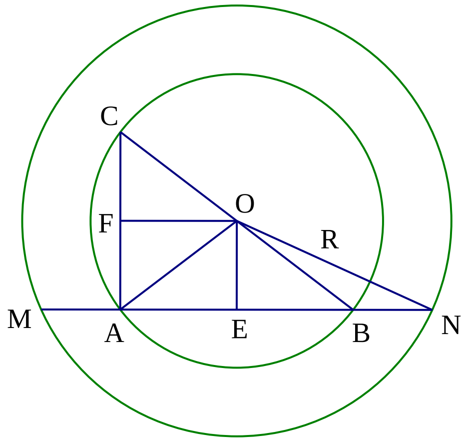
a) Kẻ $O'H \perp OA; O'K \perp OC$

Tính được: $OH = 4cm, OK = 8cm$,

Đặt $CD = x \Rightarrow AB = 2x; O'O^2 = 64 + x^2$ và $O'O^2 = 16 + 4x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$.

Bài 4. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2 + AM^2 + AN^2\right)$ theo R và r.

Lời giải



Kẻ $OE \perp AB; OF \perp AC$. Đặt $AC = a, AM = b, AN = c$

Ta có: $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2; R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$

Chứng minh được: $a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(r^2 + R^2\right)$

CHƯƠNG 6
HÀM SỐ $y = ax^2 \ (a \neq 0)$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 1
HÀM SỐ $y = ax^2 \ (a \neq 0)$

1. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Hàm số xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$, ta thực hiện các bước sau:

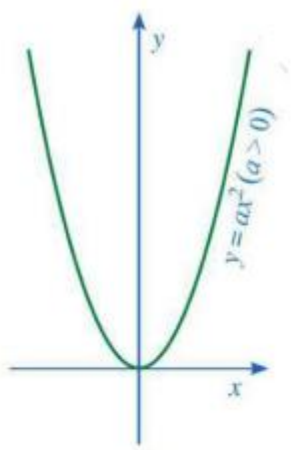
Bước 1. Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x.

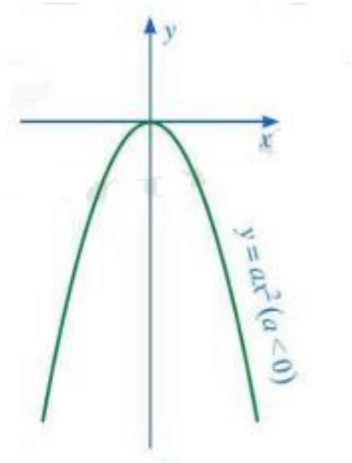
Bước 2. Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm thuộc đồ thị của hàm số đó.

Bước 3. Vẽ parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm đã xác định ở bước 2, ta nhận được đồ thì của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường cong luôn đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là Parabol với đỉnh O

- Nếu $a > 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía trên trục hoành và O là điểm thấp nhất.
- Nếu $a < 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất.





DẠNG 1
TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-5, 5, 7$

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -18.

Lời giải

a) Giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

b)

Thay $x = -5$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2}.(-5)^2 = -\frac{25}{2}$

Thay $x = 5$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2}.5^2 = -\frac{25}{2}$

Thay $x = 7$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2}.7^2 = -\frac{49}{2}$

c) Thay $y = -18$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được:

$-18 = -\frac{1}{2}.x^2$

$x^2 = 36$

$x = -6$ và $x = 6$

Vậy có hai điểm $(-6; -18), (6; -18)$ thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-3; 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của a, biết rằng $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

Lời giải

a) Ta có: $f\left(-3\right)=27;\ f\left(2\sqrt{2}\right)=24;\ f\left(1-2\sqrt{3}\right)=39-12\sqrt{3}$

b) Ta có: $f(a)=12+6\sqrt{3}\Leftrightarrow 3a^2=12+6\sqrt{3}\Leftrightarrow a=\pm\left(\sqrt{3}+1\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{4}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-8,-6,5$.

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 4.

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -6.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=-2x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-2;0$ và $3-2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của a, biết rằng $f(a)=-10+4\sqrt{6}$

c) Tìm điều kiện của b biết rằng $f(b)\geq 4b+6$.

Lời giải

a) Ta có: $f(-2)=-8;\ f(0)=0;\ f(3-2\sqrt{2})=-34+24\sqrt{2}$

b) Ta có: $f(a)=-10+4\sqrt{6}\leftrightarrow a=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

c) Ta có: $f(b)\geq 4b+6\Rightarrow -2b^2\geq 4b+6\Leftrightarrow b^2+2b+3\leq 0\Leftrightarrow \left(b+1\right)^2+2\leq 0\Rightarrow b\in\varnothing$

DẠNG 2

VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

b) Các điểm $M(-4;32), N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

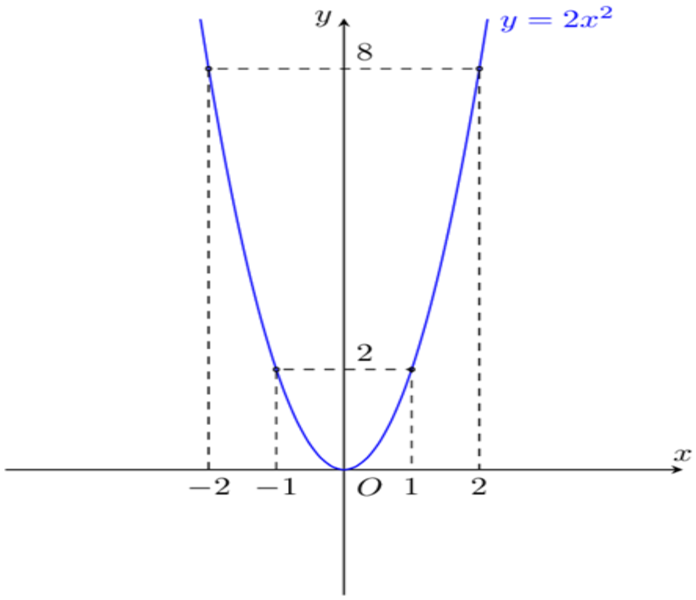
Lời giải

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

- Vẽ các điểm $A(-2;8), B(-1;2), O(0;0), C(1;2), D(2;8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ trong mặt phẳng Oxy.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = 2x^2$



b)

- Thay $x = -4$ vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ ta được: $y = 2.(-4)^2 = 32$, do đó điểm $M(-4;32)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ ta được: $y = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, do đó điểm $N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x=\frac{3}{4}$ vào đồ thị của hàm số $y=2x^2$ ta được: $y=2.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{8}\neq\frac{9}{16}$, do đó điểm $Q\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 2. Cho hàm số: $y=-\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Các điểm $E(-8;-16), F\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{36}\right), Q\left(\frac{2}{5};\frac{4}{100}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

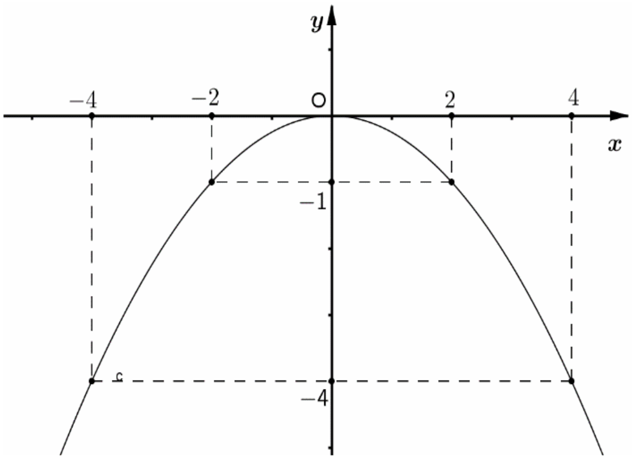
Lời giải

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

- Vẽ các điểm $A(-4;-4), B(-2;-1), O(0;0), C(2;-1), D(4;-4)$ thuộc đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{4}x^2$ trong mặt phẳng Oxy.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{4}x^2$



b) Các điểm $E(-8;-16), F\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{36}\right), Q\left(\frac{2}{5};\frac{4}{100}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

- Thay $x=-8$ vào đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y=-\frac{1}{4}(-8)^2=-16$, do đó điểm $E(-8;-16)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x=-\frac{1}{3}$ vào đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{1}{36}$, do đó điểm $F\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{36}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = \frac{2}{5}$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{4}{100} \neq \frac{4}{100}$, do đó điểm $Q\left(\frac{2}{5};\frac{4}{100}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

b) Các điểm $M\left(-5;-\frac{25}{2}\right), N\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{8}\right), Q\left(\frac{1}{2};2\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

Lời giải

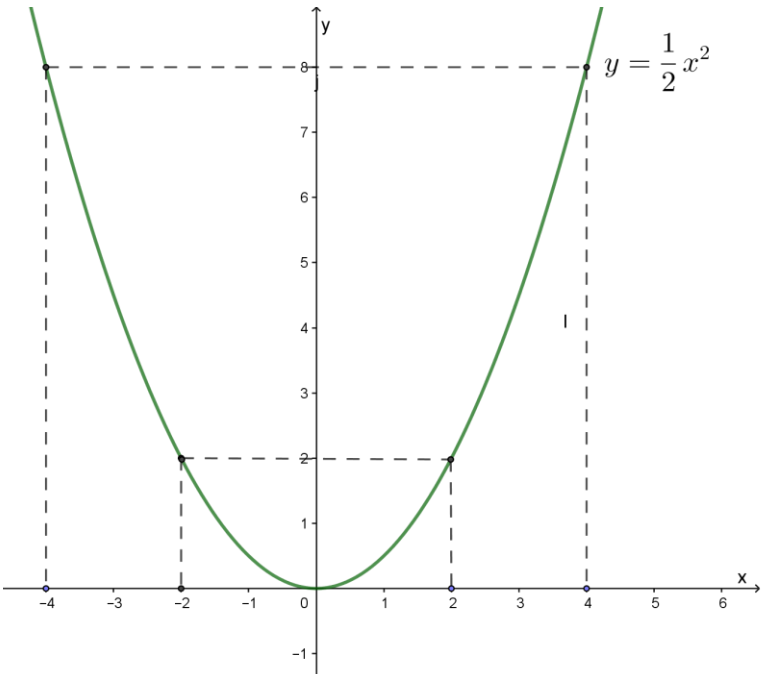
a)

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

- Vẽ các điểm $A(-4;8), B(-2;2), O(0;0), C(2;2), D(4;8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ trong mặt phẳng Oxy.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$



b)

- Thay $x=-5$ vào đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y=\frac{1}{2}.(-5)^2=\frac{25}{2}\neq-\frac{25}{2}$, do đó điểm $M\left(-5;-\frac{25}{2}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x=-\frac{3}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y=\frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$, do đó điểm $N\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{8}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x=\frac{1}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\neq 2$, do đó điểm $Q\left(\frac{1}{2};2\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y=3x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=3x^2$.

b) Các điểm $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right), N\left(\frac{3}{4};\frac{27}{16}\right), Q\left(\frac{5}{2};\frac{75}{2}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ là $-\frac{2}{3}$.

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 9.

Bài 5. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $-\frac{1}{27}$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $\frac{1}{64}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-x^2$ và $y=x-2$.

a) Vẽ đồ thị hai hàm số $y=-x^2$ và $y=x-2$ trên cùng hệ trục

b) Các điểm $M(1;-1), N(-2;-4), Q(2;-4)$ có cùng thuộc hai đồ thị hàm số trên hay không?

Bài 8. Cho đồ thị hàm số $y=x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

c) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải

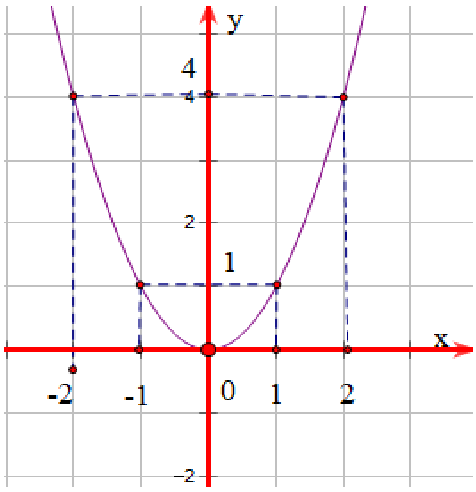
a)

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Vẽ các điểm $A(-2;4), B(-1;1), O(0;0), C(1;1), D(2;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ trong mặt phẳng Oxy.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = x^2$



b) Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_C = 16 \Leftrightarrow x^2{}_C = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.

c) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ.

Ta có: $d(D,Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D,Oy) = |x_D|$.

Theo giả thiết ta có: $x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0$ (loại) hoặc $|x_D| = 1$.

Vậy $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.

DẠNG 3
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2$ (P).

a) Hãy xác định hàm số (P) biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.

b) Tìm m sao cho $B(m;m^3)$ thuộc Parabol.

Lời giải

a) Ta có $A \in (P)$ nên thay điểm $A(2;4)$ vào đồ thị ta có

$4 = a.2^2$

$a = 1$

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được:

$m^3 = m^2$

$m^3 - m^2 = 0$

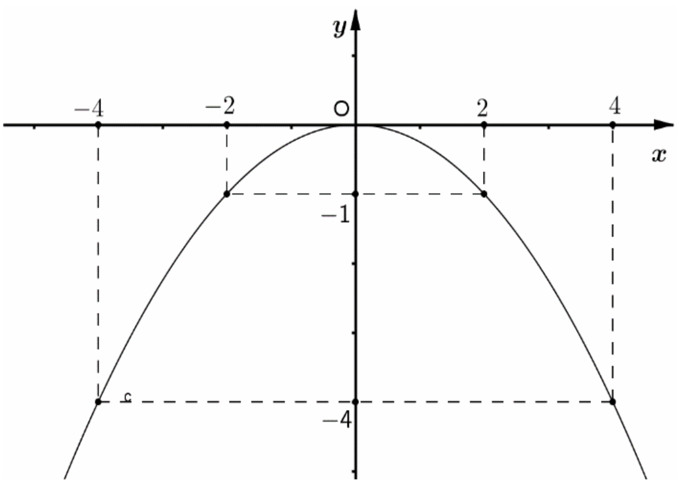
$m^2(m-1) = 0$

$m^2 = 0$ hoặc $m - 1 = 0$.

$m = 0$ hoặc $m = 1$.

Vậy $m = 0$ và $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



a) Xác định hê số a.

b) Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng 6.

c) Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng -25.

Lời giải

a) Từ đồ thị ta có điểm $(2;-1)$ thuộc parabol $y = ax^2$ nên

$-1 = a.2^2$

$a = -\frac{1}{4}$

b) Từ câu a, ta có parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$

Với $x = 6$ nên $y = -\frac{1}{4}.6^2 = -9$

Vậy điểm cần tìm là $(6;-9)$

c) Thay $y = -25$ vào parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta có:

$-25 = -\frac{1}{4}x^2$

$x^2 = 100$

$x = -10$ hoặc $x = 10$

Vậy các điểm cần tìm là $(-10;-25);(10;-25)$

Bài 3. Cho hàm số $y = (2m-1)x^2$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để $y = -2$ khi $x = -1$

b) Tìm giá trị của m biết $(x;y)$ thỏa mãn : $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $y = -2$ và $x = -1$ vào hàm số $y = (2m-1)x^2$ ta được:

$-2 = (2m-1)(-1)^2$

$m = \frac{-1}{2}$

Vậy $m = \frac{-1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta đi giải các hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ ta được nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Thay $x = 2; y = 1$ và hàm số $y = (2m-1)x^2$ ta có:

$1 = (2m-1).2^2$

$1 = 8m - 4$

$m = \frac{5}{8}$

Vậy $m = \frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2};4)$

b) Với giá trị a vừa tìm được, hãy:

+ Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ

+ Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 2

+ Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải

a) $A(-\sqrt{2};4) \in (P) \Rightarrow 4 = a\left(-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a = 2$

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $y = 2x^2$

+ Vẽ (P) : Học sinh tự vẽ nhé

+ Thay $y = 2$ vào hàm số $y = 2x^2$ ta có:

$2 = 2x^2$

$x = \pm 1$

$\Rightarrow (1;2);(-1;2)$

+ Gọi $M(x_0;y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = 2x_0^2$.

M cách đều Ox, Oy nên ta có:

$|x_0| = |y_0|$

$|x_0| = |2x_0^2|$

$2x_0^2 = |x_0|$

$2x_0^2 = -x_0$ hoặc $2x_0^2 = x_0$

$2x_0^2 + x_0 = 0$ hoặc $2x_0^2 - x_0 = 0$

$x_0(2x_0+1) = 0$ hoặc $x_0(2x_0-1) = 0$

Giải $x_0(2x_0+1) = 0$

$x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\frac{1}{2}$

Giải $x_0(2x_0-1) = 0$

$x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{1}{2}$

Do đó $x_0 \in \left\{-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right\}$

$\Rightarrow M_1(0;0); M_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right); M_3\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 5. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y=2x$ tại điểm A có hoành độ bằng 1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y=2x$ và đồ thị hàm số $y=ax^2$ với giá trị của a vừa tìm được ở câu a) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Dựa vào đồ thị, hãy xác định tọa độ giao điểm thứ hai (khác A) của hai đồ thị vừa vẽ trong câu b).

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2=2x \Leftrightarrow ax^2-2x=0$ (1)

Do đồ thị hàm số $y=ax^2$ cắt đường thẳng $y=2x$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên ta có $x=1$ là một nghiệm của phương trình (1).

Thay $x=1$ vào phương trình (1), ta có: $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy $a=2$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=2x$

Ta có bảng giá trị:

x	0	1
$y=2x$	0	2

Do đó, đồ thị hàm số $y=2x$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(1;2)$

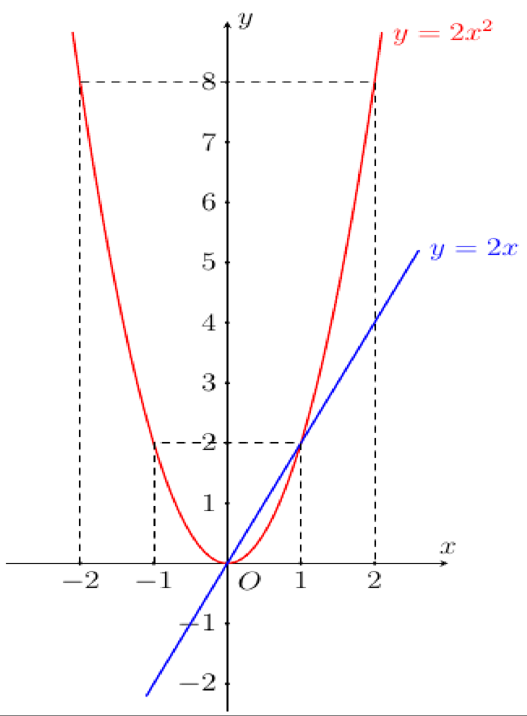
Vẽ đồ thị hàm số $y=2x^2$

Ta có bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=2x^2$	8	2	0	2	8

Do đó, đồ thị hàm số $y=2x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;8)$, $(-1,2)$, $(0;0)$, $(1;2)$ và $(2,8)$

Vẽ đồ thị hàm số



c) Dựa vào đồ thị trên, ta nhận thấy đồ thị hàm số $y = 2x^2$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x$ tại hai điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = 1$.

Vậy giao điểm thứ hai khác A của hai đồ thị hàm số là $B(0,0)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định giá trị của tham số m để các điểm sau thuộc đồ thị hàm số

a) $A(2;m)$ b) $B(-\sqrt{2};m)$ c) $C\left(m;\frac{3}{4}\right)$

Lời giải

a) Ta có $A(2;m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4}.2^2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B(-\sqrt{2};m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4}.2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C\left(m;\frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$. Vậy $\pm\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm

Bài 7. Xác định a để parabol $(P): y = (2a+1)x^2$ đi qua điểm $M(2;-1)$

Lời giải

Parabol $(P): y = (2a+1)x^2$ đi qua điểm $M(2;-1)$ thì thay $x = 2, y = -1$ vào $y = (2a+1)x^2$ ta có :

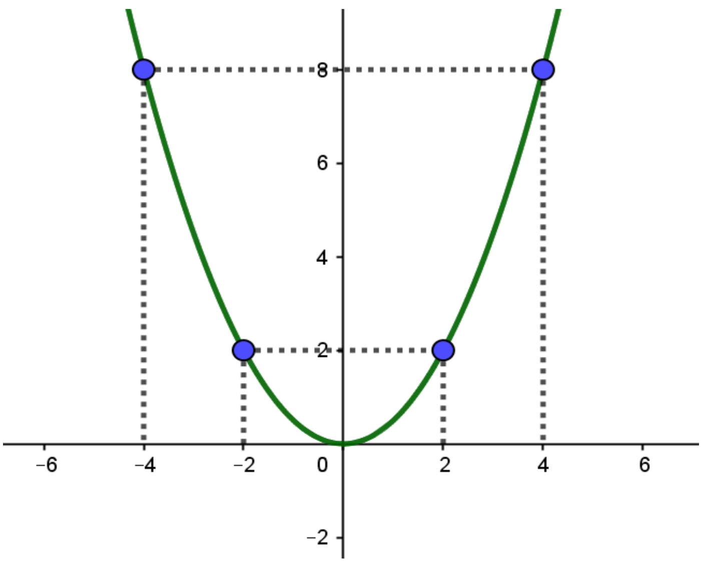
$-1 = (2a+1).4$

$2a + 1 = \frac{-1}{4}$

$a = -\frac{5}{8}$

Vậy $a = -\frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



a) Xác định hệ số a.

b) Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng -8.

c) Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng $\frac{81}{2}$.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P).

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ

b) Trong các điểm $A(1;2); B(-1;-1); C(10;-200)$, điểm nào thuộc (P), điểm nào không thuộc (P).

Lời giải

a) Học sinh tự vẽ

b) Thay $x=1; y=1$ vào (P), ta được đẳng thức luôn đúng do đó điểm A thuộc (P)

- Tương tự ta có điểm B, C không thuộc vào (P).

Bài 10. Cho hàm số $y = (3m+1)x^2$ với $m \neq \frac{-1}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

b) Đi qua điểm $B(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ -4x+3y=-5 \end{cases}$

Lời giải

a) Hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow m=0$

b)

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ -4x+3y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x-16y=8 \\ -12x+9y=-15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y=-7 \\ -4x+3y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Hàm số $y=(3m+1)x^2$ đi qua điểm có tọa độ $(2;1)$ nên

$1=(3m+1).2^2$

$1=12m+4$

$m=-\frac{1}{4}$

Vậy $m=-\frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho hàm số $y=(2m+1)x^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0;y_0)$ với $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=-3\\x^2-2y=2\end{cases}$

Lời giải

a) Thay $A\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ vào phương trình $y=(2m+1)x^2$ ta có:

$\frac{4}{3}=(2m+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow m=1$

b) $\begin{cases}2x+y=-3\\x^2-2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases} \Rightarrow (-2;1)$ là nghiệm của hệ phhương trình$\Rightarrow m=\frac{-3}{8}$

Thay $(-2;1)$ vào hàm số: $1=(2m+1)(-2)^2 \Rightarrow m=\frac{-3}{8}$

Bài 12. Tìm tọa độ của tất cả các điểm thuộc parabol $y=-2x^2$ có tung độ bằng -8.

Lời giải.

Thay $y=-8$ vào phương trình parabol: $y=-2x^2$, ta có:

$-2x^2=-8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

Vậy tọa độ tất cả các điểm thỏa mãn đề bài là: $(2;-8)$ và $(-2;-8)$.

Bài 13. Cho hàm số $y=(m-1)x^2 (m\neq 1)$ có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3};1)$

b)Với giá trị m vừa tìm được, hãy:

- Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ

- Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 1

- Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

Lời giải

a) Ta có (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3};1) \Rightarrow 1=(m-1).(-\sqrt{3})^2 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$

b) Ta có $y=\frac{1}{3}x^2$

- Vẽ (P): học sinh tự vẽ

Vì các điểm có hoành độ bằng 1 nên ta có: $y=\left(\frac{4}{3}-1\right).1^2 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \Rightarrow$ điểm cần tìm $\left(1;\frac{1}{3}\right)$

+

Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)\Rightarrow y_0=\frac{1}{3}x_0^2$.

tung độ gấp đôi hoành độ là: $y_0=2x_0$

hay

$\frac{1}{3}x_0^2=2x_0$

$\frac{1}{3}x_0^2-2x_0=0$

$x_0\left(\frac{1}{3}x_0-2\right)=0$

$x_0=0$ hoặc $\frac{1}{3}x_0-2=0$

$x_0=0$ hoặc $x_0=6$

$\Rightarrow(0;0);(6;12)$

Vậy các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ là: $(0;0);(6;12)$

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$

Bài 1. Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m(Bỏ qua độ dày của cổng).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabo $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

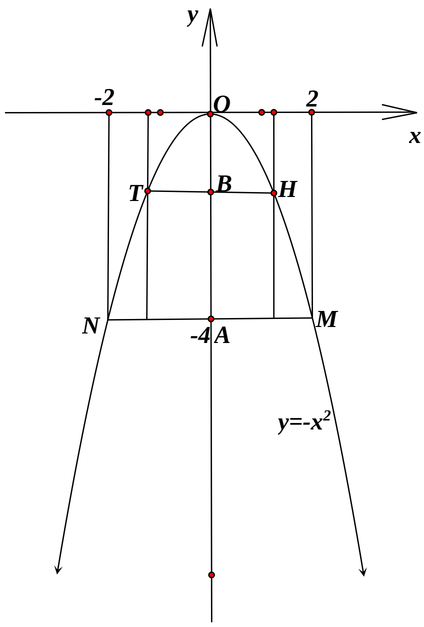
Lời giải

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét.

Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$.

Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pythagore ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2;-4), N(-2;-4)$.

Do $M(2;-4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.



b) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.

Xét đường thẳng $(d): y = -\dfrac{3}{2}$

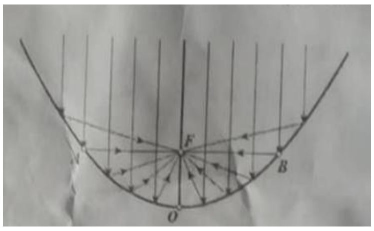
(ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

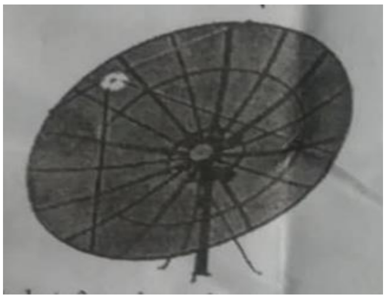
suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{3}{2}\right); H\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$.

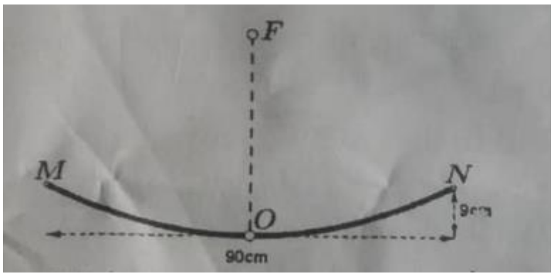
Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Bài 2. Các ăng ten parabol thu sóng hoạt động dựa theo nguyên lý: mọi tia sóng song song với trục của parabol đều có tia phản xạ đi qua tiêu điểm F của parabol (vì vậy nếu ta đặt thiết bị thu sóng tại F thì sẽ thu sóng được tốt nhất). Người ta chứng minh được rằng: Nếu đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B thì $OF = \dfrac{1}{4}AB$ với O là đỉnh của parabol (tham khảo hình vẽ).



Các tia sáng đều tập trung tại F

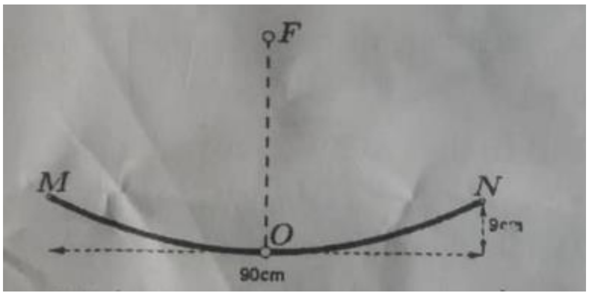




Mô hình parabol của một mặt cắt qua trục của một ăng ten parabol

Tính độ dài đoạn OF ứng với mô hình trên của một ăng ten parabol (ngang 90cm và cao 9cm).

Lời giải



Ta có $(P): y = ax^2$ đi qua điểm $N(45;9)$

Do đó $9 = a.45^2$

Nên $a = \dfrac{1}{225}$. Suy ra $y = \dfrac{1}{225}x^2$

Đường thẳng vuông góc Oy tại F cắt (P) tại A, B với $x_B > 0$

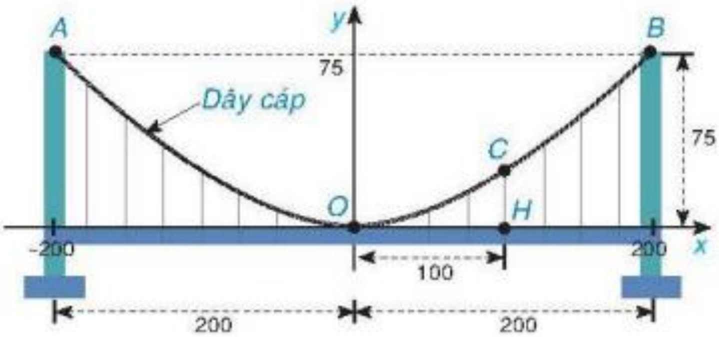
Vì $y_B = OF = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{1}{2}FB = \dfrac{1}{2}x_B$ và $B \in (P)$ nên $\dfrac{1}{2}x_B = \dfrac{x_B^2}{225} \Leftrightarrow x_B = \dfrac{225}{2}$

Vì vậy $OF = \dfrac{1}{2}x_B = \dfrac{225}{4} = 56,25(cm)$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

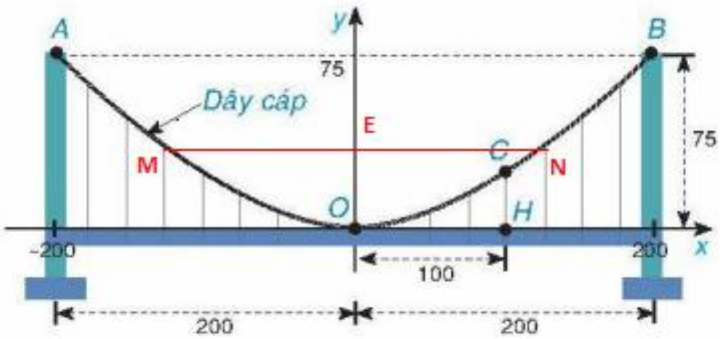
Bài 3. Một cái cổng vòm hình parabol có phương trình $y=-\frac{1}{2}x^2$. Biết chiều rộng là $5m$. Hỏi xe tải có chiều rộng là $2,5m$ và chiều cao là $3m$ có đi qua được cái cổng trên không?

Bài 4. Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây câu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có dạng đồ thị của hàm số $y=ax^2$ và được treo trên các đỉnh tháp như hình vẽ.

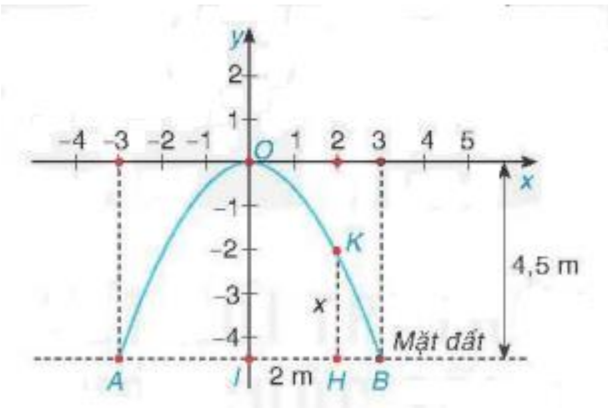


a) Tính độ dài đoạn CH của dây cáp, biết điểm H cách tâm O của cây cầu là $100m$ (giả sử mặt cầu của cây cầu bằng phẳng).

b) Nếu có đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm $E(0;27)$ và đồng thời cắt parabol tại 2 điểm M,N (như hình vẽ) thì khoảng cách hai điểm M,N lần lượt đến tâm O là bao nhiêu?



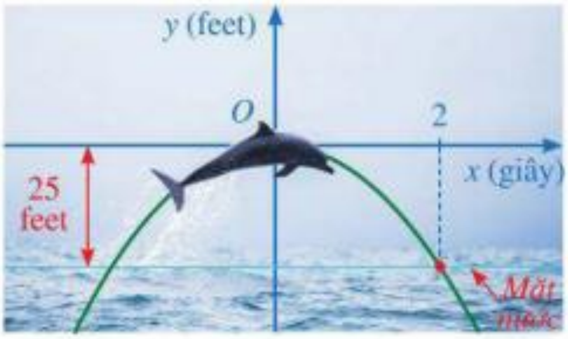
Bài 5. Một cái cổng vòm hình parabol $y = ax^2$ như hình vẽ . Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6m$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5m$.



a) Tính độ dài đoạn HK biết cách điểm H cách điểm chính giữa cổng là $2m$.

b) Một xe tải có chiều rộng là $2m$ và chiều cao là $3m$ có đi qua được cái cổng trên không?

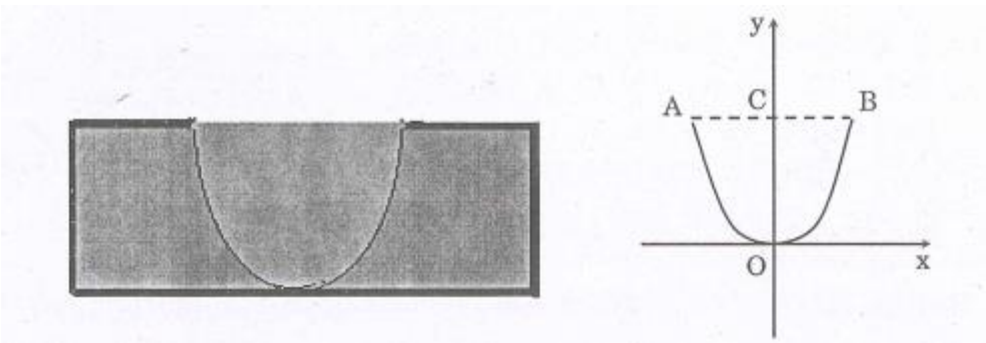
Bài 6. Ca heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện cac thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$, với gốc tọa độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây. Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước (như hình vẽ).



a) Tìm hàm số biểu thị quỹ dạo nhảy của cá heo.

b) Tìm vị trí cá heo rơi sau 1,5 giây kể từ vị trí cao nhất.

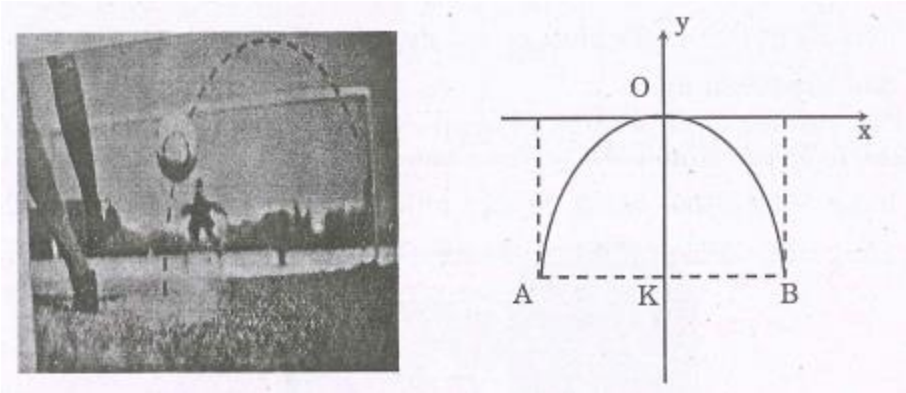
Bài 7. Thiết diện của một cái hồ nước là Parapol $y = ax^2$ (chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy (hình vẽ), biết rằng bề ngang của thiết diện là AB = 8m, bề sâu của thiết diện OC = 4m.



a) Xác định hệ số a.

b) Vẽ đồ thị hàm số trên (với hệ số a tìm được) trong mặt phẳng Oxy.

Bài 8. Đường đi của quả bóng theo quỹ đạo là một parabol $y = ax^2$. Một cầu thủ ở vị trí A (hình vẽ), đá một quả bóng bay bổng lên cao đến vị trí O cách mặt đất 15m và rơi xuống vị trí B cách A 30m. Chọn hệ thống trục tọa độ vuông góc Oxy (như hình vẽ)



Xác định tọa độ các điểm A và B trong hệ trục Oxy này. Tính giá trị của hệ số a.

Bài 9. Quãng đường đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $y = \frac{1}{2}g.t^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường g = 10 m/giây^2, t (giây) là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3200 mét (vận tốc ban đầu không đáng kể, bỏ qua các lực cản). Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây, vận động viên phải mở dù để khoảng cách đến mặt đất là 1200 mét?

Bài 10. Quãng đường đi (đơn vị là mét) của một xe ô tô đi được trong thời gian t giây được cho bởi công thức $y = a.t^2$. Giả sử xe ô tô trên đi được quãng đường 216 m sau khoảng thời gian 5 giây

a) Xác định hệ số a.

b) Hỏi xe ô tô trên đi trong bao lâu thì được quãng đường 3,6 km so với vị trí ban đầu?

BÀI 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng: $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$, trong đó a,b,c là các số thực cho trước và x là ẩn số.

2. Giải một số phương trình bậc hai dạng đặc biệt

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ bị khuyết c hay $ax^2+bx=0$ thì ta có thể giải cách sau:

$ax^2+bx=0$

$x\left(ax+b\right)=0$

$x=0$ hoặc $ax+b=0$

$x=0$ hoặc $x=-\dfrac{b}{a}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-\dfrac{b}{a}$

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ bị khuyết b hay $ax^2+c=0$ $\left(1\right)$ thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c>0$, phương trình $\left(1\right)$ vô nghiệm.

+ Với $c=0$, phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $x=0$.

+ Với $c<0$, ta có:

$ax^2+c=0$

$x^2=\dfrac{-c}{a}$

$x=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ hoặc $x=\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ và $x=\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ và biệt thức $\Delta=b^2-4ac$.

• Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

• Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.

• Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nhận xét:

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ với $b=2b'$. Gọi biệt thức $\Delta'=b'^2-ac$.

- Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$
- Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$.
- Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm vừa viết ở trên được gọi là công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

Chú ý:

- Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng Δ' để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.
- Nếu a,c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

- **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:

  + Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

  + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

  + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.
- **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

CHỦ ĐỀ 1
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

DẠNG 1
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DẠNG ĐẶC BIỆT
(PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BỊ KHUYẾT HỆ SỐ b HOẶC c)

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ bị khuyết c hay $ax^2+bx=0$ thì ta có thể giải cách sau:

$ax^2+bx=0$

$x\left(ax+b\right)=0$

$x=0$ hoặc $ax+b=0$

$x=0$ hoặc $x=-\dfrac{b}{a}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-\dfrac{b}{a}$

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ bị khuyết b hay $ax^2+c=0$ $\left(1\right)$ thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c>0$, phương trình $\left(1\right)$ vô nghiệm.

+ Với $c=0$, phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $x=0$.

+ Với $c<0$, ta có:

$ax^2+c=0$

$x^2=\dfrac{-c}{a}$

$x=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ hoặc $x=\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ và $x=\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $5x^2 - 7x = 0$

b) $-3x^2 + 9 = 0$

Lời giải

a) Ta có:

$5x^2 - 7x = 0$

$x(5x - 7) = 0$

$x = 0$ hoặc $5x - 7 = 0$

$x = 0$ hoặc $x = \dfrac{7}{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \dfrac{7}{5}$

b) Ta có:

$-3x^2 + 9 = 0$

$3x^2 - 9 = 0$

$3(x^2 - 3) = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x = -\sqrt{3}$ hoặc $x = \sqrt{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{3}$ và $x = \sqrt{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $-\sqrt{3}x^2 - 7x = 0$

b) $\dfrac{-3}{5}x^2 - \dfrac{7}{2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^2 = 4$

b) $(x-3)^2 = 7$

c) $(x+2)^2 - 5 = 0$

d) $(x-5)^2 - 11 = 0$

DẠNG 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DÙNG CÔNG THỨC NGHIỆM

Bài 1. Xác định hệ số a,b,c; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b=2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $x^2-x-11=0$

b) $x^2-4x+4=0$

c) $-5x^2-4x+1=0$

d) $-2x^2+x-3=0$

Lời giải

a) $x^2-x-11=0$

Ta có: $a=1;b=-1;c=-11$

$\Delta=(-1)^2-4.1.(-11)=45>0$

Do $\Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{45}}{2.1}=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\dfrac{1-\sqrt{45}}{2.1}=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$

b) Ta có: $a=1;b=-4\Rightarrow b'=-2;c=4$

$\Delta'=(-2)^2-1.4=0$

Do $\Delta'=0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép là: $x_1=x_2=-\dfrac{-2}{1}=2$

c) Ta có: $a=-5;b=-4\Rightarrow b'=-2;c=1$

$\Delta'=(-2)^2-(-5).1=9>0$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{2+\sqrt{9}}{-5}=-1$; $x_2=\dfrac{2-\sqrt{9}}{-5}=\dfrac{1}{5}$

d) Ta có: $a=-2;b=1;c=-3;$

$\Delta=1^2-4.(-2).(-3)=-23<0$

Do $\Delta<0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2-5x-2=0$

b) $x^2+3x-10=0$

c) $4x^2+7x-2=0$

Lời giải

a) $3x^2-5x-2=0$.

Ta có $\Delta=(-5)^2-4.3(-2)=49>0$

Do $\Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=2;x_2=\dfrac{-1}{3}$

b) $x^2+3x-10=0$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4.1.(-10)=49>0$

Do $\Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+7}{2}=2$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-7}{2}=-5$

c) $4x^2+7x-2=0$.

$\Delta=7^2-4.4.(-2)=81>0$

Do $\Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{-7+\sqrt{81}}{2.4}=\dfrac{1}{4}; x_2=\dfrac{-7-\sqrt{81}}{2.4}=-2$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+2\sqrt{5}x+4=0$ b) $\sqrt{2}x^2-3x+5=0$ c) $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=0$

Lời giải

a) $x^2+2\sqrt{5}x+4=0$

Ta có $\Delta'=\left(\sqrt{5}\right)^2-4=1>0$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ và $x_2=\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$

b) $\sqrt{2}x^2-3x+5=0$

Ta có $\Delta=3^2-4.5.\sqrt{2}=9-20\sqrt{2}<0$

Do $\Delta<0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=0$

Ta có: $\Delta=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4.2\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2-\sqrt{3}$.

Do $\Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2}=2; x_2=\dfrac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{3}$,

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Xác định hệ số a,b,c; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b=2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $2x^2-3x-5=0$ b) $x^2-6x+8=0$

c) $9x^2-12x+4=0$ d) $-3x^2+4x-4=0$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$

b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $x^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$

d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)x - 1 = 0$

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$

b) $x^2 + 7x - 3 = x(x-1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x-1) + 3$

d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x-1) - 1 + x^2$

DẠNG 3
XÁC ĐỊNH SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA THAM SỐ

Xét phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0 \quad (1)$

1. Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3. Phương trình (1) có đúng một nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} a=0; b\neq 0 \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

4. Phương trình vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} a=0; b=0; c\neq 0 \\ a\neq 0; \Delta<0 \end{array}\right.$

Chú ý: Nếu $b=2b'$ ta có thể thay thế điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ'

Bài 1. Cho phương trình $4x^2+4mx+m+6=0 \quad (1)$. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 4m^2-4m-24$

Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\Delta'=0$

$4m^2-4m-24=0$

$m^2-m-6=0$

$(m+2)(m-3)=0$

$m+2=0$ hoặc $m-3=0$

$m=-2$ hoặc $m=3$

Vậy $m\in\{-2;3\}$.

Bài 2. Cho phương trình $mx^2+(2m-5)x+m-2=0 \quad (1)$ với $m\in\mathbb{R}$ là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Xét 2 tường hợp

TH1: Với $m=0$ phương trình trở thành:

$-5x-2=0$

$x=-\frac{2}{5}$

Vậy $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán

TH2: Với $m\neq 0$ phương trình $mx^2+(2m-5)x+m-2=0$ là một phương trình bậc hai và có

$\Delta=(2m-5)^2-4m(m-2)=-12m+25$

để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta\geq 0$

$-12m+25\geq 0$

$m\leq\frac{25}{12}$

Kết hợp hai trường hợp suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m\leq\frac{25}{12}$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $a\neq 0$ và $\Delta>0$

hay $m\neq 0$ và $-12m+25>0$

hay $m\neq 0$ và $m<\frac{25}{12}$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\neq 0$ và $m<\frac{25}{12}$

Bài 3. Cho phương trình $x^2+(2m+3)x+3m=0$ (m là tham số) (1)

a) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x=3$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm.

Lời giải

a) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x=3$

Vì $x=3$ là nghiệm của (1) nên thay $x=3$ vào phương trình ta có :

$3^2+(2m+3).3+3m=0$

$9+6m+9+3m=0$

$9m=-18$

$m=-2$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x=3$ thì $m=-2$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm.

Phương trình (1) có :

$\Delta=(2m+3)^2-4.1.3m=4m^2+12m+9-12m=4m^2+9>0\ (\forall m)$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm (đpcm)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho phương trình $mx^2 - 3(m+1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm là $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Thay $x = -2$ vào phương trình ta tìm được $m = 1$ hoặc $m = 2$

- Với $m = 1$, ta có: $x^2 - 6x - 16 = 0$. Giải được $x = -2$ và $x = 8$

- Với $m = 2$, ta có: $2x^2 - 9x - 26 = 0$ Giải được $x = -2$ và $x = \frac{13}{2}$

Bài 5. Cho phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ với m là tham số. Khi nào

a) Giải phương trình với $m = 2$

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình luôn có nghiệm.

c) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Với $m = 2$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 1 = 0$ hay $x = \pm 1$

b) Xét hai trường hợp

TH1: Với $m = \frac{3}{2}$ phương trình đã cho trở thành: $x - 1 = 0$ hay $x = 1$

TH2: Với $m \neq \frac{3}{2}$ phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ là một phương trình bậc hai và có $\Delta' = (m-2)^2 + (2m-3) = (m-1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$m \neq \frac{3}{2}$ và $(m-1)^2 > 0$

$m \neq \frac{3}{2}$ và $m \neq 1$

Bài 6. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1$

a) Phương tình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 0$ và $\Delta > 0$ hay $m \neq 0$ và $m > -1$

b) Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq 0$ và $\Delta' = 0$ hay $m = -1$

c) Ta tìm được $m < -1$

d) Ta tìm được $m = 0; m = -1$

e) Ta tìm được $m \geq -1$

Bài 7. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m+1$

a) Phương tình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 2$ và $\Delta' > 0$ hay $m \neq 2$ và $m > \frac{-1}{4}$

b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

c) Ta tìm được $m < \frac{-1}{4}$

d) Ta tìm được $m = 2; m = \frac{-1}{4}$

e) Ta tìm được $m \geq \frac{-1}{4}$

Bài 8. Chứng minh rằng với $\forall m$ các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$ b) $x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$

Ta có $\Delta' = (m+2)^2 - (m-7) = m^2 + 5m + 11 = \left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall m \Rightarrow \Delta' > 0$ với mọi m

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) $x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$

Ta có $\Delta' = 4m^4 + 4m + 2 = 2(2m^4 + 2m + 1)$

mà $2m^4 + 2m + 1 = 2\left(m^4 - m^2 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) = 2\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $m^2 - \frac{1}{2} = 0$ và $m + \frac{1}{2} = 0$ suy ra vô lý $\Rightarrow \Delta' > 0 \forall m.$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

Lời giải

a) Ta có

$x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$

$x^2 - 3x + (m-2)x - 3(m-2) = 0$

$x(x-3) + (m-2)(x-3) = 0$

$(x-3)(x+m-2) = 0$

$x = 3$ và $x = 2 - m$

Vậy phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi hai nghiệm của phương trình trùng nhau

Theo câu a) suy ra $2 - m = 3 \Rightarrow m = -1$

Ta cũng có thể xét $\Delta = (m-5)^2 + 4.3(m-2) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

Phương trình có nghiệm kép khi

$\Delta = 0$

$(m+1)^2 = 0$

$m = -1$

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -2$.

b) Tìm các giá trị của *m* để phương trình có một trong các nghiệm bằng –1.

c) Tìm các giá trị của *m* để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của *m* để phương trình có một trong các nghiệm bằng –4.

c) Tìm các giá trị của *m* để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 12. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.

b) Tìm *m* để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4.

c) Tìm *m* để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

CHỦ ĐỀ 2
SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG 1
SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Cho (P): $y = ax^2$ và (d): $y = mx + n(m \neq 0)$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $ax^2 = mx + n(*)$

Bước 2: Giải phương trình (*) ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d

Chú ý:

Số nghiệm của (*) đúng bằng số giao điểm của (P) và d, cụ thể

- Nếu (*) vô nghiệm thì d không cắt (P)
- Nếu (*) có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P)
- Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x + 2.$

a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

Lập bảng:

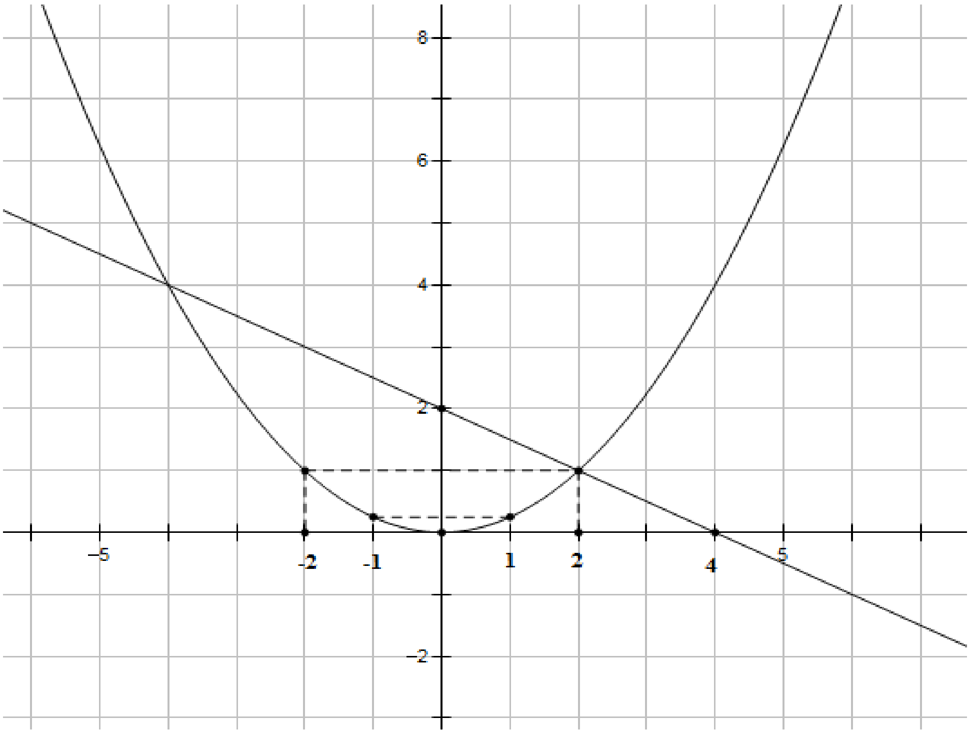
Đường thẳng (d):

x	0	4
$y = \frac{-1}{2}x + 2.$	2	0

Parabol (P):

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

Vẽ đồ thị:



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+2$

$x^2+2x-8=0$

$\Delta'=1^2-(-8)=9>0$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$x=-4$ và $x=2$

+ Với $x=-4 \Rightarrow y=4$

+ Với $x=2 \Rightarrow y=1$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-4;4)$ và $(2;1)$.

Bài 2. Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$a=2>0$, hàm số đồng biến nếu $x>0$, hàm số nghịch biến nếu $x<0$

Bảng giá trị

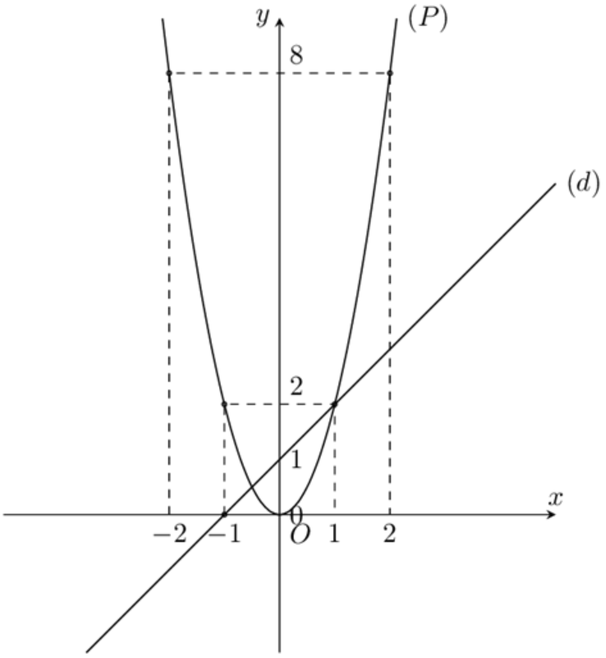
x	-2	-1	0	1	2
$y=2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số $y=2x^2$ là đường cong Parabol đi qua điểm O, nhận Oy làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$a=1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đồ thị hàm số $y=x+1$ là đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ và $(-1;0)$



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) ***và*** (d) ***bằng phép tính.***

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned}&2x^2=x+1\\&2x^2-x-1=0\end{aligned}.$$

Ta có $a+b+c=2-1-1=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=1$ và $x=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2}$

+ Với $x=1 \Rightarrow y=1+1=2$

+ Với $x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;2)$ và $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 3. Cho Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=5x+6$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

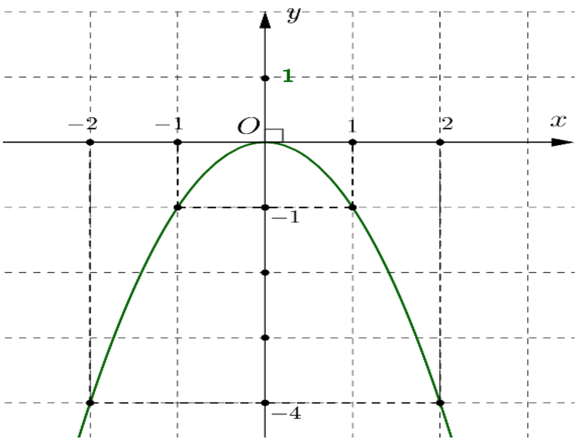
Đồ thị hàm số $y=-x^2$ đi qua gốc tọa độ O, có bề lõm hướng xuống và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=-x^2$	-4	-1	0	-1	-4

$\Rightarrow$ Parabol $(P): y=-x^2$ đi qua các điểm $(-2;-4)$, $(-1;-1)$, $(0;0)$, $(1;-1)$, $(2;-4)$.

Đồ thị Parabol $(P): y=-x^2$:



b) Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$-x^2=5x+6 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0$

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=5^2-4.6=1>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{-5+1}{2}=-2 \\ x_2&=\frac{-5-1}{2}=-3 \end{aligned}.$$

Với $x_1=-2 \Rightarrow y_1=-(-2)^2=-4$.

Với $x_2=-3 \Rightarrow y_2=-(-3)^2=-9$.

Vậy tọa độ các giao điểm của (P) và (d) là $A(-2;-4), B(-3;-9)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ (P)

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng $(d): y = x - 3$

Lời giải

a) Học sinh tự vẽ đồ thị (P)

b) Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$-2x^2 = x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0$

$2x^2 + 3x - 2x - 3 = 0$

$(x-1)(2x+3) = 0$

$x = 1$ và $x = -\dfrac{3}{2}$

Với $x = 1 \Rightarrow y = -2$

Với $x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{9}{4}$

Vậy giao điểm của (P) và (d) là $A(1;-2), B\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{4}\right)$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả các điểm thuộc parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ.

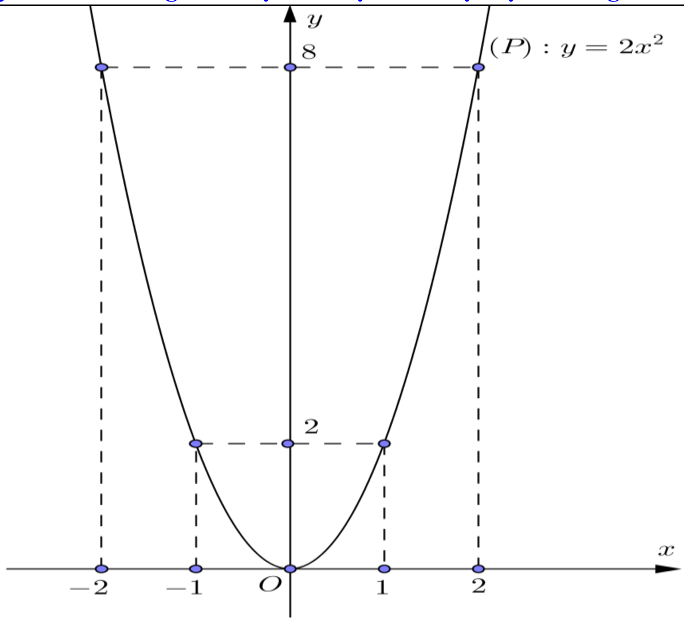
Lời giải

a) Vẽ đồ thị parabol $(P): y = 2x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị:



b) Gọi $M(a;b)$ là điểm cần tìm với $a \neq 0, b \neq 0$.

Vì M có tung độ gấp hai lần hoành độ nên $b = 2a$

Khi đó: $M(a, 2a)$

Vì $M(a, 2a) \in (P): y = 2x^2$ nên:

$2a = 2a^2$

$2a^2 - 2a = 0$

$a^2 - a = 0$

$a(a-1) = 0$

$a = 0$ và $a = 1$

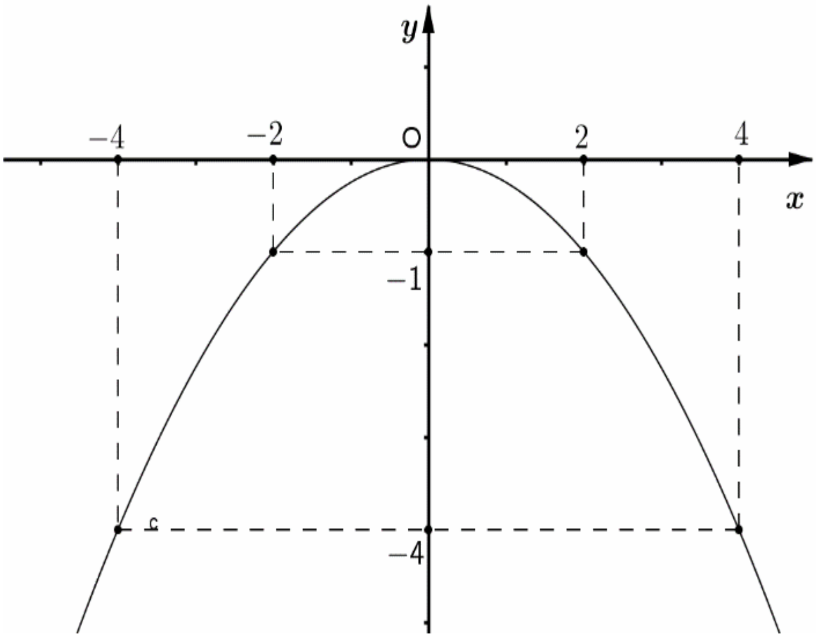
Vì $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1$. Vậy $M(1;2)$

Bài 6. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x - 2$. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

+ Vẽ (P):

X	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4



+ Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của pt:

$\frac{1}{2}x-2=-\frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$

$x^2+2x-8=0$

$x^2-2x+4x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$x=-4; x=2$

Với x=2 ta được y=-1; với x=-4 ta được y=-4.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là : $(2;-1)$ và $(-4;-4)$

Bài 7. Cho Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=5x+6$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

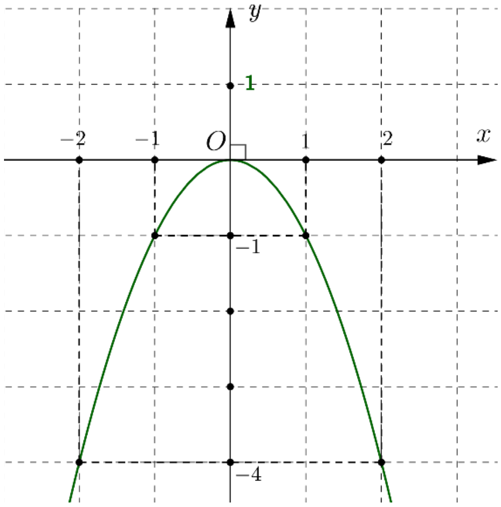
Đồ thị hàm số $y=-x^2$ đi qua gốc tọa độ O, có bề lõm hướng xuống và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=-x^2$	-4	-1	0	-1	-4

$\Rightarrow$ Parabol $(P): y=-x^2$ đi qua các điểm $(-2;-4)$, $(-1;-1)$, $(0;0)$, $(1;-1)$, $(2;-4)$.

Đồ thị Parabol $(P): y=-x^2$:



b)

Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = 5x + 6$$
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.6 = 1 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$
$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3.$$

Với $x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = -(-2)^2 = -4$.

Với $x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -(-3)^2 = -9$.

Vậy tọa độ các giao điểm của (P) và (d) là $A(-2;-4), B(-3;-9)$.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ (P)

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

Lời giải

a) Vẽ (P)

Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = x^2$.

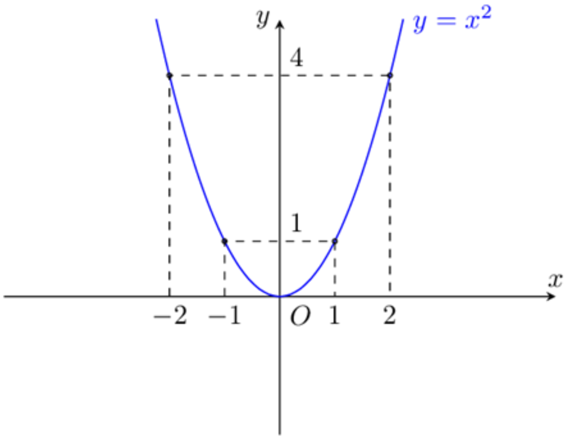
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$a = 1 > 0$, hàm số đồng biến nếu $x > 0$, hàm số nghịch biến nếu $x < 0$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là đường cong Parabol đi qua điểm O, nhận Oy làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên.



b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và đường thẳng (d) ta được:

$$x^2 = -x + 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ta có: $a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \frac{c}{a} = -2$

Với $x = 1$ ta có $y = 1^2 = 1$.

Với $x = -2$ ta có $y = (-2)^2 = 4$.

Vậy đồ thị (P) cắt (d) tại hai điểm $(1;1), (-2;4)$.

Bài 9. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

+ Xét parabol $(P): y = x^2$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$ và có bề lõm hướng lên trên

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

$\Rightarrow$ Parabol (P) là đường cong có đỉnh $O(0;0)$, qua các điểm $(1;1), (-1;1), (2;4), (-2;4)$

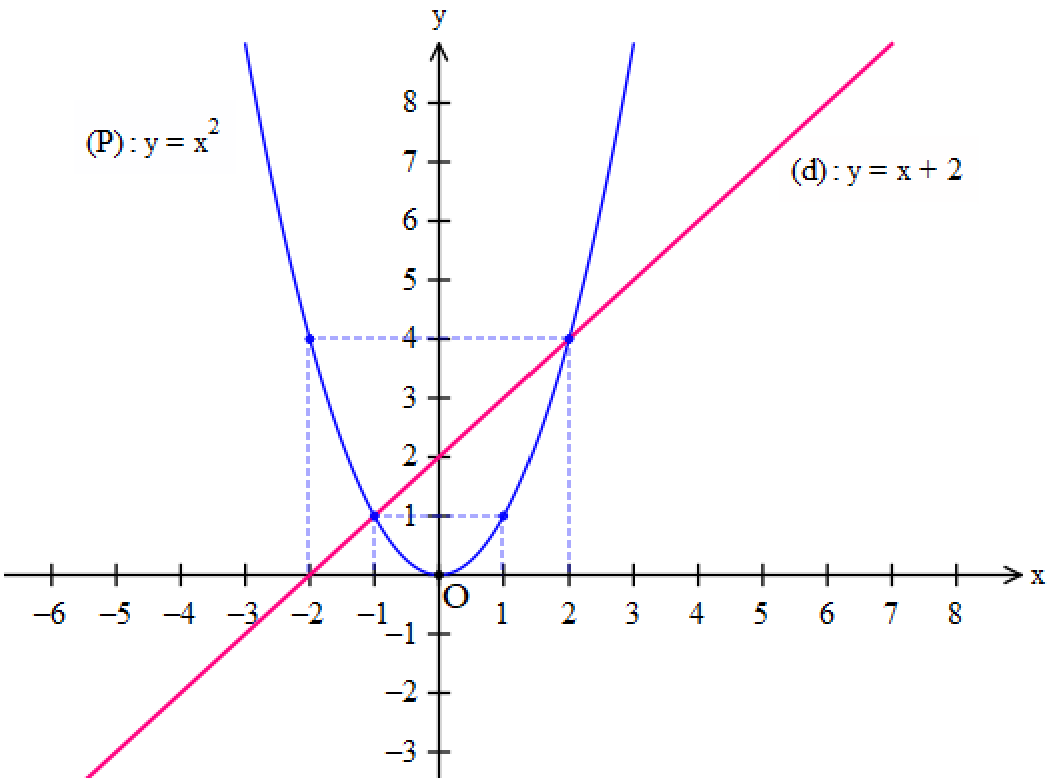
+ Xét đường thẳng $(d): y = x + 2$

Bảng giá trị:

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

$\Rightarrow$Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm $(-2;0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0;2)$

Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.



b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d):

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\dfrac{c}{a} = 2$

+ Với $x_1 = -1 \to y_1 = -1 + 2 = 1$

+ Với $x_2 = 2 \to y_2 = 2 + 2 = 4$

Vậy parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm $(-1;1), (2;4)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$.

a) Tính diện tích tam giác OAB.

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải

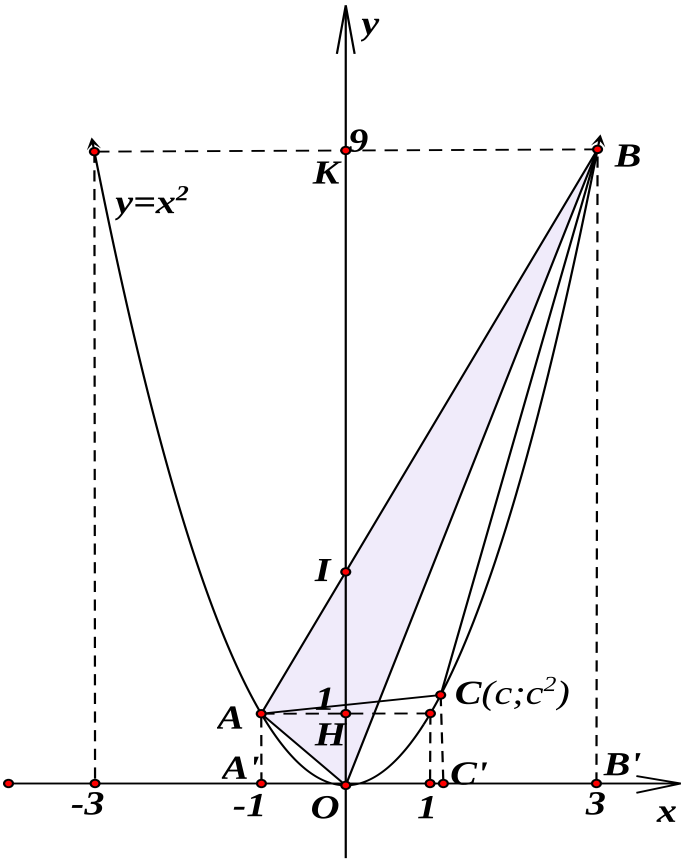
a) Gọi $y = ax + b$ là phương

trình đường thẳng AB.

Ta có $\begin{cases} a.(-1)+b=1 \\ a.3+b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

suy ra phương trình đường thẳng AB $(d): y = 2x+3$.

Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm $I(0;3)$.



Diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \dfrac{1}{2}AH.OI + \dfrac{1}{2}BK.OI$.

Ta có $AH = 1; BK = 3, OI = 3$.

Suy ra $S_{OAB} = 6$ (đvdt).

b) Giả sử $C(c;c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$.

Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1+9}{2}.4 - \frac{1+c^2}{2}.(c+1) - \frac{9+c^2}{2}.(3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \le 8.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.

DẠNG 2

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y=(1-m)x^2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=(1-m)x^2$ cắt đường thẳng $y=-x+3$ tại điểm có tung độ bằng 2?

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=-x+3$ tại điểm có tung độ bằng 2 nên giao điểm đó có hoành độ x thỏa mãn: $2=-x+3$ hay $x=1$

Thay $x=1, y=2$ vào (1) ta có:

$2=(1-m).1^2$

$1-m=2$.

$m=-1$

Vậy để thỏa mãn điều kiện bài toán thì $m=-1$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là (d).

a) Vẽ đồ thị (d) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm a để (d) tiếp xúc với Parabol $(P): y = ax^2$.

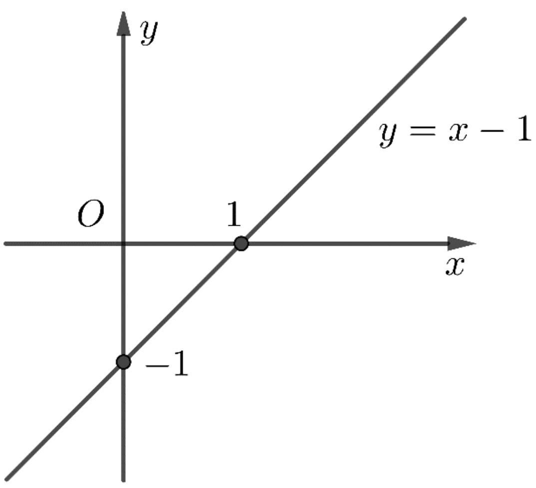
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	0	1
$y = x - 1$	-1	0

$\Rightarrow$ Đường thẳng d đi qua 2 điểm $(0;-1)$ và $(1;0)$.

Đồ thị:



b) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$ax^2 = x - 1$ $(a \neq 0)$.

$ax^2 - x + 1 = 0$ (*)

Để d tiếp xúc (P) thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi:

$\Delta = 0$

$1 - 4a = 0$

$a = \frac{1}{4}$.

Vậy $a = \frac{1}{4}$.

Bài 3. Tìm tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d)

$\frac{1}{2}x^2 = 2x + m$

$x^2 = 4x + 2m$

$x^2 - 4x - 2m = 0$

$\Delta' = (-2)^2 - 1.(-2m) = 4 + 2m$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' > 0$

$4 + 2m > 0$

$m > -2$.

Vậy $m > -2$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4. Cho Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng *d* là đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ (với *m* là tham số).

a. Vẽ Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b. Chứng minh Parabol luôn cắt đường thẳng *d* tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số *m*.

Lời giải

a. Học sinh tự làm nhé

b. Xét phương trình hoành độ giao điểm của *(d)* và *(P):*

$-\frac{1}{2}x^2 = mx + m - 1$

$x^2 + 2mx + 2m - 2 = 0 \quad (1)$

Phương trình *(1)* có $\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 > 0$ với mọi *m*. Phương trình *(1)* luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó *(d)* luôn cắt *(P)* tại hai điểm phân biệt.

Bài 5. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phia của trục tung.

Lời giải

$(P): y = x^2$ giao điểm với $d: y = (m-1)x + m + 4$ tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung

Tọa độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$x^2 = (m-1)x + m + 4$

$x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0$

(P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

$\Leftrightarrow ac < 0$

$-m - 4 < 0$.

$m > 4$

Vậy $m > 4$ thì (P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + m + 2$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P).

b) Khi $m = 0$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

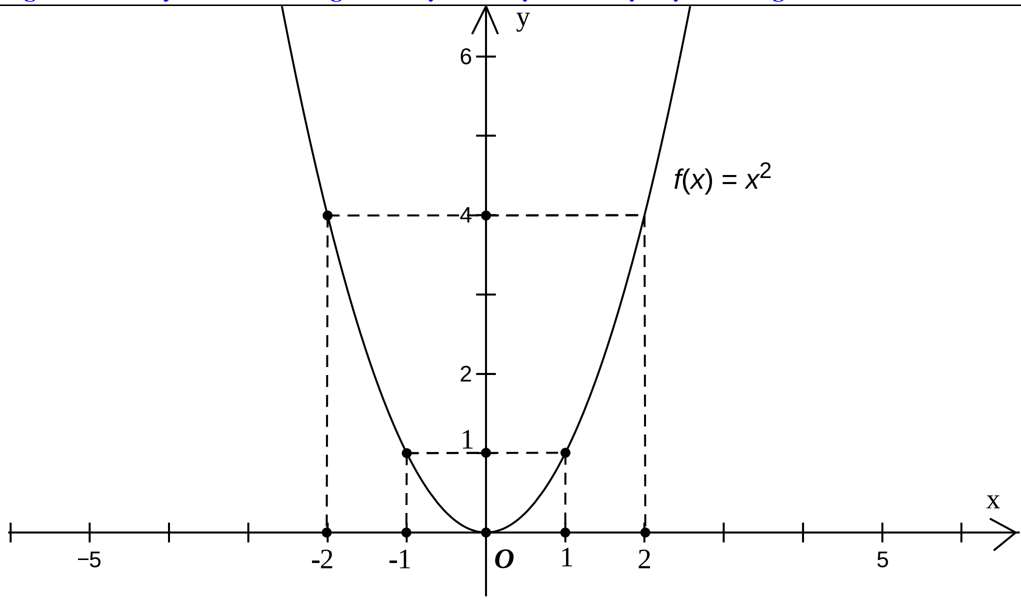
c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) và parabol (P) có một điểm chung duy nhất.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 (P)$, ta có bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2 (P)$ là Pa-ra-bol đi qua $(-2;4), (-1;1), (0:0), (1;1), (2;4)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.



b) Khi $m=0$ phương trình đường thẳng có dạng $(d): y=-x+2$.

Hoành độ giao điểm của $(P): y=x^2$ và $(d): y=-x+2$ là nghiệm của phương trình:

$x^2=-x+2$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

Vì $a+b+c=1+1+(-2)=0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=-2$.

Với $x_1=1 \Rightarrow y_1=1^2=1$.

Với $x_2=-2 \Rightarrow y_2=(-2)^2=4$.

Vậy ta có hai giao điểm của (P) và (d) là $(1;1)$ và $(-2;4)$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y=x^2$ và $(d): y=-x+m+2$:

$x^2=-x+m+2 \Leftrightarrow x^2+x-m-2=0$ (1).

Để (d) và (P) có một điểm chung duy nhất thì phương trình (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 1^2-4.1.(-m-2)=0 \Leftrightarrow 1+4m+8=0 \Leftrightarrow 4m=-9 \Leftrightarrow m=\frac{-9}{4}$.

Vậy $m=\frac{-9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho đường thẳng $(d): y=2mx+2m-3$ và Parabol $(P): y=x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua $A(1;5)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

Lời giải

a Tìm m để đường thẳng $(d): y=2mx+2m-3$ đi qua $A(1;5)$.

Do (d) đi qua $A(1;5)$. Thay $x=1;\ y=5$ vào phương trình đường thẳng ta được:

$5 = 2m.1 + 2m - 3$

$4m = 8$

$m = 2$

Vậy với m = 2 thì đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ đi qua $A(1;5)$.

b Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2 = 2mx + 2m - 3$

$x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0 (*)$

$\Delta' = (-m)^2 - (-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$

Để (d) tiếp xúc với Parabol (P) thì phương trình (*) có nghiệm kép hay

$\Delta' = 0$

$m^2 + 2m - 3 = 0$

$(m-1)(m+3) = 0$

$m = 1$ hoặc $m = -3$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -3$

Bài 8. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = 2x + \sqrt{m}$ có đồ thị là đường thẳng (d) (với m là tham số và $m \geq 0$)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Học sinh tự vẽ (P)

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

Xét phương trình hoành độ giao điểm : $2x^2 - 2x - \sqrt{m} = 0 (*)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = (-1)^2 - 2.(-\sqrt{m}) > 0$

$1 + 2\sqrt{m} > 0$ (luôn đúng với mọi $m \geq 0$)

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \geq 0$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc O*xy*, cho parabol (*P*): $y = x^2$.

a) Vẽ (*P*).

b) Tìm m để đường thẳng (d): $y = (m - 1)x + m + 4$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

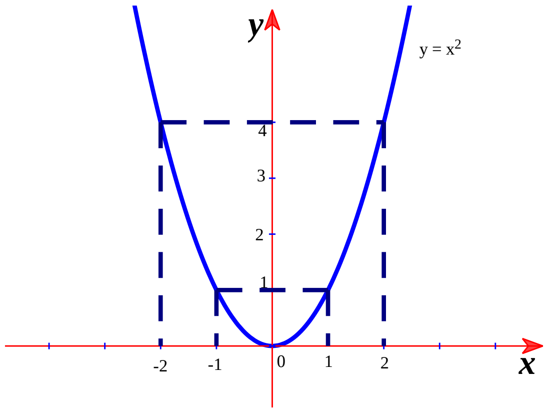
Lời giải

a) Vẽ (P).

Ta có bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy đồ thị hàm số (P): $y = x^2$ là parabol đi qua các điểm (-2;4), (-1;1), (0;0), (1;1), (2;4).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $(d): y = (m-1)x + m + 4$ và $(P): y = x^2$ ta có:

$(m-1)x + m + 4 = x^2$

$x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0$ (*)

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi

$ac < 0$

$-m - 4 < 0$

$m > -4$

Vậy m > -4 thì đường thẳng (d): $y = (m - 1)x + m + 4$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

BÀI 3

ĐỊNH LÍ VIÈTE

1. Định lí Viète

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ thì:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2. Áp dụng Định lí Viète để tính nhẩm nghiệm

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

- Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=1$, nghiệm còn lại là $x_2=\dfrac{c}{a}$
- Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=-1$, nghiệm còn lại là $x_2=-\dfrac{c}{a}$

3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$x^2-Sx+P=0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2-4P\geq 0$

Nhận xét: Xác định dấu của nghiệm

Phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2

- Nếu $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Nếu $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0$ và $S=x_1+x_2>0$ thì phương trình có hai nghiệm dương
- Nếu $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0$ và $S=x_1+x_2<0$ thì phương trình có hai nghiệm âm

Chú ý: Để áp dụng hệ thức Viète phải chú ý đến điều kiện phương trình là phương trình bậc hai có nghiệm $a\neq 0; \Delta\geq 0$

DẠNG 1
KHÔNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG

Phương pháp:

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm x_1, x_2 là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Từ đó áp dụng hệ thức Viète ta có: $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}; P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2

Sau đó áp dụng bước 1

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là

- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = S^2 - 4P$
- $|a-b| = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{S^2 - 4P}$
- $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{S}{P}$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = S^3 - 3SP$
- $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Bài 1. Biết phương trình $2x^2 + 9x + 6 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2.

Lời giải

Phương trình $2x^2 + 9x + 6 = 0$ có $\Delta = 9^2 - 4.2.6 = 33 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Khi đó theo hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = \dfrac{-9}{2}; x_1x_2 = 3$

Vậy $x_1 + x_2 = \dfrac{-9}{2}; x_1x_2 = 3$

Bài 2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$ b) $B = x_1^3 + x_2^3$ c) $C = \dfrac{1}{x_1^4} + \dfrac{1}{x_2^4}$ d) $D = |x_1 - x_2|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1+x_2=5; x_1x_2=3$

a) $A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2.3=19$

b) $B=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=80$

c) $C=\dfrac{1}{x_1^4}+\dfrac{1}{x_2^4}=\dfrac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^4}=\dfrac{(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4}=\dfrac{343}{81}$

d) Ta có

$D=|x_1-x_2|\Rightarrow D^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$\Rightarrow D=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{13}$

Bài 3. Cho phương trình $-3x^2-5x-2=0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $M=x_1+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+x_2$

b) $N=\dfrac{1}{x_1+3}+\dfrac{1}{x_2+3}$

c) $P=\dfrac{x_1-3}{x_1^2}+\dfrac{x_2-3}{x_2^2}$

c) $Q=\dfrac{x_1}{x_2+2}+\dfrac{x_2}{x_1+2}$

Lời giải

Ta có: $\Delta=25-4.3.2=1>0\Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1+x_2=\dfrac{-5}{3}; x_1x_2=\dfrac{2}{3}$

a) $M=x_1+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+x_2=(x_1+x_2)+\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=(x_1+x_2)+\left(\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)=\dfrac{-25}{6}$

b) $N=\dfrac{1}{x_1+3}+\dfrac{1}{x_2+3}=\dfrac{x_1+x_2+6}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}=\dfrac{13}{14}$

c) $P=\dfrac{x_1-3}{x_1^2}+\dfrac{x_2-3}{x_2^2}=\dfrac{x_1x_2^2-3x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{x_1x_2(x_1+x_2)-3(x_2^2+x_1^2)}{(x_1x_2)^2}$

$=\dfrac{x_1x_2(x_1+x_2)-3\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{-49}{4}$

d) Ta có: $Q=\dfrac{x_1}{x_2+2}+\dfrac{x_2}{x_1+2}=\dfrac{x_1^2+2x_1+x_2^2+2x_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+2(x_1+x_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{-17}{12}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Biết rằng phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $C = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có $ac = -3 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu x_1, x_2.

Khi đó áp dụng định li Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1x_2 = -3$.

Ta có: $C = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2\cdot(-3) = 7$.

Vậy $C = 7$.

Bài 5. Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1;\ x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \left(x_1 - x_2\right)^2$.

Lời giải

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -\dfrac{3}{2}$

Ta có:

$A = \left(x_1 - x_2\right)^2$

$A = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2$

$A = 2^2 - 4.\left(\dfrac{-3}{2}\right)$

$A = 10$

Vậy $A = 10$.

Bài 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 4x - 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} - 2$

Lời giải

$x^2 - 4x - 7 = 0$

Phương trình có $ac = -7 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = 4; x_1x_2 = -7$.

Khi đó ta có : $T = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} - 2 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} - 2 = \dfrac{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} - 2 = \dfrac{4^2 - 2.(-7)}{-7} - 2 = \dfrac{-44}{7}$

Vậy $T = -\dfrac{44}{7}$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 + 5x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$.

Lời giải

Vì $a=1,c=-4$ nên a và c trái dấu suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Viète có $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-5; x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-4$

$Q=x_1^2+x_2^2+6x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2+4x_1x_2=\left(-5\right)^2+4.\left(-4\right)=9$

Bài 8. Cho phương trình $x^2-x-3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2, giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x_1+x_2}{5x_1x_2}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình $x^2-x-3=0$ có hệ số a,c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1+x_2=1; x_1x_2=-3$.

$$A=\frac{x_1+x_2}{5x_1x_2}=\frac{1}{5.\left(-3\right)}=-\frac{1}{15}$$

Bài 9. Cho phương trình $x^2+3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{3\left|x_1-x_2\right|}{{x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2}$.

Lời giải

$x^2+3x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4.1.\left(-1\right)=13>0$

Theo Viète ta có : $x_1+x_2=-3; x_1.x_2=-1$

$$T=\frac{3\left|x_1-x_2\right|}{{x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2}=\frac{3\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}}{x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}=\frac{3\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}=\frac{3\sqrt{\left(-3\right)^2-4\left(-1\right)}}{\left(-1\right).\left(-3\right)}=\frac{3\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}$$

Bài 10. Cho phương trình $x^2-12x+4=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

Lời giải

$x^2-12x+4=0$

Xét $\Delta'=b'^2-ac=(-6)^2-1.4=32>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1+x_2=12; x_1x_2=4 \quad \Rightarrow x_1>0, x_2>0$

Ta có:

$$T^2=\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right)^2=\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\frac{\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2}{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\frac{\left(12^2-2.4\right)^2}{12+2\sqrt{4}}=1156$$

Nhận xét $x_1^2+x_2^2>0$ và $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$ với mọi $x_1,x_2>0$ suy ra $T>0$

$\Rightarrow T=\sqrt{T^2}=\sqrt{1156}=34$

Vậy $T=34$.

Bài 11. Giả sử x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-5x-1=0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=x_1^2+x_2^2-x_1-x_2$ b) $B=x_1^4+x_2^4$

c) $C=\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$ d) $D=|x_1-x_2|$

Lời giải

a) Ta có $\Delta=29>0\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt

Theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=5; x_1.x_2=-1$

$A=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-(x_1+x_2)=5^2-2(-1)-5=22$

b) $B=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2=727$

c) $C=\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\dfrac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^3}=-140$

d) $D=|x_1-x_2|\Rightarrow D^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=29\Rightarrow D=\sqrt{29}(D\ge 0)$

Bài 12. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-3x-1=0$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=x_1^2+x_2^2$ b) $B=x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-x_1)$ c) $C=\left|\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right|$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta=13>0\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt

theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=3; x_1.x_2=-1$

$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(-1)=11$

b) $B=x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-x_1)=x_1^4+x_2^4-(x_1^3+x_2^3)=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$

$=11^2-2-3(11+1)=83$

c) $C=\left|\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right|\Rightarrow C^2=\left(\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right)^2=\left(\dfrac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}\right)^2=\dfrac{\left(x_2^2-x_1^2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^4}=\dfrac{x_1^4+x_2^4-2\left(x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^4}$

$=\dfrac{\left[\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2\left(x_1x_2\right)^2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^4}=117$

$C^2=117\Rightarrow C=3\sqrt{13}\left(C\ge 0\right)$

Bài 13. Cho phương trình $x^2-mx-1=0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$

Lời giải

a) $x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$

Ta có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu

b) Ta có x_1 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_1^2 - mx_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 1 = mx_1$

Tương tự ta có x_2 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_2^2 - mx_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 1 = mx_2$

$$A = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \frac{mx_1 + x_1}{x_1} - \frac{mx_2 + x_2}{x_2} = \frac{(m+1)x_1}{x_1} - \frac{(m+1)x_2}{x_2} = 0$$

Vậy $A = 0$.

Bài 14. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 2 = 0$ (x là ẩn số) (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 2m - 2$

Lời giải

a) $\Delta' = m^2 + 3 > 0 \forall m$

b) Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2m - 2 = 2(m+1)x_1$$
$$\Rightarrow A = 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 = 2(m+1)(x_1 + x_2) = 4(m+1)^2$$

Bài 15. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2025x + 2 = 0$. Tính $A = (x_1 + x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 - x_4)$

Lời giải

Ta có $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ hai phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo định lý Viète ta có:

$$x_1 + x_2 = -2024; x_1.x_2 = 2$$
$$x_3 + x_4 = -2025; x_3.x_4 = 2$$

$$(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_1^2 + x_1(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_1^2 - 2025x_1 + 2$$

Lại có x_1 là nghiệm phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ nên

$$x_1^2 + 2024x_1 + 2 = 0$$
$$x_1^2 - 2025x_1 + 2 + 4049x_1 = 0$$
$$x_1^2 - 2025x_1 + 2 = -4049x_1$$
$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -4049x_1 \quad (1)$$

Tương tự: $(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = x_2^2 - x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_2^2 + 2025x_2 + 2$

Mà x_2 là nghiệm phương trình $x^2+2024x+2=0$ nên

$$x_2^2+2024x_2+2=0$$
$$x_2^2+2025x_2+2-x_2=0$$
$$x_2^2+2025x_2+2=x_2$$
$$(x_2-x_3)(x_2-x_4)=x_2\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)=-4049x_1.x_2$$

hay $A=-4049x_1x_2=-4049.2=-8098$

Vậy $A=-8098$

Bài 16. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$. Không giải phương trình. chứng minh rằng $P(x_1)=P(x_2)$ với $P(x)=3x-\sqrt{33x+25}$

Lời giải

Ta có $a.c=-1<0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt.

Theo định lý Viète ta có: $x_1+x_2=1; x_1.x_2=-1$

Ta có:

$$P(x_1)=P(x_2)$$
$$3x_1-\sqrt{33x_1+25}=3x_2-\sqrt{33x_2+25}$$
$$3(x_1-x_2)-(\sqrt{33x_1+25}-\sqrt{33x_2+25})=0$$
$$3(x_1-x_2)-\frac{33(x_1-x_2)}{\sqrt{33x_1+25}+\sqrt{33x_2+25}}=0$$
$$1-\frac{11}{\sqrt{33x_1+25}+\sqrt{33x_2+25}}=0$$
$$\sqrt{33x_1+25}+\sqrt{33x_2+25}=11$$
$$(\sqrt{33x_1+25}+\sqrt{33x_2+25})^2=121$$
$$33(x_1+x_2)+50+2\sqrt{(33x_1+25)(33x_2+25)}=121(*)$$

$$\text{VT}(*)=33.1+50+2\sqrt{33^2x_1x_2+33.25(x_1+x_2)+25^2}=83+2\sqrt{-33^2+2533+25^2}$$

$$=83+2\sqrt{361}=83+83=121=VP.$$

Bài 17. Cho phương trình $x^2-2(m-2)x+2m-5=0$ (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

b) Với m vừa tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc vào m

Lời giải

a) Ta có: $\Delta'=(m-3)^2\ge 0\forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 với mọi m khi $m\ne 3$

b) Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = 2m - 4; x_1x_2 = 2m - 5 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$

Vậy biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

Bài 18. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \ge 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m khi $m \neq 2$

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = -m - 2; x_1x_2 = 2m$

$2(x_1 + x_2) = -2m - 4; x_1x_2 = 2m \Rightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$

Biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$

DẠNG 2
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH NHẨM NGHIỆM

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $x^2 + 4x + 3 = 0$ c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Ta có $a + b + c = 1 - 8 + 7 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = 7$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 1; x_2 = 7$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

Do $a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{1} = -3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = -3$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Ta có: $a - b + c = 2 + 3 - 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $5x^2 + 6x - 11 = 0$ c) $2x^2 - 7x - 9 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có: $a = 1$; $b = -3$; $c = 2$ và $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = 2$.

b) $5x^2 + 6x - 11 = 0$

Ta có $a+b+c=5+6-11=0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=-\frac{11}{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=1; x_2=-\frac{11}{5}$.

c) $2x^2-7x-9=0$

Ta có $a-b+c=2-(-7)+(-9)=0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt $x_1=-1; x_2=-\frac{c}{a}=\frac{9}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-1; x_2=\frac{9}{2}$.

Bài 3. Xét tổng $a+b+c$ hoặc $a-b+c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $15x^2-17x+2=0$

b) $1230x^2-4x-1244=0$

c) $\left(2-\sqrt{3}\right)x^2+2\sqrt{3}x-\left(2+\sqrt{3}\right)=0$

d) $\sqrt{5}x^2-\left(2-\sqrt{5}\right)x-2=0$

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c=15-17+2=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{2}{15}$

b) Ta có: $a-b+c=0 \Rightarrow x_1=-1; x_2=\frac{1234}{1230}$

c) Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=-7-4\sqrt{3}$

d) Ta có: $a-b+c=0 \Rightarrow x_1=-1; x_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 4. Xét tổng $a+b+c$ hoặc $a-b+c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $7x^2-9x+2=0$

b) $23x^2-9x-32=0$

c) $1975x^2+4x-1979=0$

d) $31{,}1x^2-50{,}9x+19{,}8=0$

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{2}{7}$

b) Ta có: $a-b+c=0 \Rightarrow x_1=-1; x_2=\frac{32}{23}$

c) Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{-1979}{1975}$

d) Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{198}{311}$

Bài 5. Cho phương trình $(m-2)x^2-(2m+5)x+m+7=0$ với m là tham số

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c=(m-2)+(-2m-5)+m+7=0 \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm $x=1$ không phụ thuộc vào m

b) Với $m=2$ phương trình có một nghiệm $x=1$

Với $m \neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{m+7}{m-2}$.

Bài 6. Cho phương trình $(2m-1)x^2-(m-3)x-6m-2=0$ với m là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm $x=-2$

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m.

Lời giải

a) Thay $x=-2$ vào phương trình đã cho, ta có: $(2m-1)(-2)^2+(m-3)(-2)-6m-2=0$ (đúng).

Vậy $x=-2$ là nghiệm của phương trình.

b) Với $m=\dfrac{1}{2}$: phương trình chỉ có một nghiệm $x=-2$

Với $m \neq \dfrac{1}{2}$: phương trình có hai nghiệm $x=-2; x=\dfrac{3m+1}{2m-1}$.

DẠNG 3
TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH

Phương pháp:

Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = xy,$ ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2

Bước 2: Khi đó các số x, y cần tìm là $x = X_1; y = X_2$ hoặc $x = X_2; y = X_1$

Chú ý: Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

Bài 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15; uv = 36$

b) $u^2 + v^2 = 13; uv = 6$

Lời giải

a) Ta có $(u+v)^2 - 4uv = 15^2 - 4.36 = 81 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2 - 15X + 36 = 0$
$X = 12; X = 3$

$\Rightarrow u = 12; v = 3$ hoặc $u = 3; v = 12$

b) Ta có $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 13 + 2.6 = 25$

$\Rightarrow u + v = 5; u + v = -5$

- Với $u + v = 5$ ta có $(u+v)^2 - 4uv = 25 - 4.6 = 1 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2 - 5X + 6 = 0$
$X = 2; X = 3$

$\Rightarrow u = 2; v = 3$ hoặc $u = 3; v = 2$

- Với $u + v = -5$ ta có $(u+v)^2 - 4uv = 25 - 4.6 = 1 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2 + 5X + 6 = 0$
$X = -2; X = -3$

$\Rightarrow u = -2; v = -3$ hoặc $u = -3; v = -2$

Vậy $(u; v) \in \{(2;3); (3;2); (-2;-3); (-3;-2)\}$.

Bài 2. Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 2024 và -1 là nghiệm.

Lời giải

Ta có tổng hai nghiệm là $S = 2024 + (-1) = 2023$ và tích hai nghiệm $P = -2024$

và $S^2 - 4P = 2024 - 4(-1) > 0$ nên phương trình cần lập là $X^2 - 2023X - 2024 = 0$.

Bài 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là

a) $x_1 + 1; x_2 + 1$ b) $x_1^2 + x_2; x_2^2 + x_1$ c) $\dfrac{x_1}{x_2}; \dfrac{x_2}{x_1}$ d) $\dfrac{x_2+1}{x_1}; \dfrac{x_1+1}{x_2}$

Lời giải

Ta có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1.x_2 = -1$

a) Ta có

$(x_1+1)+(x_2+1) = x_1 + x_2 + 1 + 1 = 3$

$(x_1+1)(x_2+1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$

$\Rightarrow x_1 + 1; x_2 + 1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$

b) Ta có

$(x_1^2 + x_2) + (x_2^2 + x_1) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2 = 4$

$(x_1^2 + x_2)(x_2^2 + x_1) = x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 4$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2; x_2^2 + x_1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) Ta có

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_2 + x_1}{x_1x_2} = -4$$

$$\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_1} = 1$$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2}; \dfrac{x_2}{x_1}$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$

d) Ta có

$$\frac{x_2+1}{x_1} + \frac{x_1+1}{x_2} = \frac{x_2\left(x_2+1\right) + x_1\left(x_1+1\right)}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2} = 4$$

$$\frac{x_2+1}{x_1}.\frac{x_1+1}{x_2} = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1x_2} = -1$$

$\Rightarrow \dfrac{x_2+1}{x_1}; \dfrac{x_1+1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm hai số biết:

a) Tổng bằng 4 và tích bằng 1 b) Tổng bằng 6 và tích bằng 9

Lời giải

a) Ta có $S^2 - 4P = 4^2 - 4.1 > 0$

Do đó hai số ẩn tìm là nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X + 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2+\sqrt{5}; x_2 = 2-\sqrt{5}$

b) Ta có $S^2 - 4P = 6^2 - 4.9 = 0$

Do đó hai số cần tìm là nghiệm của phương trình: $X^2 - 6X + 9 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 3$

Bài 5. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4\\ \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1\end{array}.$$

Do đó $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình sau: $X^2 - 4X + 1 = 0$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + 5x - 3m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 25 + 12m$

để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì:

$$\begin{array}{l}\Delta \ge 0\\ 25+12m \ge 0\\ m \ge \dfrac{-25}{12}\end{array}$$

b) Ta có:

$$S = \frac{2}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2} = \frac{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left(x_1x_2\right)^2} = \frac{50+12m}{9m^2}$$

$$P = \frac{2}{x_1^2}.\frac{2}{x_2^2} = \frac{4}{\left(x_1x_2\right)^2} = \frac{4}{9m^2}$$

Với điều kiện: $0 \ne m \ge \frac{-25}{12}$ thì ta có $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai sau:

$$\begin{array}{l}X^2 - \dfrac{50+12m}{9m^2}X + \dfrac{4}{9m^2} = 0\\ 9m^2X^2 - 2\left(6m+25\right)X + 4 = 0\end{array}.$$

Bài 7. Cho phương trình $3x^2 + 5x - m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a) hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{x_1}{x_2+1}$ và $\dfrac{x_2}{x_1+1}$

Lời giải

a) Điều kiện của m là: $m \geq \dfrac{-25}{12}$

b) Phương trình cần lập là: $X^2 + \dfrac{10+6m}{3m+6}X + \dfrac{m}{m+2} = 0\left(-2 \neq m \geq \dfrac{-25}{12}\right)$

Bài 8. Tìm hai số x và y, biết:

a) Tổng của chúng bằng 4 và tổng bình phương bằng 10

b) Tổng của chúng bằng 3 và tổng lập phương bằng 9

c) Tích của chúng bằng 2 và tổng lập phương bằng – 9

d) Tích của chúng bằng -2, tổng lập phương bằng -7

Lời giải

a)

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ (x+y)^2-2xy=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow X^2-4X+3=0 \Rightarrow X=1; X=3$

Vậy hai số cần tìm là 1 và 3.

b)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow X^2-3X+2=0 \Rightarrow X=1; X=2$

c)

$$\begin{cases} xy=2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=2 \\ (x+y)^3-6(x+y)+9=0 \end{cases}$$

Giải $(x+y)^3-6(x+y)+9=0$

Đặt $t = x + y$

$(x+y)^3 - 6(x+y) + 9 = 0$
$t^3 - 6t + 9 = 0$
$(t+3)(t^2 - 3t + 3) = 0$

$t = -3$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 3X + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -2$

Vậy hai số cần tìm là -1 và -2.

d) $\begin{cases} xy = -2 \\ x^3 + y^3 = -7 \end{cases}$
$\begin{cases} xy = -2 \\ (x+y)^3 + 6(x+y) + 7 = 0 \end{cases}$

Giải $(x+y)^3 + 6(x+y) + 7 = 0$

Đặt $t = x + y$

$t^3 + 6t + 7 = 0$
$t = -1$

$\Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + X - 2 = 0$
$\Rightarrow x = 1; x = -2$

Vậy hai số cần tìm là 1 và -2.

Bài 9. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

a) $3x_1 - 2x_2; 3x_2 - 2x_1$

b) $x_1^2 - x_2; x_2^2 - x_1$

c) $\dfrac{x_1}{x_2+1}; \dfrac{x_2}{x_1+1}$

d) $\dfrac{x_2^2 + x_1}{x_1}; \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_2}$

e) $x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$

f) $|2x_1 - x_2|; |2x_2 - x_1|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 3 > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$

a)

$3x_1 - 2x_2 + 3x_2 - 2x_1 = x_1 + x_2 = 4$
$(3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1) = 13x_1x_2 - 6(x_1^2 + x_2^2) = 25x_1x_2 - 6(x_1 + x_2)^2 = -71$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 4x - 71 = 0$

b) $x_1^2 - x_2 + x_2^2 - x_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 10$

$(x_1^2 - x_2)(x_2^2 - x_1) = x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1x_2 = 2 - (x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -50$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 10x - 50 = 0$

c) $\dfrac{x_1}{x_2 + 1} + \dfrac{x_2}{x_1 + 1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = 3$

$\dfrac{x_1}{x_2 + 1} . \dfrac{x_2}{x_1 + 1} = \dfrac{x_1x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \dfrac{1}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + \dfrac{1}{6} = 0$

d) $\dfrac{x_2^2 + x_1}{x_1} + \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} + 2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + 2 = 54$

$\dfrac{x_2^2 + x_1}{x_1} . \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \dfrac{(x_2^2 + x_1)(x_1^2 + x_2)}{x_1x_2} = x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2 = 2 + (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 54$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 54x + 54 = 0$

e) $x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$

Ta có x_1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^2 + 5x_2 + 1 = 4x_1 - 1 + 5x_2 + 1 = x_2 + 16$

Tương tự: $x_2^2 + 5x_1 + 1 = x_1 + 16$

Mà

$$\begin{aligned}&(x_1 + 16) + (x_2 + 16) = x_1 + x_2 + 32 = 36\\&(x_1 + 16)(x_2 + 16) = x_1x_2 + 16(x_1 + x_2) + 16^2 = 321\end{aligned}$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 36x + 321 = 0$

f) $|2x_1 - x_2| . |2x_2 - x_1| = |5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2)| = |9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2| = 23$

Đặt

$$\begin{aligned}&a = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|, a \geq 0\\&a^2 = (2x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_1)^2 + 2|2x_1 - x_2| . |2x_2 - x_1|\end{aligned}$$

$= 5(x_1^2 + x_2^2)^2 - 8x_1x_2 + 46 = 5(x_1 + x_2)^2 - 18x_1x_2 + 46 = 108 \rightarrow a = 6\sqrt{3}$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 6\sqrt{3}x + 23 = 0$

Bài 10. Cho $a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}, b = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a, b là hai nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số nguyên

Lời giải

Ta có

$a+b=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=6$

$ab=\sqrt{121-72}=7$

Vậy a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+7=0(dpcm)$

Bài 11. Cho $c=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}, d=\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. Chứng minh rằng c^2, d^2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

Lời giải

$c^2=\sqrt[3]{20+120\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3})^3}=4+2\sqrt{3}$

$b^2=\sqrt{(4-2\sqrt{3})^3}=4-2\sqrt{3}$

Ta có

$c^2+d^2=8$

$c^2.d^2=16-12=4$

$\Rightarrow x^2-8x+4=0$

Bài 12. Cho a và b là hai số thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2+3ab-8a-8b-2\sqrt{3ab}+19=0$

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm a và b.

Lời giải

Ta có

$a^2+b^2+3ab-8a-8b-2\sqrt{3ab}+19=0$

$(a+b)^2-8(a+b)+16+ab-2\sqrt{3ab}+3=0$

$(a+b-4)^2+(\sqrt{ab}-\sqrt{3})^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-4=0 \\ \sqrt{ab}-\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0$

DẠNG 4

XÉT DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ 1

- phương trình 1 có nghiệm $\Delta \geq 0$.
- phương trình 1 có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0$.
- phương trình 1 có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- phương trình 1 có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- phương trình 1 có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- phương trình 1 có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Khi so sánh của phương trình bậc 2 với giá trị m ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

- Nếu: $x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) \leq 0$.
- Nếu $m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$
- Nếu $x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$

Bài 1. Không giải phương trình, cho biết dấu các nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$ b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$

Ta có: $\begin{cases} P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 20 > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 13 > 0 \end{cases}$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu dương.

b) $3x^2+5x-2=0$

Ta có: $P=x_1.x_1=\frac{c}{a}=-\frac{2}{3}<0$ nên hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu.

c) $5x^2+7x+1=0$

Ta có: $\begin{cases} P=x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}>0 \\ S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{5}<0 \end{cases}$

Vì $P>0$ nên hai nghiệm x_1,x_2 cùng dấu và $S<0$ nên hai nghiệm cùng dấu âm.

Bài 2. Cho phương trình $x^2+(2m-1)+m^2-4m+7=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Lời giải

$x^2+(2m-1)+m^2-4m+7=0$ (1)

$\Delta=(2m-1)^2-4(m^2-4m+7)$

$=4m^2-4m+1-4m^2+16m-28$

$=12m-27$

Phương trình (1) có nghiệm khi

$\Delta\ge 0$

$12m-27\ge 0$

$12m\ge 27$

$m\ge\frac{9}{4}$

Vậy với $m\ge\frac{9}{4}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 3. Cho phương trình $x^2-2mx+(5m-4)=0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có:

a) Nghiệm bằng 0.

b) Hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c) Hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $x=0$ nên thay vào phương trình ta được:

$5m-4=0$

$m=\frac{4}{5}$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi

$1.(5m-4)<0$

$m<\frac{4}{5}$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$\Delta' > 0$

$m^2 - (5m-4) > 0$

$(m-1)(m-4) > 0$

$m > 4$ hoặc $m < 1$.

Theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 5m - 4 \end{cases}$

Hai nghiệm của phương trình cùng dương khi

$2m > 0$ và $5m - 4 > 0$

$\Rightarrow m > \dfrac{4}{5}$

Kết hợp với điều kiện ta có $\dfrac{4}{5} < m < 1$ hoặc $m > 4$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + 3m = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $x - 1 = t$, ta có

$x_1 < 1 < x_2$

$x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$

$t_1 < 0 < t_2$

Phương trình ẩn x là $x^2 - x + 3m = 0$ được đưa về phương trình ẩn t:

$(t+1)^2 - (t+1) + 3m = 0$

$t^2 + t + 3m = 0$.

Phương trình ẩn t phải có hai nghiệm trái dấu khi

$3m < 0$

$m < 0$

Vậy $m < 0$

Cách 2: Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$\Delta > 0$

$1 - 12m > 0$

$m < \dfrac{1}{12}$.

Khi đó theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = 3m \end{cases}$ (1).

Hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Rightarrow x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi

$(x_1-1)(x_2-1)<0$

$x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0\ (2)$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$\begin{aligned}&3m-1+1<0\\&m<0\end{aligned}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m<0$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý:

Nếu hai nghiệm $x_1,x_2<1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số âm.

Nếu hai nghiệm $x_1,x_2>1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số dương.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $x^2-2(m-1)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

b) $x^2-8x+2m+6=0$ có hai nghiệm phân biệt

c) $x^2-6x+2m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương

d) $x^2-2(m-1)x-3-m=0$ có đúng một nghiệm dương

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow m<-1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=8^2-4(2m+6)>0\Leftrightarrow m<5$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}32-8m>0\\6>0\\2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}<m<4$

d) Vì $\Delta=4(m-1)^2-4(-3-m)=(2m-1)^2+15>0,\forall m\in Z\Rightarrow$ phương trình luôn cí hai nghiệm phân biệt

Phương trình có đúng một nghiệm dương $ac=-3-m<0\Leftrightarrow m>-3$

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $2x^2-3(m+1)x+m^2-m-2=0$ có hai nghiệm trái dấu.

b) $3mx^2+2(2m+1)x+m=0$ có hai nghiệm âm

c) $x^2+mx++m-1=0$ có hai nghiệm lớn hơn m

d) $mx^2-2(m-2)x++3(m-2)=0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $-1<m<2$

b) Phương trình có hai nghiệm âm khi $m>0$ hoặc $m\le-2-\sqrt{3}$

c) Phương trình có hai nghiệm lớn hơn m khi $m < -1$

d) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi $-1 \le m < 0$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - x + m = 0(1)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$

Lời giải

Cách 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}(*)$

Khi đó: $x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4 < 0 \\ m - 2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Kết hợp với (*) ta được: $-2 < m < \frac{1}{4}$

Cách 2: Vì $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta'}}{2} \Rightarrow x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow x_2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{\Delta'}}{2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < 9$

$\Leftrightarrow 1 - 4m < 9 \Leftrightarrow m > -2$

Kết hợp với (*) ta được: $-2 < m < \frac{1}{4}$

DẠNG 5

XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$

Bước 2: Từ hệ thức đã cho và hệ thức Viète, tìm được điều kiện của tham số.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện của tham số có thỏa mãn điều kiện ở bước 1 hay không rồi kết luận.

Bài 1. Cho phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + 4x + m = 0$ (*)

$\Delta' = 2^2 - 2.m$

$\Delta' = 4 - 2m$

Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta' \geq 0$

$4 - 2m \geq 0$

$m \leq 2$

Với $m \leq 2$ thì phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2

Theo hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2; x_1.x_2 = \dfrac{m}{2}$

Theo đề bài:

$x_1^2 + x_2^2 = 10$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

$(-2)^2 - 2.\dfrac{m}{2} = 10$

$4 - m = 10$

$m = -6$ (nhận)

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0$

Lời giải:

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - m + 1 = 2 - m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 khi

$\Delta' > 0$

$2 - m > 0$

$m < 2$

Theo Vièt ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = m - 1$

Mà:

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0$

$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0$

$(2)^2 - 3(m-1) + (m-1)^2 - 14 = 0$

$4 - 3m + 3 + m^2 - 2m + 1 - 14 = 0$

$m^2 - 5m - 6 = 0$

$(m+1)(m-6) = 0$

$m = -1$ (nhận) hoặc $m = 6$ (loại)

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta > 0$.

$(-m)^2 - 4(m-2) > 0$

$m^2 - 4m + 8 > 0$

$(m-2)^2 + 4 > 0$ (luôn đúng).

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Vièt ta có: $x_2 + x_2 = m; x_1x_2 = m - 2$.

Theo bài ra ta có:

$x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20$

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_2 = 20$

$(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 4x_1x_2 = 20$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$

$m^2-4(m-2)=20$

$m^2-4m-12=0(1)$

Ta có $\Delta_m{}'=2^2-1.(-12)=16>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$m_1=\dfrac{2+\sqrt{16}}{1}=6; m_2=\dfrac{2-\sqrt{16}}{1}=-2$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ (với $x_1<x_2$) thỏa mãn: $|x_1|=3|x_2|$.

Lời giải.

Phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0\,(1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có:

$\Delta'=\left[-(m+1)\right]^2-\left(m^2+2m\right)=m^2+2m+1-m^2-2m=1>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi m , mà $x_1<x_2$ nên:

$x_1=m+1-1=m$

$x_2=m+1+1=m+2$

$x_1;x_2$ thỏa mãn: $|x_1|=3|x_2|\Rightarrow|m|=3|m+2|$

$m=3(m+2)$ hoặc $m=-3(m+2)$

$3m+6=m$ hoặc $m=-3m-6$

$m=-3(tm\ x_1<x_2\ )$ hoặc $m=\dfrac{-3}{2}(tm\ x_1<x_2\ )$

Vậy tất cả các giá trị của m thỏa mãn đề bài là: $m=-3$ và $m=-\dfrac{3}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho phương trình $x^2-4x+m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=14$.

Lời giải

Ta có: $\Delta'=2^2-(m-1)=5-m$

Để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì $\Delta'\ge0$ hay $m\le5$

Áp dụng định lí Viète ta có: $x_1+x_2=4; x_1x_2=m-1$

Theo bài ta ta có:

$x_1^2+x_2^2=14$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=14$

$4^2 - 2(m-1) = 14$

$m = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m = 2$ thì phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi

$\Delta' > 0$

$m^2 - 4m + 4 > 0$

$(m-2)^2 > 0$

$m - 2 \neq 0$

$m \neq 2$

Với $m \neq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2m; x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 4m - 4$

Theo đề bài ta có:

$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 8 = 0$

$(2m)^2 - 2.(4m-4) - 8 = 0$

$4m^2 - 8m + 8 - 8 = 0$

$4m^2 - 8m = 0$

$4m(m-2) = 0$

$4m = 0$ hoặc $m - 2 = 0$

$m = 0$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $m = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = 0$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ có $\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi

$\Delta' \geq 0$

$2-m \geq 0$.

$m \leq 2$

Khi đó theo định li Viète ta có: $x_1+x_2=2; x_1x_2=m-1$

Do x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2-2x+m-1=0$ nên ta có: $\begin{cases} x_1^2=2x_1-m+1 \\ x_2^2=2x_2-m+1 \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$x_1^4-x_1^3=x_2^4-x_2^3$

$x_1^4-x_2^4-\left(x_1^3-x_2^3\right)=0$

$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2-x_2^2\right)-\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0$

$\left(2\left(x_1+x_2\right)-2m+2\right)\left(2x_1-m+1-2x_2+m-1\right)-\left(x_1-x_2\right)\left[2\left(x_1+x_2\right)-2m+2+m-1\right]=0$

$\left(2.2-2m+2\right).2\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)\left(2.2-m+1\right)=0$

$\left(x_1-x_2\right)\left(2(6-2m)-5+m\right)=0$

$\left(x_1-x_2\right)(3m+7)=0$

$x_1=x_2; m=\dfrac{7}{3}(ktm)$

Thay $x_1=x_2$ vào (1) ta được:

$\begin{cases} 2x_1=2 \\ x_1^2=m-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=1 \\ m=2(tm) \end{cases}$

Vậy $m=2$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2-2mx+2m-2=0$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+3x_2=6$.

Lời giải

$x^2-2mx+2m-2=0$, với m là tham số.

$\Delta' = (-m)^2-(2m-2) = m^2-2m+2 = (m-1)^2+1 \rangle 0, \forall m \in R$.

Suy ra pt có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Viète ta có : $x_1+x_2=2m; x_1x_2=2m-2$

Theo đề, ta có : $x_1+3x_2=6$

Giải hệ pt

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 3 - m \\ x_1 = 3m - 3 \end{cases}$

Thay $\begin{cases} x_2 = 3 - m \\ x_1 = 3m - 3 \end{cases}$ vào $x_1x_2 = 2m - 2$, ta được:

$(3m-3)(3-m) = 2m - 2$

$3m^2 - 10m + 7 = 0$

Phương trình có dạng $a + b + c = 3 - 10 + 7 = 0$.

Suy ra $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{7}{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{7}{3}$.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

Lời giải

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Khi đó áp dụng định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = -1$.

Theo bài ra ta có:

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2 = 7$

$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$

$4m^2 + 3 = 7$

$4m^2 = 4$

$m = \pm 1$

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m = 0$ (1) (x là ẩn số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$x_1^3x_2 + x_1x_2^3 - 2x_1^2x_2^2 = 5$.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m=2$.

+ Khi $m=2$, phương trình đã cho trở thành: $x^2-3x+2=0$.

+ Ta có: $a+b+c=1+(-3)+2=0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Vậy khi $m=2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

+ Ta có: $\Delta=(-3)^2-4.1.m=9-4m$.

+ Để phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta\geq 0$

$9-4m\geq 0$

$4m\leq 9$

$m\leq\frac{9}{4}$

Vậy khi $m\leq\frac{9}{4}$ thì phương trình (1) có nghiệm.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn đẳng thức:

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3-2x_1^2x_2^2=5.$$

+) Theo câu b) phương trình (1) có nghiệm $x_1,\ x_2$ khi $m\leq\frac{9}{4}$ $(*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3; x_1.x_2=\frac{c}{a}=m$.

Ta có: $x_1^3x_2+x_1x_2^3-2x_1^2x_2^2=5$

$x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\left(x_1x_2\right)^2=5$

$\Leftrightarrow x_1x_2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]-2\left(x_1x_2\right)^2=5$

$m\left(3^2-2m\right)-2m^2=5$

$9m-2m^2-2m^2=5$

$4m^2-9m+5=0$

$4m^2-4m-5m+5=0$

$4m(m-1)-5(m-1)=0$

$(m-1)(4m-5)=0$

$m=1$ hoặc $m=\frac{5}{4}$.

Đối chiếu với điều kiện $(*)$ ta được các giá trị cần tìm của m là $m=1$ và $m=\frac{5}{4}$.

Bài 11. Cho phương trình: $x^2-(m+2)x+m+1=0$ (1)

a) Giải pt (1) với m=-3.

b) Chứng tỏ pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m.

c) Tìm m để pt có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Giải pt (1) với m=-3.

Khi m=-3 pt (1) trở thành : $x^2+x-2=0$. Vì 1+1+(-2)=0 nên pt có hai nghiệm $x_1=1; x_2=-2$

b) Chứng tỏ pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m.

Ta có: $\Delta=\left[-(m+2)\right]^2-4(m+1)=m^2+4m+4-4m-4=m^2\geq 0$ với mọi m

Vậy pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m.

c) Tìm m để pt có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Theo câu b ta có: $\Delta=m^2$

Pt (1) có có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>0\\ x_1.x_2>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m^2>0\\ m+2>0\\ m+1>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq 0\\ m>-1\end{cases}$$

Mặt khác tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$ nên áp dụng hệ thức $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$ ta có:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{5}{4}$$

$$4\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=5(x_1x_2)^2$$

$4\left[(m+2)^2 - 2(m+1)\right] = 5(m+1)^2$

$m^2 + 2m - 3 = 0$

$m = 1; m = -3$

Đối chiếu điều kiện ta được $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1x_2$

Lời giải

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

Với $m = 1$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 1 = 3 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 + \sqrt{3}$$
$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 - \sqrt{3}.$$

Vậy khi $m = 1$ thì nghiệm của phương trình là $x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1x_2$

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$\Delta' \geq 0$

$2m + 1 \geq 0$.

$m \geq -\frac{1}{2}$

Khi đó áp dụng định lí Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1x_2 = m^2$.

Theo bài ra ta có:

$x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1x_2$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 6 = 4x_1x_2$

$(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 + 6 = 0$

$4(m+1)^2 - 6m^2 + 6 = 0$

$-2m^2+8m+10=0(1)$

Ta có $a-b+c=-2-8+10=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$m_1=-1(ktm); m_2=-\frac{c}{a}=-\frac{10}{-2}=5(tm)$.

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn là $m=5$.

Bài 13. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ (1) (x là tham số, m là tham số).

a) Giải phuơng trình (1) khi $m=1$

b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2+2(m+1)x_2=12m+2$

Lời giải

a) Thay $m=1$ vào phương trình (1) ta có:

$x^2-2(1+1)x+1^2+2=0$

$x^2-4x+3=0$

Phương trình có: $a+b+c=1-4+3=0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=1$ và $x_2=\frac{c}{a}=3.$

Vậy với $m=1$ thì phương trình có tập nghiệm là: $S=\{1;3\}$.

b) Xét phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$\Delta' >0$

$(m+1)^2-\left(m^2+2\right)>0$

$m^2+2m+1-m^2-2>0$

$2m-1>0$

$m>\frac{1}{2}$

Với $m>\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lí Viète ta có: $x_1+x_2=2(m+1); x_1x_2=m^2+2$.

Theo đề bài ta có:

$x_1^2+2(m+1)x_2=12m+2$

$x_1^2+\left(x_1+x_2\right)x_2=12m+2$

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=12m+2$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1x_2=12m+2$

$(x_1+x_2)^2-x_1x_2=12m+2$

$4(m+1)^2-(m^2+2)=12m+2$

$4m^2+8m+4-m^2-2=12m+2$

$3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$

$m=0(ktm); m=\frac{4}{3}(tm)$

Vậy $m=\frac{4}{3}$ là thỏa mãn bài toán.

Bài 14. Cho phương trình $x^2-6x+m+4=0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m=1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $2020(x_1+x_2)-2021x_1x_2=2014$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2-6x+m+4=0$ (1) (m là tham số).

a) Khi $m=1$, ta có

$x^2-6x+1+4=0$

$x^2-6x+5=0$

Vì $a+b+c=1+(-6)+5=0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=5$.

Vậy $m=1$ thì phương trình có nghiệm là $x_1=1; x_2=5$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $2020(x_1+x_2)-2021x_1x_2=2014$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thì

$\Delta'>0$

$(-3)^2-1(m+4)>0$

$9-m-4>0$.

$-m>-5$

$m<5$

Khi đó theo hệ thức Viète, ta có $x_1+x_2=6; x_1x_2=m+4$.

Theo bài ra: $2020(x_1+x_2)-2021x_1x_2=2014$

$2020.6-2021.(m+4)=2014$

$12120 - 2021m - 8084 = 2014$

$-2021m = -2022$

$m = \dfrac{2022}{2021}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \dfrac{2022}{2021}$ là giá trị cần tìm.

Bài 15. Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 7 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 12$.

Lời giải

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 7 = 0$ có:

$\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 7 = 4m - 3$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi

$\Delta' > 0$

$4m - 3 > 0$.

$m > \dfrac{3}{4}$

Vậy với $m > \dfrac{3}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 12$.

Với $m > \dfrac{3}{4}$, theo định li Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 4; x_1x_2 = m^2 + 7$

Theo bài ra ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 12$

$\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 12$

$\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2 - 12 = 0$

$(2m+4)^2 - 3\left(m^2 + 7\right) - 12 = 0$

$4m^2 + 16m + 16 - 3m^2 - 21 - 12 = 0$

$m^2 + 16m - 17 = 0$

Ta có $a + b + c = 1 + 16 - 17 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$m = 1(tm); m = \dfrac{c}{a} = -17(ktm)$.

Vậy $m=1$.

Bài 16. Cho phương trình $x^2+4(m-1)x-12=0$ $(*)$, với m là tham số.

a) Giải phương trình $(*)$ khi $m=2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $4|x_1-2|.\sqrt{4-mx_2}=(x_1+x_2-x_1x_2-8)^2$.

Lời giải

a) Với $m=2$ thì phương trình $(*)$ trở thành: $x^2+4x-12=0$

$x^2+6x-2x-12=0$

$x(x+6)-2(x+6)=0$

$(x+6)(x-2)=0$

$x=-6; x=2$

Vậy với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có tập nghiệm là $S=\{-6;2\}$.

b) Phương trình $(*)$ có $a.c=1.(-12)=-12<0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-4m+4 \\ x_1.x_2=-12 \end{cases}$ (1)

Vì x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta có: $x_2^2+4(m-1)x_2-12=0$

$x_2^2+4mx_2-4x_2-12=0$

$x_2^2+4(mx_2-4)-4x_2+4=0$

$4(4-mx_2)=x_2^2-4x_2+4$

$4(4-mx_2)=(x_2-2)^2$

$2.\sqrt{4-mx_2}=\sqrt{(x_2-2)^2}$

$2.\sqrt{4-mx_2}=|x_2-2|$ (2)

Mà theo bài có: $4|x_1-2|.\sqrt{4-mx_2}=(x_1+x_2-x_1x_2-8)^2$ (3)

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được: $2.|x_1-2|.|x_2-2|=[-4m+4+12-8]^2$

$2.|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|=(8-4m)^2$

$2.|-12-2(-4m+4)+4|=64-64m+16m^2$

$\Leftrightarrow 2.|-16+8m|=16(m^2-4m+4)$

$16.|m-2|=16(m-2)^2$

$|m-2|=(m-2)^2$

$(m-2)^2=(m-2)^4$

$(m-2)^4-(m-2)^2=0$

$(m-2)^2.\left[(m-2)^2-1\right]=0$

$(m-2)^2=0$ hoặc $(m-2)^2-1=0$

Giải $(m-2)^2=0 \Rightarrow m=2$

Giải $(m-2)^2-1=0$

$(m-2)^2=1$

$m-2=1; m-2=-1$

$m=3; m=1$

Vậy $m \in \{1;2;3\}$

Bài 17. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m=0.(1)$ (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2+xx_2^2=4$.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$

Thay $m=3$ vào phương trình (1) ta được:

$x^2-2(3-1)x+3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ Vì $a+b+c=1+(-4)+3=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x=1; x=\dfrac{c}{a}=3$.

Vậy với $m=3$ phương trình có nghiệm là $x=1; x=3$.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2+xx_2^2=4$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$\Delta' \geq 0$

$(m-1)^2-m \geq 0$

$m^2-2m+1-m \geq 0$

$m^2-3m+1 \geq 0 (*)$

Khi đó áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2(m-1) \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m \end{cases}$.

Ta có:

$x_1^2x_2+x_1x_2^2=4$

$x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=4$

$2m\left(m-1\right)=4$

$m^2-m-2=0$

Ta có $a-b+c=1-\left(-1\right)+\left(-2\right)=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $m=-1; m=-\dfrac{c}{a}=2$

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta có $m=-1$ thỏa mãn.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2-mx+m^2-m-3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC, biết độ dài cạnh huyền $BC=2$.

Lời giải

Ta có: $\Delta=m^2-4\left(m^2-m-3\right)=3m^2-4m-12\,(2)$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$\Delta\ge 0$

$m^2-4\left(m^2-m-3\right)\ge 0$

$3m^2-4m-12\le 0\left(2\right)$

Vì độ dài cạnh của tam giác vuông là số dương nên $x_1, x_2>0$.

Theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m>0 \\ x_1.x_2=m^2-m-3>0 \end{cases}$ (1).

Từ giả thiết suy ra $x_1^2+x_2^2=4 \Rightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1.x_2=4$.

Do đó

$m^2-2\left(m^2-m-3\right)=4$

$m^2-2m-2=0$

$m=1\pm\sqrt{3}$

Thay $m=1\pm\sqrt{3}$ vào (1) và (2) ta thấy $m=1+\sqrt{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=1+\sqrt{3}$.

Bài 19. Cho phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x+2m^2-3m+1=0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng: $\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|\le\dfrac{9}{8}$.

Lời giải

Ta có $\Delta'=\left(m-1\right)^2-\left(2m^2-3m+1\right)=-m^2+m=m\left(1-m\right)$.

Để phương trình có hai nghiệm khi

$\Delta'\ge 0$

$0\le m\le 1$.

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1$.

Ta có

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| = |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1| = |2m^2 - m - 1| = 2\left|m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right| = 2\left|\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right|$$

Vì $0 \le m \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \le m - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4}$

$$\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{16}$$

$$\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \le 0$$

Do đó $|x_1 + x_2 + x_1x_2| = 2\left|\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right| = 2\left|\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4}\right)^2\right| = \frac{9}{8} - 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$.

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 1$ và $x_1x_2 = m^2 + 1$.

Do đó $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} = \frac{5}{4(2m+1)}$.

Suy ra $4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m+1}$. Do $m > \frac{3}{4}$ nên $2m + 1 > 1$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với $m = 2$, ta được $P = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

DẠNG 6
XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN LIÊN QUAN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ có $\Delta' = (m-3)^2 + 6m + 7 = m^2 + 16 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

Suy ra: phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viète ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 6 \\ x_1.x_2 = -6m - 7 \end{cases}$

Ta có :

$C = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

$= (2m-6)^2 + 8(-6m-7)$

$= 4m^2 - 24m + 36 - 48m - 56$

$= 4m^2 - 72m - 20$

$= 4(m^2 - 18m + 81) - 4.81 - 20$

$= 4(m-9)^2 - 344 \geq -344, \forall m \in \mathbb{R}$ (vì $4(m-9)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$)

Dấu ‘’= ‘’ xảy ra khi và chỉ khi $m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy GTNN của C là -344 đạt tại $m = 9$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta được: $x^2 + 2x - 8 = 0$

Ta có: $\Delta' = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -1 + \sqrt{9} = 2; x_2 = -1 - \sqrt{9} = -4$.

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = -4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Phương trình (1) có: $\Delta = (m-2)^2 + 32 > 0 \quad \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Khi đó theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = -m + 2; x_1x_2 = -8$

Ta có:

$$Q = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$$

$$= x_1^2x_2^2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1$$

$$= x_1^2x_2^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 + 2x_1x_2 + 1$$

$$= 64 - (-m+2)^2 - 16 + 1 = -(-m+2)^2 + 49 \le 49 \quad \forall m.$$

Vậy $Q_{\max} = 49$. Dấu "=" xảy ra khi $m = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q bằng 49 khi $m = 2$.

Bài 3. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của *m* để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \dfrac{4\left(x_1x_2 + 1\right)}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(2 + x_1x_2\right)}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Khi $m = 3$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Vì $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 5$.

b) Vì $a + b + c = 1 - 2m + 2m - 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2m - 1$ với mọi giá trị của *m*.

Ta có: $A = \dfrac{4\left(x_1x_2 + 1\right)}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(2 + x_1x_2\right)} = \dfrac{4\left(x_1x_2 + 1\right)}{\left(x_1 + x_2\right)^2 + 4} = \dfrac{4\left(2m - 1 + 1\right)}{\left(2m - 1 + 1\right)^2 + 4} = \dfrac{8m}{4m^2 + 4} = \dfrac{2m}{m^2 + 1}$

Lại có:

$$\left(m + 1\right)^2 \ge 0, \forall m$$

$$2m \ge -\left(m^2 + 1\right), \forall m$$

$$\frac{2m}{\left(m^2 + 1\right)} \ge -1, \forall m$$

$\Rightarrow A \ge -1, \forall m$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Suy ra *A* đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $m = -1$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-(m-1)-m^2+m-2=0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Tìm m để biểu thức $A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Xét $a.c=-m^2+m-2=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0, \forall m\in\mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2.

Theo câu a) thì $x_1x_2\neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2.

Do x_1, x_2 trái dấu nên $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$ với $t>0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3<0$, suy ra $A<0$

Đặt $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$, với $t>0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=-\frac{1}{t}$.

Khi đó $A=-t-\frac{1}{t}$ mang giá trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất.

Ta có $-A=t+\frac{1}{t}\geq 2$, suy ra $A\leq -2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$t=\frac{1}{t}$

$t^2=1$

$t=\pm 1$

Vì $t>0$ nên $t=1$

Với $t=1$, ta có

$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-1$

$\frac{x_1}{x_2}=-1$

$x_1=-x_2$

$x_1+x_2=0$

$-(m-1)=0$

$m=1$

Vậy với $m=1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+1=0$ có nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức:

$A=x_1(x_1-x_2)+x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=2m\ge 0\Leftrightarrow m\ge 0$

Khi đó theo Viète, ta có: $x_1+x_2=2(m+1); x_1.x_2=m^2+1$

$\Rightarrow A=x_1^2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=4(m+1)^2-3(m^2+1)=m^2+8m+1\ge 1(m\ge 0)$

Vậy $m=0$.

Bài 6. Cho phương trình $x^2-5mx+4m=0(1)$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệ với mọi m

b) Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $A=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m+1)^2+4\ge 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-2x+2-m=0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b)Giả sử x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A=x_1^2x_2^2+3(x_1^2+x_2^2)-4$

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=1-(2-m)=m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$

b) Với $m\ge 1\Rightarrow x_1+x_2=2; x_1.x_2=2-m$

Khi đó $A=x_1^2x_2^2+3(x_1^2+x_2^2)-4=x_1^2x_2^2+3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-4=(2-m)^2+3.2^2-6(2-m)-4$

$=(2-m)^2-6(2-m)+9-1=(2-m-3)^2-1=(m+1)^2-1$

Do $m\ge 1\to (m+1)^2\ge 2^2=4\Rightarrow A\ge 4-1=3\Rightarrow m=1\Rightarrow A_{\min}=3$

Bài 8. Cho phương trình $x^2-2mx+2-m=0$ (1) (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm m để biểu thức $M=\dfrac{-24}{2mx_1+x_2^2-6x_1x_2-m+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - (m-2) = m^2 - m + 2 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$

b) Theo Viète , ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1.x_2 = m-2$

Do x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2 - 2mx_2 + m - 2 = 0 \to x_2^2 = 2mx_2 - m + 2$

Do đó $2mx_1 + x_2^2 - 6x_1x_2 - m + 2 = 2m(x_1 + x_2) - 6x_1x_2 - 2m + 4 = 2m.2m - 6(m-2) - 2m + 4$

$= 4m^2 - 8m + 16 = 4(m-1)^2 + 12 \geq 12$.

$\Rightarrow M \geq \frac{-24}{12} = -2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị m thoả mãn của biểu thức $P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức: $Q = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

DẠNG 7
SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN VI-ET

Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol $(P): y = ax^2$ ta cần chú ý:

♦ Nếu đường thẳng (d) là $y = m$ (song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$.

♦ Nếu đường thẳng $(d): y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ.

♦ Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì $A(x_1; mx_1 + n), B(x_2; mx_2 + n)$ khi đó ta có:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2+1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]}.$$

Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet.

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ thì có dạng: $y = a(x - x_0) + y_0$

Bài 1. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x + 2m + 3$.

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -5)$.

b) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, tìm m để $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

Lời giải

a) Vì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -5)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} &2m + 3 = -5 \\ &2m = -8 \\ &m = -4 \end{aligned}.$$

Vậy với $m = -4$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại tọa độ $(0; -5)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$x^2 = 2(m-1)x + 2m + 3$

$x^2 - 2(m-1)x - 2m - 3 = 0$ (*).

Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 + 2m + 3 = m^2 - 2m + 1 + 2m + 3 = m^2 + 4$

Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên $\Delta' = m^2 + 4 \geq 4 > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Theo Viète ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = -2m-3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_A + x_B = 2(m-1) \\ x_Ax_B = -2m-3 \end{cases}$

Mà

$x_A^2 + x_B^2 = 10$

$(x_A + x_B)^2 - 2x_Ax_B = 10$

$4(m-1)^2 - 2(-2m-3) = 10$

$4m^2 - 8m + 4 + 4m + 6 = 10$

$4m^2 - 4m = 0$

$4m(m-1) = 0$

$m = 0; m = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m \in \{0;1\}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 3mx - 3m + 1$, trong đó m là tham số.

a) Với $m = 1$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + 2x_2 = 11$.

Lời giải

(P): $y = x^2$

(d): $y = 3mx - 3m + 1$.

a) Với $m = 1$, đường thẳng (d) có dạng $y = 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Khi đó, phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(a = 1; b = -3; c = 2)$

Do $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trìnhcó 2 nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Với $x = x_1 = 1$ thì $y = 1^2 = 1$

Với $x = x_2 = 2$ thì $y = 2^2 = 4$

Vậy với $m = 1$ thì toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(1; 1)$; $(2; 4)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$x^2 = 3mx - 3m + 1$

$x^2 - 3mx + 3m - 1 = 0$ (*)

$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 1) = 9m^2 - 12m + 4$

$= (3m)^2 - 2.3m.2 + 2^2 = (3m - 2)^2$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành x_1; x_2 thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1;

x_2

$\Delta > 0$

$(3m - 2)^2 > 0$

$3m - 2 \neq 0$

$3m \neq 2$

$m \neq \dfrac{2}{3}$ (**)

Khi đó, theo hệ thức Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 & (3) \end{cases}$

Ta có $x_1 + 2x_2 = 11$ 4

Từ (2); (4) ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + 2x_2 = 11 \\ \begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 + 11 - 3m = 3m \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 = 3m + 3m - 11 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 6m - 11 \\ x_2 = 11 - 3m \end{cases}$

Thế $x_1 = 6m - 11$; $x_2 = 11 - 3m$ vào (3) ta được:

$(6m - 11).(11 - 3m) = 3m - 1$

$66m - 18m^2 - 121 + 33m - 3m + 1 = 0$

$-18m^2 + 96m - 120 = 0$

$18m^2 - 96m + 120 = 0$

$3m^2 - 16m + 20 = 0$ (5)

$\Delta' = (-8)^2 - 3.20 = 64 - 60 = 4 > 0$.

Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{3} = \frac{10}{3} \quad (\text{t/m}\,(**))$$

$$m_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{4}}{3} = 2 \quad (\text{t/m}(**))$$

Vậy $m \in \left\{2; \frac{10}{3}\right\}$ thoả mãn đề ra.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1) = -3$

Lời giải

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$x^2 = 2x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 = 0(*)$

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - (-m)^2 = m^2 + 1 > 0(\forall m)$

Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $(dfcm)$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$(x_1+1)(x_2+1) = -3$

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) hay x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*)

Theo hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -m^2$.

Theo giả thiết :

$(x_1+1)(x_2+1) = -3$

$x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 + 3 = 0$

$-m^2 + 2 + 1 + 3 = 0$

$m^2 = 6$

$m = \pm\sqrt{6}$

Vậy $m = \pm\sqrt{6}$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = (5m-6)x - 15m + 25$ có đồ thị là đường thẳng d, với m là tham số

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P)

Học sinh tự vẽ đồ thị (P)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$-x^2 = (5m-6)x - 15m + 25$

$x^2 + (5m-6)x - 15m + 25 = 0\,(*)$.

Ta có : $\Delta = (5m-6)^2 - 4.(-15m+25) = 25m^2 - 64$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $25m^2 - 64 > 0 \Rightarrow m < -\dfrac{8}{5}$ hoặc $m > \dfrac{8}{5}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5m + 6 \\ x_1x_2 = -15m + 25 \end{cases}$.

Ta có :

$|x_1 - x_2| = 6$

$(x_1 - x_2)^2 = 36$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 36$

$(-5m+6)^2 - 4(-15m+25) = 36$

$25m^2 = 100$

$m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x - m + 1$ (với m là tham số)

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

Học sinh tự vẽ Parabol

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = -x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 1 = 0\,(1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1^2 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{4}$

Khi đó áp dụng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -1; x_1x_2 = m - 1$.

Khi đó ta có :

$|x_1 - x_2| = 2$

$(x_1 - x_2)^2 = 4$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$1 - 4(m-1) = 4$

$m = \dfrac{1}{4}(tm)$

Vậy $m = \dfrac{1}{4}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ Parabol (P).

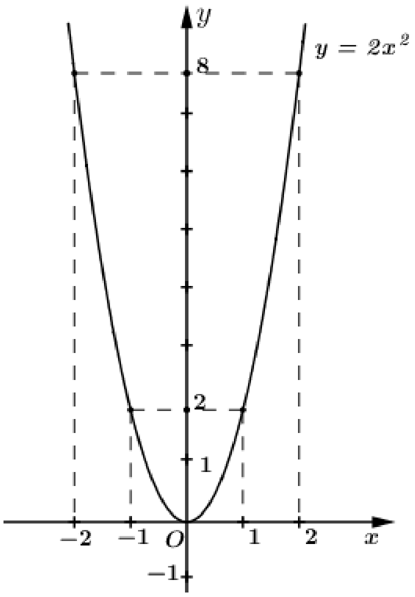
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Lời giải

a) Vẽ Parabol (P).

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$2x^2 = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m = 0$ (1)

Ta có $\Delta' = 1^2 - 2(-m) = 1 + 2m$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi

$\Delta' > 0$

$1 + 2m > 0$

$m > \dfrac{-1}{2}$

Với $m > \dfrac{-1}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = -1; x_1x_2 = \dfrac{-m}{2}$

Theo đề bài ta có:

$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$

$-1 - 2\dfrac{-m}{2} = 1$

$-1 + m = 1$

$m = 2$

Vậy $m = 2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$

Bài 7. Cho Parabol P $: y = x^2$ vả đường thẳng $d : y = -2x + m - 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt Parabol P tại hai điểm phân biệt $A\ x_1;y_1$ và $B\ x_2;y_2$ sao cho $y_1 + y_2\ ^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và P

$x^2 = -2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m + 1 = 0 \quad 1$

Để đường thẳng d cắt Parabol P tại hai điểm phân biệt thì phương trình 1 có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta' > 0$

$1^2 - 1 \cdot (-m + 1) > 0$

$m > 0$

Vậy $m > 0$ thì đường thẳng d cắt Parabol P tại hai điểm phân biệt $A\ x_1;y_1\ , B\ x_2;y_2$

Khi đó ta có $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$

Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = -m + 1$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = \ x_1 + x_2\ ^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-2)^2 - 2(-m + 1) = 2m + 2$

Theo bài ra ta có

$y_1 + y_2\ ^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$

$x_1^2 + x_2^2\ ^2 = 110 - (x_1^2 + x_2^2)$

$(2m+2)^2 = 110 - \ 2m+2$

$2m^2 + 5m - 52 = 0$

Ta có $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-52) = 441$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$m_1 = \dfrac{-5+21}{4} = 4$ (thoả mãn điều kiện $m > 0$)

$m_2 = \dfrac{-5-21}{4} = \dfrac{-13}{2}$ (không thoả mãn điều kiện $m > 0$)

Vậy $m = 4$ để đường thẳng d cắt Parabol P tại hai điểm phân biệt A $x_1;y_1$ và B $x_2;y_2$ sao cho

$y_1 + y_2 \ ^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.

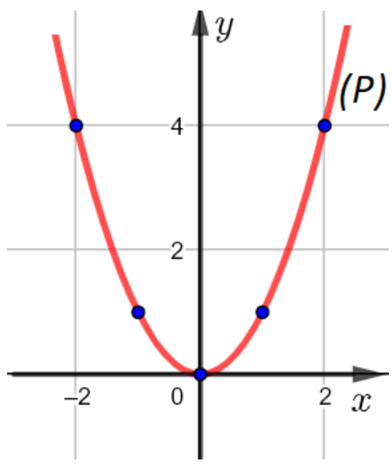
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ có dạng như sau:



a) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\begin{aligned}&x^2 = 2x+5m\\&x^2-2x-5m=0\end{aligned}.$$

Do (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 nên

$\Delta' > 0$

$1^2+5m>0$.

$m > -\dfrac{1}{5}$

Khi đó, theo Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{-2}{1} = 2 \ (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{-5m}{1} = -5m \ (2) \end{cases}$.

Theo đề bài ta có: $x_1.x_2^2 - x_1(5m+3x_2) = 10115$ (3).

Từ $(1) \Rightarrow x_1 = 2 - x_2$. Thay vào (2) và (3), ta có: $\begin{cases} (2-x_2)x_2 = -5m \\ (2-x_2).x_2^2 - (2-x_2)(5m+3x_2) = 10115 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2-x_2).x_2^2 - (2-x_2)\left(x_2^2 - 2x_2 + 3x_2\right) = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2-x_2).x_2^2 - (2-x_2)\left(x_2^2 + x_2\right) = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ 2x_2^2 - x_2^3 - 2x_2^2 - 2x_2 + x_2^3 + x_2^2 = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ x_2^2 - 2x_2 = 10115 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 5m = 10115 \Leftrightarrow m = 2023$ (thỏa mãn).

Vậy, $m = 2023$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx + 3 - 2m$ (với m là tham số)

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$

2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm A, B. Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$

Lời giải

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$

Thay $x=2, y=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có :

$1=2m.2+3-2m \Leftrightarrow 2m=-2 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $m=-1$ thì thỏa đề

2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm A, B. Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P):

$x^2 = 2mx+3-2m \Leftrightarrow x^2-2mx+2m-3=0\,(*)$

Ta có : $\Delta' = m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0$ (với mọi m)

Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm $A, B \Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*)

Lại có x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m>0 \\ 2m-3>0 \end{cases}$$

$$m>\frac{3}{2}$$

Áp dụng hệ thức Viète ta có : $x_1+x_2=2m; x_1x_2=2m-3$

Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{14}$ nên áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ta có :

$x_1^2+x_2^2=14$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=14$

$4m^2-2(2m-3)=14$

$2m^2+2m-4=0$

$m=-1(ktm); m=2(tm)$

Vậy $m=2$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=2x-m+3$ (m là tham số) parapol $(P): y=x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1x_2 thỏa mãn $x_1^2(x_2+2)+x_2^2(x_1+2)x_1\le 10$

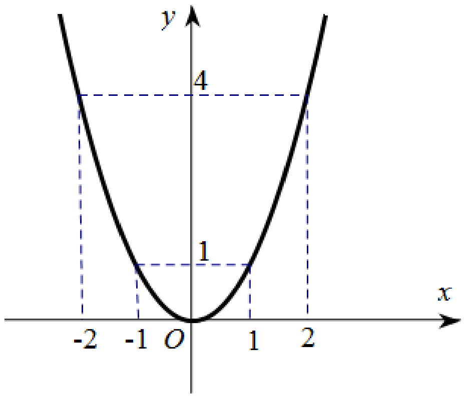
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1x_2 thỏa mãn $x_1^2(x_2+2)+x_2^2(x_1+2)x_1\le 10$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P):

$x^2=2x-m+3\Leftrightarrow x^2-2x+m-3=0\ (*)$

$\Delta'=1-(m-3)=4-m$

Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khi

$\Delta'>0$

$4-m>0$

$m<4\ (1)$

Áp dụng định lí Viète, ta có $x_1+x_2=2; x_1x_2=m-3$

Mà $x_1^2(x_2+2)+x_2^2(x_1+2)x_1\le 10$

$x_1^2x_2+2x_1^2+x_2^2x_1+2x_2^2\le 10$

$x_1x_2(x_1+x_2)+2(x_1^2+x_2^2)\le 10$

$x_1x_2(x_1+x_2)+2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]\le 10 \qquad (2)$

Thay $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=m-3\end{cases}$ vào (2), ta có: $2(m-3)+2.4-4(m-3)\le 10$

$2\ \ m-3\ \ +2.4-4\ \ m-3\ \ \le 10$

$2m-6+8-4m+12 \le 10$

$-2m+14 \le 10$

$-2m \le -4$

$m \ge 2$

Kết hợp điều kiện 1 suy ra $2 \le m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in\ \ 2;3\ \ $.

Vậy $m \in\ \ 2;3$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx+3$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P).

b) Khi $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

c) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2\,(P)$

b) Khi $m = 2$ phương trình đường thẳng có dạng $(d): y = 2x+3$.

Hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = 2x+3$ là nghiệm của phương trình:

$x^2 = 2x+3$

$x^2-2x-3=0$

Vì $a-b+c = 1-(-2)+(-3) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = 3$.

Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1$.

Với $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9$.

Vậy ta có hai giao điểm của (P) và (d) là $(-1;1)$ và $(3;9)$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = mx+3$:

$$\begin{aligned} &x^2 = mx+3 \\ &x^2-mx-3=0 \end{aligned} \quad (1).$$

Để (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình (1) phải luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Rightarrow \Delta > 0$

$(-m)^2 - 4.1.(-3) > 0$

$m^2 + 12 > 0$ (luôn đúng với mọi m)

Vậy với mọi m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -3 \end{cases}$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta có $0^2 - m.0 - 3 = -3 \neq 0$ với mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m.

Theo bài ra ta có:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$

$2x_2 + 2x_1 = 3x_1x_2$.

$2(x_1 + x_2) = 3x_1x_2$

Thay hệ thức Vi-et, ta được:

$2m = 3.(-3)$

$2m = -9$.

$m = \frac{-9}{2}$

Vậy $m = \frac{-9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d): $y = 2x - 3m$ (với m là tham số) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1x_2^2 - x_2(3m + 2x_1) = 12$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 = 2x - 3m$

$x^2 - 2x + 3m = 0 (*)$

Để đường thẳng (d): $y = 2x - 3m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thì phương trình (*) phải có hai nghiệm $x_1; x_2$.

$\Delta' = 1 - 3m > 0$

$m < \frac{1}{3}$

Theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 3m \end{cases}$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên

$x_2^2 - 2x_2 + 3m = 0$

$3m = 2x_2 - x_2^2$

$\Rightarrow x_1 x_2^2 - x_2\left(2x_2 - x_2^2 + 2x_1\right) = 12$

$x_1 x_2^2 + x_2^3 - 2x_2\left(x_1 + x_2\right) = 12$

$x_2^2\left(x_1 + x_2\right) - 2x_2\left(x_1 + x_2\right) = 12$

$\left(x_1 + x_2\right)\left(x_2^2 - 2x_2\right) = 12$

$2x_2^2 - 4x_2 = 12$

$x_2^2 - 2x_2 = 6$

$-3m - 6 = 0$

$m = -2\left(tm\right)$

Vậy $m = -2$.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị *(P)* và đường thẳng *d* có phương trình $y = x + \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1$, với *m* là tham số.

a) Vẽ đồ thị *(P)*.

b) Tìm m để đường thẳng *d* cắt *(P)* tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị *(P)*.

b) Tìm m để đường thẳng *d* cắt *(P)* tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

PT hoành độ giao điểm: $\dfrac{1}{2}x^2 = x + \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 2m - 2 = 0(*)$

Để đường thẳng *d* cắt *(P)* tại 2 điểm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow \left(m+1\right)^2 + 2 > 0$

Do $\left(m+1\right)^2 \geq 0 \forall m$ nên $\left(m+1\right)^2 + 2 > 0 \forall m$, do đó pt (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m $\Rightarrow$ đường thẳng *d* luôn cắt *(P)* tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Khi đó áp dụng ĐL Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = -m^2 - 2m - 2$

Theo bài ra ta có:

$x_1^3 + x_2^3 = 68$

$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=68$

$2^3-3(-m^2-2m-2).2=68$

$6m^2+12m-48=0$

$m^2+6m-8=0(**)$

PT (**) có hai nghiệm phân biệt $m_1=2; m_2=-4.$

Bài 14. Cho hàm số $y=2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ (Oxy)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=2mx+1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2$ và $|x_2|-|x_1|=2025$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P). Học sinh tự vẽ

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$2x^2=2mx+1$

$2x^2-2mx-1=0$ (1)

$\Delta'=(-m)^2-2.(-1)=m^2+2>0$ với mọi giá trị của m

Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m & (2) \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2} & (3) \end{cases}$

Ta có $x_1<x_2$ mà $x_1x_2=\dfrac{-1}{2}<0$ suy ra $x_1<0<x_2$

Khi đó $|x_2|-|x_1|=2025$

$x_2-(-x_1)=2025$

$x_2+x_1=2025$

$m=2025$

Bài 15. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=3mx+1-m^2$ (m là tham số)

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1;-9)$

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=2x_1x_2$

Lời giải

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1;-9)$

Đường thẳng $(d): y=3mx+1-m^2$ đi qua điểm $A(1;-9)$

$-9 = 3m.1 + 1 - m^2$

$m^2 - 3m - 9 - 1 = 0$

$m^2 - 3m - 10 = 0$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4.10 = 49 > 0$

$\Rightarrow$Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $m_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5; m_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$

Vậy $m = -2$ hoặc $m = 5$ để thỏa mãn bài toán

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$

Thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là:

$x^2 = 3mx + 1 - m^2$

$x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$

để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$\Delta > 0$

$(3m)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$

$9m^2 - 4m^2 + 4 > 0$

$5m^2 + 4 > 0 \quad \forall m$

$\Rightarrow$ Với mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$

Áp dụng hệ thức Viète với phương trình (*) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Theo đề bài ra ta có:

$x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

$3m = 2(m^2 - 1)$

$2m^2 - 2 - 3m = 0$

$2m^2 - 3m - 2 = 0$

$\Rightarrow$Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $m_1 = \frac{3+\sqrt{25}}{2.2} = 2; m_2 = \frac{3-\sqrt{25}}{2.2} = -\frac{1}{2}$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$ để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 16. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x - m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 + x_1^2x_2^2 = 6(x_1 + x_2)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = 2x - m$

$x^2 - 2x + m = 0\ (1)$

Ta có: $\Delta' = 1 - m$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt là phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có hai nghiệm phân biệt hay $1 - m > 0 \Rightarrow m < 1\ (*)$

Khi đó x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (d) và (P) nên x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình hoành độ của (d) và (P) .

Do đó theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1\, x_2 = m$

Khi đó:

$y_1 + y_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$

$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$

$4 - 2m + m^2 = 12$

$m^2 - 2m - 8 = 0$

$m = -2\ (TM\ (*)); m = 4$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn.

Bài 17. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m+1)x - 2m$ (m là tham số). Tìm m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 - x_1x_2 = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = (2m+1)x - 2m$

$\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

Ta có: $\Delta = \left[-(2m+1)^2 - 4.2m\right] = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Rightarrow 2m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$

Theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1.x_2 = 2m \end{cases}$

Vậy với $m = 0$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thỏa điều kiện đã cho.

Khi đó: $y_1 + y_2 - x_1x_2 = 1$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 1$

$\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=1$

$\left(2m+1\right)^2-3.2m-1=0 \Leftrightarrow 4m^2+4m+1-6m-1=0$

$4m^2-2m=0 \Leftrightarrow 2m\left(2m-1\right)=0$

$2m=0$ hoặc $2m-1=0$

$m=0$ (thỏa điều kiện) hoặc $m=\dfrac{1}{2}$ (không thỏa điều kiện)

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parapol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2(m-1)x-m+3$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parapol (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x_1^2+x_2^2$.

Lời giải

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2-2(m-1)x+m-3=0(*)$

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d) nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*).

Do đó

$\Delta'_* = (m-1)^2-(m-3)\geq 0$

$\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq 0$ (luôn đúng)

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1+x_2=2(m-1); x_1x_2=m-3$.

Khi đó:

$$M=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-2\cdot(m-3)=\frac{1}{4}(4m-5)^2+\frac{15}{4}\geq\frac{15}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{5}{4}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\dfrac{15}{4}$ khi $m=\dfrac{5}{4}$

BÀI 4
GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

- **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:
  + Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
  + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
  + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.
- **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

DẠNG 1
TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC

Thuộc công thức tính chu vi; diện tích của tam giác, hình thang, hình chữ nhật, hình vuông, định lý Pi-ta-go.

Bài 1. Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình (Quận Nam Từ Liêm – Hà Nội) có mặt sân bóng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng $37m$ và có diện tích là $7140m^2$. Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mặt sân bóng đá này

Lời giải

Gọi chiều rộng mặt sân là $x(m)(x>0) \Rightarrow$ chiều dài mặt sân là $x+37(m)$

Vì diện tích mặt sân là $7140m^2$ nên ta có phương trình :

$x(x+37)=7140$

$x^2+37x-7140=0$

Giải phương trình, ta được: $x=68(tm); x=-105(ktm)$

Vậy chiều rộng mặt sân là $68,$ chiều dài là $68+37=105m$

Bài 2. Một người nông dân trồng hoa trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 15m. Cuối mỗi vụ thu hoạch, bình quân người đó bán được 20.000 đồng tiền hoa trên mỗi mét vuông đất. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó. Biết tổng số tiền bán hoa cuối vụ từ mảnh vườn người đó thu được là 252 triệu đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh vườn là $x(m)$, điều kiện: $x>0$.

Khi đó, chiều dài mảnh vườn là $x+15(m)$

Diện tích mảnh vườn là: $252000000 : 20000 = 12600(m^2)$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$x(x+15) = 12600$

$x^2 + 15x - 12600 = 0$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 105$ (nhận); $x_2 = -120$ (loại)

Vậy chiều rộng mảnh vườn là $105m$, chiều dài mảnh vườn là $105 + 15 = 120m$,

Bài 3. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m. Biết chiều dài mảnh đất lớn hơn chiều rộng là $7m$. Hãy tính diện tích mảnh dất hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh đất là $x(m)$ (ĐK: $x > 0$) $\Rightarrow$ Chiều dài mảnh đất là $x + 7(m)$.

Vì độ dài đường chéo của mảnh đất hình chữ nhật là 13m nên ta có phương trình:

$x^2 + (x+7)^2 = 13^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$

$2x^2 + 14x - 120 = 0$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

Ta có $\Delta = 7^2 - 4.(-60) = 289 = 17^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiêm phân biệt

$x = \dfrac{-7+17}{2} = 5 \quad (tm); x = \dfrac{-7-17}{2} = -12(ktm)$

$\Rightarrow$ Chiều rộng của mảnh đất là $5m$, chiều dài của mảnh đất là $5 + 7 = 12m$.

Vậy diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $S = 5.12 = 60\left(\text{m}^2\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là $6m$. Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn, biết diện tích khu vườn là $280m^2$.

Lời giải

Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn:

Gọi kích thước chiều rộng khu vườn hình chữ nhật là $x(m), x > 0$

Chiều dài khu vườn có kích thước $x + 6(m)$

Khu vườn có diện tích là 280m^2 nên ta có phương trình

$x(x+6) = 280$

$x^2 + 6x - 280 = 0$

$x = 14$ (Nhận) và $x = -20$ (loại)

Vậy khu vườn có chiều rộng là $14m$ và chiều dài là $20m$.

Bài 5. Bác Bình trồng cam trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 4m, chu vi của mảnh vườn là $40m$. Biết rằng cứ $3m^2$ bác Bình trồng được 1 cây cam, hỏi bác Bình trồng được bao nhiêu cây cam trên mảnh vườn đó

Lời giải

Nửa chu vi của mảnh vườn là : $40:2=20(m)$

Gọi chiều dài của mảnh vườn là $x(m)(4<x<20) \Rightarrow$ chiều rộng : $x-4(m)$

Vì nửa chu vi của mảnh vườn là 40m nên ta có phương trình :

$x+x-4=20 \Leftrightarrow x=12(tm)$

Vậy chiều dài mảnh vườn là 12m, chiều rộng là 8m

Số cây cam bác Bình trồng là $12.8:3=32$ (cây cam)

Bài 6. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7cm,$ độ dài cạnh huyền bằng $17cm.$ Tính độ dài hai cạnh góc vuông

Lời giải

Gọi độ dài cạnh thứ nhất của tam giác vuông là $x(cm)(x>0)$

Khi đó độ dài cạnh thứ hai của tam giác vuông $x+7(cm)$

Áp dụng định lý Pytago ta có phương trình :

$x^2+(x+7)^2=17^2$

$x^2+7x-120=0$

$\left[\begin{array}{l} x=8(tm) \\ x=-15(ktm) \end{array}\right.$

Vậy độ dài cạnh thứ nhất của tam giác vuông là $8cm,$ độ dài cạnh thứ hai là $15cm$

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng $1,5$ m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là $4329m^2$.

Lời giải

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x (m, đk: $x>0$).

Khi đó chiều dài hình chữ nhật là $3x$ (m).

Kích thước phần đất còn lại sau khi làm lối đi là $x-3(m);3x-3(m)$.

Theo bài diện tích đất còn lại là $4329m^2$ nên ta có phương trình

$(x-3)(3x-3)=4329$

$3x^2-3x-9x+9=4329$

$3x^2-12x-4320=0$

$x^2-4x-1440=0$

$\Delta'=4+1440=1444 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=38$

Pt có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{2+38}{1} = 40$ (t.m); $x_2 = \dfrac{2-38}{1} = -36$ (L)

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 40 m; chiều dài mảnh vườn là 3.40 = 120 m.

Bài 8. Nhà bạn Hoàng có một mảnh vườn hình chữ nhật, rộng 6m. Diện tích của mảnh vườn bằng $216\ \text{m}^2$. Tính chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn Hoàng.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn nhà bạn Hoàng là: $x(m)$(ĐK: $x > 0$).

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng $6m$ nên chiều dài mảnh vườn là: $x + 6(m)$.

Do diện tích của mảnh vườn là $216m^2$ nên ta có phương trình:

$x(x+6) = 216$

$x^2 + 6x - 216 = 0$

Ta có: $\Delta' = 3^2 + 216 = 225 = 15^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = -3 + 15 = 12(\text{tm})$ Hoặc $x_2 = -3 - 15 = -18(\text{ktm})$

$\Rightarrow$Chiều rộng của mảnh vườn là $12m$ và chiều dài của mảnh vườn là: $12 + 6 = 18(m)$

Vậy chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn Hoàng lần lượt là 12 mét và 18 mét.

Bài 9. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 68cm. Nếu tăng chiều rộng 6cm và giảm chiều dài 10cm thì được một hình vuông có cùng diện tích với hình chữ nhật ban đầu. Tìm kích thước của hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải

+ Nửa chu vi hcn ban đầu là $68 : 2 = 34$ (cm).

+ Gọi chiều dài hcn ban đầu là x (cm); $(10 \langle x \langle 34)$. Suy ra chiều rộng hcn ban đầu là $(34 - x)$ (cm).

+ Chiều dài hcn sau khi giảm 10(cm) là $(x - 10)$ (cm). Chiều rộng hcn sau khi tăng 6(cm) là $(40 - x)$ (cm).

+ Theo đề, sau khi giảm chiều dài 10(cm) và tăng chiều rộng 6(cm) ta được hình vuông nên ta có phương trình:

$x - 10 = 40 - x$

$x = 25$ (nhận).

+Vậy chiều dài hcn ban đầu là 25(cm).

Chiều rộng hcn ban đầu là $34 - 25 = 9$ (cm).

DẠNG 2
TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG

Kiến thức cần nhớ:

♦ Quãng đường = Vận tốc . Thời gian.

♦ Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:

♦ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.

♦ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

♦ Đối với (Ca nô, tàu xuồng) chuyển động trên dòng nước: Ta cần chú ý:

+ Khi đi xuôi dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng + Vận tốc dòng nước.

+ Khi đi ngược dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước.

+ Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Bài 1. Quãng đường AB dài $100km.$ Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Trên thực tế xe đi với vận tốc chậm hơn dự định $10km/h$ nên xe đến B chậm hơn dự định 30 phút. Tính vận tốc và thời gian ô tô dự định đi trên quãng đường AB

Lời giải

Đổi 30 phút $=0,5$ giờ

Gọi vận tốc ô tô dự định đi trên quãng đường AB là $x\left(km/h\right)\left(x>10\right)$

Thời gian dự định đi trên quãng đường AB là $\dfrac{100}{x}\left(h\right)$

Vận tốc thực tế ô tô đi là $x-10\left(km/h\right)$

Nên thời gian thực tế đi hết quãng đường AB là $\dfrac{100}{x-10}\left(h\right)$

Vì xe đến B chậm hơn dự định 30 phút $=\dfrac{1}{2}\left(h\right)$ nên ta có phương trình :

$$\frac{100}{x-10}-\frac{100}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{100x-100\left(x-10\right)}{x\left(x-10\right)}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-10x-2000=0$$

Ta có $\Delta'=5^2+2000=2025>0,\sqrt{\Delta}=45$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = 5+45 = 50(tm); x_2 = 5-45 = -40(ktm)$

Vậy vận tốc dự định là 50km/h và thời gian dự định là $\frac{100}{50} = 2$ giờ

Bài 2. Một ô tô và một xe máy khởi hành cũng một lúc từ thành phố Cao Bằng đến huyện Bảo Lạc, quãng đường dài 135 km. Biết rằng vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 9 km/h và ô tô đến huyện Bảo Lạc trước xe máy 45 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) (điều kiện: $x > 0$).

Khi đó vận tốc của ô tô là: $x+9$ (km/h).

Thời gian Xe máy đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x}$ (giờ).

Thời gian Ô tô đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x+9}$ (giờ).

Vì Ô tô đến Bảo lạc trước xe máy 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{135}{x} - \frac{135}{x+9} = \frac{3}{4}$$

$$135.4(x+9) - 135.4x = 3x(x+9)$$

$$540(x+9) - 540x = 3x^2 + 27x$$

$$3x^2 + 27x - 4860 = 0$$

$$x^2 + 9x - 1620 = 0$$

$$(x-36)(x+45) = 0$$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 36$ (tm); $x = -45$ (ktm).

Vậy vận tốc của xe máy là $36(\text{km/h})$; vận tốc của ô tô là $45(\text{km/h})$.

Bài 3. Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi. Nhưng sau khi đi được 2 giờ thì xe bị hỏng phải dừng lại 20 phút để sửa chữa. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm $8km/h$.Tính vận tốc ban đầu của xe máy. Biết rằng quãng đường AB dài $160km$

$$20' = \frac{1}{3}h$$

Lời giải

Gọi vận tốc ban đầu của xe máy là $x(km/h)(x > 0)$

Vận tốc lúc sau là $x+8(km/h)$

Thời gian xe máy dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{160}{x}$ (giờ)

Quãng đường xe đi được sau 2 giờ là $2x(km)$

Thời gian xe đi với vận tốc $x+8(km/h)$ là $\dfrac{160-2x}{x+8}$

Do xe máy đến B đúng thời gian quy định nên ta có phương trình :

$\dfrac{160}{x}=2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{160-2x}{x+8}$

$\dfrac{160x+1280-160x+2x^2}{x^2+8x}=\dfrac{7}{3}$

$\dfrac{1280+2x^2}{x^2+8x}=\dfrac{7}{3}$

$6x^2+3840=7x^2+56x$

$x^2+56x-3840=0$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=40(tm); x=-96(ktm)$

Vậy vận tốc ban đầu của xe máy là $40(km/h)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một xe khách và một xe tải xuất phát cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B trên quãng đường dài $180\,km$. Vận tốc xe khách lớn hơn vận tốc xe tải là $10\,km/h$ nên xe khách đã đến B sớm hơn xe tải 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Đổi: 36 phút = $\dfrac{3}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe khách là: $x\ (km/h)$, (điều kiện: $0<x<10$).

Vận tốc của xe tải là: $x-10\ (km/h)$.

Thời gian xe khách đi là: $\dfrac{180}{x}\ (h)$.

Thời gian xe tải đi là: $\dfrac{180}{x-10}\ (h)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{180}{x-10}-\dfrac{180}{x}=\dfrac{3}{5}$.

$5.180x-5.180(x-10)=3x(x-10)$

$900x-900x+9000=3x^2-30x$.

$3x^2-30x-9000=0$

$x^2-10x-3000=0$.

$\left[\begin{array}{l} x=-50 \\ x=60 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $x=60$.

Vậy vận tốc xe khách là $60\,km/h$ và vận tốc xe tải là $50\,km/h$.

Bài 5. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B trên quãng đường $100\,km$. Khi từ B về A người đó đã giảm vận tốc $10\,km/h$ so với lúc đi nên thời gian về nhiều hơn thời gian lúc đi là 30 phút. Tính vận tốc của người lúc đi.

Lời giải

Đổi 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ

Gọi $x\,(km/h)$ là vận tốc của người đó lúc đi (ĐK: $x > 10$)

Vận tốc của người đó lúc về là $x - 10\,(km/h)$

Thời gian đi từ A đến B là: $\frac{100}{x}(h)$

Thời gian từ B về đến A là: $\frac{100}{x-10}\,(h)$

Theo đề bài ta có phương trình $\frac{100}{x-10} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}$

Biến đổi đưa về phương trình $x^2 - 10x - 2000 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = 50\,(nhan); x_2 = -40\,(loai)$

Vậy vận tốc của người đó lúc đi là: $50\,km/h$

Bài 6. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau $15km$. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm $3km/h$. Vì vậy, thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

15 phút $= \frac{1}{4}$ giờ

Gọi vận tốc lúc đi từ A đến B là $x(km/h)(x > 0)$

Vận tốc lúc về từ B về A là : $x + 3(km/h)$

Thời gian đi là : $\frac{15}{x}(h)$, thời gian lúc về : $\frac{15}{x+3}(h)$

Vì thời gian về ít hơn đi là $\frac{1}{4}$ giờ nên ta có phương trình :

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+3} = \frac{1}{4}$$

$$4\left[15(x+3) - 15x\right] = 1.\left[x(x+3)\right]$$

$$180 = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

Giải phương trình ta được $x = 12(tm); x = -15(ktm)$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là $12km/h$

Bài 7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là $20km/h$ nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài $60km$, tính vận tốc của mỗi xe (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB)

Lời giải

$30' = \frac{1}{2}h$

Gọi vận tốc của ô tô là $x(km/h)(x > 20) \Rightarrow$ vận tốc của xe máy là $x - 20(km/h)$

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB : $\frac{60}{x}(h)$, thời gian xe máy đi hết AB: $\frac{60}{x-20}(h)$

Do ô tô đến sớm hơn 30 phút nên ta có phương trình :

$$\frac{60}{x-20} - \frac{60}{x} = \frac{1}{2}$$

Giải được $\left[\begin{array}{l} x = 60(tm) \\ x = -40(ktm) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là $60km/h$; $40km/h$

Bài 8. Năm 2021, Thủ tướng chính phủ đã phê duyệt dự án xây dựng công trình đường cao tốc Châu Đốc – Cần Thơ- Sóc Trăng, dự án này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng, sẽ góp phần phát triển kinh tế xã hội của tỉnh Sóc Trăng nói riêng và khu vực đồng bằng Sông Cửu Long nói chung. Theo ước tính chiều dài toàn tuyến cao tốc từ Châu Đốc đến Sóc Trăng là $188km$. Biết rằng vận tốc ô tô đi trên đường cao tốc lớn hơn vận tốc ô tô đi trên đường quốc lộ là $34km/h$. Vì vậy nếu ô tô di chuyển trên quãng đường $188km$ thì việc di chuyển trên đường cao tốc sẽ rút ngắn được 68 phút so với việc di chuyển trên đường quốc lộ. tính vận tốc của ô tô khi di chuyển trên đường cao tốc

Lời giải

Đổi 68 phút $= \frac{17}{15}$ giờ

Gọi vận tốc ô tô di chuyển trên đường cao tốc là $x(km/h)(x > 34)$

Vận tốc ô tô di chuyển trên đường quốc lộ là $x - 34(km/h)$

Thời gian ô tô đi quãng đường $188km$ trên đường cao tốc là $\frac{188}{x}(h)$

Thời gian ô tô đi trên quãng đường 188km trên đường quốc lộ là $\frac{188}{x-34}(h)$

Vì nếu ô tô di chuyển trên quãng đường $188km$ thì việc di chuyển trên đường cao tốc sẽ rút ngắn được 68 phút so với việc di chuyển trên đường quốc lộ nên ta có phương trình :

$$\frac{188}{x-34} - \frac{188}{x} = \frac{17}{15}$$

Giải được $\left[\begin{array}{l} x = 94(tm) \\ x = -60(ktm) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc ô tô di chuyển trên đường cao tốc là $94km/h$

Bài 9. Quãng đường AB dài 150 km. Một xe tải khởi hành đi từ A đến B, cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe tải đi từ A đến B $(x > 0)$.

Vận tốc của ô tô đi từ A đến B là $x + 5$ (km/h).

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{150}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{150}{x+5}$ (giờ)

Vì ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút nên ta có phương trình:

$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+5} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

$x^2 + 5x - 2250 = 0$

$x = 45\ (nh); x = -50\ (l)$

Vậy vận tốc của xe tải đi từ A đến B là 45 km/h.

Bài 10. Hằng ngày bạn Mai đi học bằng xe đạp, quãng đường từ nhà đến trường dài 3km. Hôm nay, xe đạp hư nên Mai nhờ mẹ chở đi đến trường bằng xe máy với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi xe đạp là 24 km/h, cùng thời điểm khởi hành như mọi ngày nhưng Mai đã đến trường sớm hơn 10 phút.tính vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp.

Lời giải

Gọi vận tốc của bạn Mai khi đi xe đạp từ nhà tới trường là x (km/h) $(x > 0)$.

Thời gian Mai đi xe đạp từ nhà đến trường là $\frac{3}{x}$ (h).

Vận tốc xe máy mẹ Mai chở Mai từ nhà đến trường là $x + 24$ (km/h)

Thời gian mẹ chở mai đi học bằng xe máy từ nhà đến trường là $\frac{3}{x+24}$ (h)

Vì hôm nay mai đến sớm hơn 10 phút hay $\frac{1}{6}$ (h) so với mọi ngày, ta có phương trình $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+24} = \frac{1}{6}$

$18(x+24) - 18x = x(x+24)$

$18x + 432 - 18x = x^2 + 24x$

$x^2 + 24x - 432 = 0$

Có $\Delta' = 12^2 - 1.(-432) = 576 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{576} = 24$

$x_1 = \dfrac{-12+24}{1} = 12$ (nhận); $x_1 = \dfrac{-12-24}{1} = -36$ (loại).

Vậy vận tốc của bạn Mai khi đi xe đạp từ nhà đến trường là 12 km/h

Bài 11. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc tể đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau $120\,km$. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là $10\,km/h$ nên ô tô thú hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là $x(km/h)$ (ĐK: $x > 0$).

Suy ra vận tốc của ô tô thứ hai là $x + 10(km/h)$

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\dfrac{120}{x}$ (h)

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là $\dfrac{120}{x+10}$ (h)

Vì ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút $= \dfrac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{2}{5}$$
$$600(x+10) - 600x = 2x(x+10)$$
$$600x + 6000 - 600x = 2x^2 + 20x$$
$$2x^2 + 20x - 6000 = 0$$
$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 + 3000 = 3025 = 55^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$x_1 = -5 + 55 = 50 \quad (tm); x_2 = -5 - 55 = -60(ktm)$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $50\,km/h$ và vận tốc của ô tô thứ hai là $60\,km/h$.

Bài 12. Lúc 9 giờ sáng, một xe ô tô khởi hành từ A đến B với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là $55\,km/h$. Sau khi xe ô tô này đi dược 20 phút thì cũng trên quãng đương đó, một xe ô tô khác bắt đầu đi từ B về A với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là $45\,km/h$. Hỏi hai xe ô tô găp nhau lúc mấy giờ? Biết quãng dường AB dài $135\,km$.

Lời giải

Đổi 20 phút $= \dfrac{1}{3}(h)$.

Quãng đường ô tô đi từ A đến B trong 20 phút là: $55 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{55}{3}(km)$.

Gọi thời gian ô tô đi từ B đến A đi đến khi gặp ô tô đi từ A đến B là $x(h), (x > 0)$.

$\Rightarrow$ Thời gian ô tô đi từ A đến B đi đến khi gặp ô tô đi từ B đến A là: $x+\frac{1}{3}(h)$.

$\Rightarrow$ Quãng đường ô tô đi từ A đến B đi được đến khi 2 xe gặp nhau là: $55\left(x+\frac{1}{3}\right)=55x+\frac{55}{3}(km)$.

Quãng đường ô tô đi từ B đến A đi được đến khi 2 xe gặp nhau là: $45x(km)$.

Quãng đường AB dài $135km$

Quãng đường ô tô đi từ A đi trước ô tô đi từ B là:

$$55\cdot\frac{1}{3}=\frac{55}{3}(km)$$

Đến lúc $9h20$ phút hai xe còn cách nhau là:

$$135-\frac{55}{3}=\frac{350}{3}(km)$$

Thời gian hai xe gặp nhau là:

$$\frac{350}{3}:(55+45)=\frac{7}{6}(h)$$

Đổi $\frac{7}{6}$ giờ = 1 giờ 10 phút

Thời điểm hai xe gặp nhau là:

9 giờ 20 phút $+1$ giờ 10 phút $=10$ giờ 30 phút

Vậy hai xe gặp nhau lúc 10 giờ 30 phút.

Bài 13. Một ô tô khách và một ô tô tải chở vật liệu xây dựng khởi hành cùng một lúc từ bến xe khách Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè. Do trọng tải lớn nên xe tải chở vật liệu xây dựng đi với vận tốc chậm hơn xe khách 10 *km/h*. Xe khách đến trung tâm thị trấn Mường Tè sớm hơn xe tải 1 *giờ* 6 *phút*. Tính vận tốc mỗi xe biết quãng đường từ bến xe khách thành phố Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè là 132 *km*.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe tải là *x (km/h) (x* > 0)

=> vận tốc của xe khách là *x* +10 *(km/h)*

Thời gian đi hết quãng đường của xe tải là $\frac{132}{x}(h)$ và xe khách là $\frac{132}{x+10}(h)$

Vì xe khách đi nhanh hơn xe tải là 1 giờ 6 phút = $\frac{11}{10}(h)$

Nên ta có phương trình:

$$\frac{132}{x}-\frac{132}{x+10}=\frac{11}{10}$$

$$132.10(x+10)-132.10x=11x(x+10)$$

$$x^2+10x-1200=0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = -40$ *(loại)*; $x_2 = 30$ *(thỏa mãn)*

Vậy vận tốc của xe tải là 30 *km/h* và xe khách là 40 *km/h*.

Bài 14. Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A $160\ km$, sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A. Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B $72\ km$. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy $20\ km/\text{giờ}$. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy. Điều kiện: $x>0$

Quãng đường xe máy đi đến lúc gặp nhau là: $88\ (km)$

Thời gian xe máy đi đến lúc gặp nhau là: $\frac{88}{x}\ (h)$

Vận tốc của ô tô đi là: $x+20\ (km/h)$

Quãng đường ô tô đi đến lúc gặp nhau là: $72\ (km)$

Thời gian ô tô đi đến lúc gặp nhau là: $\frac{72}{x+20}\ (h)$

Theo đề ta có phương trình:

$$\frac{88}{x}-\frac{72}{x+20}=1$$

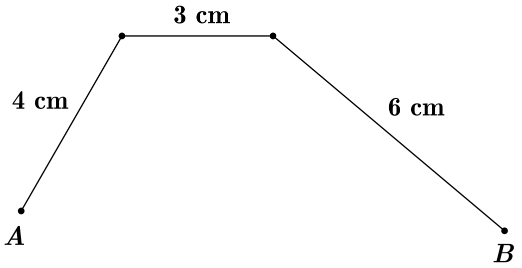
$$88x+1760-72x=x^2+20x$$

$$x^2+4x-1760=0$$

Giải phương trình ta được: $x_1=40$ (nhận), $x_2=-44$ (loại)

Vậy, vận tốc xe máy là $40\ km/h$, vận tốc xe ô tô là $60\ km/h$

Bài 15. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài $4km$. một đoạn bằng phẳng dài $3km$ và một đoạn xuống dốc $4km$ dài $6km$ (như hình vẽ). Một người đi xe đạp từ A đến B và quay về A ngay hết tổng cộng 130 phút. Biết rằng vận tốc người đó đi trên đoạn đường bằng phẳng là $12km/h$ và vận tốc xuống dốc lớn hơn vân tốc lên dốc $5km/h$ (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc của người đó.



Lời giải

Đổi 130 phút $=\dfrac{13}{6}(h)$

Gọi vận tốc lúc lên dốc của người đó là $x(km/h)(x>0)$. Thì vận tốc lúc xuông dốc là $x+5(km/h)$.

Thời gian lúc lên dốc, xuống dốc trên quãng đường $4km$ lần lượt là: $\dfrac{4}{x}(h)$ và $\dfrac{4}{x+5}(h)$.

Thời gian lúc đi trên quãng đường $3km$ là $\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}(h)$

Thời gian lúc lên và xuống dốc trên quảng đường $6km$ lần lượt là: $\dfrac{6}{x}(h)$ và $\dfrac{6}{x+5}(h)$.

Tổng thời gian đi từ A đến B là: $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{x+5}(h)$

Tổng thời gian đi từ B đến A là: $\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{x+5}(h)$

Tổng thời gian cả đi cả về là bằng $\dfrac{13}{6}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{4}{x}+\frac{1}{4}+\frac{6}{x+5}+\frac{6}{x}+\frac{1}{4}+\frac{4}{x+5}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{10}{x}+\frac{1}{2}+\frac{10}{x+5}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{10(x+x+5)}{x(x+5)}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$$

$$6(2x+5)=x(x+5)$$

$$x^2-7x-30=0$$

Ta có $\Delta=(-7)^2-4.(-30)=169=13^2>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$x=\dfrac{7+13}{2}=10(tm);x=\dfrac{7-13}{2}=-3(ktm)$.

Vậy vận tốc lúc lên dốc là $10km/h$ và vận tốc lúc xuống dốc là $15km/h$.

Bài 16. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

Đổi 30 phút $=\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h, $x>0$). Thời gian xe đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (giờ).

Đi từ B về A, người đó đi với vận tốc $x+4$ (km/h). Thời gian xe đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$ (giờ)

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút nên ta có phương trình:

$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2}$.

Giải phương trình:

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2} \quad x^2+4x-192=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-16 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có vận tốc của xe đạp đi từ A đến B là 12km/h.

DẠNG 3
TOÁN LIÊN QUAN THỰC TẾ

Bài 1. Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 900 bộ quần áo trong một thời gian quy định, mỗi ngày phân xưởng may được số bô quần áo là như nhau. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xương may thêm dược 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngảy phân xưởng may dược bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mà phân xưởng phải may trong mỗi ngày theo kế hoạch là x(bộ quần áo)

Điều kiện $x \in \mathbb{N}; x < 900$

Khi đó thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo theo kế hoạch là $\frac{900}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày may được $x+10$ (bộ quần áo) nên thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo là $\frac{900}{x+10}$ (ngày)

Do hoàn thành kế hoạch sớm hơn 3 (ngày) nên ta có phương trình:

$\frac{900}{x} - \frac{900}{x+10} = 3$

$900(x+10) - 900x = 3x(x+10)$

$x^2 + 10x - 3000 = 0$

Ta có $\Delta' = 5^2 - 1 \cdot (-3000) = 3025$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{-5+55}{1} = 50$ (thoả mãn điều kiện)

$x_2 = \frac{-5-55}{1} = -60$ (không thoả mãn điều kiện)

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải may 50 bộ quần áo

Bài 2. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành tròn 12 ngày. Nếu họ làm riêng thì đội II hoàn thành công việc hết nhiều thời gian hơn đội I là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng, mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là x (ngày) $(x > 0)$

Suy ra thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là $x + 10$ (ngày)

Trong 1 ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội II làm được $\frac{1}{x+10}$ (công việc).

Vì hai người hoàn thành công việc trong 12 ngày nên ta có phương trình:

$\frac{12}{x}+\frac{12}{x+10}=1$

$12(x+10)+12x=x(x+10)$

$12x+120+12x=x^2+10x$

$x^2-14x-120=0$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=20$ (thỏa mãn); $x_2=-6$ (loại)

Vậy thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là 20 (ngày)

Thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là 30 (ngày).

Bài 3. Trong kỳ SEA Games 31 tổ chức tại Việt Nam, thú Sao La được chọn làm linh vật. Một phân xưởng được giao sản xuất 420 thú nhồi bông Sao La trong một thời gian dự định để làm quà tặng. Biết rằng nếu mỗi giờ phân xưởng sản xuất thêm 5 thú nhồi bông Sao La thì sẽ rút ngắn được thời gian hoàn thành công việc là 2 giờ. Tính thời gian dự định của phân xưởng.

Lời giải

Gọi thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là x (giờ), x > 0.

Thời gian thực tế để hoàn thành công việc là x – 2 (giờ)

Theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x}$ (thú nhồi bông)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x-2}$ (thú nhồi bông)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{420}{x-2}-\frac{420}{x}=5$

$420x-420(x-2)=5x(x-2)$

$x^2-2x-168=0$

$\Delta'=b'^2-ac=(-1)^2-1.(-168)=169$

$\Rightarrow x_1=14$ (tm), $x_2=-12$ (loại)

Vậy thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là 14 giờ

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Theo kế hoạch, một xưởng may phải may 280 bộ quần áo. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn 5 bộ quần áo so với số bộ phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế xưởng đã hoàn thành công việc sớm một ngày so với kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may theo kế hoạch x (bộ, $x\in N^*, x<280$).

Thực tế, số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may là $x+5$ (bộ).

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng theo kế hoạch là : $\dfrac{280}{x}$ (ngày)

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng thực tế là : $\dfrac{280}{x+5}$ (ngày)

Thực tế, xưởng hoàn thành công việc trước kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{280}{x}-\frac{280}{x+5}=1$$

$$\frac{280(x+5)-250x}{x(x+5)}=1$$

$$\frac{280x+1400-280x}{x^2+5x}=1$$

$$\frac{1400}{x^2+5x}=1$$

$$x^2+5x=1400$$

$$x^2+5x-1400=0 \qquad 1$$

$$\Delta=5^2-4.1.(-1400)=5625>0$$

Vì $\Delta>0$ nên phương trình 1 có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{5625}}{2.1}=35 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x_2=\frac{-5-\sqrt{5625}}{2.1}=-40 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may 35 bộ quần áo.

Bài 5. Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc ti vi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc ti vi đó.

Lời giải

Gọi giá nhập về của chiếc ti vi là x (đồng). Theo đề cửa hàng thu lãi $\dfrac{x}{10}$, tức là giá đã bán là $x+\dfrac{x}{10}$. Nếu cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% giá đã bán và bớt cho khách hàng 245 000 đồng, khi đó giá bán ra là $x+\dfrac{x}{10}+\dfrac{5}{100}\left(x+\dfrac{x}{10}\right)-245000$

Theo đề khi đó cửa hàng thu lãi là 12% của giá nhập về, kéo theo :

$$x+\frac{x}{10}+\frac{5}{100}\left(x+\frac{x}{10}\right)-24500=x+\frac{12}{100}x$$

Từ đó dễ tính được $x=7000000$

Vậy giá nhập về của chiếc ti vi đó là 7 triệu đồng.

Bài 6. Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên theo thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây ?

Lời giải

Gọi số cây mỗi ngày dự định người đó trồng là x (cây)

Thời gian trồng cây theo dự định là : $\frac{210}{x}$ (ngày)

Số cây trồng theo thực tế là : $x-5$ (cây)

Thời gian trồng cây theo thực tế là $\frac{210}{x-5}$ (ngày)

Vì thời gian hoàn thành công việc chậm hơn 7 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình :

$$\frac{210}{x-5} - \frac{210}{x} = 7$$

$$\frac{210x - 210x + 1050}{x^2 - 5x} = 7$$

$$7x^2 - 35x - 1050 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 15(tm) \\ x = -10(km) \end{array}\right.$$

Vậy theo dự định ban đầu, người đó trồng được 15 cây mỗi ngày.

Bài 7. Thành phố Gia Nghĩa lên kế hoạch xét nghiệm Covid-19 cho 1000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 50 người. Vì thế, việc xét nghiệm hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được bao nhiêu người

Lời giải

Gọi số người được xét nghiệm mỗi giờ theo kế hoạch : x (người) $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Khi đó, trên thực tế mỗi giờ xét nghiệm được $x+50$ (người)

Theo kế hoạch, thời gian xét nghiệm xong là $\frac{1000}{x}$ (giờ)

Trên thực tế, thời gian xét nghiệm xong: $\frac{1000}{x+50}$ (giờ)

Do hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+50} = 1$$

$$x^2 + 50x - 50\,000$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 200(tm) \\ x = -250(ktm) \end{array}\right.$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được 200 người

Bài 8. Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiễn kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

Lời giải

Gọi số kiện khẩu trang mỗi ngày mà tổ dự định phải làm là x (kiện khẩu trang, $x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang theo dự định là $\dfrac{120}{x}$ (ngày)

Số kiện khẩu trang làm thực tế mỗi ngày là $x+5$ (kiện)

Thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang thực tế là $\dfrac{120}{x+5}$ (ngày).

Vì tổ hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = 2$$

$$\frac{120(x+5)}{x(x+5)} - \frac{120x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$

$$120x + 600 - 120x = 2x^2 + 10x$$

$$2x^2 + 10x - 600 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$$

Tính được $\Delta = 1225 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 15\ (tm) \\ x_2 = -20\ (ko\ tm) \end{array}\right.$.

Vậy theo kế hoạch mỗi tổ phải làm 15 kiện khẩu trang mỗi ngày.

Bài 9. Một phân xưởng phải may 1200 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi x là số bộ quần áo phân xưởng may mỗi ngày theo kế hoạch ($x \in N^*$)

Thời gian phân xưởng may 1200 bộ quần áo theo kế hoạch là $\dfrac{1200}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng may được $x+10$ (bộ)

Nên thời gian thực tế phân xưởng may 1200 bộ quần áo là $\dfrac{1200}{x+10}$ (ngày)

Theo đề bài ta có phương trình $\dfrac{1200}{x} - \dfrac{1200}{x+10} = 4$

$$1200(x+10) - 1200x = 4x(x+10)$$

$$4x^2 + 40x - 12000 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 50\ (nhan) \\ x = -60\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may được 50 bộ quần áo.

Bài 10. Theo kế hoạch, Công an tỉnh Khánh Hòa sẽ cấp 7200 thẻ căn cước công dân cho địa phương A. Một tổ công tác được điều động đến địa phương A để cấp thẻ căn cước công dân trong một thời gian nhất định. Khi thực hiện nhiệm vụ, tổ chức công tác đã cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày đã cấp tăng thêm được 40 thẻ Căn cước so với kế hoạch. Vì vậy, tổ công tác đã hoàn thành nhiệm vụ sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác sẽ cấp được bao nhiêu thẻ Căn cước?

Lời giải

Gọi số thẻ Căn cước mỗi ngày tổ công tác cấp được theo kế hoạch là x (thẻ). $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Theo kế hoạch, tổ công tác sẽ hoàn thành nhiệm vụ trong $\dfrac{7200}{x}$ ngày.

Sau khi cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày tổ công tác cấp được $x + 40$ thẻ.

Sau khi cải tiến kĩ thuật, tổ công tác hoành thành nhiệm vụ trong $\dfrac{7200}{x+40}$ ngày

Theo đề bài ta có phương trình: $\dfrac{7200}{x} - \dfrac{7200}{x+40} = 2$

Giải phương trình thu được $x = 360$ (TMĐK)

KL: Vậy theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác cấp được 360 thẻ Căn cước

Bài 11. *Trong giai đoạn phòng chống đại dịch Covid-19, Bộ Y tế khuyến cáo người dân thực hiện nghiêm túc thông điệp 5K, trong đó có yêu cầu giữ vệ sinh và "Khử khuẩn".*

Theo kế hoạch một công ty phải sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn trong một thời gian quy định (số chai dung dịch khử khuẩn sản xuất trong mỗi ngày là bằng nhau). Để tăng cường phòng chống dịch, mỗi ngày công ty đã sản xuất nhiều hơn dự định 100 chai dung dịch khử khuẩn. Do đó, công ty đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày công ty sản xuất bao nhiêu chai dung dịch khử khuẩn?

Lời giải

Gọi số chai dung dịch khử khuẩn mỗi ngày công ty đó sản xuất theo kế hoạch là x (chai, $x \in \mathbb{N}*$).

Thời gian để sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn theo kế hoạch là $\dfrac{4000}{x}$ (ngày).

Thực tế mỗi ngày công ty đó sản xuất được $x + 100$ (chai).

Thời gian thực tế để sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn là $\dfrac{4000}{x+100}$ (ngày).

Vì công ty đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 ngày nên ta có phương trình:

$\dfrac{4000}{x} - \dfrac{4000}{x+100} = 2$

$4000\left(x+100\right) - 4000x = 2x\left(x+100\right)$

$2x^2 + 200x - 400000 = 0$

$x^2 + 100x - 200000 = 0$

Ta có: $\Delta' = 50^2 + 200000 = 202500 = 450^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x = -50 + 450 = 400(tm)$

$x = -50 - 450 = -500(ktm)$

Vậy số chai dung dịch khử khuẩn mỗi ngày công ty đó sản xuất theo kế hoạch là 400 chai.

Bài 12. Theo kế hoạch công an tỉnh Kiên Giang điều hai tổ công tác đến làm thẻ Căn cước công dân cho một phường trên địa bàn thành phố Rạch Giá. Nếu cả hai tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc. Nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Lời giải

Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ thứ nhất là x (ngày) $(x \in \mathbb{N}, x > 0)$

Thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ thứ hai là $(x+6)$ (ngày)

Mỗi ngày:

Tổ thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Tổ thứ hai làm được $\frac{1}{x+6}$ (công việc).

Lúc làm chung thì cả 2 tổ- làm trong 4 ngày xong việc nên mỗi ngày cả 2 tổ làm được $\frac{1}{4}$ (công việc).

Do đó ta lập được phương trình:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$

$4(x+6) + 4x = x(x+6)$

$4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$x = 6\ (tm)$

$x = -4\ (ktm)$

Vậy: Tổ I làm riêng hoàn thành trong 6 (ngày)

Tổ II làm riêng hoàn thành trong 12 (ngày)

Bài 13. Theo kế hoạch, một tổ trong xưởng may phải may xong 8400 chiếc khẩu trang trong một thời gian quy định. Do tình hình dịch bệnh Covid-19 diễn biến phức tạp, tổ đã quyết định tăng năng suất nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 102 chiếc khẩu trang so với số khẩu trang phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì vậy, trước thời gian quy định 4 ngày, tổ đã may được 6416 chiếc khẩu trang. Hỏi số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là x (chiếc) (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$).

Vì xưởng phải may 8400 chiếc khẩu trang nên thời gian để may xong là $\dfrac{8400}{x}$ (ngày).

Vì sau khi tăng năng suất nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 102 chiếc khẩu trang so với số khẩu trang phải may trong một ngày theo kế hoạch nên thực tế mỗi ngày tổ mai được $x+102$ (chiếc)

Thời gian tổ may được 6416 chiếc khẩu trang theo thực tế là: $\dfrac{6416}{x+102}$ (ngày).

Vì tổ may trước thời gian quy định 4 ngày, tổ đã may đực 6416 chiếc khẩu trang nên ta có phương trình:

$$\frac{8400}{x}-\frac{6416}{x+102}=4$$

$$\frac{2100}{x}-\frac{1604}{x+102}=1$$

$$2100(x+102)-1604x=x(x+102)$$

$$2100x+214200-1604x=x^2+102x$$

$$x^2-394x-214200=0$$

$$x^2-700x+306x-214200=0$$

$$x(x-700)+306(x-700)=0$$

$$(x-700)(x+306)=0$$

$$x=700(tm)$$
$$x=-306(ktm)$$

Vậy số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế họch là 700 chiếc.

Bài 14. Một nhóm học sinh dự định làm 360 chiếc mũ chắn giọt bắn trong một thời gian nhất định để ủng hộ các địa phương trong công tác phòng, chống dịch bệnh COVID-19. Thực tế, mỗi ngày nhóm học sinh làm vượt mức 12 chiếc mũ so với dự định. Vì vậy, nhóm đã làm xong trước dự định hai ngày và làm thêm được 4 chiếc mũ. Hỏi theo dự định, mỗi ngày nhóm học sinh làm được bao nhiêu chiếc mũ?

Lời giải

Gọi số chiếc mũ mỗi ngày nhóm học sinh dự định làm được là x (chiếc), $x\in\mathbb{N}^*, x<360$

Thời gian dự định nhóm học sinh làm xong 360 chiếc mũ là: $\dfrac{360}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày, nhóm học sinh làm được số chiếc mũ là $x+12$ (chiếc)

Thời gian thực tế nhóm học sinh hoàn thành $360+4=364$ chiếc mũ là: $\dfrac{364}{x+12}$ (ngày)

Nhóm học sinh đã hoàn thành xong trước dự định 2 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{360}{x}-\frac{364}{x+12}=2$$

$$x^2+14x-2160=0$$

Phương trình có $\Delta' = \ -7\ ^2 + 1.2160 = 2209 > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -7 + \sqrt{2209} = 40\ \ tm\ \ ; x_2 = -7 - \sqrt{2209} = -54\ \ ktm$

Vậy theo dự định, mỗi ngày nhóm học sinh làm được 40 chiếc mũ.

Bài 15. Một địa phương lên kế hoạch xét nghiệm SARS-COV-2 cho 12000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 1000 người. Vì thế, địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ. Hỏi theo kế hoạch, địa phương này phải xét nghiệm trong thời gian bao nhiêu giờ?

Lời giải

Gọi số người được xét nghiệm trong một giờ theo dự định là x (người) $(x < 12000, x \in \mathbb{N}^*)$

Theo kế hoạch, thời gian để địa phương đó xét nghiệm hết 12000 người là $\dfrac{12000}{x}$ (giờ)

Thực tế, số người được xét nghiệm trong một giờ là $x + 1000$ (người)

Thực tế, thời gian địa phương đó xét nghiệm hết 12000 người là $\dfrac{12000}{x+1000}$(giờ)

Do địa phương hoàn thành kế hoạch sớm hơn 16 giờ nên ta có phương trình:

$\dfrac{12000}{x} - \dfrac{12000}{x+1000} = 16$

$12000(x+1000) - 12000x = 16x(x+1000)$

$12000x + 12000000 - 12000x = 16x^2 + 16000x$

$16x^2 + 16000x - 12000000 = 0$

$x^2 + 1000x - 750000 = 0$

$x^2 + 1500x - 500x - 750000 = 0$

$x(x+1500) - 500(x+1500) = 0$

$(x+1500)(x-500) = 0$

$x + 1500 = 0$
$x - 500 = 0$
$x = -1500$ (không thỏa mãn)
$x = 500$ (thỏa mãn)

Vậy theo kế hoạch, địa phương này cần $\dfrac{12000}{500} = 24$ (giờ) để xét nghiệm xong.

Bài 16. Để phục vụ công tác phòng chống dịch COVID-19, một Công ty A lên kế hoạch trong một thời gian quy định làm 20000 tấm chắn bảo hộ để tặng các chốt chống dịch. Do ý thức khẩn trương trong công tác hỗ trợ chống dịch và nhờ cải tiến quy trình làm việc nên mỗi ngày Công ty A làm được nhiều hơn 300 tấm so với kế hoạch ban đầu. Vì thế, Công ty A đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn đúng một ngày so với thời gian quy định và làm được nhiều hơn 700 tấm so với kế hoạch ban đầu. Biết rằng số tấm làm ra trong mỗi ngày là bằng nhau và nguyên cái. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày Công ty A cần làm bao nhiêu tấm chắn bảo hộ ?

Lời giải

+) Gọi x (cái) $\left(x \in \mathbb{N}^*,\ x > 0\right)$ là số tấm chắn bảo hộ phải làm ra được trong mỗi ngày theo kế hoạch, thì số tấm chắn bảo hộ làm ra được mỗi ngày trong thực tế là $x+300$ (cái).

+) Số ngày hoàn thành công việc theo kế hoạch là $\dfrac{20000}{x}$ (ngày).

+) Số ngày hoàn thành công việc trong thực tế là $\dfrac{20700}{x+300}$ (ngày).

+) Theo đề bài ta có phương trình:

$\dfrac{20000}{x} - \dfrac{20700}{x+300} = 1$

$x^2 + 1000x - 6000000 = 0$

$x = 2000$ (nhận), $x = -3000$ (loại)

Vậy theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày Công ty A cần làm 2000 cái tấm chắn bảo hộ.

Bài 17. Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

Lời giải

Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (bộ) ; ($x > 0$).

Lập luận để có phương trình

$\dfrac{4800}{x} - \dfrac{4800}{x+100} = 8$

$x^2 + 100x - 60000 = 0$ (vì $x > 0$)

Giải phương trình tìm được $x = -300$ hoặc $x = 200$

Đối chiếu điều kiện và thử lại thấy $x = 200$ thỏa mãn

KL: Theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 200 bộ đồ bảo hộ y tế

CHƯƠNG 7
TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

BÀI 1
BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

1. Bảng tần số

- **Mẫu số liệu** là tập hợp các dữ liệu thu yhaapj được theo tiêu chí cho trước
- Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu thống kê được gọi là **tần số** của giá trị đó.
- **Bảng tần số** biễu diễn tần số của mối giá trị trong mẫu dữ liệu

Để lập bảng tần số ở dạng bảng ngang ta có thể làm như sau:

Bước 1: Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số của mỗi giá trị đó.

Bước 2: Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

+ Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), tần số (n).

+ Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số của giá trị đó.

+ Cột cuối cùng : Cộng, $N = ...$

Tên các giá trị x	x_1	x_2	...	x_i	**Cộng**
Tần số n	n_1	n_2	...	n_i	$N = n_1 + n_2 + ... + n_i$

Chú ý: Bảng tần số ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Tên các giá trị x	**Tần số** n
x_1	n_1
x_2	n_2
...	...
x_i	n_i
Cộng	$N = n_1 + n_2 + ... + n_i$

Nhận xét: Đối với một mẫu số liệu thống kê, tần số của một giá trị phản ánh số lần lặp đi lặp giá trị đó trong mẫu dữ liệu thống kê đã cho.

2. Biểu đồ tần số

- Biểu đồ biểu diễn tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là biểu đồ dữ liệu.
- Biểu đồ tần số thường có dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng.
- Trong biểu đồ tần số dạng cột, mỗi cột tương ứng với một giá trị, chiều cao của cột tương ứng tần số giá trị.
- Trong biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng, đường gấp khúc đi từ trái qua phải nối các điểm có hoành độ là giá trị số liệu và tung đọ là tần số của giá trị đó.
- Người ta thường vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng và có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

Bước 2: Vẽ biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số nhận được ở bước 1.

DẠNG 1
TẦN SỐ, BẢNG TẦN SỐ

Bài 1. Cho bảng như hình bên dưới biểu diễn số lượng vé xuất ra trong một ngày của một đại lý bán vé tham quan các di tích của thành phố Huế.

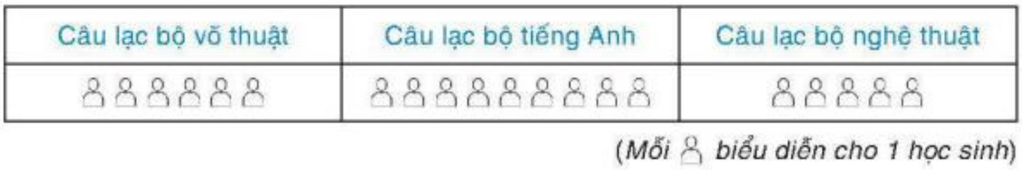
Vé tham quan	Đại Nội	Cung An Định	Đàn Nam Giao	Điện Hòn Chén	Cộng
Tần số	150	80	120	50	400

Bảng thống kê trên là loại bảng thống kê như nào?

Lời giải

Bảng thống kê trên là bảng thống kê tần số bán ra các loại vé ở từng địa điểm.

Bài 2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ của trường như sau:



Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

Lời giải

Câu lạc bộ	Võ thuật	Tiếng Anh	Nghệ thuật
Tần số	6	9	5

Bài 3. Sau khi điều tra 60 hộ gia đình ở một vùng dân cư về số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình, người ta được dãy số liệu thống kê (hay còn gọi là mẫu số liệu thống kê) như sau:

6	6	6	7	5	5	4	5	6	4	4	8	6	6	6	6	5	5	5	4
6	6	7	7	5	5	5	5	6	4	4	6	6	6	6	6	5	5	5	4
8	6	6	5	5	5	5	6	6	4	5	6	7	6	8	6	5	5	6	5

a) Trong 60 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Mỗi giá trị đó xuất hiện bao nhiêu lần?

Lời giải

a) Có 5 giá trị khác nhau.

b) Giá trị 4 xuất hiện 8 lần

Giá trị 5 xuất hiện 21 lần

Giá trị 6 xuất hiện 24 lần

Giá trị 7 xuất hiện 4 lần

Giá trị 8 xuất hiện 3 lần

Bài 4. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 01/2024 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

a) Xác định cỡ mẫu.

b) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

c) Có bao nhiêu giá trị có tần số lớn hơn 4?

Lời giải

a) Cỡ mẫu: N = 30.

b) Bảng tần số:

Số cuộc gọi mỗi ngày	2	3	4	5	6
Tần số	3	10	6	7	4

c) Có 3 giá trị có tần số lớn hơn 4.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Thầy Nam ghi lại điểm bài kiểm tra, đánh giá định kì môn Toán của một số bạn học sinh khối 9 như sau:

6	9	9	8	10
8	8	6	9	7
8	8	6	10	9
7	6	9	10	9
7	7	7	9	10
10	7	8	8	7

Có thể thu gọn bảng số liệu trên được không?

Lời giải

Có thể thu gọn bảng số liệu trên theo bản tần số sau:

Điểm bài kiểm tra học sinh khối 9	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	4	7	7	7	5	N = 30

Bài 6. Bảng sau đây ghi lại tên của các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9E, mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

a) Trong tuần những bạn nào đạt điểm tốt? Mỗi bạn đạt được mấy điểm tốt?

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu này. Bạn nào có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất?

Lời giải

a) Trong tuần có những bạn sau đạt điểm tốt: Bình; Nam; Tuấn; Thảo; Yến

-Bạn Bình đạt được 2 điểm tốt

-Bạn Nam đạt được 3 điểm tốt

-Bạn Tuấn đạt được 1 điểm tốt

-Bạn Thảo đạt được 2 điểm tốt

-Bạn Yến đạt được 1 điểm tốt

b) Bảng tần số

Tên bạn đạt điểm tốt	Bình	Nam	Tuấn	Thảo	Yến
Tần số	2	3	1	2	1

Từ bảng tần số trên ta thấy bạn Nam có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất

Bài 7. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Trung bình, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

Lời giải

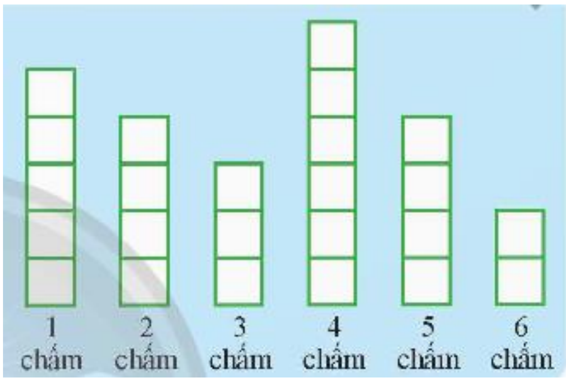
a) Bảng tần số:

Mức đánh giá	Tốt	Khá	Trung bình	Kém
Tần số	13	11	5	2

b) Mức đánh giá Tốt chiếm ưu thế nhất. Vì nó có tần số cao nhất.

DẠNG 2
BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Bài 1. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 24 lần. Sau mỗi lần gieo, vẽ thêm một ô vuông lên trên cột ghi kết quả tương ứng như hình bên.



Độ cao của mỗi cột cho ta biết thông tin gì về kết quả của 24 lần gieo?

Lời giải

Độ cao của mỗi cột cho ta biết tần số của các mặt xuất hiện của con xúc xắc.

Bài 2. Biểu đồ hình bên dưới cho biết số ngày sử dụng phương tiện đến trường của bạn Mai trong tháng 9. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Bảng tần số

Phương tiện	Xe buýt	Xe máy	Xe đạp
Tần số	9	5	8

Bài 3. Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công sở như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

a) Lập bảng tần số ở dạng bảng dọc của mẫu số liệu thống kê đó

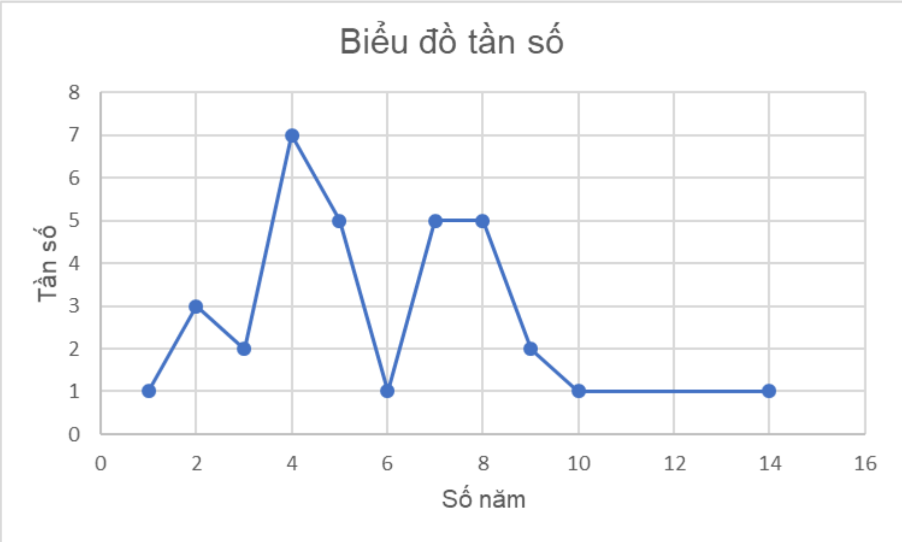
b) Vẽ biểu đồ tần số lở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu thống kê trên.

Lời giải

a)

Thâm niên (năm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
Số lần xuất hiện	1	3	2	7	5	1	5	5	2	1	1

b) Biểu đồ đoạn thẳng



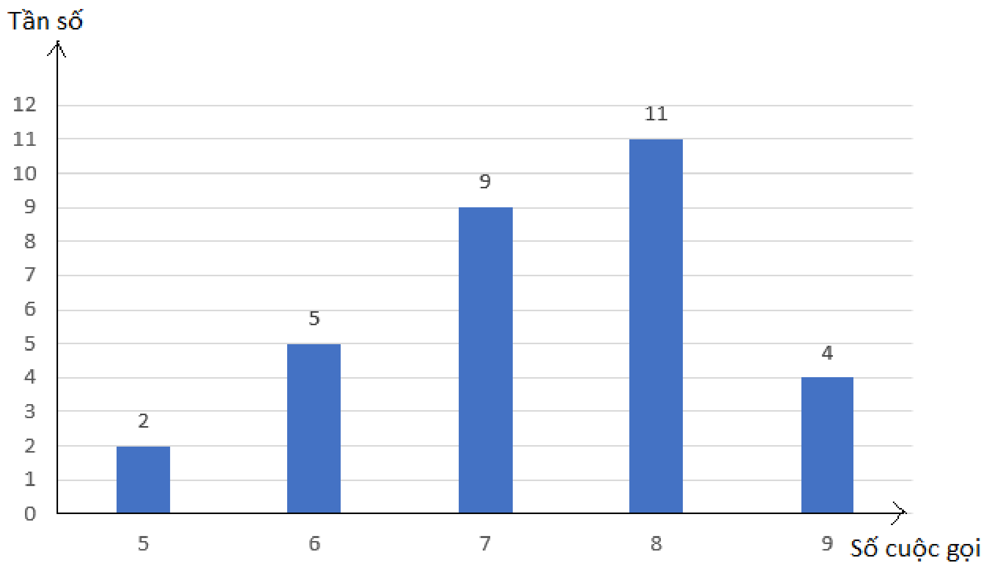
Bài 4. Cô Hằng thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện ở tháng 01/ 2024 ở bảng tần số như sau:

Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn biểu diễn mẫu số liệu trên.

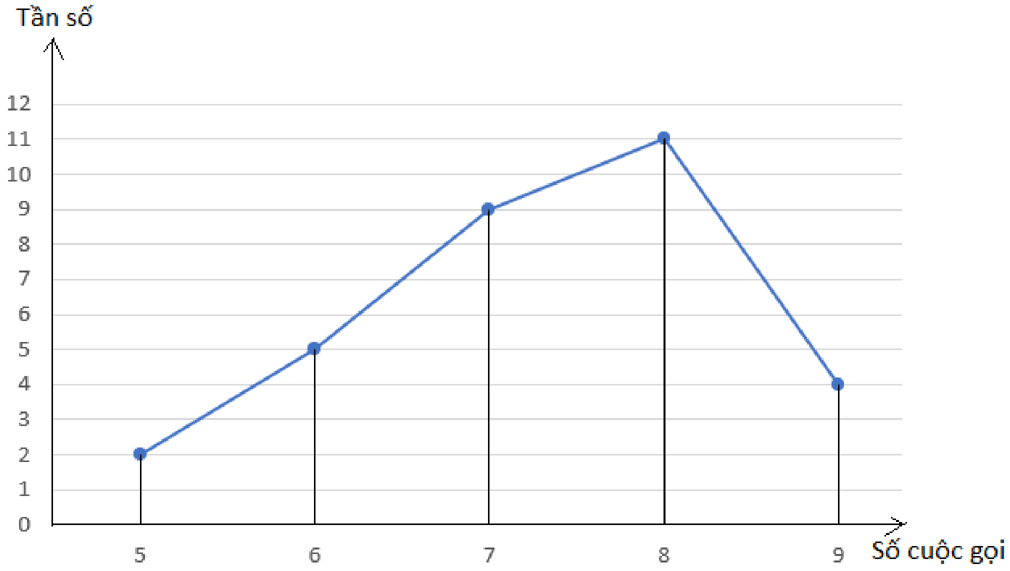
Lời giải

• Biểu đồ cột:



Số ngày phân theo số cuộc gọi

• Biểu đồ đoạn thẳng:



Số ngày phân theo số cuộc gọi

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian công tác (theo năm) của các y tá ở một phòng khám tư nhân ở Nha Trang.

a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị nào? Tìm tần số mỗi giá trị đó.

b) Phòng khám có tổng bao nhiêu y tá?

c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?

Lời giải

a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

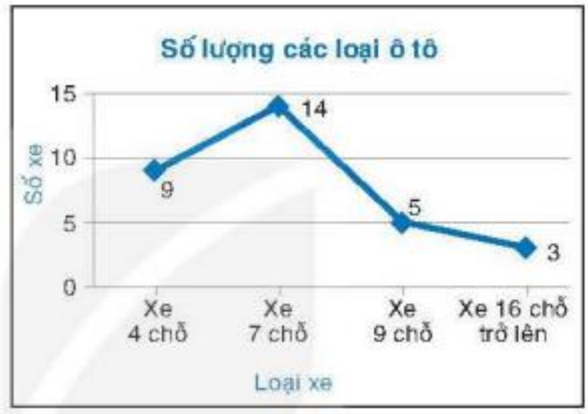
Bảng tần số:

Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7
Số y tá	6	5	5	7	9	5	2

b) Phòng khám có 6 + 5 + 5 + 7 + 9 + 5 + 2 = 39 y tá.

c) Có 5 + 7 + 9 + 5 + 2=28 y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm.

Bài 6. Người ta thống kê các loại ô tô chạy qua một chạm thu phí trong một giờ và vẽ được biểu đồ tần số như hình bên dưới



a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết loại xe nào đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

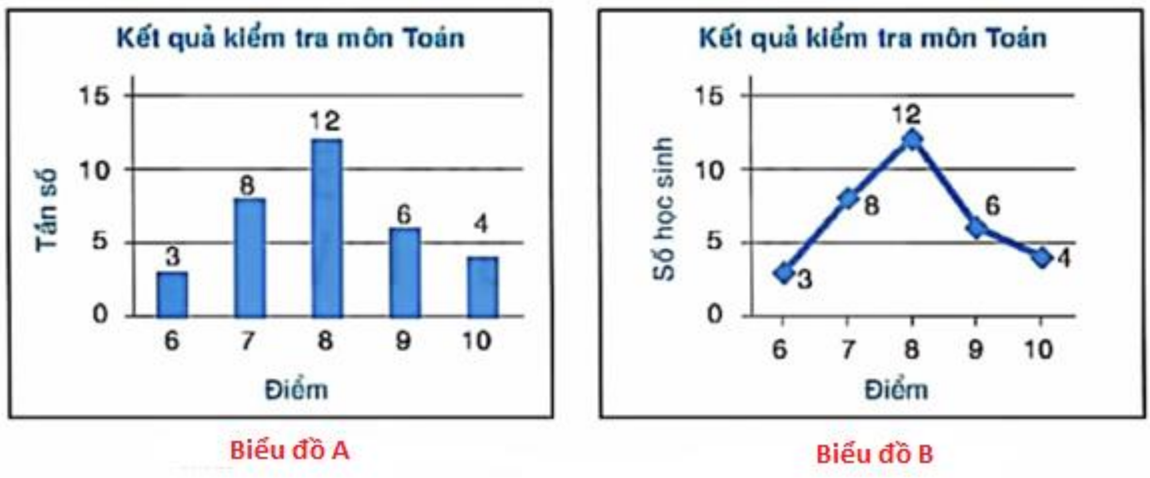
Lời giải

a) Bảng tần số:

Loại xe	Xe 4 chỗ	Xe 7 chỗ	Xe 9 chỗ	Xe 16 chỗ trở lên
Tần số	9	14	5	3

b) Từ bảng tần số, ta có thể thấy: Xe 7 chỗ đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

Bài 7. Cho hai biểu đồ sau:



a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Lời giải

a)

* Biểu đồ A

- Điểm 6 có 3 học sinh

- Điểm 7 có 8 học sinh

- Điểm 8 có 12 học sinh

- Điểm 9 có 6 học sinh

- Điểm 10 có 4 học sinh

- Biểu đồ A biểu diễn dạng cột.

* Biểu đồ B

- Điểm 6 có 3 học sinh

- Điểm 7 có 8 học sinh

- Điểm 8 có 12 học sinh

- Điểm 9 có 6 học sinh

- Điểm 10 có 4 học sinh

- Biểu đồ B biểu diễn dạng đoạn thẳng

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu.

Bảng thống kê dữ liệu:

Điểm	6	7	8	9	10
Tần số	3	8	12	6	4

Bảng thu được là bảng tần số, vì nó cho biết tần số của các điểm trong số điểm của bài kiểm tra.

Bài 8. Một địa phương cho trẻ em từ 12 tháng tuổi trở lên tiêm vắc xin phòng viêm não Nhật Bản. Bảng sau thống kê số mũi vắc xin phòng viêm não Nhật Bản mà 50 trẻ em từ 12 đến 24 tháng tuổi tại địa phương này đã tiêm:

Số mũi tiêm	0	1	2	3
Số trẻ	4	?	26	8

a) Hoàn thành bảng tần số trên

b) Trẻ em từ 12 đến 24 tháng tuổi cần hoàn thành 3 mũi tiêm cơ bản của vắc xin phòng viêm não Nhật Bản. Hỏi có bao nhiêu trẻ em đã được thống kê ở trên cần phải hoàn thành lộ trình tiêm vắc xin này?

c) Hãy vẽ biểu đồ cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

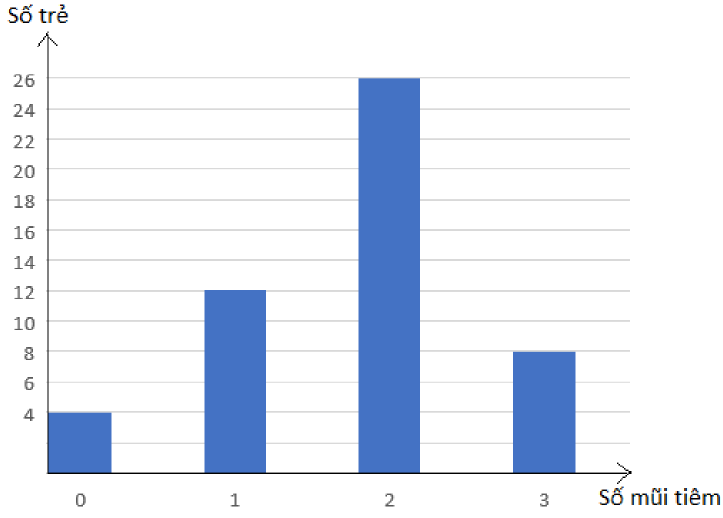
Lời giải

a) Bảng tần số:

Số mũi tiêm	0	1	2	3
Số trẻ	4	12	26	8

b) Có 4 + 12 + 26 = 42 trẻ em đã được thống kê ở trên cần phải hoàn thành lộ trình tiêm vắc xin này.

c) Biểu đồ cột:



Số lượng trẻ em phân theo số mũi vắc xin.

Bài 9. Kết quả của 20 học sinh trường THCS Nguyễn Hiền tham gia vòng chung kết cuộc thi Tìm hiểu Lịch sử Việt Nam được cho ở bảng sau:

Số báo danh	**Điểm thi**	**Xếp hạng**
01	9	Nhì
02	10	Nhất
03	7	Ba
04	6	Ba
05	5	Không đạt giải
06	6	Ba
07	8	Nhì
08	6	Ba
09	5	Không đạt giải
10	7	Ba
11	7	Ba
12	8	Nhì
13	7	Ba
14	4	Không đạt giải
15	10	Nhất
16	8	Nhì
17	8	Nhì
18	7	Ba
19	5	Không đạt giải
20	10	Nhất

a) Hãy lập bảng tần số theo điểm số của học sinh và vẽ biểu đồ đoạn thẳng tương ứng.

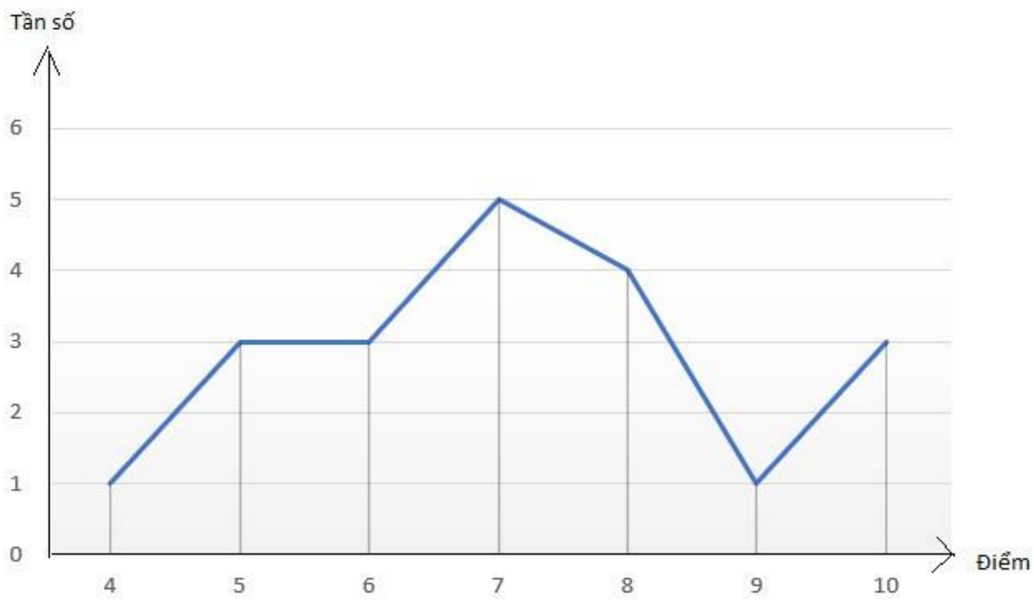
b) Hãy lập bảng tần số theo xếp hạng của học sinh và vẽ biểu đồ cột tương ứng.

Lời giải

a) Bảng tần số theo điểm số của học sinh:

Điểm số	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	3	3	5	4	1	3

Biểu đồ đoạn thẳng:

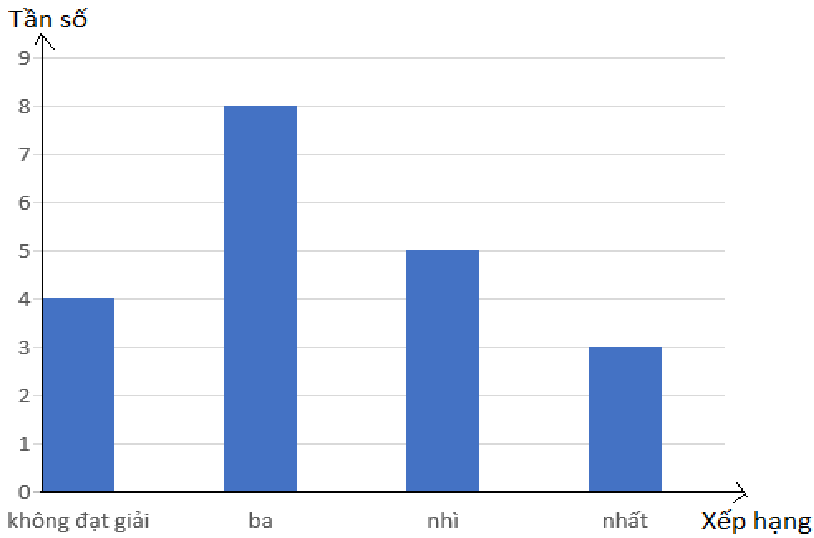


Số học sinh phân theo điểm

b) Bảng tần số theo xếp hạng của học sinh:

Xếp hạng	Không đạt giải	Ba	Nhì	Nhất
Tần số	4	8	5	3

Biểu đồ cột:



Số lượng học sinh phân theo xếp hạng

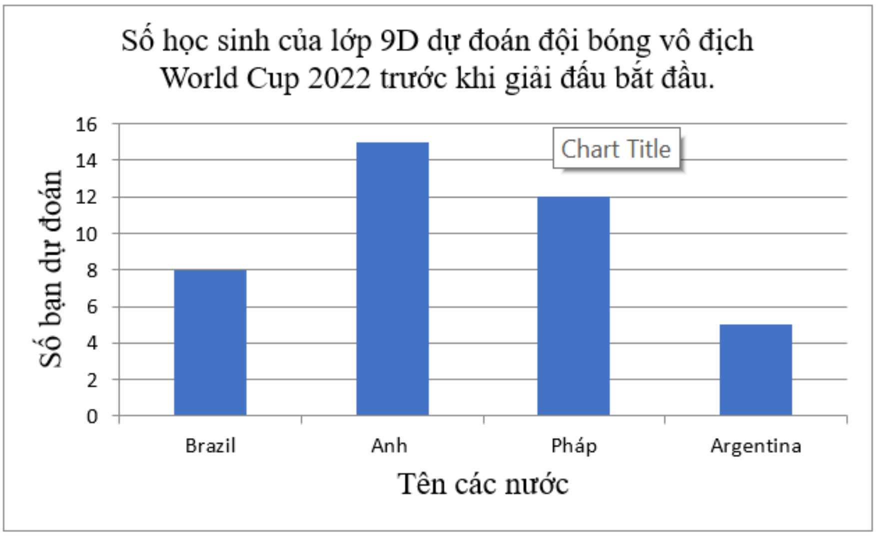
Bài 10. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9A dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

Đội bóng	Brazil	Anh	Pháp	Argentina
Số bạn dự đoán	8	15	12	5

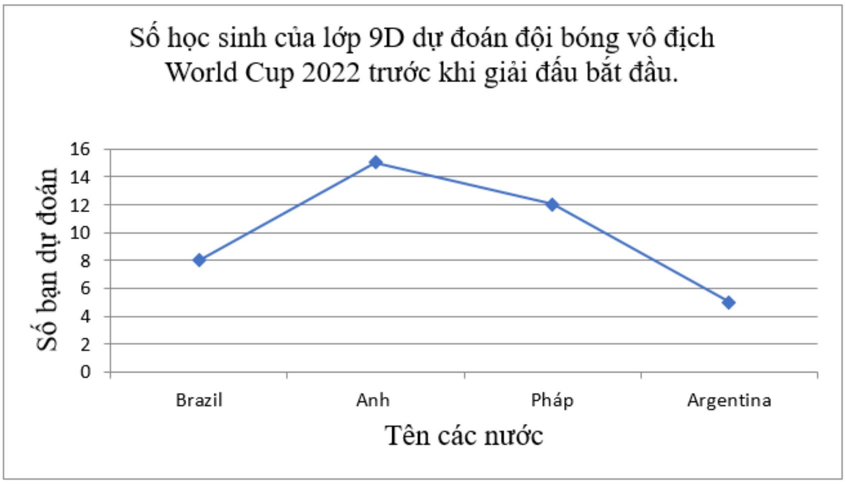
Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

Lời giải

• Biểu đồ tần số dạng cột:



• Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng



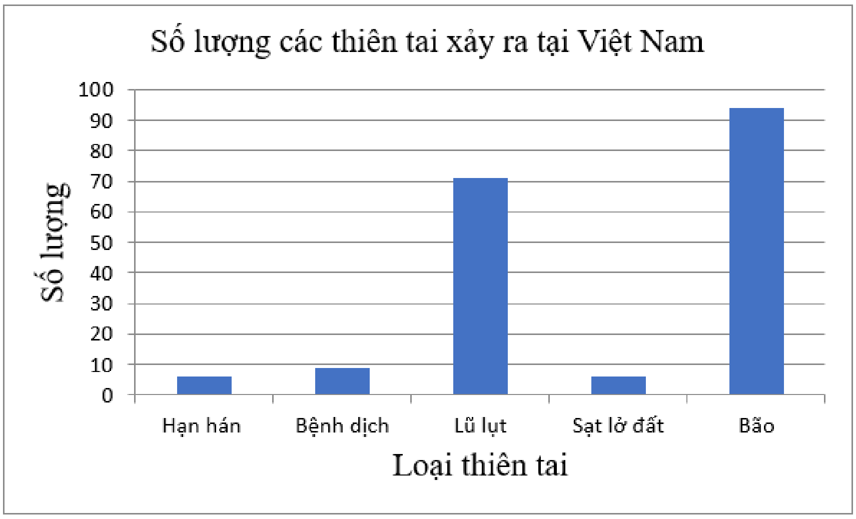
Bài 11. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

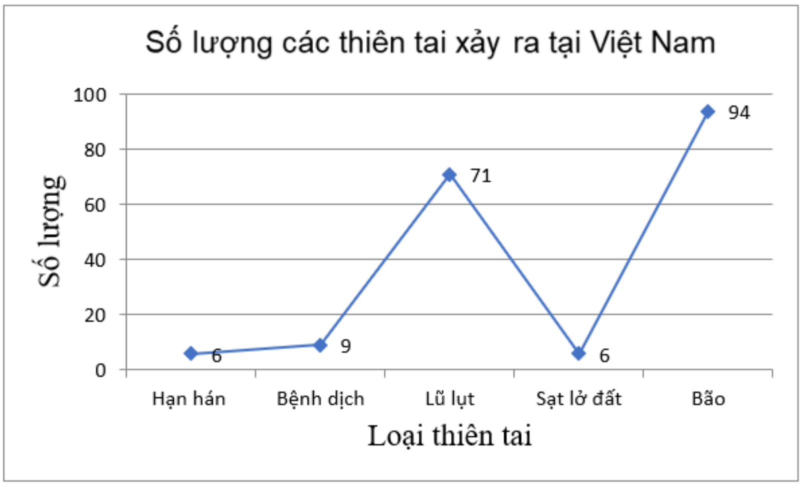
Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Lời giải

• Biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.



- Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.



BÀI 2
BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

1. Bảng tần số tương đối

Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i của giá trị đó và số lượng N các dữ liệu trong mẫu số liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Để lập bảng tần số tương đối ở dạng bảng ngang ta có thể làm như sau:

Bước 1: Xác định các gái trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó.

Bước 2: Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

+ Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), tần số tương đối $(\%)$.

+ Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số tương đối của giá trị đó.

+ Cột cuối cùng : Cộng, 100

Tên các giá trị x	x_1	x_2	...	x_i	**Cộng**
Tần số tương đối $\%$	f_1	f_2	...	f_i	100

Chú ý: Bảng tần số tương đối ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Tên các giá trị x	**Tần số tương đối** $\%$
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_k	f_i
Cộng	100

Nhận xét: Đối với một mẫu số liệu thống kê, tần số tương đối của một giá trị phản ánh giá trị đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

2. Biểu đồ tần số tương đối

• Biểu đồ biểu diễn tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là **biểu đồ tần số tương đối**.

• Biểu đồ tần số tương đối thường có dạng hình quạt tròn hoặc dạng cột.

- Trong biểu đồ hình quạt tròn, hình quạt tròn biểu thị tần số tương đối $a\%$ có số đo cung tương ứng là $a\%.360^0 = 3,6.a$

- Trong biểu đồ cột, đọ cao của mỗi cột tuơng ứng với tần số tuơng ứng của từng giá trị.

Chú ý:

- Để lập bảng tần số tương đối ở dạng **biểu đồ cột** của mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Bước 2: Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần tương đối số nhận được ở bước 1.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng **biểu đồ hình quạt tròn** của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Bước 2: Vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần tương đối số nhận được ở bước 1.

DẠNG 1
TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI, BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Bài 1. Sau khi điều tra 60 hộ gia đình ở vùng dân cư về số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình, người ta được dãy số liệu sau:

6	6	6	7	5	5	4	5	6	4	4	8	6	6	6	6	5	5	5	4
6	6	7	7	5	5	5	5	6	4	4	6	6	6	6	6	5	5	5	4
8	6	6	5	5	5	5	6	6	4	5	6	7	6	8	6	5	5	6	5

Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê trên.

Lời giải

Giá trị 4 xuất hiện 8 lần

Giá trị 5 xuất hiện 21 lần

Giá trị 6 xuất hiện 24 lần

Giá trị 7 xuất hiện 4 lần

Giá trị 8 xuất hiện 3 lần

Tỉ số phần trăm của của giá trị 4 dân cư của mỗi hộ gia đình so với 60 hộ gia đình là: $\frac{8}{60}.100\% = 13,33\%$

Tỉ số phần trăm của của giá trị 5 dân cư của mỗi hộ gia đình so với 60 hộ gia đình là: $\frac{21}{60}.100\% = 35\%$

Tỉ số phần trăm của của giá trị 6 dân cư của mỗi hộ gia đình so với 60 hộ gia đình là: $\frac{24}{60}.100\% = 40\%$

Tỉ số phần trăm của của giá trị 7 dân cư của mỗi hộ gia đình so với 60 hộ gia đình là: $\frac{4}{60}.100\% = 6,67\%$

Tỉ số phần trăm của của giá trị 8 dân cư của mỗi hộ gia đình so với 60 hộ gia đình là: $\frac{3}{60}.100\% = 5\%$

Bảng tần số tương đối

Số dân cư	4	5	6	7	8
Tần số tương đối (%)	13,33	35	40	6,67	5

Bài 2. Trong bảng số liệu sau có một số liệu không chính xác. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	4	9	7	5
Tần số tương đối	16%	46%	28%	20%

Lời giải

- Số liệu không chính xác ở đây là 46%. Sửa lại thành 36% vì $\frac{9}{4+9+7+5}.100\% = 36\%$

- Bảng số liệu đúng sau khi sửa lại:

Tần số	4	9	7	5
Tần số tương đối	16%	36%	28%	20%

Bài 3. Điều tra về “ Loại nhạc cụ bạn muốn chơi nhất” đối với các bạn trong lớp, bạn Trúc Linh thu được ý kiến trả lời và ghi lại như dưới đây:

Đàn piano	Trống	Đàn Bầu	Đàn piano	Đàn guitar
Đàn guitar	Sáo	Đàn guitar	Đàn guitar	Đàn piano
Sáo	Đàn piano	Sáo	Kèn harmonica	Đàn violin
Trống	Đàn guitar	Đàn Bầu	Đàn piano	Đàn piano
Đàn violin	Đàn piano	Đàn violin	Sáo	Trống
Kèn harmonica	Đàn violin	Đàn piano	Đàn piano	Đàn guitar

a) Có bao nhiêu loại nhạc cụ được các bạn nêu trên?

b) Hãy xác định tỉ lệ phần trăm học sinh chọn mỗi loại nhạc cụ.

Lời giải

a) Có 7 loại nhạc cụ được các bạn nêu ra.

b)

Nhạc cụ	**Tỉ lệ phần trăm**
Đàn piano	30%
Đàn guitar	20%
Đàn bầu	6,7%
Đàn violin	13,3%
Kèn harmonica	6,7%
Sáo	13,3%
Trống	10%

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tại một trại hè thanh thiếu niên quốc tế, người ta tìm hiểu xem mỗi đại biểu tham dự có thể sử dụng được bao nhiêu ngoại ngữ. Kết quả được như bảng sau:

Số ngoại ngữ	1	2	3	4	≥ 5
Số đại biểu	84	64	24	16	12

a) Hãy lập bảng tần số tương đối ở bảng trên.

b) Hãy tính tỉ lệ phần trăm đại biểu sử dụng được ít nhất 2 ngoại ngữ.

c) Tại trại hè thanh thiếu niên quốc tế tổ chức 1 năm trước đó, có 54 trong tổng số 220 đại biểu tham dự có thể sử dụng được từ 3 ngoại ngữ trở lên. Có ý kiến cho rằng " Tỉ lệ đại biểu sử dụng được 3 ngoại ngữ trở lên có tăng giữa hai năm đó". Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối:

Số đại biểu	84	64	24	16	12
Tần số tương đối	42%	32%	12%	8%	6%

b) Tỉ lệ phần trăm đại biểu sử dụng được ít nhất 2 ngoại ngữ là: 32% + 12% + 8% + 6% = 58%.

c) Ý kiến đó đúng vì:

- Tỉ lệ đại biểu sử dụng được 3 ngôn ngữ của 1 năm trước là: $\frac{54}{220}.100\% = 24,5\%$.

- Tỉ lệ đại biểu sử dụng được 3 ngôn ngữ của nay là: 12% + 8% + 6% = 26% > 24,5%.

Bài 5. Có một túi kín đựng 10 quả bóng, mỗi quả có một trong các màu xanh, đỏ hoặc vàng. Thực hiện 30 lần lấy bóng, mỗi lần lấy một quả, ghi lại màu quả bóng được lấy ra sau đó trả lại quả bóng vào túi và trộn đều.

a) Từ dữ liệu ghi lại, cho biết tần số xuất hiện của các quả bóng màu xanh, đỏ, vàng. Lập tỉ số giữa tần số và số lần lấy bóng.

b) Đoán xem trong túi số lượng bóng có màu gì là ít nhất, nhiều nhất.

Lời giải

a)

Màu	Xanh	Đỏ	Tím
Tần số xuất hiện	X	Y	Z

Lập tỉ số giữa tần số và số lần lấy bóng

-Tỉ số cho màu xanh X/30

-Tỉ số cho màu đỏ Y/30

-Tỉ số cho màu vàng Z/30

b)Dựa vào tỉ số giữa tần số và số lần lấy bóng, ta có thể đưa ra dự đoán về số lượng bóng mỗi màu:

- Màu có tỉ số thấp nhất: Dự đoán là màu có số lượng ít nhất tròn túi.
- Màu có tỉ số cao nhất: Dự đoán là màu có số lượng nhiều nhất.

Bài 6. Lớp 9A có 40 bạn, trong đó có 20 bạn mặc áo cỡ M, 13 bạn mặc áo cỡ S, 7 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

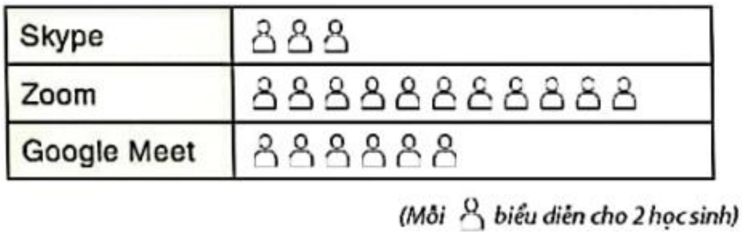
Lời giải

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Cỡ áo	M	S	L

Tần số tương đối	50%	32,5%	17,5%

Bài 7. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh lớp 9B bình chọn phần mềm học trực tuyến được yêu thích nhất:



Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

Lời giải

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Phần mềm trực tuyến	Skype	Zoom	Google Meet
Tần số tương đối	15%	55%	30%

Bài 8. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của lớp 9B theo mức độ cận thị.

Mức độ	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Số học sinh	10	13	12	5

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.

b) Đa số học sinh lớp 9B cận thị hay không cận thị?

Lời giải

a) Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Mức độ cận thị	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Tần số tương đối	25%	32,5%	30%	12,5%

b) Đa số học sinh lớp 9B cận thị nhẹ, vì tần số tương đối của số học sinh cận thị nhẹ cao nhất lớp.

Bài 9. Tỉ lệ bình chọn các tiết mục văn nghệ của các lớp 9A,9B,9C,9D tham gia hội diễn văn nghệ khối lớp 9 như sau:

Lớp	9A	9B	9C	9D
Tỉ lệ học sinh bình chọn	35%	25%	30%	10%

Biết rằng có 300 học sinh tham gia bình chọn. Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp.

Lời giải

Bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn:

Lớp	9A	9B	9C	9D
Số học sinh bình chọn	105	75	90	30

Bài 10. Bạn Minh Nhàn khảo sát ý kiến của các bạn trong tổ về chất lượng phục vụ của căng tin trường thu được kết quả sau:

A, B, C, B, A, A, B, A, B, A,

Trong đó, A là mức Tốt, B là mức Trung bình, C là mức kém.

Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Minh Nhàn thu được.

Lời giải

Số đánh giá Tốt, Trung bình, Kém lần lượt là: 5, 4, 1

Ta có bảng tần số sau;

Đánh giá	A (Tốt)	B (Trung bình)	C (Kém)
Tần số	5	4	1

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Ý kiến đánh giá	A (Tốt)	B (Trung bình)	C (Kém)
Tần số tương đối	50%	40%	10%

DẠNG 2
BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Bài 1. Khảo sát ngẫu nhiên 200 người về nhóm máu của họ. Kết quả thu được thể hiện ở biểu đồ hình quạt tròn như hình bên.

Hãy cho biết nhóm máu nào phổ biến nhất, nhóm máu nào hiếm nhất.

Lời giải

- Nhóm máu nào phổ biến nhất là nhóm máu O.
- Nhóm máu nào hiếm nhất là nhóm máu AB.

Bài 2. Bảng sau thống kê số lượt nháy chuột vào quảng cáo ở một trang web vào tháng 12/2022.

Số lượt nháy chuột	0	1	2	3	4	5
Số người dùng	25	56	12	9	5	3

a) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu số liệu trên.

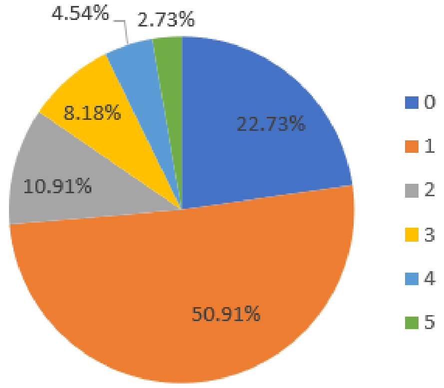
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn mẫu số liệu trên.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối:

Số lượt nháy chuột	0	1	2	3	4	5
Tần số tương đối	22,73%	50,91%	10,91%	8,18%	4,54%	2,73%

b) Biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn



Tần số tương đối của số lượt nháy chuột

Bài 3. Một cửa hàng thống kê lại số điện thoại di động bán được trong tháng 04/2022 và tháng 04/2023 ở bảng sau:

Thương hiệu	A	B	C	D	Các thương hiệu khác
Tháng 4/2022	54	48	32	96	20
Tháng 4/2023	60	56	60	120	24

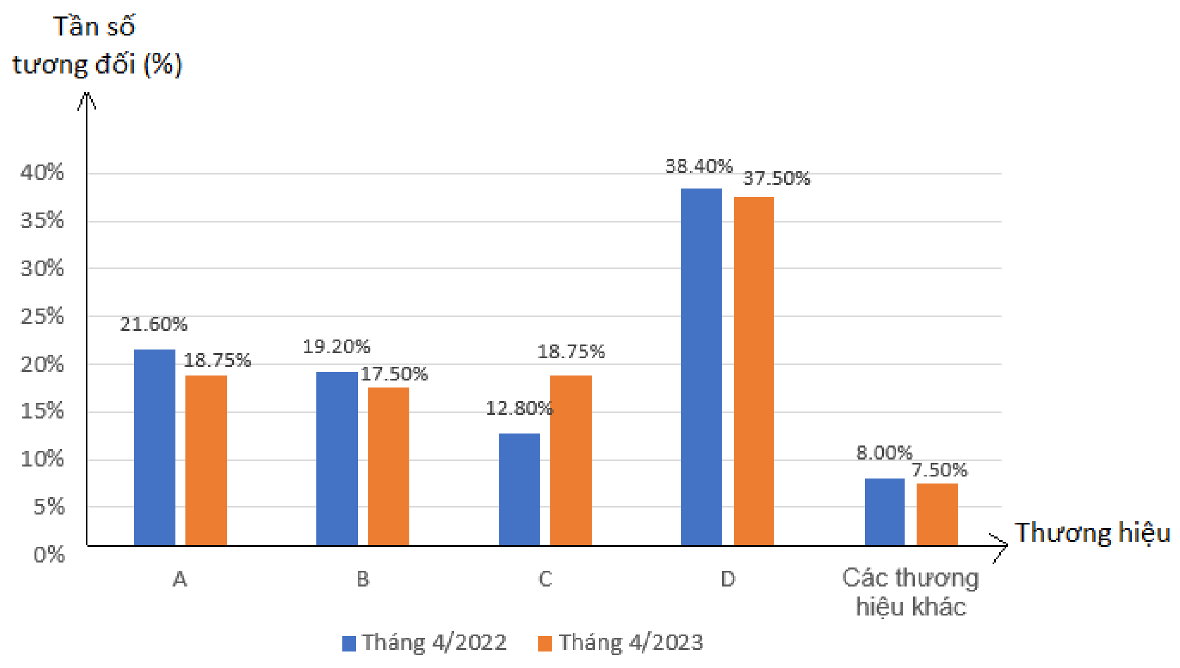
a) Hãy lựa chọn và vẽ biểu đồ phù hợp để thấy xu thế thay đổi lựa chọn thương hiệu điện thoại giữa hai đợt thống kê.

b) Hãy cho biết trong các thương hiệu điện thoại A, B, C, D, thương hiệu nào tăng trưởng cao nhất, thương hiệu nào tăng trưởng thấp nhất.

Lời giải

a)

Thương hiệu	A	B	C	D	Các thương hiệu khác
Tháng 04/2022	21,6%	19,2%	12,8%	38,4%	8%
Tháng 04/2023	18,75%	17,5%	18,75%	37,5%	7,5%



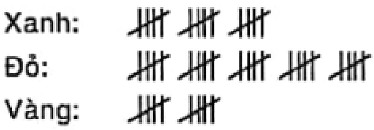
Tần số tương đối của thương hiệu điện thoại giữa hai đợt thống kê

b)

- Thương hiệu tăng trưởng cao nhất là thương hiệu C (tăng 5,95%).

- Thương hiệu tăng trưởng cao nhất là thương hiệu A (giảm 2,85%).

Bài 4. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:



a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

Lời giải

a)Ta có bảng tần số tương đối sau:

Số lần quay trúng	Màu xanh	Màu đỏ	Màu vàng
Tần số tương đối	30%	50%	20%

b) Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ là 50%

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cô Thảo Linh phỏng vấn một số bạn học sinh cùng trường về màu mực mỗi bạn yêu thích nhất. Kết quả được cho ở bảng sau:

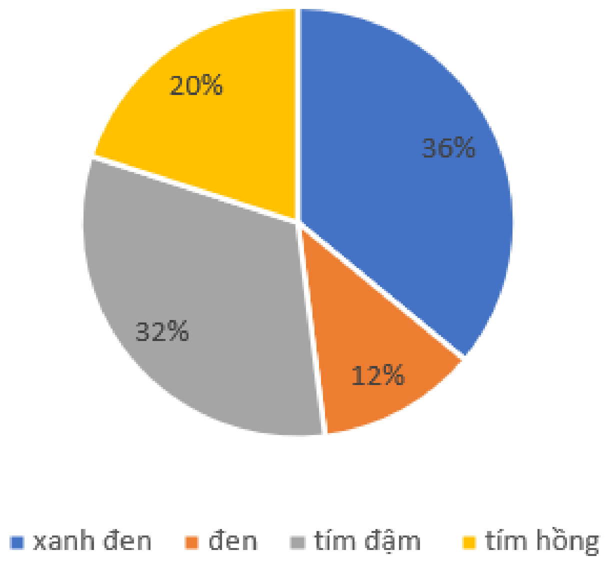
Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số	18	6	16	10

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng quạt tròn để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của cô Thảo Linh.

Lời giải

Bảng tần số và số đo cung

Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số tương đối	36%	12%	32%	20%
Số đo cung	$129,6^o$	$43,2^o$	$115,2^o$	72^o



Tần số tương đối của màu mực phân theo mức độ yêu thích

Bài 6. Biểu đồ hình quạt tròn dưới đây biểu diễn tần số tương đối của các ngôn ngữ lập trình được sử dụng khi viết 200 phần mềm của một công ty công nghệ. Biết rằng, mỗi phần mềm được viết bằng đúng một ngôn ngữ lập trình.

a) Ngôn ngữ lập trình nào được sử dụng phổ biến nhất khi viết 200 phần mềm đó?

b) Hãy lập bảng tần số biểu diễn số liệu cho bởi biểu đồ trên.

Lời giải

a) Ngôn ngữ lập trình Python được sử dụng phổ biến nhất khi viết 200 phần mềm đó.

b) Bảng tần số:

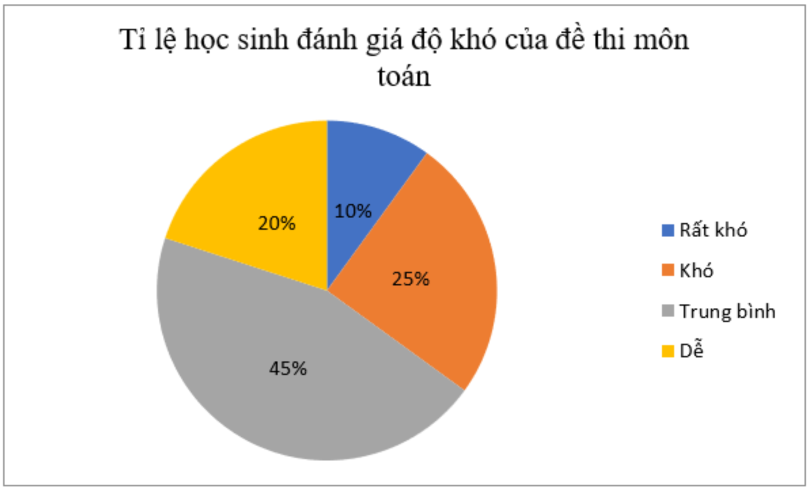
Ngôn ngữ	Python	Java Script	Java	C++	Các ngôn ngữ khác
Tần số	68	58	36	24	14

Bài 7. Bảng tần số tương đối sau cho biết tỉ lệ học sinh đánh giá độ khó của đề thi học kì môn Toán theo các mức độ:

Đánh giá	Rất khó	Khó	Trung bình	Dễ
Tỉ lệ	10%	25%	45%	20%

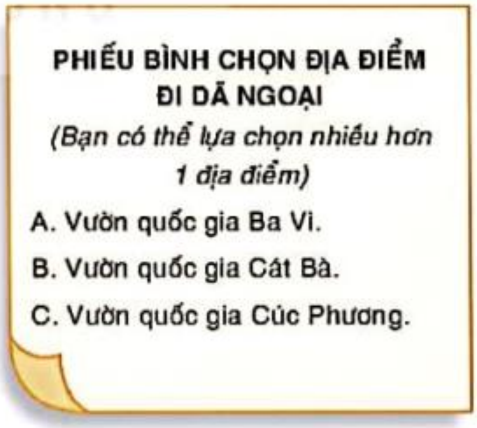
Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối này.

Lời giải



Bài 8. Bạn Bình phát phiếu (H.7.13) lấy ý kiến bình chọn của 40 bạn trong lớp về địa điểm đi dã ngoại. Kết quả bạn Bình thu được như sau:

Địa điểm	Vườn quốc gia Ba Vì	Vườn quốc gia Cát Bà	Vườn quốc gia Cúc Phương
Tỉ lệ bạn bình chọn	70%	30%	50%



Hình 7.13

Ý kiến của bạn thế nào?

Lời giải

Nên dùng biểu đồ hình cột chồng, vì tổng tỉ lệ bạn bình chọn lớn hơn 100%, rất khó để biểu diễn trên biểu đồ hình quạt tròn.

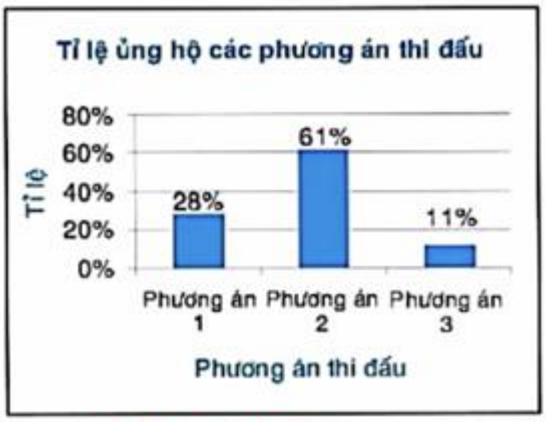
Bài 9. Có ba phương án thi đấu tại giải bóng đá khối lớp 9 của trường THCS Thái Nguyên như sau:

Phương án 1: Các đội đấu vòng tròn, tính điểm.

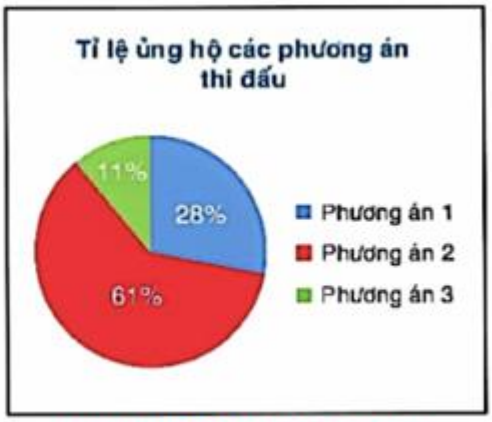
Phương án 2: Chia các đội thành hai bảng, mỗi bảng lấy hai đội vào trận bán kết.

Phương án 3: Các đội bốc thăm ghép cặp, đấu loại trực tiếp.

Ban tổ chức đã lấy phiếu khảo sát ý kiến. Kết quả được Việt và Nam biểu diễn bằng biểu đồ như sau:



Hình 1. Biểu đồ cột



Hình 2. Biểu đồ hình quạt tròn

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả khảo sát ý kiến.

Lời giải

a)

- Biểu đồ cột ở hình 1

  Phương án 1 chiếm 28%

  Phương án 2 chiếm 61%

  Phương án 3 chiếm 11%

- Biểu đồ hình quạt tròn ở hình 2

  Phương án 1 chiếm 28%

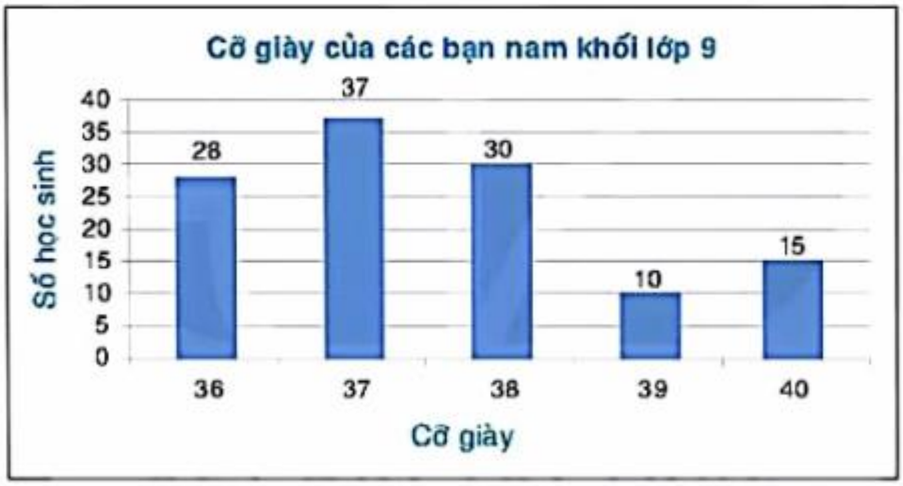
  Phương án 2 chiếm 61%

  Phương án 3 chiếm 11%

b) Bảng tần số tương đối:

Phương án	1	2	3
Tần số tương đối	28%	61%	11%

Bài 10. Biểu đồ cột hình bên dưới cho biết cỡ giày của các bạn nam khối lớp 9 trong trường A nào đó.



Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Tổng số học sinh là: 28+37+30+10+15=120 bạn

Ta có bảng tần số:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Số học sinh	28	37	30	10	15

Ta có bảng tần số tương đối:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số tương đối	23,3%	30,8%	25%	8,4%	12,5%

Bài 11. Quay 150 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	60	30	40	20

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.

c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Lời giải

a)

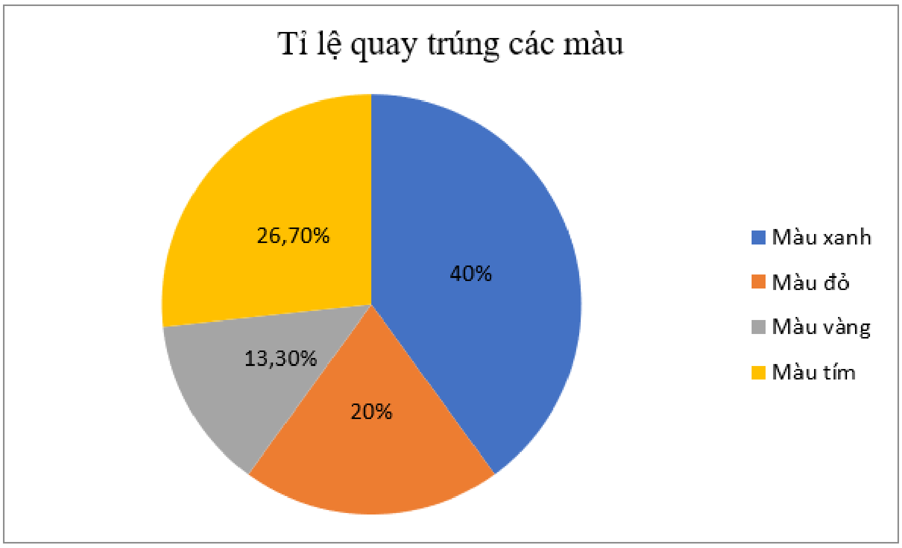
Ta có bảng tần số tương đối sau:

Số lần quay trúng	Màu xanh	Màu đỏ	Màu vàng	Màu tím
Tần số tương đối	40%	20%	13,3%	26,7%

b Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh là 40%

Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu vàng là 13,3%

c) Biểu đồ hình quạt



Bài 12. Theo Tổng cục thống kê, vào năm 2021 trong số 50,5 triệu lao động Việt Nam từ 15 tuổi trở lên có 13,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; 16,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực công nghiệp và xây dựng; 19,7 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực dịch vụ.

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

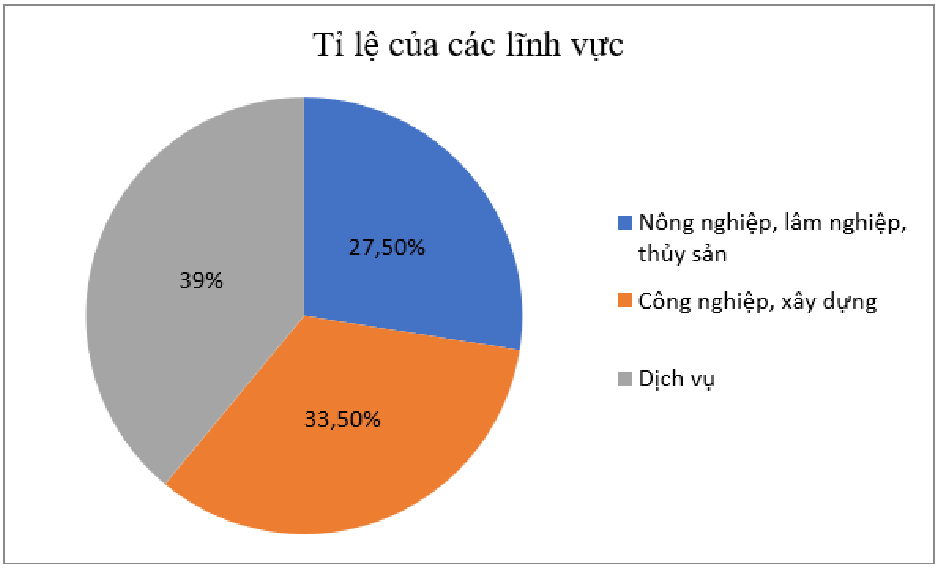
c) Tính tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản.

Lời giải

a) Ta có bảng tần số tương đối sau:

Các lĩnh vực	Nông nghiệp, lâm nghiệp, thủy sản	Công nghiệp, xây dựng	Dịch vụ
Tần số tương đối	27,5%	33,5%	39%

b)



c) Tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản là:

100% - 27,5% = 72,5%

Bài 13. Bảng thống kê sau cho biết tỉ lệ tăng trưởng GDP năm 2022 theo khu vực kinh tế.

Khu vực kinh tế	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thuỷ sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Mức tăng trưởng	3,36%	7,78%	9,99%

(Theo *Tổng cục Thống kê*)

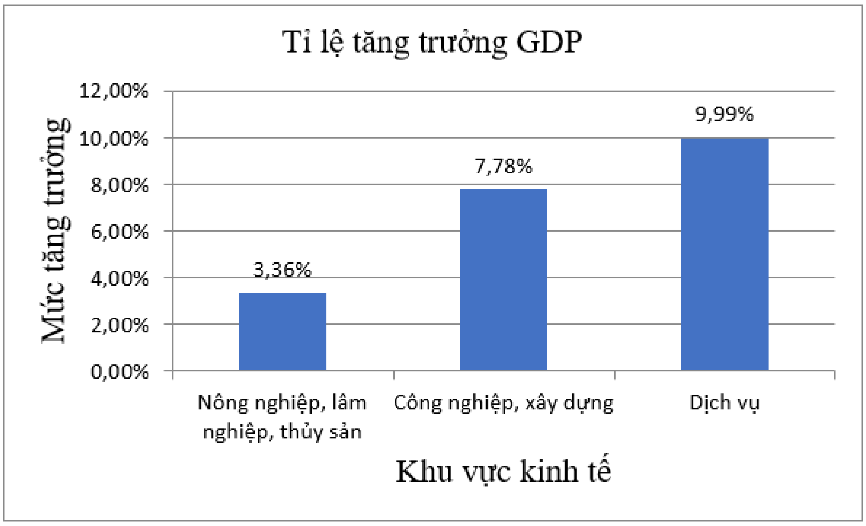
a) Bảng thống kê trên có là bảng tần số tương đối hay không?

b) Lựa chọn loại biểu đồ thích hợp và biểu diễn bảng thống kê trên bằng loại biểu đồ đó.

Lời giải

a) Bảng thống kê trên là bảng tần số tương đối.

b) Biểu đồ cột là thích hợp nhất.

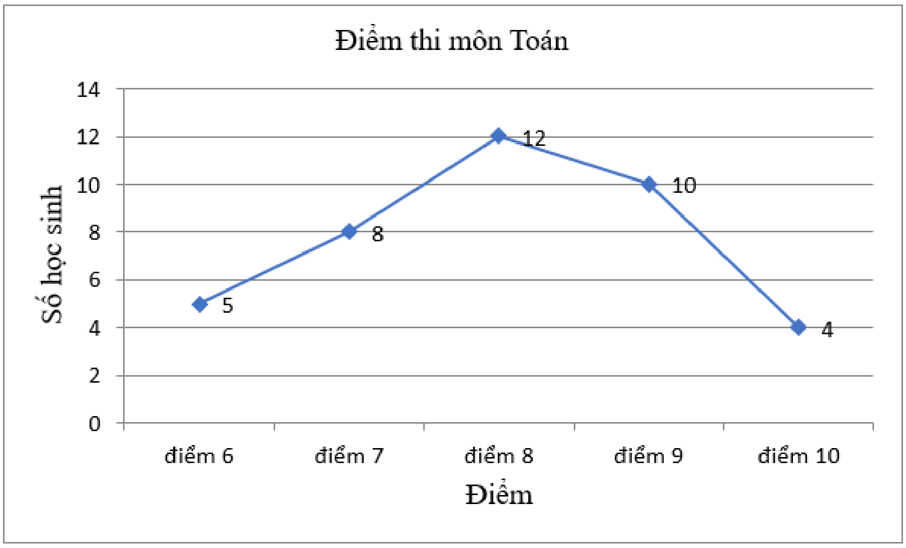


Bài 14. Cho bảng tần số sau:

Điểm thi môn Toán	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	12	10	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số trên.

Lời giải



Bài 15. Theo dõi thời tiết tại một điểm du lịch trong 30 ngày người ta thu được bảng sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Số ngày	10	8	12

a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

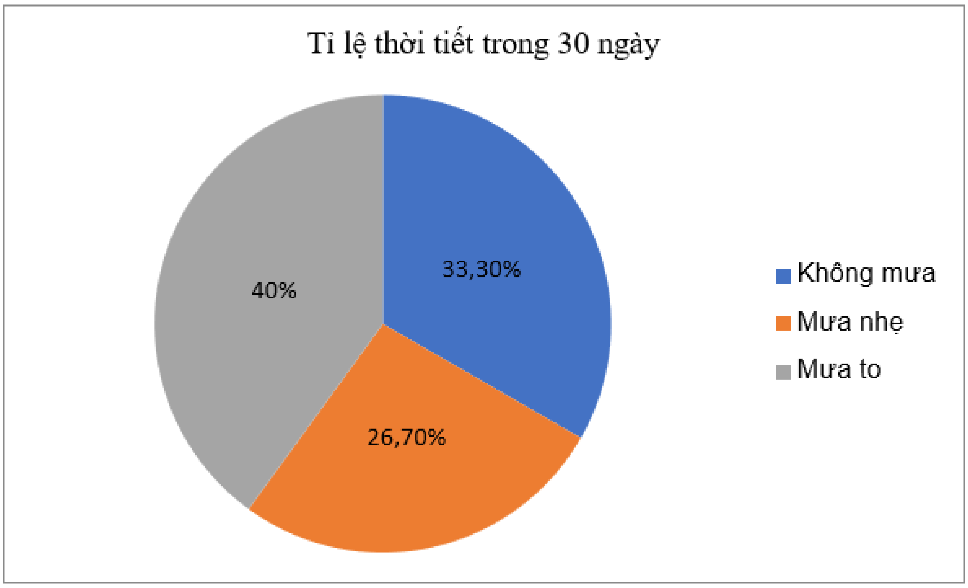
b) Ước lượng xác suất để một ngày trời có mưa ở khu vực này.

Lời giải

a) Ta có bảng tần số tương đối:

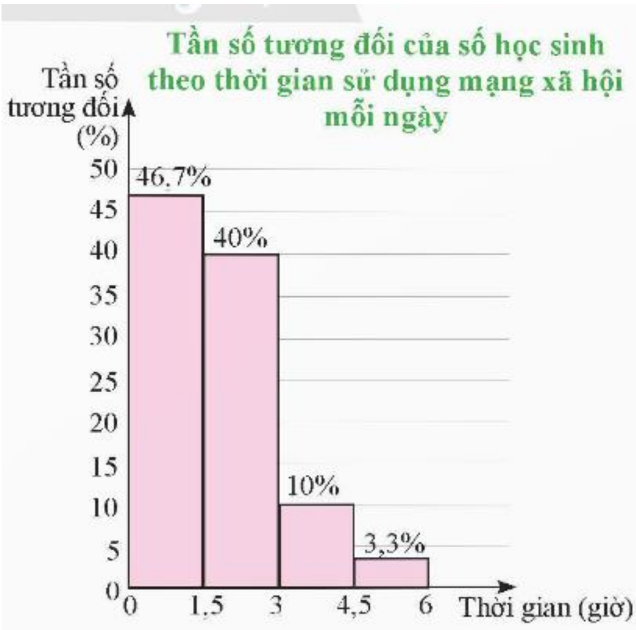
Thời tiết	Không mưa	Mưa nhẹ	Mưa to
Tần số tương đối	33,3%	26,7%	40%

Vẽ biểu đồ hình quạt:



b) Xác suất để một ngày trời có mưa ở khu vực này: 40% + 26,7% = 66,7%

Bài 16. Khảo sát các học sinh lớp 6 một trường Trung học cơ sở về thời gian sử dụng mạng xã hội trung bình trong một ngày (đơn vị: giờ), kết quả thu được như hình bên.



a) Có bao nhiêu bạn tham gia khảo sát, biết rằng có 4 bạn sử dụng mạng xã hội từ 4,5 giờ trở lên?

b) Một người cho rằng có trên 50% học sinh tham gia khảo sát sử dụng mạng xã hội từ 3 giờ trở lên mỗi ngày. Nhận định của người đó có hợp lí không? Tại sao?

Lời giải

a) Có 4 : 3,3% = 12 bạn tham gia khảo sát.

b) Một người cho rằng có trên 50% học sinh tham gia khảo sát sử dụng mạng xã hội từ 3 giờ trở lên mỗi ngày. Nhận định của người đó không hợp lí vì chỉ có 10% + 3,3% = 13,3% học sinh tham gia khảo sát sử dụng mạng xã hội từ 3 giờ trở nên mỗi ngày.

Bài 17. Một cửa hàng ghi lại cỡ các đôi giày đã bán trong một ngày ở bảng sau:

42	38	39	42	39	41	43	41	41	40
37	38	37	38	40	39	38	39	44	43
42	37	40	40	44	41	41	40	42	39
43	41	37	41	40	38	40	41	40	39

a) Hãy xác định cỡ mẫu, lập bảng tần số và tần số tương đối cho mẫu số liệu trên.

b) Hãy vẽ biểu đồ dạng cột mô tả bảng số liệu trên.

c) Cửa hàng trên nhập về để bán cỡ giày nào nhiều nhất, cỡ giày nào ít nhất?

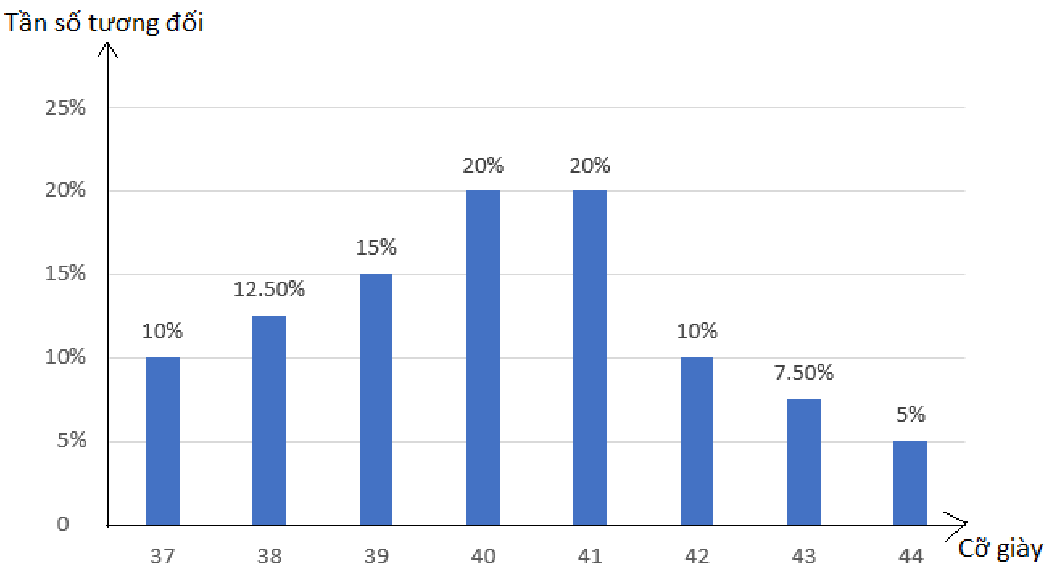
Lời giải

a) Cỡ mẫu là 40.

Bảng tần số và tần số tương đối:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số	4	5	6	8	8	4	3	2
Tần số tương đối	10%	12,5%	15%	20%	20%	10%	7,5%	5%

b)



Tần số tương đối phân theo cỡ giày

c) Cửa hàng trên nhập về để bán cỡ giày 40; 41 nhiều nhất, cỡ giày 44 ít nhất vì cỡ giày 40; 41 có nhiều người mua nhất, cỡ giày 44 có ít người mua nhất.

Bài 18. Số bàn thắng một đội bóng ghi được trong 26 trận đấu của Giải vô địch quốc gia được ghi lại ở bảng sau:

1	2	0	4	0	3	0	1	0	0	3	3	0
0	3	0	2	2	3	3	4	3	1	0	0	3

a) Hãy lập bảng tần số và tần số tương đối cho bảng số liệu trên.

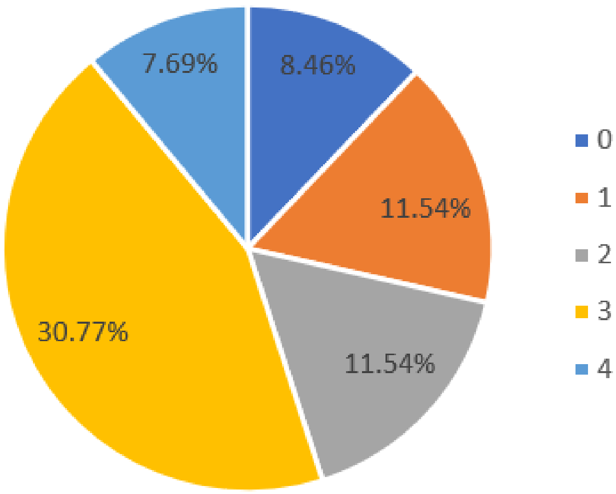
b) Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn mô tả tần số tương đối của bảng số liệu trên.

Lời giải

a) Bảng tần số và tần số tương đối:

Số bàn thắng	0	1	2	3	4
Tần số	10	3	3	8	2
Tần số tương đối	38,46%	11,54%	11,54%	30,77%	7,69%

b)



Tần số tương đối phân theo số bàn thắng

Bài 19. Trong bảng số liệu sau có một số liệu bị điền sai. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	24	16	6	4
Tần số tương đối	48%	32%	15%	8%

Lời giải

- Số liệu không chính xác ở đây là 15%. Sửa lại thành 12% vì $\dfrac{6}{24+16+6+4}.100\% = 12\%$

- Bảng số liệu đúng sau khi sửa lại:

Tần số	24	16	6	4
Tần số tương đối	48%	32%	15%	8%

Bài 20. Hình 28 mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm sáu phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn và ghi lại số ở hình quạt mà chiếc kim chỉ vào khi đĩa dừng lại. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại số liệu sau 40 lần quay đĩa tròn:

1	1	3	5	4	6	1	2	6	4
1	5	5	2	4	3	3	6	5	2
5	6	2	3	3	4	2	3	3	4
4	5	4	6	1	2	3	5	6	6

a) Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó.

Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

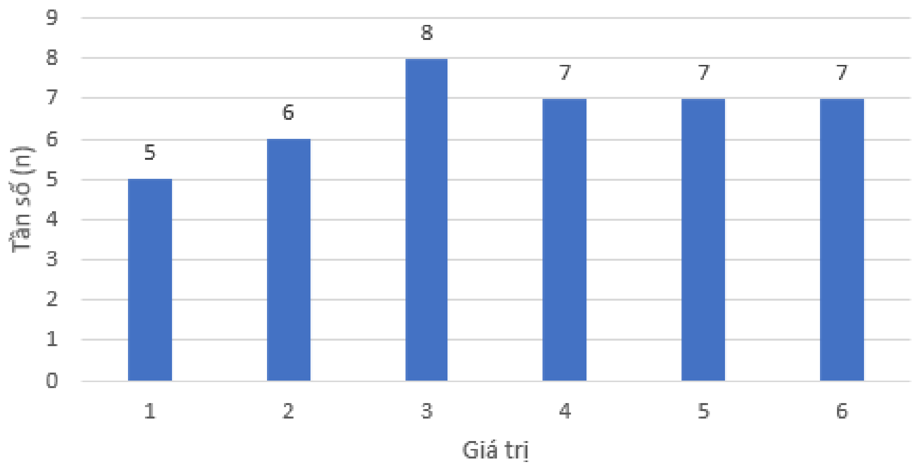
a) Có 6 giá trị khác nhau.

b) Trong số 40 số liệu thống kê, có: 5 lần quay vào số 1, 6 lần quay vào số 6, 8 lần quay vào số 3, 7 lần quay vào số 4, 7 lần quay vào số 5 và 7 lần quay vào số 6.

Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê:

Giá trị	Tần số (n)
1	5
2	6
3	8
4	7
5	7
6	7

Biểu đồ dạng cột của tần số mẫu số liệu có dạng:

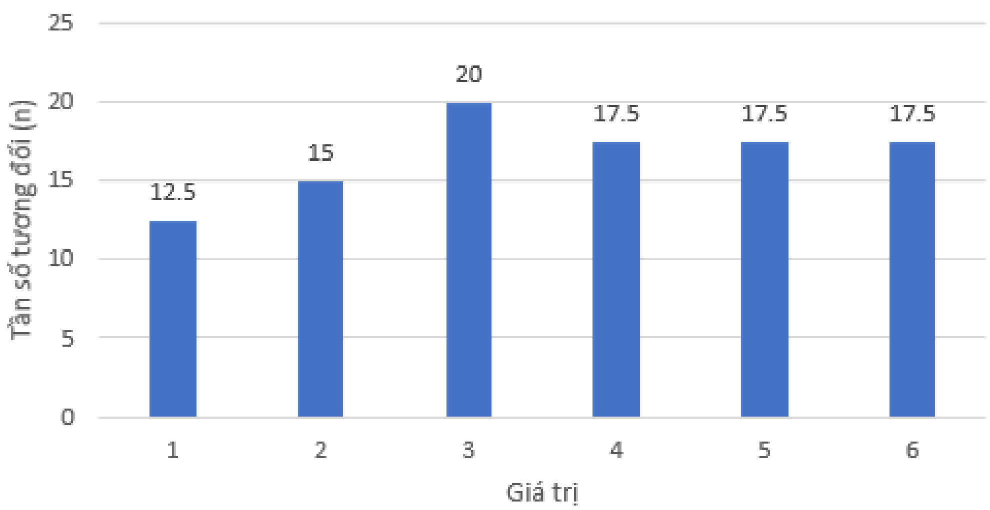


c) Các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, 6 có tần số tương đối lần lượt là:

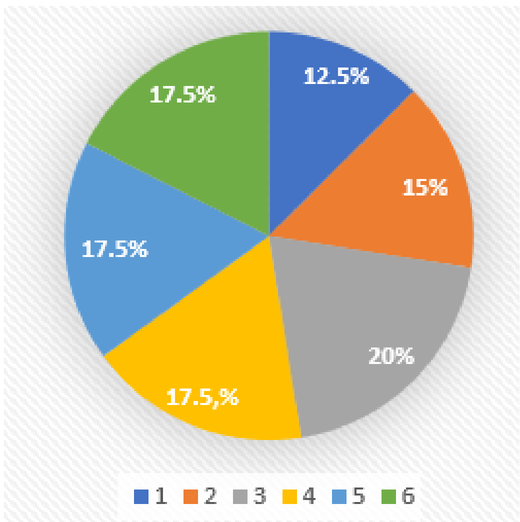
Bảng tần số tương đối:

Giá trị	1	2	3	4	5	6
Tần số tương đối %	12,5	15	20	17,5	17,5	17,5

• Biểu đồ dạng cột của tần số tương đối mẫu số liệu có dạng:



• Biểu đồ dạng quạt tròn của tần số tương đối mẫu số liệu có dạng:



BÀI 3
BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

1. Bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm

a. Mẫu số liệu ghép nhóm

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện như sau:

- Tìm nửa khoảng $[a;b)$ sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng $[a;b)$.
- Ta thường phân chia nửa khoảng $[a;b)$ thành các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu

b. Bảng tần số ghép nhóm

Trong một mẫu số liệu ghép nhóm, **tần số ghép nhóm** (hay **tần số**) của một nhóm là số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, …, nhóm i kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, ..., n_i$.

Để lập bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng ngang ta có thể làm như sau:

Bước 1: Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số của mỗi nhóm đó.

Bước 2: Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

+ Cột đầu tiên: Nhóm, tần số (n).

+ Các cột tiếp theo lần lượt ghi tên nhóm và tần số của nhóm đó.

+ Cột cuối cùng : Cộng, $N = ...$

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	...	$[a_{i-1};a_i)$	**Cộng**
Tần số ghép nhóm n	n_1	n_2	...	n_i	$N = n_1 + n_2 + ... + n_i$

Chú ý: Bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Nhóm	**Tần số** n
$[a_1;a_2)$	n_1
$[a_2;a_3)$	n_2
...	...
$[a_{i-1};a_i)$	n_i
Cộng	$N = n_1 + n_2 + ... + n_i$

Nhận xét: Đối với một mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, tần số của một nhóm phản ánh số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó.

c. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

Tần số tương đối ghép nhóm (hay **tần số tương đối**) f_i của nhóm i là tỉ số giữa tần số n_i của nhóm đó và số lượng N các dữ liệu trong mẫu số liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Để lập bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng ngang ta có thể làm như sau:

Bước 1: Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

Bước 2: Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

+ Cột đầu tiên: Nhóm, tần số tương đối $(\%)$.

+ Các cột tiếp theo lần lượt ghi nhóm và tần số tương đối của nhóm đó.

+ Cột cuối cùng : Cộng, 100

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	...	$[a_{i-1};a_i)$	**Cộng**
Tần số tương đối ghép nhóm $\%$	f_1	f_2	...	f_i	100

Chú ý: Bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Nhóm	**Tần số tương đối ghép nhóm** $\%$
$[a_1;a_2)$	f_1
$[a_2;a_3)$	f_2
...	...
$[a_{i-1};a_i)$	f_i
Cộng	100

Nhận xét: Đối với một mẫu số liệu ghép nhóm, tần số tương đối của một nhóm phản ánh giá trị đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm có dạng cột kề nhau, mỗi cột tương ứng với một nhóm. Cột biểu diễn nhóm $[a_1;a_2)$ có đầu mút trái là a_1, đầu mút phải là a_2 và có chiều cao tuwogn ứng với tần số tương ứng của nhóm.

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Bước 2: Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần tương đối ghép nhóm nhận được ở bước 1.

• Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng là đường gấp khúc đi từ trái qua phải, nối các điểm trên mặt phẳng, mỗi điểm có hoành độ là giá trị đại diện của nhóm số liệu và tung độ tương ứng với tần số tương đối của nhóm số liệu đó.

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Bước 2: Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần tương đối ghép nhóm nhận được ở bước 1.

DẠNG 1
TẦN SỐ GHÉP NHÓM VÀ BẢNG TẦN SỐ GHÉP NHÓM

Bài 1. Chiều cao (đơn vị: mét) của 35 cây bạch đàn được cho như sau:

6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
8,2	8,3	7,8	7,9	8,2	7,4	8,3
7,8	8,7	8,6	8,5	7,9	7,7	8,1
9,0	7,0	8,1	8,0	8,9	9,4	9,2

Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Lời giải

Các số liệu trên được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau là: [6,6; 7,2), [7,2; 7,8), [7,8; 8,4), [8,4; 9), [9; 9,6).

Bài 2. Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phông cho 40 học sinh của lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

a) Mẫu số liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Có nên dùng bảng tần số (hay bảng tần số tương đối) để biểu diễn mẫu số liệu thống kê đó không?

b) Mẫu số liệu thống kê ở trên đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [150; 155), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175). Có bao nhiêu số liệu trong mẫu số liệu đó thuộc vào nhóm 1?

Lời giải

a) Mẫu số liệu trên có 18 giá trị khác nhau.

b) Không nên dùng bảng tần số (hay bảng tần số tương đối) để biểu diễn mẫu số liệu thống kê đó.

c) Trong 40 số liệu thống kê của mẫu số liệu thống kê đó, có 5 số liệu thuộc nhóm 1.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở gia đình bác Ngọc là:

90	73	88	93	101	104	111	95	78	95
81	97	96	92	95	83	90	101	103	117
109	110	112	87	75	90	82	97	86	96

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau: [70; 80), [80; 90), [90; 100), [100; 110), [110; 120). Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Lời giải

a) Các nhóm [70; 80), [80; 90), [90; 100), [100; 110), [110; 120) có tần số lần lượt là: $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 12$, $n_4 = 5$, $n_5 = 4$.

b)

Nhóm	Tần số (n)
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	5
[110; 120)	4

Bài 4. Bảng sau ghi lại thời gian một bác sĩ khám cho một số bệnh nhân (đơn vị: phút):

10,0	7,7	9,4	9,1	6,7	5,9	6,7	11,7	6,9	5,4
6,0	5,8	8,7	6,4	5,3	12,3	7,4	9,1	11,8	6,5

a) Hãy chia số liệu thành 5 nhóm, với nhóm thứ nhất là các bệnh nhân có thời gian khám từ 5 phút đến dưới 6,5 phút và lập bảng tần số ghép nhóm.

b) Xác định nhóm có tần số cao nhất và nhóm có tần số thấp nhất.

Lời giải

a) Ta chia số liệu thành 5 nhóm theo thời gian (X): [5; 6,5), [6,5; 8), [8; 9,5), [9,5; 11), [11; 12,5).

Thời gian (X) (phút)	[5; 6,5)	[6,5; 8)	[8; 9,5)	[9,5; 11)	[11; 12,5)
Số bệnh nhân	6	6	4	1	3

b) - Nhóm có tần số cao nhất là nhóm [5; 6,5) và [6,5; 8).

- Nhóm có tần số thấp nhất là nhóm [9,5; 11).

Bài 5. Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành 4 nhóm theo HDI: Nhóm 1(rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2(cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8; Nhóm 3(trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4(thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939 0,829 0,803 0,8 0,705 0,703 0,699 0,607 0,607 0,593 0,585.

Dựa vào dữ liệu trên., hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số HDI	[0;0,55)	[0,55;0,7]	[0,7;0,8)	[0,8;1)
Tần số	?	?	?	?

Lời giải

Chỉ số HDI	[0;0,55)	[0,55;0,7]	[0,7;0,8)	[0,8;1)
Tần số	0	5	2	4

Bài 6. Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; cấp II và cấp III có dộ lớn từ dưới 3 đến dưới 4; cấp IV và cấp V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; cấp VI và cấp VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Lập bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

Lời giải

Ta có bảng tần số ghép nhóm:

Độ lớn trận động đất	[1;3]	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;6,9)
Tần số	3	5	5	5	1

DẠNG 2
TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

Bài 1. Xét mẫu số liệu được ghép nhóm với bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm	[150 ; 155)	[155 ; 160)	[160 ; 165)	[165 ; 170)	[170 ; 175)	Cộng
Tần số (n)	5	7	10	13	5	$N = 40$

Tính tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 5$ và $N = 40$.

Lời giải

Tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 5$ và $N = 40$ là $\frac{5}{40}.100\% = 12,5\%$.

Bài 2. Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần như sau:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [30; 40), [40; 50), [50; 60), [60; 70), [70; 80), [80; 90).

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu đó.

Lời giải

a)

Nhóm	Tần số (n)
[30; 40)	5
[40; 50)	6
[50; 60)	6
[60; 70)	4
[70; 80)	3
[80; 90)	6

b)

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[30; 40)	16,67
[40; 50)	20
[50; 60)	20
[60; 70)	13,33
[70; 80)	10

[80; 90)	20

Bài 3. Giáo viên chủ nhiệm lớp 9C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành các bảng sau vào vở:

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Tần số	?	?	?	?

Bảng 1

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Tần số tương đối	?	?	?	?

Bảng 2

Lời giải

Bảng 1 được gọi là bảng tần số ghép nhóm, bảng 2 được gọi là bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Bảng tần số ghép nhóm

Thời gian(giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số	10	15	8	7

Bảng tần số tương đối:

Thời gian(giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số tương đối	25%	37,5%	20%	17,5%

Bài 4. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Tần số	12	23	15

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Lời giải

a) Tuổi thọ từ 30 tuổi đến dưới 40 tuổi có 12 người

Tuổi thọ tử 40 tuổi đến dưới 50 tuổi có 23 người

Tuổi thọ từ 50 tuổi đến dưới 60 tuổi có 15 người

b) Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm

Tuổi thọ (ngày)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Tần số tương đối	24%	46%	30%

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Bạn Phương Linh ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

Bạn Phương Linh đánh giá mức độ sử dụng Internet mỗi ngày của mình theo tiêu chí sau:

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

Hãy xác định tỉ lệ các ngày trong tháng bạn Phương Linh cập Internet mức độ "Rất nhiều".

Lời giải

Thời gian (X) (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Số ngày	3	6	9	8	4
Mức độ	Rất ít	Ít	Bình thường	Nhiều	Rất nhiều

Có 4 ngày Bạn Phương Linh cập rất nhiều chiếm $\frac{4}{30}.100\% = 13,33\%$

Bài 6. Ông Thành ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Hãy chia dữ liệu trên thành 5 nhóm, với nhóm đầu tiên gồm các cây có chiều cao từ 15 cm đến dưới 18 cm và bảng tần số tương đối ghép nhóm tương ứng.

Lời giải

Chiều cao (X) (cm)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)
Tần số	8	9	11	3	9
Tần số tương đối	20%	22,5%	27,5%	7,5%	22,5%

Bài 7. Bác nông dân thống kê chiều cao của một cây bạch đàn 5 năm tuổi ở một lâm trường vào bảng dưới đây (đơn vị: mét). Do sơ suất nên bác nông dân ghi thiếu một số số liệu. Hãy giúp bác nông dân hoàn thành bảng thống kê.

Chiều cao (m)	[7; 8)	?	[?; 10)
Tần số	?	24	8
Tần số tương đối	?	30%	?

Lời giải

Chiều cao (cm)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Tần số	48	24	8
Tần số tương đối	60%	30%	10%

Bài 8. Bạn Giang ghi lại cự li nhảy xa của các bạn trong câu lạc bộ thể thao ở bảng sau (đơn vị: mét):

5,4	3,6	4,7	4,2	4,4	4,8	3,7	4,7
4,2	3,8	4,2	4,4	4,6	4,8	5,3	4,7
5,4	4,1	3,5	4,7	5,1	4,1	4,4	5,4
4,5	5,4	4,4	4,3	3,6	4,4	4,8	4,8

a) Để thu gọn bảng dữ liệu thì nên chọn bảng tần số không ghép nhóm hay bảng tần số ghép nhóm để biểu thị dữ liệu trên tại sao?

b) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, trong đó nhóm đầu tiên cự li từ 3,5 m đến dưới 4 m; lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a) Nên dùng bảng tần số ghép nhóm vì mẫu dữ liệu trên có nhiều giá trị khác nhau, dùng bảng tần số không ghép nhóm thì phải tốn thời gian liệt kê rất dài.

b)

Cự ly (m)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)	[5; 5,5)
Tần số	5	11	10	6
Tần số tương đối	15,63%	34,37%	31,25%	18,75%

Bài 9. Kết quả đo tốc độ xe của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát được ghi lại ở bảng sau:

48,6	54,2	53,3	45,3	48,2	46,3	57,4	62,6	61,4	55	40,9	45,5	54,3
49,8	60	58,9	53	53	62	49,4	48,4	47,8	41,2	42,8	48,8	

a) Hãy lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng số liệu trên, trong đó nhóm đầu tiên là các xe ô tô có tốc độ từ 40 km/h đến dưới 45 km/h.

b) Hãy xác định nhóm có tần số tương đối cao nhất và nhóm có tần số tương đối thấp nhất.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Tốc độ (X) (km/h)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số tương đối	12%	40%	20%	16%	12%

b)

- Nhóm có tần số tương đối cao nhất [45; 50).

- Nhóm có tần số tương đối thấp nhất [40; 45).

Bài 10. Thời gian hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của một số học sinh được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: phút):

Thời gian (phút)	[10; 12)	?	[14; 16)
Tần số	25	?	5
Tần số tương đối	?	?	12,5%

a) Hãy xác định số học sinh tham gia kiểm tra.

b) Hoàn thành bảng trên vào vở.

Lời giải

a) Có 5 : 12,5% = 40 học sinh tham gia kiểm tra.

b)

Thời gian (phút)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)
Tần số	25	10	5
Tần số tương đối	62,5%	25%	12,5%

Bài 11. Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[0; 0,5)	[0,5; 1,0)	[1,0; 1,5)	[1,5; 2,0)	[2,0; 2,5)
Tỉ lệ	15%	27%	23%	18%	17%

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 2 000 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

Lời giải

a) Tỉ lệ chơi từ 0 đến dưới 0,5 giờ là 15%; từ 0,5 đến dưới 1 giờ là 27%; từ 1 đến dưới 1,5 giờ là 23%; từ 1,5 đến dưới 2 giờ là 18%; từ 2 đến dưới 2,5 giờ là 17%.

b) Ta có bảng tần số ghép nhóm

Thời gian (giờ)	[0;0,5)	[0,5;1)	[1;1,5)	[1,5;2)	[2;2,5)
Tần số ghép nhóm	300	540	460	360	340

Bài 12. Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9A cho kết quả như sau:

Thời gian(giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Số học sinh	5	20	13	2

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a) Số học sinh chạy cự li 100 mét từ 13 đến dưới 15 giây là 5 học sinh; từ 15 đến dưới 17 giây là 20 học sinh; từ 17 đến dưới 19 giây là 13 học sinh; từ 19 đến dưới 21 giây là 2 học sinh.

B Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thời gian(giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Tần số tương đối	12,5%	50%	32,5%	5%

DẠNG 3
BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

Bài 13. Biểu đồ hình bên dưới, cho biết tỉ lệ cân nặng của 62 trẻ sơ sinh tại một bệnh viện.

a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng thống kê cho số liệu được biểu diễn trên biểu đồ . Bảng thống kê đó có phải là bảng tần số tương đối ghép nhóm không?

Lời giải

a) Cân nặng được chia thành 8 nhóm với các tần số tương đối tương ứng.

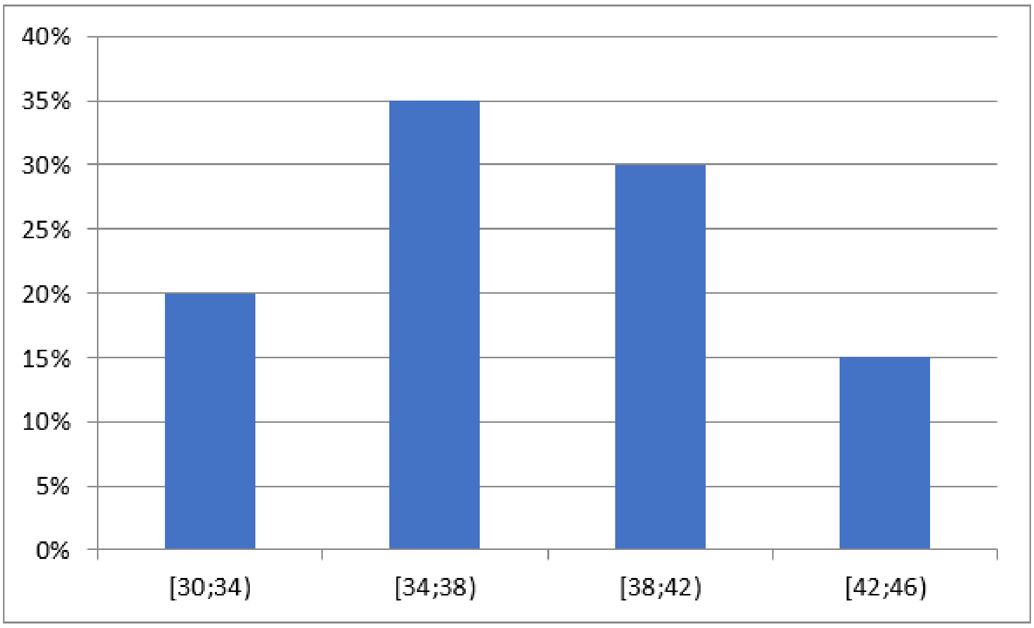
b) Bảng thống kê

Cân nặng (kg)	[2,5;2,7)	[2,7;2,9)	[2,9;3,1)	[3,1;3,3)	[3,3;3,5)	[3,5;3,7)	[3,7;3,9)	[3,9;4,1)
Tần số tương đối	3,2%	6,5%	11,3%	19,4%	24,2%	16,1%	12,9%	6,4%

Bài 14. Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Chiều cao (cm)	[30; 34)	[34; 38)	[38; 42)	[42; 46)
Tần số tương đối	20%	35%	30%	15%

Lời giải



Bài 15. Cho bảng tần số ghép nhóm sau về thời gian gọi (phút) của một số cuộc gọi điện thoại.

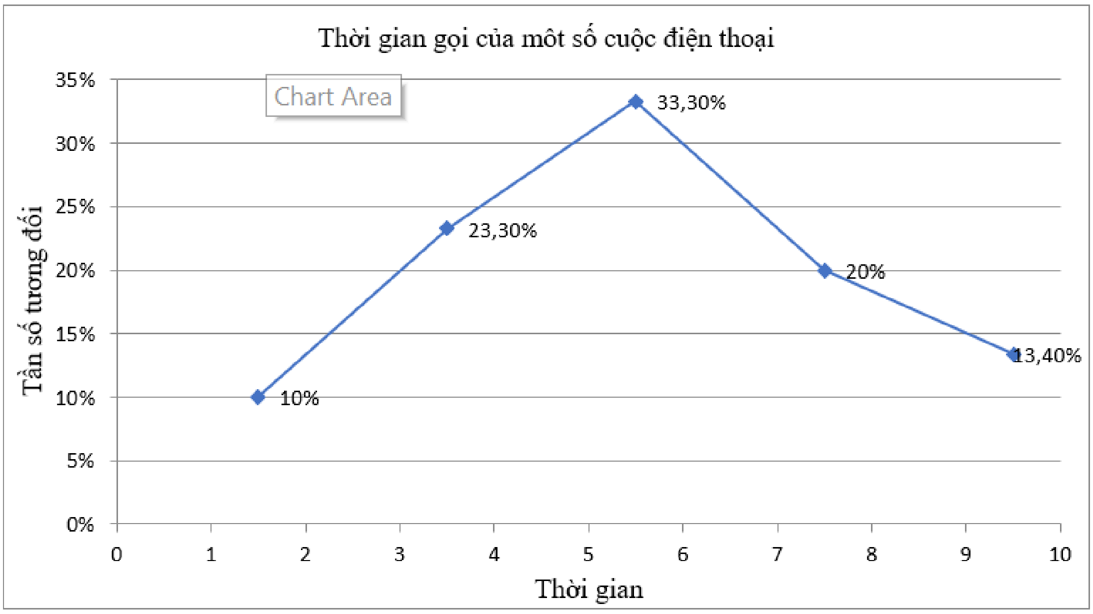
Thời gian (phút)	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số cuộc gọi	6	14	20	12	8

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Lời giải

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Thời gian	1,5	3,5	5,5	7,5	9,5
Tần số tương đối	10%	23,3%	33,3%	20%	13,4%



Bài 16. Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có bảng tần số ghép nhóm như ở bảng sau:

Nhóm	**Tần số** (n)
[36; 38)	20
[38; 40)	15
[40; 42)	25
[42; 44)	30
[44; 46)	10
Cộng	N = 100

a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Lời giải

a) Các nhóm [36; 38), [38; 40), [40; 42), [42; 44), [44; 46) có tần số tương đối lần lượt là:

$$f_1 = \frac{20.100}{100}\% = 20\%$$

$$f_1 = \frac{20.100}{100}\% = 20\%$$

$$f_1 = \frac{20.100}{100}\% = 20\%$$

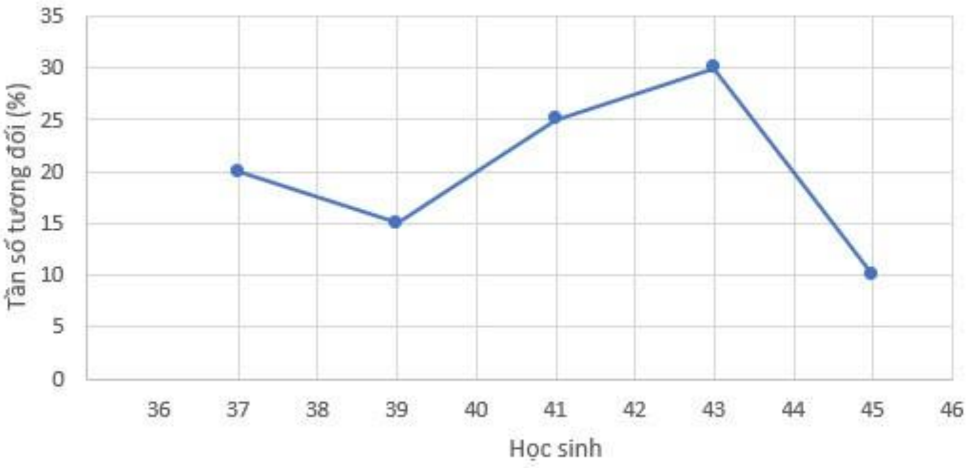
$$f_1 = \frac{20.100}{100}\% = 20\%$$

$$f_5 = \frac{10.100}{100}\% = 10\%$$

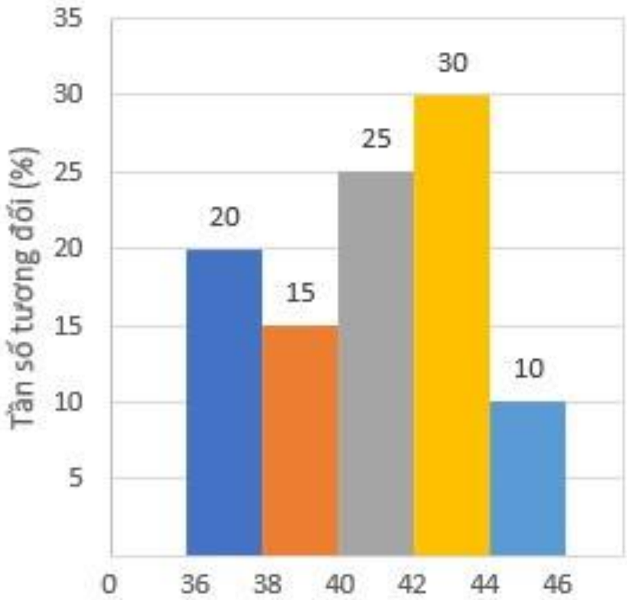
b)

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[36; 38)	20
[38; 40)	15
[40; 42)	25
[42; 44)	30
[44; 46)	10

c) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng

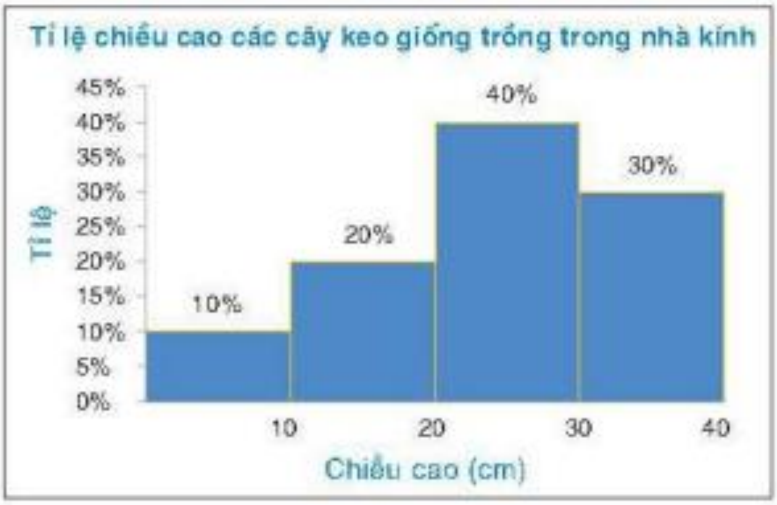


Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 17. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm hình bên dưới, cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kĩ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Chiều cao(cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Tỉ lệ	10%	20%	40%	30%

Bài 18. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[10 ; 20)	[20 ; 30)	[30 ; 40)	[40 ; 50]	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Lời giải

a) Các nhóm [10; 20), [20; 30), [30; 40), [40; 50) có tần số tương đối lần lượt là:

$$f_1 = \frac{8.100}{60}\% = 13,33\%$$

$$f_2 = \frac{18.100}{60}\% = 30\%$$

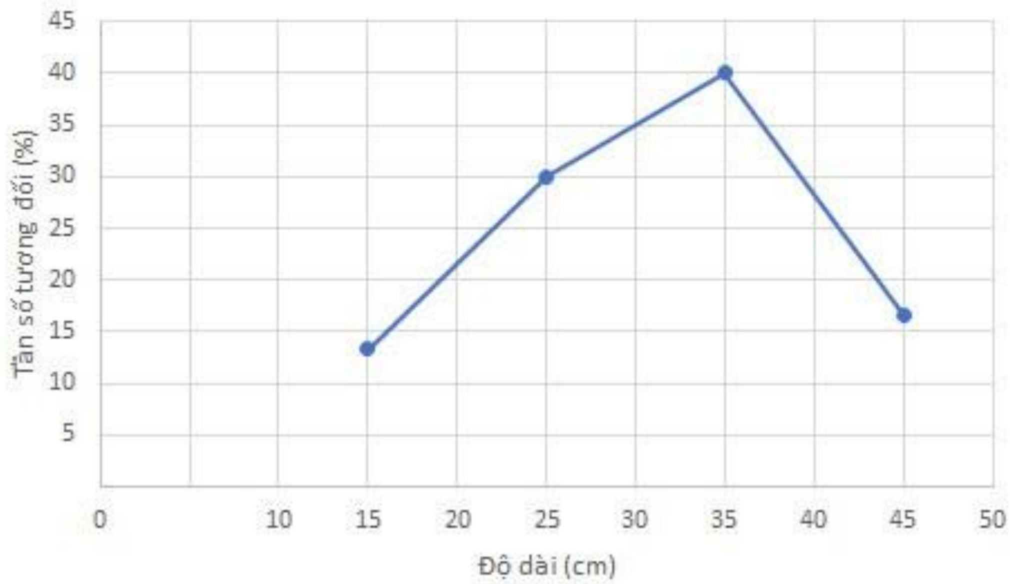
$$f_3 = \frac{24.100}{60}\% = 40\%$$

$$f_4 = \frac{10.100}{60}\% = 16,67\%$$

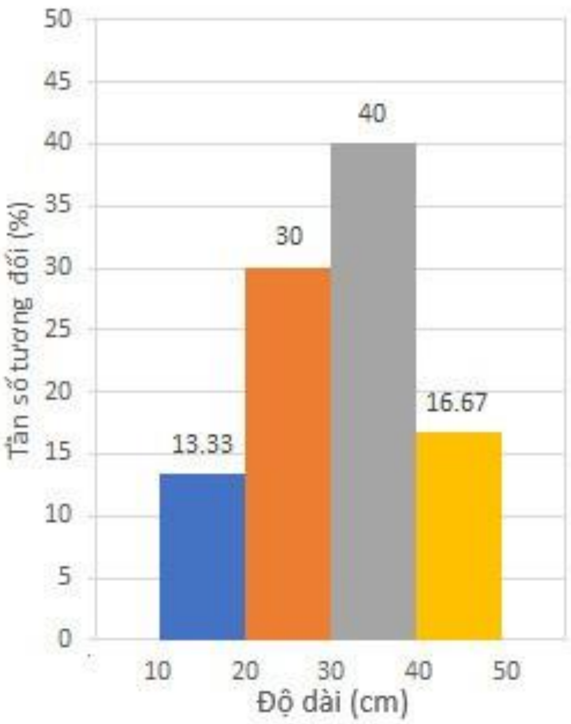
b)

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[10; 20)	13,33
[20; 30)	30
[30; 40)	40
[40; 50)	16,67

c) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng



Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột



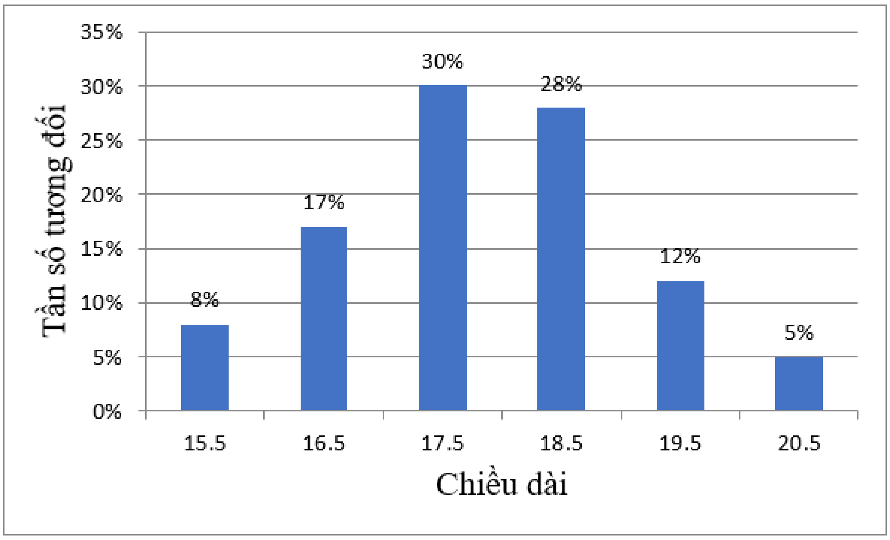
Bài 19. Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19;20)	[20; 21)
Số củ cà rốt	8	17	30	28	12	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

Chiều dài(cm)	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5	20,5
Tần số tương đối	8%	17%	30%	28%	12%	5%



Bài 20. Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số cổ động viên	15	38	50	27	20	10

a)Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

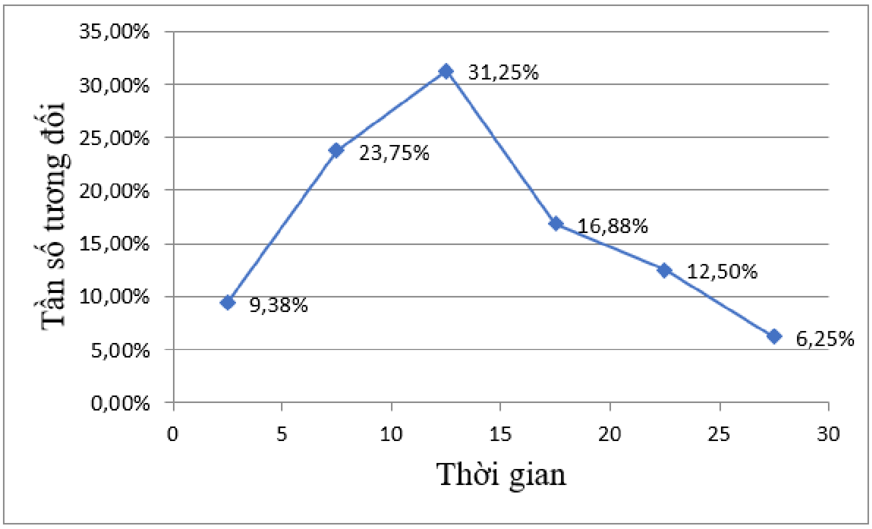
b)Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được.

Lời giải

a) Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thời gian (phút)	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Tần số tương đối	9,375%	23,75%	31,25%	16,875%	12,5%	6,25%

b)Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm:



Bài 21. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

Chiều cao(cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Số cây	5	9	4	2

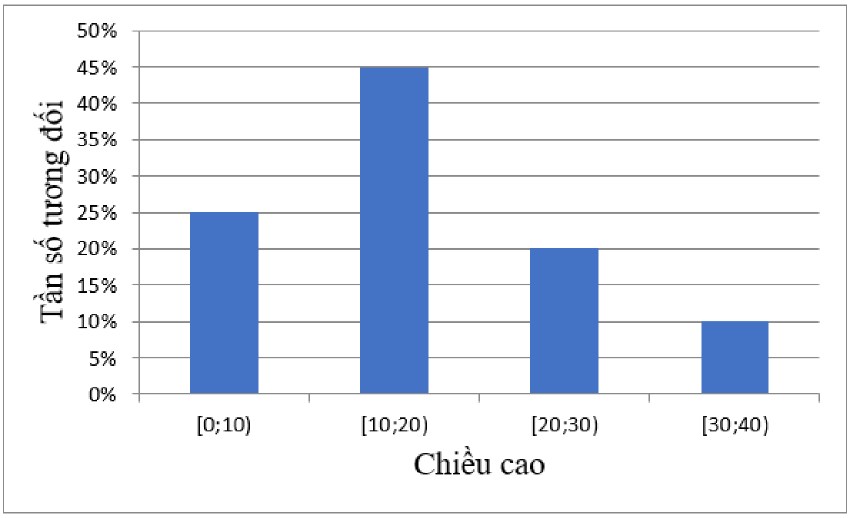
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

a)

Chiều cao(cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Tần số tương đối	25%	45%	20%	10%

*Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm



Bài 22. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bằng tần số tương đối trên.

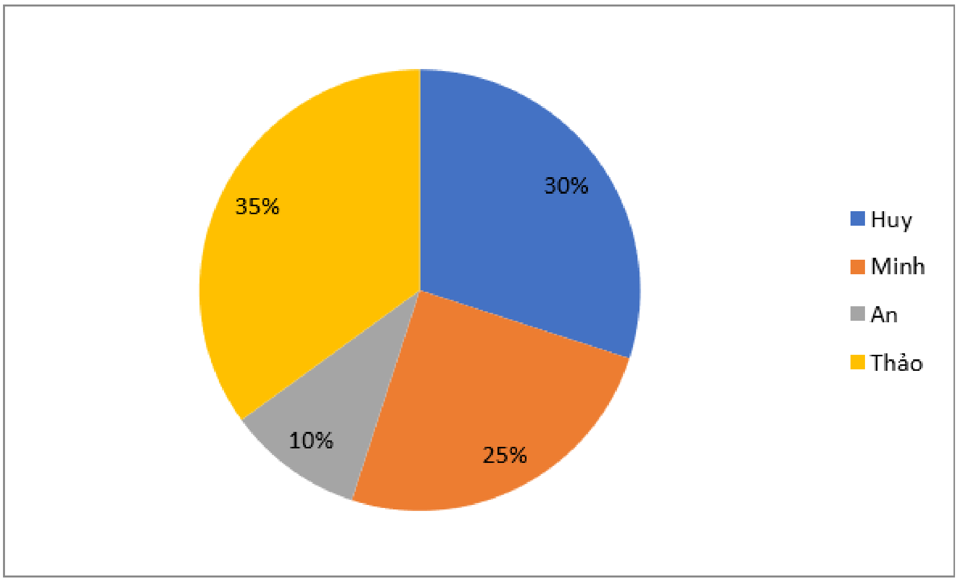
b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Lời giải

a) Ta có bảng tần số tương đối:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

*Biểu đồ hình quạt tròn thể hiện số học sinh bình chọn cho giải bóng đá của trường:



b) Ta có bảng tần số:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tần số	150	125	50	175

Bài 23. Qua đợt khám mắt, lớp 9A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptre là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptre là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptre là cận thị nặng.

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Lời giải

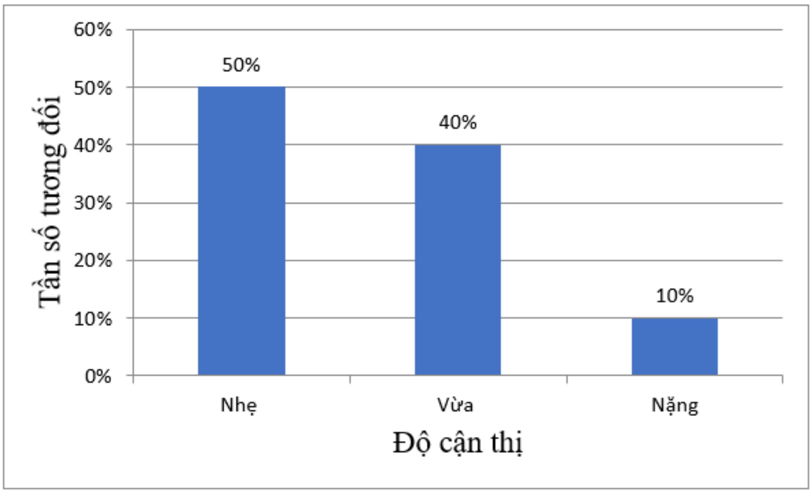
a) Ta có bảng tần số:

Độ cận thị	Nhẹ	Vừa	Nặng
Số học sinh	10	8	2

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Độ cận thị	Nhẹ	Vừa	Nặng
Tần số tương đối	50%	40%	10%

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



Bài 24. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số công nhân	20	50	70	40	20

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

a)

- Từ 5 đến dưới 7 triệu đồng: 20 công nhân.
- Từ 7 đến dưới 9 triệu đồng: 50 công nhân.
- Từ 9 đến dưới 11 triệu đồng: 70 công nhân.
- Từ 11 đến dưới13 triệu đồng: 40 công nhân.
- Từ 13 đến dưới 15 triệu đồng: 20 công nhân.

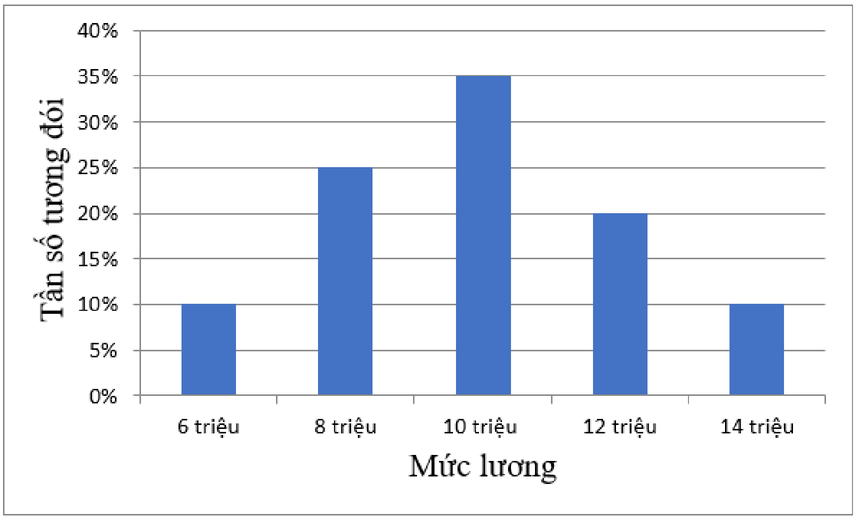
b)Tổng số công nhân là 20+50+70+40+20=200

Tỉ lệ số công nhân nhận được mức lương [5;7) ;[7;9); [9;11); [11;13); [13;15) lần lượt là: 10%; 25%; 35%; 20%; 10%.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Lương (triệu đồng)	6	8	10	12	14
Tần số tương đối	10%	25%	35%	20%	10%

*Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm:



Bài 25. Biểu đồ cột bên mô tả tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của 100 chiếc bóng đèn dây tóc trong một lô sản xuất.

a) Hãy lập bảng tần số mô tả dữ liệu ở biểu đồ bên.

b) Một bóng đèn được cho là thuộc loại I nếu có tuổi thọ từ 1500 giờ trở lên. Hỏi có bao nhiêu bóng đèn thuộc loại I trong số các bóng đèn được thống kê?

c) Hãy vẽ đồ thị tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu ở biểu đồ bên.

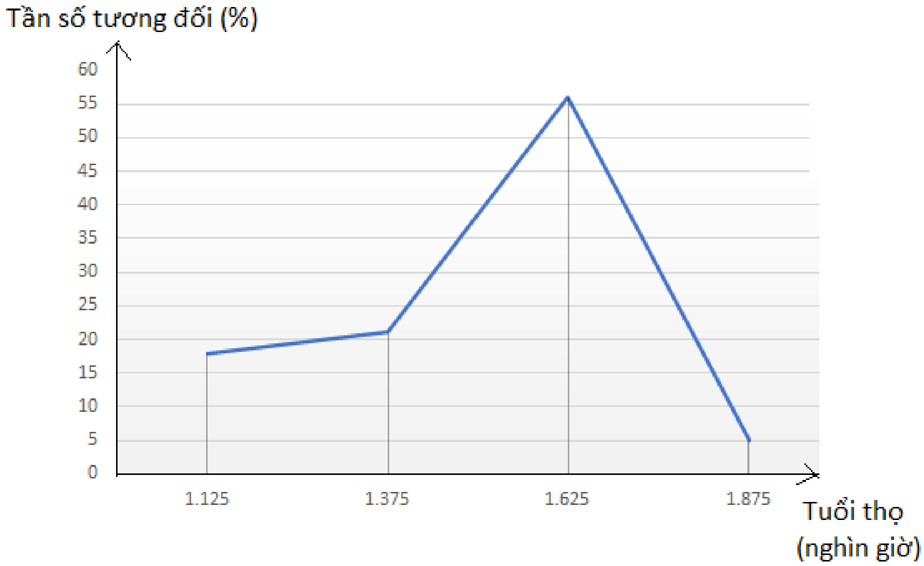
Lời giải

a) Bảng tần số:

Tuổi thọ (X) (nghìn giờ)	[1; 1,25)	[1,25; 1,5)	[1,5; 1,75)	[1,75; 2)
Tần số	18	21	56	5

b) Có 56 + 5 = 61 bóng đèn thuộc loại I.

c)



Tần số tương đối của số bóng đèn theo tuổi thọ

Bài 26. Bảng tần số ghép nhóm sau biểu diễn kết quả khảo sát cân nặng (đơn vị: kg) của một số trẻ sơ sinh ở một khu vực.

Cân nặng (X) (kg)	[2,9; 3,1)	[3,1; 3,3)	[3,3; 3,5)	[3,5; 3,7)	[3,7; 3,9)
Số trẻ sơ sinh	3	7	5	3	2

a) Hãy lập bảng tần tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

b) Hãy vẽ đồ thị tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu số liệu trên.

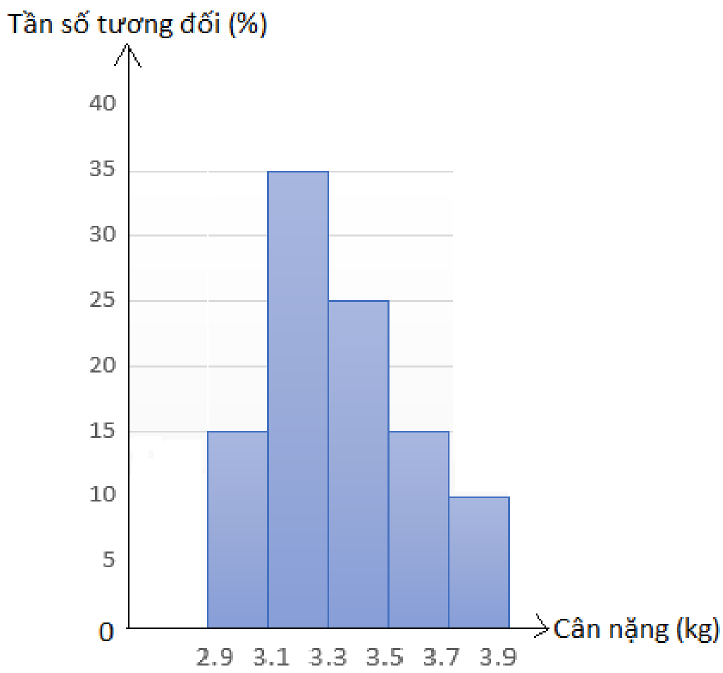
Lời giải

a) Bảng tần tương đối ghép nhóm

Cân nặng (X) (kg)	[2,9; 3,1)	[3,1; 3,3)	[3,3; 3,5)	[3,5; 3,7)	[3,7; 3,9)
Tần số tương đối	15%	35%	25%	15%	10%

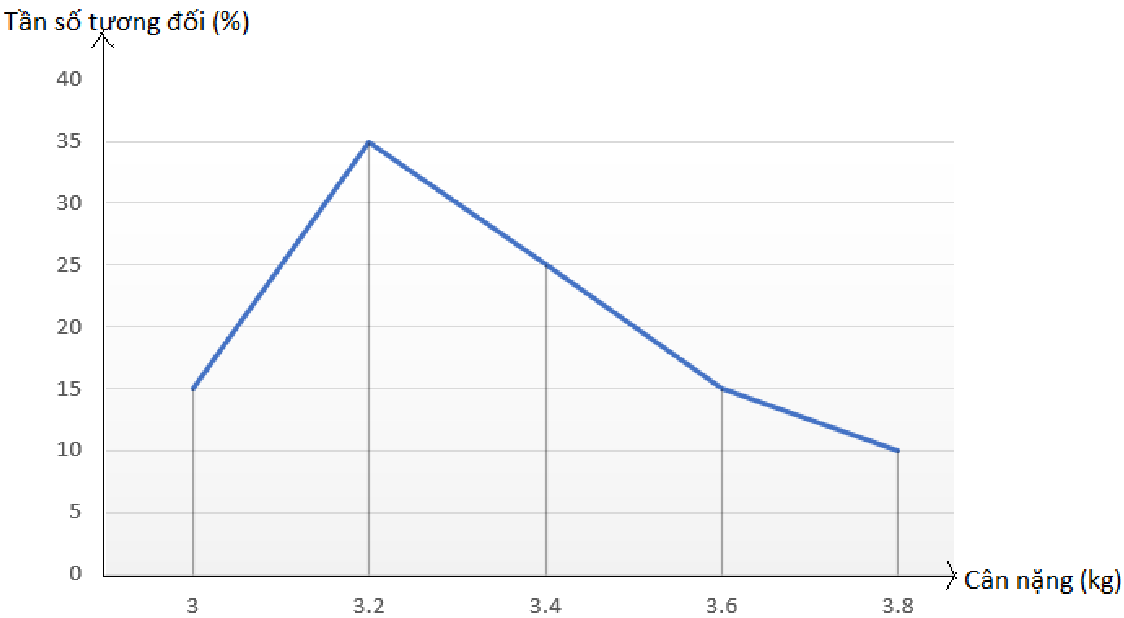
b)

• Biểu đồ cột:



Tần số tương đối của số trẻ sơ sinh theo cân nặng

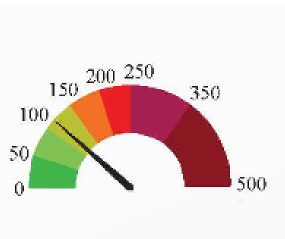
• Biểu đồ đoạn thẳng:



Tần số tương đối của số trẻ sơ sinh theo cân nặng

Bài 27. Hai bạn Hà và Hồng thống kê lại chỉ số chất lượng không khí (AQI) nơi mình ở tại thời điểm 12:00 mỗi ngày trong tháng 9/2022 ở bảng sau:

Chỉ số	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Tại nơi ở của Hà	12	8	6	4
Tại nơi ở của Hồng	16	6	5	3



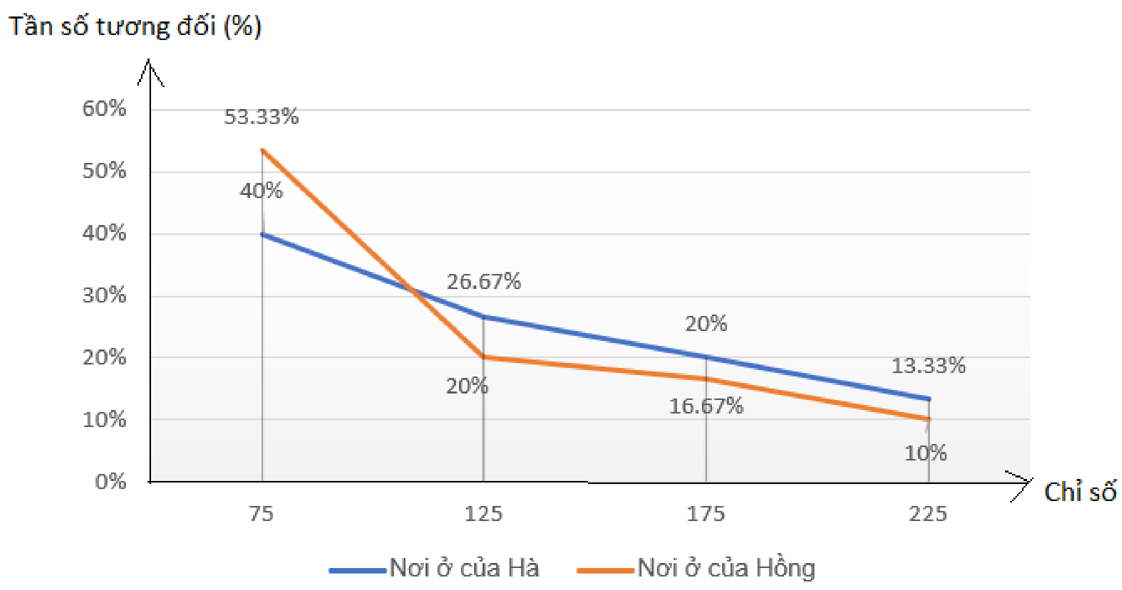
a) Hãy vẽ trên cùng một hệ trục hai biểu đồ dạng đoạn thẳng biểu diễn tần số tương đối cho chỉ số chất lượng không khí tại nơi ở của bạn Hà và tại nơi ở của bạn Hồng.

b) Chỉ số AQI từ 150 trở lên được coi là không lành mạnh. Dựa vào biểu đồ tần số tương đối trên, hãy so sánh tỉ lệ số ngày chất lượng không khí được coi là không lành mạnh ở mỗi khu vực.

Lời giải

a)

Chỉ số	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Tại nơi ở của Hà	40%	26,67%	20%	13,33%
Tại nơi ở của Hồng	53,33%	20%	16,67%	10%



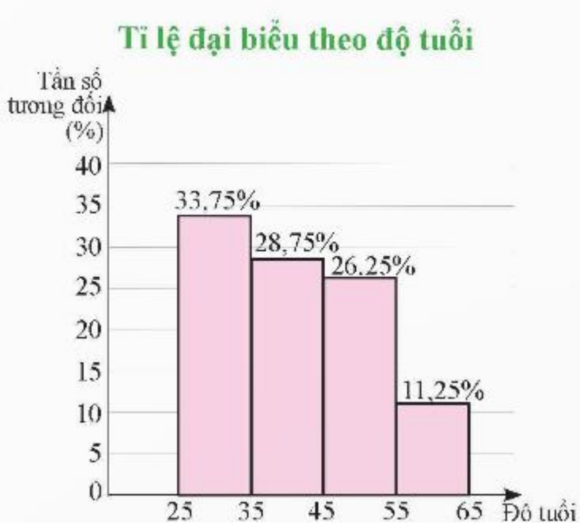
Tần số tương đối của chỉ số chất lượng không khí

b)

- Tại nơi ở của Hà có 6 + 4 = 10 ngày, chiếm $\frac{10}{30}.100\% = 33,33\%$.

- Tại nơi ở của Hồng có 5 + 3 = 8 ngày, chiếm $\frac{8}{30}.100\% = 26,67\%$.

Bài 28. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến dưới 35 tuổi.



a) Có bao nhiêu đại biểu dự hội nghị?

b) Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

c) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải

a) Có 54 : 33,75% = 160 đại biểu tham dự hội nghị

b) Bảng tần số ghép nhóm:

Độ tuổi (m)	[25; 35)	[35; 45)	[45; 55)	[55; 65)
Tần số	54	46	42	18

c) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng vì số đại biểu dưới 45 tuổi tham dự là:

33,75% + 28,75% = 62,5% > 50%.

Bài 29. Thời gian đi từ nhà đến trường (đơn vị: phút) của các bạn học sinh lớp 9C được ghi lại ở bảng sau:

9,5	13,9	5,6	13,2	10,3	15,1	19,5	14,1	11,4	19,7	15,1	11,1
16,6	7,2	18	11,6	6,2	6,2	16,7	7,8	17,7	7,7	7,7	5,5
18,2	7,4	19,8	19	5,2	18,3	14,7	14,1	19,6	7,2	7,2	12,5

a) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 5 phút đến dưới 9 phút và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.

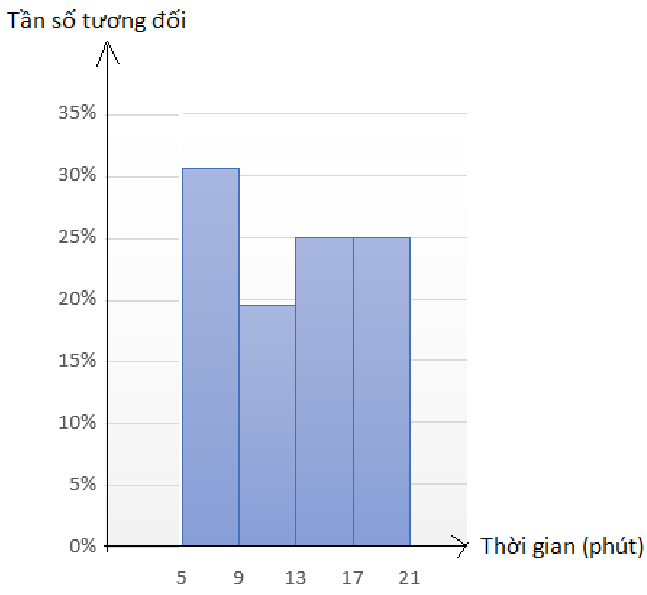
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng mô tả bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a)

Độ tuổi (phút)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)
Tần số	54	46	42	18
Tần số tương đối	30,56%	19,44%	25%	25%

b) Biểu đồ dạng cột:



Tần số tương đối của các bạn học sinh theo thời gian

Biểu đồ dạng đoạn thẳng: Học sinh tự vẽ

Bài 30. Một bác lái xe muốn ghi lại tổng độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình lái mỗi ngày trong vòng 1 tháng.

a) Hỏi bác lái xe có thể thu thập số liệu bằng cách nào?

b) Dưới đây là số liệu bác lái xe đã ghi lại được.

23,9	192,7	137,8	125,3	147,5	102,8	105,9	60,1	186,7	129,5
31,6	168,4	97,4	144,7	129	197,3	113,7	10,2	110,3	86,4
77,9	38,6	124,7	199,8	22,8	96,9	30,7	85,1	188,1	122,5

Hãy chia số liệu thành 5 nhóm, nhóm thứ nhất là từ 10 km đến dưới 50 km và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm. Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm.

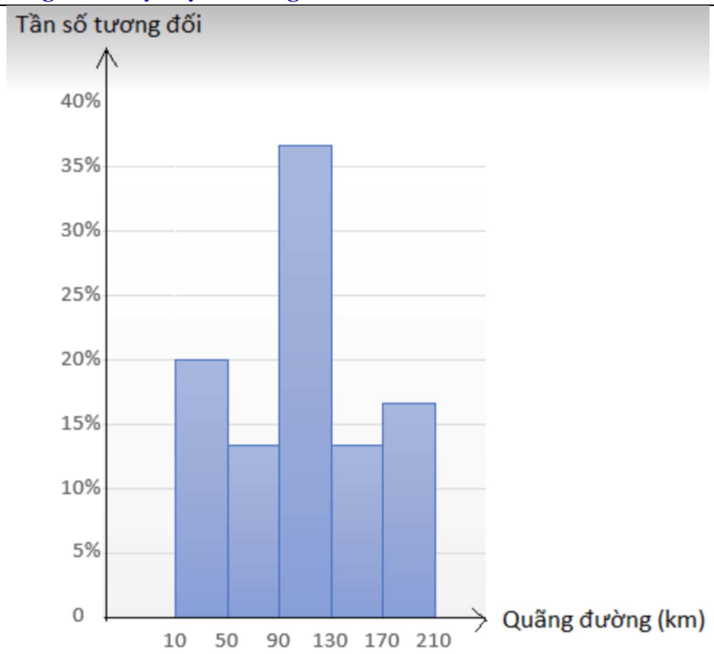
Lời giải

a) Bác lái xe có thể thu thập số liệu bằng cách dùng điện thoại di động đo quãng đường mà bác đi được thông qua các ứng dụng chỉ đường.

b) Bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm:

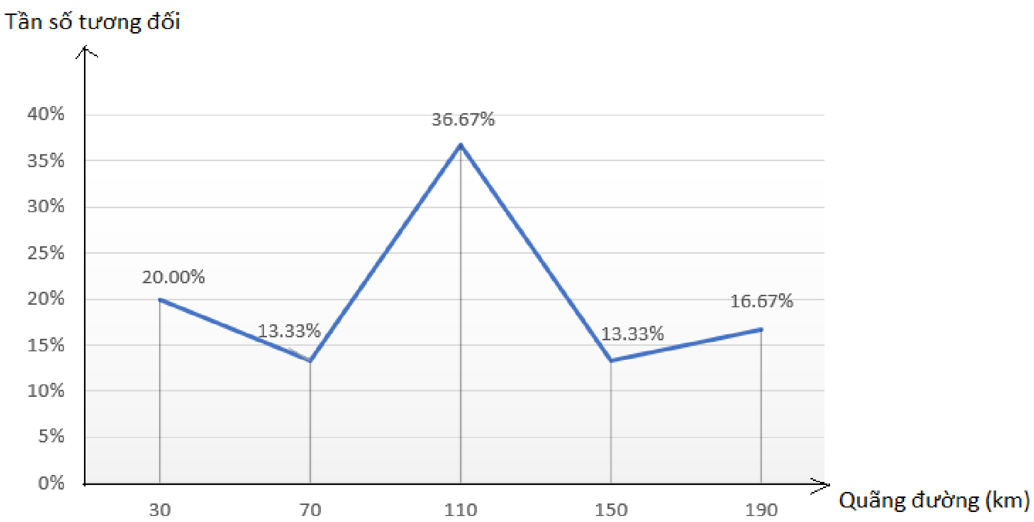
Quãng đường (X) (km)	[10; 50)	[50; 90)	[90; 130)	[130; 170)	[170; 210)
Tần số	6	4	11	4	5
Tần số tương đối	20%	13,33%	36,67%	13,33%	16,67%

Biểu đồ cột:



Tần số tương đối phụ thuộc vào quãng đường

Biểu đồ đoạn thẳng:



Tần số tương đối phụ thuộc vào quãng đường

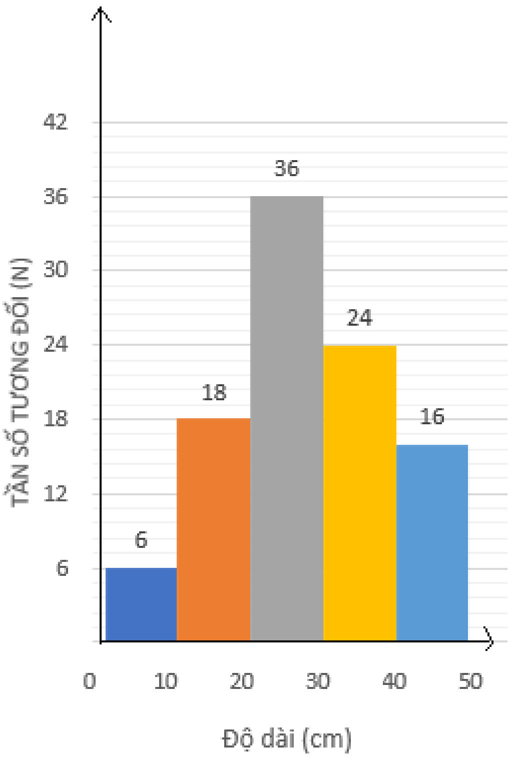
Bài 31. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 cây con ở vườn thí nghiệm, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Nhóm	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	Cộng
Tần số tương đối (%)	6	18	36	24	16	100

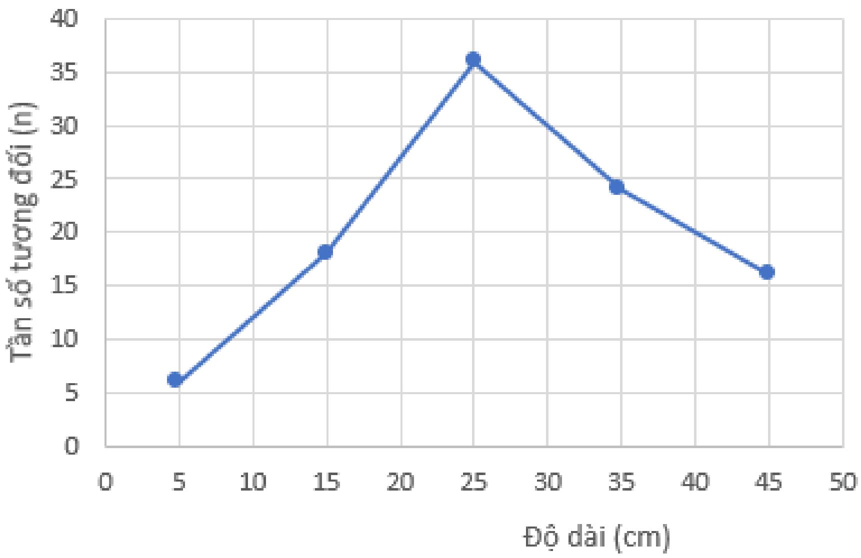
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm ở bảng trên.

Lời giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột có dạng:



Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng có dạng:



Bài 32. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 60 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120	118	118	121	124	128
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142	135	135	142	144	151
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151	157	155	159	151	155
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198	175	178	172	170	195

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau:

[100 ; 120), [120 ; 140), [140 ; 160), [160 ; 180), [180 ; 200).

a) Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Lời giải

a) Các nhóm [100 ; 120), [120 ; 140), [140 ; 160), [160 ; 180), [180 ; 200) lần lượt có tần số là: $n_1 = 6$, $n_2 = 15$, $n_3 = 27$, $n_4 = 9$, $n_5 = 3$.

Bảng tần số ghép nhóm:

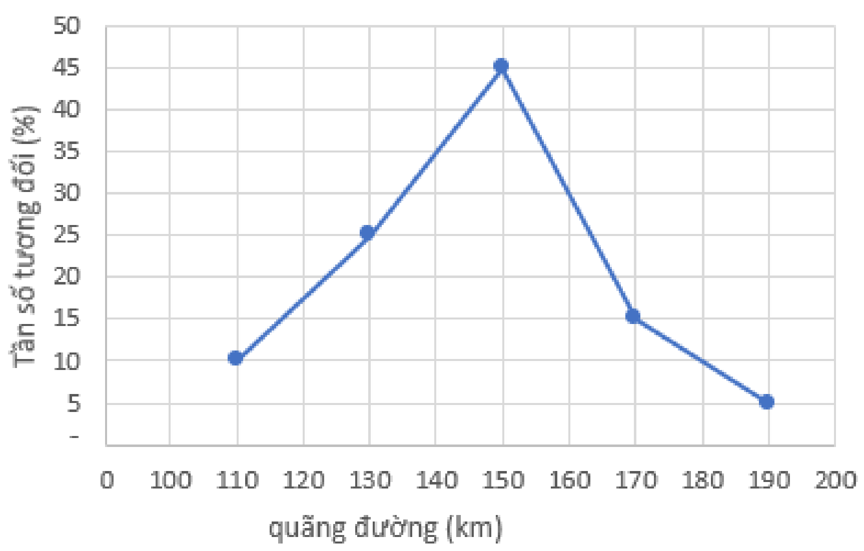
Nhóm	[100;120)	[120;140)	[140;160)	[160;180)	[180;200)
Tần số (n)	6	15	27	9	3

b) Các nhóm [100 ; 120), [120 ; 140), [140 ; 160), [160 ; 180), [180 ; 200) lần lượt có tần số tương đối là:

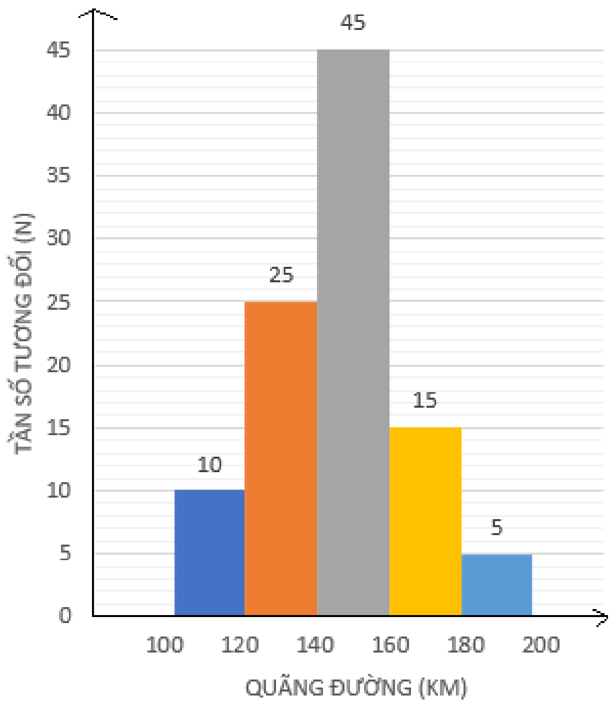
Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Nhóm	[100;120)	[120;140)	[140;160)	[160;180)	[180;200)
Tần số tương đối (%)	10	25	45	15	5

Biểu đồ dạng đường thẳng:



Biểu đồ dạng cột:



45
25
10
15
5
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI (N)
100
120
140
160
180
200
QUÃNG ĐƯỜNG (KM)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1. Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số	8	7	?	8	6	11

a) Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

b) Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là:

A. 6% **B.** 8% **C.**12% **D.**14%

c) Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể chọn loại biểu dồ nào sau đây?

A. Biểu đồ tranh. **B.** Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. **D.** Biểu đồ cột kép.

Lời giải

a) Chọn đáp án B

b) Chọn đáp án C

c) Chọn đáp án A

Câu 2. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường học của học sinh lớp 9A như sau:

Thời gian đến trường (phút)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu [10;20)?

A.10 **B.**15 **C.**20 **D.**30

Lời giải

Chọn đáp án B

Câu 3. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu sản phẩm mối. Người điều tra yêu cầu mỗi người được phỏng vấn cho điểm mẫu sản phẩm đó theo thang điểm là 100. Kết quả thống kê như sau:

50	60	62	64	71	73	70	70	70	75
75	52	55	69	80	75	75	78	79	73
55	72	71	85	82	90	78	78	75	75
65	85	87	77	81	79	99	75	70	72

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau: [50; 60), [60; 70), [80; 90), [90; 100).

a) Tần số ghép nhóm của nhóm [70; 80) là:

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.**23

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [50; 60) là:

A. 10% **B.** 12,5% **C.** 5% **D.** 15%

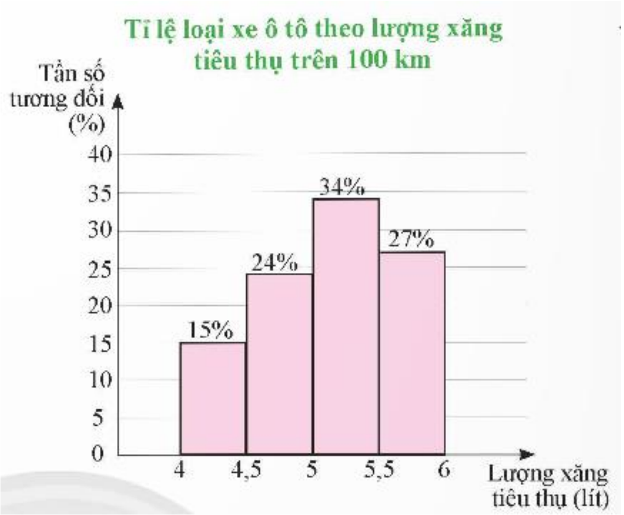
Lời giải

a) Chọn đáp án D vì ta đếm được số giá trị nằm trong khoảng từ 70 đến 79 là có 23 giá trị.

b) Chọn đáp án A vì ta đếm được số giá trị nằm trong khoảng từ 50 đến 59 là có 4 giá trị.

Tần số tương đối ghép nhóm là $\frac{4}{40}.100\% = 10\%$.

Câu 4. Một doanh nghiệp sản xuất xe ô tô khảo sát lượng xăng tiêu thụ trên 100 km của một số loại xe ô tô trên thị trường. Kết quả khảo sát 100 chiếc xe được biểu diễn trong hình bên.



a) Tần số tương đối của số lượng xe ô tô tiêu thụ dưới 5 lít xăng cho 100 km là

A. 24%. **B.** 39%. **C.** 61%. **D.** 76%.

b) Khoảng tiêu thụ xăng phổ biến nhất là

A. Từ 4 đến dưới 4,5 lít. **B.** Từ 4,5 đến dưới 5 lít.

C. Từ 5 đến dưới 5,5 lít. **D.** Từ 5,5 đến dưới 6 lít.

c) Trong tất cả những chiếc xe được khảo sát, có bao nhiêu chiếc xe tiêu thụ hết từ 5 đến dưới 5,5 lít xăng khi đi trên quãng đường 100 km?

A. 34. **B.** 27. **C.** 15. **D.** 24.

Lời giải

a) **Chọn B**

vì tần số tương đối của số lượng xe ô tô tiêu thụ dưới 5 lít xăng cho 100 km là: 15% + 24% = 39%.

b) **Chọn C**

vì lượng tiêu thụ ở khoảng này chiếm tỉ lệ cao nhất.

c) **Chọn A**

vì số xe cần tìm là: 100.34% = 34 (xe).

Câu 5. Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết pin của một số máy vi tính cùng loại được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian sử dụng pin (giờ)	[7,2; 7,4)	[7,4; 7,6)	[7,6; 7,8)	[7,8; 8)
Tần số	2	4	7	6

a) Cỡ mẫu của cuộc khảo sát là

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 22.

b) Số lượng máy tính có thời gian sử dụng từ 7,4 đến dưới 7,8 giờ là

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

c) Tỉ lệ máy tính có thời gian sử dụng từ 7,6 giờ trở lên là

A. 27,7%. **B.** 68,42%. **C.** 33,3% **D.** 72,3%.

Lời giải

a) **Chọn B**

vì có 2 + 4 + 7 + 6 = 19 giá trị.

b) **Chọn A**

vì số máy cần tìm là 4 + 7 = 11.

c) **Chọn B**

vì tỉ lệ cần tìm là: $\frac{7+6}{19}.100\% = 68,42\%$

Câu 6. Bảng dưới đây ghi lại cự li ném tạ (đơn vị: mét) của một vận động viên trước và sau một đợt tập huấn đặc biệt.

Cự li (m)	[20; 20,2)	[20,2; 20,4)	[20,4; 20,6)	[20,6; 20,8)	[20,8; 21)	[21; 21,2)
Tần số trước đợt tập huấn	3	5	5	2	1	0
Tần số sau đợt tập huấn	1	2	4	5	3	1

a) Tần số tương đối của vận động viên ném dưới 20,4 m trước khi tập huấn là

A. 18,75%. **B.** 25%. **C.** 31,25%. **D.** 50%.

b) Tần số tương đối của vận động viên ném từ 20,8 m trở lên sau khi tập huấn là

A. 20%. **B.** 25%. **C.** 30%. **D.** 35%.

c) Tần số tương đối của vận động viên ném từ 20,8 m trở lên sau khi tập huấn tăng thêm

A. 18,75%. **B.** 30,5%. **C.** 35%. **D.** 37,5%.

d) Tần số tương đối của vận động viên ném dưới 20,2 m sau khi tập huấn giảm đi

A. 12,5%. **B.** 15,5%. **C.** 35%. **D.** 37,5%.

Lời giải

a) Chọn D

vì tần số tương đối cần tìm là: $\frac{3+5}{3+5+5+2+1}.100\%=50\%$

b) Chọn B

vì tần số tương đối cần tìm là: $\frac{3+1}{1+2+4+5+3+1}.100\%=25\%$.

c) Chọn A

vì tần số tương đối của số lần vận động viên ném từ 20,8 m trở nên trước khi tập huấn là: $\frac{1+0}{3+5+5+2+1+0}.100\%=6,25\%$ so với sau tập huấn tăng 25% – 6,25% = 18,75%.

d) Chọn A

vì sau tập huấn, số vận động viên ném dưới 20,2 m giảm 3 – 1 = 2 vận động viên, chiếm $\frac{2}{16}.100\%=12,5\%$

CHƯƠNG 8
XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC XUẤT ĐƠN GIẢN

BÀI 1
PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

• Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một phép thử ngẫu nhiên, gọi tắt là *phép thử*.

• Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử (gọi tắt là tập tất cả các kết quả có thể của phép thử) được gọi là không gian mẫu của phép thử.

Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω.

Bài 1. Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Bạn Xuân lấy ra 1 viên bi từ hộp thứ nhất. Bạn Thu lấy ra 1 viên bi từ hộp thứ hai.

a) Phép thử của bạn Xuân có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

b) Phép thử của bạn Thu có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

Lời giải

a) Phép thử của bạn Xuân có 1 kết quả thể xảy ra.

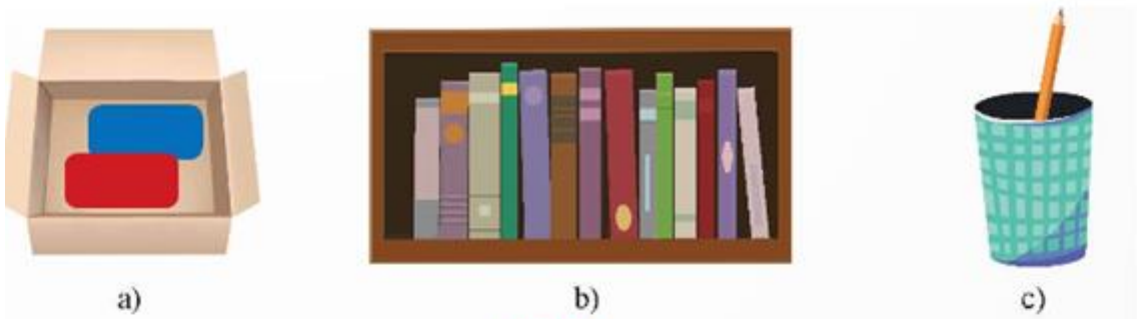
b) Phép thử của bạn Thu có 2 kết quả có thể xảy ra.

Bài 2. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

a) Chọn ra lần lượt hai tấm thẻ từ hộp có 2 tấm thẻ như hình 1a.

b) Chọn bất kì 1 quyển sách từ giá như hình 1b.

c) Chọn 1 cây bút chì từ ống bút như hình 1c.



Hình 1

Lời giải

a) Hoạt động này là phép thử ngẫu nhiên vì ta không thể biết được tấm đầu tiên ta lấy ra được màu gì nhưng ta có thể đoán được có 2 khả năng xảy ra.

b) Hoạt động này là phép thử ngẫu nhiên vì ta không thể biết được quyển sách nào được lấy đầu tiên và phép thử này có thể có nhiều kết quả xảy ra.

c) Hoạt động này không phải là phép thử ngẫu nhiên vì ta có thể biết được chắc chắn kết quả xảy ra.

Bài 3. Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp".

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

Lời giải

a) Các kết quả có thể có là: số 1, số 2, số 3, số 4, số 5, số 6, số 7, số 8, số 9, số 10, số 11, số 12.

b) Ω = {số 1, số 2, số 3, số 4, số 5, số 6, số 7, số 8, số 9, số 10, số 11, số 12}.

Bài 4. Xác định không gian mẫu của các phép thử sau:

a) Gieo 2 lần một đồng xu có 1 mặt xanh và 1 mặt đỏ.

b) Lấy ra 1 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1; 2; 3, xem số, trả lại hộp rồi lại lấy ra 1 quả bóng từ hộp đó.

Lời giải

a) Ω = {(xanh; đỏ), (đỏ; xanh)}.

b) $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$.

Bài 5. Cho phép thử gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng nhất. Giả sử kết quả của phép thử là con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 1 chấm, con xúc xắc thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm. Trong các biến cố sau, biến cố nào xảy ra, biến cố nào không xảy ra?


Hình 4

A: "Tổng số chấm xuất hiện lớn hơn 1";

B: "Tích số chấm xuất hiện là số chẵn";

C: "Hai mặt xuất hiện có cùng số chấm ".

Lời giải

- Biến cố A, B xảy ra.
- Biến cố C không xảy ra vì mặt một chấm khác mặt 6 chấm.

Bài 6. Một hộp có 4 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Trọng và bạn Thủy lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu phép thử

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Số ghi trên quả bóng của bạn Trọng lớn hơn số ghi trên quả bóng của bạn Thủy";

B: "Tổng các số ghi trên 2 quả bóng lấy ra lớn hơn 7".

Lời giải

a) Ω = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3)}.

b)

- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3).

- Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (4; 4).

Bài 7. Ba khách hàng M, N, P đến quầy thu ngân cùng một lúc. Nhân viên thu ngân sẽ lần lượt chọn ngẫu nhiên từng người để thanh toán.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "M được thanh toán cuối cùng";

B: "N được thanh toán trước P";

C: "M được thanh toán".

Lời giải

a) Ω = {(M; N; P), (M; P; N), (N; M; P), (N; P; M), (P; M; N), (P; N; M)}.

b) - Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (N; P; M), (P; N; M).

- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (M; N; P), (N; M; P), (N; P; M).

Bài 8. Một hộp chứa 1 quả bóng màu xanh, 1 quả bóng màu vàng và 1 quả bóng màu đỏ. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Hãy xác định không gian mẫu của phép thử ngẫu nhiên đó.

a) Lấy bất kì 1 quả bóng từ hộp.

b) Lấy đồng thời 3 quả bóng từ hộp.

c) Lấy lần lượt 3 quả bóng từ hộp một cách ngẫu nhiên.

Lời giải

a) Hoạt động này là phép thử ngẫu nhiên vì ta không thể biết trước kết quả và có thể có 3 kết quả có thể xảy ra.

Không gian mẫu Ω = { vàng; xanh; đỏ}.

b) Hoạt động này không phải là phép thử ngẫu nhiên vì ta biết trước được kết quả là sự xuất hiện đủ cả ba màu bóng là vàng; xanh; đỏ.

c) Hoạt động này là phép thử ngẫu nhiên vì ta không thể biết trước kết quả và có thể có 6 kết quả có thể xảy ra.

Không gian mẫu Ω = { (xanh; vàng; đỏ), (xanh; đỏ; vàng), (đỏ; xanh; vàng), (đỏ; vàng; xanh), (vàng; đỏ; xanh), (vàng; xanh; đỏ)}.

Bài 9. Bạn Minh Hiền viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Số được viết là số tròn chục";

B: "Số được viết là số chính phương".

Lời giải

a) $\Omega = \{X \mid 10 \le X \le 99; X \in N\}$.

b)

- Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.
- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 16; 25; 36; 49; 64; 81.

Bài 10. Trên giá có 1 quyển sách Ngữ văn, 1 quyển sách Mĩ thuật và 1 quyển sách Công nghệ. Bạn Hà và bạn Thúy lần lượt lấy ra ngẫu nhiên quyển sách từ giá.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Có 1 quyển sách Ngữ văn trong 2 quyển sách được lấy ra";

B: "Cả hai quyển sách lấy ra đều là sách Mĩ thuật";

C: "Không có quyển sách Công nghệ nào trong 2 quyển sách được lấy ra".

Lời giải

a) Ω = {(Ngữ văn; Mĩ thuật), (Ngữ văn; Công nghệ), (Mĩ thuật; Ngữ văn), (Mĩ thuật; Công nghệ), (Công nghệ; Mĩ thuật), (Công nghệ; Ngữ văn)}.

b)

- Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (Ngữ văn; Mĩ thuật), (Ngữ văn; Công nghệ), (Mĩ thuật; Ngữ văn), (Công nghệ; Ngữ văn).
- Không có kết quả thuận lợi nào cho biến cố B.
- Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố C là: (Ngữ văn; Mĩ thuật), (Mĩ thuật; Ngữ văn).

Bài 11. Bạn Trúc Linh giải một đề thi gồm có 3 bài được đánh số 1; 2; 3. Trúc Linh được chọn lần lượt các bài để giải theo một thứ tự ngẫu nhiên.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Việt giải bài 2 đầu tiên";

B: "Việt giải bài 1 trước bài 3".

Lời giải

a) $\Omega = \{(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)\}$.

b)

- Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (2; 1; 3), (2; 3; 1).
- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12. Một tấm bìa cứng hình tròn được chia thành ba hình quạt bằng nhau, đánh số 1;2;3 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm(H.8.1). Bạn Hiền quay tấm bìa hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử là bạn Hiền quay tấm bìa hai lần. Kết quả của phép thử là mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Lần 2 Lần 1	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

Không gian mẫu của phép thử là Ω=(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3) suy có 9 phần tử.

Bài 13. Một cửa hàng muốn tặng hai phần quà cho hai trong bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất trong tháng bằng cách rút thăm ngẫu nhiên. Việc rút thăm được tiến hành như sau: Nhân viên viết tên bốn khách hàng đó vào 4 lá phiếu để vào một chiếc hộp. Nhân viên rút ngẫu nhiên một lá phiếu trong hộp. Lá phiếu rút ra không trả lại vào hộp. Sau đó, nhân viên tiếp tục rút ngẫu nhiên một lá phiếu từ ba lá phiếu còn lại. Hai khách hàng có tên trong hai lá phiếu được rút ra là hai khách hàng được tặng quà. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử là: Một cửa hàng muốn tặng hai phần quà cho hai trong bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất trong tháng bằng cách rút thăm ngẫu nhiên. Nhân viên viết tên bốn khách hàng đó vào 4 lá phiếu để vào một chiếc hộp. Nhân viên rút ngẫu nhiên hai lá phiếu trong hộp.

Kết quả của phép thử là: Hai khách hàng có tên trong hai lá phiếu được rút ra là hai khách hàng được tặng quà.

b) Gọi 4 khách hàng lần lượt là 1,2,3,4

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như sau:

Lần 2 Lần 1	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Vì phiếu rút ra lần đầu không trả lại hộp. Nên không gian mẫu của phép thử là

Ω ={(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3)}

Vậy không gian mẫu có 12 phần tử.

Bài 14. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có hai con và quan sát giới tính của hai người con đó.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

a)Phép thử là chọn ngẫu nhiên gia đình có hai con và quan sát giới tính của hai người con.

Kết quả của phép thử là :

+Giới tính của con đầu: Trai (T) hoặc Gái (G)

+Giới tính của con thứ hai: Trai (T) hoặc Gái (G)

b)Không gian của phép thử:

Ω = {TT, TG, GT, GG} suy ra không gian mẫu có 4 phần tử.

(TT: Cả hai con đều là trai.

TG: Con đầu là trai, con thứ hai là gái.

GT: Con đầu là gái, con thứ hai là trai.

GG: Cả hai con đều là gái.)

Bài 15. Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số 1,2,3,4,5. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử: Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử:

- Lần rút thứ nhất: 5 kết quả có thể xảy ra(1,2,3,4,5)
- Lần rút thứ hai: 4 kết quả có thể xảy ra (vì sau lần rút thứ nhất, chit còn lại 4 thẻ trong hộp).

b)Mô tả không gian mẫu của phép thử:

Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Sử dụng cặp số(x,y) để mô tả kết quả với:

- x là số trên thẻ rút ra lần thứ nhất.
- y là số trên thẻ rút ra lần thứ hai.

Lần 2 Lần 1	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Vì tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Không gian mẫu:

$\Omega=\{(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,1);(2,3);(2,4);(2,5);(3,1);(3,2);(3,4);(3,5);(4,1);(4,2);(4,3);(4,5);(5,1);(5,2);$
$(5,3);(5,4)\}$

Vậy không gian mẫu có 20 phần tử.

Bài 16. Có hai nhóm học sinh: Nhóm I có ba học sinh nam là Huy, Sơn, Tùng; nhóm II có ba học sinh nữ là Hồng, Phương, Linh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh từ mỗi nhóm.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử: Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh từ mỗi nhóm.

Kết quả của phép thử:

- Lần chọn thứ nhất: 3 kết quả có thể xảy ra(Huy, Sơn, Tùng)
- Lần chọn thứ hai: 3 kết quả có thể xảy ra(Hồng, Phương, Linh)

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử:

Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Sử dụng cặp tên (x,y) để mô tả kết quả với:

- x là tên học sinh được chọn từ nhóm I
- y là tên học sinh được chọn từ nhóm II

Lần 2 Lần 1	Huy	Sơn	Tùng
Hồng	(Hồng, Huy)	(Hồng, Sơn)	(Hồng, Tùng)
Phương	(Phương, Huy)	(Phương, Sơn)	(Phương, Tùng)
Linh	(Linh, Huy)	(Linh, Sơn)	(Linh, Tùng)

Không gian mẫu: Ω = {(Hồng, Huy); (Hồng, Sơn); (Hồng, Tùng); (Phương, Huy); (Phương, Sơn); (Phương, Tùng); (Linh, Huy); (Linh, Sơn); (Linh, Tùng)}

Vậy không gian mẫu có 9 phần tử.

Bài 17. Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử: Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

Kết quả của phép thử: Có 3 vị trí trên ghế dài, mỗi vị trí có thể được xếp bởi 1 trong 3 bạn.

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử:

Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Sử dụng kí hiệu M,V,L để mô tả tên của mỗi bạn, với M là Mai; V là Việt; L là Lan.

Không gian mẫu: Ω = {(Mai, Việt, Lan);(Mai, Lan, Việt);(Việt, Mai, Lan);(Việt, Lan, Mai);

(Lan, Mai, Việt);(Lan, Việt, Mai)}

Vậy không gian mẫu có 6 phần tử.

BÀI 2
XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN ĐẾN PHÉP THỬ

1. Kết quả thuận lợi cho một biến cố liên quan tới phép thử

Cho phép thử T. Xét biến cố E, ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của E tùy thuộc vào kết quả của phép thử T. Kết quả phép thử T làm cho biến cố E xảy ra gọi là **kết quả thuận lợi.**

2. Xác suất của biến cố

Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra của một phép thử T là đồng khả năng.

Khi đó, xác suất của biến cố E, kí hiệu $P(E)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố và tổng số kết quả có thể xảy ra.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Trong đó:

+ $n(E)$ là số các kết quả thuận lợi cho E.

+ $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra.

Chú ý: Để tính xác suất của biến cố E, ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Xác định $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra.
- **Bước 2:** Kiểm tra tính đồng khả năng của các kết quả.
- **Bước 3:** Kiểm đếm số các kết quả thuận lợi cho biến cố E.
- **Bước 4:** Tính xác suất của biến cố E bằng công thức $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}$

Bài 1. Các kết quả của một phép thử sau có cùng khả năng xảy ra không? Tại sao?

a) Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất.

b) Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ một hộp có 10 viên bi giống nhau được đánh số từ 1 đến 10.

c) Lấy ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ một hộp chứa 2 tấm thẻ ghi số 5 và 5 tấm thẻ ghi số 2 và xem số của nó

Lời giải

a) Các kết quả của phép thử có cùng khả năng xảy ra vì khả năng gieo ra mặt sấp và ngửa là như nhau.

b) Các kết quả của phép thử có cùng khả năng xảy ra vì các viên bi giống nhau nên khả năng được lựa chọn của các viên bi là như nhau.

c) Các kết quả của phép thử không cùng khả năng xảy ra vì không thể khẳng định các thẻ lấy ra có cùng khối lượng, kích thước.

Bài 2. Kết quả của mỗi phép thử sau có đồng khả năng không? Tại sao?

a) Rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10.

b) Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ danh sách lớp.

c) Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ một hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 8 viên bi trắng rồi quan sát màu của nó, biết rằng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng.

Lời giải

a) Do các tấm thẻ là cùng loại nên có cùng khả năng được chọn. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

b) Do mỗi học sinh có những điều kiện trạng thái khác nhau nên các kết quả của phép thử là không đồng khả năng.

c) Do mỗi viên bi đều có khối lượng và kích thước nên có cùng khả năng được chọn. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

Bài 3. Đội văn nghệ của lớp 9A có 3 bạn nam và 3 bạn nữ. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Xét biến cố sau: “Trong hai bạn được chọn ra, có một bạn nam và một bạn nữ”.

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố ngẫu nhiên nói trên?

Lời giải

Bước 1: Kiểm tra tính đồng khả năng đối với kết quả phép đo thử

Phép thử này có kết quả có thể xảy ra là đồng khả năng.

Bước 2: Đếm số kết quả có thể xảy ra

Trong trường hợp này, liệt kê đếm được 15 kết quả có thể xảy ra.

Bước 3: Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố

Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố

Bước 4: Lập tỷ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố và tổng số kết quả có thể xảy ra $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

Bài 4. Hình bên dưới mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, ..., 12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.

Xét phép thử "Quay đĩa tròn một lần".

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số ghi ở hình quạt mà chiếc kim chỉ vào khi đĩa dừng lại.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A: " Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 3".

c) Tìm tỉ số giữa các kết quả thuận lợi cho biến cố A và số phần tử của tập hợp Ω.

d) tính xác suất của biến cố D: "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố".

Lời giải

a) Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 3, 6, 9, 12.

c) Tỉ số $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

d) Các kết quả thuận lợi cho biến cố D là: 2, 3, 5, 7, 11.

Vậy $P(D)=\frac{5}{12}$.

Bài 5. Nền ẩm thực Việt Nam được đánh giá cao trên thế giới, thu hút nhiều người sành ăn trong nước và quốc tế. 16 món ngon đặc sản đến từ các tỉnh, thành phố được chọn ra như sau: cốm Vòng (Hà Nội), chả mực (Quảng Ninh), bánh đậu xanh (Hải Dương), bún cá cay (hải phòng), gà đồi Yên Thế (Bắc Giang), nộm da trâu (Sơn La), thắng cố (Lào Cai), miến lươn (Nghệ An), cơm hến (Huế), cá mực nhảy (Hà Tĩnh), bánh mì Hội An (Quảng Nam), sủi cảo (Thành phố Hồ Chí Minh), bánh canh Trảng Bàng (Tây Ninh), cá lóc nướng (Cần Thơ), cơm dừa (Bến Tre), gỏi cá (Kiên Giang).

Chọn ngẫu nhiên một trong 16 món ngon đó. Tính xác suất mỗi biến cố sau:

a) S: "Món ngon thuộc miền Bắc";

b) T: "Món ngon thuộc miền Trung";

c) U: "Món ngon thuộc miền Nam".

Lời giải

a) Có 7 biến cố thuận lợi cho biến cố S là: cốm Vòng, chả mực, bánh đậu xanh, bún cá cay, gà đồi Yên Thế, nộm da trâu, thắng cố.

Vậy $P(S)=\frac{7}{16}$.

b) Có 4 biến cố thuận lợi cho biến cố T là: miến lươn, cơm hến, cá mực nhảy, bánh mì Hội An.

Vậy $P(T)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

c) Có 5 biến cố thuận lợi cho biến cố U là: sủi cảo, bánh canh Trảng Bàng, cá lóc nướng, cơm dừa, gỏi cá.

Vậy $P(U)=\frac{t}{16}$.

Bài 6. Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.

Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp".

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.

b) Viết không gian mẫu phép thử đó.

c) Tính xác suất biến cố: "Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1".

Lời giải

a) Các kết quả có thể xảy ra là: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

b) Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

c) Có 3 kết quả thuận lợi là: 1, 8, 15

Vậy $P(T)=\frac{3}{20}$.

Bài 7. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1 000.

a) Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra trong phép thử trên?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số tự nhiên viết ra chia hết cho 100";

B: "Số tự nhiên viết ra là lập phương của một số tự nhiên".

Lời giải

a) Số kết quả có thể xảy ra là: (999 – 500) : 1 + 1 = 500 (số).

b) Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 500, 600, 700, 800, 900.

Vậy $P(A)=\frac{5}{500}=\frac{1}{100}$.

Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 512, 729.

Vậy $P(B)=\frac{2}{500}=\frac{1}{250}$.

Bài 8. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất các biến cố sau:

a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 27”.

b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51”.

Lời giải

a) Kết quả thuận lợi cho biến cố là những số từ 1 đến 26.

Có 26 kết quả thuận lợi cho biến cố.

Vậy $P=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$.

b) Kết quả thuận lợi cho biến cố là những số từ 20 đến 50.

Có (50 – 20) : 1 + 1 = 31 kết quả thuận lợi cho biến cố.

Vậy $P=\frac{31}{52}$.

Bài 9. Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 6 bạn, trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C) và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện của trường.

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra trong phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Bạn được chọn là bạn nữ”;

B: “Bạn được chọn thuộc lớp 9A”.

Lời giải

a) Các kết quả có thể xảy ra là: Trung, Quý, Việt, An, Châu, Hương.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: An, Châu, Hương.

Vậy $P\left(A\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: Trung, Quý, An.

Vậy $P\left(B\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Bài 10. Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hai điểm A, B được tô màu đỏ, ba điểm C, D, E được tô màu xanh. Bạn Châu chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ và một điểm tô màu xanh (trong năm điểm đó) để nối thành một đoạn thẳng.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Châu thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

P: “Trong hai điểm chọn ra, có điểm A”;

Q: “Trong hai điểm chọn ra, không có điểm C”.

Lời giải

a) Các cách chọn có thể có là: A và C, A và D, A và E, B và C, B và D, B và E.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố P là: A và C, A và D, A và E.

Vậy $P\left(P\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố Q là: A và D, A và E, B và D, B và E.

Vậy $P\left(Q\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Bài 11. Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Trúc Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Trúc Linh thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

R: "Trong 2 bông hoa được chọn, có đúng 1 bông hoa màu đỏ";

T: "Trong 2 bông hoa được chọn, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ".

Lời giải

a) Các cách chọn có thể có là: đỏ 1 và vàng, đỏ 2 và vàng, đỏ 3 và vàng, đỏ 1 và đỏ 2, đỏ 2 và đỏ 3, đỏ 1 và đỏ 3.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố R là: đỏ 1 và vàng, đỏ 2 và vàng, đỏ 3 và vàng.

Vậy $P\left(R\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Có tất cả 4 kết quả thuận lợi cho biến cố T.

Vậy $P\left(T\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12. Bạn Tùng gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau:

E: "Cả hai lần gieo con xúc xắc đều xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố"

F: "Cả hai lần gieo con xúc xắc đều không xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn"

a) Phép thử là gì?

b) Giả sử số chấm xuất hiện trên con xúc xắc trong lần gieo thứ nhất, thứ hai tương ứng là 2 và 5 chấm. Khi đó, biến cố nào xảy ra? Biến cố nào không xảy ra?

Lời giải

a) Phép thử là: gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần.

b) Xác định biến cố xảy ra:

• Biến cố E: Để biến cố E xảy ra, cả hai lần gieo con xúc xắc đều phải xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố.

- Lần gieo thứ nhất: 2 (số chẵn) là số nguyên tố
- Lần gieo thứ hai: 5 là số nguyên tố

Vậy biến cố E xảy ra.

• Biến cố F: Để biến cố F xảy ra. Cả hai lần gieo con xúc xắc đều không xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn.

- Lần gieo thứ nhất: 2 (số chẵn).
- Lần gieo thứ hai: 5 (số lẻ).

Vậy biến cố F không thể xảy ra.

Bài 13. Bạn Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng hai quả cầu gồm một quả màu đen và một quả màu trắng, có cùng khối lượng và kích thước. Bạn Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A, B, C.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Xét các biến cố sau:

E:"Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu đen"

F:"Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A".

Hãy mô tả các kết quả thuận lợi cho hai biến cố E và F.

Lời giải

a) Phép thử có hai hành động độc lập:

- Hành động 1:

+ Lấy được quả màu đen.

+ Lấy được quả màu trắng.

- Hành động 2:

+ Rút được tấm thẻ A.

+ Rút được tấm thẻ B.

+ Rút được tấm thẻ C.

Do đó, không gian mẫu của phép thử có 6 kết quả có thể xảy ra.

Không gian mẫu:

Ω = {(Đen, A); (Đen, B); (Đen, C); (Trắng, A); (Trắng, B); (Trắng, C)}

b) Mô tả các kết luận thuận lợi cho biến cố:

E: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu đen"

Các kết quả thuận lợi cho biến cố E là: (Đen, A); (Đen, B); (Đen, C)

F: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A".

Các kết quả thuận lợi cho biến cố F là: (Trắng, B); (Trắng, C).

Bài 14. Bạn An gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Bạn Trung tung một đồng xu cân đối và đồng chất. So sánh khả năng xảy ra của các biến cố sau:

A: "An gieo được mặt có chẵn chấm";

B: "An gieo được mặt có 2 chấm";

C: "Trung tung được mặt sấp".

Lời giải

- Số kết quả có thể xảy ra với phép thử của An là 6 kết quả.

- Số kết quả có thể xảy ra với phép thử của Trung là 2 kết quả.

- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 2 chấm; 4 chấm; 6 chấm.

Do đó khả năng xảy ra của biến cố A là: $\frac{3}{6}.100\% = 50\%$

- Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 2 chấm.

Do đó khả năng xảy ra của biến cố B là: $\frac{1}{6}.100\% \approx 16,67\%$

- Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố C là: mặt sấp.

Do đó khả năng xảy ra của biến cố C là: $\frac{1}{2}.100\% = 50\%$

Vậy khả năng xảy ra của biến cố A và C là bằng nhau và lớn hơn khả năng xảy ra của biến cố B.

Bài 15. Một hộp chứa 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số 1; 4; 7; 9. Bạn Khuê và bạn Hương lần lượt mỗi người lấy ra 1 tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ";

B: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ";

C: "Số ghi trên tấm thẻ của bạn Khuê nhỏ hơn số ghi trên tấm thẻ của bạn Hương".

Lời giải

Do 4 tấm thẻ là cùng loại nên các thẻ có cùng khả năng được chọn. Số cách lấy có thể có là: (1; 4), (1; 7), (1; 9), (4;1), (4; 7), (4; 9), (7; 1), (7; 4), (7; 9), (9; 1), (9; 4); (9; 7) nên không gian mẫu có 12 cách.

- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (1; 7), (1; 9), (7; 1), (9; 1), (7; 9), (9; 7).

Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (1; 4), (4; 1), (7; 9), (9; 7), (4; 9), (9; 4).

Xác suất biến cố B: $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố C là: (7; 1), (7; 4), (4; 1), (9; 1), (9; 4), (9; 7)

Xác suất biến cố C: $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Bài 16. Bạn Thắng có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n. Bạn Thắng rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số là 0,18. Hỏi bạn Thắng có bao nhiêu tấm thẻ?

Lời giải

Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố : "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số là 0,18" là: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Vậy Thắng có số tấm thẻ là:

$P = \frac{9}{n} = 0{,}18$

Suy ra n = 9 : 0,18 = 50 (tấm thẻ).

Bài 17. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét hai biến cố sau:

A: "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm";

B: "Tổng số chấm trên hai con xúc xắc lớn hơn 8".

Biến cố nào có khả năng xảy ra cao hơn?

Lời giải

Có 36 kết quả có thể xảy ra là $\Omega = \{(i; j) \mid 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6, i; j \in N\}$.

Vì xúc xắc cân đối và đồng chất nên nó cùng khả năng xảy ra.

- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 1 chấm và 1 chấm, 2 chấm và 2 chấm, 3 chấm và 3 chấm, 4 chấm và 4 chấm, 5 chấm và 5 chấm, 6 chấm và 6 chấm.

Xác suất xảy ra biến cố A là: $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 3 chấm và 6 chấm, 6 chấm và 3 chấm, 4 chấm và 6 chấm, 6 chấm và 4 chấm, 5 chấm và 6 chấm, 6 chấm và 5 chấm, 4 chấm và 5 chấm, 5 chấm và 4 chấm.

Xác suất xảy ra biến cố B là: $P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Do $\frac{2}{9} > \frac{1}{6}$ nên biến cố B có khả năng xảy ra cao hơn.

Bài 18. Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 3; 5; 6; 7; 9.

Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 3";

B: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ lớn hơn 13";

Lời giải

a) $\Omega = \{(3; 5), (3; 6), (3; 7), (3;9), (5; 6), (5; 7), (5; 9), (6; 7), (6; 9), (7; 9)\}$.

Suy ra $n(\Omega) = 10$ cách.

Do 5 tấm thẻ là cùng loại nên các thẻ có cùng khả năng xảy ra.

- Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (3; 5), (3; 6), (3; 7), (3;9), (5; 6), (5; 9), (6; 7), (6; 9), (7; 9).

Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{9}{10} = 0,9$

- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (5; 9), (6; 9), (7; 9).

Xác suất biến cố B: $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$

Bài 19. Một chiếc hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Dung lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từng viên bi từ trong hộp cho đến khi hết bi.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Viên bi màu xanh được lấy ra cuối cùng";

B: “Viên bi màu trắng được lấy ra trước viên bi màu đỏ”;

C: “Viên bi lấy ra đầu tiên không phải là bi màu trắng”;

Lời giải

a) Ω = {(xanh; đỏ; trắng), (xanh; trắng; đỏ), (trắng; xanh; đỏ), (trắng; đỏ; xanh), (đỏ; xanh; trắng), (đỏ; trắng; xanh)} suy ra $n(\Omega)$ = 6 cách.

Do 3 viên bi có cùng kích thước và khối lượng nên chúng có cùng khả năng xảy ra.

- Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: (trắng; đỏ; xanh), (đỏ; trắng; xanh).

Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (xanh; trắng; đỏ), (trắng; xanh; đỏ), (trắng; đỏ; xanh).

Xác suất biến cố B: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố C là: (xanh; đỏ; trắng), (xanh; trắng; đỏ), (đỏ; xanh; trắng), (đỏ; trắng; xanh).

Xác suất biến cố C: $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Bài 20. Một túi chứa 3 viên bi màu xanh và một số viên bi màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Luân lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Biết rằng xác suất của biến cố “Lấy được viên bi màu xanh” là 0,6. Hỏi trong túi có tổng bao nhiêu viên bi?

Lời giải

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố : “Lấy được viên bi màu xanh” là: viên bi xanh 1; viên bi xanh 2; viên bi xanh 3. Vậy trong túi có tổng bao nhiêu viên bi là:

$P = \frac{3}{n} = 0,6$ suy ra n = 3 : 0,6 = 5 (viên bi).

Bài 21. Cho hai túi I và II, mỗi túi chứa ba tấm thẻ được ghi các số 2; 3; 7. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: “Số tạo thành chia hết cho 4”

b) B: “Số tạo thành là số nguyên tố”

Lời giải

Mỗi túi có 3 thẻ nên có 3. 3 = 9 kết quả có thể xảy ra khi rút.

Vậy không gian mẫu có 9 phần tử.

Ω = {(2, 2); (2, 3); (2, 7); (3, 2); (3, 3); (3, 7); (7, 2); (7, 3); (7, 7)}

a) A: "Số tạo thành chia hết cho 4”

Trong 9 kết quả có thể xảy ra, có 2 kết quả thỏa mãn điều kiện trên:

(3, 2); (7, 2)

Xác suất của biến cố A: $P(A) = \frac{2}{9}$

b) B:"Số tạo thành là số nguyên tố"

Trong 9 kết quả có thể xảy ra, có 3 kết quả thỏa mãn điều kiện trên:

(2, 3); (3, 7); (7, 3)

Xác suất của biến cố B: $P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

Bài 22. Chon ngẫu nhiên một gia đình có hai con. Giả thiết rằng biến cố "Sinh con trai" và biến cố "Sinh con gái" là đồng khả năng. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Gia đình đó có cả con trai và con gái"

B: "Gia đình đó có con trai"

Lời giải

A: "Gia đình đó có cả con trai và con gái"

- Có 4 trường hợp (Trai, Trai); (Trai, Gái); (Gái, Trai); (Gái, Gái)
- Chỉ có hai trường hợp thỏa mãn: (Trai, Gái); (Gái, Trai)

Xác suất: $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

B: "Gia đình đó có con trai"

- Có 4 trường hợp (Trai, Trai); (Trai, Gái); (Gái, Trai); (Gái, Gái)
- Chỉ có 1 trường hợp thỏa mãn: (Trai, Trai)

Xác suất $P(B)=\frac{1}{4}$

Bài 23. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Có đúng 1 con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm"

F: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm"

G: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 6"

Lời giải

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II

Ta có khoogn gian mẫu: n(Ω) = 6. 6 = 36

*E: "Có đúng 1 con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm"

- Xúc sắc I xuất hiện mặt 6 chấm, xúc xắc II có thể xuất hiện 5 khả năng suy ra 1. 5 = 5
- Xúc sắc II xuất hiện mặt 6 chấm, xúc xắc I có thể xuất hiện 5 khả năng suy ra 1. 5 = 5

suy ra n(E) = 5+ 5 = 10

Do đó xác suất $P(E)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

*F: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm"

- Trường hợp có 1 xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm suy ra 1. 5+ 5. 1 = 10 khả năng
- Trường hợp 2, cả hai xúc xắc đều là 6 chấm suy ra có 1. 1 khả năng

suy ra n(F) = 10+ 1 = 11

Do đó xác suất $P(F)=\frac{11}{36}$

* G:"Tích của hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 6"

Những trường hợp tích hai số chấm xuất hiện trên con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 6 là: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (5, 1)

Suy ra n(G) = 12

Do đó xác suất $P(G)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

Bài 24. Bạn An gieo một đồng xu cân đối và bạn Bình rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1, 2, 3, 4, 5. Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Rút được tấm thẻ ghi số lẻ"

F: "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp"

G: "Rút được tấm thẻ ghi số 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa"

Lời giải

Bạn An gieo một đồng xu cân đối và bạn Bình rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1, 2, 3, 4, 5 , suy ra n(Ω) = 2. 5 = 10

*E: "Rút được tấm thẻ ghi số lẻ"

- Đồng xu được gieo có thể xuất hiện mặt sấp hoặc lẻ, tấm thẻ được rút có 3 kết quả có thể (1, 3, 5)

suy ra n(E) = 2. 3 = 6

Do đó xác suất $P(E)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

* F: "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp"

- Tấm thẻ được rút là số chẵn nên có 2 kết quả có thể xảy ra (2, 4); đồng xu xuất hiện mặt sấp

suy ra n(F) = 2. 1 = 2

Do đó xác suất $P(F)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

* G:"Rút được tấm thẻ ghi số 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa"

- Rút được tấm thẻ số 5 => có 1 khả năng xảy ra; đồng xu có thể xuất hiện mặt sấp hoặc ngửa.

- Đồng xu xuất hiện mặt ngửa => có 1 khả năng; tấm thẻ được rút có 5 khả năng có thể xảy ra.

Suy ra n(G) = 1. 2+ 1. 5 = 7

Do đó xác suất $P(G)=\frac{7}{10}$

Bài 25. Có hai túi I và II mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên tấm thẻ với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Kết quả là một số lẻ"

B: "Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố"

Lời giải

Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ => n(Ω) = 4. 4 = 16

A: "Kết quả là một số lẻ"

Tích hai số là một số lẻ => hai số phải đều là số lẻ

Suy ra túi I có 2 khả năng(1, 3); túi II có 2 khả năng(1, 3)

Suy ra n(A) = 2. 2 = 4

Do đó xác suất $P\left(A\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

B:"Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố"

Tích hai số là 1, suy ra hai số phải giống nhau và đều là 1.

Tích là một số nguyên tố => có 5 khả năng xảy ra (1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (3, 1)

Suy ra n(B) = 1. 1+ 5 = 6

Do đó xác suất $P\left(B\right)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

Bài 26. Có hai túi đựng các tấm thẻ. Túi I đựng 4 tấm thẻ ghi các chữ cái TT, TH, HT và HH. Túi II đựng 2 tấm thẻ ghi các chữ cái T và H.

Từ mỗi túi rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ rồi ghép hai thẻ lại với nhau để được ba chữ cái, trong đó thẻ hai chữ cái đặt trước, chẳng hạn tấm thẻ TT ghép với tấm thẻ H được ba chữ cái TTH. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Trong ba chữ cái, có hai chữ H và một chữ T"

b) F: "Trong ba chữ cái, có nhiều nhất hai chữ T"

Lời giải

Từ mỗi túi rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ rồi ghép hai thẻ lại với nhau để được ba chữ cái

Suy ra n(Ω) = 4.2 = 8 phần tử

a) E: "Trong ba chữ cái, có hai chữ H và một chữ T"

Rút từ túi I để được 2 chữ H => 1 khả năng có thể

Rút từ túi II để được chữ T => 1 khả năng có thể

Suy ra n(E) = 1.1 = 1

Do đó xác suất $P\left(E\right)=\frac{1}{8}$

b) F: "Trong ba chữ cái, có nhiều nhất hai chữ T"

*Trường hợp có 1 chữ T

- Rút từ túi I, có 2 khả năng có thể (TH, HT); rút từ túi II có 1 khả năng có thể xảy ra (H) , suy ra 2.1 = 2 khả năng

- Rút từ túi I thẻ HH, rút túi II thẻ T , suy ra 1.1 khả năng

Suy ra có 2 + 1 = 3 khả năng để trong ba chữ cái rút được một chữ T

*Trường hợp có 2 chữ T

- Rút túi I, có 2 khả năng có thể (TH, HT); rút từ túi II có 1 khả năng có thể xảy ra (T), suy ra 2.1 = 2 khả năng

- Rút từ túi I thẻ TT, rút túi II thẻ H, suy ra 1.1 khả năng

Suy ra có 2 + 1 = 3 khả năng

Suy ra n(F) = 3 + 3 = 6

Do đó xác suất $P(F)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Bài 27. Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

G: "Không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm"

H: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc I là số lẻ và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc II lớn hơn 4"

K: "Số chấm xuất hiện trên cả hai con xúc xắc lớn hơn 2"

Lời giải

n(Ω) = 6.6 = 36

G: "Không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm"

- Xúc xắc I có 5 khả năng (1, 2, 3, 4, 5); xúc sắc II có 5 khả năng (1, 2, 3, 4, 5)

suy ra n(G) = 5.5 = 25

Do đó xác suất $P(G)=\frac{25}{36}$

H: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc I là số lẻ và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc II lớn hơn 4"

- Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc I là số lẻ => có 3 khả năng xảy ra (1, 3, 5)

- Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc II lớn hơn 4 => có 2 khả năng (5, 6)

suy ra n(H) = 3.2 = 6

Do đó xác suất $P(H)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Bài 28. Trên một dãy phố có ba quán ăn A, B, C. Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn để ăn trưa.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau/:

E: "Hai bạn cùng vào một quán"

F: "Cả hai bạn không chọn quán C"

G: "Có ít nhất một bạn chọn quán B"

Lời giải

a) Hai bạn Văn và Hải mỗi người có ba lựa chọn, suy ra có 3.3 = 9 kết quả.

Vậy n(Ω) = 9 phần tử

b) * E: "Hai bạn cùng vào một quán"

Có 3 trường hợp: (A, A), (B, B), (C, C)

Do đó xác suất $P(E)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

* F: "Cả hai bạn không chọn quán C"

Có 4 trường hợp: (A, A);(A, B);(B, A);(B, B)

Do đó xác suất $P\left(F\right)=\dfrac{4}{9}$

* G: "Có ít nhất một bạn chọn quán B"

Có ít nhất 1 bạn chọn quán B , suy ra có thể có 2 bạn cùng chọn quán B.

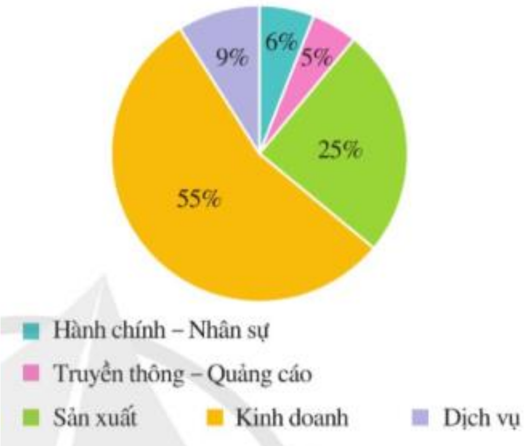
- Có 1 bạn chọn quán B, bạn còn lại có 2 lựa chọn , suy ra có 2.1 = 2 khả năng

- Có 2 bạn cùng chọn quán B , suy ra 1 khả năng

suy ra n(G) = 2.2 + 1 = 5

Do đó xác suất $P\left(G\right)=\dfrac{5}{9}$

Bài 29. Mỗi nhân viên của một công ty làm biệc ở một trong năm bộ phận của công ty đó là: Hành chính – Nhân sự; Truyền thông – Quảng cáo; Kinh doanh; Sản xuất; Dịch vụ.



Hình 29

Biểu đồ hình quạt tròn trong Hình 29 thống kê tỉ lệ nhân viên thuộc mỗi bộ phận.

Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Nhân viên được chọn thuộc bộ phận Kinh doanh";

B: "Nhân viên được chọn không thuộc bộ phân Hành chính – Nhân sự hay Dịch vụ".

Lời giải

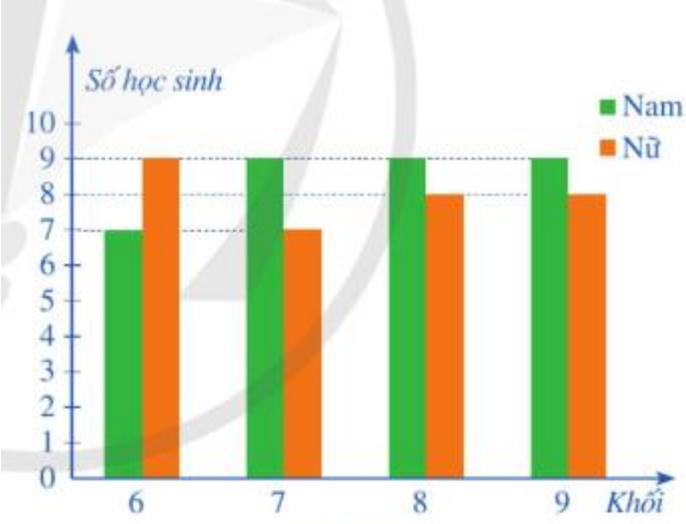
Kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 55% tổng số nhân viên.

Vậy xác suất cần tìm cho biến cố A là: $P\left(A\right)=55\%=0,55$

Kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 55% + 25% + 5% = 75% tổng số nhân viên.

Vậy xác suất cần tìm cho biến cố B là: $P\left(B\right)=75\%=0,75$.

Bài 30. Biểu đồ cột kép ở Hình 30 biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sơ.



Hình 30

Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn là nam";

B: "Học sinh được chọn thuộc khối 6";

C: "Học sinh được là nữ và không thuộc khối 9".

Lời giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy:

- Lớp 6 có tất cả: 7 nam + 9 nữ = 16 học sinh
- Lớp 7 có tất cả: 9 nam + 7 nữ = 16 học sinh
- Lớp 8 có tất cả: 9 nam + 8 nữ = 17 học sinh
- Lớp 9 có tất cả: 9 nam + 8 nữ = 17 học sinh

Như vậy, không gian mẫu trong bài này có tất cả 16 + 16 + 17 + 17 = 66 học sinh.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 7 + 9 + 9 + 9 = 43 học sinh

Xác suất để biến cố A xảy ra là: $P(A)=\frac{43}{66}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 16 học sinh

Xác suất để biến cố B xảy ra là: $P(B)=\frac{16}{66}=\frac{8}{33}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là: 9 + 7 + 8 = 24 học sinh

Xác suất để biến cố C xảy ra là: $P(C)=\frac{24}{66}=\frac{12}{33}$.

Bài 31. Trong một kì thi học sinh giỏi Toán, tỉ lệ học sinh đạt giải là 35%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã tham gia kì thi đó. Tính xác suất của biến cố: "Học sinh được chọn đạt giải"

Lời giải

Gọi số học sinh tham gia kì thi là x (x $\in$ N^*; học sinh)

=> Số kết quả có thể có là x (kết quả)

Số học sinh đạt giải, tức số kết quả thuận lợi cho biến cố là: $35\%.x = 0,35x$

Xác suất để biến cố xảy ra là: $P\left(A\right) = \dfrac{0,35x}{x} = 0,35$

Bài 32. Có hai túi I và II. Túi I chứa 3 tấm thẻ, đánh số 2, 3, 4. Túi II chứa 2 tấm thẻ, đánh số 5, 6. Từ mỗi túi I và II, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị"

B: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn 2 đơn vị"

C: "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn"

D: "Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố"

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu = 3.2 = 6

* A: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị"

Có 2 trường hợp (3, 5); (4.6)

Xác suất $P\left(A\right) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

* B: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn 2 đơn vị"

Có 3 trường hợp (2, 5); (2, 6); (3, 6)

Xác suất $P\left(B\right) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

* C: "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn"

Có 5 trường hợp (2, 5); (2, 6); (3, 6); (4, 5); (4, 6)

Xác suất $P\left(C\right) = \dfrac{5}{6}$

* D: "Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố"

Có 1 trường hợp (2, 5)

Xác suất $P\left(D\right) = \dfrac{1}{6}$

Bài 33. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp$\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp$\{4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 11\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hòa. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Bạn Minh thắng"

b) B: "Bạn Huy thắng"

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu:n(Ω) = 6.6 = 36

a) A: "Bạn Minh thắng"

Minh có 6 cách chọn số (từ tập hợp $\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$)

- 5 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 10, Huy chọn 4, 5, 7, 8, 9

- 4 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 9, Huy chọn 4, 5, 7, 8

- 3 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 8, Huy chọn 4, 5, 7

- 4 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 6, 7; Huy chọn 4, 5

- 1 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 5; Huy chọn 4

Suy ra n(A) = 5+ 4+ 3+ 4+ 1 = 17

Xác suất $P(A)=\frac{17}{36}$

b) B: "Bạn Huy thắng"

- 2 trường hợp Huy thắng: Huy chọn 7, Minh chọn 5, 6

- 3 trường hợp Huy thắng: Huy chọn 8, Minh chọn 5, 6, 7

- 4 trường hợp Huy thắng: Huy chọn 9, Minh chọn 5, 6, 7, 8

- 6 trường hợp Huy thắng: Huy chọn 11, Minh chọn 5, 6, 7, 8, 9, 10

Suy ra n(B) = 2+3+4+6 = 15

Xác suất $P(B)=\frac{15}{36}$

CHƯƠNG 9
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 1
GÓC NỘI TIẾP

Định nghĩa

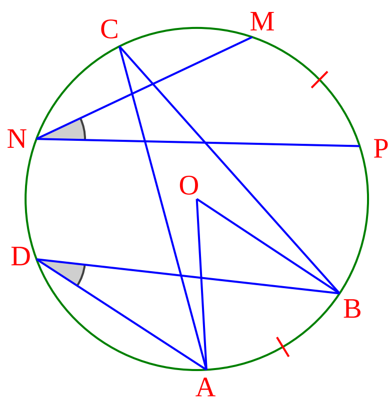
Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là **góc nội tiếp**.

Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là **cung bị chắn**.

Định lí: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Nhận xét:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

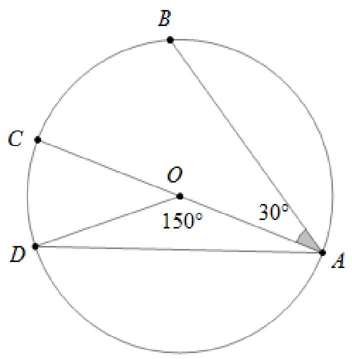


DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Lời giải

a)

Ta có: $COD = 180^0 - AOC$ (hai góc bù nhau)

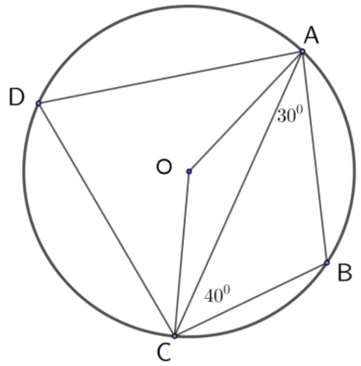
$COD = 180^0 - AOC = 180^0 - 150^0 = 30^0$

số đo cung nhỏ CD là: $\text{sđ}\,CD = COD = 30^0$ (góc ở tâm)

b) số đo cung nhỏ BC là $\text{sđ}\,BC = 2CAB = 2.30^0 = 60^0$ (góc nội tiếp)

số đo cung nhỏ BD là: $\text{sđ}\,BD = \text{sđ}\,BC + \text{sđ}\,CD = 60^0 + 30^0 = 90^0$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $BAC = 30^0, BCA = 40^0$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc ABC, ADC, AOC.

Lời giải

Xét tam giác ABC có : $BAC + BCA + ABC = 180^0$ (tổng 3 góc trong tam giác)

Hay $30^0 + 40^0 + ABC = 180^0 \Rightarrow ABC = 110^0$

$ADC = \frac{1}{2}\left(sd\,AB + sd\,AB\right) = \frac{1}{2}\left(2ACB + 2CAB\right) = ACB + CAB = 40^0 + 30^0 = 70^0$ (góc nội tiếp)

Hay $110^0 + ADC = 180^0 \Rightarrow ADC = 70^0$

Ta có : $AOC = 2ADC$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow AOC = 2.70^0 = 140^0$.

Vậy $ABC = 110^0, ADC = 70^0, AOC = 140^0$

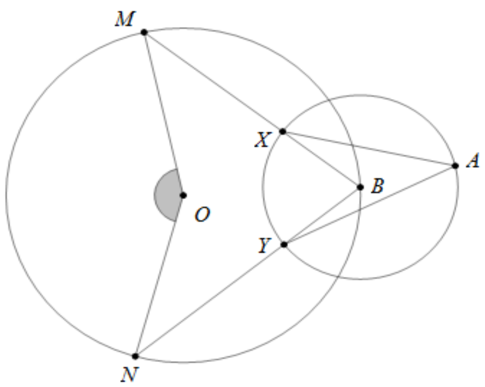
Chú ý : Có thể dùng tính chất Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên để tính ADC

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $ABC + ADC = 180^0$ (tổng 2 góc đối diện của tứ giác nội tiếp)

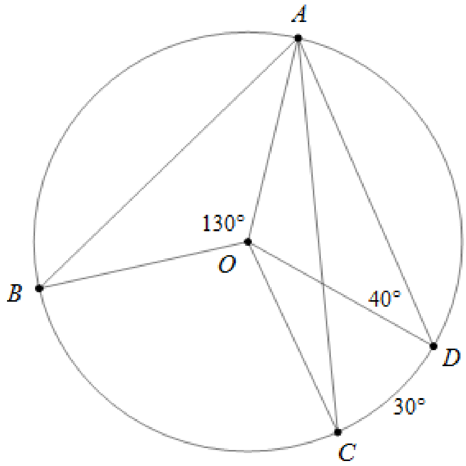
Hay $110^0 + ADC = 180^0 \Rightarrow ADC = 70^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

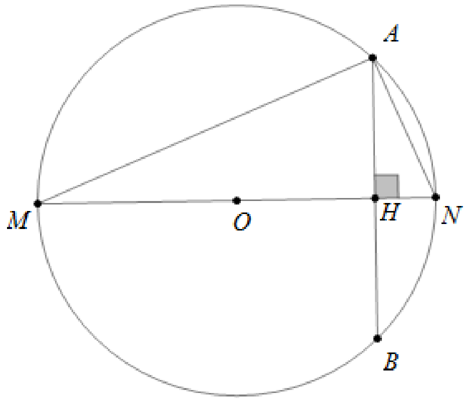
Bài 3. Dựa vào hình vẽ sau, biết cung nhỏ XY của đường tròn tâm B là 70^0. Tính MON



Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính BAC.



Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, biết $HN = 5cm$, $AB = 10\sqrt{5}cm$. Tính bán kính đường tròng tâm O.



DẠNG 2
CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU

Trong một đường tròn:

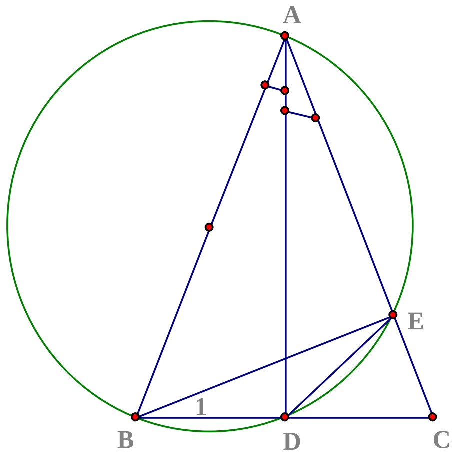
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A ($A < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $BD = DE$.

b) Chứng minh $CBE = \frac{1}{2}BAC$.

Lời giải



a) $ADB = 90^0 \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD$ là phân giác của A

$\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow BD = DE$

b) Ta có $B_1 = A_2 = \frac{1}{2}DE \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}BAC$.

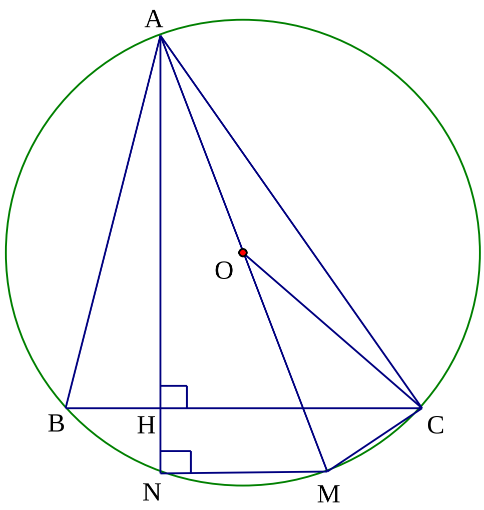
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính ACM.

b) Chứng minh $BAH = OCA$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có $ACM = 90^0$ (góc nội tiếp)

b) Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta AMC\left(gg\right)$

$\Rightarrow BAH = OAC; OCA = OAC \Rightarrow BAH = OCA$

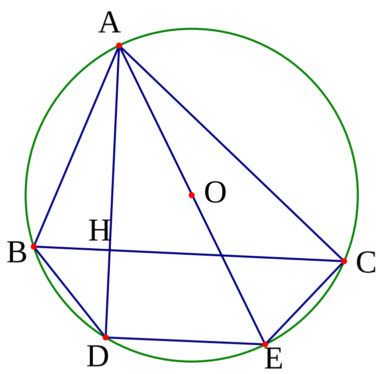
c) $ANM = 90^0 \Rightarrow MNBC$ là hình thang

$\Rightarrow BC//MN \Rightarrow$ sđ BN = sđ CM

$\Rightarrow CBN = BCM \Rightarrow BCMN$ hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $BAH = OAC$.

Lời giải



Kẻ đường kính AE của đường tròn O.

Ta thấy $ACE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $OAC + AEC = 90^0$ (1).

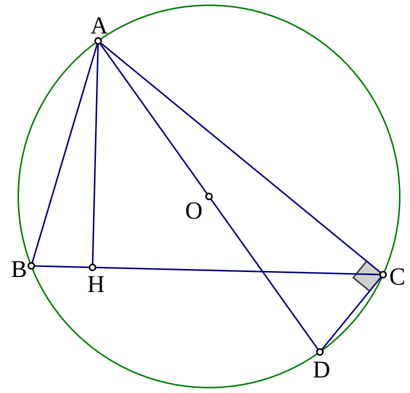
Theo giả thiết bài ra, ta có: $BAH + ABC = 90^0$ (2).

Mặt khác $AEC = ABC$ (cùng chắn AC) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $BAH = OAC$ (đpcm).

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $O;R$, AH là đường cao $H \in BC$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

Lời giải



Vẽ đường kính AD của đường tròn O , suy ra $ACD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔHBA và ΔCDA có:

$AHB = ACD = 90^0$; $HBA = CDA$ (góc nội tiếp cùng chắn AC),

Do đó $\Delta HBA \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AB.AC = AD.AH$.

Mà $AD = 2R$.

Do đó $AB.AC = 2R.AH$.

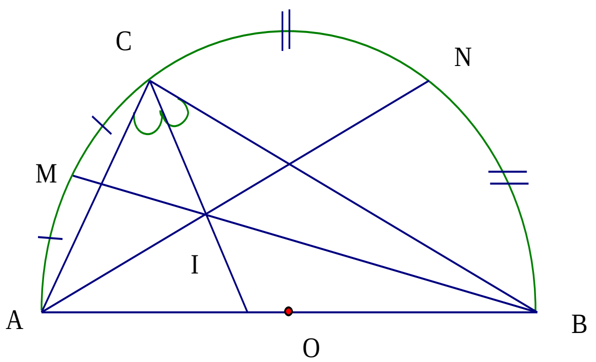
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của ΔABC.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC, hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của ACB.

Lời giải

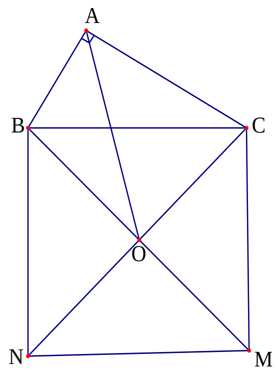


a) Ta có: $AC = 60^0 \Rightarrow BC = 120^0 \Rightarrow B < A < C$

b) AN là phân giác của góc A, BM là phân giác của góc B nên CI là phân giác của góc C (đpcm)

Bài 6. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc BAC.

Lời giải



Vì O là tâm của hình vuông nên $BOC = 90^0$.

Lại có $BAC = 90^0$ suy ra bốn điểm A,B,O,C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Đối với đường tròn này ta thấy $BAO = BCO$ (cùng chắn BO).

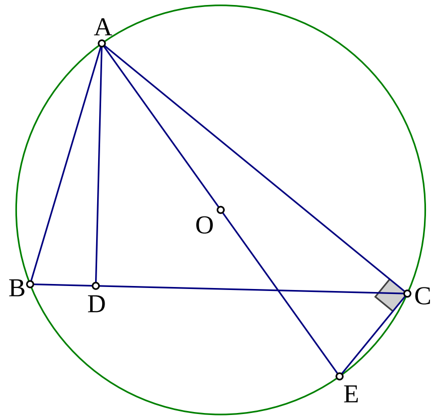
Mà $BCO = 45^0 \Rightarrow BAO = 45^0$.

Do $BAC = 90^0$, nên $CAO = BAC - BAO = 45^0$.

Vậy $BAO = CAO$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông BAC (đpcm).

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $O;R$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $BAD = OAC$.

Lời giải



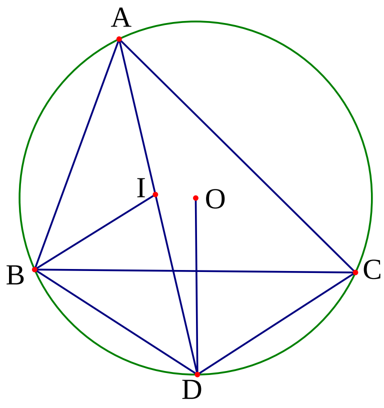
Dựng đường kính AE của đường tròn $O;R$.

Ta có $AEC = ABD$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\Delta DBA \sim \Delta CEA$, từ đó suy ra $BAD = OAC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Lời giải



Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $IBD = IBC + CBD$.

Mặt khác $CBD = CAD$ (Góc nội tiếp chắn cung CD)

mà $BAD = CAD$, $IBC = IBA$ (Tính chất phân giác)

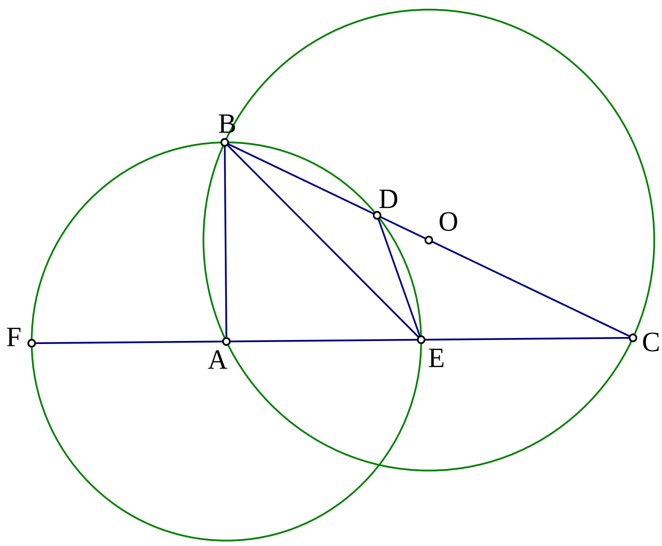
suy ra $IBD = ABI + BAI$.

Nhưng $BID = ABI + BAI$ (Tính chất góc ngoài).

Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

Bài 9. Cho tam giác ABC $A = 90^0$ và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB = EB^2$.

Lời giải



Giả sử CA cắt O tại F thì EF là đường kính của $A;AB$,

ta có $BF = BE$ (vì $BA \perp EF$) $\Rightarrow BED = BFD,$

$$BCF \equiv BCE = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(BF - DE\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(BE - DE\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}BD = BFD$$

Từ đó suy ra $BED = ECB$.

Xét tam giác $\Delta BCE, \Delta BED$ có

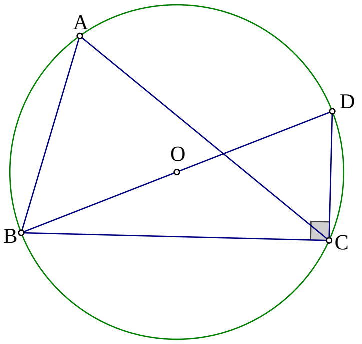
B chung,

$BED = ECB$

$$\Rightarrow \Delta BCE \sim \Delta BED \Leftrightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow DB.CB = EB^2.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC có A nhọn nội tiếp trong đường tròn $O;R$. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin BAC$.

Lời giải



Vẽ đường kính BD của đường tròn $O;R$ $\Rightarrow BCD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔBCD có $C = 90^0$ nên $BC = BD\sin BDC$.

Ta lại có $BD = 2R; BDC = BAC$ (góc nội tiếp cùng chắn BC) nên $BC = 2R\sin BAC$.

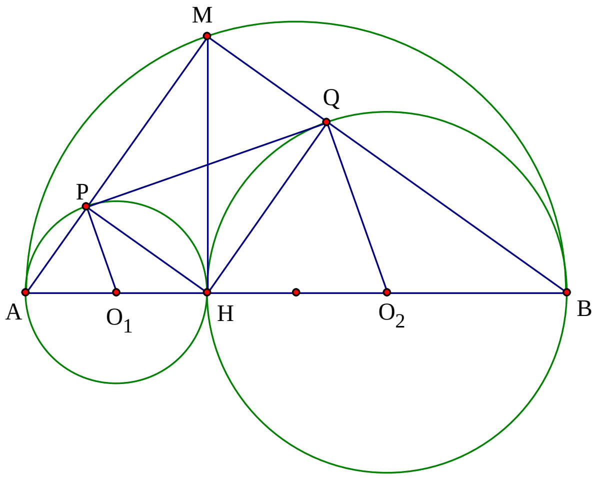
Bài 11. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính AH và tâm O_2, đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:

a) $MH = PQ$.

b) $\Delta MPQ \sim \Delta MBA$.

c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Lời giải



a) Ta có: $\lozenge MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$

b) Xét các tam giác vuông AHM và BHM ta có: $MP.MA = MQ.MB \Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta MBA(cgc)$

c) $PMH = MBH \Rightarrow PQH = O_2QB \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của O_2

Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của O_1.

DẠNG 3

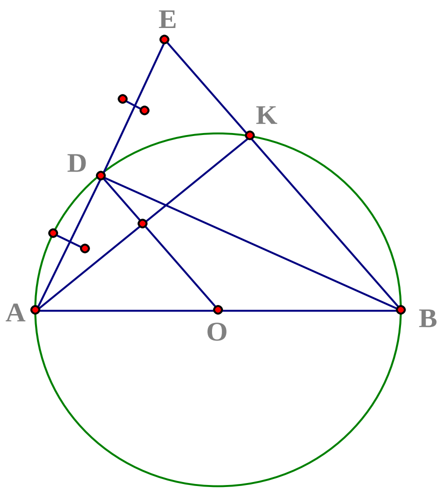
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

a) ΔABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AE \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B

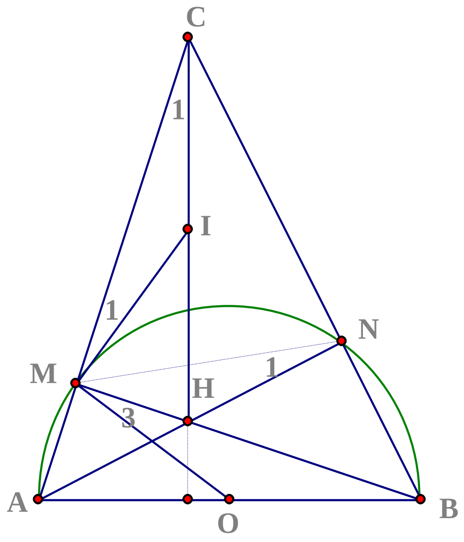
b) $\begin{cases} OD // EB \\ AK \perp EB \end{cases} \Rightarrow OD \perp AK$

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Lời giải



a) Ta có H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CH \perp AB$

b) Cần chứng minh $MI \perp MO$

Ta có: $C, M, H, N \in \left(I; \dfrac{CH}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = N_1 (= \dfrac{1}{2} sd\, MH) \\ N_1 = B_1 (= \dfrac{1}{2} sd\, AM) \\ B_1 = B_3 (\Delta.can) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} M_1 = M_3 \\ M_1 + IMB = 90^0 \end{array}\right\} \to M_3 + IMB = 90^0 \to OMI = 90^0$$

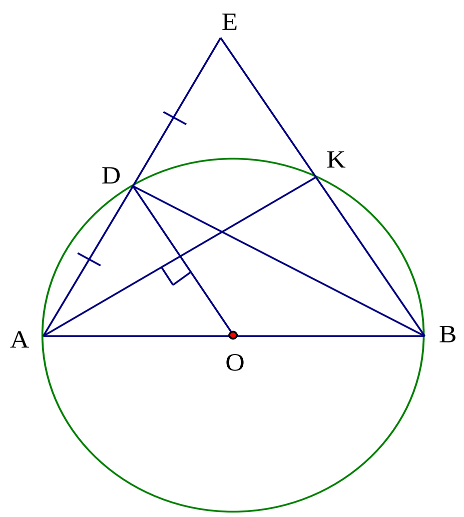
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Lời giải



a) Xét ΔABE có BD đồng thời là đường cao, đường trung tuyến nên ΔABE cân tại B.

b) Xét ΔABE có OD là đường trung tuyến $\Rightarrow OD//BE$

mà: $AK \perp BE$ ($AKB = 90^0$) $\Rightarrow AK \perp OD$

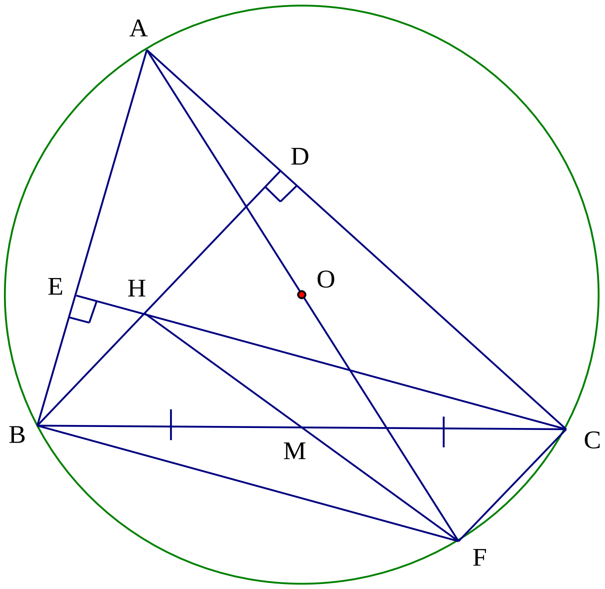
Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Lời giải



a) Tứ giác BFCH có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

b) Tứ giác BHCF là hình bình hành mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HF $\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

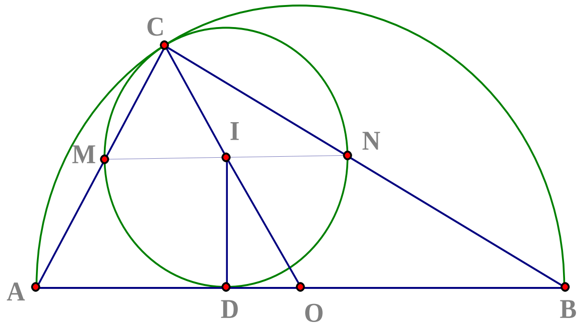
c) Xét ΔAHF có OM là đường trung bình của $\Delta AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đưuòng kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Lời giải



a) $ACB = 90^0 \Rightarrow MCN = 90^0$

Xét (I), có: $ACB = 90^0 \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng

b) Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C nên O, I, C thẳng hàng

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ICN \to INC = ICN\\ \Delta OCB \to OBC = OCB\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}INC = OBC\\ dong.vi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}MN//AB\\ ID \perp AB(t.c.tiep.tuyen)\end{array}\right\} \Rightarrow ID \perp MN$$

Bài 6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

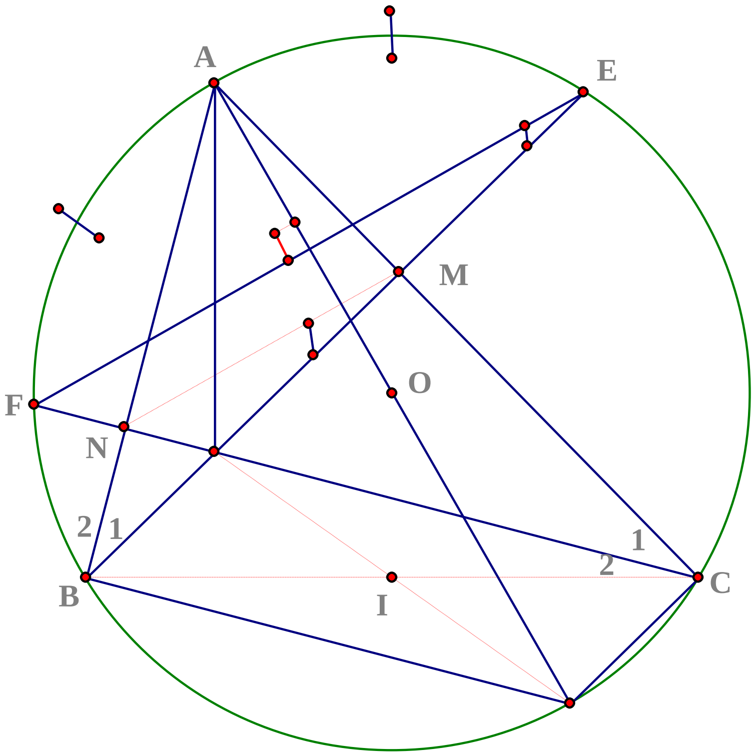
b) Chứng minh rằng EF // MN.

c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Lời giải



a) $B_1 = C_1$ (phụ góc BAC) $\Rightarrow EA = FA$ (chắn bởi hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow A$ là điểm chính giữa $FE \Rightarrow OA \perp FE(1)$

b) $\left.\begin{matrix} E = C_2 \\ NMB = C_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} E = NMB \\ d.vi \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//FE(2)$

$\Rightarrow OA \perp MN$

d) Kẻ đường kính AD và gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow IO \perp BC \equiv I$

Ta có:

$ACD = 90 \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ BH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BH//CD \\ t.tu: CH//BD \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \lozenge BHCD$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC nên I là trung điểm của HD

+ Xét $\Delta AHD, OI = \dfrac{1}{2}AH \Leftrightarrow AH = 2OI$ (không đổi)

e. Ta có: $AE = FA \Rightarrow ABF = ABE$ (chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔBHF có BN là đường cao, đường phân giác nên cân tại B $\Rightarrow BN$ là đường trung tuyến $\Rightarrow N$ là trung điểm của FH hay F đối xứng với H qua AB.

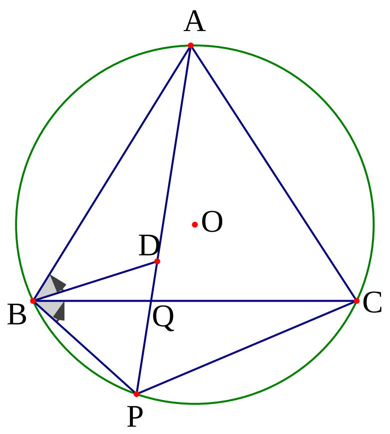
Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O. Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

Lời giải



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P.

Mặt khác, $BPD = BPA = BCA = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn O).

Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều).

Lại vì $ABD + DBC = 60^0$, $PBC + DBC = 60^0$ nên $ABD = PBC$.

Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $BPQ = 60^0$, $APC = ABC = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) suy ra $BPQ = APC, PBQ = PBC = PAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn PC).

Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$.

Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ\ \ PB + PC\ \ = PB.PC$.

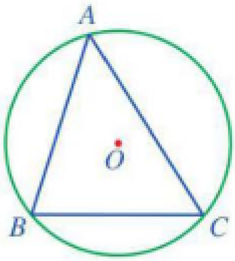
Hệ thức này tương đương với $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

BÀI 2

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

a. Định nghĩa: Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là **đường tròn ngoại tiếp tam giác** đó.

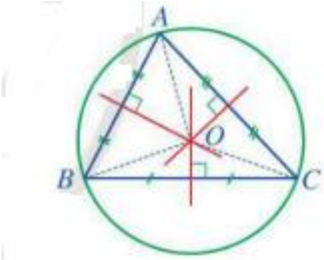


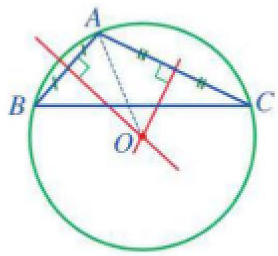
Chú ý: Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác nội tiếp đường tròn (O).

b. Cách xác định tâm đường tròn ngoại tam giác

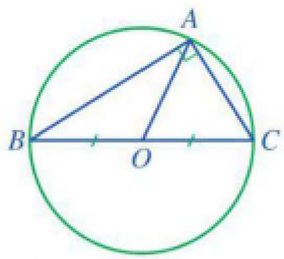
• **Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** là giao của ba đường trung trực của tam giác đó.

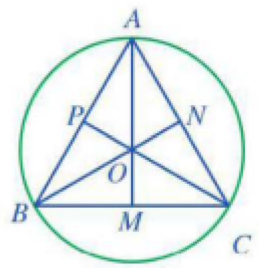
• **Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.





• Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.





• Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

• Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

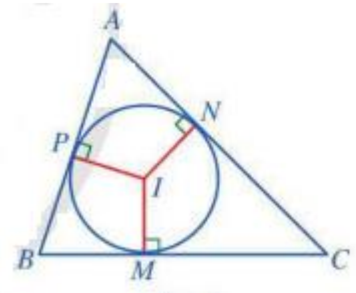
Nhận xét:

• Vì ba đường trung trực của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của hai đường trung trực bất kì của tam giác đó.

• Mỗi tam giác có đúng một đường tròn ngoại tiếp.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

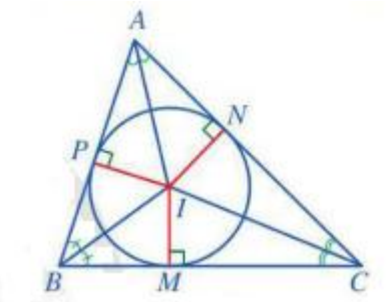
a. Định nghĩa: Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi đường tròn nội tiếp tam giác.



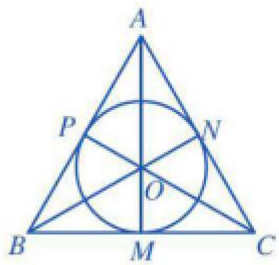
Chú ý: Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ngoại tiếp đường tròn (I).

b. Cách xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác

- **Tâm đường tròn nội tiếp tam giác** là giao ba đường phân giác của tam giác.
- **Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.



- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó.

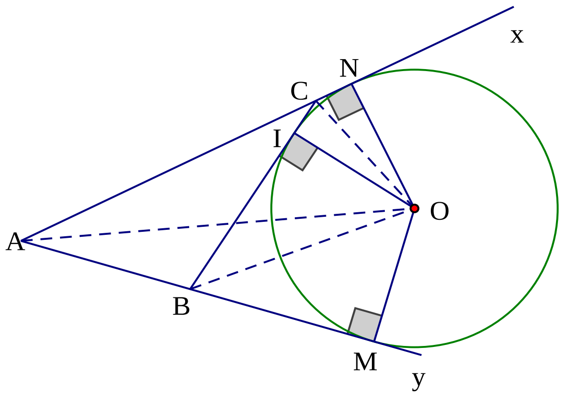


- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét:

- Vì ba đường phân giác của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao của hai đường phân giác bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn nội tiếp.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác (Đọc thêm)



• Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

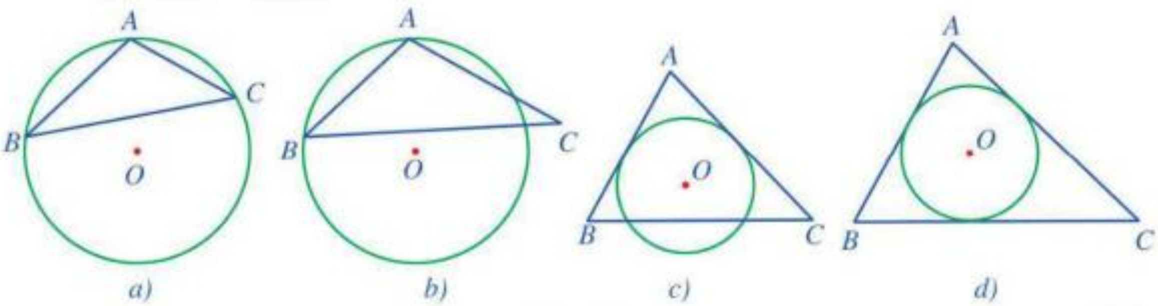
• Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)

• Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp tam giác

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC ? Giải thích ?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC ? Giải thích ?

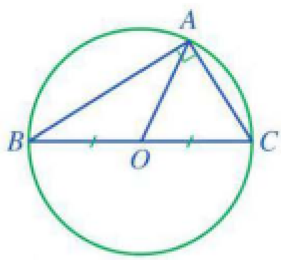
Lời giải

a) Hình $a)$, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó đi qua ba đỉnh A,B,C của tam giác ABC.

b) Hình $d)$, đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc ba cạnh AB,BC,CA của tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=10cm$ và $AC=\sqrt{21}cm$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Xét ABC vuông tại A, theo pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 10^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

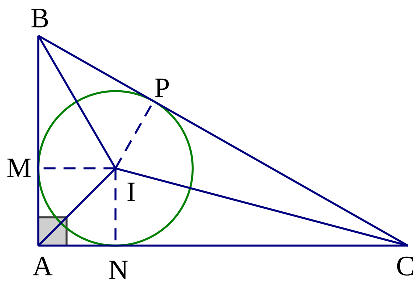
$BC^2 = 121$

$\Rightarrow BC = \sqrt{121} = 11(cm)$

Tam giác ABC vuông tại A nên bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng nữa cạnh huyền BC hay $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{11}{2} = 5,5(cm)$

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 6cm$ và $AC = 8cm$ ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Tính r

Lời giải



Đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự M, N, P

Ta có: $S_{AIB} = \dfrac{1}{2}IM.AB = \dfrac{1}{2}r.AB(1); S_{AIC} = \dfrac{1}{2}IN.AC = \dfrac{1}{2}r.AC(2); S_{BIC} = \dfrac{1}{2}r.BC(3)$

Cộng $(1)(2)(3)$ vế theo vế, ta được: $\dfrac{S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}r.(AB + AC + BC)$

Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{6.8}{2} = 24\left(cm^2\right)$, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10(cm)$

Nên ta có: $24 = \dfrac{1}{2}r(6 + 8 + 10) \Rightarrow r = 2(cm)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 4a$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R = \dfrac{5a}{2}$. Tính AC cạnh theo a.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R = 10\sqrt{2}(cm)$. Tính AB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và có $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 5(cm), AB = 12(cm), BC = 13(cm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 9. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có bán kính $R=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC theo a.

b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 10. Đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có bán kính bằng $4(dm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

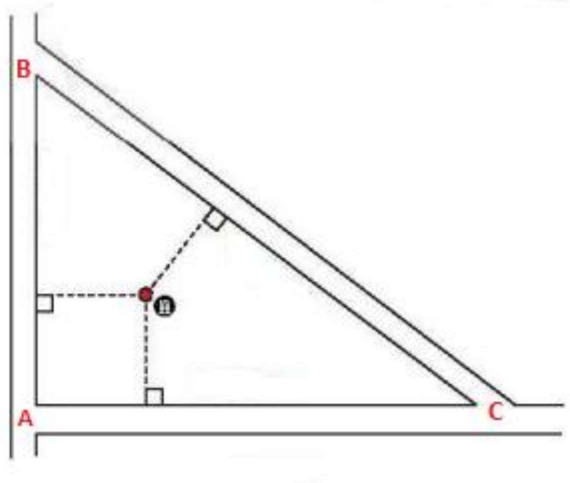
b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều có cạnh $10\sqrt{10}(cm)$ để đặt vừa khít một đồng hồ treo tường (như hình vẽ). Tính đường kính chiếc đồng hồ đó.

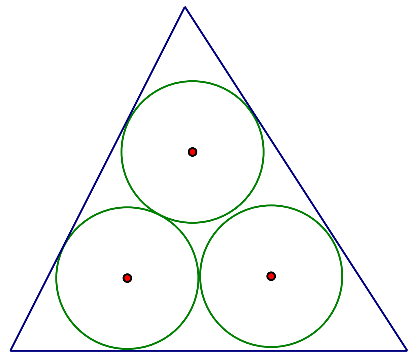
Bài 12. Bác An có một khu đất được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là $AB=30m, AC=40m, BC=50m$ (như hình vẽ).

a) Với giá đất hiện tại là 20 triệu/m^2. Nếu Bác An bán thì được bao nhiêu tiền?

b) Bác An muốn xây một ngôi nhà biệt thự bên trong khu đất mình cách đều cả ba con đường đó. Khi đó, ngôi nhà biệt thự của Bác An cách mỗi con đường là bao nhiêu?



Bài 13. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Từ tâm P và Q vẽ PQ và CQ vuông góc với cạnh AD của tam giác

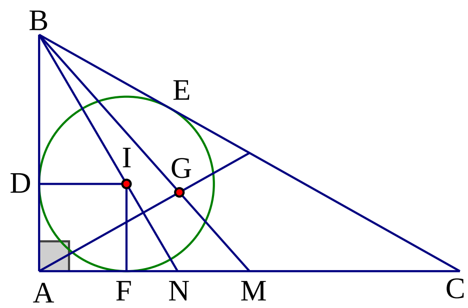
Các tam giác APB và DQC là nửa tam giác đều với $PB = QC = 3$

$\Rightarrow AB = CD = 3\sqrt{3}; BC = PQ = 6 \Rightarrow AD = 6 + 6\sqrt{3}$

Vậy chu vi tam giác là: $18 + 18\sqrt{3}$

Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Lời giải



Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB

ΔABC vuông tại A, theo định lý Pytago ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(cm)$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AF; BD = BE; CE = CF$

Do đó $2AD + 2BE + 2CE = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$

$\Leftrightarrow 2AD + 2BC = 36 \Leftrightarrow AD = 3(cm) \Rightarrow BD = 6(cm); DI = 3(cm)$

Gọi $N = BI \cap AC$, ta có: $\dfrac{BI}{BN} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{BG}{BM} \Rightarrow \begin{cases} IG // NM \\ IG = \dfrac{2}{3} NM \end{cases}$

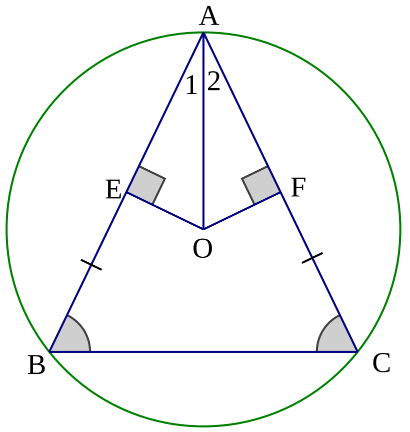
Ta có $\lozenge IDAF$ là hình vuông, có: $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DI}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AN = 4,5(cm)$

Mà M là trung điểm của AC nên: $NM = AM - AN = 6 - 4,5 = 1,5(cm) \Rightarrow IG = 1(cm)$

DẠNG 2
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của BAC

Lời giải



Ta có: ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow OE = OF$

Xét hai tam giác vuông AOE và AOF, có:

+ OA: cạnh chung

+ $OE = OF$: Chứng minh trên

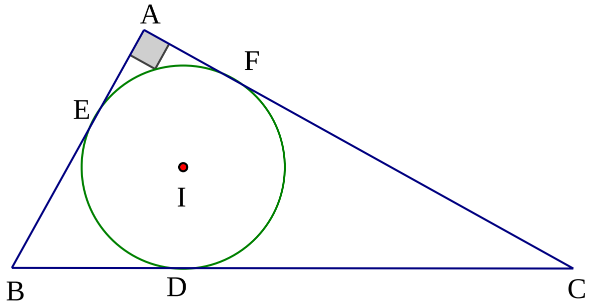
$\Rightarrow \Delta AOE = \Delta AOF \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 \\ AE = AF \end{cases} \Rightarrow AO$ là phân giác của BAC

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A $BAC = 90^0\ (AB \le AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD.DC$

Lời giải



a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF; BE = BD; CD = CF$

Do đó: $2BD = BD + BE = BC - CD + AB - AE = BC + AB - (CD + AE) = BC + AB - (CF + AF)$

$= BC + AB - AC \Rightarrow BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$

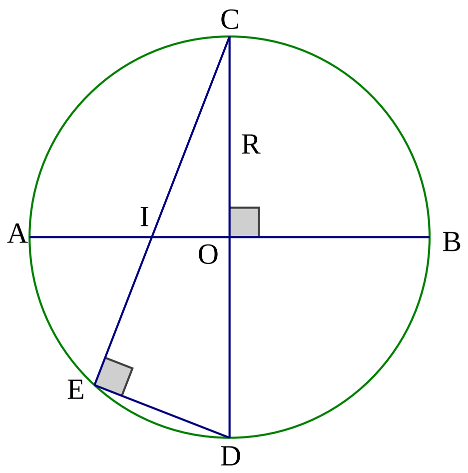
b) Tương tự câu a) ta có: $DC = \dfrac{BC + AC - AB}{2}$

mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (ΔABC vuông tại A), do đó: $BD.DC = \dfrac{(BC + AB - AC)(BC + AC - AB)}{4}$

$\dfrac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4} = \dfrac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{4} = \dfrac{AB.AC}{2} = S_{ABC}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD. Trên bán kính AO lấy đoạn $AI = \dfrac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt (O) tại E. Tính R theo CE



Lời giải

Ta có $AI = \dfrac{2AO}{3} = \dfrac{2R}{3} \Rightarrow OI = R - \dfrac{2R}{3} = \dfrac{R}{3}$

ΔOCI vuông tại O, ta có:

$CI = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{10}}{3}$

ΔCED nội tiếp đường tròn O có cạnh CD là đường kính $\Rightarrow \Delta CED$ vuông tại E

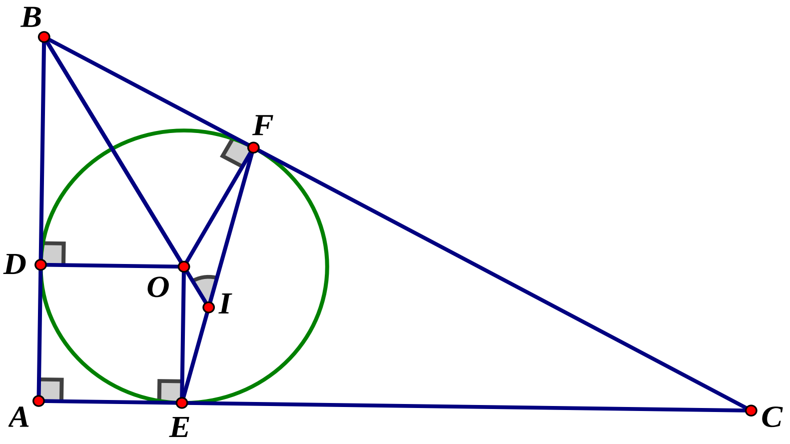
Hai tam giác vuông OCI và CED có $C: chung$

$\Rightarrow \Delta COI \backsim \Delta CED \Rightarrow \dfrac{CO}{CE} = \dfrac{CI}{CD} \Rightarrow CE = \dfrac{CO.CD}{CI}$

$= \dfrac{R.2R}{R\dfrac{\sqrt{10}}{3}} = \dfrac{6R}{\sqrt{10}} = \dfrac{3R\sqrt{10}}{5}$

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC và BC. Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I. Tính BIF

Lời giải



Ta có: $DEI = DEF = \dfrac{1}{2}DOF$ (góc nội tiếp và góc ở tâm củng chắn cung DF).

Vì BD,BF là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại D,F nên OB là tia phân giác của DOF (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow DOB = \dfrac{1}{2}DOF$

$\Rightarrow DEI = DOB.$

$\Rightarrow DEIO$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Xét tứ giác $ODAE$ có $ODA = DAE = OEA = 90°$ nên $ODAE$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông).

Lại có AD,AE là các tiếp tuyến của (O) tại D,E nên $AD = AE$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau

$\Rightarrow ODAE$ là hình vuông (hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau) $\Rightarrow ODE = 45°$.

Mà $DEIO$ là tứ giác nội tiếp (cmt).

$\Rightarrow BIF = ODE = 45°$ (góc ngoài yà góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Vậy $BIF = 45°$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

ĐỌC THÊM

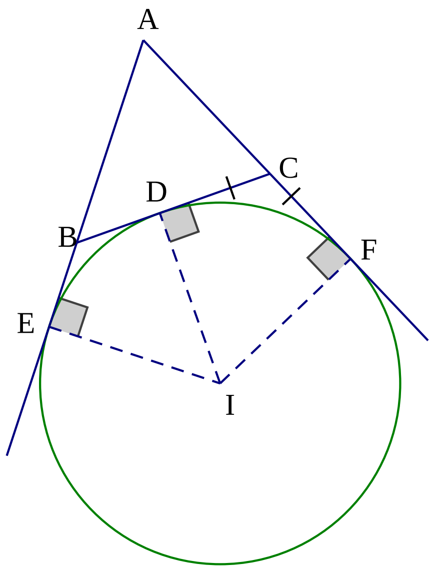
Bài 1. Cho ΔABC, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB, AC theo thứ tự tại E, F. Cho $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$

c) $CF = \dfrac{c+a-b}{2}$

Lời giải



Gọi D là tiếp tuyến của (I) với cạnh BC

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì: $BD = BE, CD = CF, AE = AF$

Do $AE = AB + BE = c + BD$ (1); $AF = AC + CF = b + CD$ (2)

Cộng (1) với (2) theo vế ta được: $2AE = 2AF = b + c + BD + CD = a + b + c \Rightarrow AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$

b) Theo câu a) ta có: $BD + c = BE + c = AE = \dfrac{a+b+c}{2}; CD + b = CF + b = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\Rightarrow BE = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}; CF = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a+c-b}{2}$

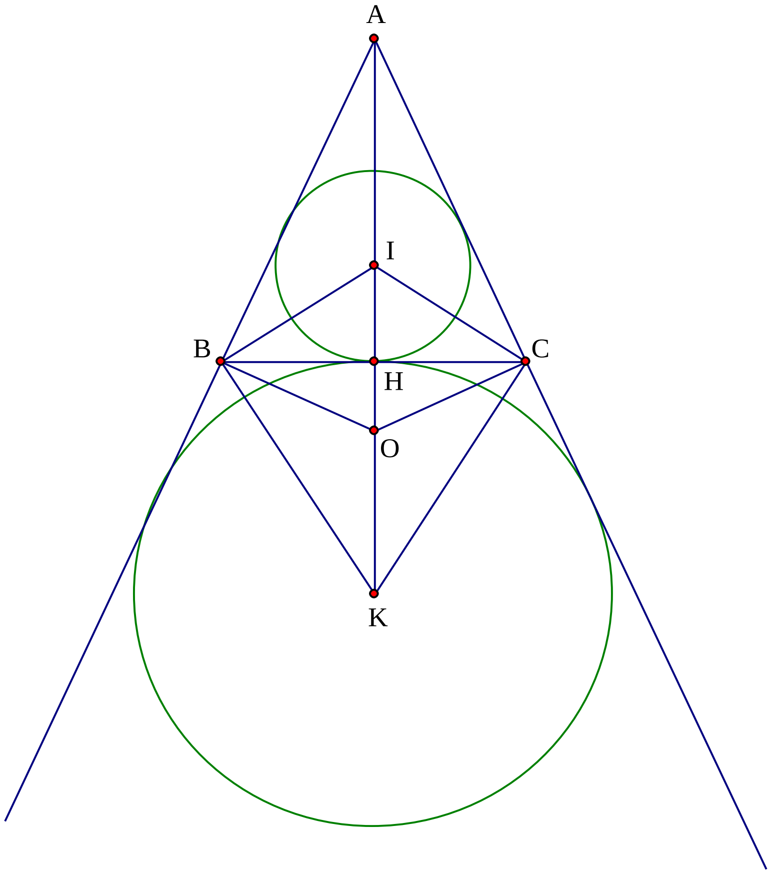
Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp A của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK

a) Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc 1 đường tròn

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua 4 điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$

c) Tính bán kính của (O) biết $AB = AC = 20cm, BC = 24cm$

Lời giải



a) Ta có BI, BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\Rightarrow BI \perp BK = B$

Tương tự CI và CK là hai tia phân giác hai góc kề bù $\Rightarrow CI \perp CK = C$

$\Rightarrow IBK = ICK = 90^0 \Rightarrow I, B, K, C$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta có: $ACO = ACI + ICB + BCO; ICK = 90^0 = ICB + BCO + OCK$

Ta đi chứng minh:

$OCK = ACI \Leftrightarrow OKC = ICB$

Lại có: $OKC + OIC = 90^0 (ICK = 90^0); ICB + OIC = 90^0 (IHC = 90^0) \Rightarrow ACO = ICK = 90^0 \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến

c) Ta có AK cắt BC tại $H \Rightarrow HC = 12cm, AH = 16cm$

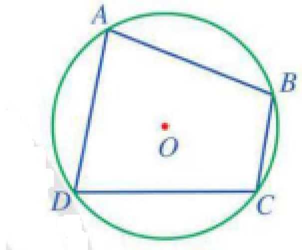
$$\Delta ACH \backsim \Delta COH (gg) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CO} \Rightarrow CO = 15cm$$

BÀI 3
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác

Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.

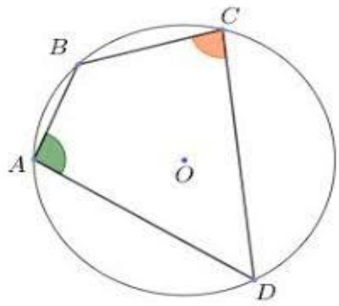
Đường tròn đi qua bốn đỉnh của tứ giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.



Chú ý: Trong hình vẽ trên, ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp và đường tròn (O) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Định lí

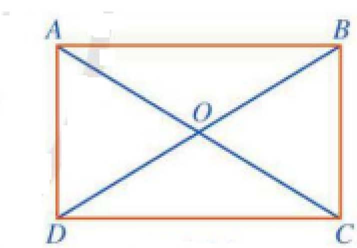
Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180^0.

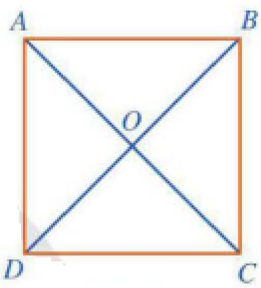


$\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$

2. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, hình vuông

- Hình chữ nhật, hình vuông là các tứ giác nội tiếp.
- Đường tròn ngoại hình chữ nhật, hình vuông có tâm là giao điểm của hai đường chéo và có bán kính bằng nửa đường chéo.





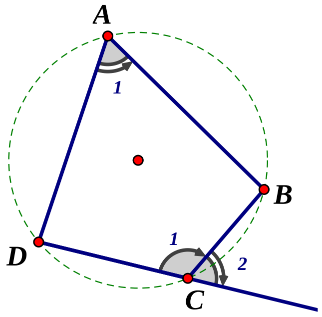
Chú ý: Hình thang cân nội tiếp được đường tròn

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

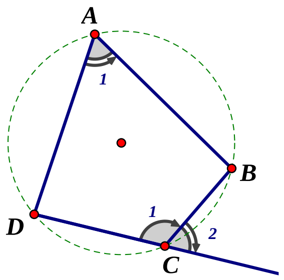
Kiến thức cần nhớ

1. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0.



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180^0$ và $\hat{B} + \hat{D} = 180^0$

2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.

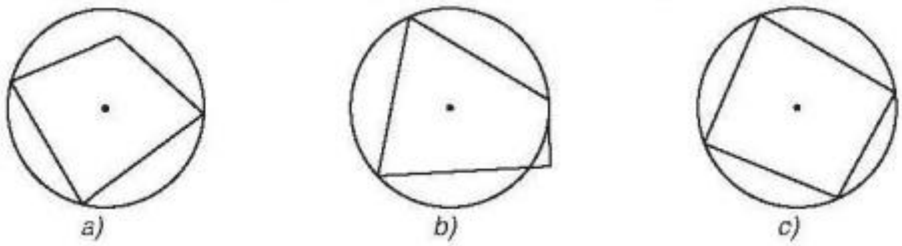


$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180^0$ mà $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^0$ $(hai\ góc\ kê\ bù) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2$

Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

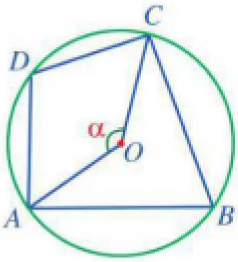


Lời giải

Ở hình a) và hình b), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

Ở hình c), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Bài 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^0$.



a) Tính các góc ABC, ADC của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $BAD + BCD$.

Lời giải

a) Ta có: $ABC = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}.140^0 = 70^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$ABC + ADC = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

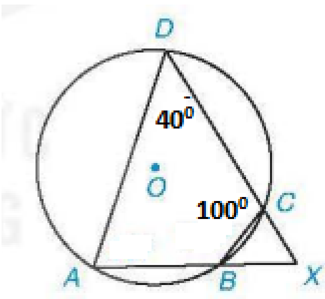
$70^0 + ADC = 180^0$

$ADC = 180^0 - 70^0$

$ADC = 110^0$

b) tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $BAD + BCD = 180^0$.

Bài 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $ADC = 40^0, BCD = 100^0$.



a) Tính các góc ABC, BAD của tứ giác $ABCD$.

b) Tính BXC .

Lời giải

a) Ta có:

$ABC + ADC = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$ABC + 40^0 = 180^0$

$ABC = 180^0 - 40^0$

$ABC = 140^0$

$BAD + BCD = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$BAD + 100^0 = 180^0$

$BAD = 180^0 - 100^0$

$BAD = 80^0$

b) Ta có:

$AXD + XAD + XDA = 180^0$ (tổng ba góc của tam giác ADX)

$AXD + 80^0 + 40^0 = 180^0$

$AXD = 180^0 - \left(80^0 + 40^0\right)$

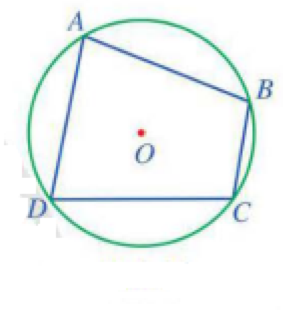
$AXD = 60^0$

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trườn hợp sau:

a) $A = 45^0$ và $B = 155^0$. b) $B = 60^0$ và $C = 85^0$.

Lời giải

a)



- Ta có: $A + C = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$45^0 + C = 180^0$

$C = 180^0 - 45^0$

$C = 135^0$

- Ta có: $B + D = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$155^0 + D = 180^0$

$D = 180^0 - 155^0$

$D = 25^0$

b) $B = 60^0$ và $C = 85^0$.

- Ta có: $B + D = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$60^0 + D = 180^0$

$D = 180^0 - 60^0$

$D = 120^0$

- Ta có: $A + C = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

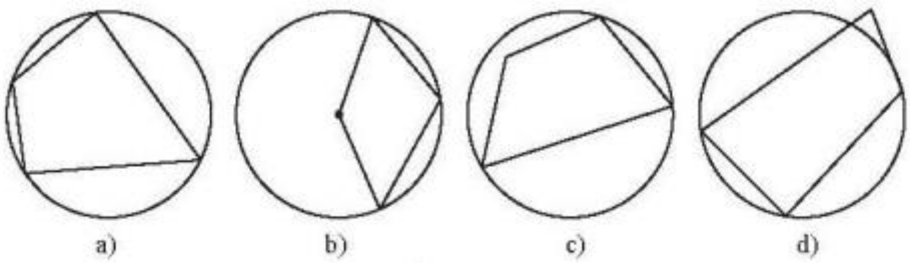
$A + 85^0 = 180^0$

$A = 180^0 - 85^0$

$A = 95^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

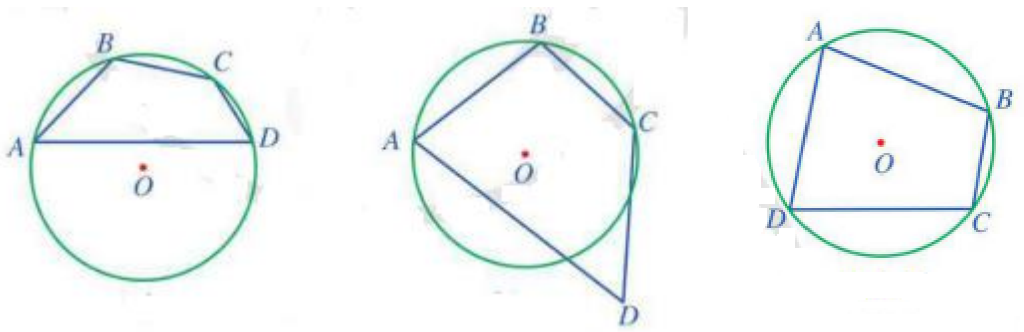


Lời giải

Ở hình a) và hình b), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Ở hình c) và hình d), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

Bài 6. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$? Giải thích.



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3**

Lời giải

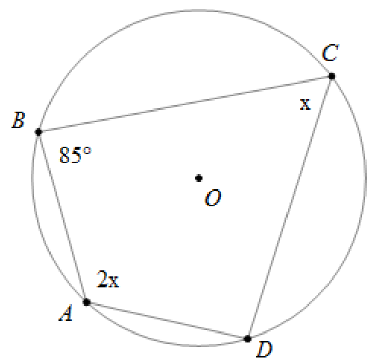
Ở hình 1) và hình 3), đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Ở hình 2), đường tròn (O) là đường tròn không ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó không đi qua đỉnh D của tứ giác.

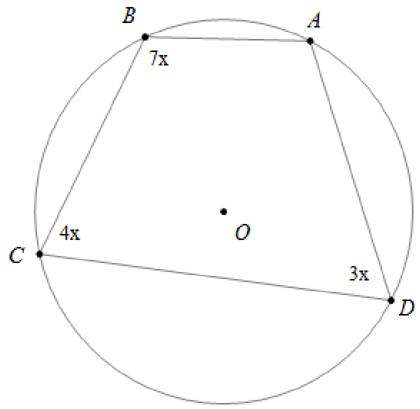
Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = 110^0$ và $B = 50^0$ b) $B = 60^0$ và $C = 85^0$ c) $C = 55^0$ và $D = 127^0$

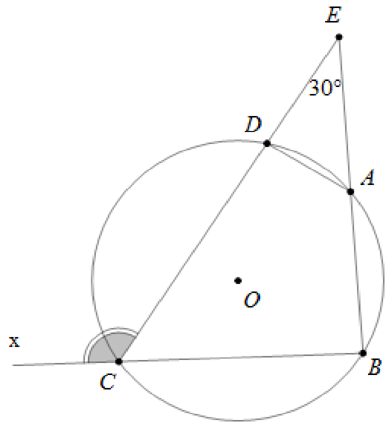
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



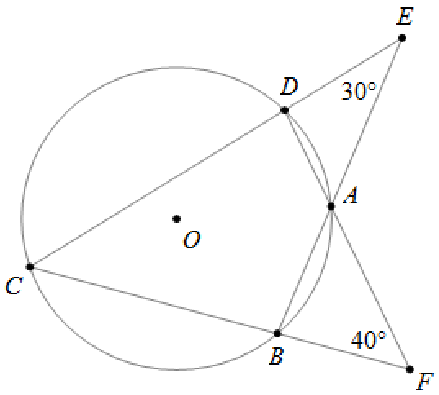
Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$, biết $DCx = 135^0$



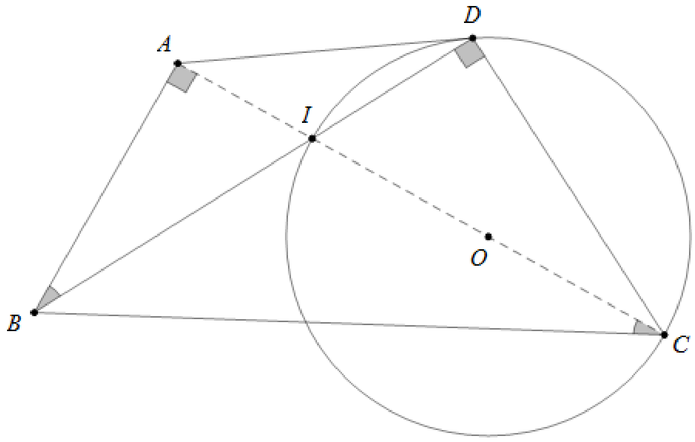
Bài 11. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



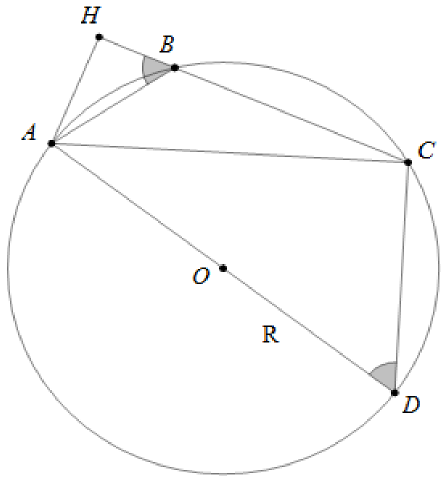
Bài 12. Dựa vào hình vẽ sau

a) Chứng minh CI là phân giác góc $BCD = 135^0$.

b) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.



Bài 13. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính bán kính R, biết $AH \perp HC,\ AH = 5cm,\ AB = 8cm,\ AC = 15cm$.

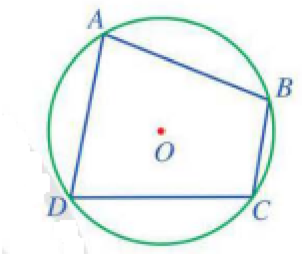


DẠNG 2

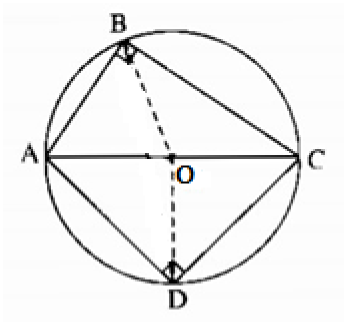
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

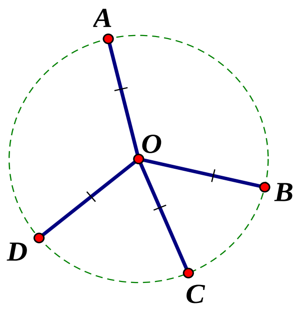
- **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $A+C=180^0$ hoặc $B+D=180^0$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90^0 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



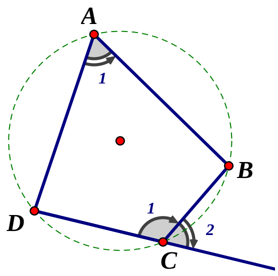
- **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA=OB=OC=OD$.



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $A_1 = C_2$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $A_1 = C_2$ (giả thiết)

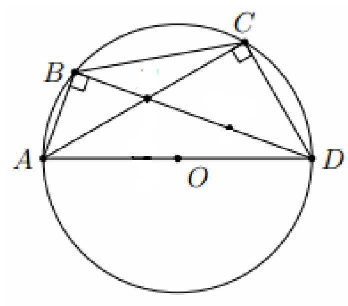
$C_1 + C_2 = 180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra $A_1 + C_1 = 180^0$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối A_1 và C_1 bằng 180^0, do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90^0, đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề ABD, ACD cùng nhìn dưới cạnh AD. $ABD = ACD = 90^0$ $OA = OD$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $ABD = 90^0$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (1)

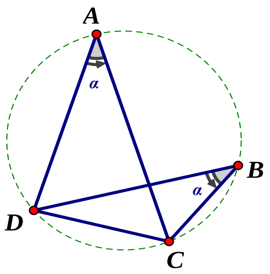
Xét tam giác ACD có $ACD = 90^0$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.

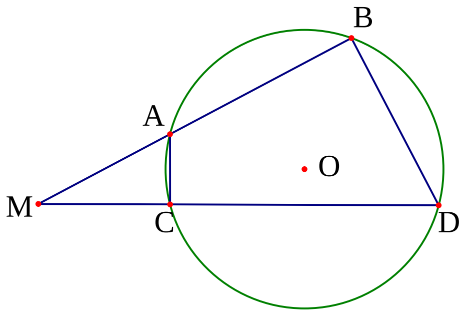
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.

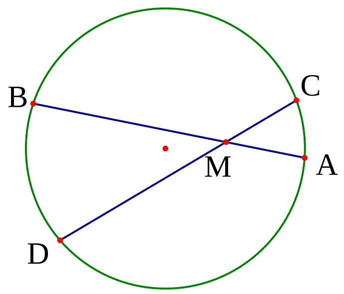


Nếu $CAD = CBD = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M. Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1



Hình 2

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• **Trường hợp 1 (Hình 1)**

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

MAC chung

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB (c - g - c) \Rightarrow MAC = MDB \Rightarrow ABCD$ nội tiếp.

• **Trường hợp 2 (Hình 2)**

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

$AMC = DMB$ (đối đỉnh)

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB(c-g-c) \Rightarrow MAC = MDB$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

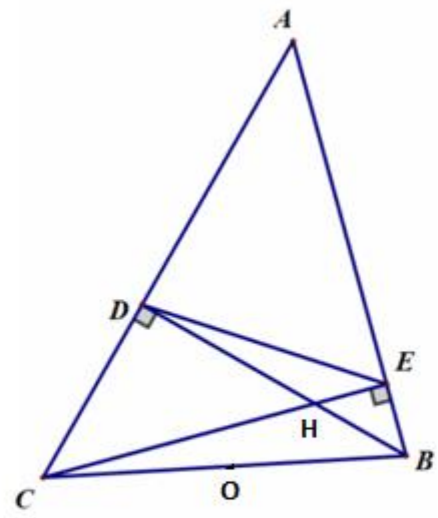
Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé **.**

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow AEH = ADH = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ADHE$ có $AEH + ADH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow ADHE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0).

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi O là trung điểm BC.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow BDC = BEC = 90^\circ$

Xét tam giác BDC có $BDC = 90^0$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OC = OB = \dfrac{1}{2}BC$ (1)

Xét tam giác BEC có $BEC = 90^0$ và EO là đường trung tuyến nên $OE = OC = OB = \dfrac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OC = OB$

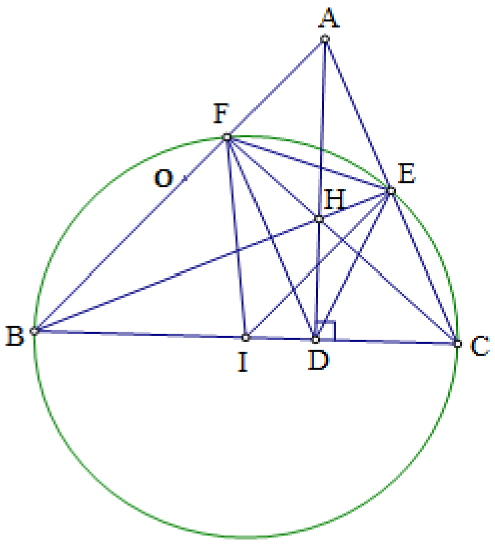
Vậy tứ giác $BCDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm BC.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

- Xét đường tròn (I)

$CFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CF \perp AB$

$CFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp AC$

Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC hay $AH \perp BC \Rightarrow HDB = 90^0$

- Xét tứ giác $BFHD$

$CFB = HDB = 90^0$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow CFB + HDB = 180^0$

tứ giác $BFHD$ có tổng hai góc đối CFB, HDB bằng 180^0 nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Gọi O là trung điểm AB.

Xét tam giác ADB có $ADB = 90^0$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OA = OB = \dfrac{1}{2}AB$ (1)

Xét tam giác AEB có $AEB = 90^0$ và EO là đường trung tuyến nên $OE = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OA = OB$

Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm AB.

Bài 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của AM và CN.

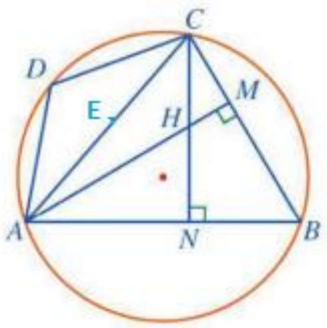
a) Chứng minh $ABC = CHM$.

b) Chứng minh $ADC = AHC$.

c) Chứng minh $MAC = MNC$.

d) Chứng minh $MAC + 90^0 = ANM$.

Lời giải



a) Chứng minh $ABC = CHM$.

Vì AM, CN là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ CN \perp AB \end{cases} \Rightarrow BMH = BNH = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BNHM$ có $BMH + BNH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow BNHM$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0).

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $MBN + NHM = 180^\circ$ hay $CBA + NHM = 180^\circ$

mà $MBN + NHM = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

do đó $CBA = MBN$

b) Chứng minh $ADC = AHC$.

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $MBN + NHM = 180^\circ$

mà $AHC = NHM$ (đối đỉnh)

nên $MBN + AHC = 180^\circ$

hay $ABC + AHC = 180^\circ$

Mặc khác tứ giác $BNHM$ nội tiếp đường tròn tâm (O) nên $ADC + ABC = 180^0$

Do đó $ADC = AHC$

c) Chứng minh $MAC = MNC$.

Ta chứng minh $ACMN$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi E là trung điểm AC.

Xét tam giác AMC có $AMC = 90^0$ và ME là đường trung tuyến nên $EM = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (1)

Xét tam giác ANC có $ANC = 90^0$ và NE là đường trung tuyến nên $EN = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EM = EN = EC = EA$

Vậy tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn có tâm E là trung điểm AC.

Suy ra $MAC = MNC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm E)

d) Chứng minh $MAC + 90^0 = ANM$.

Ta có $MAC + ACM = 90^0$ (hai góc phụ nhau)

Hay $ACM = 90^0 - MAC$

Mà $ACM + ANM = 180^0$ (tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn, câu c))

Nên $90^0 - MAC + ANM = 180^0$

Suy ra $MAC + 90^0 = ANM$

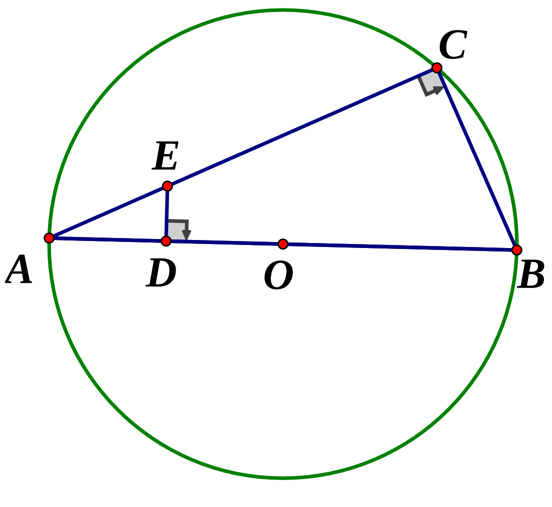
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được

b) $AC.AE = \frac{AB^2}{4}$

Lời giải



a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp

C thuộc đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \angle ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ECB = 90°$, mặt khác $ED \perp AB$ tại D (gt) $\Rightarrow \angle EDB = 90°$

Tứ giác $BCED$ có $\angle ECB+\angle EDB=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ mà hai góc này đối nhau

Suy ra $BCED$ là tứ giác nội tiếp

b) $AC.AE=\dfrac{AB^2}{4}$

Xét ΔAED và ΔABC có :

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC\ chung\\ \angle ADE=\angle ACB=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AED\sim \Delta ABC(g.g)$$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$(cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)$\Rightarrow AC.AE=AD.AB$

Mà D là trung điểm của $AO(gt)\Rightarrow AD=\dfrac{1}{2}AO$

O là tâm đường tròn đường kính AB (gt)$\Rightarrow AO=\dfrac{1}{2}AB$

Suy ra $AD=\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{4}AB$

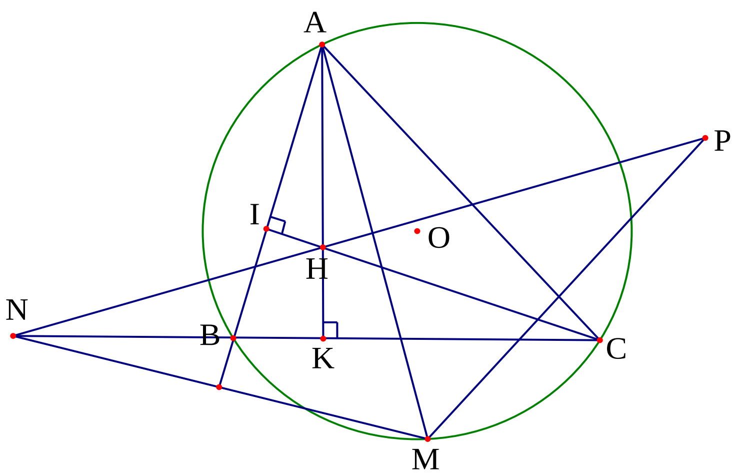
Do đó, $AC.AE=\dfrac{1}{4}AB.AB=\dfrac{AB^2}{4}(dfcm)$

Bài 5. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là điểm H. Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B,C). Gọi N,P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB,AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N,H,P thẳng hàng.

Lời giải



a). Giả sử các đường cao của tam giác là AK,CI . Để chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh $AHC+APC=180^0$.

Ta có:

$AHC=IHK$ (đối đỉnh)

$APC = AMC = ABC$ (do tính đối xứng và góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $ABC + IHK = 180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $BIHK$ là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh N, H, P thẳng hàng ta sẽ chứng minh $NHA + AHP = 180^0$ do đó ta sẽ tìm cách quy hai góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $AHP = ACP$ (tính chất góc nội tiếp), $ACP = ACM$ (1) (Tính chất đối xứng) .

Ta thấy vai trò tứ giác $AHCP$ giống với $AHBN$ nên ta cũng dễ chứng minh được $AHBN$ là tứ giác nội tiếp từ đó suy ra $AHN = ABN$, mặt khác $ABN = ABM$ (2) (Tính chất đối xứng) .

Từ (1), (2) ta suy ra chỉ cần chứng minh $ABM + ACM = 180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $ABMC$ nội tiếp.

Vậy $NHA + AHP = 180^0$ hay N, H, P thẳng hàng.

Bài 6. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn O (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB.

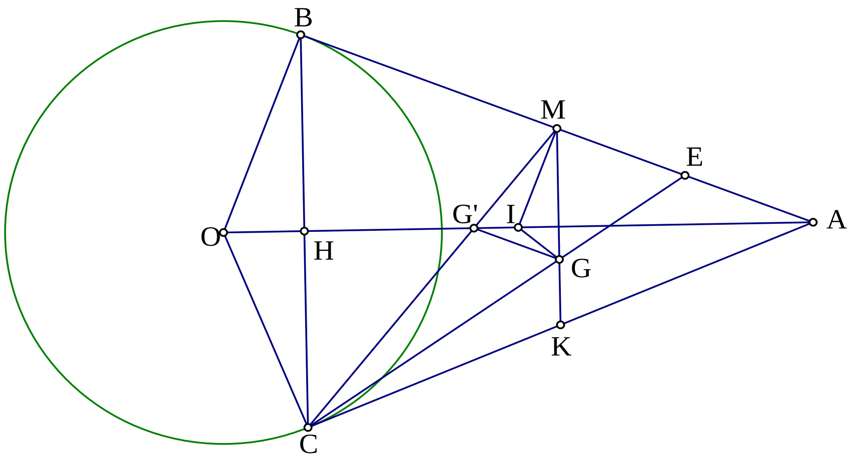
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM. Chứng minh $MG / / BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM.

Lời giải



a) Do AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn O nên $ABO = ACO = 90^0 \Rightarrow B, C$ thuộc đường tròn đường kính OA có tâm I là trung điểm OA.

b) Ta có $AM.AO = \dfrac{AB}{2}.2AI = AB.AI$.

c) Gọi E là trung điểm MA, do G là trọng tâm ΔCMA nên $G \in CE$ và $\dfrac{GE}{CE} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $\frac{ME}{BE}=\frac{1}{3}$ (vì $ME=\frac{MA}{2}=\frac{MB}{2}$ nên $ME=\frac{BE}{3}$) $\Rightarrow \frac{GE}{CE}=\frac{ME}{BE}$, theo định lý Ta-lét đảo $\Rightarrow MG//BC$.

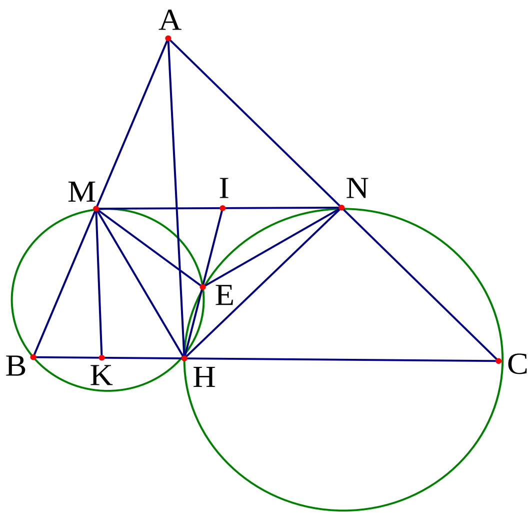
d) Gọi G' là giao điểm của OA và $CM \Rightarrow G'$ là trọng tâm ΔABC. Nên $\frac{G'M}{CM}=\frac{1}{3}=\frac{GE}{CE'}$, theo định lý Ta-lét đảo $GG'//ME$ (1)

MI là đường trung bình trong $\Delta OAB \Rightarrow MI//OB$, mà $AB\perp OB$ (cmt) $\Rightarrow MI\perp AB$, nghĩa là $MI\perp ME$ (2).

Từ (1) và (2) cho $MI\perp GG'$, ta lại có $GI'\perp MK$ (vì $OA\perp MK$) nên I là trực tâm $\Delta MGG' \Rightarrow GI\perp G'M$ tức $GI\perp CM$.

Bài 7. Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

Lời giải



Để chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh: $MAN+MEN=180^0$.

Ta cần tìm sự liên hệ của các góc $MAN;MEN$ với các góc có sẵn của những tứ giác nội tiếp khác.

Ta có $MEN=360^0-\left(MEH+NEH\right)=360^0-\left(180^0-ABC+180^0-ACB\right)=ABC+ACB=180^0-BAC$ suy ra $MEN+MAN=180^0$. Hay tứ giác $AMEN$ là tứ giác nội tiếp.

Kẻ $MK\perp BC$, giả sử HE cắt MN tại I thì IH là cát tuyến của hai đường tròn (BMH), (CNH).

Lại có $MB=MH=MA$ (Tính chất trung tuyến tam giác vuông).

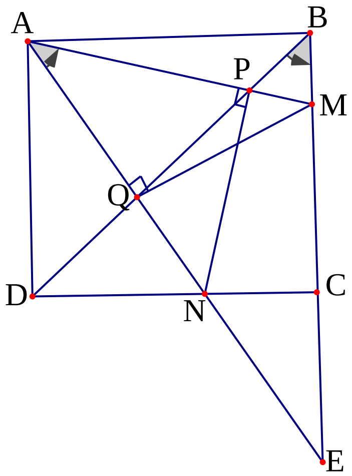
Suy ra tam giác MBH cân tại $M\Rightarrow KB=KH\Rightarrow MK$ luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH. Hay MN là tiếp tuyến của (MBH) suy ra $IM^2=IE.IH$, tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của $\left(HNC\right)$ suy ra $IN^2=IE.IH$ do đó $IM=IN$.

Bài 8. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $MAN = 45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABMQ$ và $ADNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải



a). Gọi E là giao điểm của AN và BC.

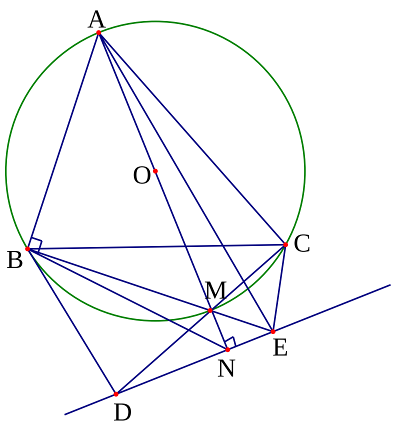
Các điểm M và Q nằm trên hai cạnh EB và EA của tam giác EBA, nên tứ giác $ABMQ$ là lồi. Các đỉnh A và B cùng nhìn đoạn thẳng MQ dưới một góc 45^0 không đổi. Vì vậy tứ giác $ABMQ$ nội tiếp.

Lập luận tương tự ta suy ra tứ giác $ADNP$ nội tiếp.

b) Từ kết quả câu a, suy ra $ADP = ANP = 45^0, QAM = QBM = 45^0 \Rightarrow NP \perp AM, MQ \perp AN$. Tập hợp các điểm P, Q, C nhìn đoạn MN dưới một góc vuông, nên các điểm này nằm trên đường tròn đường kính MN.

Bài 9. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM; CM, BM cắt d lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Kẻ đường kính AM cắt d tại N.

Ta có $ANE = ABE = 90^0$ nên tứ giác ABNE nội tiếp, suy ra $BEN = BAN$.

Mặt khác $BAN = BCM$, do đó $BCM = BEN$ hay $BCD = BED$.

Tứ giác BCDE có các đỉnh C và E cùng nhìn đoạn thẳng BD dưới một góc không đổi. Vì vậy tứ giác BCDE nội tiếp.

Vậy B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

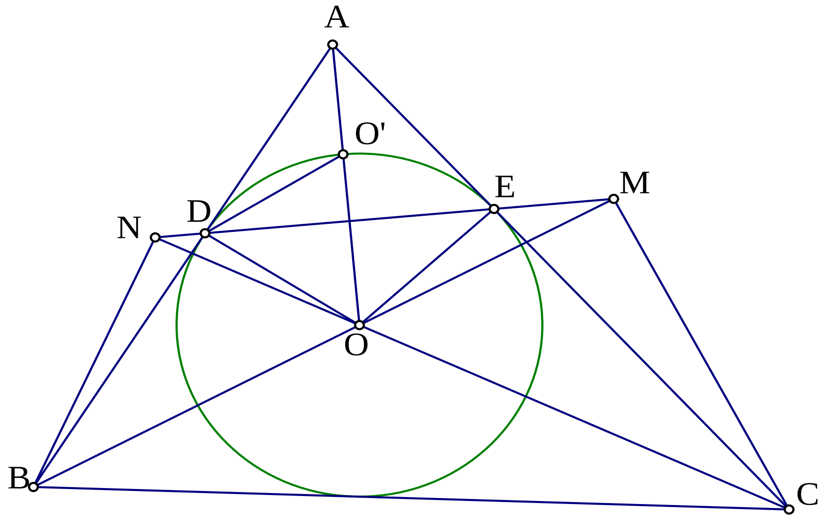
Bài 10. Cho đường tròn $O;R$ nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE, tính OO' theo R.

b) Các đường phân giác trong của B và C cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{EN}{AB}$.

Lời giải



a). Gọi O' là giao điểm của AO với cung nhỏ DE của đường tròn O $\Rightarrow O'$ thuộc đường phân giác của A trong ΔADE.

Ta có $DOA = EOA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow DO' = O'E$.

Mà $ADO' = \dfrac{1}{2}$sđ$DO'; EDO' = \dfrac{1}{2}$sđ$O'E$ $\Rightarrow ADO' = EDO' \Rightarrow DO'$ là phân giác $D \Rightarrow O'$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE. Do đó $OO' = R$.

b) Do $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A nên $ADE = \dfrac{180^0 - BAC}{2} = 90^0 - \dfrac{BAC}{2}$.

Mà $ADE = ABM + NMB = \frac{ABC}{2} + NMB$ (do BO là phân giác ABC nên $ABM = \frac{ABC}{2}$)

$\Rightarrow NMB = ADE - \frac{B}{2} = 90^0 - \frac{BAC + ABC}{2} = \frac{ACB}{2}$.

Mặt khác $NCB = \frac{ACB}{2}$ (do CO là tia phân giác ACB).

Suy ra $NMB = NCB$, mà M, C là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $BCMN \Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp (vì cùng thuộc một cung chứa góc).

c) ΔNMO và ΔBCO có $NOM = BOC$ (đối đỉnh); $NMO = BCO$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NMO \sim \Delta BCO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{BC}$.

Tương tự $\Delta DMO \backsim \Delta ACO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DM}{AC} = \frac{OM}{OC}$;

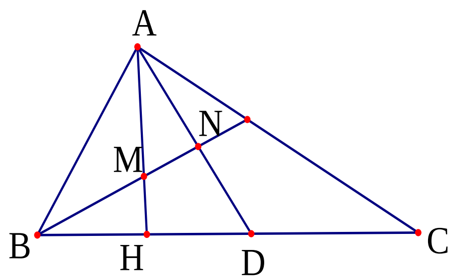
$\Delta NEO \sim \Delta BAO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{ON}{OB}$.

Vậy $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc HAC. Phân giác trong góc ABC cắt AH, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng: $\mathrm{BND} = 90^0$.

Lời giải

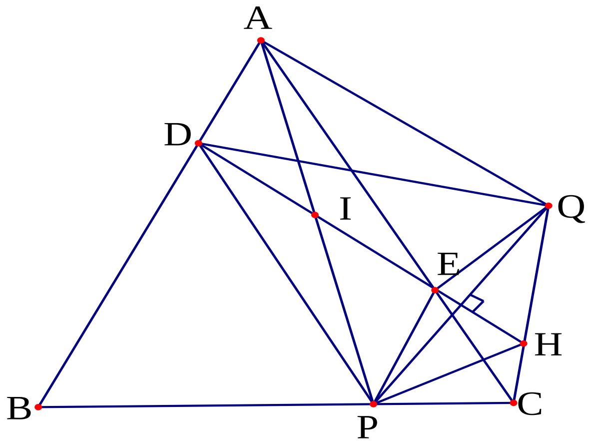
Phân tích: Ta có $\mathrm{MHD} = 90^0$. Nếu $\mathrm{MND} = 90^0$ thì tứ giác MHDN nội tiếp. Vì vậy thay vì trực tiếp chỉ ra góc $\mathrm{BND} = 90^0$ ta sẽ đi chứng minh tứ giác MHDN nội tiếp. Tức là ta chứng minh $\mathrm{AMN} = \mathrm{ADH}$.



Thật vậy ta có $\mathrm{AMN} = \mathrm{BMH} = 90^0 - \mathrm{MBH}$, $\mathrm{NDH} = 90^0 - \mathrm{HAD}$ mà $\mathrm{MBH} = \frac{1}{2}\mathrm{ABC}, \mathrm{HAD} = \frac{1}{2}\mathrm{HAC}$ và $\mathrm{ABC} = \mathrm{HAC}$ do cùng phụ với góc BCA từ đó suy ra $\mathrm{AMN} = \mathrm{ADH}$ hay tứ giác MHDN nội tiếp $\Rightarrow \mathrm{MND} = \mathrm{MHD} = 90^0$

Bài 12. Cho tam giác cân ABC $(\mathrm{AB} = \mathrm{AC})$ P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với AB, AC $(\mathrm{E} \in \mathrm{AC}, \mathrm{D} \in \mathrm{AB})$ gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE. Chứng minh bốn điểm $\mathrm{Q}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Bài toán có 2 giả thiết cần lưu ý. Đó là các đường thẳng song song với 2 cạnh tam giác , và điểm Q đối xứng với P qua DE. Do đó ta sẽ có: $AD = EP = EC = EQ$ và $DP = DQ$ (Đây là chìa khóa để ta giải bài toán này)

Từ định hướng đó ta có lời giải như sau:

Do $AD//PE, PD//AE \Rightarrow ADPE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = DP = DQ$.

Mặt khác do P,Q đối xứng nhau qua $DE \Rightarrow AD = PE = EQ$. Suy ra $DAQE$ là hình thang cân $\Rightarrow DAQ = AQE$.

Kéo dài DE cắt CQ tại H ta có $DAQ = AQE = PEH$.

Như vậy để chứng minh $ABCQ$ nội tiếp ta cần chứng minh: $PCH + PEH = 180^0 \Leftrightarrow PEHC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác ta có: $ECQ = EQC$ (do tam giác EQC cân), $EPH = EQH$ (Do tính đối xứng) suy ra $ECH = EPH \Leftrightarrow EPCH$ là tứ giác nội tiếp.

CHỦ ĐỀ 2

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1

ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

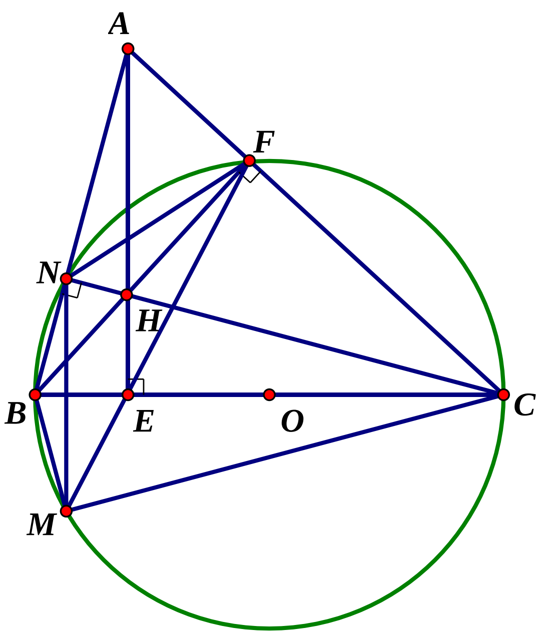
Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE, BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

Ta có:

$$HF \perp AC\left(gt\right) \Rightarrow HFC = 90°$$

$$HE \perp BC\left(gt\right) \Rightarrow HEC = 90°$$

Xét tứ giác $CEHF$ có: $HFC + HEC = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow CEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

Ta có:

$$HN \perp AB\left(gt\right) \Rightarrow ANH = 90°$$

$HF \perp AC\left(gt\right) \Rightarrow AFH = 90°$

Xét tứ giác $AFHN$ có: $ANH + AFH = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow AFHN$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow NAH = NFH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HN) (1)

Tứ giác $HECF$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow HFE = HCE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HE). (2)

Ta có: $BAE = NCB$ (hai góc cùng phụ với ABC) $\Rightarrow NAH = HCE$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $NFH = HFE$ hay $NFB = BFM$.

Xét $\left(O\right)$ có: $NFB = BFM$:

$\Rightarrow sdBN = sdBM$ (hai góc nội tiếp bằng nhau hai cung chắn bằng nhau).

$\Rightarrow BN = BM$ (hai cung chắn bằng nhau hai dây bằng nhau) (đpcm).

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Xét hai tam giác vuông FAH và FBH ta có:

$AH = BC$ (giả thiết)

$FAH = FBC$ (vì cùng phụ với góc ACE)

Vậy $\Delta FAH = \Delta FBC$

$\Rightarrow FA = FB$

Mặt khác tam giác AFB vuông có $FA = FB$ nên nó vuông cân

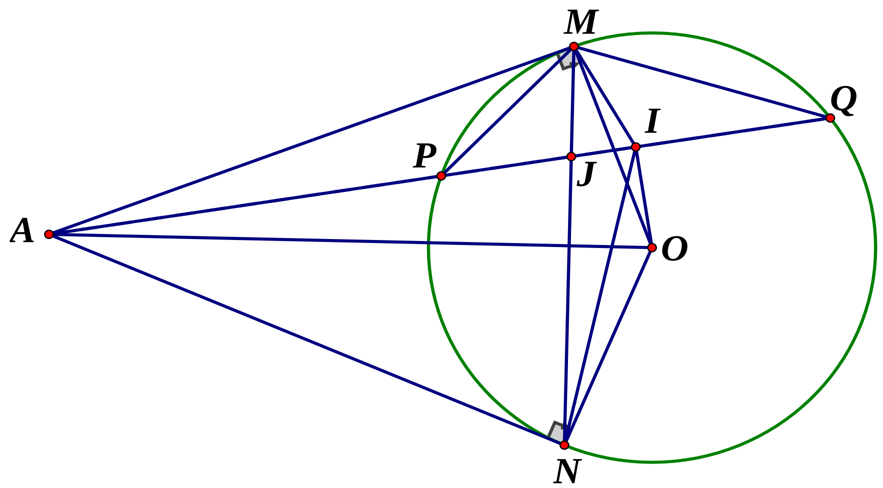
Vậy $BAC = 45^\circ$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn $\left(O\right)$(M, N *là các tiếp điểm).* Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q, dây cung PQ không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm của đoạn PQ, J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN. Chứng minh rằng :

a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM. Và $AP.AQ = AI.AJ$

Lời giải



a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

- Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn

Xét đường tròn (O) có I là trung điểm của dây cung PQ (dây PQ không đi qua tâm O)

$\Rightarrow OI \perp PQ \Rightarrow \angle PIO = 90° \Rightarrow \angle AIO = 90°$

$\Rightarrow \Delta AIO$ vuông tại I $\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AO

AM là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \angle AMO = 90°$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn)

$\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AO

Cmtt suy ra N thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO

- $\angle JIM = \angle JIN$

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OA$ là phân giác của $\angle MON$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle AOM = \angle AON$. Ta có :

$\angle AOM = \angle AIM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\angle AON = \angle AIN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN) mà $\angle AOM = \angle AON\,(cmt)$

$\Rightarrow \angle AIM = \angle AIN \Rightarrow \angle JIM = \angle JIN (dfcm)$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM. Và $AP.AQ = AI.AJ$

Xét (O) có : $\angle MQP = \angle AMP$ (cùng chắn cung PM) $\Rightarrow \angle MQA = \angle AMP$

Xét ΔAMP và ΔAQM có :

$\angle MAQ\, chung,\ \angle AMP = \angle MQA \Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta AQM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AM}{AQ}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AP.AQ = AM^2\,(1)$

Ta có : $\angle AMN = \angle AIN$ (cùng chắn cung AN) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle JIN$

Mà $\angle JIM = \angle JIN (cmt) \Rightarrow \angle AMJ = \angle JIM$ (do $\angle JIM = \angle JIN - cmt$) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle AIM$

Xét ΔAMJ và ΔAIM có :

$\angle MAI\ chung,\ \angle AMJ = \angle AIM\,(cmt) \Rightarrow \Delta AMJ \sim \Delta AIM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AJ}{AM}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AI.AJ = AM^2 \, (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AP.AQ = AI.AJ \, (dfcm)$

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại F. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

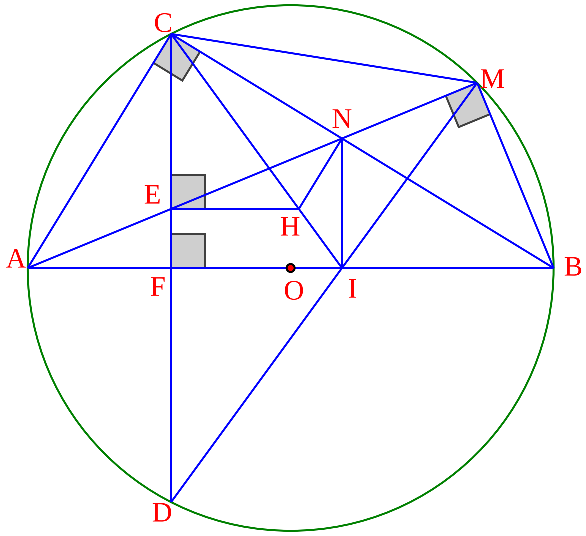
a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB, N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Lời giải



a) Xét tứ giác $BMEF$ có:

$BFE = 90^0$ (gt)

$BFE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BFE + BME = 180^0$

Mà hai góc BFE, BME nằm ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Ta có $AB \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm của CD (mối liên hệ giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow AB$ là đường trung trực của CD $\Rightarrow$ sđ AC = sđ AD

Ta có $AMC = \dfrac{1}{2}$ sđ AC và $AMD = \dfrac{1}{2}$ sđ AD

$\Rightarrow AMC = AMD \Rightarrow AM$ là phân giác của CMD

c) Xét ΔACE và ΔAMC có: A : chung

$AMC = \dfrac{1}{2}$ sđ AC và $ACD = \dfrac{1}{2}$ sđ $AD \Rightarrow AMC = ACD$

$\Rightarrow \Delta ACE \backsim \Delta AMC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE.AM$

d) Trên CI lấy điểm H sao cho HE vuông góc với CD

Cần chứng minh tứ giác $CEHN$ nội tiếp đường tròn đường kính CH, ta đi chứng minh $CNE = CHE$

Ta có: $NMI = NBI \left(= \dfrac{1}{2} sd\, AC \right) \Rightarrow$ tứ giác $BMNI$ nội tiếp

$\Rightarrow NIB + NMB = 180^0 \Rightarrow NIB = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACNI$ nội tiếp

Ta có: $CHE = CIA$ (đồng vị); $CNE = CIA$ (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow CNE = CHE \Rightarrow$ tứ giác $CEHN$ nội tiếp

Mà $CEH = 90^0 \Rightarrow CH$ là đường kính

$\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên CI.

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngài tại A $(R > r)$. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M.

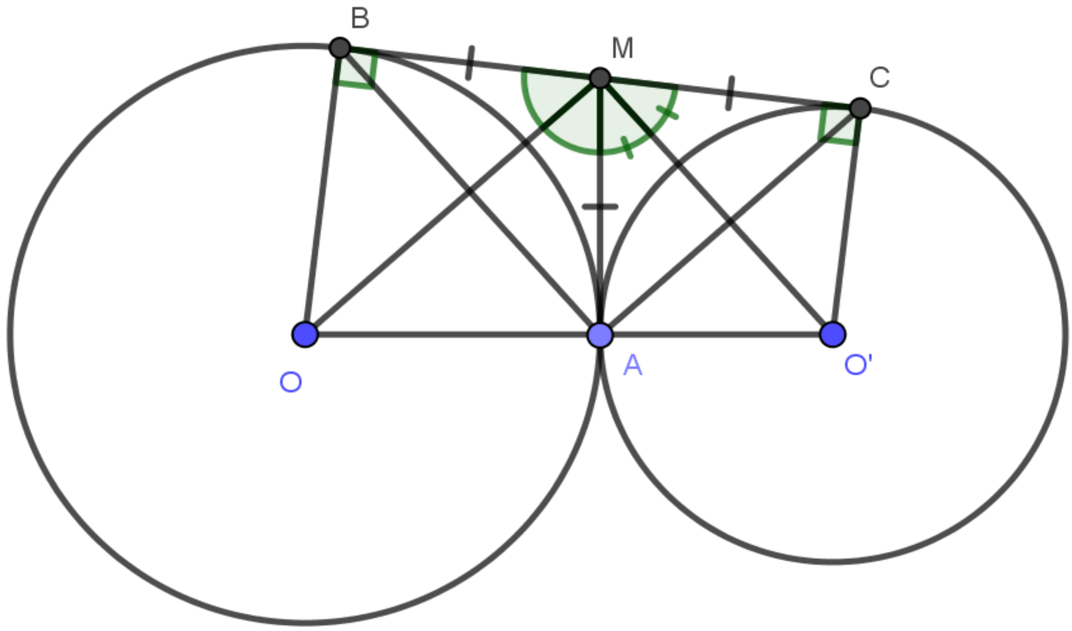
a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM. Chứng minh $OO' = 2IK$.

Lời giải

a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.



Vì MA và MB là tiếp tuyến của (O) nên MO

là tia phân giác của AMB. Do đó $OMA = \frac{1}{2}BMA$

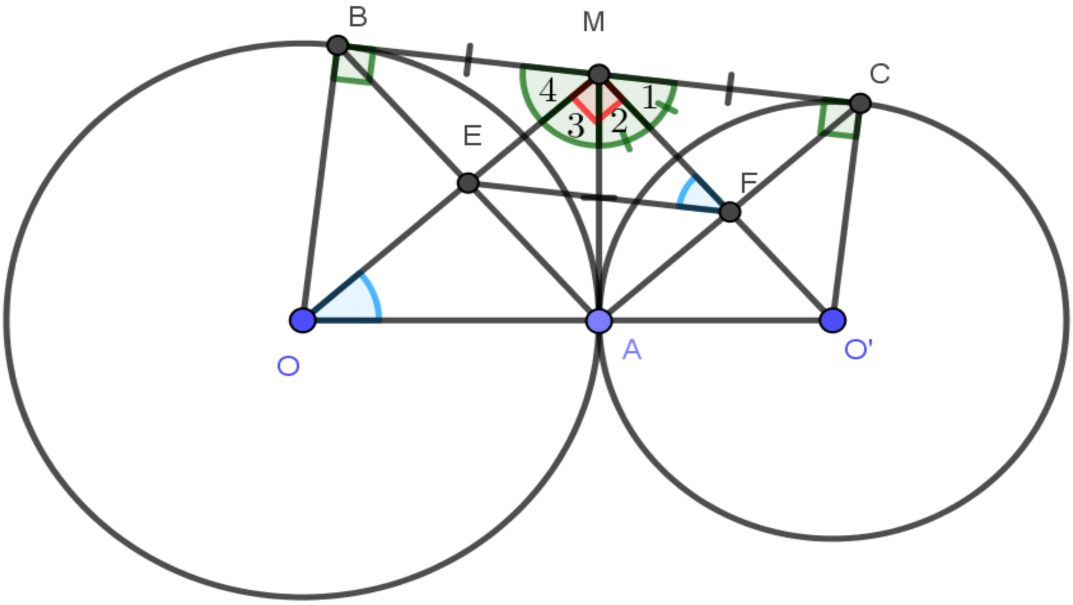
MA và MC là tiếp tuyến của (O') nên MO'

là tia phân giác của AMC. Do đó $O'MA = \frac{1}{2}CMA$

Suy ra $OMO' = OMA + O'MA = \frac{1}{2}(BMA + CMA) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$

$\Rightarrow OM \perp O'M$

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.



Ta có:

$MB = MA$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OB = OA$ (bán kính R)

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại $E \Rightarrow MEA = 90^0$

Tương tự, ta có: $MFA = 90^0$

Xét tứ giác $MEAF$ có: $MEA = MFE = OMO' = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $MEAF$ là hình chữ nhật (theo dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow MEAF$ là tứ giác nội tiếp

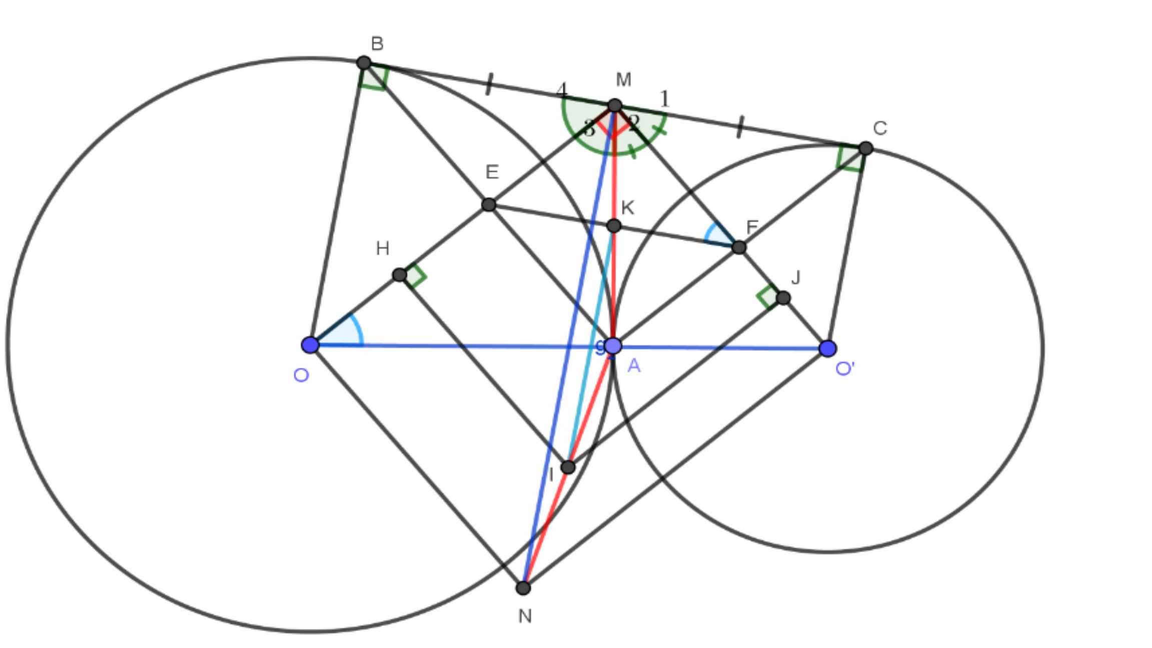
$\Rightarrow MFE = MAE$

Trong tam giác vuông AOM , ta có $MAE = OAE$

Vì vậy $MFE = EOO'$

Do đó, tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn (góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.



Cần xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$

Vẽ hai đường trung trực của hai đoạn thẳng EO và FO' lần lượt cắt EO và FO' tại H và J. Hai đường trung trực này cắt nhau tại I. I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$.

Qua O vẽ đường thẳng song song với MO'. Qua O' vẽ đường thẳng song song với MO. Hai đường thẳng này cắt nhau tại N. Theo cách vẽ ta được tứ giác $MONO'$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông).

Suy ra $OO' = MN$ (hai đường chéo của hình chữ nhật)

Chứng minh I là trung điểm của AN:

Hình thang $AEON$ có $HE = HO$ và $HI // EA // ON$

$\Rightarrow HI$ đi qua trung điểm của AN (1)

Tương tự, ta có JI đi qua trung điểm của AN (2)

Mà $I = HI \cap JI$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow I$ là trung điểm của AN

Xét ΔAMN có IK là đường trung bình của tam giác

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}MN$

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}OO'$

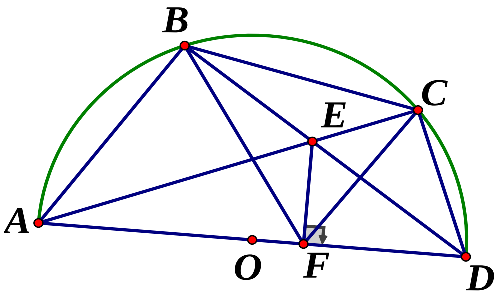
Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E. Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với $AD\left(F \in AD\right)$

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

B thuộc (O) $\Rightarrow \angle ABD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle ABE = 90°$

$EF \perp AD(gt) \Rightarrow \angle AFE = 90°$

Xét tứ giác $ABEF$ có $\angle ABE + \angle AFE = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này đối nhau

$\Rightarrow ABEF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

$C \in (O) \Rightarrow \angle ACD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔAFE và ΔACD có :

$\angle CAD\, chung,\ \angle AFE = \angle ACD = 90°$

$\Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AC.AE = AF.AD(dfcm)$

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

*Ta chứng minh FE là phân giác của $\angle BFC$

Xét $(O): \angle BAC = \angle BDC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \angle BAE = \angle EDC(1)$

Tứ giác $ABEF$ nội tiếp (cmt) nên $\angle BAE = \angle BFE$ (cùng chắn cung BE)(2)

Tứ giác $CDFE$ có $\angle ECD + \angle EFD = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

Nên $CDFE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle EFC = \angle EDC$ (cùng chắn cung EC) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle BFE = \angle EFC \Rightarrow FE$ là phân giác của $\angle BFC$

*Chứng minh CE là phân giác của góc BCF

Xét (O) có $\angle ACB = \angle ADB$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \angle ECB = \angle EDF$

Tứ giác $CDFE$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle ECF = \angle EDF$ (cùng chắn cung EF)

Suy ra $\angle ECB = \angle ECF \Rightarrow CE$ là phân giác $\angle BCF$

ΔBCF có FE, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại E

Nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $BCF(dfcm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

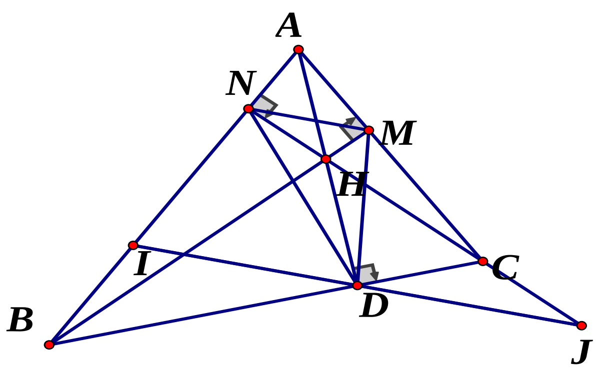
Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC.$ Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và $BC.$ Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại $I, J.$ Chứng minh D là trung điểm IJ

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

Ta có $\begin{cases} HM \perp AC \\ HN \perp AB \end{cases} \Rightarrow \angle HMA = \angle HNA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle HMA + \angle HNA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$ mà 2 góc này là hai góc đối nhau nên tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và $BC.$ Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

Tương tự câu a, ta có

$\angle HMC = \angle HDM = 90^\circ \Rightarrow HDCM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HCM$ (cùng chắn cun HM)

$\angle HDB = \angle HNB = 90^\circ \Rightarrow HDBN$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle NDH = \angle NBH$ (cùng chắn cung HN)

Mà $\angle HCM = \angle NBH$ (cùng phụ với $\angle BAC$)

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HDN \Rightarrow AD$ là phân giác của $\angle MDN\,(dfcm)$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại $I, J.$ Chứng minh D là trung điểm IJ

Ta có :

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle HNM = \angle HAM$ (cùng chắn cung HM)

Mà $\angle HAM = \angle HBD$ (cùng phụ với $\angle ACB$)

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp $(cmt) \Rightarrow \angle HBD = \angle HND$ (cùng chắn cung HD)

$\Rightarrow \angle HNM = \angle HND$

Ta lại có $IJ // MN(gt) \Rightarrow \angle HNM = \angle HJI = \angle HJD$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \angle HND = \angle HJD \Rightarrow \Delta DNJ$ cân tại D nên $DN = DJ\,(1)$

Vì $\angle HND = \angle HJD(cmt) \Rightarrow 90° - \angle HND = 90° - \angle HJD \Rightarrow \angle DNI = \angle NID$

Suy ra ΔNID cân tại D $\Rightarrow DN = DI\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $DI = DJ\,(= DN)$

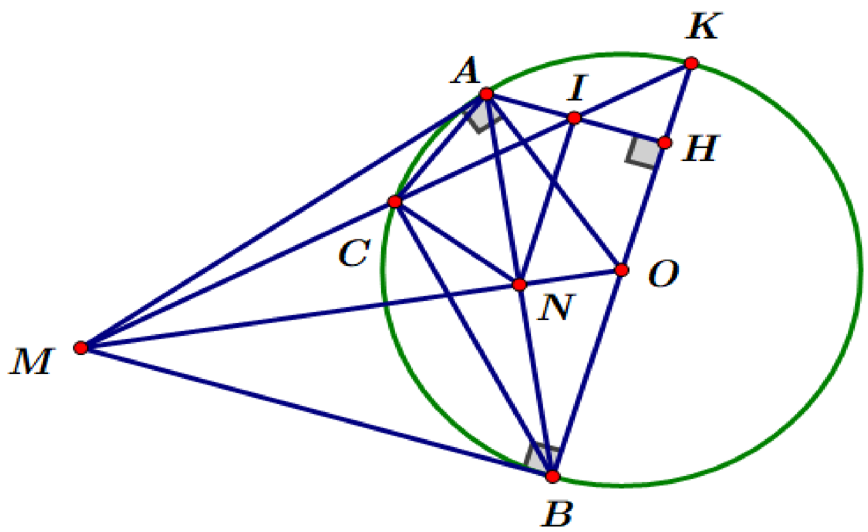
Vậy D là trung điểm $IJ\,(dfcm)$

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M. ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O)(A, B$ là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK. Điểm I là giao điểm của AH, MK. Chứng minh I là trung điểm của HA.

Lời giải



a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại A, B nên $MAO = MBO = 90°$ (định nghĩa).

Tứ giác $MAOB$ có $MAO + MBO = 180°$.

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng bằng $180°$).

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK. Điểm I là giao điểm của AH, MK. Chứng minh I là trung điểm của HA.

Gọi N là giao điểm của AB với MO.

C là giao điểm giữa MK với đường tròn (O)

Ta có: $OA = OB \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB.

Tứ giác $MCNB$ có $MCB = MNB = 90°$. Suy ra tứ giác $MCNB$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow NMB = NCB$ (hai góc cùng chắn một cung BN)

Ta có: $NMB = NBO$ (cùng phụ với MBN)

$\Rightarrow NCB = NBO.$

Lại có: $NCB + NCI = 90°, NAI + NBO = 90°$

Suy ra $NCI = NAI$.

Xét tứ giác $ACNI$ có: $NCI = NAI(cmt)$, suy ra tứ giác $ACNI$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow ANI = ACI$ (hai góc cùng chắn cung AI).

Trong (O) có: $ACI = ABK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Suy ra $ANI = ABK$. Mà hai góc này vị trí đồng vị $\Rightarrow NI // BK$

Tam giác ABK có: $\begin{cases} NI // BK \\ NA = NB = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}$

Suy ra I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IH$ (định lí đường trung bình của tam giác) (đpcm).

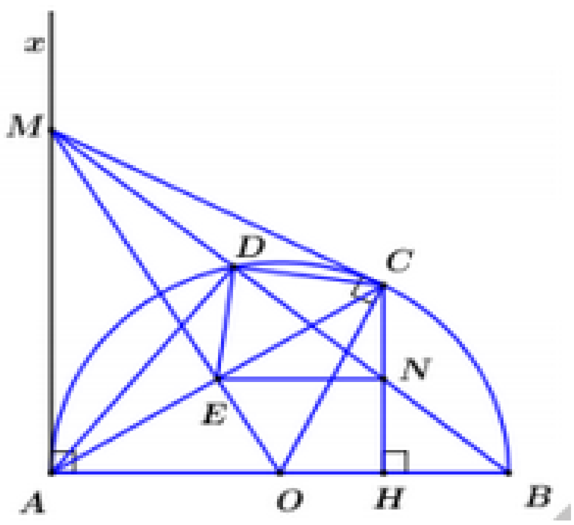
Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB. Lấy một điểm M trên tia $Ax(M \neq A)$. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E, Vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D(D \neq B)$.

a) Chứng minh : Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với $AB(H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác AMDE nội tiếp trong một đường tròn.

Ta có: $OA = OC \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AC.

$MA = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AC.

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AC \Rightarrow OM \perp AC$ tại $E \Rightarrow AEM = 90^\circ$.

Ta có $ADB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow ADM = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AMDE$ có $AEM = ADM = 90^\circ (cmt) \Rightarrow AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính

AM (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn AM dưới một góc 90°).

***b) Chứng minh** $MA^2 = MD,MB$.*

Xét ΔMAD và ΔMBA có:

AMB chung;

$MDA = MAB = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta MAD \sim \Delta MBA (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MA}$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow MA^2 = MD.MB.$

***c) Vẽ** CH **vuông góc với** $AB (H \in AB)$. **Chứng minh rằng** MB **đi qua trung điểm của đoạn thẳng** CH.*

Gọi $MB \cap CH = \{N\}$.

Vì $AEDM$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $DEC = AMD$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Mà $AMD = DAB$ (cùng phụ với MAD) nên $DEC = DAB$ (1).

Ta có $DNC = BNH$ (đối đỉnh), mà $\begin{cases} BNH + NBH = 90^\circ \\ DAB + NBH = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow BNH = DAB \Rightarrow DNC = DAB$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow DEC = DNC$.

$\Rightarrow DENC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow DNE = DCE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE).

Mà $DCE = DCA = DBA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DA).

$\Rightarrow DNE = DBA$. Mà 2 góc này nằm ở vị trí 2 góc đồng vị nên $EN // AB$ hay $EN // AH$.

Lại có: E là trung điểm của AC (do OM là trung trực của $AC, OM \cap AC = \{E\}$).

$\Rightarrow N$ là trung điểm của CH (định lí đường trung bình trong tam giác ACH).

Vậy MB đi qua N là trung điểm của CH (đpcm).

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại $A\,(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA, gọi D là giao điểm của d và

d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

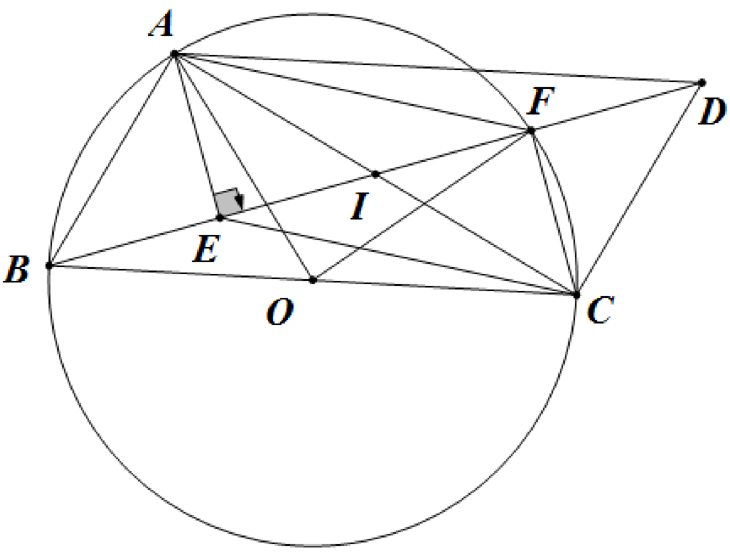
a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $AOF = 2CAE$

c) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Lời giải



a) ta có $BAC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB // CD$ nên $ACD = BAC = 90°$ (hai góc so le trong)

Suy ra $AED = ACD = 90° \Rightarrow E; C$ cùng nhìn AD dưới góc $90°$ do đó tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow CAE = CDE$ (2 góc nội tiếp chắn cung EC)

$AB // CD \Rightarrow CDE = ABD$ (so le trong)

$\Rightarrow CAE = ABD$

Mà ABD là góc ở tâm; AOF là góc nội tiếp chắn cung AF $\Rightarrow AOF = 2.ABD$ hay $AOF = 2.CAE$

c) Ta có $BFC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE // CF$ (cùng vuông góc với BD)

Lại có $AFB = ACB = CAD = FEC \Rightarrow AF // EC$

Do đó tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) Gọi giao điểm của AC và BD là I, do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên

$IA = IC; IB = ID; AB = CD$

Xét tam giác DCI vuông tại C có CF là đường cao nên $CD^2 = DF.DI \Rightarrow AB^2 = DF.DI$

$\Rightarrow 2AB^2 = 2.DF.DI$ mà $2DI = BD$ do đó $2AB^2 = DF.BD$.

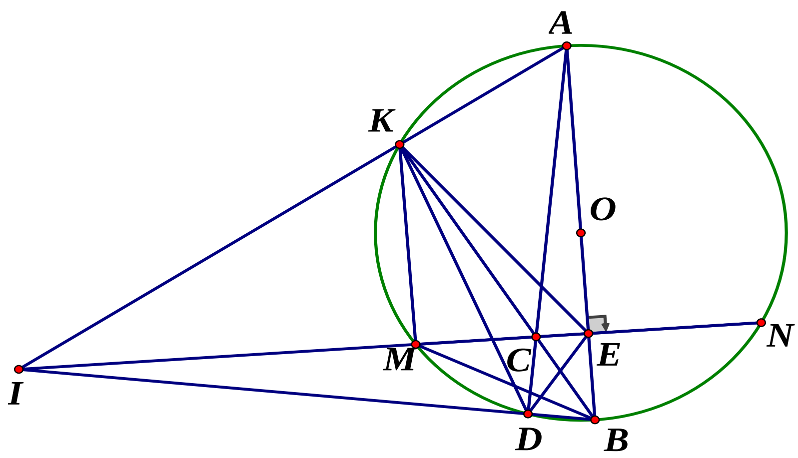
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E. Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M,N,E). Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng $AK, MN; D$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Lời giải



1) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $\angle AKE = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle AKC = 90°$

$AB \perp MN$ tại E nên $\angle AEC = 90°$

Xét tứ giác $AKCE$ có $\angle AKC + \angle AEC = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

Ta có $AB \perp MN$ nên B là điểm chính giữa cung $MN \Rightarrow sd\,BM = sd\,BN$

$\Rightarrow \angle BMN = \angle MKB$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \angle BMC = \angle BKM$

Xét ΔBCM và ΔBMK có :

$\angle MBK\ chung, \angle BMC = \angle BKM\,(cmt) \Rightarrow \Delta BCM \sim \Delta BMK(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{BM}{BK} \Rightarrow BM^2 = BC.BK\,(dfcm)$$

3) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng $AK, MN; D$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Tam giác ABI có $BK \perp AI\ (do\ \angle AKB = 90°), IE \perp AB\,(do\ AB \perp MN)$

$\Rightarrow BK, IE$ là hai đường cao của $\Delta ABI \Rightarrow C$ là trực tâm $\Delta ABI \Rightarrow AD$ là đường cao của tam giác $ABI \Rightarrow AD \perp IB \Rightarrow \angle ADB = 90°$

Mà AB là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow D \in (O)$

Xét (O) có :

$\angle ADK = \angle ABK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

$\angle DKB = \angle DAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Tứ giác $AKCE$ nội tiếp $(cmt) \Rightarrow \angle CKE = \angle CAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

$\Rightarrow \angle BKE = \angle DAB \Rightarrow \angle DKB = \angle DAB$

$\Rightarrow KB$ là tia phân giác của $\angle DKE$

Tứ giác $BDCE$ có : $\angle BDC + \angle CEB = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow BDCE$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle CDE = \angle CBE$ (cùng chắn cung CE) $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABK \Rightarrow \angle ADK = \angle ADE$

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\angle EDK$

Tam giác DEK có :

KB là tia phân giác của $\angle DKE$, DA là tia phân giác của $\angle EDK$

Mà C là giao điểm của $KB, DA \Rightarrow C$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEK

Vậy C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

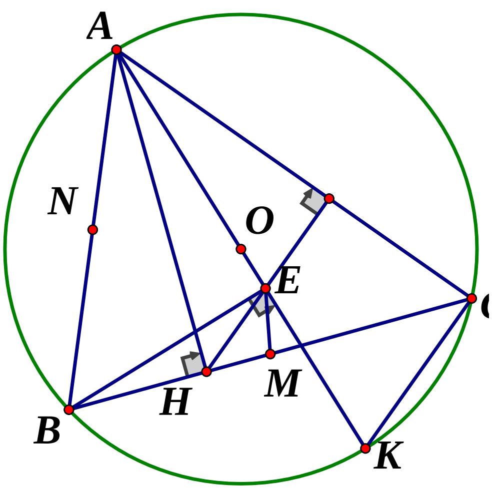
Bài 11. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nôi tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tỉ số $\dfrac{ME}{MH}$

Lời giải



a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nôi tiếp

Ta có :

$AH \perp BC \Rightarrow \angle AHB = 90°$, $AE \perp BE \Rightarrow \angle AEB = 90°$

Tứ giác $AEHB$ có $\angle AHB = \angle AEB = 90°$ cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc không đổi

$\Rightarrow AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại K khi đó AK là đường kính của đường tròn tâm O, ta có C thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow \angle ACK = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CK \perp AC$

Tứ giác $AEHB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle EHC = \angle BAE$ (hai góc cùng bù với $\angle BHE$)

$\Rightarrow \angle EHC = \angle BAK$

Xét (O) có : $\angle BAK = \angle BCK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

$\Rightarrow \angle EHC = \angle BCK$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE // CK$

Ta có $\begin{cases} CK \perp AC(cmt) \\ CK // HE \end{cases} \Rightarrow HE \perp AC(dfcm)$

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tỉ số $\dfrac{ME}{MH}$

Gọi N là trung điểm của AB

Ta có N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABHE \Rightarrow NE = NH\,(1)$

Tam giác ABC có : M, N lần lượt là trung điểm BC, AB

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // AC$

Mà $HE \perp AC(cmt) \Rightarrow MN \perp HE\,(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow MN$ là đường trung trực của $HE \Rightarrow MH = ME \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = 1$

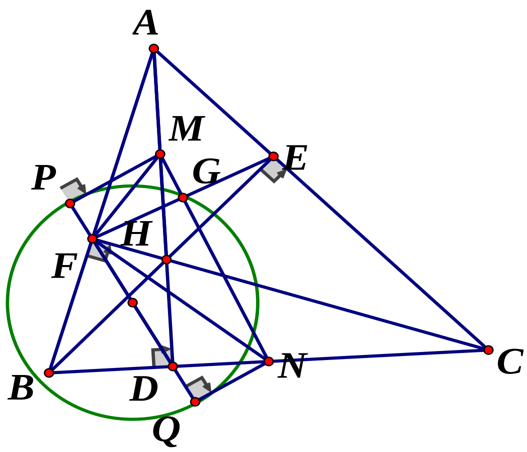
Bài 12. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng $FM.FC = FN.FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Lời giải



a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

Ta có $\angle AFH = 90°$ (do $CF \perp AB$); $\angle AEH = 90°\left(BE \perp AC\right)$

Suy ra $\angle AFH + \angle AEH = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $AEHF$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng $FM.FC = FN.FA$

Tam giác BFC vuông tại F ta có: FN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow FN = \dfrac{BC}{2}(1)$

Tam giác BEC vuông tại E ta có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow EN = \dfrac{1}{2}BC\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $FN = EN\left(*\right)$

ΔAHF vuông tại F có FM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH

$\Rightarrow FM = \dfrac{1}{2}AH\left(3\right)$

ΔAEH vuông tại E có EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AH \Rightarrow EM = \dfrac{1}{2}AH\left(4\right)$

Từ (3) và(4) suy ra $FM = ME\left(**\right)$

Từ (*) và (**) ta có MN là đường trung trực EF

Gọi G là giao điểm của MN, EF

Tam giác FME có MG là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta FME$ cân tại M có MG là phân giác $\Rightarrow \angle FMG = \dfrac{1}{2}\angle FME\left(5\right)$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FAEH$ có :

$\angle FAE = \dfrac{1}{2}\angle FME$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm chắn cung EF) (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\angle FAE = \angle FMK$ hay $\angle FAC = \angle FMN$

Ta có $FM = MH\left(= \dfrac{1}{2}AH\right) \Rightarrow \Delta FMH$ cân tại M

$\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF = \angle DHC$ (vì $\angle MHF = \angle DHC$ là hai góc đối đỉnh)

Ta có : $FN = NC\left(=\frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow \Delta FNC$ cân tại N $\Rightarrow \angle NFC = \angle NCF$

Mà $\angle DHC + \angle NCF = 90°$ (ΔDHN vuông tại D)

Suy ra $\angle MFH + \angle NFC = \angle MFN = 90°$

Xét ΔFMN và ΔFAC có:

$\angle MFN = \angle AFC = 90°, \angle FAC = \angle FMN (cmt)$

$\Rightarrow \Delta FMN \sim \Delta FAC \Rightarrow \frac{FM}{FN} = \frac{FA}{FC} \Rightarrow FM.FC = FN.FA (dfcm)$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Vì $MN \perp EF$ tại G nên $\angle MGF = 90°$

Ta có $MP \perp PQ$ tại P nên $\angle MPF = 90°$

Tứ giác $MPFG$ có : $\angle MGF + \angle MPF = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow MPFG$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle MGP = \angle MFP$ (cùng nhìn cạnh MP)

Vì $MN \perp EF$ tại G $\Rightarrow \angle FGN = 90°$

Ta có $NQ \perp PQ$ tại Q $\Rightarrow \angle NQF = 90°$

Tứ giác $NQFG$ có :

$\angle FGN + \angle NQF = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $NQFG$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle QGN = \angle QFN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN)

$\Rightarrow \angle MGP + \angle QGN = \angle MFP + \angle QFN$

Mà $\angle MFN = 90° \Rightarrow \angle MFP + \angle QFN = 90°$

$\Rightarrow \angle MFP + \angle QGN = 90° \Rightarrow \angle PGQ = 90°$

Đường tròn đường kính PQ có $\angle PGQ = 90° \Rightarrow G \in$ đường tròn đường kính PQ.

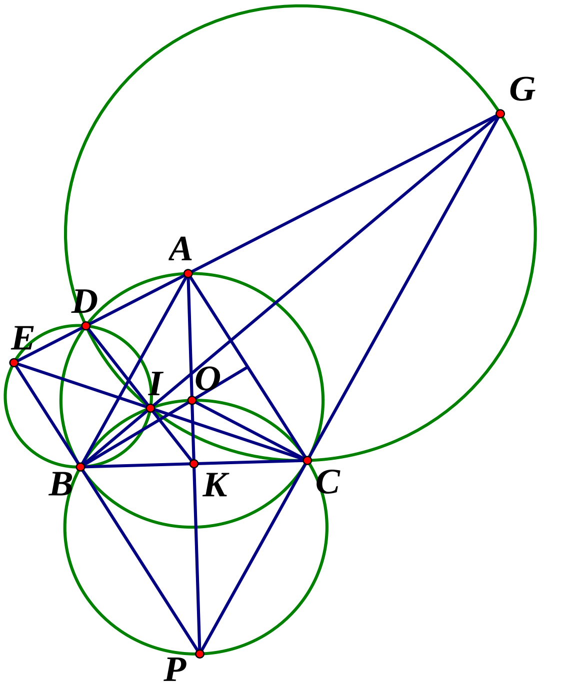
Bài 13. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ AB (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P.

$\angle EBC = 180° - \angle PBC = 180° - \angle PCB = \angle GCB$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GCD tại I' khác D. Ta có :

$\angle DI'B = 180° - \angle DEB$ và $\angle DI'C = 180° - \angle DGC$

Chú ý rằng $\angle BPC = 180° - \angle BOC = 180^0 - 120° = 60°$

Do đó $\angle BI'C = 120°$. Lại có :

$\angle BDE = \angle EI'B = 60°$ (do tứ giác $DACB$ nội tiếp và $EDI'B$ nội tiếp) dẫn đến :

E, I', C thẳng hàng. Tương tự G, I', B thẳng hàng, dẫn đến $I \equiv I'$

Do đó thu được $\angle BIC = \angle EBC = \angle GBC$ dẫn đến các tam giác $EBC; BIC$ và BCG đồng dạng với nhau.

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

Từ câu a) ta đã chỉ ra $\angle BIC = 120°$ và $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

Ta có : $\angle CIB = \angle KIB = \angle BEI = \angle IDB$ dẫn đến tam giác KIB đồng dạng với tam giác KBD

$$\Rightarrow \frac{KI}{KB} = \frac{KB}{KD} \Rightarrow BK^2 = KI.KD$$

DẠNG 2

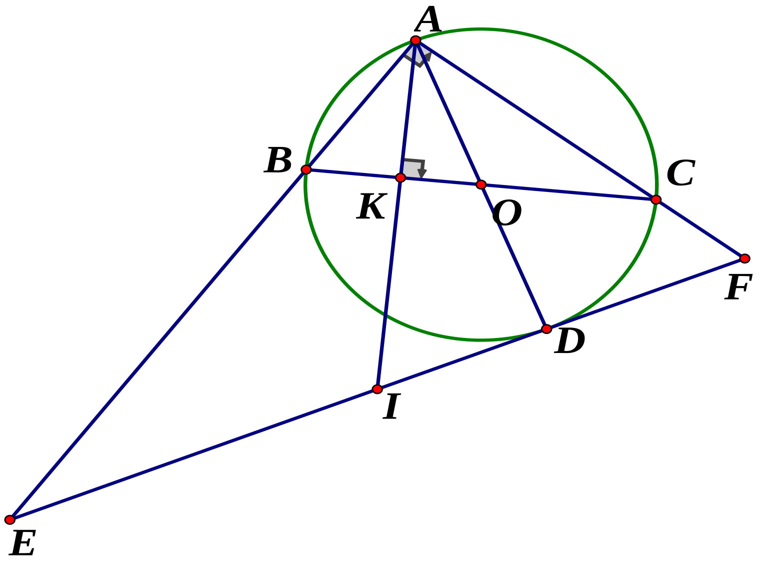
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường kính AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

EF là tiếp tuyến của (O) tại D nên $AD \perp EF$ tại D

Tam giác ADF vuông tại D nên $\angle AFD + \angle FAD = 90°$

Mà $\angle FAD + \angle OAB = \angle BAC = 90° \Rightarrow \angle AFD = \angle OAB$

Tam giác OAB có $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ (hai góc ở đáy)

$\Rightarrow \angle AFD = \angle OBA$ hay $\angle AFE = \angle ABC$

Xét ΔABC và ΔAFE có :

$\angle EAF$ chung, $\angle ABC = \angle AFE(cmt) \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AFE(g.g)(dfcm)$

b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Xét tam giác vuông AEF có AI là trung tuyến ừng với cạnh huyền EF

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF = IE = IF$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại I $\Rightarrow \angle IAE = \angle IEA = \angle AEF$

Mà $\Delta ABC \backsim \Delta AFE(cmt) \Rightarrow \angle AEF = \angle ACB$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle IAE = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle KAB$ (cùng phụ với $\angle ABC) \Rightarrow \angle IAE = \angle KBA$

Vậy A, K, I thẳng hàng (đpcm)

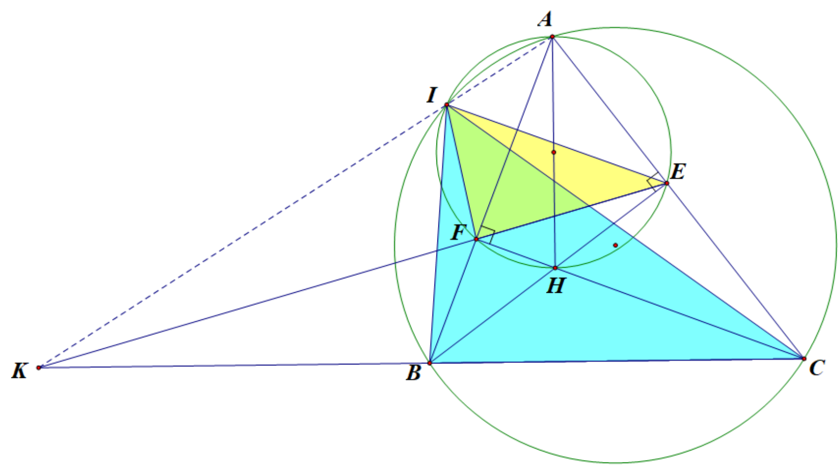
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.

c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $AFH = 90°$ (Vì CF là đường cao của tam giác ABC)

$AEH = 90°$ (Vì BE là đường cao của tam giác ABC)

Do đó $AFH + AEH = 90° + 90° = 180°$

Vậy tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp .

b) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $IEF = IAF$ (cùng chắn IF)

$IAF = IBC$ (cùng chắn IB)

Do đó $IEF = IBC$

Tương tự, $FIE = FAE$ (cùng chắn EF)

$FAE = BIC$ (cùng chắn BC)

Do đó $FIE = BIC$

Xét ΔIBC và ΔIFE, ta có: $IEF = IBC$ (cmt)

$FIE = BIC$ (cmt)

Do đó $\Delta IBC \backsim \Delta IFE\left(g-g\right)$

c)

Tứ giác $IAEF$ nội tiếp $\Rightarrow IFK = IAE$

Tứ giác $IABC$ nội tiếp $\Rightarrow IBK = IAE$

Suy ra $IFK = IBK$

Suy ra tứ giác $IFBK$ nội tiếp (có hai đỉnh B, F kề cùng nhìn cạnh IK dưới một góc bằng nhau).

Vậy $KIF + KBF = 180°$, mà $KBF = FEC = FIA$

$\Rightarrow KIF + FIA = 180°$ hay ba điểm $A,\ I,\ K$ thẳng hàng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

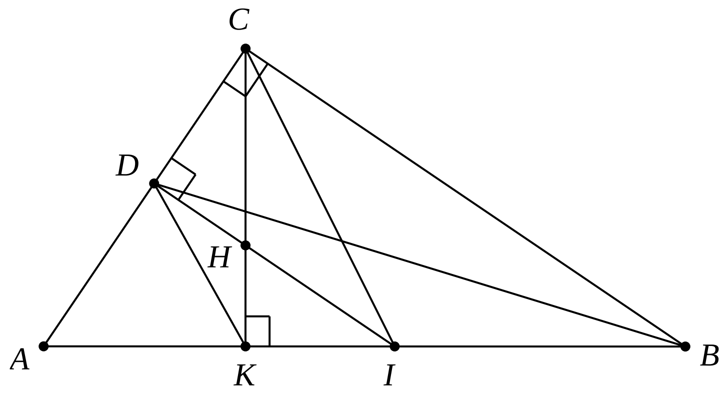
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại C (AC < BC), đường cao CK và đường phân giác BD $\left(K \in AB,\ D \in AC\right)$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I.

a) Chứng minh tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Chứng minh AC.AD = DH.AB.

c) Gọi F là trung điểm của AD. Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có : $CDI = 90^0$ (gt)

$CKI = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow CDI = CKI$

Vậy tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Ta có: BD là phân giác của tam giác ABC (gt) $\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{BC}$ (1)

Xét ΔDCH và ΔCBA có:

$CDH = BCA \left(= 90^0\right)$

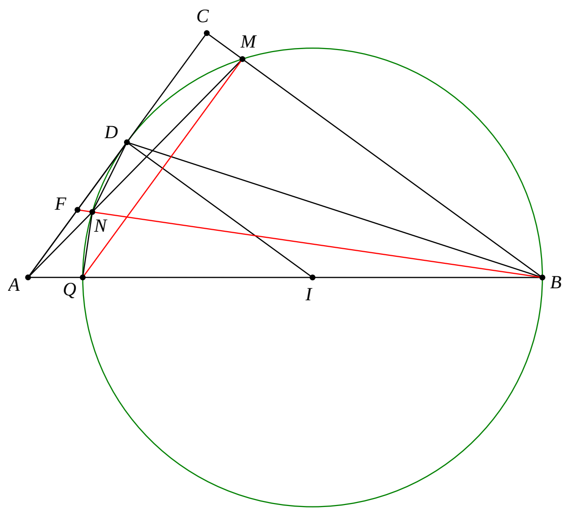
$DCH = CBA$ (cùng phụ BAC)

$\Rightarrow \Delta DCH \sim \Delta CBA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{DH}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AC.AD = AB.DH$

c)



Gọi F’ là giao điểm của BN với AD, Q là giao điểm của AB với (I).

Ta có: ID // BC (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow IDB = DBC$

Mà $DBI = DBC$ (gt)

$\Rightarrow IDB = DBI$

$\Rightarrow \Delta IDB$ cân tại I $\Rightarrow IB = ID \Rightarrow B \in (I)$

$\Rightarrow$ tứ giác BMNQ nội tiếp

$\Rightarrow NBQ = NMQ$

Ta có: $QMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow QM \perp BC$

$\Rightarrow$ QM // AC (cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow NMQ = MAD$ (so le trong)

$\Rightarrow NAF' = F'BA$

Xét $\Delta F'AN$ và $\Delta F'BA$ có:

$NAF' = F'BA$ (c/m trên)

$BF'A$ chung

$\Rightarrow \Delta F'AN \sim \Delta F'BA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{F'A}{F'B} = \dfrac{F'N}{F'A} \Rightarrow F'A^2 = F'B.F'N$ (3)

Ta lại có: $DA \perp ID$ (gt) nên DA là tiếp tuyến của (I) $\Rightarrow F'DN = NBD$

Xét $\Delta F'DN$ và $\Delta F'BD$ có:

$F'DN = NBD$ (c/m trên)

$BF'D$ chung

$\Rightarrow \Delta F'DN \sim \Delta F'BD$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{F'D}{F'B} = \dfrac{F'N}{F'D} \Rightarrow F'D^2 = F'B.F'N$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow F'A^2 = F'D^2$ $\Rightarrow$ F’A = F’D Hay F’ là trung điểm của AD

Do đó F’ trùng với F

Vậy F, N, B thẳng hàng

DẠNG 3
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

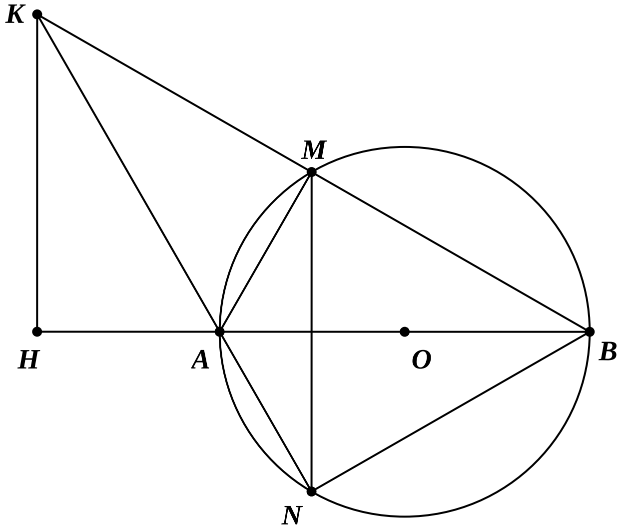
Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Tứ giác $AHKM$ có: $AHM = 90°$ (vì $KH \perp AB$)

và $AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AMK = 90°$ (kề bù với AMB)

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK.

b) Chứng minh rằng: $NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

Xét ΔANB và ΔKHB có:

+) $ANB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow ANB = KHB = 90°$;

+) Đường kính $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa MN (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

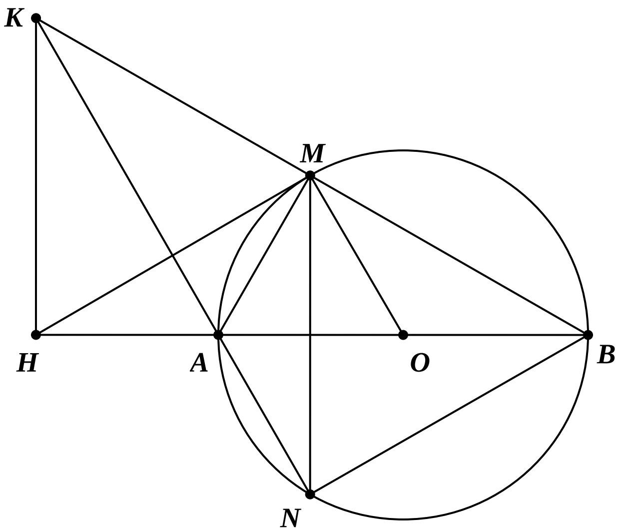
$\Rightarrow AN = AM \Rightarrow ABN = KBH$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta KHB\ (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB}$$

$\Rightarrow NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).



+) Ta có HM giao với đường tròn (O) tại M, ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow HMK = HAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn HK);

$HAK = NAB$ (hai góc đối đỉnh);

$NAB = MAB$ ($AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa MN, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$MAB = OMA$ (ΔOAM cân tại O);

$\Rightarrow HMK = OMA\left(= HAK = NAB = MAB\right) \Rightarrow HMK + HMA = OMA + HMA$;

Mà $HMK + HMA = AMK = 90^\circ$ (kề bù với $AMB = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\Rightarrow OMA + HMA = 90^\circ \Rightarrow HMO = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM$ tại $M \in (O)$

$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của (O).

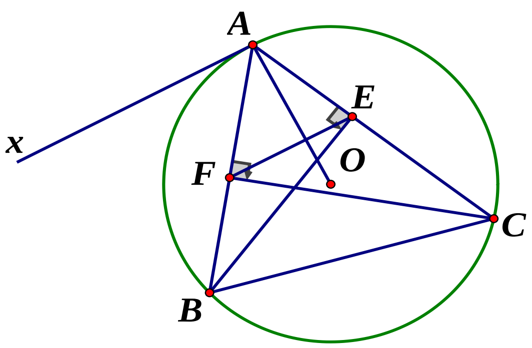
Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H\left(E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng :

a)Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

c) $OA \perp EF$

Lời giải



a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

Tứ giác $BCEF$ có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ\left(do\ BE \perp AC, CF \perp AB\right)$

Mà 2 góc này cùng nhìn cạnh BC $\Rightarrow$tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\angle FBC = \angle AEF$ (cùng bù với $\angle FEC$)

Xét ΔAEF và ΔABC có : $\angle BAC\ chung, \angle FBC = \angle AEF(cmt)$

$$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AE.BC = EF.AB(dfcm)$$

c) $OA \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến Ax đi qua điểm A của đường tròn $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$ (1)

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AFE = \angle ACB$ (góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Mà $\angle xAB = \angle ACB$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \angle AFE = \angle xAB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong) nên $Ax//EF\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp EF\,(dpcm)$

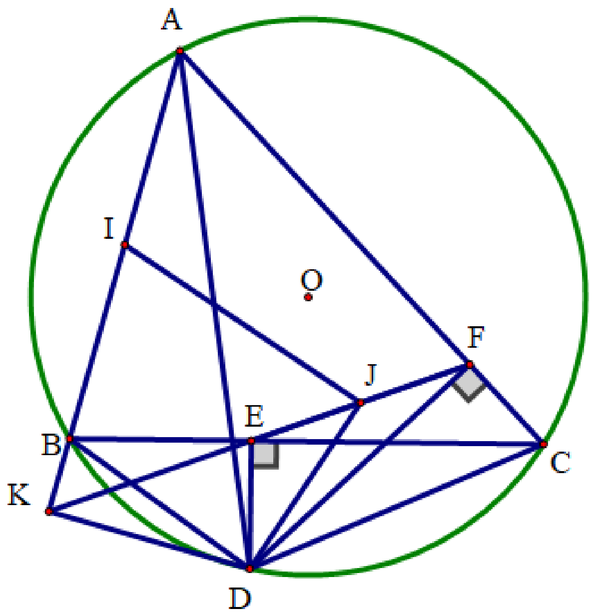
Bài 3. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn *(O), (AB < AC)*. Gọi *D* là điểm trên cung nhỏ *BC* sao cho *DB* < *DC*. Từ *D* kẻ *DE* vuông góc với *BC* (*E* thuộc *BC*), kẻ *DF* vuông góc với *AC* (*F* thuộc *AC*). Đường thẳng *EF* cắt tia *AB* tại *K*.

a) Chứng minh tứ giác *CDEF* và $DFE = DAB$.

b) Chứng minh tứ giác *DKBE* nội tiếp và *DB.DF* = *DA. DE*.

c) Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *EF*. Chứng minh *IJ* vuông góc với *DJ*.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác *CDEF* và $DFE = DAB$.

Xét tứ giác *CDEF* có:

+) $DEC = 90^0$ (*DE* vuông góc với *BC* tại *E*)

+) $DFC = 90^0$ (*DF* vuông góc với *AC* tại *F*)

$\Rightarrow$Tứ giác *CDEF* nội tiếp đường tròn đường kính *DC* (2 đỉnh *E và F* cùng nhìn cạnh *DC* dưới 1 góc vuông)

$\Rightarrow DFE = DCE = \dfrac{1}{2} sd\,DE$

Mà $DCE = DCB = DAB = \dfrac{1}{2} sd\,BD$ trong đường tròn (*O*).

Do đó: $DFE = DAB$.

b) Chứng minh tứ giác *DKBE* nội tiếp và *DB.DF* = *DA. DE*.

Ta có: $KED = DCF$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác *CDEF* nội tiếp)

$DCF = DCA = KBD$(góc ngoài bằng góc đối trong đối với tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O)).

Do đó: $KBD = KED = DCA$ không đổi.

Suy ra tứ giác $DKBE$ nội tiếp (2 đỉnh B, E cùng phía đối với cạnh KD và cùng nhìn cạnh KD dưới 1 góc không đổi)

Ta có: $EDF = ECF = \frac{1}{2} sd\, EF = BCA$

Và $BCA = BDA = \frac{1}{2} sd\, BA$ trong đường tròn (O)

Suy ra $BDA = EDF$.

Xét ΔDBA và ΔDEF có:

+) $DAB = DFE$ (chứng minh trên)

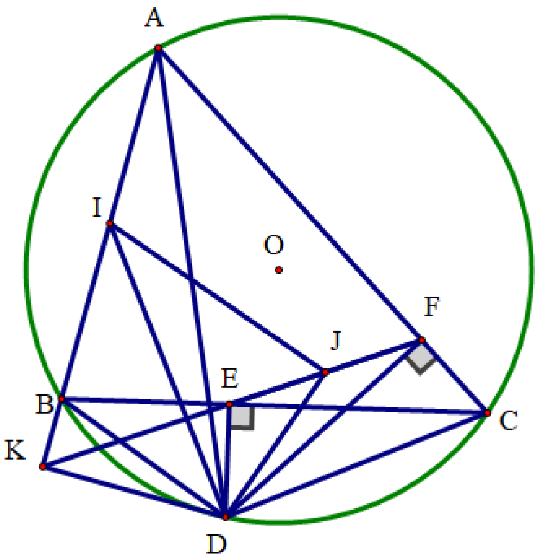
+) $BDA = EDF$ (chứng minh trên)

$\Delta DBA \backsim \Delta DEF$ (góc - góc)

$\Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DA}{DF} = \frac{BA}{EF}$ (*)

$\Rightarrow DB.DF = DA.DE$ (điều phải chứng minh)

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF. Chứng minh IJ vuông góc với DJ.



Từ (*) và I, J lần lượt là trung điểm của AB, EF nên ta có:

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{2IB}{2JE} = \frac{IB}{JE}$$

Xét ΔDBI và ΔDEJ ta có:

+) $DBI = DEJ$ ($\Delta DBA \backsim \Delta DEF$ chứng minh trên)

+) $\frac{DB}{DE} = \frac{IB}{JE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DBI \backsim \Delta DEJ$ (cạnh – góc – cạnh)

$\Rightarrow DIB = DJE \Rightarrow KID = KJD$ = góc không đổi.

$\Rightarrow$Tứ giác *IKDJ* nội tiếp (2 đỉnh *I, J* cùng phía với cạnh *KD* và cùng nhìn cạnh *KD* dưới 1 góc không đổi)

$\Rightarrow IKD + IJD = 180^0$.

Mà tứ giác *DKBE* nội tiếp nên $IKD = BKD = 180^0 - BED = 90^0$

Do đó: IJD vuông hay *IJ* vuông góc với *DJ*.

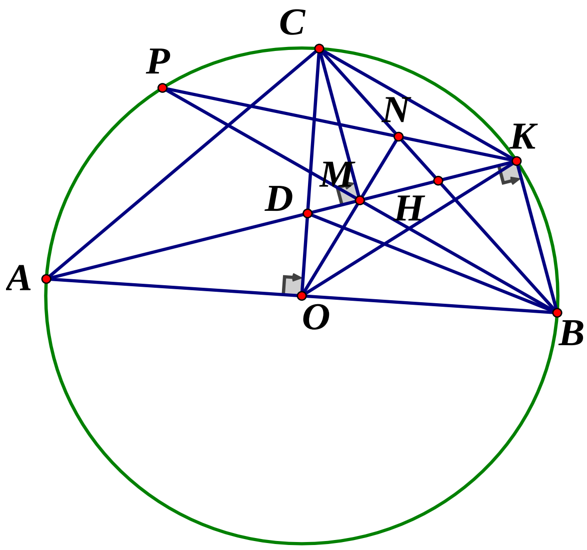
Bài 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB, bán kính OC vuông góc với $AB.$ Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng $BC.$ Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M. Chứng minh $\angle CMA = 90°$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N, NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

Xét (O) có: K thuộc đường tròn nên $\angle AKB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle DKB = 90° \Rightarrow \Delta BDK$ vuông tại K

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính $BD(1)$

Ta có $OC \perp AB$ tại O (gt) $\Rightarrow \angle BOC = 90° \Rightarrow \angle BOD = 90° \Rightarrow \Delta OBD$ vuông tại O

$\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính $BD(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow O, K$ thuộc đường tròn đường kính BD

Vậy tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M. Chứng minh $\angle CMA = 90°$

Xét tam giác COK có $OC = OK \Rightarrow \Delta COK$ cân tại O

$\Rightarrow \angle OCK = \angle CKO$

Lại có ON là phân giác của góc $COK\left(gt\right)$

$\Rightarrow ON$ đồng thời là đường trung bình của

Mà $M \in ON \Rightarrow CM = MK$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \Delta CMK$ cân tại M $\Rightarrow \angle MCK = \angle CKM$

Ta có :

$\angle OCK = \angle CKO(cmt)$

$\Rightarrow \angle OCM + \angle CMK = \angle OKM + \angle MKC$

$\Rightarrow \angle OCM = \angle OKM\,(do\, \angle MCK = \angle CKM\,(cmt))$

$\Rightarrow \angle OCM = \angle DKO\left(3\right)$

Tứ giác $DKBO$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \angle DKO = \angle DBO$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OD) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle OCM = \angle DBO$

Tam giác ABD có :

DO là đường cao (do OC vuông góc với AB tại O)

DO là đường trung tuyến (do O là tâm đường tròn đường kính AB nên O là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại D $\Rightarrow \angle DAO = \angle DBO \Rightarrow \angle MAO = \angle DBO$

Mà $\angle OCM = \angle DBO(cmt) \Rightarrow \angle MAO = \angle OCM$

Xét tứ giác $AOMC$ có : $\angle MAO = \angle OCM$ mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng chắn cung

AC $\Rightarrow AOMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle AOC = \angle AMC$

Mà $\angle AOC = 90°$ (do AB vuông góc với CO tại O)

$\Rightarrow \angle AMC = 90°\left(dfcm\right)$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N, NK cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh

B đối xứng với P qua M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHC có :

$$HM.HA = HC^2 = HB^2 \Rightarrow \frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$$

Xét ΔHBM và ΔHAB có : $\angle AHB\, chung, \dfrac{HM}{HB} = \dfrac{HB}{HA}(cmt) \Rightarrow \Delta HBM \backsim \Delta HAB(c.g.c)$

$\Rightarrow \angle HAB = \angle HBM$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle HAB = \angle KPB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KB)

$\Rightarrow \angle KBP = \angle HBM$ hay $\angle NPB = \angle NBP$

$\Rightarrow \Delta NBP$ cân tại N (tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau

$\Rightarrow NB = NP$

Xét ΔONB và ΔONP có :

$OB = OP\left(= R\right), ON$ chung, $NB = NP(cmt)$

$\Rightarrow \Delta ONB = \Delta ONP(c.c.c)$

$\Rightarrow \angle NOB = \angle NOP$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow ON$ là phân giác của $\angle BOP$

$\Rightarrow OM$ là phân giác của $\angle BOP$

Xét tam giác OBP có: $OB = OP = R$, nên ΔOBP cân tại O$\Rightarrow$phân giác OM đồng thời là đường trung tuyến$\Rightarrow M$ là trung điểm của BP

Vậy B đối xứng với P qua M (đpcm)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

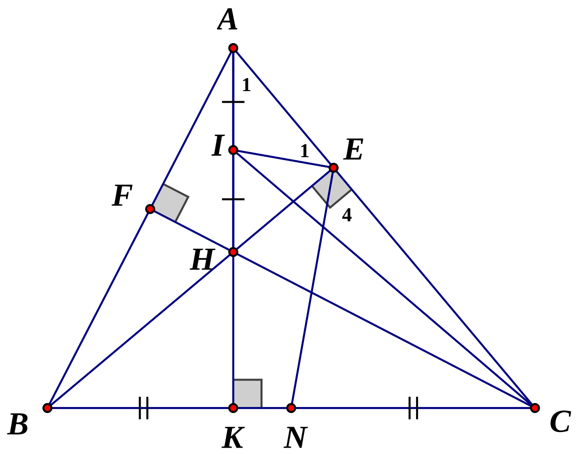
Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, N là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $AEB = 90^\circ$ (do BE là đường cao của ΔABC) hay $AEH = 90^\circ$

$AFC = 90^\circ$ (do CF là đường cao của ΔABC) hay $AFH = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEHF$ có $AEH + AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà AEH , AFH ở vị trí đối nhau

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH ;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại I

$\Rightarrow A_1 = E_1$ (1)

ΔEBC vuông tại E có EN là đường trung trrung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow EN = NC \left(= \dfrac{BC}{2}\right)$

$\Rightarrow \Delta ENC$ cân tại N

$\Rightarrow NCE = E_4$ (2)

Xét ΔAKC vuông tại K có $KCA + A_1 = 90°$ hay $NCE + A_1 = 90°$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $E_1 + E_4 = 90°$

Lại có $E_1 + E_4 + IEN = 180°$ (do A, E, C thẳng hàng)

$\Rightarrow 90° + IEN = 180°$

$\Rightarrow IEN = 90°$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go ΔCIK vuông tại K, ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$\Rightarrow CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK.KH$ 4

Ta lại có $CK.CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK.KB$ 5

Xét ΔKBH và ΔKAC có

$KBH = KAC$ (Cùng phụ với ACB); $BKH = AKC = 90°$

Do đó $\Delta AHK \backsim \Delta ACB$ $g - g$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KH}{KC} \Rightarrow KA.KH = KB.KC$ hay $AK.KH = CK.KB$ 6

Từ 4 , 5 và 6 suy ra $CI^2 - IE^2 = CK.CB$ (đpcm)

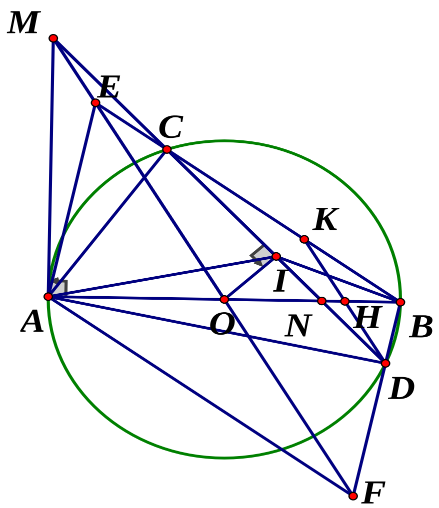
Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M $(M \neq A)$. Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B).Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$ (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \angle OIM = 90°$

MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A (gt) nên $\angle MAO = 90°$

Xét tứ giác $AMIO$ có $\angle OIM + \angle MAO = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối diện nhau

Nên tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$

Ta có $\angle MAC = \angle CDA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC)

Xét ΔMCA và ΔMAD có :

$\angle DMA$ chung, $\angle MAC = \angle MDA (cmt)$

$\Rightarrow \Delta MCA \sim \Delta MAD (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD \left(dfcm\right)$

Vì $AMIO$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên ta có :

$\angle IMO = \angle IAO = \angle IAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OI)

Vì $HD // MO \Rightarrow \angle MDH = \angle IMO$ (2 góc so le trong)

Vậy $\angle IAB = \angle MDH \left(dfcm\right)$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Kéo dài DH cắt BC tại K

Ta có : $\angle IAB = \angle MDH(cmt)$ hay $\angle IAH = \angle IDH$ mà A và D là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $AIHD$ cùng nhìn cạnh IH dưới 1 góc bằng nhau

Suy ra tứ giác $AIHD$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \angle HID = \angle HAD$ (cùng chắn cung HD)

Xét (O) ta có : $\angle BAD = \angle BCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Hay $\angle HAD = \angle BCD$

Suy ra $\angle BCD = \angle HID\left(= \angle HAD\right)$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $IH//CK$

Suy ra H là trung điểm của DK (định lý về đường trung bình của tam giác)

$\Rightarrow HK = HD(1)$

Vì $DH//OH\left(gt\right) \Rightarrow HK//OE, HD//OF$

Xét ΔBOE có $HK//OE(cmt) \Rightarrow \dfrac{HK}{OE} = \dfrac{BH}{BO}$ (hệ quả của định lý Talet) (2)

Xét ΔBOF ta có $HD//OF(cmt) \Rightarrow \dfrac{HD}{OF} = \dfrac{BH}{BO}$ (hệ quả định lý Talet) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow OE = OF$

Xét tứ giác $AEBF$ ta có : $OA = OB = R; OE = OF(cmt)$

Suy ra tứ giác $AEBF$ là hình bình hành (đpcm)

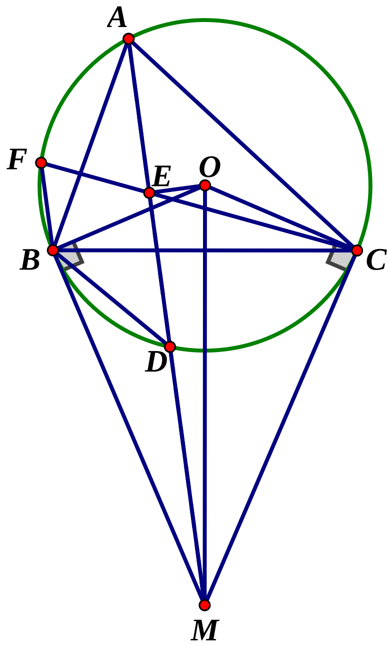
Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M, tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F. Chứng minh rằng: $BF // AM$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác *OBMC* nội tiếp được đường tròn.

Ta có MB, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\begin{cases} OB \perp MB \\ OC \perp MC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MBO = 90^0 \\ MCO = 90^0 \end{cases}$

Xét tứ giác OBMC có $MBO + MCO = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà MBO, MCO là hai góc đối nhau nên tứ giác OBMC nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

Ta có $DBM = BAM$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD).

Xét ΔMBD và ΔMAB có:

$$\left.\begin{array}{l} DBM = BAM \\ BMA \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MAB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MA.MD$$

c) Gọi *E* là trung điểm đoạn thẳng *AD*; tia *CE* cắt đường tròn (O) tại điểm *F*. Chứng minh rằng: *BF* // *AM*.

Ta có E là trung điểm của AD nên OE ⊥ AD (mối quan hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow OEM = 90^0$

Xét tứ giác OEMC có $OEM + OCM = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà OEM, OCM là hai góc đối nhau nên tứ giác OEMC nội tiếp.

$\Rightarrow COM = CEM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM) (1)

Ta lại có $COM = BOM = \frac{1}{2}$ sđ BC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $BFC = \frac{1}{2}$ sđ BC (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow COM = BFC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MEC = BFC$

Mà hai góc MEC và BFC ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EM // BF$ hay $AM // BF$.

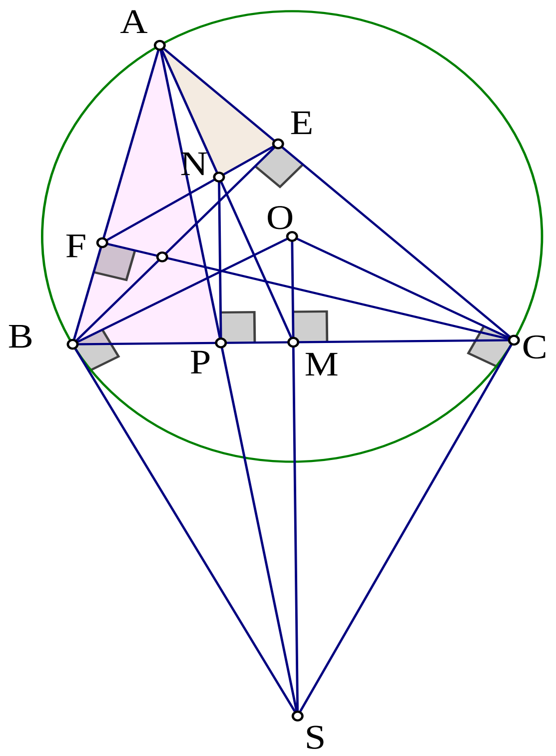
Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Lời giải



a) Ta chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta BSM$.

b) Từ câu a ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{MB}{BS}$ (1)

mà $MB = EM$ (do ΔBEC vuông tại E có M là trung điểm của BC)

nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BS}$ Có $MOB = BAE; EBA + BAE = 90^0$;

$MBO + MOB = 90^0$ nên $MBO = EBA$

do đó $MEB = OBA = MBE$. Suy ra $MEA = SBA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AME \sim \Delta ABS$ (đpcm).

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên ta chứng minh $NP // SM$.

Xét ΔANE và ΔAPB: Từ câu b) ta có $\Delta AEM \sim \Delta ABS$ nên $NAE = PAB$. Mà $AEN = ABP$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp). Do đó $\Delta ANE \sim \Delta APB$ nên $\frac{AN}{AP} = \frac{AE}{AB}$.

Lại có $\frac{AM}{AS} = \frac{AE}{AB}$ $\Delta AEM \sim \Delta ABS$. Suy ra $\frac{AM}{AS} = \frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có $NP//SM$ (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

DẠNG 4
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

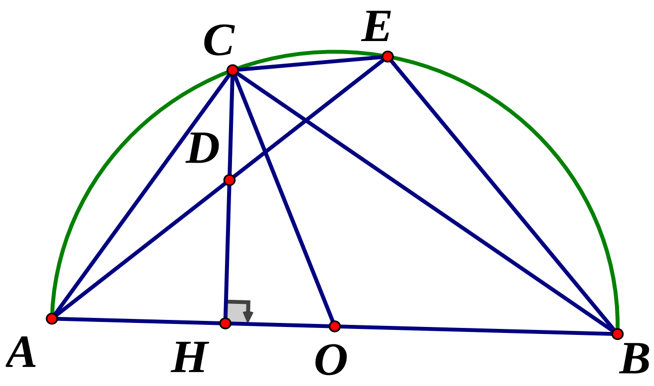
Bài 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với $AB(H \in AB)$. Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

b) Chứng minh $AD.EC = CD.AC$

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

Ta có : $\angle BEA = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BED = 90°$

Xét tứ giác $BHDE$ có : $\angle BED + \angle BHD = 90° + 90° = 180°$, mà 2 góc này đối nhau

Nên $BHDE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AD.EC = CD.AC$

Ta có $\angle ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACH$ (cùng phụ với $\angle BCH$)

Mà $\angle AEC = \angle ABC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACH = \angle ACD$

Xét ΔACD và ΔAEC có :

$\angle CAE\ chung, \angle ACD = \angle AEC\,(cmt) \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta AEC\,(g.g)$

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{CD}{EC}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Vậy $AD.EC = CD.AC\,(dfcm)$

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Chu vi tam giác COH là $P_{COH} = OC + OH + CH$

Do OC bằng bán kính đường tròn đường kính AB không đổi nên

P_{COH} max $\Leftrightarrow (OH + CH)_{\max}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có :

$(OH + CH)^2 \le 2(OH^2 + CH^2) = 2OC^2$ (Định lý Pytago)

$\Rightarrow OH + CH \le OC\sqrt{2}$

Khi đó ta có $P_{COH} = OC + OH + CH \le OC + OC\sqrt{2} = R(1 + \sqrt{2})$

Dấu "=" xảy ra khi $OH = CH \Rightarrow \Delta OCH$ vuông cân tại H $\Rightarrow \angle COH = 45° \Rightarrow \angle COA = 45°$

Vậy để chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất bằng $R\left(1+\sqrt{2}\right)$ thì điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB sao cho $\angle COA = 45°$

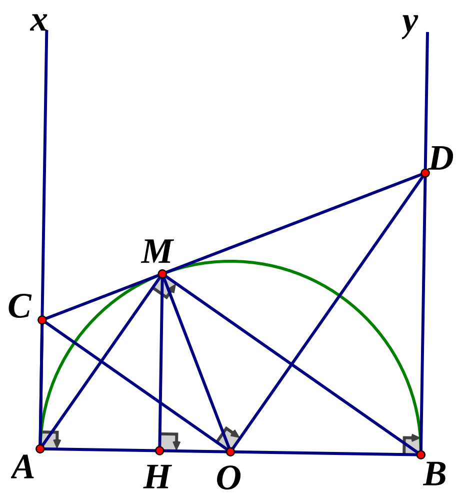
Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A,B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

Vì Ax là tiếp tuyến của (O) tại A (gt) $\Rightarrow Ax \perp AB \Rightarrow \angle OAC = 90°$

Vì CD là tiếp tuyến của (O) tại M $\Rightarrow CD \perp OM \Rightarrow \angle OMC = 90°$

Xét tứ giác $ACMO$ có $\angle OAC + \angle OMC = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

Nên $ACMO$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

AC, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\angle AOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle COM = \dfrac{1}{2}\angle AOM$

BD, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OD$ là tia phân giác của $\angle BOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle DOM = \dfrac{1}{2}\angle BOM$

Ta có $\angle AOM + \angle BOM = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\angle AOM + \dfrac{1}{2}\angle BOM = 90° \Rightarrow \angle COM + \angle DOM = 90° \Rightarrow \angle COD = 90°$

Vậy $CO \perp DO (dfcm)$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Kẻ $MH \perp AB$

Ta có $CA = CM, DB = DM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $CD = CM + DM$ nên $CD = CA + DB = AC + BD$

Trong tam giác MHO ta có $MH \le MO = R$

Trong tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông nên $CD \ge AB = 2R$

Ta có $S_{ABDC} = \dfrac{(AC + BD).AB}{2} = \dfrac{CD.AB}{2} \ge \dfrac{AB.AB}{2} = 2R^2$

$S_{MAB} = \dfrac{MH.AB}{2} \le \dfrac{MO.AB}{2} = R^2$

$\Rightarrow S_{ACM} + S_{BDM} = S_{ABDC} - S_{MAB} \ge 2R^2 - R^2 = R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm nằm chính giữa cung AB

Vậy M nằm chính giữa cung AB thì tổng diện tích tam giác ACM và BDM nhỏ nhất bằng R^2

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

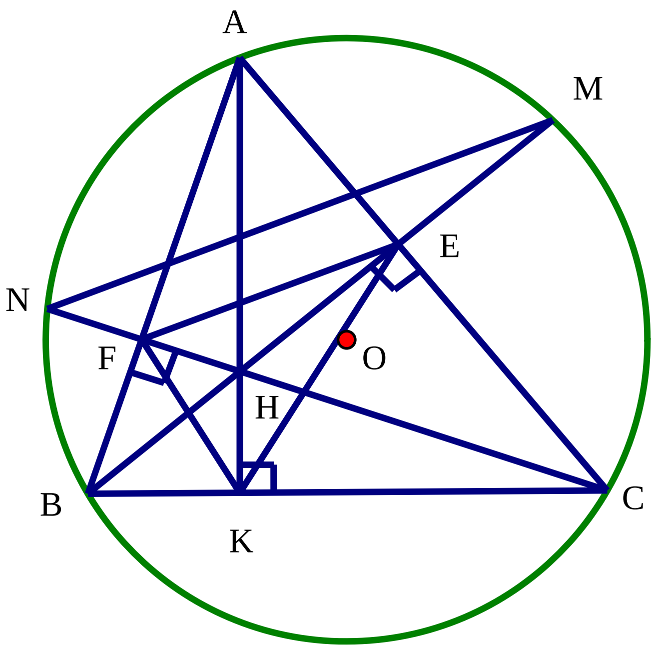
Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B; N khác C). Chứng minh: $MN // EF$.

c) Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp:

Xét tứ giác $AEHF$, có: $\begin{cases} HE \perp AC\ (gt) \Rightarrow AEH = 90^0 \\ HF \perp AB\ (gt) \Rightarrow AFH = 90^0 \end{cases}$.

$\Rightarrow AEH + AFH = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

b. Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B; N khác C). Chứng minh: $MN // EF$.

Xét tứ giác $BCEF$, có: $\begin{cases} BE \perp AC\,(gt) \Rightarrow BEC = 90^0 \\ CF \perp AB\,(gt) \Rightarrow BFC = 90^0 \end{cases}$.

Tứ giác $BCEF$ có 2 đỉnh E, F liên tiếp nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

$\Rightarrow$ $FEB = BCF$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay $FEB = BCN$. (1)

Xét đường tròn (O) có: $BMN = BCN$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BN). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BMN = FEB$.

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MN // EF$. (điều phải chứng minh).

c. Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Xét đường tròn đường kính BC, có $FBE = ECF$ hay $ABM = ACN$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow AM = AN$.

Mà $OM = ON = R$ nên OA là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

$\Rightarrow$ $OA \perp MN$.

Lại có : $MN // EF$ (câu b) $\Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự: $OB \perp FK; OC \perp EK$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{OEAF} + S_{OFBK} + S_{OECK} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FK + \frac{1}{2}OC.EK = \frac{1}{2}R.(EF + FK + EK)$

$= \frac{1}{2}.R.C_{\Delta KEF}$ (trong đó $C_{\Delta KEF}$ là chu vi ΔKEF).

Khi đó: Chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ khi diện tích ΔABC lớn nhất.

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AK.BC$.

Theo đề bài BC cố định nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AK lớn nhất. $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Vậy chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ A là điểm chính giữa cung lớn BC.

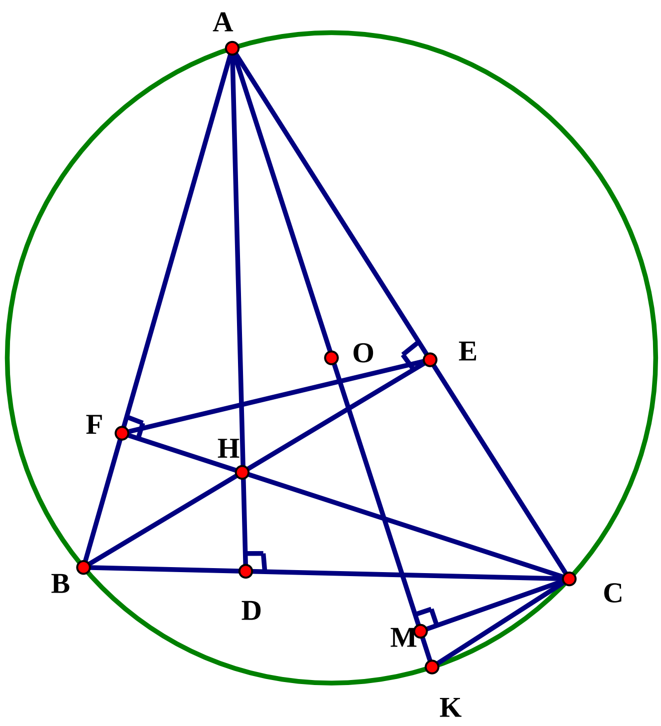
Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $O;R$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác $ABC(D, E, F$ là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H. Kẻ đường kính AK của đường tròn $O;R$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK.

a) Chứmg minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK.

c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $O;R$ và đỉnh A di động trển cung lớn BC của đường tròn $O;R$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Lời giải



a)Ta có $BEC = 90°$ (vì BE là đường cao của ΔABC)

$BFC = 90°$ (vì CF là đường cao của ΔABC)

$\Rightarrow BEC = BFC = 90°$

Xét tứ giác $BCEF$ có $BEC = BFC = 90°$(theo chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Đỉnh E và F là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc không đổi $90°$

Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đpcm)

b)

* Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC

Ta có + $ACK = 90^\circ$ (là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

+ $ABC = AKC$ (cùng chắn AC)

Xét ΔABD và ΔAKC có

$ADB = ACK = 90^\circ$

$ABC = AKC$ (theo chứng minh trên)

Dó đó $\Delta ABD \sim \Delta AKC$ ($g.g$)

* MD song song với BK.

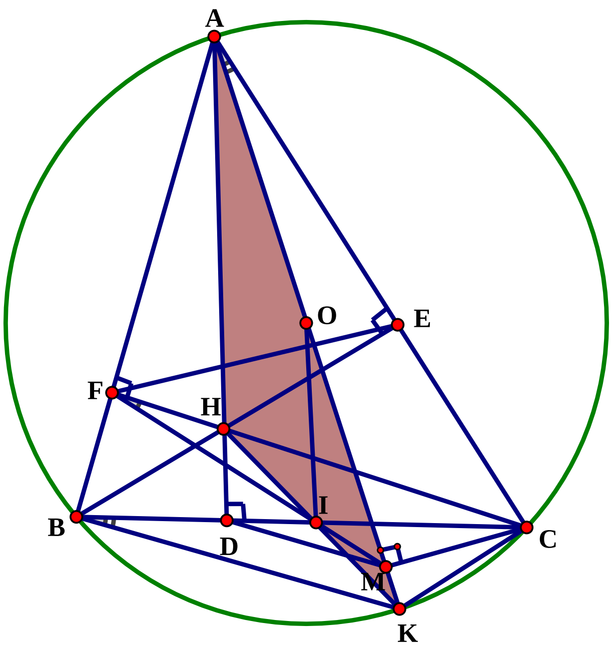
Xét đường tròn tâm O có $CBK = KAC$ (cùng chắn KC) 1

Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp

$\Rightarrow KAC = CDM$ (cùng chắn MC) 2

Từ 1 và 2 suy ra $CBK = CDM \Rightarrow DM \parallel BK$ (đpcm)

c)



Gọi I trung điểm BC

Ta có $ACK = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK \perp AC$

Mà $BE \perp AC$ (BE là đường cao của ΔABC)

Suy ra $CK \parallel BE$ (1)

Tương tự $BK \parallel CF$ (2)

Xét tứ giác $CHBK$ có $\begin{cases} CK \parallel BE \\ BK \parallel CF \end{cases}$

Suy ra tứ giác $CHBK$ là hình bình hành.

Mà I trung điểm của BC

Suy ra I, H, K thẳng hàng.

Xét ΔAHK có O là trung điểm của AK

I là trung điểm của HK

Suy ra OI là đường trung bình của $\Delta AHK \Rightarrow AH = 2OI$

Do OI không đổi nên AH không đổi

Ta có $S_{\Delta AHE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot HE \ (1)$

Ta có ΔAEH vuông tại E nên $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$AH^2 = AE^2 + EH^2 \geq 2\sqrt{AE^2 \cdot EH^2} = 2AE \cdot HE$

$\Rightarrow AE \cdot HE \leq \dfrac{1}{2} AH^2 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{\Delta AHE} \leq \dfrac{1}{4} AH^2$ không đổi

$\Rightarrow S_{\Delta AHE} = \dfrac{1}{4} AH^2$

Dấu "=" xảu ra khi $AE = HE \Rightarrow HAE = 45° \Rightarrow ACB = 45°$

Bài 5. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc $AB (H \in AB)$. Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E.

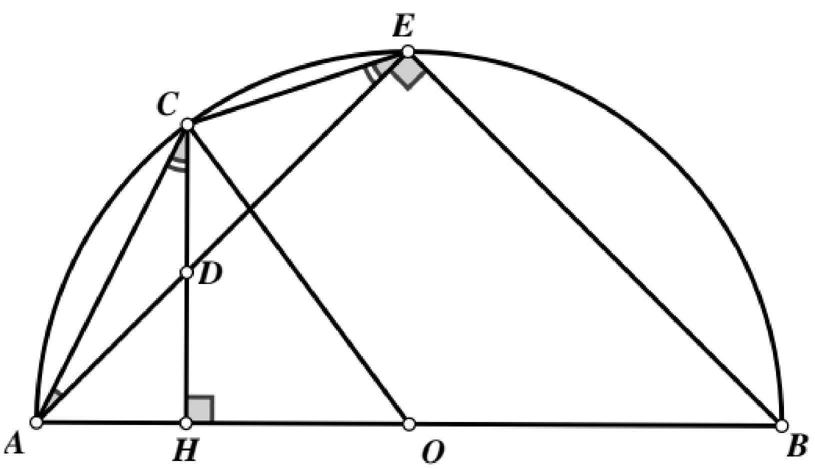
a) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Chứng minh: $AD.AE + BH.BA = 2022^2$.

d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Xét tứ giác $BHDE$ có: $DHA = 90°(gt)$; $DEB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $DHA = DEB$ do đó tứ giác BHDE nội tiếp.

b) Xét hai tam giác ΔADC và ΔACE có: CAD chung; $ACD = 90° - CAH = CEA$

Nên $\Delta ADC \sim \Delta ACE(g \cdot g)$ do đó $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AC}{CE}$ hay $AD.EC = CD.AC$.

c) HD: Dựa vào ý (1) để chứng minh $\Delta ADH \sim \Delta ABE(g.g)$ khi đó:

$AD \cdot AE + BH \cdot BA = AB \cdot AE + AB \cdot BH = AB^2 = 2022^2$.

d) Tam giác CHO vuông tại H nên theo định lí Pytago ta có:

$$OC^2 = OH^2 + HC^2 = \frac{1}{2}(OH + HC)^2 + \frac{1}{2}(OH - HC)^2 \geq \frac{1}{2}(OH + HC)^2$$

Hay là $OH + HC \leq OC\sqrt{2}$ nên $Cv_{CHO} = OC + OH + HC \leq (1 + \sqrt{2})OC = (1 + \sqrt{2}) \cdot 1011$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm C nằm trên nửa đường tròn O sao cho $ACD = 45°$.

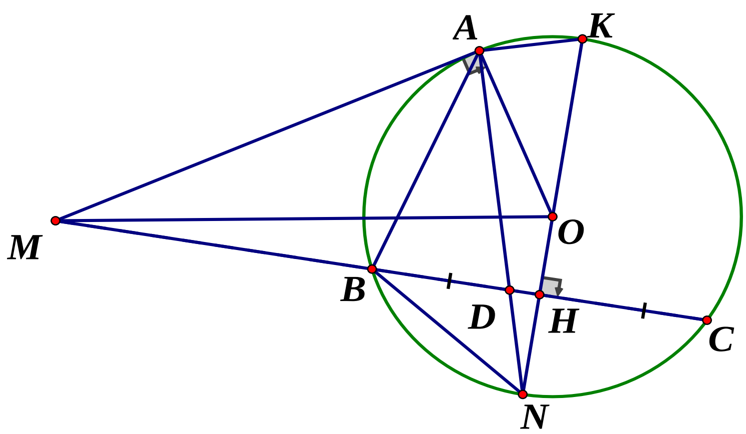
Bài 6. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ tiếp tuyến MA(A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M, C). Gọi H là trung điểm BC. Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA.ND$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O;R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\angle KAN = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle KAD = 90°$

H là trung điểm của $BC \Rightarrow OH \perp BC$ (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \angle KHD = 90°$

Xét tứ giác $AKHD$ có $\angle KAD + \angle KHD = 90° + 90° = 180°$, mà hai góc này đối diện

Nên tứ giác $AKHD$ nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA.ND$

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow N$ là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow BN = CN$

$\Rightarrow \angle NAB = \angle NBC = \angle NBD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔNBD và ΔNAB có :

$\angle ANB$ chung, $\angle NBD = \angle NAB(cmt) \Rightarrow \Delta NBD \sim \Delta NAB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NA}{NB}$ (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow NB^2 = NA.ND\left(dfcm\right)$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $\left(O;R\right)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

$\angle MDA = \frac{1}{2} sd\, AB + \frac{1}{2} sd\, NC = \frac{1}{2} sd\, AB + \frac{1}{2} sd\, NB = \frac{1}{2} sd\, AN \Rightarrow \Delta MAD$ cân tại M

$\Rightarrow MD = MA$ mà MA không đổi nên $D \in \left(M; MA\right)$

Bài 7. Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.

b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK.OM=R^2$

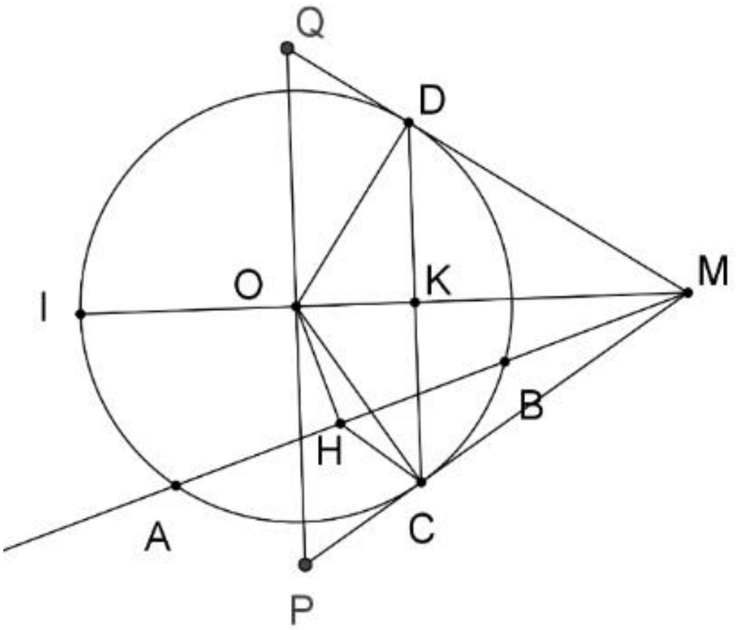
c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.

Vì H là trung điểm của dây cung AB nên $OH \perp AB \Rightarrow OHM=90^\circ$

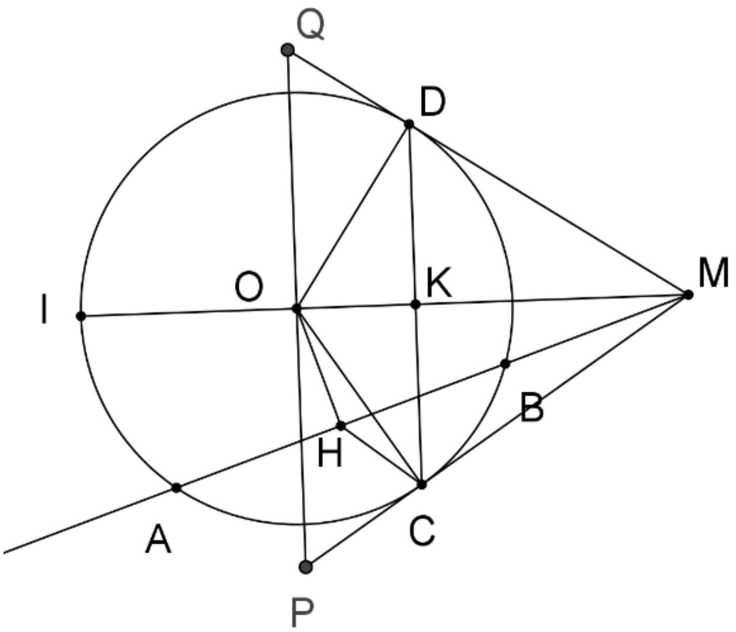
Ta có: $OHM = OCM = 90^\circ$ nên tứ giác OMCH nội tiếp.



b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK.OM=R^2$

Tam giác ODM vuông tại D (vì $\widehat{ODM}=90^\circ$). Mặt khác: MC=MD (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OC=OD=R $\Rightarrow$OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD$\Rightarrow$ $OM\perp CD$. Trong tam giác vuông ODM áp dụng hệ thức $b^2=a.b'$ ta có: $OD^2=OK.OM\Leftrightarrow OK.OM=R^2$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.



Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MO là tia phân giác của góc PMQ, mặt khác $MO\perp PQ$ nên tam giác PMQ cân tại M$\Rightarrow PQ=2OP$.

Ta có $S_{PMQ}=\frac{1}{2}MO.PQ=MO.OP$. Trong tam giác vuông OMQ ta có:

$$\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}\ge 2\sqrt{\frac{1}{OP^2}.\frac{1}{OM^2}}=\frac{2}{OP.OM}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}\ge\frac{2}{S_{PMQ}}$$

$S_{PMQ}\ge 2R^2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{OP^2}\\ OM.OP=2R^2\end{cases}\Leftrightarrow OM=OP=R\sqrt{2}$.

Vậy S_{PMQ} đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM=R\sqrt{2}$.

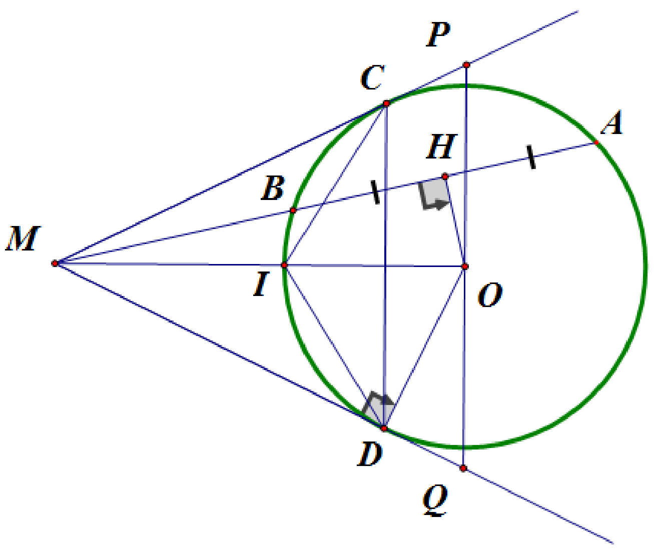
Bài 8. Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn

b) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

c) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Lời giải



a. Do MD là tiếp tuyến của (O) => $MD\perp OD$ => $MDO=90^0$

Do H là trung điểm của AB; dây AB không đi qua tâm O

nên $OH\perp AB$; => $MHO=90^0$

Xét tứ giác MHOD có $MDO+MHO=90^0+90^0=180^0$

⇨ tứ giác MHOD nội tiếp

⇨ M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b. Do MC, MD là tiếp tuyến của (O)

=>MO là tia phân giác của CMD => MI là tia phân giác của CMD (*)

OI là tia phân giác của COD => $COI = DOI$ hay $CI = DI$ (1)

Mà $MCI = \frac{1}{2}\text{sd}CI$; $DCI = \frac{1}{2}sd\,DI$ (2)

Từ 1, 2 => $MCI = DCI$ => CI là phân giác của MCD (**)

Từ (*), (**) => I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

c. Ta có $S_{MPQ} = \frac{1}{2}MO.PQ = \frac{1}{2}.MO.2.OP = MO.OP$

Mà $\Delta MCO \sim \Delta MOP(g.g)$

$=> \frac{MO}{MP} = \frac{CO}{OP} => MO.OP = MP.CO$

$=> S_{MPQ} = MP.\text{CO} = (MC + CP).\text{CO} \geq 2\sqrt{MC.CP}.\text{CO} = 2OC^2 = 2R^2$

Dấu " =" xảy ra khi MC = CP $\Leftrightarrow \Delta MOP$ vuông cân

$\Leftrightarrow PMO = 45^0$ $\Leftrightarrow CMD = 90^0$

$\Leftrightarrow$ MCOD là hình vuông cạnh R <=> OM = R$\sqrt{2}$ .Vậy diện tích tam giác MPQ bé nhất khi OM = R$\sqrt{2}$

BÀI 4
ĐA GIÁC ĐỀU VÀ PHÉP QUAY

1. Đa giác đều

a. Đa giác

Đa giác $A_1A_2...A_n\left(n \geq 3, n \in \mathbb{N}\right)$ là hình gồm n đoạn thẳng A_1A_2; A_2A_3; ...; $A_{n-1}A_n$; A_nA_1, sao cho mỗi điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ là điểm chung của đúng hai đoạn thẳng và không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng. Trong đa giác $A_1A_2...A_n$ các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ là các đỉnh, các đoạn thẳng A_1A_2; A_2A_3; ...; $A_{n-1}A_n$; A_nA_1 là các cạnh.

Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác.

b. Đa giác đều

Đa giác đều là đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Chú ý:

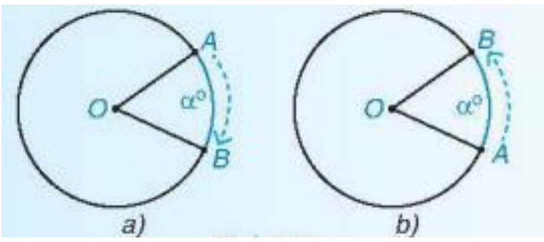
- Đa giác đều có n cạnh gọi là n - giác đều.
- Khi n lần bằng $3, 4, 5, 6, ...$ ta có tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, lục giác đều, ….
- Từ nay về sau, khi nói về đa giác mà nếu không giải thích gì thêm, thì hiểu đó là đa giác lồi.
- Người ta chứng minh được rằng các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm đa giác đều và đa giác đều được gọi là nội tiếp đường tròn.

2. Phép quay

Cho điểm O cố định và số thực α^o.

Phép quay thuận chiều $\alpha^o\left(0^o < \alpha^o < 360^o\right)$ tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A (khác điểm O) thành điểm B thuộc đường tròn $\left(O; OA\right)$ sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α^o. Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α^o tâm O.

Phép quay 0^o và phép quay 360^o giữ nguyên mọi điểm.



Chú ý:

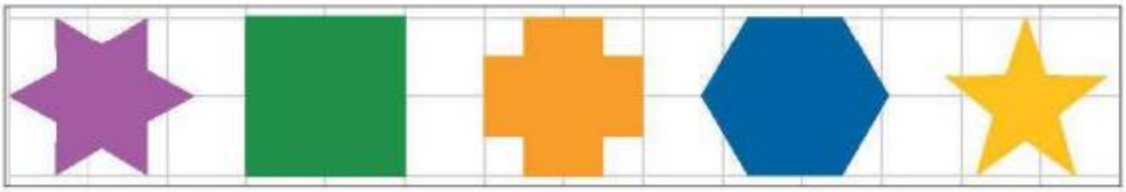
- Ta coi mỗi phép quay tâm O biến O thành chính nó.
- Nếu một phép quay biến các điểm M trên hình H thành các điểm M' thì các điểm M' tạo thành hình H'. Khi đó, ta nói phép quay biến hình H thành hình H'. Nếu hình H' trùng với hình H thì ta nói phép quay biến hình H thành chính nó.
- Người ta chứng minh được rằng chỉ có các phép quay sau đây giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2...A_n\left(n \geq 3, n \in \mathbb{N}\right)$ với tâm O: các phép quay thuận chiều α^o tâm O và các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị:

$$\alpha^o = \frac{360^o}{n}; \alpha^o = \frac{2.360^o}{n}; ...; \alpha^o = \frac{n.360^o}{n} = 360^o$$

DẠNG 1
ĐA GIÁC ĐỀU

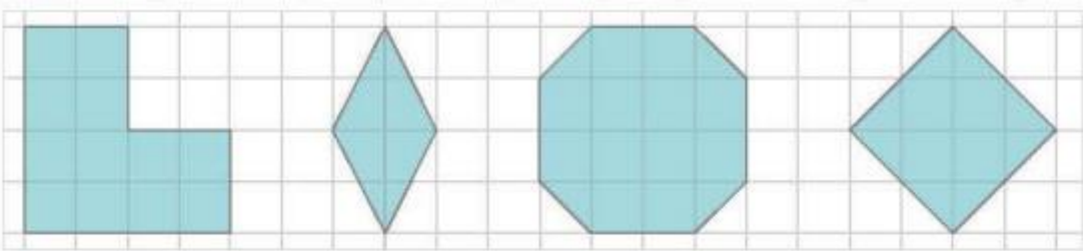
Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là: $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$

Bài 1. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



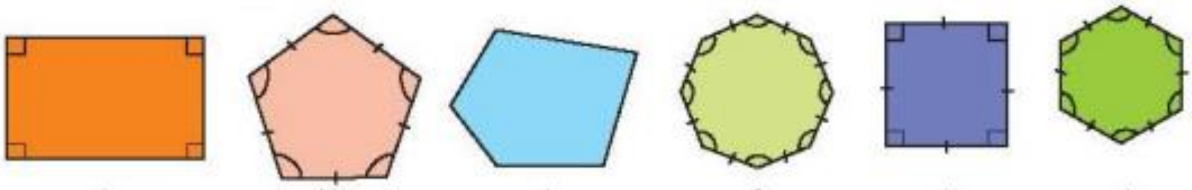
a) b) c) d) e)

Bài 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



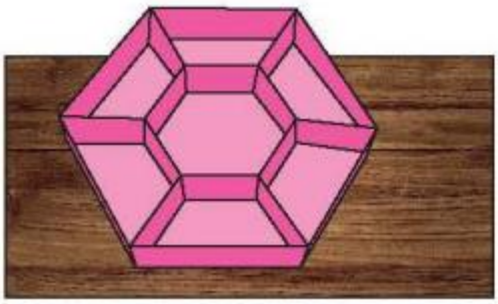
Hình a Hình b Hình c Hình d

Bài 3. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



a) b) c) d) e) g)

Bài 4. Người ta muốn làm một khay đựng bánh kẹo hình lục giác đều có cạnh 10 cm và chia thành 7 ngăn gồm một lục giác đều nhỏ và 6 hình thang cân như hình vẽ. Hỏi lục giác đều nhỏ phải có cạnh bằng bao nhiêu để nó có diện tích bằng hai lần diện tích của mỗi hình thang.



Bài 5. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Lời giải

Mỗi góc của ngũ giác đều bằng: $\dfrac{(5-2).180^0}{5}=108^0$

Mỗi góc của ngũ lục đều bằng: $\dfrac{(6-2).180^0}{6}=120^0$

Mỗi góc của bát giác đều bằng: $\dfrac{(8-2).180^0}{8}=135^0$

Bài 6. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng $135°$.

Lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác đều.

Ta có $\dfrac{(n-2).180°}{n}=135°$

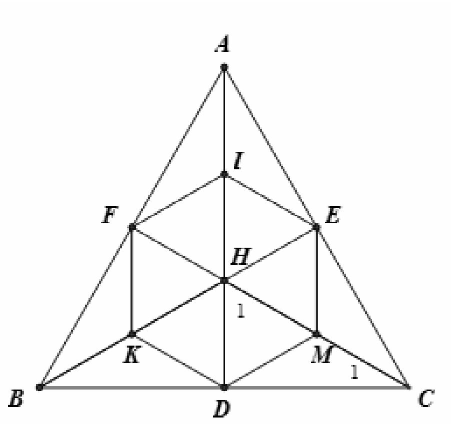
nên $\dfrac{n-2}{n}=\dfrac{135}{180}=\dfrac{3}{4}$.

Do đó $4(n-2)=3n$.

Vậy $n=8$.

Bài 7. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Lời giải



Xét ΔHDC vuông tại D, DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DM=HM$. Ta lại có $C_1=30°$ nên $H_1=60°$. Do đó ΔHDM là tam giác đều.

Tương tự các tam giác HME, HEI, HIF, HFK, HKD là các tam giác đều.

Lục giác $DKFIEM$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (bằng $120°$) nên là lục giác đều.

Bài 8.

a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Lời giải

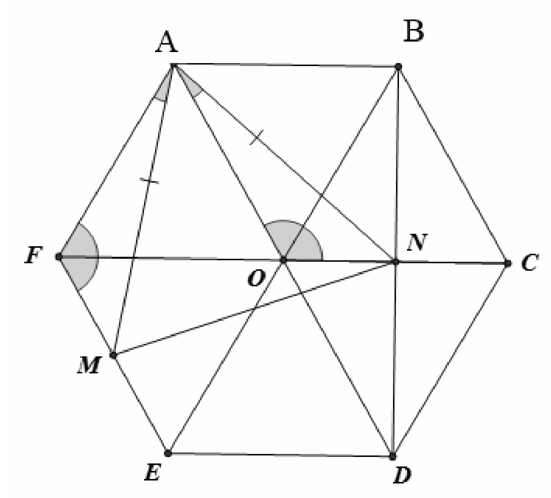
a) Từ mỗi đỉnh của hình n – giác lồi. kẻ được $n-1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n-3$ đoạn thẳng là đường chéo.

Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo tính 2 lần. Vậy số đường chéo của hình n - giác lồi là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

b) Giải phương trình $\dfrac{n(n-3)}{2}=n$. Ta được $n=5$

Bài 9. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AD, BE, CF. Dễ dàng chứng minh N là trung điểm của OC, $\Delta AFM=\Delta AON$ (c.g.c).

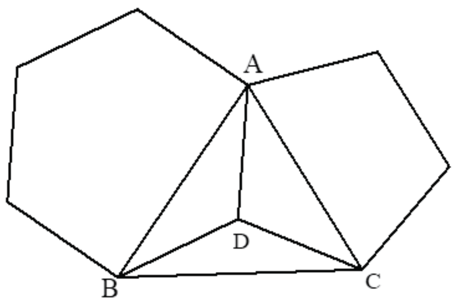
Từ đó $AM=AN$ và $MAN=60^\circ$ nên ΔAMN là tam giác đều.

Bài 10. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA'=BB'=CC'=DD'=EE'=FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

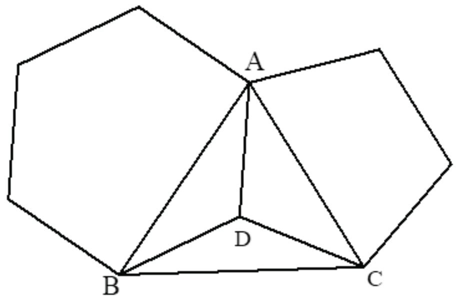
Lời giải

Hướng dẫn: Chứng minh rằng các tam giác $AA'F$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$, $FF'E$ bằng nhau.

Bài 11. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC.



Lời giải



Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$ADB = \frac{6-2\ .180^0}{6} = 120^0 \Rightarrow DAB = DBA = 30^0;$$

$$ADC = \frac{5-2\ \ 180^0}{5} = 108^0 \Rightarrow DAC = DCA = 36^0;$$

Suy ra $BDC = 360^0 - 120^0 - 108^0 = 132^0$.

Ta có ΔBDC $DB = DC$ cân tại D. Do đó $DBC = DCB = \frac{180^0 - 132^0}{2} = 24^0$.

Suy ra $BAC = 30^0 + 36^0 = 66^0$; $ABC = 30^0 + 24^0 = 54^0$; $BCA = 24^0 + 36^0 = 60^0$

DẠNG 2

PHÉP QUAY

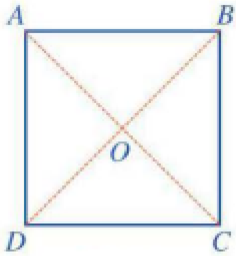
Bài 1. Cho tam giác đều ABC tâm O.

a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C tương ứng biến thành các điểm nào?

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình tam giác đều ABC.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O.

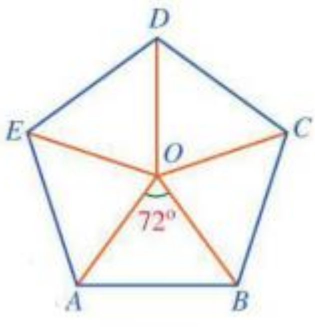


a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình vuông $ABCD$.

Bài 3. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O.

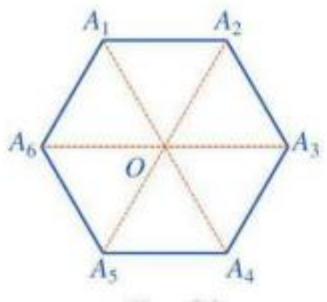


a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm E thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều $ABCDE$.

Bài 4. Cho hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm O.

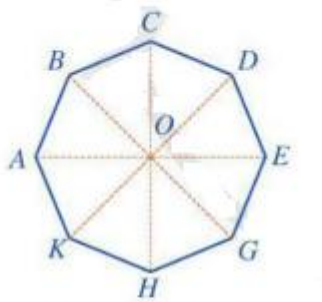


a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A_1 thành điểm A_3 thì các điểm A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A_1 thành điểm A_4 thì các điểm A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 tương ứng biến thành các điểm nào?

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Bài 5. Cho hình bát giác đều $ABCDEGHK$ tâm O.

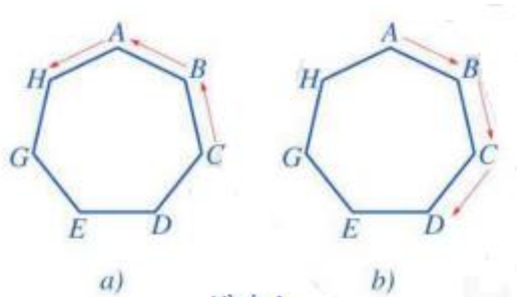


a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm E thì các điểm B, C, D, E, G, H, K tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm C thành điểm K thì các điểm A, B, D, E, G, H, K tương ứng biến thành các điểm nào?

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $ABCDEGHK$.

Bài 6. Cho hai đa giác đều $ABCDEGH$ như hình vẽ sau:

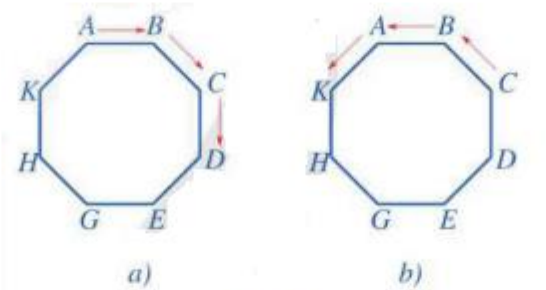


Hình 1

a) Ở hình 1a), ta thực hiện phép quay ngược chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEGH$ và biến các điểm A, B, C, D, E, G, H lần lượt thành điểm H, A, B, C, D, E, G. Phép quay đó là phép quay nào?

b) Ở hình 1b), ta thực hiện phép quay thuận chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEGH$ và biến các điểm A, B, C, D, E, G, H lần lượt thành điểm B, C, D, E, G, H, A. Phép quay đó là phép quay nào?

Bài 7. Cho hai đa giác đều $ABCDEGHK$ như hình vẽ sau:

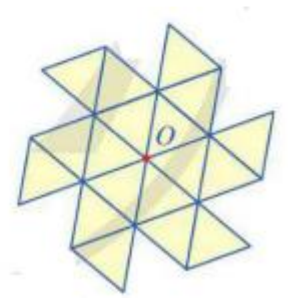


Hình 2

a) Ở hình 2a), ta thực hiện phép quay ngược chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEGHK$ và biến các điểm A,B,C,D,E,G,H,K lần lượt thành điểm B,C,D,E,G,H,K,A. Phép quay đó là phép quay nào?

b) Ở hình 2b), ta thực hiện phép quay thuận chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEGHK$ và biến các điểm A,B,C,D,E,G,H,K lần lượt thành điểm K,A,B,C,D,E,G,H. Phép quay đó là phép quay nào?

Bài 8. Cho 18 hình tam giác đều bằng nhau và được xếp với nhau thành hình chong chóng như hình vẽ.



a) Hãy đánh dấu 6 điểm mút của hình chong chóng sao cho 6 điểm mút đó là các đỉnh của một hình lục giác đều tâm O.

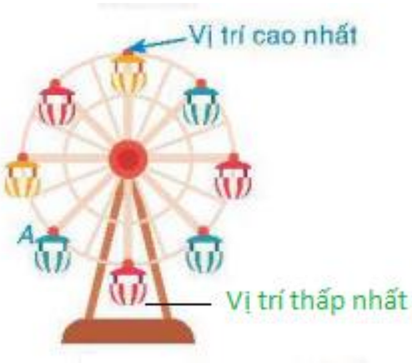
b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình chong chóng.

Bài 9. Mái nhà trong hình vẽ dưới đây được đỡ bởi khung hình đa giác đều.

a) Gọi tên đa giác đó.

b) Chỉ ra các phép quay biến đa giác đó thành chính nó.

Bài 10. Cho vòng quay mặt trời gồm tám cabin như hình vẽ.



a) Hỏi để cabin di chuyển đến vị trí thấp nhất thì vòng quay phải quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?

a) Hỏi để cabin di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?

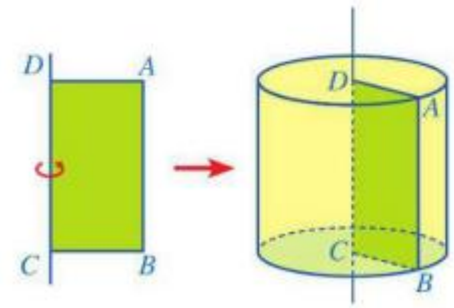
CHƯƠNG 10
CÁC HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 1
HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

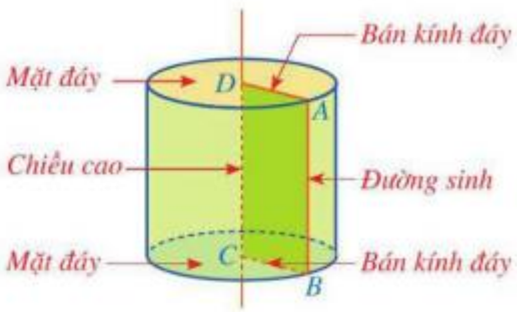
I. HÌNH TRỤ

1. Hình trụ

a. Nhận biết hình trụ



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một **hình trụ**.



Với hình trụ trên, ta có:

• Hai hình tròn $(D;DA)$ và $(C;CB)$ là hai **mặt đáy**. Hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.

• Độ dài cạnh DA được gọi là **bán kính đáy**.

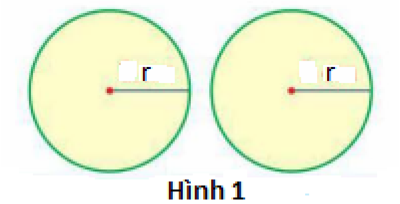
• Độ dài cạnh CD được gọi là **chiều cao**.

• Cạnh AB quét nên **mặt xung quanh** của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một **đường sinh**. Độ dài của đường sinh **bằng** chiều cao của hình trụ.

b. Tạo lập hình trụ

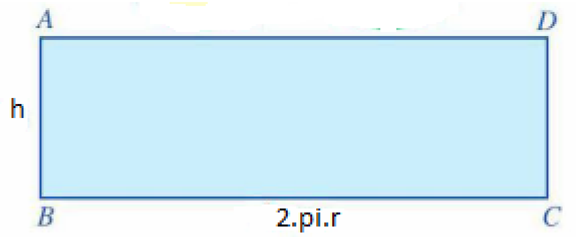
Để tạo lập chiếc hộp dạng hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



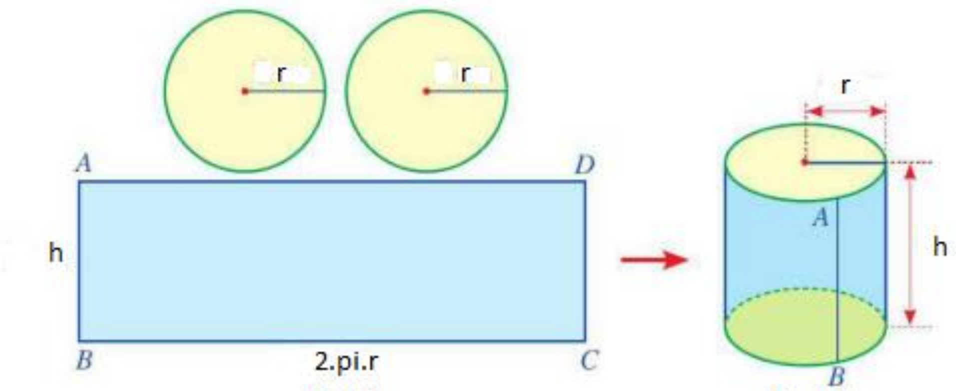
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh h và cạnh $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ (hình 4).



Hình 3 Hình 4

2. Diện tích xung quanh của hình trụ

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao:

$$S_{xq} = C.h = 2\pi rh$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

Chú ý:

• Tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ gọi là diện tích toàn phần phần của hình trụ đó.

• Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình trụ.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

$S_{đáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

3. Thể tích của hình trụ

Thể tích của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = S.h = \pi r^2 h$$

Trong đó:

V là thể tích của hình trụ.

S là diện tích đáy.

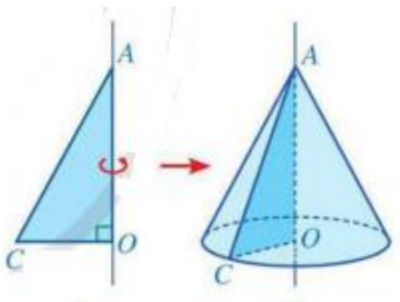
r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

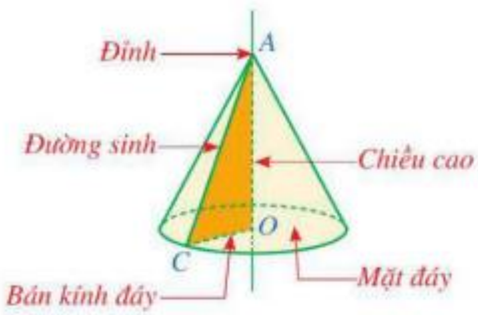
II. HÌNH NÓN

1. Hình nón

a. Nhận biết hình nón



Khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đóc thì được một **hình nón**.



Với hình nón trên, ta có:

- Điểm A được gọi là **đỉnh**.
- Hình tròn tâm (O), bán kính OC được gọi là **mặt đáy**.
- Độ dài cạnh OC được gọi là **bán kính đáy**.

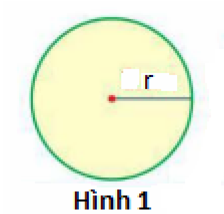
- Đoạn AO được gọi là **chiều cao**.
- Cạnh AC quét nên **mặt xung quanh** của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là một **đường sinh**.

Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón lần lượt là l, h và r thì theo định lí Pythagore ta có: $l^2 = h^2 + r^2$

b. Tạo lập hình nón

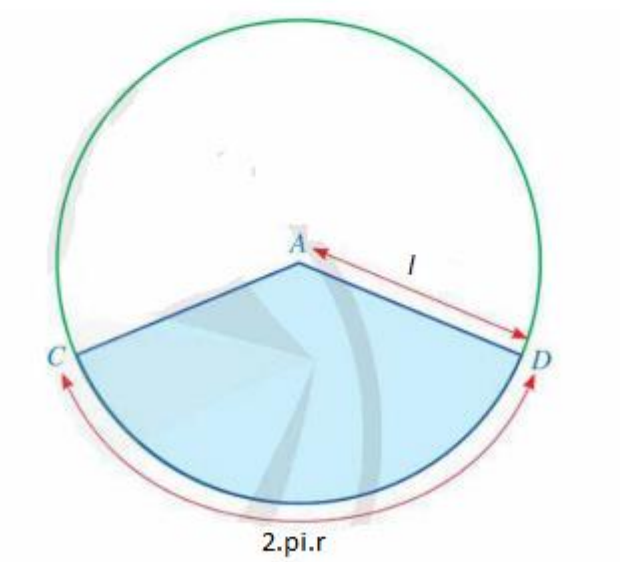
Để tạo hình nón có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



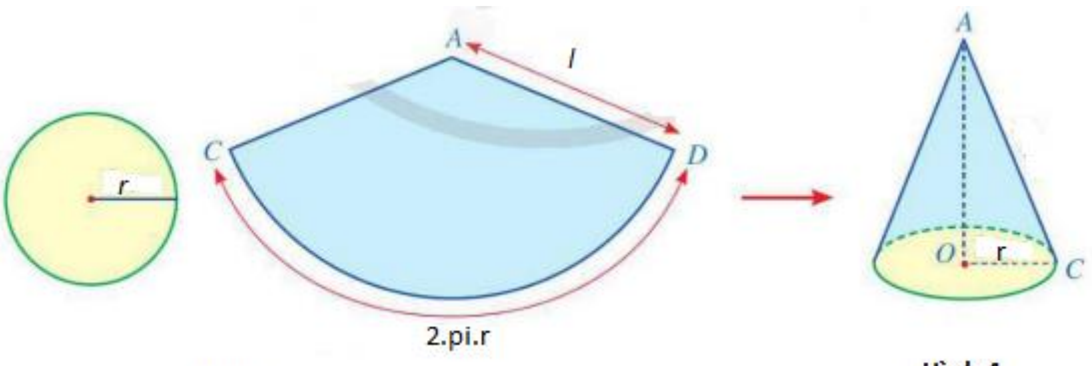
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình quạt tròn có bán kính bằng độ dài đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ và độ dài cung của hình quạt tròn bằng $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình nón (hình 4).



Hình 3 Hình 4

2. Diện tích xung quanh của hình nón

Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}C.l = \pi rl$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

Chú ý:

• Tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình nón gọi là diện tích toàn phần của hình nón đó.

• Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(l + r\right)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình nón.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

$S_{đáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

3. Thể tích của hình nón

Thể tích của hình nón bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Trong đó:

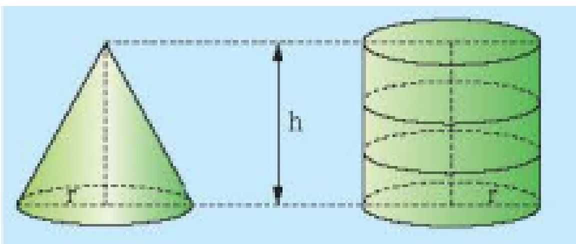
V là thể tích của hình nón.

S là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình nón.

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3}V_{tru}$



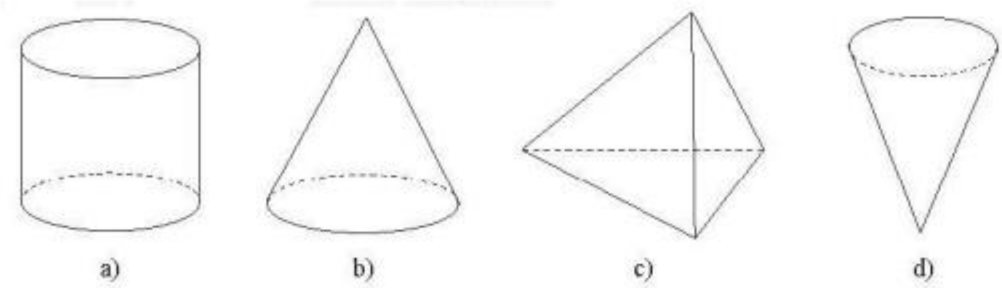
CHỦ ĐỀ 1

HÌNH TRỤ

DẠNG 1
NHẬN DẠNG VÀ TẠO LẬP HÌNH TRỤ

Hình trụ là hình có hai mặt đáy là đường tròn song song và bằng nhau.

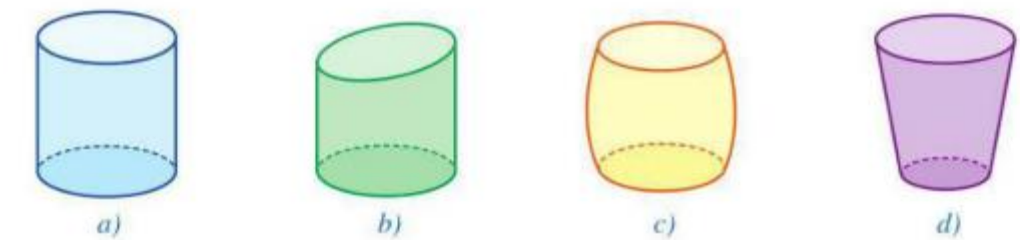
Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



Lời giải

+ Hình a) là hình trụ

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?



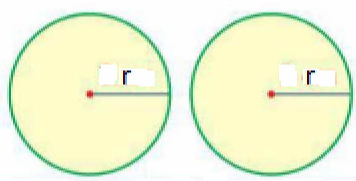
Lời giải

+ Vật thể a) là vật thể có dạng hình trụ

Bài 3. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 5(cm)$ và chiều cao $h = 8(cm)$

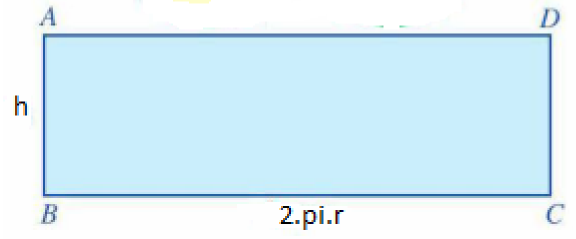
Lời giải

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính $r = 5(cm)$ (hình 1).



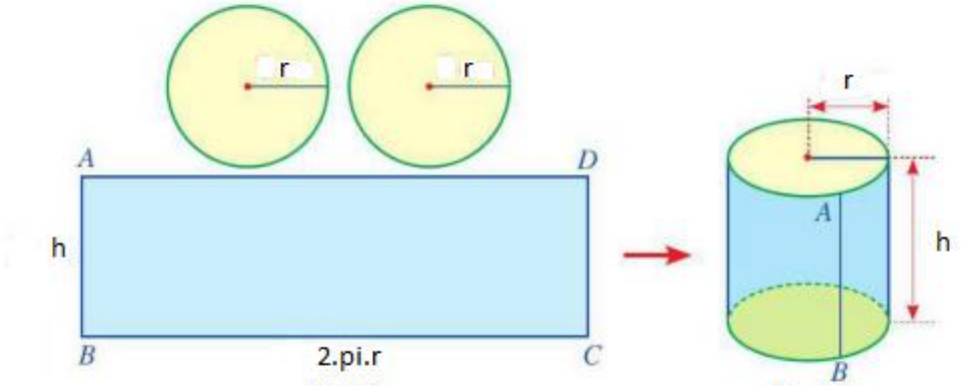
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $h = 8(cm)$ và cạnh $2\pi.r = 2\pi.5 \approx 31,4(cm)$ (hình 2).



Hình 2

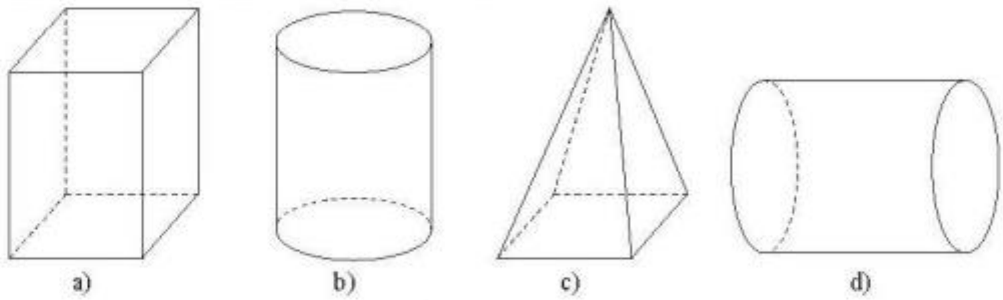
Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ có bán kính đáy $r=5(cm)$ và chiều cao $h=8(cm)$ (hình 4).



Hình 3 Hình 4

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

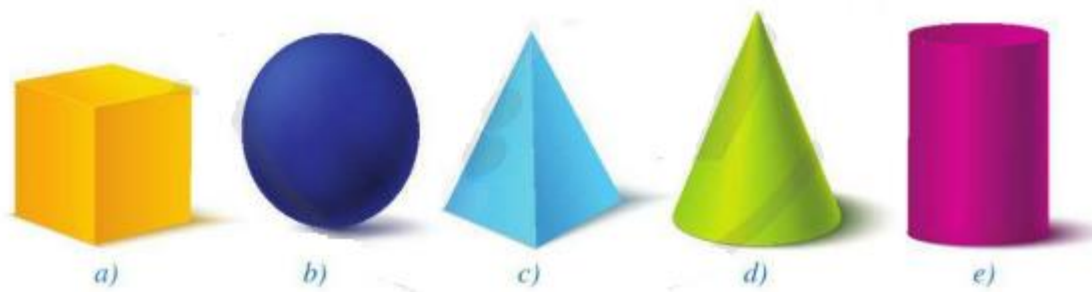
Bài 4. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



Lời giải

+ Hình b) và hình d) là hình trụ

Bài 5. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?



Lời giải

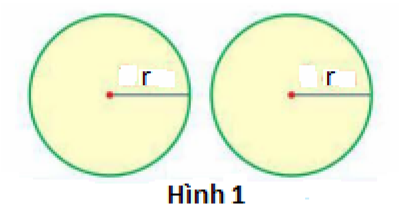
+ Vật thể e) là vật thể có dạng hình trụ

Bài 6. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và thể tích $V=224\pi(cm)$

Lời giải

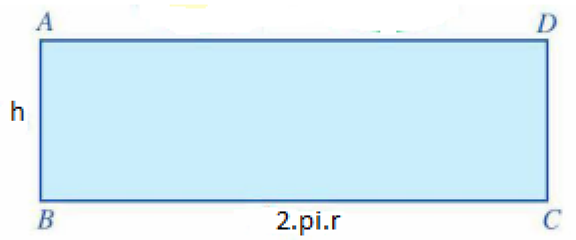
Chiều cao hình trụ là: $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{224\pi}{16\pi}=14(cm)$

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính $r=4(cm)$ (hình 1).



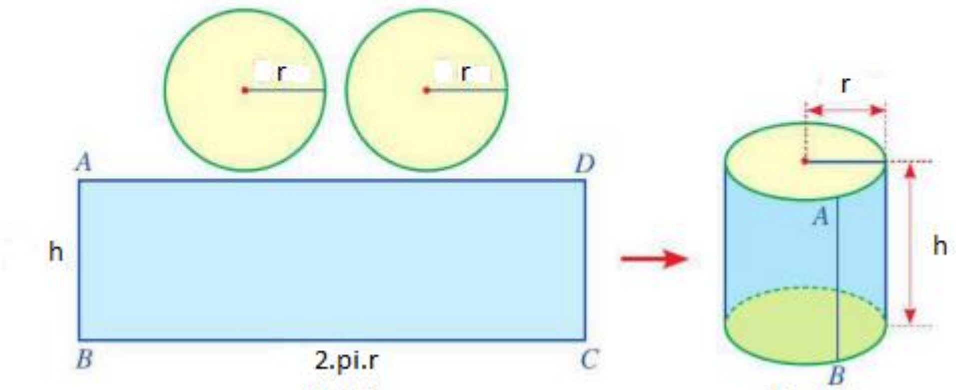
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $h=14(cm)$ và cạnh $2\pi.r=2\pi.4\approx 25,1(cm)$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và chiều cao $h=14(cm)$ hay một hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và thể tích $V=224\pi(cm)$ (hình 4).



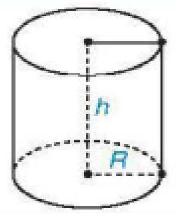
Hình 3 Hình 4

DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

Bài 1. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Lời giải

- Với $r = 3, h = 7$

$S_{xq} = 2\pi rh = 42\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 60\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 63\pi\left(cm^3\right)$

- Với $r = 3, S_{xq} = 20\pi\left(cm^2\right)$

$S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi r} = 2,5\left(cm\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 52\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 40\pi\left(cm^3\right)$

- Với $h = 8, S_{xq} = 18\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right)$

$18\pi = 2\pi r\left(h + r\right)$

$r^2 + 8r - 9 = 0$

$\Rightarrow r = 1$

$S_{xq} = 2\pi rh = 16\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 8\pi\left(cm^3\right)$

• Với $h = 5, V = 150\pi$

$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{150\pi}{25\pi} = 6\left(cm\right)$

$S_{xq} = 2\pi rh = 60\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 110\pi\left(cm^2\right)$

Bài 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5\left(dm\right)$. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao hình trụ.

Lời giải

Ta có: $S_{tp} = 2S_{xq}$

$2\pi r\left(h + r\right) = 2.2\pi rh$

$2\pi.5\left(h + 5\right) = 2.2\pi.5h$

$5\left(h + 5\right) = 10h$

$h = 5\left(dm\right)$

Bài 3. Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

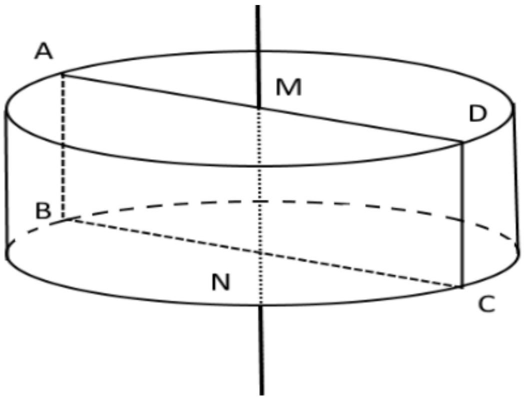
Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi\left(3r_1\right)^2.2h_1 = 18\pi r_1 h_1 = 18V_1$.

Vậy thể tích của khối trụ mới sẽ tăng 18 lần so với khối trụ ban đầu

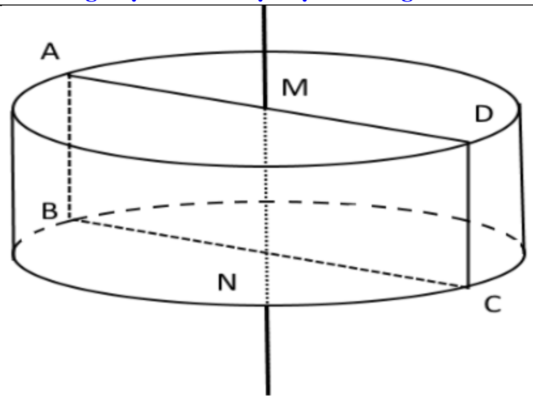
Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1\left(cm\right), AD = 2\left(cm\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

b) Tính thể tích hình trụ đó.

Lời giải



Hình trụ đã cho có chiều cao là $h = AB = 1\ cm$ và đáy là hình tròn tâm M bán kính $r = \frac{AD}{2} = 1\ cm$.

a) $S_{tp} = 2\pi r(h+r) = 2\pi.1(1+1) = 4\pi(cm^2)$

a) $V = \pi r^2 h = \pi(cm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hình trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 4 lần và giảm bán kính đáy 2 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng hay giảm?

Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 4 lần, bán kính của nó giảm 2 lần thì khối trụ có chiều cao $4h_1$ và bán kính $\frac{1}{2}r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi\left(\frac{1}{2}r_1\right)^2.4h_1 = \pi r_1 h_1 = V_1$.

Vậy thể tích của khối trụ mới không hay đổi so với khối trụ ban đầu

Bài 6. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là $4\pi(dm^2)$ và bán kính đáy bằng nửa chiều cao. Tính thể tích hình trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{4\pi}{9}$ **D.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Lời giải

Chọn D.

Hình trụ có bán kính đáy bằng nửa chiều cao suy ra: $h = 2r$

Hình trụ có diện tích toàn phần là 4π suy ra:

$S_{tp} = 2\pi r(h+r)$

$4\pi = 2\pi.r(2r+r)$

$4\pi = 6\pi.r^2$

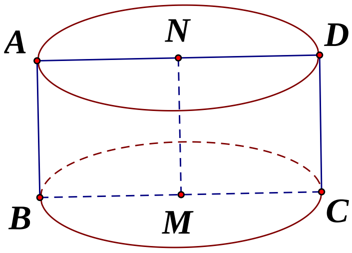
$r^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}(dm)$

Nên $r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}(dm)$, $l=h=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}(dm)$

Thể tích hình trụ: $V=\pi r^2.h=\dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}\left(dm^2\right)$

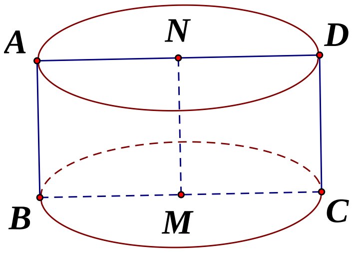
Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$, $AD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên quanh đường thẳng MN ta nhận được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ theo a.

b) Tính thể tích của hình trụ theo a.

Lời giải



Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h=AB=a$, bán kính đường tròn đáy là $R=BK=\dfrac{1}{2}BC=a$.

a) Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=4\pi a^2$ (đvdt)

b) Thể tích khối tròn xoay (T) là: $V=\pi a^2.a=\pi a^3$ (đvtt)

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH TRỤ TRONG THỰC TIỄN

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

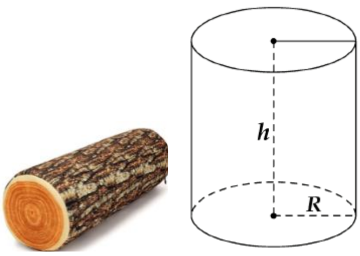
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r\left(h+r\right)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

Bài 1. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy bằng 1,2 *m*, chiều cao bằng bán kính đáy (như hình vẽ).

a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, $1\,m^3$ gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán.

Lời giải



a) Vì khúc gỗ hình trụ cón bán kính đáy $r = \dfrac{1,2}{2} = 0,6m$ và chiều cao $r = h = 0,6m$ nên diện tích xung quanh của khúc gỗ là:

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2.\pi.0,6.0,6 \approx 2,26m^2$$

Vậy diện tích xung quanh khúc gỗ là $2,26m^2$

b) Thể tích khúc gỗ là: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(0,6\right)^2.0,6 \approx 0,68m^3$

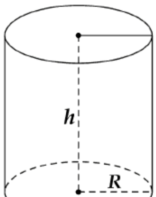
$1\,m^3$ gỗ trên bán được 5 triệu đồng nên $0,68m^3$ gỗ sẽ bán được $0,68.5 = 3,4$ triệu đồng

Bài 2. Một bồn nước inox Đại Thanh có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 *m* và diện tích đáy là 0,32 m^2.

a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thanh (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

Lời giải



a) Vì đáy của bồn nước inox là đường tròn nên bán kính đáy là:

$S_{đáy} = \pi.r^2$

$r^2 = \dfrac{S_{đáy}}{\pi} = \dfrac{0,32}{\pi}$

$r \approx 0,32m$

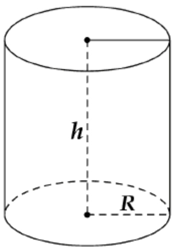
b) Vì bồn nước hình trụ có chiều cao h = 1,75m và diện tích đáy $S_{đáy}$ = 0,32m^2 nên thể tích của bồn là:

$V = S_{đáy}.h = 0,32.1,75 = 0,56m^3$

Vậy bồn đựng đầy được $0,56m^3$ nước.

Bài 3. Người ta dự định làm dự định làm một chiếc bồn chứa dầu bằng sắt hình trụ có chiều cao 1,8 *m*, đường kính đáy 1,2 *m*. Hỏi chiếc bồn đó chứa đầy được bao nhiêu lít dầu, biết rằng 1 m^3 = 1000 *lít* (Bỏ qua bề dày của bồn, lấy $\pi = 3,14$)

Lời giải



Thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$

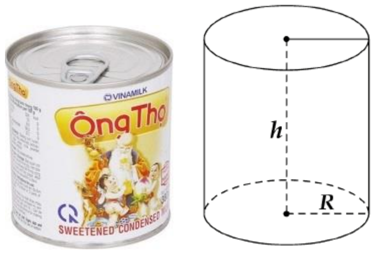
Vì chiếc bồn hình trụ có chiều cao h = 1,8m và bán kính đáy r = 1,2 : 2 = 0,6m nên thể tích chiếc bồn là:

$V = \pi r^2 h = 3{,}14.(0{,}6)^2.1{,}8 = 2{,}03m^3 = 2030(lit)$

Vậy chiếc bồn đó chứa đầy được 2030 lít dầu.

Bài 4. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp sữa ông thọ dạng hình trụ, có chiều cao bằng 12 *cm*. Biết thể tích của hộp là $192\pi\ cm^3$. Tính số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa ông thọ (kể cả hai nắp hộp), biết chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 80 000 đồng/m^2. (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Lời giải



Vì hộp sữa hình trụ có chiều cao h = 12 cm và thể tích $V_{hộp} = 192\pi\ cm^3$ nên:

$V = \pi r^2 h$

$192\pi = 12\pi r^2$

$r^2 = 16$

$\Rightarrow r = 4cm$

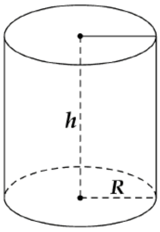
Vì hộp sữa hình trụ có $r = 4cm$ và chiều cao h = 12 cm nên diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$S_{tp} = 2\pi r(h + r) = 2\pi.4(12 + 4) \approx 402{,}124(cm^2) \approx 0{,}04m^2$

Chi phí sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa là : $0{,}04.10000.80000 = 32000000$ đồng

Bài 5. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là 0,4 *cm*, chiều dài ống hút là 18 *cm*. Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Lời giải

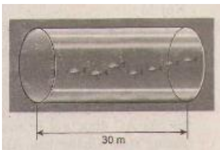


Vì ống hút hình trụ có bán kính đáy $R = 0,4 : 2 = 0,2$ *cm* và chiều cao h = 18 *cm* nên diện tích xung quanh của ống hút là:

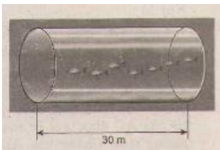
$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi .0,2.18 \approx 22,608\left(cm^2\right)$

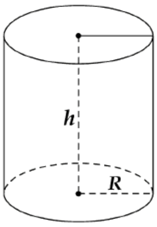
Vậy khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là $100.\,22,608 = 2260,8\ cm^2$.

Bài 6. Đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30 *m*. Dung tích của đường ống nói trên là 1 800 000 *lít*. Tính diện tích đáy của đường ống.



Lời giải





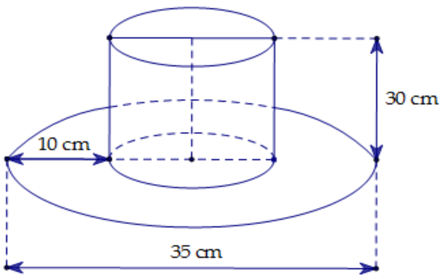
Vì ống nối hình trụ thể tích $V_{\text{ống nối}}$ = 1.800.000 lít = 1.800 m^3 và chiều cao h = 30 *m* nên:

$V_{\text{ống nối}} = S_{\text{đáy}}.h$

$\Rightarrow S_{\text{đáy}} = \dfrac{V_{\text{ống nối}}}{h} = \dfrac{1.800}{30} = 60\ (m^2)$

Vậy diện tích đáy của đường ống là 60 m^2.

Bài 7. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có dạng hình trụ và với kích thước mô phỏng như hình vẽ.



a) Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hãy tính thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Lời giải

a) Bán kính hình trụ của cái mũ là $r=\dfrac{35-10-10}{2}=\dfrac{15}{2}(cm)$.

Đường cao hình trụ của cái mũ là $30\,cm$.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2.\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(cm^2\right)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2-\pi\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=250\pi\left(cm^2\right)$.

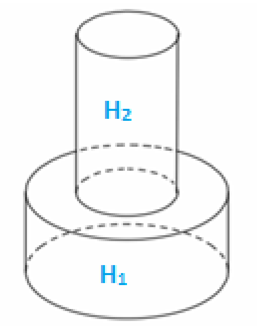
Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) là:

$S=S_{xq}+S_v=450\pi+250\pi=200\pi\approx 628,32\left(cm^2\right)$.

b) thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ là

$V=\pi r^2h=\pi\left(\dfrac{15}{2}\right)^2.30=\dfrac{3375}{2}\pi\approx 5301,44\left(cm^3\right)$

Bài 8. Một khối đồ chơi gồm hai hình trụ $(H_1),(H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\dfrac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$. Tính thể tích khối trụ (H_1).



Lời giải

Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $(H_1),(H_2)$

$V_2=\pi r_2^2h_2=\pi\left(\dfrac{1}{2}r_1\right)^2 2h_1=\dfrac{V_1}{2}$

$\Rightarrow V_1=2V_2$

mà $V_1+V_2=30\Rightarrow V_1=20cm^3$

Bài 9. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng $12(cm)$, chiều cao bằng $6(cm)$, chiều dài tạ bằng $30(cm)$ và bán kính tay cầm là $2(cm)$. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Lời giải

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

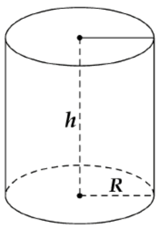
$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30-2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi \approx 1583,36\left(cm^2\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1 *m*. Thùng nước này có thể đựng được 1 m^3 nước không? Tại sao? (lấy π = 3,14)

Lời giải



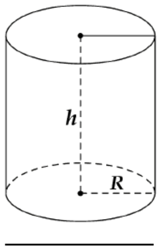
Vì thùng nước hình trụ có chiều cao *h* = 1m và bán kính đáy *r* = 1 : 2 = 0,5 *m* nên:

$V = \pi r^2 h = 3,24.(0,5)^2.1 = 0,785m^3$

Vì $V = 0,785m^3 < 1m^3$ nên thùng nước không đựng được 1 m^3 nước.

Bài 11. Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 *m* và diện tích đáy là 4,8 m^2. Một vòi nước được đặt phái trên miệng bể và chảy được 4.800 lít nước mỗi giờ. Hỏi vòi nước chảy sau bao lâu đầy bể (Biết ban đầu bể cạn nước, bỏ qua bề dày của thành bể và 1 m^3 = 1000 *lít*)

Lời giải



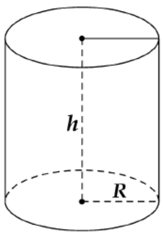
Vì bể hình trụ có chiều cao h = 2,5 m và diện tích đáy $S_{đáy}$ = 4,8 m nên thể tích của bể là:

$V = S_{đáy}.h = 4,8.2,5 = 12m^3 = 12000\left(lit\right)$

Vậy vòi nước chảy sau 12.000 : 4.800 = 2,5 giờ thì đầy bể.

Bài 12. Một hộp đựng chè hình trụ có đường kính đáy bằng 8 cm và chiều cao bằng 12 cm. Tính diện tích giấy carton để làm một hộp chè đó, biết tỉ lệ giấy carton hao hụt khi làm một hộp chè là 5% (lấy π = 3,14).

Lời giải



Vì hộp đựng chè hình trụ có bán kính đáy R = 8 : 2 = 4cm và chiều cao h = 12cm nên diện tích toàn phần của hộp chè là:

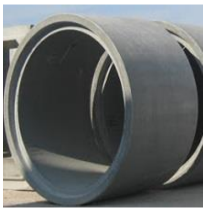
$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy}$

$= 2\pi Rh + 2\pi R^2$

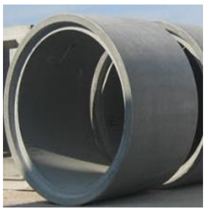
$= 2.3,14.4.12 + 2.3,14.4^2 = 401,92\ (cm^2)$

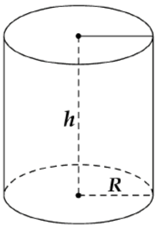
Vậy diện tích giấy carton cần dụng để làm hộp chè là $105\%.401,92 = \mathbf{422,016}\ cm^2$.

Bài 13. Một đoạn ống nước hình trụ dài 5 *m*, có dung tích 32 m^3. Tính diện tích đáy của ống nước đó.



Lời giải





Vì ống nước hình trụ có chiều cao $h = 5m$ và dung tích

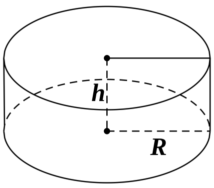
$V_{ống} = 32m^3$ nên:

$$V_{ống} = S_{đáy}.h \Longrightarrow S_{đáy} = \frac{V}{h} = \frac{32}{5} = 6{,}4\ (m^2)$$

Vậy diện tích đáy của ống là $6{,}4m^2$.

Bài 14. Một hộp phô mai gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 2 *cm*. Nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì tạo thành chiếc bánh hình trụ có đướng kính đáy bằng 10 *cm*. Hỏi mỗi miếng phô mai có thể tích bao nhiêu cm^3 (lấy $\pi = 3{,}14$).

Lời giải



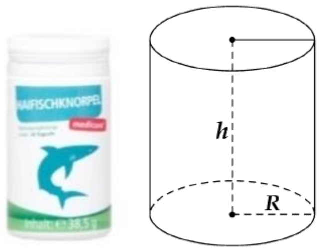
Vì chiếc bánh hình trụ có $h = 2cm$ và bán kính đáy $R = 10: 2 = 5cm$ nên thể tích của chiếc bánh là:

$$V_{bánh} = \pi R^2 h = 3{,}14.5^2.2 = 157\ (\mathrm{cm}^3)$$

Vậy mỗi miếng phô mai có thể tích là 157 : 8 = 1925 cm^3.

Bài 15. Một lọ thuốc hình trụ có chiều cao 10 *cm* và bán kính đáy bằng 5 *cm*. Nhà sản xuất phủ kín mặt xung quanh của lọ thuốc bằng giấy in các thông tìn về loại thuốc ấy. Hãy tính diện tích phần giấy cần dùng của lọ thuốc đó (*Độ dày của giấy in và lọ thuốc không đáng kể*)?

Lời giải



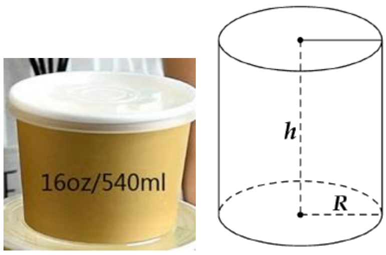
Vì lọ thuốc hình trụ có chiều cao $h = 10cm$ và bán kính đáy $R = 5cm$ nên diện tích xung quanh của lọ thuộc là:

$$S_{\text{xq}} = P_{\text{đáy}}.h = 2\pi Rh$$
$$= 2.3{,}14.5.10 = \mathbf{314}\ (cm^2)$$

Vậy diện tích phần giấy cần dùng là của lọ thuốc là $314cm^2$.

Bài 16. Để hưởng ứng cuộc vận động "*Nói không với rác thải nhựa dùng một lần*", một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng sữa chua. Hộp giấy có dạng hình trụ có đường kính đáy là 6 *cm*; chiều cao 7 *cm* và có lắp đậy làm bằng nhựa. Tính số m^2 giấy để sản xuất 100 hộp giấy trên. (Biết 1 m^2 = 10.000 cm^2; lấy π = 3,14 và bỏ qua các mép dán vỏ hộp).

Lời giải



Vì hộp giấy hình trụ có bán kính đáy $R = 6: 2 = 3cm$ và chiều cao $h = 7cm$ nên diện tích hộp giấy không có lắp là:

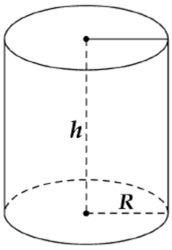
$$S_{\text{không lắp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = 2\pi Rh + \pi R^2$$
$$= 2.3{,}14.3.7 + 3{,}14.3^2$$
$$= 160{,}14\ (\text{cm}^3)$$

Vậy diện tích giấy để làm 100 hộp sữa chua là:

$$160{,}14\,.100 = \mathbf{16014}\ (cm^2) = \mathbf{1{,}6014}\ m^2$$

Bài 17. Một cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng 90π cm^3. Tính bán kính của đáy cốc thủy tinh đó?

Lời giải



Vì cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao h = 10 *cm* và thể tích $V_{cốc} = 90\pi$ cm^3 nên:

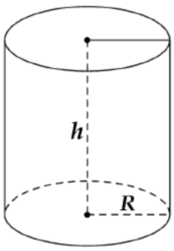
$$V_{cốc} = S_{đáy}.h = \pi R^2.h$$

$$\Longrightarrow R^2 = \frac{V_{cốc}}{\pi h} = \frac{90\pi}{\pi.10} = 9 \Longrightarrow R = 3\ (cm)$$

Vậy bán kính đáy cốc thủy tinh là 3 *cm*.

Bài 18. Một ống đong hình trụ có chiều cao gấp 5 lần bán kính. Biết thể tích ống đong bằng 40π cm^3. Tính chiều cao của ống đong đó.

Lời giải



Vì ống đong hình trụ có $h = 5r$ nên:

$V = \pi r^2.h$

$40\pi = \pi r^2.5r$

$r^3 = 8$

$\Rightarrow r = 2$

$\Rightarrow h = 5.2 = 10cm$

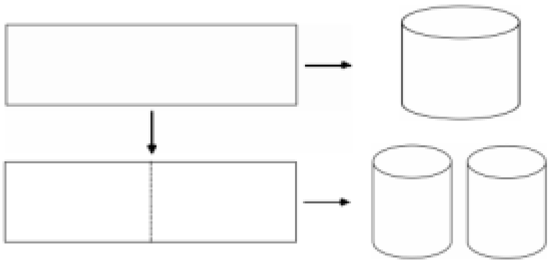
Vậy chiều cao của ống đong là 10cm.

Bài 19. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\,\text{cm}\,\text{x}\,240\,\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50\,\text{cm}$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



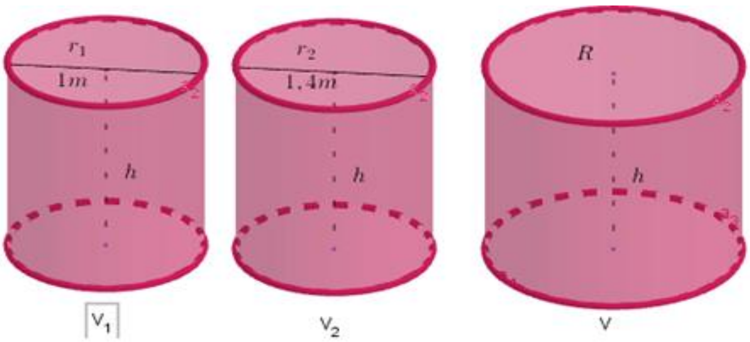
Lời giải

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h = 50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_1 = 240\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_1}{2\pi} = \dfrac{120}{\pi}$ cm. Do đó thể tích của thùng là $V_1 = \pi R_1^2 h$.

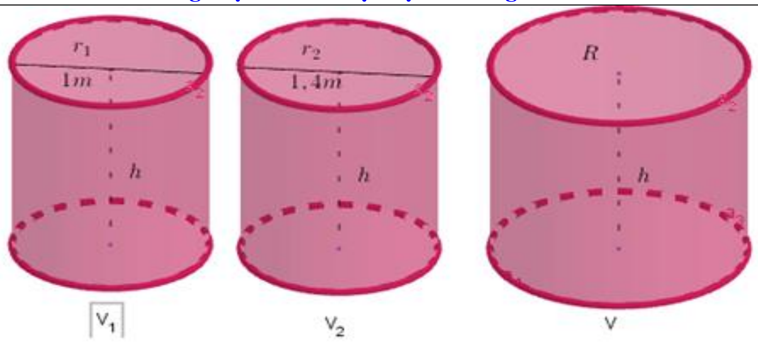
Ở cách 2, hai thùng đều có có chiều cao $h = 50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_2 = 120\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_2}{2\pi} = \dfrac{60}{\pi}$ cm. Do đó tổng thể tích của hai thùng là $V_2 = 2\pi R_2^2 h$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R_1^2 h}{2\pi R_2^2 h} = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\frac{120}{\pi}}{\frac{60}{\pi}}\right)^2 = 2$.

Bài 20. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,4\,m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên (như hình vẽ). Tính bán kính đáy của bể nước dự định làm (làm tròn kết quả đến phần trăm).



Lời giải



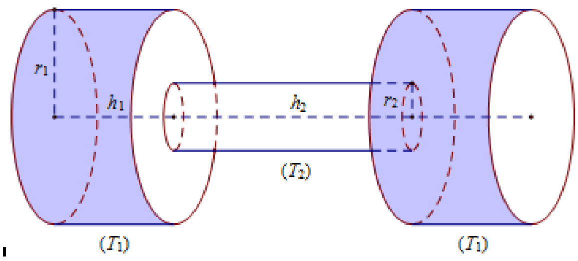
Ta có:

$V = V_1 + V_2$

$h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72\,m$.

Bài 21. Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30\ (cm^3)$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng bao nhiêu?

Lời giải

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1): $V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \frac{1}{2}h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480\,(cm^3)$.

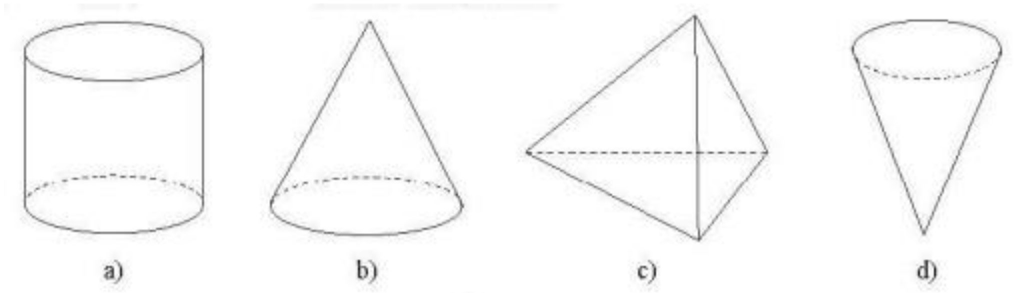
Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510\,(cm^3)$.

Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927\,(g) = 3,927\,(kg)$.

CHỦ ĐỀ 2
HÌNH NÓN

DẠNG 1
NHẬN DẠNG HÌNH NÓN

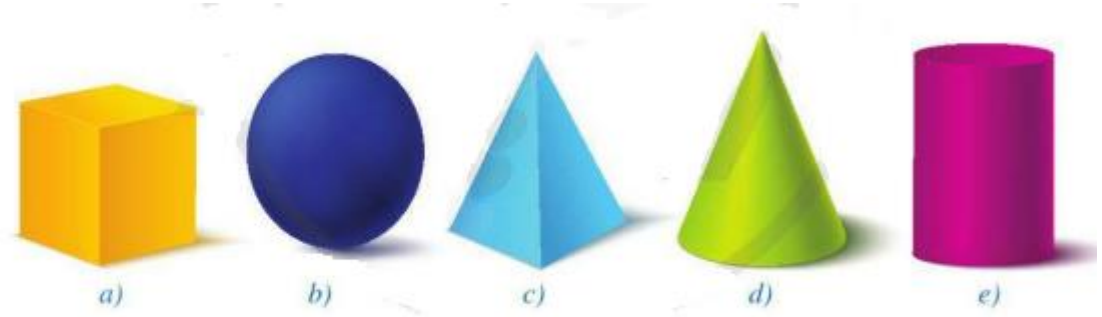
Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón?



Lời giải

+ Hình b) và hình c) là hình nón

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?

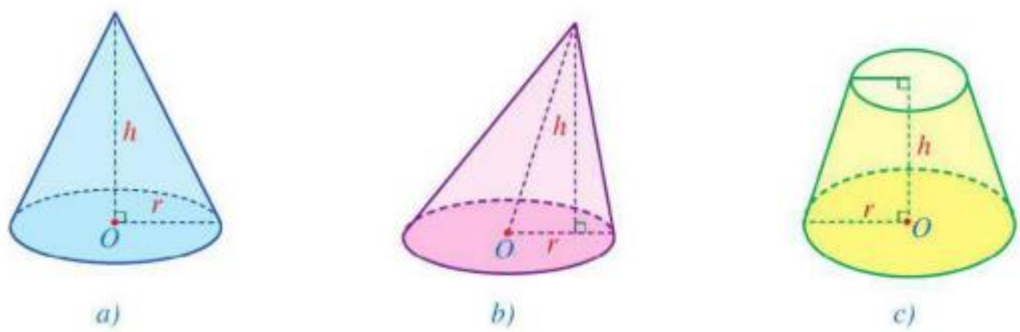


Lời giải

+ Vật thể d) là vật thể có dạng hình nón

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

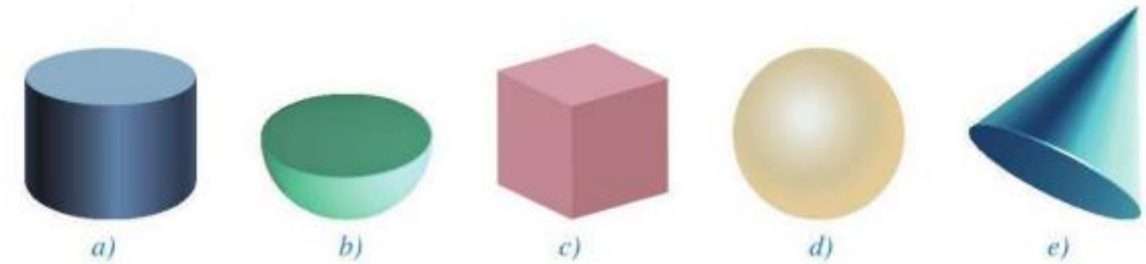
Bài 3. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón có O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao?



Lời giải

+ Hình a) là hình nón

Bài 4. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?



Lời giải

+ Vật thể e) là vật thể có dạng hình nón

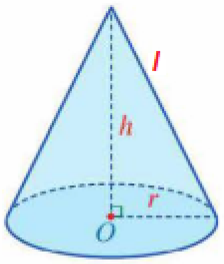
DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \frac{1}{2}C.l = \pi rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(l + r\right)$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3}V_{tru}$

Bài 1. Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l như hình vẽ. Hãy thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình nón	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	4	?	?	?	?
	?	8	10	?	?	?
	2	?	?	14π	?	?
	4	?	9	?	?	

Lời giải

- Với $r = 3, h = 4$

Đường sinh của hình nón: $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl = 15\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r\left(l + r\right) = 24\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi\left(cm^2\right)$

- Với $h = 4, l = 10$

Bán kính của hình nón: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl = 60\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=\pi r\left(l+r\right)=64\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{144}{3}\pi\left(cm^2\right)$

• Với $r=2, S_{xq}=14\pi$

Đường sinh của hình nón: $S_{xq}=\pi rl\Rightarrow l=\dfrac{S_{xq}}{\pi r}=\dfrac{14\pi}{2\pi}=7cm$

Chiều cao của hình nón: $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}cm$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=\pi r\left(l+r\right)=18\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=4\sqrt{5}\pi\left(cm^2\right)$

• Với $r=4, l=9$

Chiều cao của hình nón: $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{81-16}=\sqrt{65}cm$

Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi rl=36\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=\pi r\left(l+r\right)=42\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{16\sqrt{65}\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Bài 2. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này thay đổi như thế nào so với ban đầu?

Lời giải

Gọi r,h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón ban đầu.

Thể tích hình nón ban đầu là $V_1=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Giữ nguyên bán kính đáy của hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này là

$V_2=\dfrac{1}{3}\pi.R^2.\dfrac{h}{2}=\dfrac{1}{2}V_1.V_2=\dfrac{1}{3}\pi r^2\dfrac{h}{2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{2}V_1$

Thể tích của hình nón này giảm 2 lần so với ban đầu

Bài 3. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI=4cm$ và $IM=3cm$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

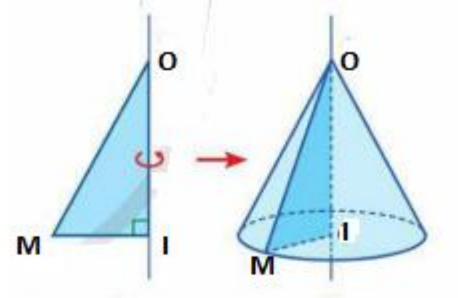
a) Tính độ dài đường sinh hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

c) Tính diện tích toàn phần hình nón.

d) Tính thể tích hình nón.

Lời giải



a) Xét tam giác OIM vuông tại I ,Theo pythagore ta có :

$$OM^2 = IM^2 + OI^2$$
$$OM^2 = 3^2 + 4^2$$
$$OM^2 = 25$$
$$\Rightarrow OM = 5$$

Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón có bán kính đáy $r = IM = 3cm$, chiều cao $h = OI = 4cm$ và đường sinh là cạnh huyền $l = OM = 5cm$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $5cm$.

b) Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.3.5 = 15\pi\left(cm^2\right)$

c) Diện tích toàn phần hình nón là: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r\left(l + r\right) = \pi.3\left(5+3\right) = 24\pi\left(cm^2\right)$

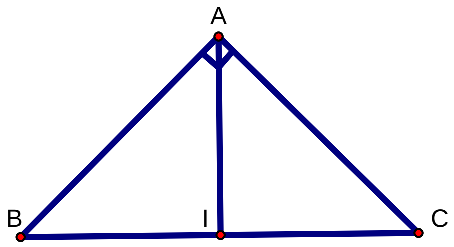
d) Thể tích hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi\left(cm^3\right)$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại cân A, gọi I là trung điểm của BC, $BC = 2dm$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI ta được hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

Lời giải



a) khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI, tao ra hình nón có:

bán kính đáy $r = \dfrac{BC}{2} = 1dm$, đường sinh là $l = AB = AC = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi R = \sqrt{2}\pi$

b) Chiều cao của hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1dm$

thể tích hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.1.1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(dm^3\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

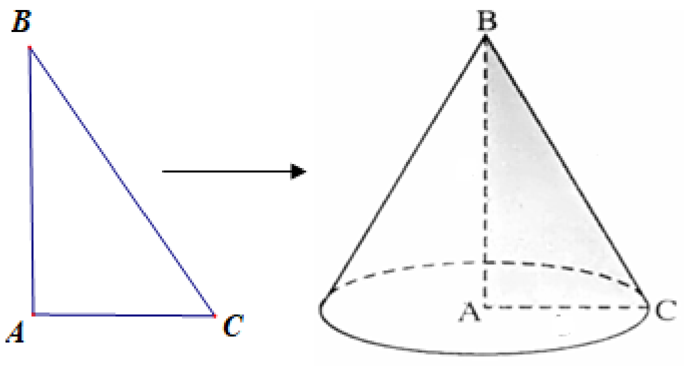
Bài 5. Cho tam giác vuông ABC tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta thu được hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh l của hình nón

b) Tính thể tích hình nón.

Lời giải

Chọn B



a) Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta thu được hình nón có bán kính đáy $r = AC = a$, chiều cao $h = AB = a\sqrt{3}$ và đường sinh là cạnh huyền $l = BC$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, theo pythagore, ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 2a^2$

$\Rightarrow BC = 2a \Rightarrow l = 2a$

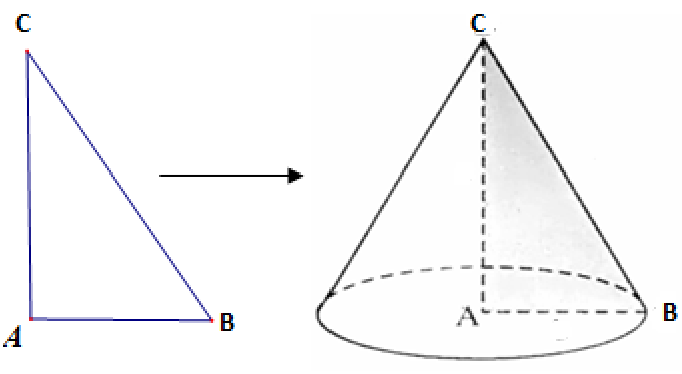
Đường sinh của hình nón $2a$ (đvđd)

b) Thể tích hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi . a^2 . a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}\pi}{3}$ (đvtt)

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $ACB = 30^o$. Tính thể tích V của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Lời giải



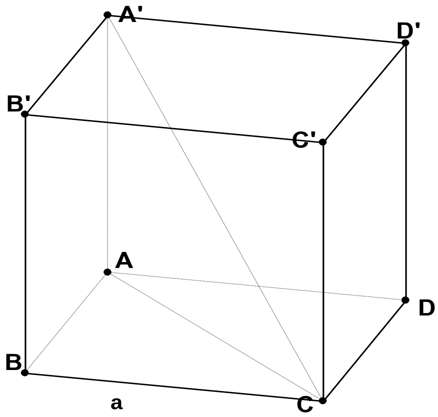
Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC, ta thu được hình nón có bán kính đáy $r = AB = a$, chiều cao $h = AC$ và đường sinh là cạnh huyền $l = BC$.

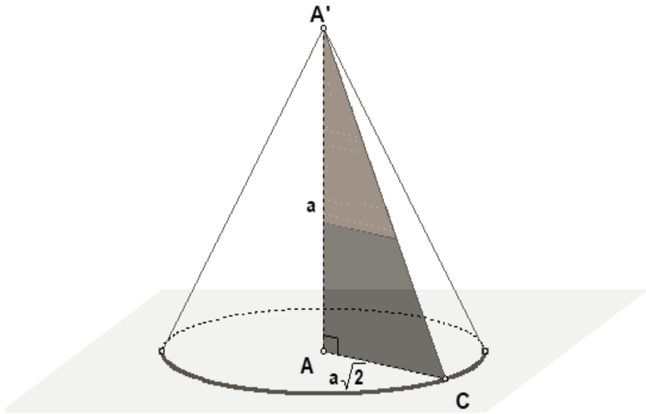
Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có $AC = AB.\cot 30^o = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích hình nón là : $V = \dfrac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của hình nón thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

Lời giải



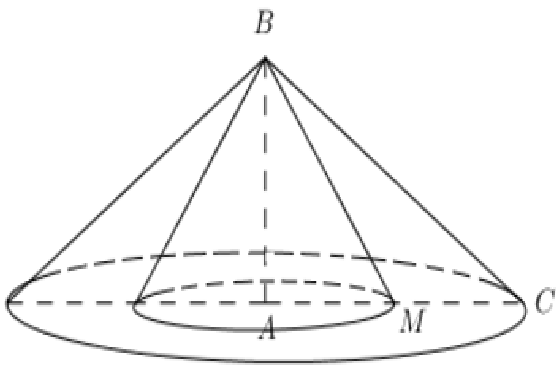


Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA' = a$, bán kính đáy $r = AC = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S = \pi r(r + l) = \pi a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2} + a\sqrt{3}\right) = \pi\left(\sqrt{6} + 2\right)a^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Tính thể tích của hình nón thu được do tam giác BMC quanh quanh AB.

Lời giải

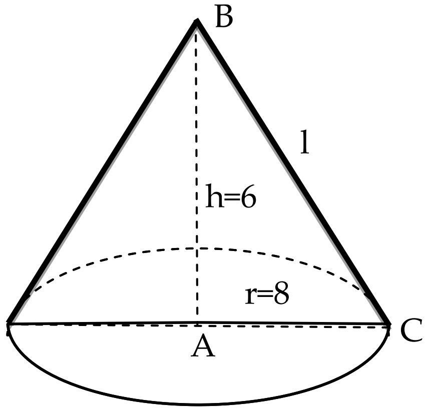


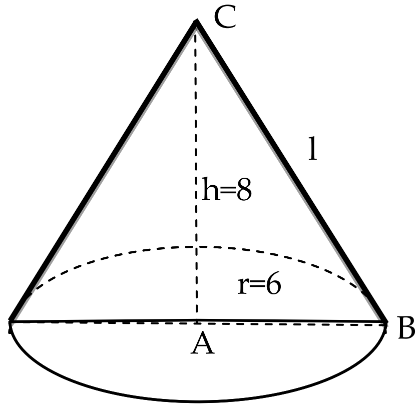
Khi tam giác BMC quanh quanh trục AB thì thể tích hình nón tạo thành là hiệu của thể tích hình nón có đường cao AB, đường sinh BC và hình nón có đường cao AB, đường sinh BM.

Nên $V = \dfrac{1}{3}AB.\pi.AC^2 - \dfrac{1}{3}AB.\pi.AM^2 = \dfrac{1}{4}AB.\pi.AC^2 = 96\pi$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6cm, AC = 8cm$. Gọi V_1 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải





Ta có công thức tính thể tích hình nón có chiều cao h và bán kính r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

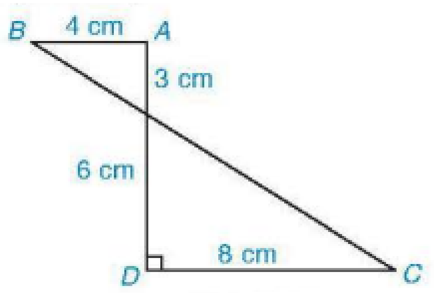
$h = AB = 6cm$ và $r = AC = 8cm$ thì $V_1 = \frac{1}{3}\pi.8^2.6 = 128\pi$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

$h = AC = 8cm$ và $r = AB = 6cm$ thì $V_2 = \frac{1}{3}\pi.6^2.8 = 96\pi$

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$

Bài 10. Cho hình $ABCD$ như hình vẽ. Khi quanh quanh AD một vòng ta thu được một hình.



a) Tính diện tích toàn phần hình vừa tạo trên.

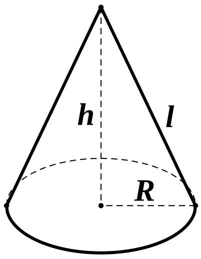
b) Tính thể tích hình được tạo ra.

Lời giải

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH NÓN TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một chiếc nón có bán kính đáy bằng 15 *cm* và chiều cao bằng 20 *cm*. Hỏi chiếc nón múc đầy được bao nhiêu cm^3 nước (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải



Vì chiếc nón hình nón có bán kính đáy $R = 15cm$ và chiều cao $h = 20cm$ nên thể tích của chiếc nón là:

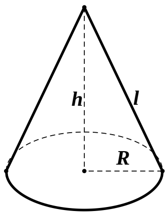
$$V_{\text{chiếc nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$= \frac{1}{3}.3{,}14.15^2.20 = 4710\ (\text{cm}^3)$$

Vậy chiếc nón múc đầy được $4710cm^3$ nước.

Bài 2. Thầy Nam có một đống cát hình nón cao 2*m*, đường kính đáy 6 *m*. Thầy Nam tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình cần 30 m^3 cát. Hỏi thầy Nam cần mua bổ sung bao nhiêu m^3 cát nữa để đủ cát sửa nhà (lấy $\pi = 3,14$ và các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Thể tích hình nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}V_{\text{trụ}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Vì đống cát hình nón có chiều cao $h = 2m$ và bán kính đáy $R = 6:2 = 3m$ nên thể tích của đống cát là:

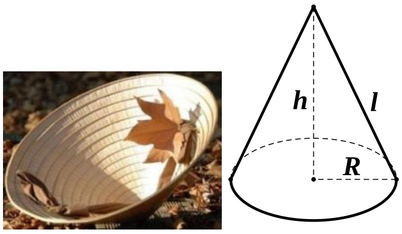
$$V_{\text{đống cát}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.3{,}14.3^2.2 = 18{,}84\ (m^3)$$

Vậy để đủ cát sửa nhà, thầy Nam cần mua bổ sung thêm số cát là $30 - 18{,}84 = 11{,}16m^3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 *cm* và đường sinh bằng 30 *cm*. Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải



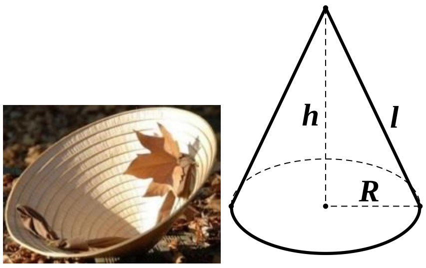
Vì chiếc nón hình nón có bán kính đáy $R = 28 : 2 = 14cm$ và đường sinh $l = 30cm$ nên diện tích xung quanh của chiếc nón là:

$S_{xq} = \pi Rl = 3,14.14.30 = 1318,8\ (cm^2)$

Vậy diện tích lá dùng để làm nón là $110\%.1318,8 = \mathbf{1450,68}cm^2$.

Bài 4. Chiếc nón do một làng nghề ở Việt Nam sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 *cm*, đường kính đáy bằng 40 *cm*. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng làm 5000 chiếc nón.

Lời giải



Vì chiếc nón hình nón có đường sinh $l = 30cm$ và bán kính đáy $R = 40 : 2 = 20cm$ nên diện tích xung quanh của chiếc nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi . 20. 30 = 600\pi\ (cm^2)$$

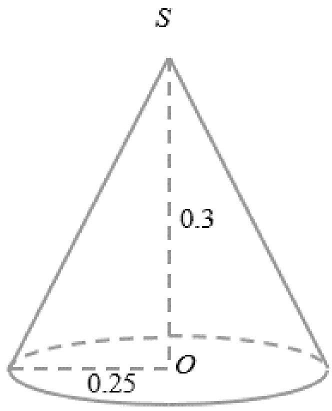
diện tích là cần dùng cho một chiếc nón là: $2. 600\pi = 1200\pi\ cm^2$.

Vậy diện tích là cần dùng làm 5000 chiếc nón là: $500. 1200\pi = 600000\pi\ cm^2$.

Bài 5. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6{,}13m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần bao nhiêu khối lượng lá? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

Lời giải

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R=\frac{50}{2}=25(cm)=0,25(m)$ và đường cao $h=30(cm)=0,3(m)$.



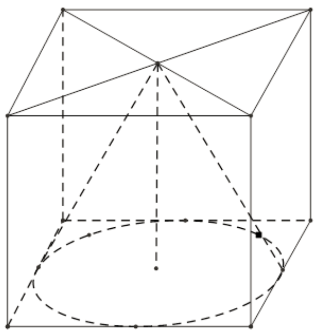
Gọi l là chiều cao của hình nón $\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\frac{\sqrt{61}}{20}(m)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\frac{\sqrt{61}}{20}=\frac{\pi\sqrt{61}}{80}\left(m^2\right)$

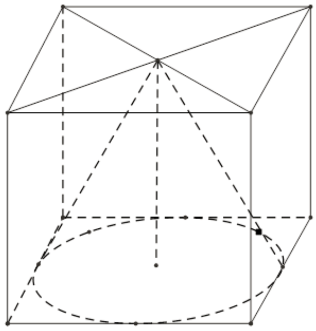
Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\frac{\pi\sqrt{61}}{80}=\frac{25\pi\sqrt{61}}{2}\left(m^2\right)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\frac{S}{6,13}\approx 50,03(kg)$.

Bài 6. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



Lời giải



Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V = 1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h = 1$, bán kính đáy $r = \frac{1}{2}$.

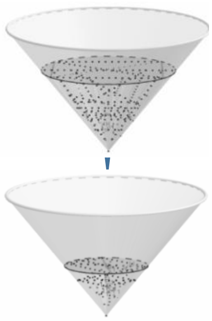
Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.1 = \frac{\pi}{12}$.

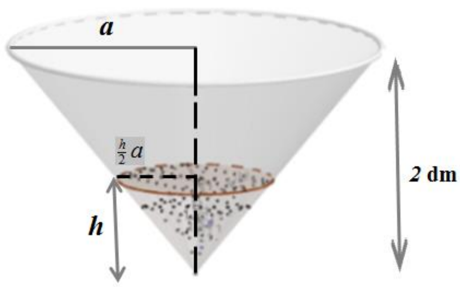
Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: $V_2 = V - V_1 = 1 - \frac{\pi}{12} = \frac{12-\pi}{12}$.

Do đó: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{12-\pi}$.

Bài 7. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



Lời giải



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

h, V_3 lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

R, r lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\dfrac{R}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=\dfrac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2=\frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\dfrac{\pi a^2}{12}$.

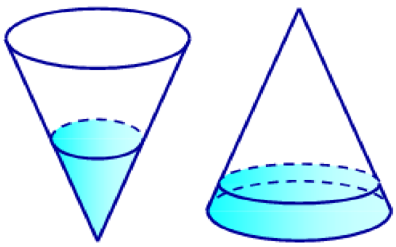
Mặt khác: $\dfrac{r}{a}=\dfrac{h}{2}\Rightarrow r=\dfrac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3=\frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2=\dfrac{\pi a^2h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1=\frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

Lại có: $V_3=V_1-V_2\Rightarrow\dfrac{\pi a^2h^3}{12}=\frac{1}{3}.2.\pi a^2-\dfrac{\pi a^2}{12}\Leftrightarrow 1+h^3=8\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

Bài 8. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là $10cm$. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên thì chiều cao của cột nước trong phễu bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi R là bán kính đáy của cái phễu ta có $\dfrac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

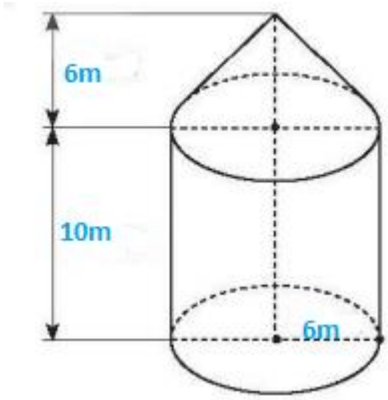
Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\dfrac{1}{3}\pi(R)^2.20-\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2.10=\dfrac{35}{6}\pi R^2$.

Khi lật ngược phễu Gọi h chiều cao của cột nước trong phễu.phần thể tích phần nón không chứa nước là

$V=\dfrac{1}{3}\pi(20-h)\left(\dfrac{R(20-h)}{20}\right)^2=\dfrac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2$.

$\dfrac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2=\dfrac{35}{6}\pi R^2\Rightarrow(20-h)^3=7000\Rightarrow h\approx 0,87$

Bài 9. Một thùng chứa xăng gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với kích thước như hình vẽ.



a) Thùng chứa xăng trên chứa được tối đa bao nhiêu lít xăng?

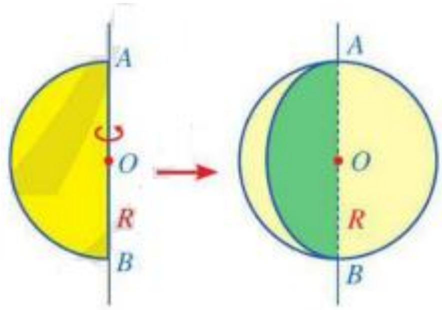
b) Một doanh nghiệp mua bán xăng dầu muốn đặt làm một thùng chứa xăng như trên. Biết chi phí 150000 đồng/m^2, Hỏi doanh nghiệp đó cần bỏ ra số tiền bao nhiêu để làm được một thùng chứa xăng như trên.

Lời giải

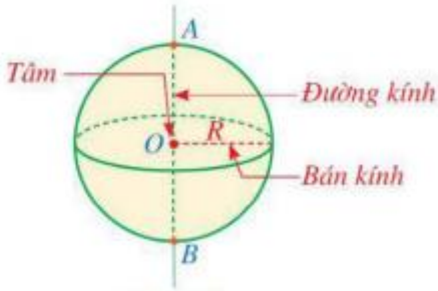
BÀI 2
HÌNH CẦU

1. Hình cầu

a. Nhận biết hình cầu



Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một **hình cầu**.



Với hình cầu trên, ta có:

• Nửa đường tròn đường kính AB quét nên **mặt cầu**. Như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó.

• Điểm O được gọi là **tâm của hình cầu** (hay **tâm của mặt cầu**).

• AB là **đường kính của hình cầu** (hay **đường kính của mặt cầu**).

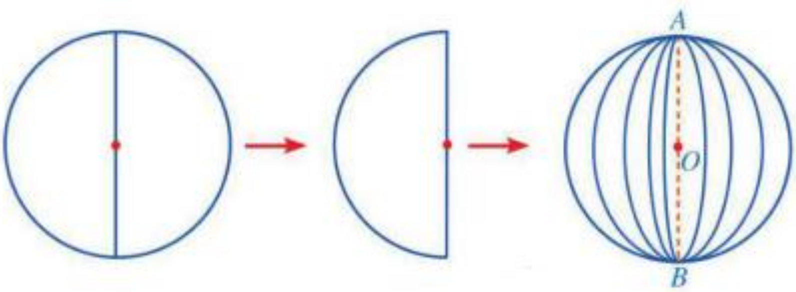
• R là **bán kính của hình cầu** (hay **bán kính của mặt cầu**).

b. Tạo lập hình cầu

Cắt một số miếng bìa có dạng hình tròn có cùng đường kính (hình 1).

Mỗi miếng bìa tròn đó được cắt hai nửa hình tròn (hình 2).

Ghép các miếng bìa có dạng nửa hình tròn đó để được một hình cầu như dưới đây (hình 3).



Hình 1 Hình 2 Hình 3

c. Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

- Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn.

Đặc biệt, nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một hình tròn lớn.

- Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.

2. Diện tích mặt cầu

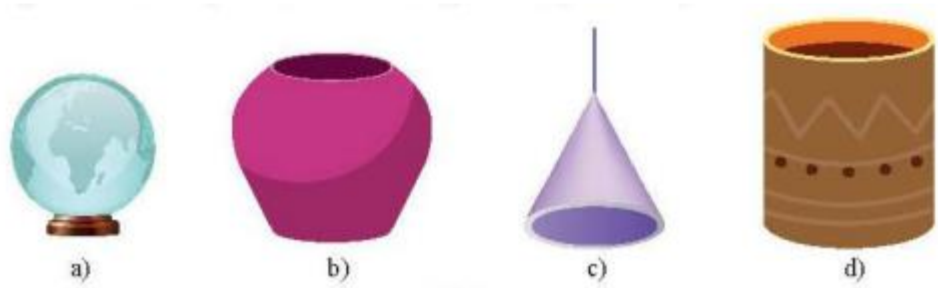
Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$

3. Thể tích của hình cầu

Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

DẠNG 1
NHẬN DẠNG MẶT CẦU

Bài 1. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



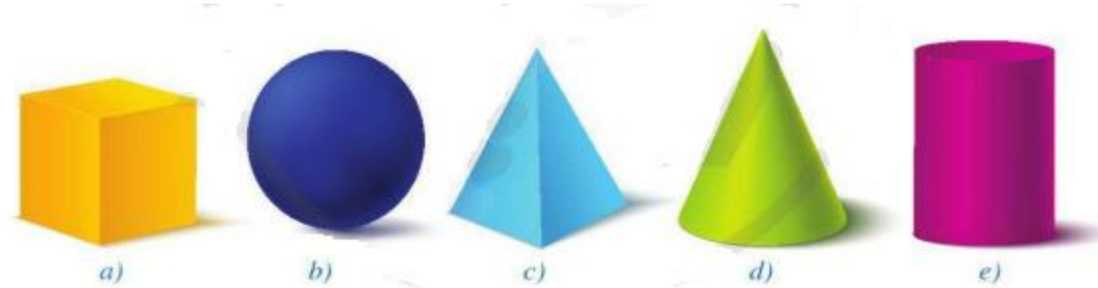
Lời giải

+ Hình d) là dạng hình trụ

+ Hình c) là dạng hình nón

+ Hình a) là dạng hình cầu

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



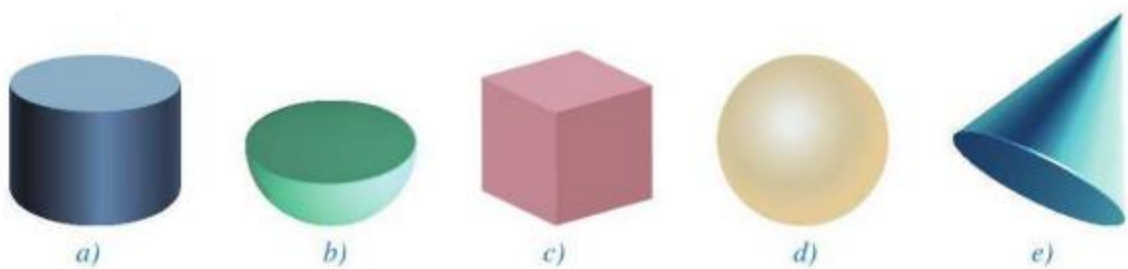
Lời giải

+ Hình e) là dạng hình trụ

+ Hình d) là dạng hình nón

+ Hình b) là dạng hình cầu

Bài 3. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



Lời giải

+ Hình a) là dạng hình trụ

+ Hình e) là dạng hình nón

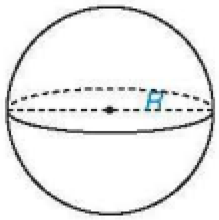
+ Hình d) là dạng hình cầu

DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH , DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU

• Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$

• Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

Lời giải

• Với $R = 3$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.4^2 = 64\pi\left(dm^2\right)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.4^3 = \dfrac{256}{3}\pi\left(dm^3\right)$

• Với $S = 144\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$S = 4\pi R^2$

$R^2 = \dfrac{S}{4\pi}$

$R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi}$

$R^2 = 36$

$\Rightarrow R = 6(dm)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.6^3 = 288\pi\left(dm^3\right)$

• Với $V = 36\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$R^3 = \frac{3V}{4\pi}$

$R^3 = \frac{3.36\pi}{4\pi}$

$R^3 = 27$

$R = 3(dm)$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.3^2 = 36\pi\left(dm^2\right)$

• Với $S = 196\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$S = 4\pi R^2$

$R^2 = \frac{S}{4\pi}$

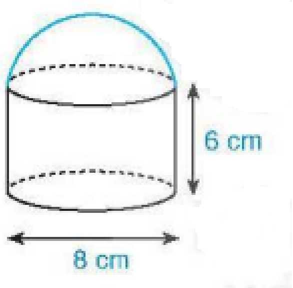
$R^2 = \frac{196\pi}{4\pi}$

$R^2 = 49$

$\Rightarrow R = 7(dm)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.7^3 = \frac{1372}{3}\pi\left(dm^3\right)$

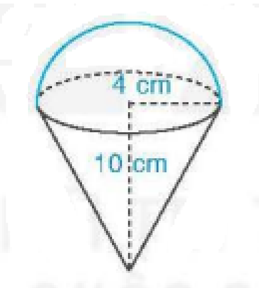
Bài 2. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

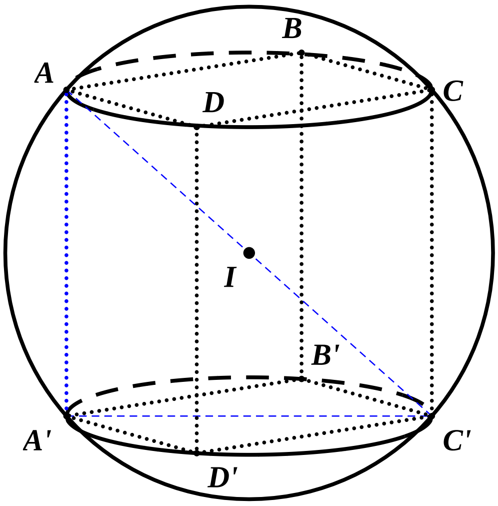
Bài 3. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu và hình nón (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

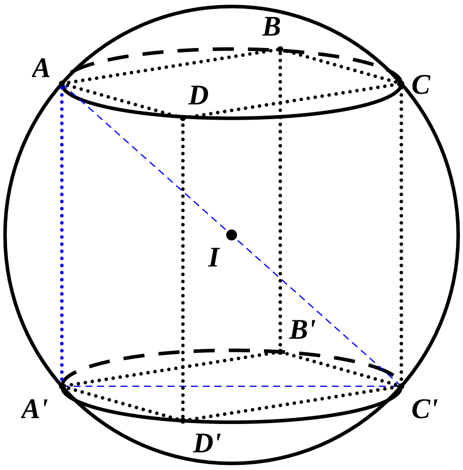
Bài 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2cm$. Một mặt cầu đi qua tám đỉnh $A, B, C, D, A', B', C', D'$ của hình lập phương đó (như hình vẽ).



a) Tính bán kính hình cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Lời giải



a) Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và

$$R = IA = \frac{AC'}{2}$$

Khối lập phương cạnh a nên:

$$AA' = 2cm,\ A'C' = 2\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$$

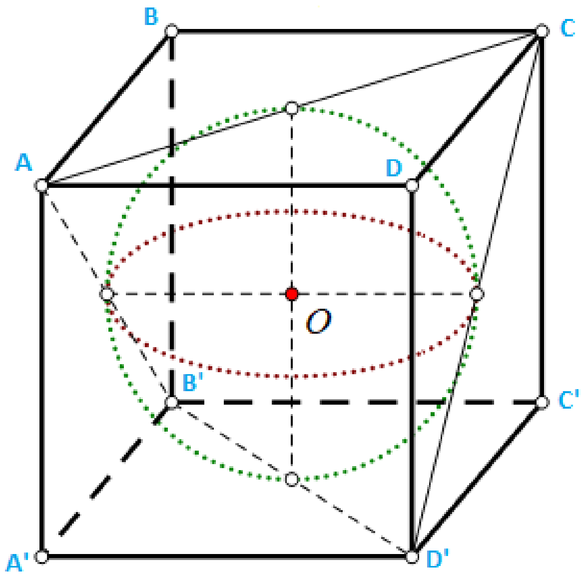
$$\Rightarrow R = \frac{AC'}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Vậy bán kính hình cầu trên là $R = \sqrt{3}cm$

b)Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.R^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi.3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi\left(cm^3\right)$$

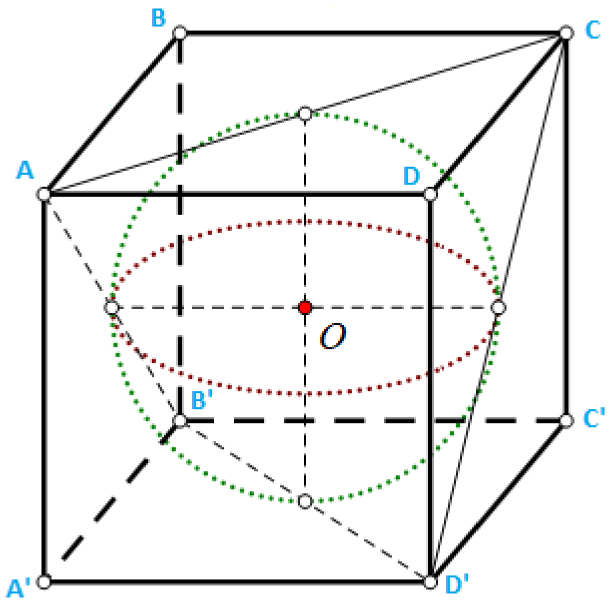
Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3cm$. Một mặt cầu tiếp xúc sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương (như hình vẽ).



a) Tính diện tích mặt cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Lời giải



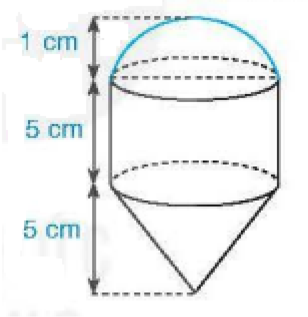
a) Do mặt cầu tiếp xúc hết sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương nên bán kính của hình cầu bằng nửa cạnh hình lập phương hay $R=\frac{3}{2}cm$.

Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=9\pi\left(cm^2\right)$

b) Thể tích hình cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^3=9\pi\ \ cm^3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

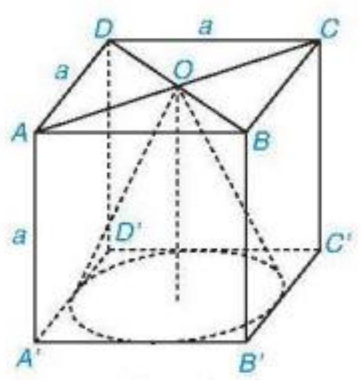
Bài 6. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính).



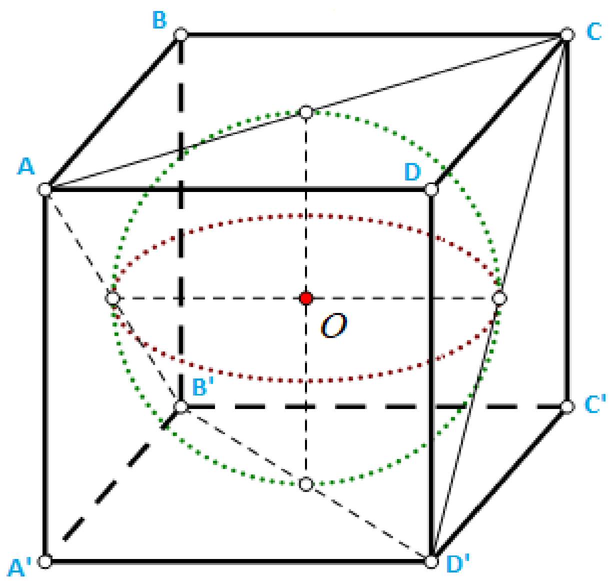
a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

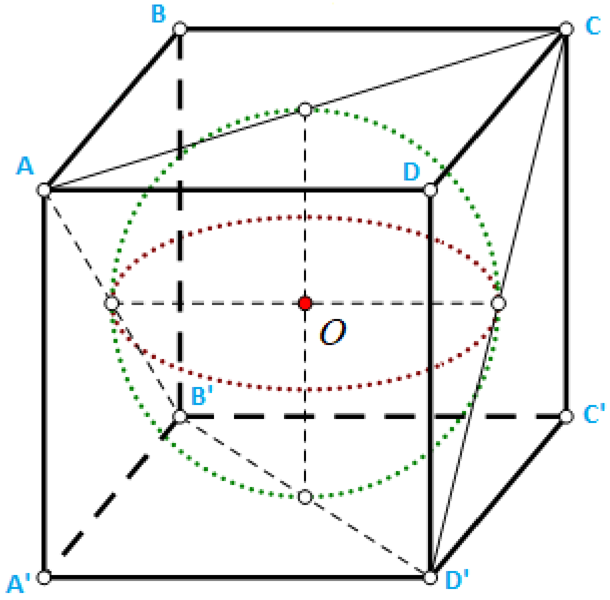
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $10cm$. Tính diện tích toàn phần hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ như hình vẽ.



Bài 8. Cho hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương (như hình vẽ). Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của hình cầu và hình lập phương đó. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Gọi a là cạnh của hình lập phương đã cho.

Bán kính của khối cầu là $R = \frac{a}{2}$, nên thể tích của nó là $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

Thể tích khối lập phương là $V_2 = a^3$.

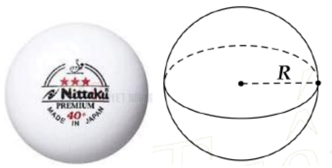
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{6}$.

DẠNG 3

ỨNG DỤNG CỦA MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 *cm*. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải



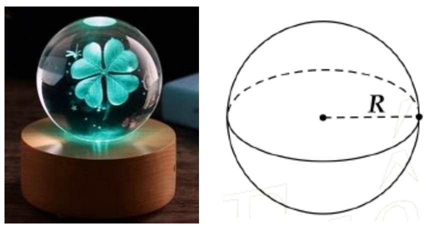
Vì quả bóng bàn hình cầu có bán kính $R = 2cm$ nên diện tích bề mặt quả bón là:

$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.2^2 = 50,24\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích bề mặt quả bóng bàn là 50,24cm^2.

Bài 2. Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\ cm^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.

Lời giải



Vì quả pha lê hình cầu có diện tích $S_{\text{mặt cầu}} = 144\pi\ cm^2$ nên:

$S = 4\pi R^2$

$R^2 = \dfrac{S}{4\pi}$

$R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi}$

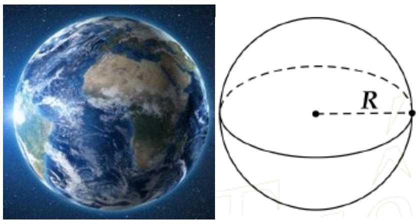
$R^2 = 36$

$\Rightarrow R = 6\left(cm\right)$

Vậy thể tích quả pha lê là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.6^3 = 228\pi\ cm^3$.

Bài 3. Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 *km*. Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước (Lấy π = 3,14; kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Lời giải



Vì Trái Đất hình cầu có bán kính R = 6370 km nên diện tích bề mặt Trái Đất là:

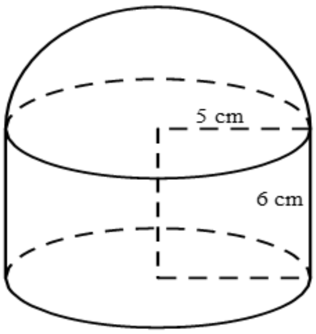
$S_{\text{bề mặt}} = 4\pi R^2$

$= 4.\ 3,14.\ 6370^2$

$= 509.645.864\ (km^2)$

Vậy diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước là (100% – 29%). 509.645.864 = 361.848.563 (km^2)

Bài 4. Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là bao nhiêu?



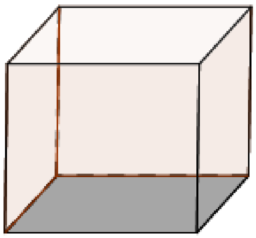
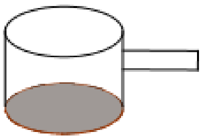
Lời giải

Diện tích nắp hộp cần sơn là: $S_1 = \dfrac{4\pi r^2}{2} = 50\pi\ cm^2$.

Diện tích than hộp cần sơn là: $S_2 = 2\pi rh = 60\pi\ cm^2$.

Diện tích S cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 50\pi + 60\pi = 110\pi\ cm^2$.

Bài 5. Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày bạn Đạt lấy nước ra ở trong bể bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là 5cm và bán kính đường tròn đáy là 4cm. Trung bình một ngày bạn Đạt múc ra 170 gáo nước để sử dụng (*Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo*). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?

Lời giải

+ Thể tích nước được đựng đầy trong bể là $V = 2.3.2 = 12\left(\text{m}^3\right)$.

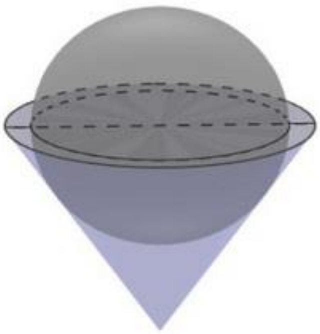
+ Thể tích nước đựng đầy trong gáo là $V_g = \pi 4^2.5 = 80\pi\left(\text{cm}^3\right) = \dfrac{\pi}{12500}\left(\text{m}^3\right)$.

+ Mội ngày bể được múc ra 170 gáo nước tức là trong một ngày lượng được được lấy ra bằng.

$V_m = 170.V_g = \dfrac{17}{1250}\pi\left(\text{m}^3\right)$.

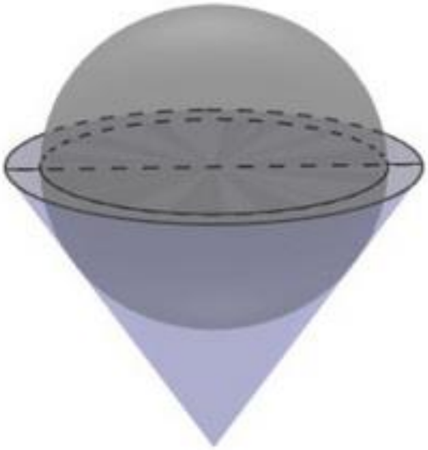
+ Ta có $\dfrac{V}{V_m} = \dfrac{12}{\dfrac{17}{1250}\pi} \simeq 280,8616643 \Rightarrow$ sau 281 ngày bể sẽ hết nước.

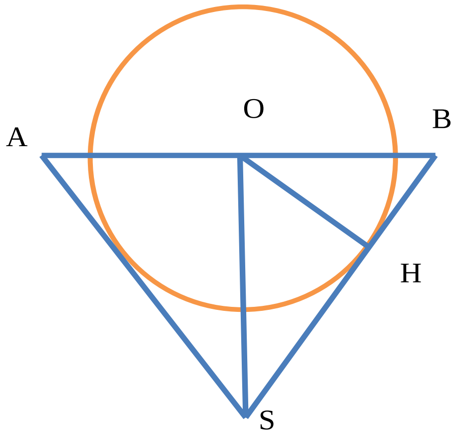
Bài 6. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của hình cầu chìm trong nước (hình bên dưới). Tính thể tích V của nước còn lại trong bình.



Lời giải

Chọn B





Đường kính của hình cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.

Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$$18\pi = \frac{V_C}{2} = \frac{2\pi OH^3}{3}$$

$$\Rightarrow OH = 3.$$

Lại có:

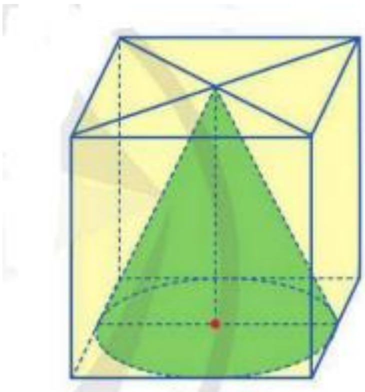
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Rightarrow OB^2 = 12.$$

Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): $V_n = \frac{\pi.OS.OB^2}{3} = 24\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Thể tích nước còn lại là: $24\pi - 18\pi = 6\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

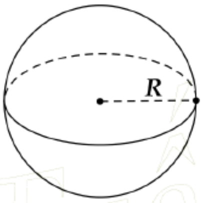
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $5m$. Đặt một hình nón có đỉnh trùng tâm của hình vuông và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông như hình vẽ. Người ta đổ đầy nước vào hình lập phương, tính lượng nước cần đổ (giả sử hình nón đặc, không bị rỗng).



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8. Một quả bóng bằng da có đường kính 22 *cm*. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải



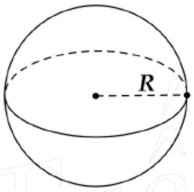
Vì quả bóng da hình cầu có bán kính $R = 22 : 2 = 11$ *cm* nên diện tích bề mặt của quả bóng là:

$$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.11^2 = 1519,8\left(cm^2\right)$$

Vậy diện tích da cần dùng để làm quả bóng là $1519,8\left(cm^2\right)$

Bài 9. Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 *m* và được làm bằng vải dù. Hãy tính diện tích vải dù để làm khinh khí cầu đó (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phần thứ hai)

Lời giải



Vì khinh khí cầu hình cầu có bán kính $R = 11 : 2 = 5,5$ *m* nên:

$$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.(5,5)^2 = 379,94\left(m^2\right)$$

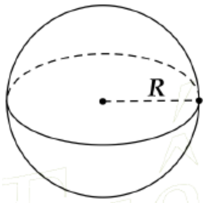
Vậy diện tích vải dù dùng để làm khinh khí cầu là $379,94\ m^2$

Bài 10. Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 *m*.

a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Biết rằng lượng nước đựng đầu trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư có 1304 người. Hỏi trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước (lấy π = 3,14; biết 1 m^3 = 1000 *lít*).

Lời giải



a) Vì tháp nước hình cầu có R = 6 : 2 = 3 *m* nên thể tích của tháp nước là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.3,14.3^2 = 113,04\left(m^3\right) = 113040\left(lit\right)$$

Vậy thể tích của tháp nước là 113040 *lít*.

b) Một ngày khu dân cư dùng hết số nước là: $113040 : 5 = 22608\left(lit\right)$

Vậy trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng 22608 : 1304 = 13,34 *lít*.

Bài 11. Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng 90π cm^3. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc?

Lời giải

Vì cốc nước hình trụ có chiều cao h = 10 *cm* và thể tích

$V_{cốc}$ = 160π cm^3 nên:

$$V_{cốc} = S_{đáy}.h = \pi R^2.h$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{V_{cốc}}{\pi h} = \frac{90\pi}{\pi.10} = 9 \Rightarrow R = 3\ (cm)$$

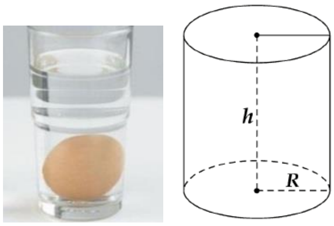
Vì viên bi sắt hình cầu có R = 3 *cm* nên:

$V_{\text{viên bi}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.3^3 = 36\pi\ (cm^3)$

Vậy lượng nước bị tràn ra ngoài là $36\pi\ cm^3$.

Bài 12. Người ta thả một quả trứng vào một cốc thủy tinh có nước, hình trụ; thấy trứng chìm hoàn toàn xuống đáy và nằm ngang thì chứng tỏ quả trứng đó còn tươi, mới được để từ một đến hai ngày. Hãy tính thể tích quả trứng đó, biết diện tích đáy của cột nước hình trụ là 16,7 cm^2 và nước trong lọ dâng lên 0,82 cm khi qủa trứng chìm hoàn toàn trong nước.

Lời giải



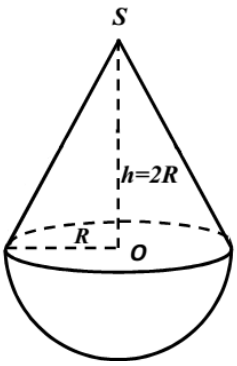
Vì phần nước dâng lên hình trụ có diện tích đáy

$S_{đáy} = 16{,}7cm^2$ và chiều cao $h = 0{,}82cm$ nên thể tích phần nước dâng lên là:

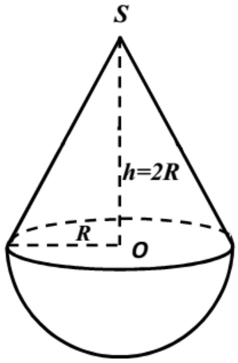
$V_{\text{phần nước dâng}} = S_{\text{đáy}}.h = 16{,}7.0{,}82 = 13{,}694\ (cm^3)$

Vậy thể tích quả trứng đó là 13,694 cm^3.

Bài 13. Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên dưới. Biết hình nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\ cm^3$. Tính diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó.



Lời giải



Thể tích hình nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa hình cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là:

$V_1 + V_2 = 36\pi$

$\frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi$

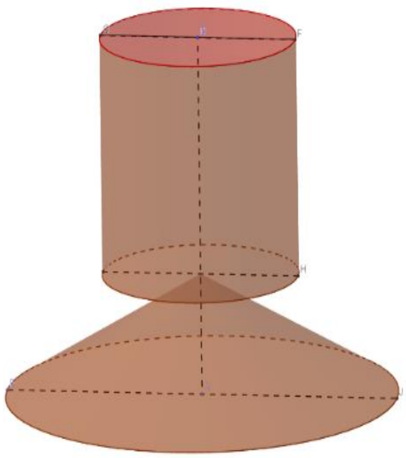
$\Rightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2 + R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

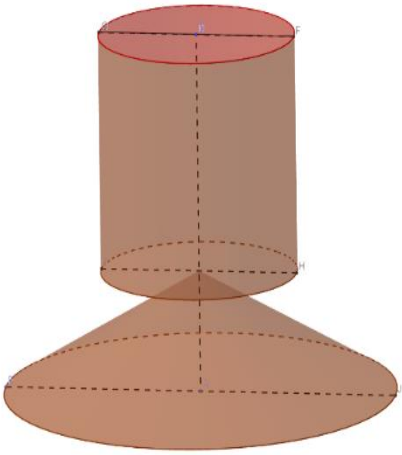
Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\ cm^2$.

Bài 14. Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của hình nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Tính thể tích của toàn bộ khối đồ chơi.



Lời giải



Ta có thể tích hình trụ là $V_1 = \pi.r_1^2.h_1$, mà $r_2 = 2r_1,\ h_1 = 2h_2$

$V_1 = \pi.\left(\frac{r_2}{2}\right)^2.2h_2 = \frac{1}{2}\pi.r_2^2h_2$.

Mặt khác thể tích hình nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.r_2^2h_2 = 20 \Rightarrow \pi.r_2^2h_2 = 60\ \left(\text{cm}^3\right)$.

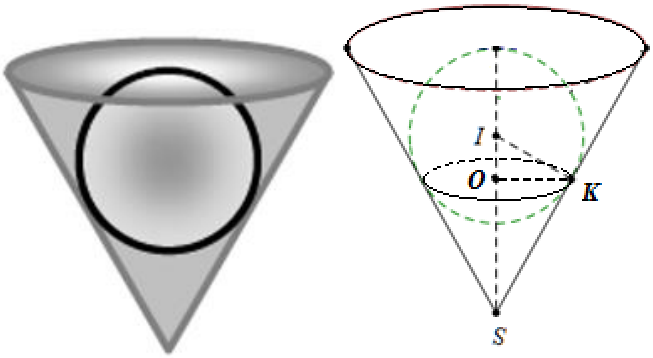
Suy ra $V_1 = \frac{1}{2}.60 = 30\ \text{cm}^3$.

Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng $V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50\ \text{cm}^3$.

Bài 15. Thả một quả cầu đặc có bán kính $3\ (\text{cm})$ vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên dưới). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là $5\ (\text{cm})$. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.

Lời giải

Xét hình nón và quả cầu như hình vẽ bên dưới.



$OI = \frac{IK^2}{SI} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}\ (\text{cm})$.

Thể tích chỏm cầu tâm I có bán kính OK là:

$$V_2 = \pi.(IK - OI)^2.\left(IK - \frac{IK - OI}{3}\right) = \pi.\left(3 - \frac{9}{5}\right)^2.\left(3 - \frac{3 - \frac{9}{5}}{3}\right) = \frac{468\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

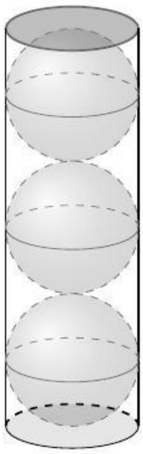
Thể tích hình nón có đỉnh S, đáy hình tròn tâm O, bán kính đáy OK là:

$$V_1 = \frac{1}{3}.SO.S_{(O;OK)}\ \frac{1}{3}.\frac{16}{5}.\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{768\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

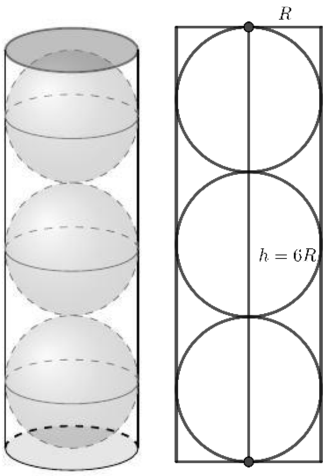
Thể tích phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón là:

$$V_1 - V_2 = \frac{768\pi}{125} - \frac{468\pi}{125} = \frac{12\pi}{5}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Bài 16. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Tính a gần.



Lời giải



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$.

Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3.\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$;

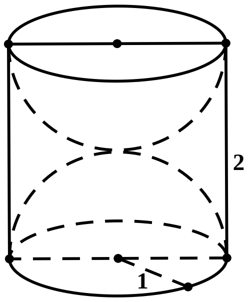
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

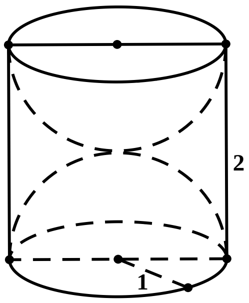
Suy ra $a \approx 33$.

Bài 17. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu. Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu.



Lời giải

Theo bài toán ta có hình vẽ



Thể tích của hình trụ là $V = \pi.1^2.2 = 2\pi$.

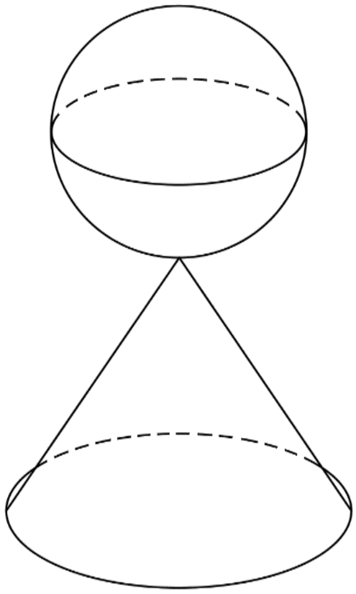
Vì đường tròn đáy của hình trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu nên bán kính của mỗi nửa hình cầu là $R = 1$.

Thể tích của hai nửa hình cầu bị khoét đi là $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi.1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Bài 18. Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r,l thỏa mãn $r=\frac{1}{2}l$ và $l=\frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



Lời giải

$r=\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R$.

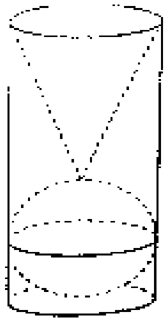
Diện tích mặt cầu $S_1=4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón $S_2=\pi rl+\pi r^2=\pi.\frac{3}{4}R.\frac{3}{2}R+\pi.\frac{9}{16}R^2=\frac{27\pi R^2}{16}$

Theo giả thiết: $4\pi R^2+\frac{27\pi R^2}{16}=91 \Leftrightarrow \frac{91\pi R^2}{16}=91 \Leftrightarrow \pi R^2=16$

Vậy $S_1=4\pi R^2=64cm^2$

Bài 19. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một hình nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



Lời giải

Gọi R,h lần lượt là bán kính đáy và là chiều cao của hình trụ

$h=6R$

Thể tích của hình trụ $V_T=\pi 6R^3$.

Khối cầu bên trong hình trụ có bán kính R nên hình cầu có thể tích $V_C=\frac{4}{3}\pi R^3$.

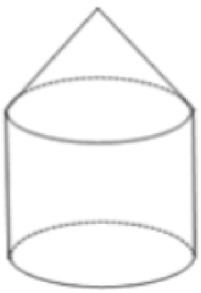
Khối nón bên trong hình trụ có bán kính R và chiều cao $h=4R$ nên hình nón có thể tích $V_N=\frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích lượng nước còn lại bên trong hình trụ

$V=V_T-\left(V_C+V_N\right)=6\pi R^3-\frac{8}{3}\pi R^3=\frac{10}{3}\pi R^3$.

Vậy $\frac{V}{V_T}=\frac{5}{9}$.

Bài 20. Một khối đồ chơi gồm một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh hình trụ bằng độ dài đường sinh hình nón và bằng đường kính hình trụ, hình nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, tính thể tích hình trụ.



Lời giải

Gọi $l;r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính đáy hình trụ.

Khi đó ta có: $l=2r$.

Suy ra thể tích hình trụ là $V_t=\pi r^2 l=2\pi r^3$.

Gọi $h_n;l_n$ lần lượt là chiều cao và đường sinh của hình nón.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} l_n=l \\ h_n=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r \end{cases}$.

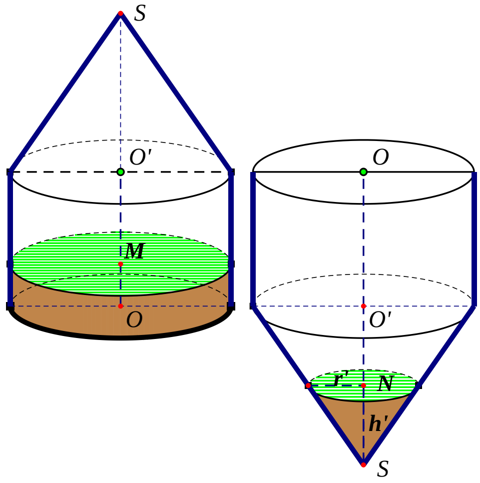
Khi đó thể tích hình nón là $V_n = \frac{1}{3}\pi r^2 h_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Do thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$ nên

$$V_t + V_n = 2\pi r^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi r^3 = 50 \Rightarrow \pi r^3 = \frac{150}{6+\sqrt{3}}.$$

Khi đó thể tích hình trụ là $V_t = \pi r^2 l = 2\pi r^3 \approx 38,8cm^3$.

Bài 21. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng *h*. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo *h*.



Lời giải

Thể tích chất lỏng $V = \pi r^2 . \frac{1}{24} h = \frac{1}{24}\pi r^2 h$.

Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là $V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$.

Mà $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h}.r$. Do đó $V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h'}{h}.r\right)^2 h' = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{h'^3}{h^2}$.

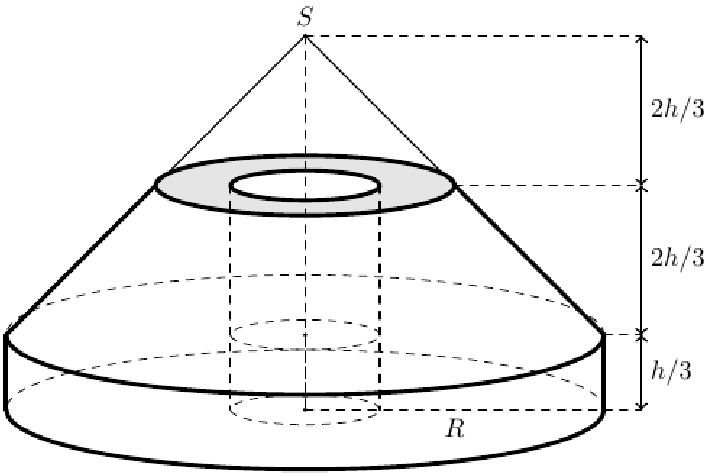
Theo bài ra, $V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}$.

Bài 22. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\text{m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*



Tính thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).*

Lời giải

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$:

$$V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

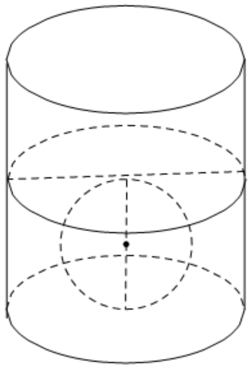
Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

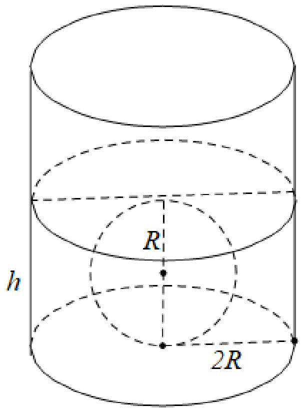
Thể tích của khối bê tông bằng:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3{,}109\,\mathrm{m}^3.$$

Bài 23. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là bao nhiêu?



Lời giải



Gọi $R = 2,7cm$ là bán kính của viên bi. Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là: $V_1 = \pi(2R)^2.4,5 = 18\pi R^2$.

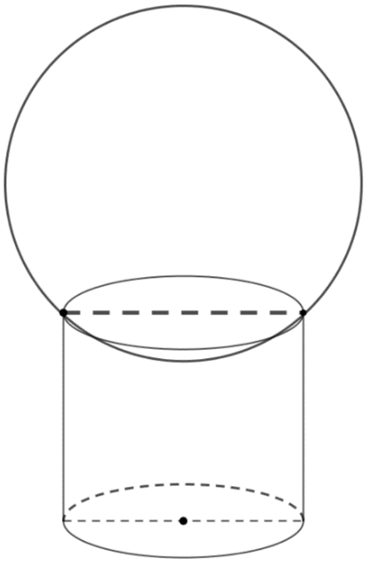
Thể tích viên bi là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)$.

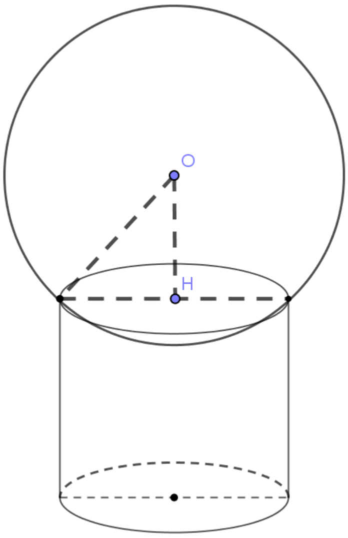
Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

Ta có: $V = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right) = \pi(2R)^2.h \Rightarrow h = \dfrac{2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{\pi(2R)^2} = \dfrac{\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{2} = 5.4(cm)$.

Bài 24. Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Gọi R là bán kính mặt cầu, r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

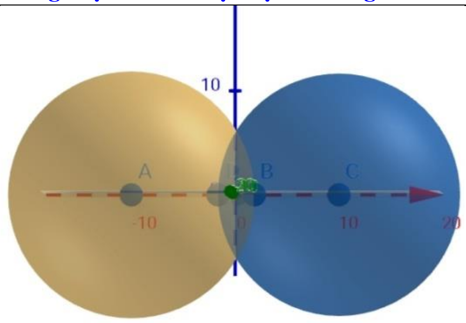
Theo bài ra ta có: $h = 2R$ và $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = \pi r^2 h = \pi \frac{3R^2}{4}.2R = \frac{3\pi R^3}{2}$

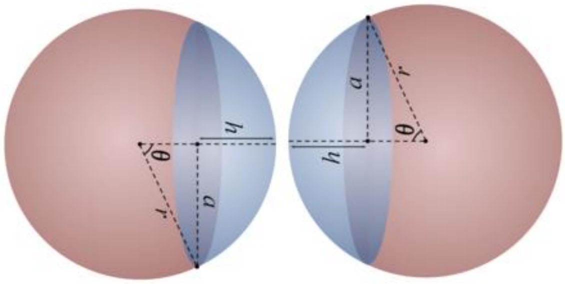
$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$ hay $9V_1 = 8V_2$.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$

Bài 25. Công ty vàng bạc đá quý muốn làm một món đồ trang sức có hình hai hình cầu bằng nhau giao nhau như hình vẽ. Khối cầu có bán kính $25cm$ khoảng cách giữa hai tâm hình cầu là $40cm$. Giá mạ vàng $1m^2$ là 470.000 đồng. Nhà sản xuất muốn mạ vàng xung quanh món đồ trang sức đó. Tính số tiền cần dùng để mạ vàng khối trang sức đó.



Lời giải



(Phần màu nhạt là phần giao nhau của hai khối cầu)

Gọi h là chiều cao của chỏm cầu. Ta có $h = \frac{2R-d}{2} = \frac{2.25-40}{2} = 5cm$

(d là khoảng cách giữa hai tâm)

Diện tích xung quanh của chỏm cầu là: $S_{xq} = 2\pi Rh$

Vì 2 khối cầu bằng nhau nên 2 hình chỏm cầu bằng nhau.

S_{xq} khối trang sức $= 2S_{xq}$ khối cầu $- 2S_{xq}$ chỏm cầu.

Khối trang sức có $S_{xq} = 2.4\pi R^2 - 2.2\pi Rh = 2.4\pi.25^2 - 2.2\pi.25.5 = 4500\pi cm^2 = 0.45m^2$

Vậy số tiền dùng để mạ vàng khối trang sức đó là $470.000.0,45\pi \simeq 664.000$ đồng.