【题解】20241122【NOIP】模拟

A，GCD=1 的区间（gcd）

- 20 pts: 对每组询问，暴力枚举所有区间，计算区间 gcd 的值即可。复杂度 $O(qn^2 logn)$
- 50 pts: 对每组查询，用 ST 表求区间 gcd，枚举左端点，二分右端点即可。复杂度 $O(nlog^2n + qnlogn)$
- 80 pts: 考虑到数据随机的性质，根据质数的密度，$gcd = 1$ 的区间长度上界是 $O(logn)$ 级别的。那我们可以对每个左端点 l，维护最小的右端点 r，使得 $GCD(l,r)=1$，然后增量更新答案，复杂度 $O((n + q)log^2n)$
- 100 pts: 记录 $f(k)$为区间 gcd 为 k 的倍数的区间，有多少个。那么根据 $\sum\mu(k)f(k)$ 来计算答案。对每个 k 我们用 set 维护极长的，所有元素都是 k 的倍数的区间。复杂度为 $O((n + q)log^2n)$。

B 心跳信竞俱乐部（doki）

考虑动态规划的做法，我们用 $f(i,j)$ 表示目标分数为 i，当前轮得分为 j 的局面，最优策略需要几个回合(当前回合需要被计算在内)

先考虑一些特殊的状态

- $f(0,j)=0$，此时无需进行游戏，已经完成目标。
- 当 $j\geq i\geq 1$ 时，$f(i,j)=1$，此时，结束当前回合就拿下了，继续投掷显然不优，所以需要一个回合。

接下来考虑 i 的递推。

- $f(0,*), f(1,*),...f(i-1,*)$ 求好了，考虑怎么求 $f(i,j)$

  决策有两种，

- 决策 1，放弃投掷：$f(i,j)=\min(f(i,j),1+f(\max(i-j,0),0))$
- 决策 2，继续投掷：$f(i,j)=\min(f(i,j),\frac{1}{M}(1+f(i,0))+\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M-1}f(i,j+k))$

这个递推的转移在 j 没有拓扑序，因为决策 2 等式右边依赖了 $f(i,0)$ 的值。

我们观察到 $f(i,0)$ 的值和等式左边 $f(i,j)$ 的值是有单调性的。

那么二分等式右边的 $f(i,0)$，如果二分到 x

- 根据递推 $f(i,j)=\min(\frac{1}{M}(x+1)+\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M-1}f(i,j+k)\,,1+f(\max(i-j,0),0))$，依次求解 $f(i,i-1),f(i,i-2),....,f(i,0)$
- 比较 $f(i,0)$ 和 x 的大小关系。

用后缀和优化 DP 转移，复杂度为 $O(N^2\log N)$。

C 部队调动（move）

- 我们可以观察到任意两个人的路径是不相交的，否则严格不优，因此每条边是“一方通行”的
- 考虑一棵树的情况。记 $sum(u)=\sum_{v\in subtree(u)}(a_v-b_v)$，那么最小的搬运距离为 $\sum_u|sum(u)|$。
- 对于基环树的情况，我们考虑在环上任取一条边 u,v，枚举从 u 到 v 经过的人次 x，如果 $x<0$ 则表示有 $-x$ 人从 v 走到了 u
- 断开 u,v 后，我们得到一棵树，以 u 为根，发现 x 取 v 到 u 路径上的点 sum 值的中位数是最优的。

D 双人成行（two）

不妨在 1 号点也放个任务 $p_0=1$，我们求出 $p_0,p_1,....,p_k$两两之间的距离，记录 $d_{i,j}=dis(p_i,p_{i+1})+dis(p_{i+1},p_{i+2})+....+dis(p_{j-1},p_j)$

即从任务 i，到 $i+1$，到 $i+2.....$ 到 j的最短距离之和。

注意到，两人做任务一定是交替的区间，例如

- Alice 完成 1,2,3
- Bob 完成 4,5,6
- Alice 完成 7,8,
- Bob 完成 9

$dp(i,j)$ 表示任务 i 被 Alice 完成了，Bob 上一个完成的任务是 $i-1$，且完成 $i-1$ 到现在已经过去了 j 的时间。

我们枚举 Alice 接下来完成的任务 $i, i+1, i+2, \ldots$。直到第 $i+t$ 个任务交给 Bob。转移分为两种。

- 如果 $d_{i,i+t-1} \geq dis(i-1, i+t) - j$那么 Bob 到达 $i+t$ 后，Alice 还没有没来，那 Bob 只能等着。
- 否则 Alice 可以在 Bob 到达 $i+t$前 $dis(i-1, i+t) - j - d_{i,i+t-1}$的时间离开 $i+t-1$

复杂度为 $O(k(n+m)+k^2 n)$。