斜率优化DP

高翊宸

Chengdu Experimental Foreign Language School

July 2023 Summer Vacation

Table of Contents - 目录

Table of Contents - 章节目录

前置知识 & 定义

学习斜率优化DP前你首先需要知道：

- DP
- 平面直角坐标系
- 直线解析式
- 凸包

前置知识 & 定义

其次是一些定义：

- 递增指的是，对于一个序列任 S 有： $s_i, s_j \forall S \cup i < j, s_i \leq s_j$ ；同理定义递减 $s_i, s_j \forall S \cup i < j, s_i \geq s_j$ 。
- 在本文中，凸多边形是指所有内角大小都在 $[0, \pi]$ 范围内的简单多边形。
  - 下凸壳就是对于按照x轴排序的的点，前一个点和后一个点的直线斜率从 $[-\infty, \infty]$ 单调递增
  - 上凸壳就是对于按照x轴排序的的点，前一个点和后一个点的直线斜率从 $[\infty, -\infty]$ 单调递增。
- 一条直线对于 X 轴的截距指的是其常数项的大小(可能为负) 。

Table of Contents - 章节目录

一类问题

对于这样一个DP方程
$dp_i = \min_{j \in set_i}(Y_j + K_i \times X_j + B_i)$
暴力程序的时间复杂度容易分析 $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} |set_i|)$，其中n并不一定是所有的状态数，由于dp本质是DAG，那么我们对于这个包含最终答案的联通块进行拓扑排序，形成一个求解顺序，n就是最少可以求解的状态数量。
是否有快速解法呢？
p.s.当然这个dp方程可以改成max形式，但是这两者可以互相转换是一个东西

直线方程?

$dp_i = \min_{j \in set_i} (Y_j + K_i \times X_j + B_i)$
实际上观察这个DP方程发现可以转换为一个直线解析式!

转化？

考虑可以对这个式子进行移项：

$$dp_i - K_i \times X_j - B_i = Y_j$$

这个式子的每一组取值就是关于这个状态的一种转移方式，所以我们舍去 min 来看，但是这样看着麻烦，重新定义一下 K_i, B_i 写成这样：

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

直线解析式

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

这是一个直线解析式!
我们这样理解它:

- K 这个直线的斜率
- $B_i + dp_i$ 一起作为了这条直线和y轴的截距。

点与直线

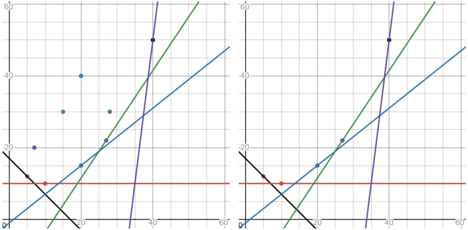
$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

由于这个DP式子存在而且可以转移，那么 X_j 和 Y_j 必须是一个存在的值才行。
考虑在考查每一个 j 的时候，就已知了 X_j 和 Y_j ，把 (X_j, Y_j) 看做一个点，相当于这条直线过了这个点，即可解出 dp_i 一个解。
那么此时要使得 dp_i 尽量小，而 B_i 在求解这个状态中始终不变，那么要使这个直线和y轴的截距就要尽量小。那么这条这时问题就变成，找到一个点，使得这条直线截距最小。

点与直线

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

举个例子，对于下图这些点，随机取几个斜率范围在 $[-\infty, \infty]$ ，并且求解到最小值，能取到的点像这样：



实际上维护的就是一个下凸壳，显然其他的点都是没用的，上图是要维护的点集：

同理如果是 max 则是维护上凸壳。

Table of Contents - 章节目录

特殊情况

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

大多数情况中我们都是在顺序求解 dp_i ，对于解集也是顺序插入每一个 j ，而不是在一个DAG中使用拓扑排序顺序求解。

X 和 Y 均有单调性 / 线性数据结构维护

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

发现斜率优化是维护二维点集，很像一维上的单调队列。
那么是否可以使用一种单调性质队列维护一个二维的信息呢？

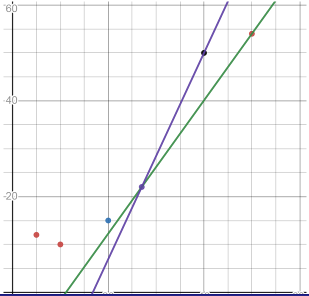
斜率单调队列

$$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$$

这些情况下都可以使用一个斜率点集单调队列维护。以斜率递增并且 X 递增的情况来说。

斜率单调队列

对于每次放入一个点到点集的时候，将其放入对头，但是这样可能破坏下凸壳性质，所以要一直从对头弹出点，直到符合下凸壳性质，显然这些弹出的点以后永远不会成为更优解；
例如下图，加入了橙色点，橙点和紫点的直线斜率小于黑点和紫点的直线斜，显然黑点破坏了下凸壳性质，那么弹出黑点，显然这样可以使以后求解更优。



斜率单调队列

小结：由于 X 单调性的所以可以顺序将求出的点放入队列/栈中就可以维护一个按照 X 递增的点集；由于 K 单调性，那么我们可以弹出一些永远不会成为最优解的点，这样对于每个点最多入队/入栈和出队/出栈一次，故时间复杂度是 $\mathcal{O}(n)$。

X 有单调性 / 线性数据结构维护

由于 X 有单调性我们还是能用线性数据结构存储，因为只会在一头插入不会在中间插入；但由于 K 没有单调性，那么我们就会面临在中间查找一个点的情况，又因为点集中斜率是单调递增的，并且具有连续存储的性质，我们可以二分查找一个点使得斜率最接近这条直线就是最优解。故时间复杂度是 $\mathcal{O}(n\log n)$。

Table of Contents - 章节目录

Trivial多维斜率优化

$$dp_{i,j} = \min_{(k,l)\in set_i} (Y_{k,l} + K_{i,j} \times X_{k,l} + B_{i,j})$$

形如这样的多维斜率优化可以考虑划归为一维的情况处理，化为形如这样的形式：

$$dp_{i+n\times j} = \min_{(k+n\times l)\in set_i} (Y_{k+n\times l} + K_{i+n\times j} \times X_{k+n\times l} + B_{i+n\times j})$$

使用数学归纳法这个东西可以扩展到n维的斜率优化。

Tricks多维斜率优化

但是这样还是未免有些麻烦，但是对于一些特殊情况我们仍然又一些trick使得求解更简单，例如：

$$dp_{i,j-1} = \min_{(k,j-1)\in set_i} (Y_{k,j-1} + K_{i,j} \times X_{k,j-1} + B_{i,j})$$

这时我们可以参考滚动数组的方法处理，每一层也就是每一个 i 求解后记录下来，下层求解使用上次记录的数即可，然后滚动记录覆盖。

Table of Contents - 章节目录

WQS二分套上斜率优化

这里如果一个斜率优化限制转移 a 次，可以考虑使用WQS二分，这里只需要将 $f(x)$ 计算的式子套上斜率优化即可，并且注意这时的转移方程应该是 $dp_i = Y_j - K_iX_j - mid$ 。
算法所以主体是WQS二分，套上了斜率优化。

Table of Contents - 章节目录

叉积判断斜率

由于需要斜率判断，对于两个 P, Q 点的斜率。我们使用斜率公式计算 $\frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q}$ 但是这样计算需要浮点数，非常有可能爆精度。

我们可以换一种方式计算，实际上在正式应用中我们大多数时候是在计算两个斜率的大小关系，假设有 A, B, C, D 四个点，假设有个表达式(当然这个表达式可能为假) $K_{A,B} < K_{C,D}$ 那么则有 $\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B} < \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$

如果 $X_A - X_B, X_C - X_D$ 同号的情况下则有 $(Y_A - Y_B) * (X_C - X_D) < (Y_C - Y_D)(X_A - X_B)$ 这样就可以避免精度问题。

但是一定注意不等式符号变化问题。

上/下凸壳维护点集正确性证明

在前面的过程中，我们直观感受了在函数图像中能去到最优解的点是一个凸壳，但是缺乏严谨的证明。这里以下凸壳取最小做证明。

定义一个点 $P(X_P, Y_p)$ 下凸壳在上方表示：对于这个点集按照 X 递增排序，第一个点是 (X_1, Y_1) 最后一个点是 (X_n, Y_n) 。对于这 P 点有， $X_1 \leq X_P \leq X_n$ ，并且 P 在这个下凸壳中每两个相邻点的直线的上方。

那么进而我们可以发现在 A ，在这条直线上方，所以一条求解时某条直线去到 A 点到 X 轴的截距会更大(在 PQ 上方显然截距更大) 。

并且可以发现用线性数据结构维护点集时，用斜率弹出的点都是在下凸壳上方的点。

上/下凸壳维护点集正确性证明

小结：由于在下凸壳上方的点都会破坏下凸壳性质，剩下的点都是下凸壳点集的点，而下凸壳上方的点不会成为更优解，所以维护下凸壳可以找到最优解。

Table of Contents - 章节目录

习题

请读者按照顺序做，层层递进的题目编排。

- P3195 [HNOI2008]玩具装箱
- P5017 [NOIP2018 普及组] 摆渡车
- P2365 任务安排
- P3628 [APIO2010] 特别行动队
- P2120 [ZJOI2007] 仓库建设
- P5785 [SDOI2012]任务安排
- P4072 [SDOI2016]征途
- P4360 [CEOI2004] 锯木厂选址
- P2305 [NOI2014] 购票
- P5308 [COCI2018-2019#4] Akvizna