

A - 纵使日薄西山

考虑对于两个不同的二元组 (i, j) 和 (k, l) ，如果 $a_i \oplus a_j = a_k \oplus a_l$ ，由于 a 中的数互不相等，所以不会存在 $(i, j), (i, k)$ 的情况，于是 (i, j, k, l) 一定是合法的。每个合法的 (i, j, k, l) 都会被这样算到三遍。我们令 t_x 是 $a_i \oplus a_j = x$ 的二元组个数，答案就是 $\frac{\sum \binom{t_x}{2}}{3}$ 。接下来有两种方法。

方法一：利用 FWT 求出 t_x ，直接得到答案。

方法二：利用答案对 m 取 min 的条件。考虑 n 较大的时候， $\sum \binom{t_x}{2} \geq \sum (t_x - 1) = \binom{n}{2} - 2^{18}$ ，于是当 $\binom{n}{2} \geq 3m + 2^{18}$ 时直接输出 m 即可，否则暴力计算 t_x 并统计答案。

复杂度 $O(m + V)$ 或 $O(V \log V)$ 。

B - 即便看不到未来

为了方便，我们假设在 (x, y, z) 能射击到的点 (x', y', z') 满足 $x' \in [x, x + 2k], y' \in [y, y + 2k], z' \in [z, z + 2k]$ ，显然这样不影响答案。我们令 $K = 2k$ ，只需要计算 K 的最小值并除以 2 上取整。

找出所有点中 x, y, z 的最小值 x_a, y_b, z_c 以及它们对应的点 a, b, c 。我们可以贪心地走到 (x_a, y_b, z_c) ，这是不影响答案的。

此时必须要击杀 a, b, c 中的一个，对于点 a 我们计算 $v_a = \max(y_a - y_b, z_a - z_c)$ 表示击杀它所需的 K 最小值，同理得到 v_b, v_c 。那我们就能得到 $K \geq \min(v_a, v_b, v_c)$ 。不妨令 v_a 最小，那此时就能忽略掉 a 这个点的影响，找出新的三个 a', b', c' 做下去。

复杂度 $O(n \log n)$ ，因为需要排序。

C - 此时此刻的光辉

做法 1：考虑折半，把点分成大小为 B 和 $n - B$ 的两部分。在两部分的内部处理出有哪些染色方案是满足条件的，再将其拼合起来：对于大小为 $n - B$ 的部分，枚举每个合法染色方案，我们将其对另一边的限制用一个长度为 $3B$ 的二进制数表示，第 $3i + j - 2$ 位代表第 i 个点能不能染成颜色 j 。对于大小为 B 的部分的合法染色方案，我们也用一个二进制数表示，第 $3i + j - 2$ 位代表第 i 个点是否染成颜色 j 。

做一次 FMT 即可。复杂度 $O(B2^{3B} + 3^{n-B} + 3^B)$ ，在 $B = 6$ 或 7 时最优。

做法 2：考虑枚举颜色 2 的点的集合，它们给剩下的点带来了一些限制，此时有一些点 0, 1 都能取，有一些点只能取其中一种。此时我们首先需要判断新确定了颜色的点之间的限制是否满足；然后再考虑这些点对还未确定颜色的点的限制。这样循环做下去，直到不存在新增的确定颜色的

点。设还未确定颜色的点的集合是 S ，我们求出 f_S 表示，只考虑 S 内的点，只能染成 0, 1 的方案数即可。

怎么求出 f_S 呢？思路是类似的：取出 S 中任意一个点 x ，枚举它的颜色，然后根据限制连续地确定剩下的一些点的颜色，设最后还剩集合 S' 颜色未确定，用 $f_{S'}$ 更新 f_S 即可。

复杂度 $O(2^n \text{poly}(n))$ 。

D - 盼君勿忘

先思考如何计算 $f(s, t)$ 。我们先做一个变换，即令 s' 为一个序列满足 $s'_i = s_i \oplus [i \text{ 的深度是奇数}]$ ，观察每次操作后 s' 的变化，发现是直接 swap 了 s'_u 和 s'_v 。我们对 s, t 同时做变换之后再来看怎么计算操作次数。不妨以 1 为根，令 $z_i = \left| \sum_{v \in \text{subtree}(i)} s_v - t_v \right|$ ，则存

在方案当且仅当 $z_1 = 0$ ，且最小操作次数为 $\sum z_i$ 。这是怎么得到的呢？转化一下角度，我们把 $s_i = 1$ 的点看成是点 i 上有白棋， $t_i = 1$ 看成是点 i 上有黑棋，白棋黑棋遇上了可以抵消。虽然题意相当于只能移动白棋，但我们不妨看成：白棋，黑棋都只能向上走，这样不影响答案。于是从下往上地贪心，在当前点能抵消就尽量抵消，再把剩下的点往上移。就可以得到上面的式子了。

于是我们成功的把 $f(s, t)$ 拆成了 z 之和的形式。

现在要计算所有可能的 (a, b) 的 $f(a, b)$ 之和。首先还是对初始的 a, b 先做变换，即对于深度为奇数的点，把 a_i, b_i 异或上 1，如果是问号就不管。

现在令 a 中问号个数是 A ， b 中问号个数是 B ，已知部分的权值和是 C ；

对于一个点 u ，令其子树内 a 问号个数为 x ， b 问号个数为 y ，已知部分权值和是 z ，那可以得到 z_u 对答案的贡献为：

$$\sum_{i \leq x} \sum_{j \leq y} \sum_{k \leq A-x} \sum_{l \leq B-y} [C + i + k - j - l = 0] \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{A-x}{k} \binom{B-y}{l} |z + i - j|。$$

虽然看着很吓人，但我们可以发现两件事情：我们只关注 $i - j$ ；我们只关注 $k - l$ 。

枚举 $p = i - j, q = k - l$ 。

$$\text{注意到 } \sum_i \binom{x}{i} \binom{y}{i-p} = \binom{x+y}{x-p}, \quad \sum_k \binom{A-x}{k} \binom{B-y}{k-q} = \binom{A+B-x-y}{A-x-q}。$$

$$\begin{aligned} \text{于是上面的式子可以改写成: } & \sum_p \sum_q [C + p + q = 0] \binom{x+y}{x-p} \binom{A+B-x-y}{A-x-q} |z + p| = \\ & \sum_p \binom{x+y}{x-p} \binom{A+B-x-y}{A-x+C+p} |z + p|。 \end{aligned}$$

直接枚举即可单次 $O(n)$ 计算，复杂度 $O(n^2)$ ，考虑如何优化。

我们再改写一下式子, 令 $p := x - p$, 即 $\sum_p \binom{x+y}{p} \binom{A+B-x-y}{A+C-p} |z + x - p|$ 。令 $f(x, y) = \sum_i \binom{x}{i} \binom{X-x}{Y-i} |y - i|$, 其中 $X = A + B, Y = A + C$ 。

接下来我们尝试 $O(1)$ 地从 $f(x, y)$ 推到 $f(x, y + 1)$ 和 $f(x + 1, y)$ 。

如果能做到这一点, 那考虑对树重链剖分后, 我们依次对每条重链计算 f 。对于一条重链, 可以发现从链顶算到链尾的过程中 x, y 的变化量是和链顶的子树大小一个级别的, 这是 $O(n \log n)$ 的。(事实上直接莫队也不好卡) 现在就只需要思考如何做到上述的事情了。

继续简化 $f(x, y)$, 把绝对值拆了, 即 $\sum_i \binom{x}{i} \binom{X-x}{Y-i} (i - y) + 2 \sum_{i \leq y} \binom{x}{i} \binom{X-x}{Y-i} (y - i)$ 。前面一个式子可以直接 $O(1)$ 计算, 我们来看后面的式子。先考虑 $\sum_{i \leq y} \binom{x}{i} \binom{X-x}{Y-i} i$ 这个式子, 它等于 $x \sum_{i \leq y-1} \binom{x-1}{i} \binom{X-x}{Y-1-i}$ 。

现在就只需要研究 $g(x, y) = \sum_{i \leq y} \binom{x}{i} \binom{X-x}{Y-i}$ 是如何 $O(1)$ 推到 $g(x, y + 1)$ 和 $g(x + 1, y)$ 的。

从 $g(x, y)$ 推到 $g(x, y + 1)$ 非常容易: 加上 $\binom{x}{y+1} \binom{X-x}{Y-(y+1)}$ 即可。再看从 $g(x, y)$ 推到 $g(x + 1, y)$, 这可以从组合意义来推: $g(x, y)$ 相当于从 X 个球中选 Y 个染色, 要求前 x 个球中至多 y 个被染了。

于是 $g(x, y) - g(x + 1, y)$ 等同于前 x 个球恰好被染了 y 个, 且第 $x + 1$ 个球被染的方案数。这就是 $\binom{x}{y} \binom{X-1-x}{Y-1-y}$! 需要注意在一些边界情况下这个组合意义是不合法的, 需要特殊计算。

总复杂度 $O(n \log n)$ 。