**P3951解题报告**

**【题目描述】**

[P3951\_problem](P3951_problem.pdf)

**【题目分析】**

·审题可知本题要求求出一个最大的，当前持有两种面值金币无法支付的价格。

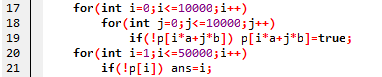
·最大无法支付价格实质上是中使得无非负整数解的的取值的最大值，思路方向应偏向扩展欧几里得算法。

·可以考虑上暴力，可以得到30分的好成绩（确信）。

·根据输入数据的特殊性质：互质，可以尝试用特殊算法解决。

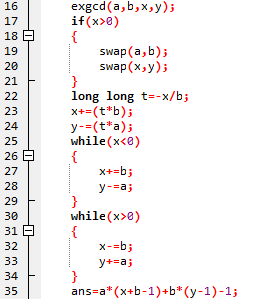
**【解题过程】**

·先考虑暴力代码，将的系数分别在区间内枚举，并将可以用这两种面值金币凑出的价格标记，最后再从标记数组尾部向头部扫描，找到最大的未标记数并输出。暴力代码如下：



·回到题目中发现，本题要求我们构造一个最大不合法数，那么由其定义可以知道这个最大不合法数加上必然为一个合法数。所以此时任务被转化为“构造一个最大的，前一个位不合法数的合法数”。由于是一个合法数，所以其必然满足。若k-1也为合法数，则k-1必然满足以下两个式子之一：

·同理，要使为非法数，那么只需要使或即可，其中，为中为最小非负整数的解，为中为最小非负整数的解。那么最大的并且前一个数为不合法数的合法数就是，最大的非法数即为。因为对，，，的定义，故无法找到比更大的前一个数为非法数的合法数。综上，最大非法数即为。因此，通过对exgcd的写法稍作改动，求出的值即可得出正解。代码如下：



·通过继续分析，我们发现本题算法的时间复杂度可以进一步优化到。由我们之前写出的暴力枚举代码，将分别取互质随机数打表如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | ans |
| 3 | 7 | 11 |
| 5 | 7 | 23 |
| 17 | 5 | 63 |
| 19 | 5 | 71 |
| 19 | 13 | 215 |
| 23 | 29 | 615 |

·经过不完全归纳我们可以初步得出一个猜想：最大非法数满足。

·得出猜想，我们现在需要求证这个结论。由于本题的操作都是有关数字组合求和的，所以我们先在Excel中打表找出规律。

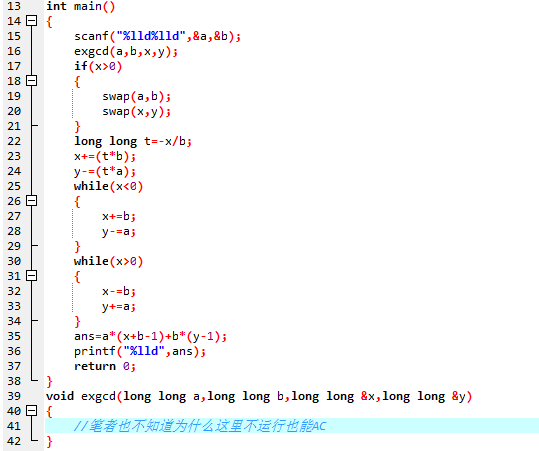
·我们将所有数根据与取模的结果分为类，相应地，我们在数轴上从原点向正方向截出长度为的无数段，并将所有的段归纳为一个区间。根据最初得到的方程，我们可以推导得到的值与对取模的值无关，而由决定。换而言之，我们在之前的程序中枚举来凑钱数的操作本质上就是在这个区间中对方格进行覆盖。例如在下图中，第一列第三行中，将模结果为的方格全部覆盖，意味着任何在之后对取模得的数都是合法数，以此类推。不难发现要完成整个区间的覆盖需要次操作，即最后一次覆盖时的系数为，而此时若从凑出的钱数中取出得到，则这个对取模得的数是非法数，因为满足对取模得的合法数是在后才会被覆盖到，即必须大于或等于，而此时的在数轴上的位置为。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3的系数  模7结果 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |  |  |  |  | 5×3 |  |
| 2 |  |  | 3×3 |  |  |  |
| 3 | 1×3 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  | 6×3 |
| 5 |  |  |  | 4×3 |  |  |
| 6 |  | 2×3 |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |

·由上述推导过程就可以得到最大非法数，将其化简后得到本题的通项公式：。代码如下：



·在漫长的抄题解写题解过程中，笔者偶然发现，由于某些玄学因素，在exgcd写法中，即便不运行扩展欧几里得算法的子函数，只要在主函数中最后的结果中加上即为正解，原因不明，代码如下：



**【完整代码】**

<P3951_violence.cpp>

<P3951_final_exgcd.cpp>

<P3951_final_O(1).cpp>

<P3951_final_magic.cpp>