泰拳警告

算法一

为了方便，可以假定胜，负各有 1 种方案，平局有 p 种方案，最后将答案乘上 $(p+2)^{-n}$ 即可。
枚举有 i 次胜或负，有 $n-i$ 场平局，此时胜场大于负场的方案数是 $(x+x^{-1})^i$ 展开后次数 >0 的项系数之和，即 $(x^2+1)^i$ 展开后次数 $>i$ 的项系数之和。
将 $(x^2+1)^i$ 用二项式定理直接展开并计算答案，时间复杂度 $O(n^2)$ 。
期望得分 40 分。

泰拳警告

算法一

为了方便，可以假定胜，负各有 1 种方案，平局有 p 种方案，最后将答案乘上 $(p+2)^{-n}$ 即可。

枚举有 i 次胜或负，有 $n-i$ 场平局，此时胜场大于负场的方案数是 $(x+x^{-1})^i$ 展开后次数 >0 的项系数之和，即 $(x^2+1)^i$ 展开后次数 $>i$ 的项系数之和。
将 $(x^2+1)^i$ 用二项式定理直接展开并计算答案，时间复杂度 $O(n^2)$ ，期望得分 40 分。

算法二

考虑优化计算 $(x^2+1)^i$ 展开后次数 $>i$ 的项系数之和，记其为 $t(i)$。

用二项式定理可以得到 $t(i)=\sum_{j=0}^{i}[2j>i]\binom{i}{j}x^{2j}$ 。当 i 为奇数时，每个 $2j>i$ 的一定对应了一个 $2(i-j)<i$ ，所以 $t(i)$ 一定是所有系数之和的一半，即 $t(i)=2^{i-1}$ 。当 i 为偶数时，只需要减掉 $j=\frac{i}{2}$ 这一项系数，剩下的同样一一对应，$t(i)=\frac{2^i-\binom{i}{i/2}}{2}$ 。
时间复杂度 $O(n)$ ，期望得分 100 分。

万猪拱塔

算法一

枚举每个子矩形，并检查其中数字是否连续，时间复杂度 $O((nm)^3)$ 或 $O((nm)^2)$，期望得分 10 分或 30 分。

万猪拱塔

算法二

当 $n=1$ 时是一个一维问题，可以用经典的单调栈 $+$ 线段树进行处理。
具体地，枚举 r ，若区间 $[l,r]$ 合法，需要满足 $Max[l,r]-Min[l,r]=r-l+1$ ，用线段树维护每个 l 的 $F(l)=Max[l,r]-Min[l,r]+l$ ，其中 $Max[l,r]-Min[l,r]$ 表示区间 $[l,r]$ 内数字的极差。
而显然有 $F(l)\geq r+1$ ，所以只需要查询 $F(l)$ 的最小值，最小值的数目和取得最小值的所有 l 之和，即可计算出这个 r 的贡献。
当 r 增大 1 时，它影响的 $Max[l,r],Min[l,r]$ 可以通过单调栈找出，在线段树上修改即可。
时间复杂度 $O(m\log m)$ ，结合算法一期望得分 40 分或 60 分。

算法三

算法二的思路并不方便直接迁移到二维的情况上来，需要考虑另一种转化。
考虑判定权值在区间 $[l, r]$ 内的所有数所在的格子是否形成了一个矩形，记这些格子的颜色为黑色，其它的格子颜色为白色。
考虑所有的 $(n+1)\times(m+1)$ 个 2×2 的小正方形 (部分超出边界也算)，则所有黑色格子形成一个矩形，当且仅当恰好有 4 个小正方形内部有 1 个黑色格子，并且没有任何一个小正方形内部有 3 个黑色格子。
从小到大枚举 r ，对每个 $l \le r$ ，记 $f(l)$ 表示染黑权值在 $[l, r]$ 内的格子后，有多少小正方形内部有 1 个或 3 个黑色格子。
可以发现有 $f(l) \ge 4, f(r) = 4$ ，于是只需要对每个 l 维护 $f(l)$ 最小值，最小值的数目和取得最小值的所有 l 之和。
每次 r 增加 1 时，会影响到周边的 4 个 2×2 的小正方形，在线段树上修改即可。
时间复杂度 $O(nm\log nm)$ ，期望得分 100 分。
如果有其他优秀做法欢迎与出题人交流。

小W与屠龙游戏

首先我们考虑这样一个简单的模型：

> 有 n 堆石子，第 i 堆的大小为 a_i，每次一个人可以选择一堆或两堆石子取石子。问先手还是后首胜。

我们将 $a_1, a_2, ..., a_n$ 写成二进制，然后把这些 `01' 串看成向量，让它们在三进制下进行不进位加法。例如假设 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 3$，那么它们转化成二进制之后为 $01, 10, 11, 11$。将它们做三进制不进位加法得到

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod 3$$

可以发现上面那个简单的游戏模型中，先手必胜当且仅当这样加出来的向量不为 0（想想为什么？）。

现在考虑一个扩展一点的模型：

> 有 $2n$ 堆石子，分成 n 对，每一对石子堆中石子的个数是相同的。现在后手选择一个非空的集合，然后双方在后手选出的集合中玩上面所述的游戏。

注意到每个向量都有两份，那么可以看作在三进制下可以选择 1 个或者 2 个。也就是说如果存在不全 0 的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得（我们把所有 n 对石子堆的大小的二进制称作向量 $a_1, a_2, \ldots, a_n$）

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots x_na_n = 0,$$

那么后手就可以获胜。可以发现这等价于 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 在模 3 意义下线性相关。因此对于先手而言，就是要找到一组总攻击力最大的线性无关组。

这可以用线性基维护。每次加入一个新的向量的时候，可以遍历向量中所有非 0 的位置。如果这个位置在线性基中是空的，那么就直接加入就好了，否则把当前向量和线性基中这个位置对应的向量中攻击力较小的那个拿出来继续尝试消元即可。

注意需要用位运算来优化三进制操作。

复杂度：$O\left(\frac{n\log^2 x}{\omega}\right)$

抑郁刀法

算法一

直接状压 dp ，每次选择一个未染色的子集进行染色，时间复杂度 $O(nm3^n)$ ，期望得分 20 分。

抑郁刀法

算法二

考虑对图进行收缩，对于度数为 1 的点，可以直接将其删掉，并将最后答案乘上 $(k-1)$ 。
对于度数为 2 的点，记它连向的两个点分别为 a, b 。
将这个点删掉，若最后 a, b 之间同色，则有 $k-1$ 种情况它与 a, b 都异色，有 1 种情况它与 a, b 都同色。若 a, b 之间异色，则有 $k-2$ 种情况它与 a, b 都异色，有 1 种情况与 a 同色，1 种情况与 b 同色。我们为每两个点之间记录 $f(a, b), g(a, b)$ 分别表示它们同色时答案乘上的系数，异色时答案乘上的系数。在删掉度数为 2 的点时更新对应的 $f(a, b)$ 即可。
最终得到的图中，每个点度数至少为 3 ，结合 $m \leq n+5$ 可算出 $n \leq 10, m \leq 15$ ，对这个图做类似于算法一的状压 dp ，并考虑上 f, g 的系数即可，期望得分 100 分。

总结

本套题综合考察了多种 NOIP 常见的知识点，相信能给拼搏于逐梦之路上的你，提供一个有力的援助。