

Operations Research Applications Assignment 2

- Operations Research Applications Assignment 2

- Question 1

- 1-(a)
- 1-(b)
- 1-(c)
- 1-(d)
- 1-(e)
- 1-(f)
- 1-(g)

Question 1

1-(a)

- decision variables : $Ww, Wc, Wsb, Xw, Xc, Yw, Yc, Ysb1$ and $Ysb2$
 - Ww, Wc 和 Wsb 分別代表 wheat, corn 和 sugar beet 三樣作物在土地中被種植的數量。
 - Xw 和 Xc 分別代表 wheat 和 corn 兩項作物明年購買的數量。
 - Yw 和 Yc 分別代表 wheat 和 corn 兩項作物明年賣出的數量。
 - $Ysb1$ 和 $Ysb2$ 分別代表 sugar beet 在 36/t 和 10/t 所賣出的數量。

- linear programming (LP) formulation with respect to average yield scenario

- 目標函數：

本題目標函數應為最大化作物總收益；換言之，亦可將其內容表達為最小化作物總損失，其表達式如下所示：

$$\min(\underbrace{150 \times Ww + 230 \times Wc + 260 \times Wsb}_{\text{種植三種作物分別要付出的成本}} + \underbrace{238 \times Xw + 210 \times Xc}_{\text{購買wheat和corn所需付出的成本}} - \underbrace{170 \times Yw - 150 \times Yc - 36 \times Ysb1 - 10 \times Ysb2}_{\text{種植三種作物分別獲得的收益}})$$

- 限制式：

本題限制式如下所示：

1. 種植作物種量不得大於土地總面積。

$$Ww + Wc + Wsb \leq 500$$

2. wheat 種植量 + wheat 購買量 - wheat 賣出量 = 製作飼料所需的 wheat 量

$$2.5 \times Ww + Xw - Yw \geq 200$$

3. corn 種植量 + corn 購買量 - corn 賣出量 = 製作飼料所需的 corn 量

$$3 \times Wc + Xc - Yc \geq 240$$

4. sugar beet 種植量 - sugar beet 在 36/t 和 10/t 的賣出量 = 0

$$20 \times Wsb - Ysb1 - Ysb2 \geq 0$$

5. sugar beet 只有在產量低於 6000t 的部分才能以 \$36/t 的價格賣出

$$Ysb1 \leq 6000$$

6. 所有決策變數皆大於等於 0

$$Ww, Wc, Wsb, Xw, Xc, Yw, Yc, Ysb1, Ysb2 \geq 0$$

1-(b)

求解結果：

- $Ww = 120$
- $Wc = 80$
- $Wsb = 300$
- $Xw = 0$
- $Xc = 0$
- $Yw = 100$
- $Yc = 0$
- $Ysb1 = 6000$
- $Ysb2 = 0$
- $Objective = -118600$
- $Profit = 118600$

1-(c)

- decision variable : $Ww, Wc, Wsb, Xw[n], Xc[n], Yw[n], Yc[n], Ysb1[n], Ysb2[n]$
 - 本例中，我們考慮3種不同場景，各場景情境如下所述：
 - 場景1：單位畝產量增產20%
 - 場景2：單位畝產量等於平均值
 - 場景3：單位畝產量減產20%
 - 上述 $n = 1, 2, 3$ ，且分別代表場景 1~3 時的決策變數變化。
 - Ww, Wc 和 Wsb 分別代表 wheat, corn 和 sugar beet 三樣作物在土地中被種植的數量。
 - $Xw[n]$ 和 $Xc[n]$ 分別代表 wheat 和 corn 兩項作物明年於三種場景中購買的數量。
 - $Yw[n]$ 和 $Yc[n]$ 分別代表 wheat 和 corn 兩項作物明年於三種場景中賣出的數量。
 - $Ysb1[n]$ 和 $Ysb2[n]$ 分別代表 sugar beet 於三種場景中在 36/t 和 10/t 所賣出的數量。

- deterministic equivalent problem (DEP) formulation of two-stage recourse problem (RP)

- 目標函數：

本題目標函數應為最大化作物總收益；換言之，亦可將其內容表達為最小化作物總損失，其表達式如下所示：

$$\min \underbrace{(150 \times Ww + 230 \times Wc + 260 \times Wsb)}_{\text{種植三種作物分別要付出的成本}} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \underbrace{(238 \times Xw[n] + 210 \times Xc[n] - 170 \times Yw[n])}_{\text{各場景中購買wheat和corn所需付出的成本}}$$

$$- \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \underbrace{(150 \times Yc[n] - 36 \times Ysb1[n] - 10 \times Ysb2[n])}_{\text{各場景中種植三種作物分別獲得的收益}}$$

- 限制式：

本題限制式如下所示：

1. 種植作物種量不得大於土地總面積。

$$Ww + Wc + Wsb \leq 500$$

2. wheat 種植量 + wheat 購買量 - wheat 賣出量 = 製作飼料所需的 wheat 量

$$\text{場景一：} 3 \times Ww + Xw[1] - Yw[1] \geq 200$$

$$\text{場景二：} 2.5 \times Ww + Xw[2] - Yw[2] \geq 200$$

$$\text{場景三：} 2 \times Ww + Xw[3] - Yw[3] \geq 200$$

3. corn 種植量 + corn 購買量 - corn 賣出量 = 製作飼料所需的 corn 量

$$\text{場景一：} 3.6 \times Wc + Xc[1] - Yc[1] \geq 240$$

$$\text{場景二：} 3 \times Wc + Xc[2] - Yc[2] \geq 240$$

$$\text{場景三：} 2.4 \times Wc + Xc[3] - Yc[3] \geq 240$$

4. sugar beet 種植量 - sugar beet 在 36/t 和 10/t 的賣出量 = 0

$$\text{場景一：} 24 \times Wsb - Ysb1[1] - Ysb2[1] \geq 0$$

$$\text{場景二：} 20 \times Wsb - Ysb1[2] - Ysb2[2] \geq 0$$

$$\text{場景三} : 16 \times Wsb - Ysb1[3] - Ysb2[3] \geq 0$$

5. sugar beet 只有在產量低於 6000t 的部分才能以 \$36/t 的價格賣出

$$Ysb1[n] \leq 6000$$

$$n = 1, 2, 3$$

6. 所有決策變數皆大於等於 0

$$Ww, Wc, Wsb, Xw[n], Xc[n], Yw[n], Yc[n], Ysb1[n], Ysb2[n] \geq 0$$

$$n = 1, 2, 3$$

1-(d)

求解結果

- $Ww = 170$
- $Wc = 80$
- $Wsb = 250$
- $Xw[1] = 0$
- $Xc[1] = 0$
- $Xw[2] = 0$
- $Xc[2] = 0$
- $Xw[3] = 0$
- $Xc[3] = 48$
- $Yw[1] = 310$
- $Yc[1] = 48$
- $Ysb1[1] = 6000$
- $Ysb2[1] = 0$
- $Yw[2] = 225$
- $Yc[2] = 0$
- $Ysb1[2] = 5000$
- $Ysb2[2] = 0$
- $Yw[3] = 140$
- $Yc[3] = 0$
- $Ysb1[3] = 4000$
- $Ysb2[3] = 0$
- $Objective = -108390$
- $Profit = 108390$

1-(e)

- EVPI
 場景一最佳解 = 167667
 場景二最佳解 = 118600
 場景三最佳解 = 59950
 $EVPI = \frac{1}{3}(\text{場景一最佳解} + \text{場景二最佳解} + \text{情況三最佳解}) = 115406$
- VSS
 VSS = 108390

1-(f)

- I agree RP to provide a good solution in this study
 - 雖然 VSS 比 $EVPI$ 少了 $115406 - 108390 = 7016$ 的獲利量，但事實上因為完全資訊難以取得，故 $EVPI$ 經常僅是理想情況，實則難以達到。
 - 在無法獲取 $EVPI$ 的狀況下，綜觀三種場景下單位生產期望值，可得到三種作物生產期望值如下所述：
 - 小麥： 2.5 t/acre
 - 玉米： 3 t/acre
 - 甜菜： 20 t/acre
 - 而得到的求解結果中，三種作物個別生產量分別如下所示：
 - $W_w = 120$
 - $W_c = 80$
 - $W_{sb} = 300$
 - 接著，為確認該上述結果於三種下的生產量，需將生產計畫帶入三種場景進行計算，結果如下：
 - 場景一的解 = 148000
 - 場景二的解 = 118600
 - 場景三的解 = 55120
 - 計算加權平均值為：
 - $\frac{1}{3}(148000 + 118600 + 55120) = 107240 < VSS = 108390$
 - 由此可知，隨機規劃的解相較於計算期望值，在目標函數上多出 $108390 - 107240 = 1150$ 的效益；故利用隨機規劃考慮不確定之信息，可在本案例中得到更加優越的解。

1-(g)