ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

ПИСЬМЕННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 16.01.2021

1. С какой скоростью должна катиться без проскальзывания по горизонтальной поверхности стальная труба, чтобы её диаметр увеличился на 1%? Скорость звука в стали равна $s = 5$ км/с, толщина стенок трубы много меньше её радиуса.

2. Резонатор лазера установлен на гранитном блоке. Поперечное сечение блока $S = 10 \times 40$ см^2, расстояние между зеркалами L = 50 см. Модуль Юнга гранита $E = 5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Оценить относительную среднеквадратичную флуктуацию частоты генерации. Температуру считать комнатной $T = 300$ К.

3. К идеальной катушке подсоединили пустой конденсатор (форма конденсатора неизвестна). Резонансная частота этого колебательного контура оказалась равной f_0 = 3,6 МГц. Потом конденсатор заполнили однородным слабопроводящим диэлектриком. При последовательном подключении нового колебательного контура к источнику переменного напряжения амплитудой $U = 1$ В оказалось, что максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе равна U_{m} = 200 В, причём достигается она при частоте источника f_1 = 1,8 МГц. Считая, что потери энергии происходят только в диэлектрике, определить его удельную проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ε.

4. Человек невооруженным глазом способен разглядеть на ночном небе подобную Солнцу звезду, находящуюся на расстоянии не более $L_{\text{зв}}$ = 15 пк. Плутон — покрытая льдом карликовая планета Солнечной системы — рассеивает равномерно во все стороны $\alpha =$ 60% попадающего на неё солнечного света. Оцените максимальное расстояние $(L_{\Pi})_{\max}$, на котором человек может разглядеть Плутон в телескоп. Оцените диаметр телескопа D_{T}, в который можно с Земли гарантировано увидеть глазом реальный Плутон, если максимальное расстояние от него до Солнца L_{Π}= 50 а.е. Диаметр Плутона D_{Π} = 2400 км. Расстояние от Земли до Солнца L_{C} = 1 а.е. = 1,5 · 10^8 км. Угловой размер (диаметр) Солнца приближенно равен γ = 0,01 рад. Диаметр зрачка глаза принять равным $D_{\text{Г}}$ = 3 мм.
Примечание: 1 парсек (пк) – расстояние, с которого радиус орбиты Земли виден под углом в одну угловую секунду.

5. Сечение деления урана-238 γ-квантами с энергией $E_0 = 3$ МэВ составляет σ = 0,1 нбн. Если плотность потока энергии в пучке γ-квантов превышает $S = 740\ \text{мкВт/см}^2$, то в куске урана массой m = 10 г за время t_0 = 10 ч можно заметить вклад вынужденного деления на фоне спонтанного. Оценить по этим данным период полураспада $T_{1/2}$ урана-238.

1. *(Виноградов С.В.):* Сила, действующая на элемент дуги трубы длиной dl по нормали к ней равна

$$dF = ES\frac{dR}{R}\frac{dl}{R},$$

где E — модуль Юнга стали, S — площадь сечения стенки трубы, $dR.$ — удлинение радиуса трубы R. С другой стороны, эта сила должна обеспечивать центростремительное ускорение этого элемента ($dm = \rho S dl$ — масса элемента дуги)

$$dF = dm\frac{v^2}{R} = \rho S dl\frac{v^2}{R},$$

откуда получаем м

$$\frac{dR}{R} = v^2\frac{\rho}{E} = \frac{v^2}{s^2}$$

или

$$v = s\sqrt{\frac{dR}{R}} = 500\text{ м/с}$$

2. (*Долгих В.А.*). Считая блок одномерным стрежнем, запишем выражение для энергии упругой деформации при конечной температуре. Согласно теореме о равнораспределении, средняя потенциальная энергия, приходящаяся на одну степень свободы есть $\frac{1}{2}k_Б T$. Пренебрегая изменением поперечных размеров, запишем (черта означает усреднение по равновесному состоянию)

$$\bar{U} = \frac{1}{2}E\,\overline{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}\,SL = \frac{1}{2}k_Б T.$$

Изменение длины блока приводит к изменению расстояния между зеркалами и нарушению условия резонанса

$$L = n\lambda/2 = nc/2\nu$$

откуда

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left|\frac{\Delta L}{L}\right|$$

или

$$\overline{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^2}} = \sqrt{\frac{k_Б T}{ESL}} \approx 2\cdot 10^{-15}$$

3. *(Виноградов С.В.)*: Потери определяются объёмными токами в диэлектрике. Добротность $Q = 2\pi\frac{W_{эм}}{\Delta W_T}$, где запасённая в контуре энергия $W_{эм}$ вдвое больше средней по периоду в энергии в конденсаторе: $W_{эм} = 2\frac{1}{T}\int_0^T dt\int\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}dV$; потери за период $\Delta W_T = \int_0^T dt\int\sigma E^2\,dV$ (см. решение задачи 12.43 из задачника

по электричеству МФТИ). Следовательно, $Q = \frac{\epsilon}{2T\sigma}$, $1/_{f_1} = T_1 = \sqrt{\varepsilon}T_0 = \sqrt{\varepsilon}/_{f_0}$,где f_0 — резонансная частота при пустом конденсаторе, f_1 — при заполненном. В итоге добротность $Q = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sigma}f_0 = \frac{f_0^2}{2\sigma f_1}$. С другой стороны $Q = \frac{U_{\max}}{U_0} = 200$.

Окончательно получаем: $\varepsilon = \frac{f_0^2}{f_1^2} = 4$, $\sigma = \frac{f_0^2}{2Qf_1} = 1{,}8 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1} = 2 \cdot 10^{-8}\ (\text{Ом см})^{-1}$.

4. (*Дьячков Н.В.):* Пусть яркость Солнца равна B_0. Яркость видимого дифракционного пятна от звезды

$$B_{\text{зв}} = B_0\left(1{,}22\frac{\lambda}{D_{\text{г}}}\right)^{-2}\left(\frac{D_{\text{С}}}{L_{\text{зв}}}\right)^2 = B_0\left(1{,}22\frac{\lambda}{D_{\text{г}}}\right)^{-2}\left(\gamma\frac{L_{\text{С}}}{L_{\text{зв}}}\right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-10}B_0$$

Для того, чтобы планету можно было разглядеть в телескоп, яркость ее поверхности должна превысить установленный порог видимости. Тогда запишем

$$(B_{\Pi})_{\min} = B_0\left(\frac{D_{\text{С}}/2}{(L_{\Pi})_{\max}}\right)^2 = \alpha B_0\left(\frac{\gamma L_{\text{С}}/2}{(L_{\Pi})_{\max}}\right)^2 = B_{\text{зв}}$$

откуда

$$(L_{\Pi})_{\max} = \frac{\gamma L_{\text{С}}}{2}\sqrt{\frac{\alpha B_0}{B_{\text{зв}}}} \approx 220\ \text{а.е.}$$

Яркость поверхности реального Плутона

$$B_{\Pi} = (B_{\Pi})_{\min}\left(\frac{(L_{\Pi})_{\max}}{(L_{\Pi}}\right)^2.$$

Яркость изображения планеты в телескопе должна быть не менее $(B_{\Pi})_{\min}$

$$B_{\Pi}\left(1{,}22\frac{\lambda}{D_{\text{т}}}\right)^{-2}\left(\frac{D_{\Pi}}{L_{\Pi}}\right)^{-2} = (B_{\Pi})_{\min} = B_{\Pi}\left(\frac{L_{\Pi}}{(L_{\Pi})_{\max}}\right)^{-2}$$

откуда

$$D_{\text{т}} = 1{,}22\lambda\frac{L_{\Pi}}{D_{\Pi}}\frac{L_{\Pi}}{(L_{\Pi})_{\max}} = 45\ \text{см}.$$

5. (*Заикин Д.А., Гуденко С.В., Глазков В.Н.*) Радиоактивный распад в результате спонтанного деления описывается уравнением $\frac{dN_{\text{сп}}}{dt} = \lambda N$, где $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $N = N_{\text{А}}\frac{m}{A} = 2{,}53 \cdot 10^{22}$. Поскольку $t_0 \ll T_{1/2}$, то среднее число распавшихся атомов равно $N_{\text{сп}} = \lambda N t_0$. Так как радиоактивный распад является случайным процессом, то возможны отклонения от среднего числа порядка $\delta N_{\text{сп}} = \sqrt{\lambda N t_0}$. Распад в результате вынужденного деления описывается уравнением $\frac{dN_{\text{вын}}}{dt} = \sigma\Phi N$, где Φ – плотность потока квантов. Процесс вынужденного деления можно заметить, если число таких распадов за время наблюдения превысит отклонение от среднего в спонтанном процессе распада: $N_{\text{вын}}(t_0) = \sigma\Phi N t_0 \geq \delta N_{\text{сп}} = \sqrt{\lambda N t_0}$, откуда $\Phi \geq \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{N t_0}}$. Считая поток γ-квантов монохроматическим, находим $\Phi = S/E_0$. Из этих двух соотношений, получаем $T_{1/2} \geq \left(\frac{E_0}{S\sigma}\right)^2\frac{\ln 2}{N t_0} \cong 3{,}19 \cdot 10^{22}\ \text{с} \approx 10^{15}$ лет.