# 斜率优化总结

## 前言

本文宗旨解释一下斜率优化本质问题，而不是表面上的讲解一个模板，本文可以作为一个较为权威的资料参考学习，但不建议直接使用本材料第一次学习斜率优化，这样只是知识的灌输，而没有思考。

## 前置知识

1. DP
2. 平面直角坐标系
3. 直线解析式
4. 凸包

递增指的是，对于一个序列 $S$ 有： $s_i,s_j\forall S\cup i<j,s_i\le s_j$ ；同理定义递减 $s_i,s_j\forall S\cup i<j,s_i\ge s_j$ 。

在本文中，凸多边形是指所有内角大小都在 $[0,\pi]$ 范围内的简单多边形。

下凸壳就是对于按照x轴排序的的点，前一个点和后一个点的直线斜率从 $[-\infty,\infty]$ 单调递增。

上凸壳就是对于按照x轴排序的的点，前一个点和后一个点的直线斜率从 $[\infty,-\infty]$ 单调递增。

一条直线对于 $X$ 轴的截距指的是其常数项的大小(可能为负)。

## 正文

### 斜率优化适用范围

斜率优化dp，这个dp自然需要转移方程，将这个dp转移方程化为一个多项式形式，那么只有满足这样的多项式转移方程才能适用斜率优化：

$$dp_i=\min_{j\in set_i}\left(Y_j+K_i\times X_j+B_i\right)$$

或者

$$dp_i=\max_{j\in set_i}\left(Y_j+K_i\times X_j+B_i\right)$$

这里我们先看 $\min$ 的情况。这个式子在求解 $i$ 这个状态的答案，而 $j$ 相当于在能对 $dp_i$ 贡献的状态中进行枚举，对于其中 $Y_j, K_i, B_i$ 三个函数，分别只与其自变量相关，即只与 $j, i, i$ 相关，并且已知 $K_i, B_i$ ，这时找到一个 $j$ 使其和最小即可转移。

这个程序的时间复杂度容易分析 $\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n} |set_i|\right)$ ，其中n并不一定是所有的状态数，由于dp本质是DAG，那么我们对于这个包含最终答案的联通块进行拓扑排序，形成一个求解顺序，n就是最少可以求解的状态数量。

对于这个式子考虑对于每一次求解进行优化，期望可以得到 $\mathcal{O}(1)\ \text{or}\ \mathcal{O}(\log |set_i|)$ 的世间复杂度，那么总体时间复杂度就会减小很多，极其接近于 $\mathcal{O}(n)$ 的时间复杂度。

考虑可以对这个式子进行移项：

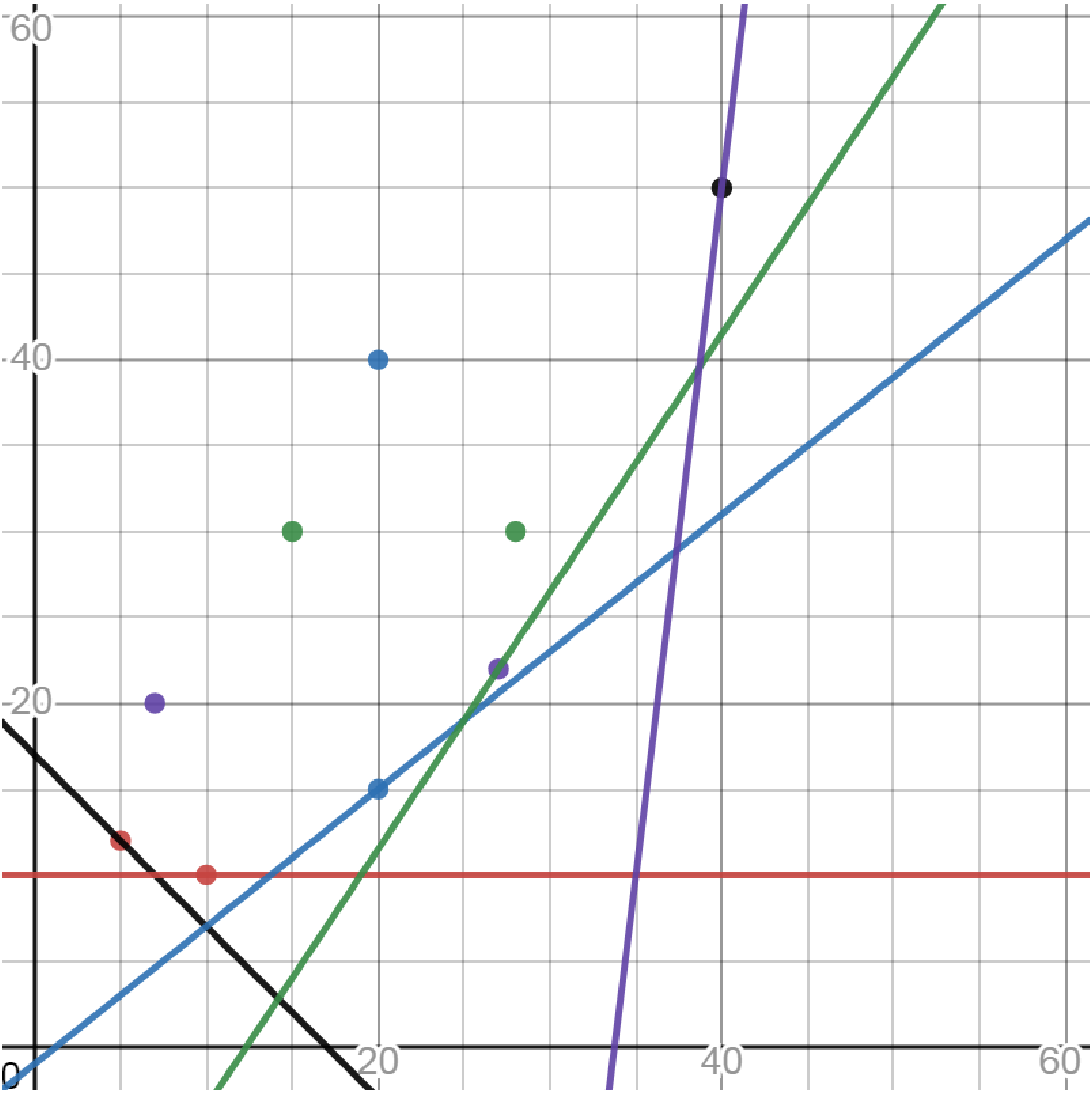
$$dp_i-K_i\times X_j-B_i=Y_j$$

这个式子的每一组取值就是关于这个状态的一种转移方式，所以我们舍去 $\min$ 来看，但是这样看着麻烦，重新定义一下 $K_i, B_i$ 写成这样：

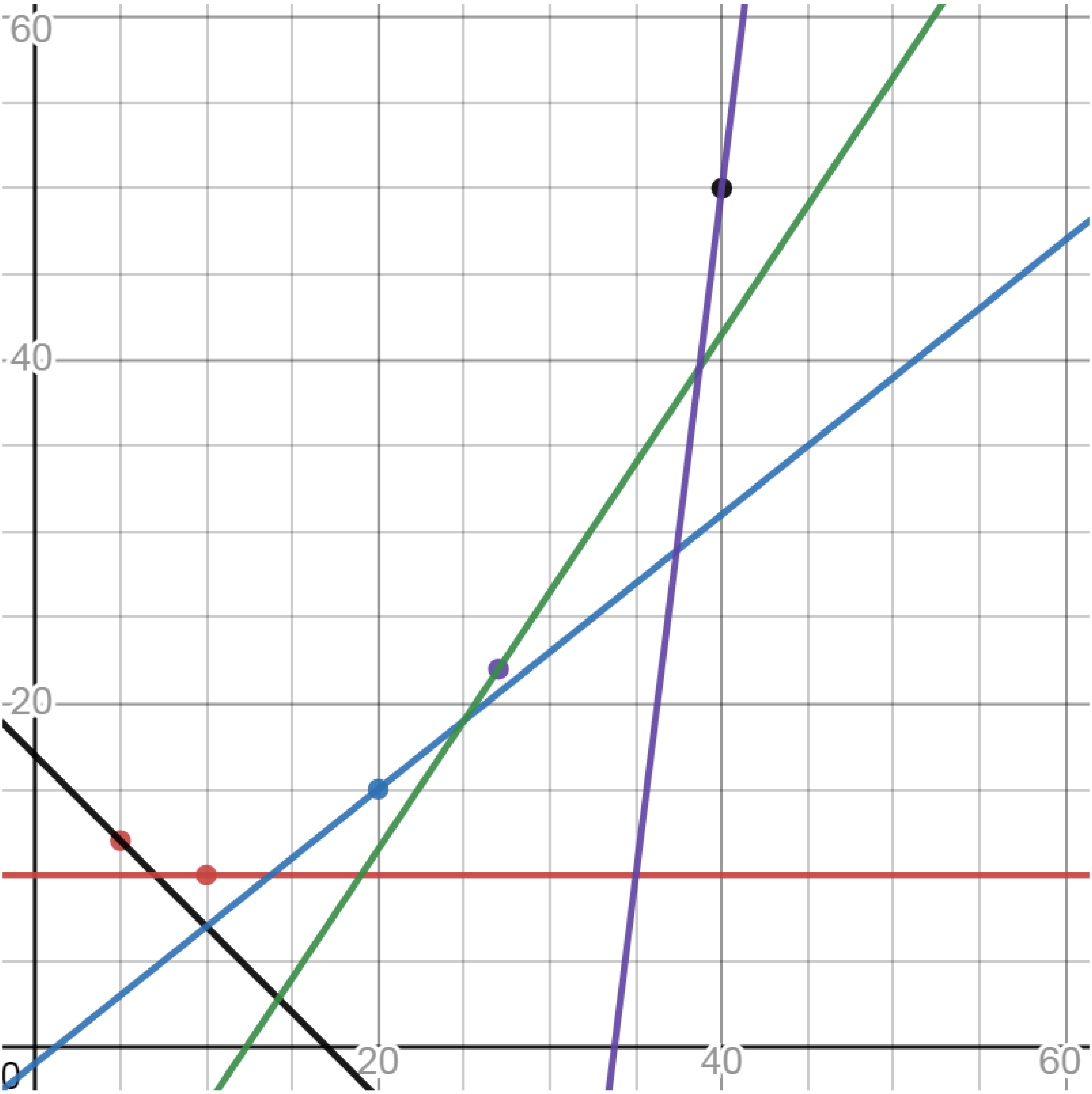
$K_i \times X_j + B_i + dp_i = Y_j$

发现这个式子可以看成一个直线解析式，其中已知了斜率 $k$ ，并且 $B_i + dp_i$ 一起作为了这条直线和y轴的截距，而不是只是 $B_i$ ，而且由于这个dp式子要有意义，也就是要是一个真实存在的一个转移，那么 $X_j$ 和 $Y_j$ 必须是一个存在的值才行，考虑在考查每一个 $j$ 的时候，就已知了 $X_j$ 和 $Y_j$ ，把 $(X_j, Y_j)$ 看做一个点，相当于这条直线过了这个点，即可解出 $dp_i$ ，要使得 $dp_i$ 尽量小，而 $B_i$ 在求解这个状态中始终不变，那么要使这个直线和y轴的截距就要尽量小。那么这条这时问题就变成，找到一个点，使得这条直线截距最小。

举个例子，对于下图这些点，随机取几个斜率范围在 $[-\infty, \infty]$ ，并且求解到最小值，能取到的点像这样：




实际上维护的就是一个下凸壳，显然其他的点都是没用的，下图是要维护的点集：




同理如果是 $\max$ 则是维护上凸壳。

## 特殊斜率优化

大多数情况中我们都是在顺序求解 $dp_i$ ，对于解集也是顺序插入每一个 $j$ ，而不是在一个DAG中使用拓扑排序顺序求解。

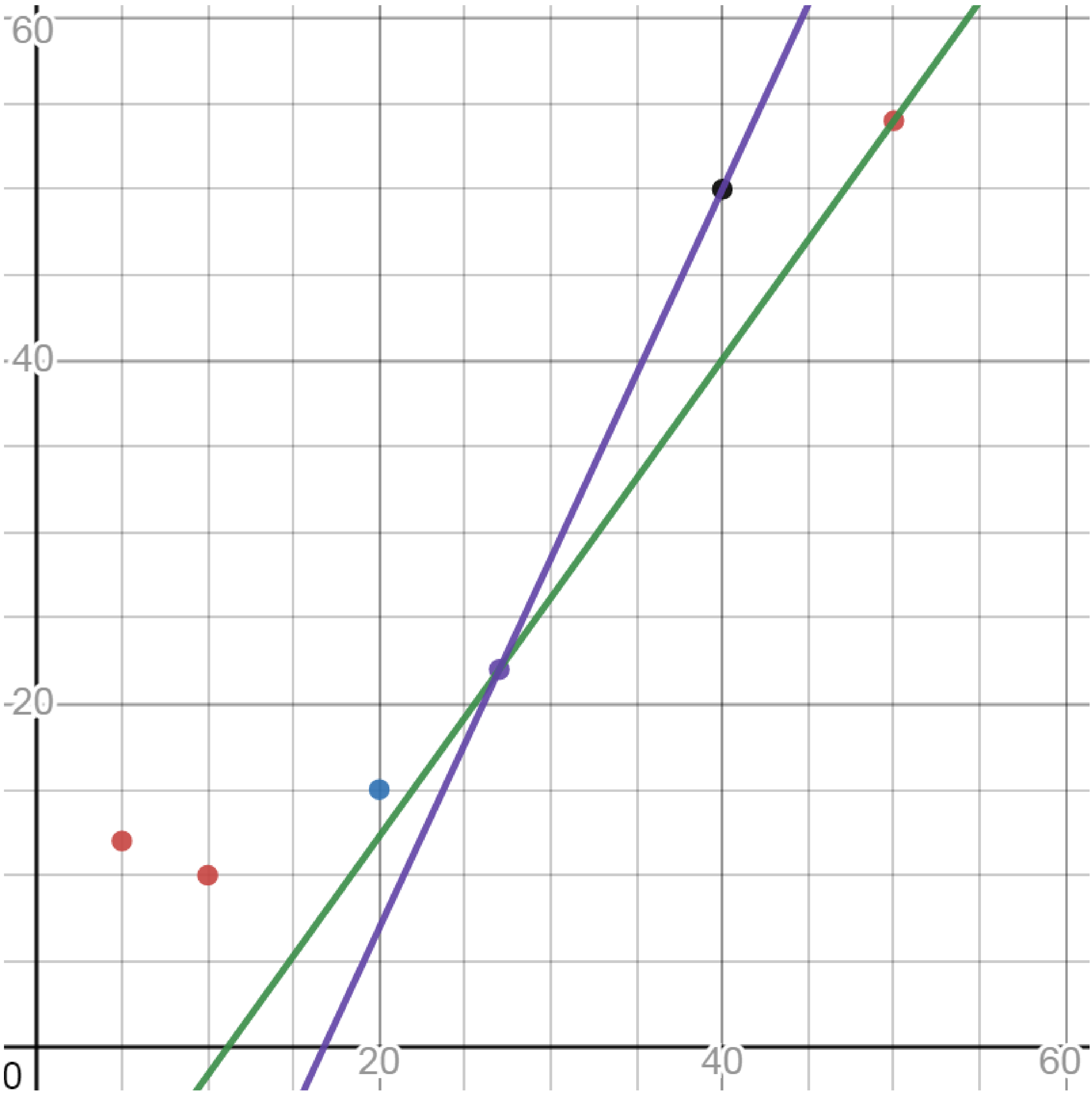
### $X$ 和 $Y$ 均有单调性 / 线性数据结构维护

发现斜率优化是维护二维点集，很像一维上的单调队列。

这些情况下都可以使用一个斜率点集单调队列维护。以斜率递增并且 $X$ 递增的情况来说。

对于每次放入一个点到点集的时候，将其放入队头，但是这样可能破坏下凸壳性质，所以要一直从队头弹出点，直到符合下凸壳性质，显然这些弹出的点以后永远不会成为更优解；

例如下图，加入了橙色点，橙点和紫点的直线斜率小于黑点和紫点的直线斜，显然黑点破坏了下凸壳性质，那么弹出黑点，显然这样可以使以后求解更优。




在求解取点的时候我们从队尾不断弹出点，直到队尾两个点的斜率大于当前直线，由于斜率递增，显然这些点以后永远不能成为更优解，这时队尾的点就是最优解。

小结：由于 $X$ 单调性的所以可以顺序将求出的点放入队列/栈中就可以维护一个按照 $X$ 递增的点集；由于 $K$ 单调性，那么我们可以弹出一些永远不会成为最优解的点，这样对于每个点最多入队/入栈和出队/出栈一次，故时间复杂度是 $\mathcal{O}(n)$。

#### $X$ 有单调性 / 线性数据结构维护

由于 $X$ 有单调性我们还是能用线性数据结构存储，因为只会在一头插入不会在中间插入；但由于 $K$ 没有单调性，那么我们就会面临在中间查找一个点的情况，又因为点集中斜率是单调递增的，并且具有连续存储的性质，我们可以二分查找一个点使得斜率最接近这条直线就是最优解。故时间复杂度是 $\mathcal{O}(n\log n)$。

#### 其余情况

由于 $X$ 没有单调性，那么我们就会面临在中间插入/删除点的情况，又要在中间查找一个点，那么不难想到使用平衡树进行维护点集。

### 多维斜率优化

$$dp_{i,j}=\min_{(k,l)\in set_i}\left(Y_{k,l}+K_{i,j}\times X_{k,l}+B_{i,j}\right)$$

形如这样的多维斜率优化可以考虑划归为一维的情况处理，化为形如这样的形式：

$$dp_{i+n\times j}=\min_{(k+n\times l)\in set_i}\left(Y_{k+n\times l}+K_{i+n\times j}\times X_{k+n\times l}+B_{i+n\times j}\right)$$

这个东西可以扩展到n维的斜率优化。

但是这样还是未免有些麻烦，但是对于一些特殊情况我们仍然又一些trick使得求解更简单，例如：

$$dp_{i,j-1}=\min_{(k,j-1)\in set_i}\left(Y_{k,j-1}+K_{i,j}\times X_{k,j-1}+B_{i,j}\right)$$

这时我们可以参考滚动数组的方法处理，每一层也就是每一个 $i$ 求解后记录下来，下层求解使用上次记录的数即可，然后滚动记录覆盖。

## WQS二分 套上 斜率优化

关于WQS二分详情见"附1：WQS二分简述"。这里如果一个斜率优化限制转移 $a$ 次，可以考虑使用WQS二分，这里只需要将 $\mathrm{f}\left(x\right)$ 计算的式子套上斜率优化即可，并且注意这时的转移方程应该是 $dp_i=Y_j-K_iX_j-mid$ 。算法所以主体是WQS二分，套上了斜率优化。

## 附录

### 叉积判断斜率

由于需要斜率判断，对于两个 $P, Q$ 点的斜率。我们使用斜率公式计算 $\frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q}$ 但是这样计算需要浮点数，非常有可能爆精度。我们可以换一种方式计算，实际上在正式应用中我们大多数时候是在计算两个斜率的大小关系，假设有 $A, B, C, D$ 四个点，假设有个表达式(当然这个表达式可能为假) $K_{A,B} < K_{C,D}$ 那么则有 $\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B} < \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$ 如果 $X_A - X_B, X_C - X_D$ 同号的情况下则有 $(Y_A - Y_B) * (X_C - X_D) < (Y_C - Y_D)(X_A - X_B)$ 这样就可以避免精度问题，但是一定注意不等式符号变化问题。

## 上/下凸壳维护点集正确性证明

在前面的过程中，我们直观感受了在函数图像中能去到最优解的点是一个凸壳，但是缺乏严谨的证明。这里以下凸壳取最小做证明。

定义一个点 $P(X_P, Y_p)$ 下凸壳在上方表示：对于这个点集按照 $X$ 递增排序，第一个点是 $(X_1, Y_1)$ 最后一个点是 $(X_n, Y_n)$ 。对于这 $P$ 点有， $X_1 \leq X_P \leq X_n$ ，并且 $P$ 在这个下凸壳中每两个相邻点的直线的上方。

我们发现在维护下凸壳时我们会弹出一些点，而这些点都是在这个下凸壳上方，证明：设 $A(X_A, Y_A)$ 这个点我们找到在 $X$ 轴上距离最近两个 $P(X_P, Y_P)$ 和 $Q(Q_P, Q_P)$ 并且 $P$ 在 $Q$ 左侧，由于 $A$ 在这个下凸壳上方所以 A 在直线 $l_{PQ}$ 上方，并且在线段 $PQ$ 上方，易证 $k_{PA} > k_{AQ}$ 。

那么进而我们可以发现在 $A$ ，在这条直线上方，所以一条求解时某条直线去到 $A$ 点到 $X$ 轴的截距会更大(在 $PQ$ 上方显然截距更大)。

并且可以发现用线性数据结构维护点集时，用斜率弹出的点都是在下凸壳上方的点。

小结：由于在下凸壳上方的点都会破坏下凸壳性质，剩下的点都是下凸壳点集的点，而下凸壳上方的点不会成为更优解，所以维护下凸壳可以找到最优解。

## 例题

请读者按照顺序做，层层递进的题目编排。

1. P3195 [HNOI2008]玩具装箱
2. P5017 [NOIP2018 普及组] 摆渡车
3. P2365 任务安排
4. P3628 [APIO2010] 特别行动队
5. P2120 [ZJOI2007] 仓库建设

6. P5785 [SDOI2012]任务安排
7. P4072 [SDOI2016]征途
8. P4360 [CEOI2004] 锯木厂选址
9. P2305 [NOI2014] 购票
10. P5308 [COCI2018-2019#4] Akvizna

题解在"附2：题目浅析"中。