# Неделя 3. Волны де Бройля. Соотношение неопр-ти.

**0-3-1**

$\lambda_{дБ} = \Lambda_e$

$T_e - ?$

Решение

1) $\lambda_{дБ} = \frac{h}{p}$ — длина волны де Бройля

$\Lambda_e = \frac{h}{mc}$ — Компт. длина волны

$$\frac{h}{p} = \frac{h}{mc} \Rightarrow p = mc.$$

2) Кин. энергия $\stackrel{def}{=}$ разность м/у полной энергией и эн. покоя

$$T_e = \mathcal{E}_e - mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 =$$

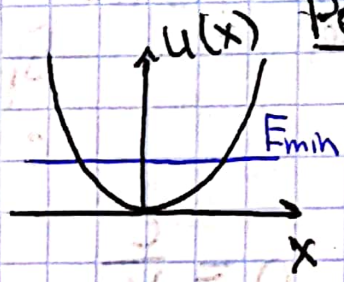
$$= \sqrt{(mcc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 = (\sqrt{2} - 1)\, mc^2 =$$

$$= (\sqrt{2} - 1) \cdot 0{,}511\ МэВ = 0{,}2\ МэВ$$

**0-3-2**

$\omega$

$E_{min} - ?$




Решение.

1) Для гармонич. осцилл-ра:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{kx^2}{2}}_{U(x)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) Из соотн-я неопр-ти (в форме Вейля):

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2.$$

Считая $\Delta p \sim p$, $\Delta x \sim x$ $\left(p = \overset{\approx 0}{\bar{p}} + \Delta p,\ x = \overset{\approx 0}{\bar{x}} + \Delta x\right)$

получаем $p \approx \hbar/2x$

оценка

Неопр-ть в коорд. и импульсе порядка коорд/имп.

3) $E = \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{kx^2}{2}$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\hbar^2}{8mx^3} + kx = 0 \Rightarrow x_0^2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}}$$

Значит,

$$E_{min} = E(x_0) = \frac{\hbar^2\sqrt{4mk}}{8m\hbar} + \frac{k\hbar}{2\sqrt{4mk}} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}\,\hbar = \frac{\hbar\omega}{2} \;//$$

---

$\boxed{2.10}$ Дано:

$T_1 = 100$ эВ

$\alpha = 30°$

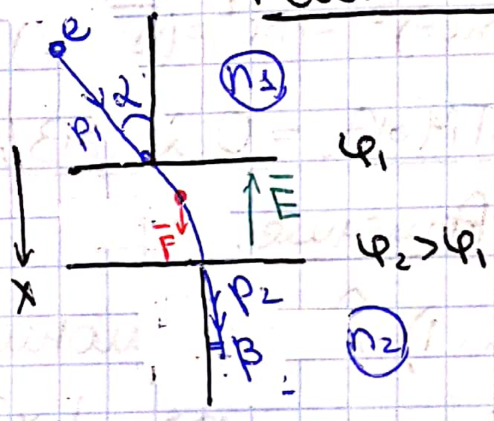
$\Delta\varphi_1 = 36$ В

$\varphi_2 > \varphi_1$

$n$ — ?

$\Delta\varphi_2$ — ?

Решение




$\updownarrow \Delta\varphi$

Эл-ну сопоставим волну де Бройля с $\lambda = h/p$

① Относ. показатель преломления

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{V/V_{ф2}}{V/V_{ф1}} = \frac{V_{ф1}}{V_{ф2}} = \frac{\omega/k_1}{\omega/k_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$p = \hbar k$

ск-ть распр. волны де Бройля эл-на в вак.

фаз. ск-ти волн де Бройля в 2 и 1 средах

② ЗСЭ: т.к. $\varphi_2 > \varphi_1$, то эл. поле напр. $\uparrow\downarrow x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ эл-н в системе разгоняется.

$dU = q\,d\varphi$, $q = -|e| \Rightarrow U_2 - U_1 = -|e|\cdot(\varphi_2 - \varphi_1) = -|e|\Delta\varphi$

Тогда $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$ 1-до системы, 2-после системы

$T_1 + U_1 = T_2 + U_1 - |e|\Delta\varphi$

$T_1 = T_2 - |e|\Delta\varphi$

③ Т.к. $T_1 = 100$ эВ $\ll mc^2$, то случай нерелят.

Тогда $T_1 = \frac{p_1^2}{2m} \Rightarrow p_1 = \sqrt{2mT_1}$

$T_2 = \frac{p_2^2}{2m} = T_1 + |e|\Delta\varphi \Rightarrow p_2 = \sqrt{2m(T_1 + |e|\Delta\varphi)}$

$\Rightarrow n = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{T_1 + |e|\Delta\varphi_1}{T_1}} = \sqrt{1 + \frac{|e|\Delta\varphi_1}{T_1}} =$ 1 эВ = e · 1В

$= \sqrt{1 + \frac{\cancel{|e|}\cdot 36\,В}{100\cdot\cancel{|e|}\cdot 1В}} = \sqrt{1 + \frac{36}{100}} \approx 1{,}17$ //

④ В системе все силы направ. по $x \Rightarrow$
$\Rightarrow \perp x$ вып. ЗСИ: $p_1 \cdot \sin\alpha = p_2 \cdot \sin\beta$

$\Rightarrow n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ при полном внутр. отражении $\sin\beta = 1 \Rightarrow n = \sin\alpha$.

$1 + \frac{|e|\Delta\varphi_2}{T_1} = \sin^2\alpha \Rightarrow \Delta\varphi_2 = \frac{(\sin^2\alpha - 1)T_1}{|e|} =$

$= \frac{(\frac{1}{4} - 1)\cdot 100\cdot|e|}{|e|} = -75\,В$ //

логично, что $\Delta\varphi_2 < 0$ т.е. $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow$ эл. поле $\downarrow\downarrow x$ и тормозит электрон $\Rightarrow$ при нек. $\Delta\varphi$ он развер.

**2.15** Дано:

$\varepsilon = 1\,эВ$

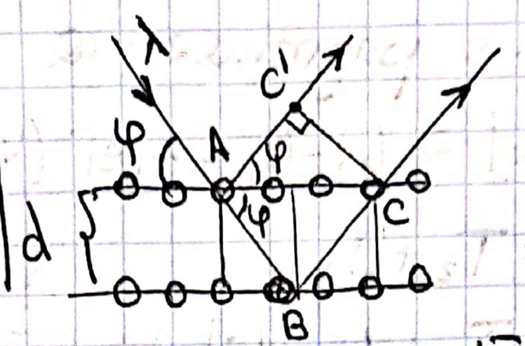
$d = 2{,}32\,\mathring{A}$

$\Delta\varphi = 0{,}1^\circ$

$\Delta\varepsilon - ?$

$D - ?$

## Решение




① Если монохром. волна λ падает на кристалл, то будет набл. дифракция Брэга-Вульфа:

Часть волны отразится от 1й отраж. плоск. атомов, часть отразится от 2й и т.д.

отраж. от сосед. уровней атомов → Для максимума инт-ти разность хода м/у сосед. отраж. волнами

$$\Delta = n\lambda = AB + BC - AC' = \frac{d}{\sin\varphi} + \frac{d}{\sin\varphi} - \frac{2d}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\cos\varphi = \frac{2d}{\sin\varphi}(1-\cos^2\varphi)$$

$\boxed{n\lambda = 2d\sin\varphi}$ – условие Брэга–Вульфа для max дифр. рассеянного на кристалле пучка.

② В данной задаче на кристалл LiF направляют пучок n с разн. ε (⇒ разные $\lambda_{ДБ}$)

Выбрав нужный φ, можно добиться max n с опред. λ ⇒ опр. ε.

③ Порядок max $n=1$ ⇒ $\lambda = 2d\sin\varphi$

$\lambda = \frac{h}{p}$, $p$ – импульс нейтр., $\varepsilon = 1\,эВ \ll mc^2$ ⇒ нерел. ⇒ $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_n}$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{h}{2d\cdot\sqrt{2m_n\varepsilon}} =$$

$$= \frac{6{,}626\cdot10^{-34}\,Дж\cdot с}{2\cdot2{,}32\cdot10^{-10}\,м\cdot\sqrt{2\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\,кг\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,Дж}} = 0{,}06$$

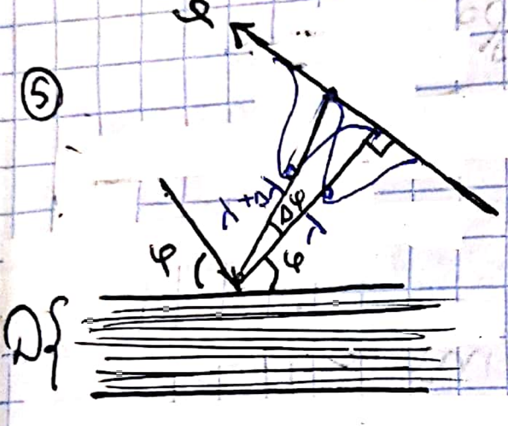
$\Rightarrow \sin\varphi \simeq \varphi = 0{,}06$ , $\lambda = 2d\cdot\varphi$

④ $$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h^2}{2m_n}\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \overbrace{\frac{h^2}{2m_n\cdot(2d)^2}}^{A}\cdot\frac{1}{\varphi^2}$$

$$\varepsilon = \frac{A}{\varphi^2} \Rightarrow |\Delta\varepsilon| = \left|-\frac{2A\Delta\varphi}{\varphi^3}\right| = 2\varepsilon\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$$

$$\Delta\varepsilon = 2\varepsilon\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = 2\cdot 1\text{ эВ}\cdot\frac{0{,}1\cdot\pi/180}{0{,}06} \approx 0{,}06\text{ эВ} \,//$$

⑤




$\exists$ N – число отраж. уровней атома, $N = D/d$

В наблюд. пучке есть нейтроны с $\varepsilon\pm\Delta\varepsilon$, т.е. с $\lambda\pm\Delta\lambda$.

Хотим, чтобы $\lambda\pm\Delta\lambda$ и $\lambda$ не разрешались, а при $>\Delta\lambda$ разрешались спектр. линии.

Аналог. дифр. решетке с N щелями

разреш. способность системы $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ 'порядок max

(из $I(\varphi)$ и крит. Рэлея ← max над min)

max разреш. разность длин волн

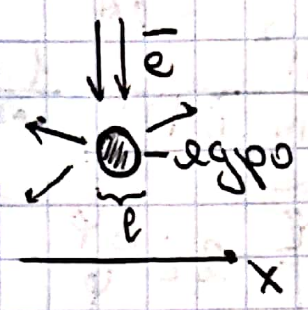
$\delta\lambda \leq \Delta\lambda$, $m=1$, $\lambda = 2d\cdot\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = \frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$D \geq \frac{\varphi}{\Delta\varphi}\cdot d = \frac{0{,}06}{0{,}1\cdot\pi/180}\cdot 2{,}32\,\text{Å} \approx 80\,\text{Å} = 8\text{ нм} \,//$$

**2.26** Дано:
e, p
ядро $l_1 \sim 10^{-13}$ см
слаб.взаим. $l_2 \sim 10^{-17}$ см
$T_e - ?$ $T_p - ?$

## Решение




① облучаем ядро спом. e/p и смотрим, как они расс.

Для такого исследования надо, чтобы неопр-ть в коорд. эл-на $\Delta x \lesssim l$ (иначе он не попадёт на ядро)

② Из соотн. неопр-ти $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{p}_{\text{импульс налет. част.}} \cdot l \geq \hbar \Rightarrow p \geq \frac{\hbar}{l}$$

③ $$T = \varepsilon - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{\hbar^2}{l^2}c^2 + m^2c^4} - mc^2 =$$

$$= mc^2\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\cdot\frac{1}{l^2} + 1} - 1\right) = \left|\lambda = \frac{\hbar}{mc}\right| =$$

компт. длина волны

$$= mc^2\left(\sqrt{(\lambda/l)^2 + 1} - 1\right)$$

$$\boxed{T \geq mc^2\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 + 1} - 1\right)}$$

④ эл-н: $m_e c^2 = 0{,}511$ МэВ, $\lambda_e = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ см

$$\left.\begin{matrix} l_1 \sim 10^{-13}\text{ см} \\ l_2 \sim 10^{-17}\text{ см}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{l} \gg 1 \Rightarrow T_e \geq m_e c^2 \cdot \frac{\lambda_e}{l}$$

$$T_e(l_1) \geq 0{,}511\text{ МэВ} \cdot 3{,}86 \cdot 10^2 = 200\text{ МэВ}$$

$$T_e(l_2) \geq 0{,}511\text{ МэВ} \cdot 3{,}86 \cdot 10^6 = 2\text{ ТэВ}$$

⑤ Протон $m_p c^2 = 938{,}272$ МэВ, $\lambda_p = 2{,}103 \cdot 10^{-14}$ см

$$T_p(\ell_1) = m_p c^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_p}{\ell_1}\right)^2} - 1\right) = 938{,}272\left(\sqrt{1+0{,}21^2} - 1\right) =$$
$$= 20 \text{ МэВ}$$

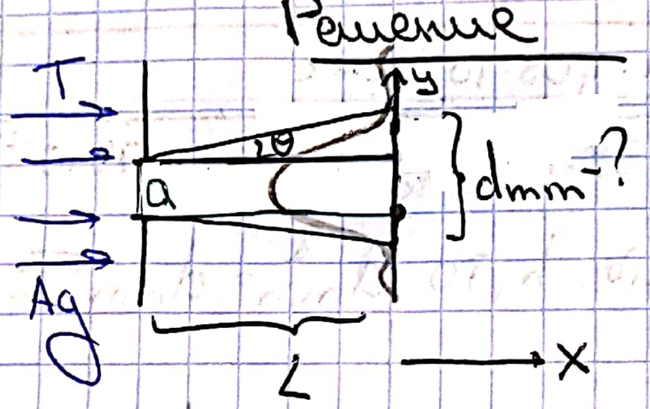
$$T_p(\ell_2) = 2 \text{ ТэВ} \;//.$$

---

**2.30** Дано:

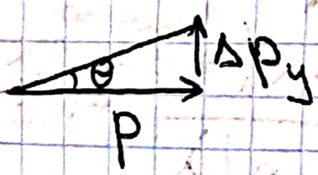
$T = 1200°C$
$L = 1$ м
$d - ?$

Решение




a – размер щели

① Из соотн-я неопр-й: сопост. ∀ атому Ag волну де Бройля с импульсом p.




После прох. ч/з щель атоми отклон. от распр. по x ⇒ возник. $\Delta p_y$

$$d = a + 2L\sin\theta = a + 2L\frac{\Delta p_y}{p}$$

Из соотн. неопр. $\Delta p_y \cdot \Delta y \approx \hbar$, $\Delta y = a \Rightarrow \Delta p_y = \frac{\hbar}{a}$

$$d = a + \frac{2L\hbar}{pa}.$$

$$\frac{d(d)}{da} = 1 - \frac{2L\hbar}{pa^2} = 0 \Rightarrow a^* = \sqrt{\frac{2L\hbar}{p}}$$

Сканировано с CamScanner

Среднеквадр. ск-ть молек. $V=\sqrt{\frac{3k_Б T}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_{перед.} = mV = \sqrt{3k_Б T m}$

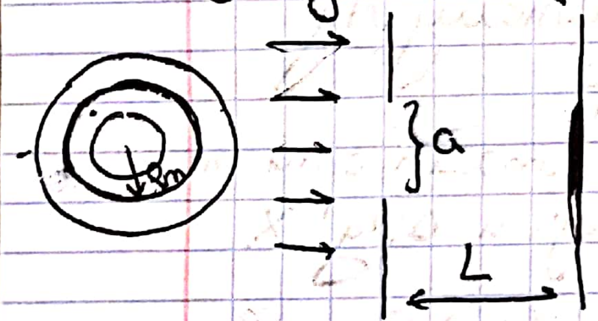
$d_{min} = a^* + \frac{2L\hbar}{pa^*} = \sqrt{\frac{2L\hbar}{p}} + \frac{2L\hbar}{p}\cdot\sqrt{\frac{p}{2L\hbar}} =$

$=2\sqrt{\frac{2L\hbar}{p}} = 2\sqrt{\frac{2L\hbar}{\sqrt{3k_Б T m}}} =$

$=2\sqrt{\frac{2\cdot 1м\cdot 1{,}05\cdot10^{-34}\,Дж\cdot с}{\sqrt{3\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\frac{Дж}{К}\cdot 1473К\cdot 1{,}79\cdot10^{-25}кг}}} = 3 мкм$

если брать $h$, то $d'_{min} = d_{min}\sqrt{2\pi} \approx 7{,}5$ мкм.

② Из волн. природы частиц: ∀ част. сопост. волну $\lambda = \frac{h}{p}$




min р-р пятна на экране — при 1 открытой зоне Френеля (1 цен ⇒ ⇒ в центре яркое пятно)

Радиус m зоны Френеля $\rho_m = \sqrt{mL\lambda}$

$\Rightarrow d_{min} = 2\rho_1 = 2\sqrt{\lambda L} = 2\sqrt{\frac{hL}{p}} = 2\sqrt{\frac{hL}{\sqrt{3k_Б T m}}}$

③ Значит, эти 2 подхода совп., если брать в соотн. неопр. $\Delta y\cdot\Delta p_y \approx h$

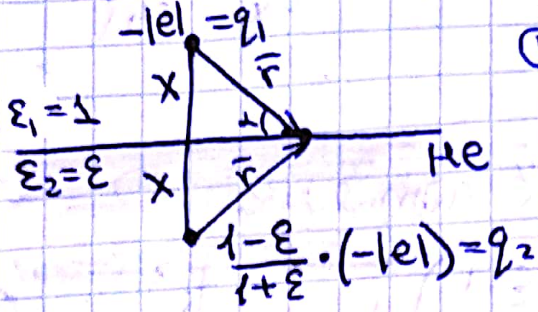
**2.38** Дано:

$U(x) = -\frac{e^2}{4x}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$

$\varepsilon = 1{,}057$

$\bar{x}$ - ? $\varepsilon_{св}$ - ?

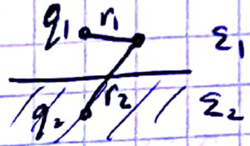
## Решение




① Rem

1) Rem поле в среде $\varepsilon_1$ созд. $q_1$ и его изобр-е $q_2$ (эквив. зарядами, один на гр. диэл.)

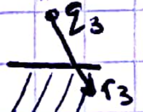
$$\Rightarrow \bar E_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{q_1 \bar r_1}{r_1^3} + \frac{q_2 \bar r_2}{r_2^3}\right)$$




поле в среде $\varepsilon_2$ созд. $q_1$ и заряди на границе →

→ заменим это все на $q_3$ в точке $q_1$ ⇒

$$\Rightarrow \bar E_2 = \frac{q_3 \bar r_3}{\varepsilon_2 r_3^3}$$

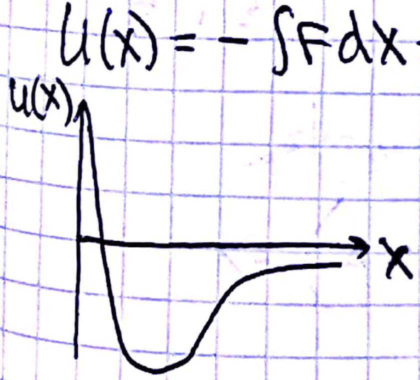



На границе $\begin{cases} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ \underset{\varepsilon_2 E_{2n}}{\underbrace{D_{2n}}} = \underset{\varepsilon_1 E_{1n}}{\underbrace{D_{1n}}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{q_1}{\varepsilon_1}\sin\alpha + \frac{q_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha = \frac{q_3}{\varepsilon_2}\sin\alpha \\ q_1\cos\alpha - q_2\cos\alpha = q_3\cos\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}q \text{ в нашем случае}$$

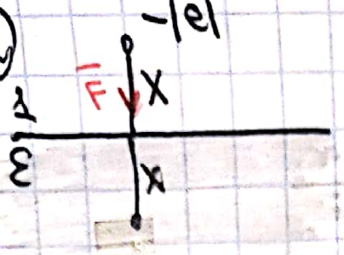
$$\Rightarrow F = \frac{q_1 q_2}{(2x)^2} = \frac{e^2}{4x^2}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\frac{dU}{dx}$$

$$U(x) = -\int F\,dx = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{e^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{e^2}{4x}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} =$$

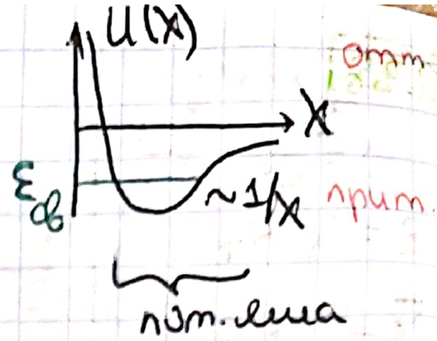



$$= -\frac{e^2}{4x}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$

в условии этого минуса нет ← опечатка

② 


$$U(x) = -\frac{e^2}{4x}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$




• Энергия эл-на в пот. яме

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} - \underbrace{\frac{e^2}{4}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}_{Q}\cdot\frac{1}{x} \approx \frac{\hbar^2}{2mx^2} - \frac{Q}{x}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta p\Delta x \approx \hbar \\ p \approx \hbar/x\end{array}\right\}\text{оценка}$$

• Осн. состояние – сост-е с наим. энергией. В нем эл-н может наход. $\infty$ долго. Тогда для $\bar{x}$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 0 = -\frac{\hbar^2}{mx^3} + \frac{Q}{x^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\hbar^2}{mQ} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{m}\cdot\frac{4}{e^2}}\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} = 4\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}r_Б$$

$$\text{" } r_Б = 0{,}5\,Å \text{ – рад. Бора}$$

$$\bar{x} = 4\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}r_Б = 4\cdot\frac{2{,}057}{0{,}057}\cdot 0{,}5\,Å \approx 7\,нм$$

• $$\mathcal{E}_{св} = \mathcal{E}(\bar{x}) = \frac{\hbar^2}{2m\cdot 4^2\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)^2 r_Б^2} - \frac{e^2}{4}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\cdot\frac{1}{4\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}r_Б} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2\cdot\left(\frac{\hbar^2}{32mr_Б^2} - \frac{e^2}{16r_Б}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{e^2}{16r_Б}}_{\frac{me^4}{16\hbar^2}}\overbrace{\left(\overbrace{\frac{\hbar^2}{2me^2}}^{r_Б/2}\cdot\frac{1}{r_Б} - 1\right)}^{-1/2} \Rightarrow$$

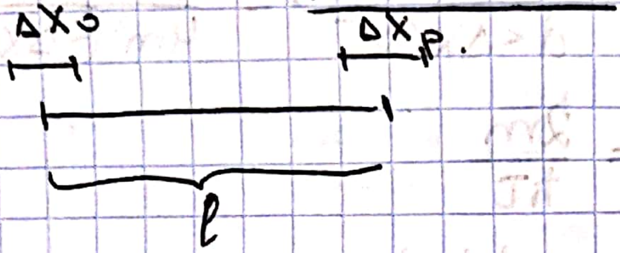
$$\frac{me^4}{16\hbar^2} = \frac{1}{8}\cdot I$$ пот. иониз H, $I = 13{,}6$ эВ

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{св} = -\frac{1}{16}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 I = -\frac{1}{16}\left(\frac{0{,}057}{2{,}057}\right)^2 \cdot 13{,}6\ эВ =$$
$$= -6{,}5\cdot 10^{-4}\ эВ \ //$$

**2.44** Дано: $m$, $\tau$

$F_{min}$ − ?

Решение




1) Под действием силы $F$ свобод. частица за $\tau$ перем. на $l = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m}$
$F = ma$

Измерим $l \Rightarrow$ наход. $F$

2) При измерении $l$ возн. 2 независ. неоп-ти

$\Delta x_0$ − неоп-ть начал. пол-я частицы

$\Delta x_\tau$ − неоп-ть в пройд. расст-и связ. с разбросом импульса из-за того, что точно измер. коорд-ты

$$\langle \Delta x_0^2\rangle \cdot \langle \Delta p_x^2\rangle \geq \hbar^2/4$$ − неопр. в ф. Вейля

Тогда $$\langle \Delta x_\tau^2\rangle = \frac{\langle \Delta p_x^2\rangle \cdot \tau^2}{m^2} \geq \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2\langle \Delta x_0^2\rangle}$$

$x = v\tau = \frac{p\tau}{m}$

Т.к. эти 2 портии незав. то сумм. погр. $l$

$$\langle \Delta l^2 \rangle = \langle \Delta x_0^2 \rangle + \langle \Delta x_\tau^2 \rangle$$

$$\langle \Delta l^2 \rangle \geq \langle \Delta x_0^2 \rangle + \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \langle \Delta x_0^2 \rangle}$$

$$\Delta l \to \min \Rightarrow \frac{d\langle \Delta l^2 \rangle}{d\langle \Delta x_0^2 \rangle} = 1 - \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 (\langle \Delta x_0^2 \rangle)^2} = 0$$

$$\langle \Delta x_0^2 \rangle^* = \frac{\hbar \tau}{2m}.$$

$$\langle \Delta l^2 \rangle_{min} = \frac{\hbar \tau}{2m} + \frac{\hbar^2 \tau^2 \cdot 2m}{4m^2 \cdot \hbar \tau} = \frac{\hbar \tau}{m}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \Delta l_{min} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar \tau}{m}}$$

3) Силу можно определить, если $l \geq \Delta l$

$$\frac{F\tau^2}{2m} \geq \sqrt{\frac{\hbar \tau}{m}}$$

$$F \geq \sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}} //.$$