0-10-1. Определить возможные значения полного углового момента электрона и его проекции на выделенную ось в атоме водорода, находящемся в возбужденном состоянии с главным квантовым числом $n = 3$.

n	l	j
	0	$\pm 1/2$
	1	$3/2;\ 1/2$
	2	$5/2;\ 3/2$

$l = 0, \dots;\ n-1 = 0, 1, 2$

$j = l + s$, т.е. $j = l + \frac{1}{2}$; $j = l - \frac{1}{2}$

$\boxed{j = \pm\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{2}}$ – Ответ

0-10-2. Атом водорода находится в $2p$-состоянии. Определить возможные значения полного момента количества движения.

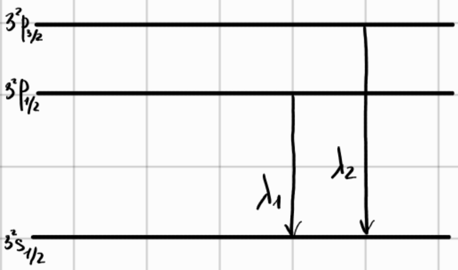
2p-состояние $\hookrightarrow$ $n = 2;\ l = 1;\ j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$J = m_j \hbar$

$m_j = \pm j;\ \pm(j-1);\ \dots;\ 0 = \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{2};\ 0$

$\boxed{J = 0;\ \pm\frac{1}{2}\hbar;\ \pm\frac{3}{2}\hbar}$ – Ответ

6.20. Желтый дублет Na возникает при переходе электронов $3^2P \rightarrow 3^2S$ и соответствует длинам волн $\lambda_1 = 5896$ Å и $\lambda_2 = 5890$ Å. Найти энергетическое расстояние $\Delta\mathcal{E}$ между соответствующими подуровнями терма 3^2P (мультиплетное расщепление). Оценить среднюю величину магнитного поля B, действующего на «оптический» электрон.



$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1} = hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}\left(\frac{10^8}{5890} - \frac{10^8}{5896}\right) = \boxed{2 \cdot 10^{-3}\ \text{эВ}}$$ ← Ответ

$\Delta\mathcal{E} = \mu B$

$$\hookrightarrow B = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mu} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mu_Б} = \frac{2\cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0{,}927 \cdot 10^{-20}} = \boxed{1{,}8 \cdot 10^{5}\ \text{Гс}}$$

6.48. Взамодействие магнитых моментов протона и электрона в атоме водорода приводит к расщеплению энергетических уровней и возникновению сверхтонкой структуры. Излучение межзвездного атомарного водорода, находящегося в основном состоянии, вызвано переориентацией электронного спина, т. е. переходами между компонентами сверхтонкой структуры. Оценить длину волны λ этого излучения. Для оценки заменить истинное распределение плотности спинового магнитного момента электрона таким, которое дает однородно намагниченный шар радиусом $r_Б$. Размагничивающий фактор шара $\beta = 4\pi/3$.

Указание. Магнитное поле внутри шара $\mathbf{H} = -\beta\mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ — намагниченность. Магнитный момент протона равен $\boldsymbol{\mu}_p = g_{sp}\mu_{яд}\mathbf{s}_p$, где $g_{sp} = 5{,}58$ — спиновый g-фактор протона, $\mathbf{s}_p$ — его спин, $\mu_{яд}$ — ядерный магнетон Бора.

магнитный момент единицы объема

Внутри шара: $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \left(-\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right)\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{\mu_e}{\frac{4\pi}{3} r_Б^3} = \frac{g_s \mu_Б \vec{s_e}}{\frac{4\pi}{3} r_Б^3}$$

$$\vec{B} = \frac{8\pi}{3} \frac{g_s \mu_Б \vec{s_e}}{\frac{4\pi}{3} r_Б^3} = \frac{2 g_s \mu_Б \vec{s_e}}{r_Б^3}$$

Энергия взаимодействия: $E = -(\mu_p \vec{B}) = -g_{sp}\mu_{яд}\vec{S_p}\vec{B} = -g_{sp}\mu_{яд}\vec{S_p}\frac{2g_s\mu_Б}{r_Б^3}\vec{S_e} =$

$= -\frac{2g_s g_{sp}\mu_{яд}\mu_Б}{r_Б^3}(\vec{S_p}\cdot\vec{S_e})$

$\vec{S} = \vec{S_e} + \vec{S_p}$ – суммарный спин

$S_1 = 1$ или $S_2 = 0$

$\Delta E = |E_1 - E_2|$

$\overline{S^2} = \overline{(\vec{S_e}+\vec{S_p})^2} = \overline{S_e^2} + \overline{S_p^2} + 2\overline{\vec{S_e}\vec{S_p}}$

$\overline{\vec{S_e}\vec{S_p}} = \frac{\overline{S^2} - \overline{S_e^2} - \overline{S_p^2}}{2}$

$\overline{S^2} = s(s+1) \to \overline{S_1^2} = 2; \overline{S_2^2} = 0$

$\overline{S_e^2} = \overline{S_p^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$\Delta E = \frac{2g_s g_{sp}\mu_{яд}\mu_Б}{r_Б^3}\left(\frac{2-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{2} - \frac{0-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{2}\right) = \frac{2g_s g_{sp}\mu_{яд}\mu_Б}{r_Б^3}\cdot 1$

$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc\, r_Б^3}{2g_s g_{sp}\mu_{яд}\mu_Б} = \frac{6{,}6\cdot10^{-27}\cdot3\cdot10^{10}\cdot(0{,}53\cdot10^{-8})^3}{2\cdot2\cdot5{,}58\cdot5\cdot10^{-24}\cdot0{,}927\cdot10^{-20}} = \boxed{28{,}5\text{ см}}$ ← Ответ

6.77. В спектрах солнечной короны наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов, поэтому их приписывали гипотетическому элементу «коронию». Впоследствии выяснилось, что это — в основном линии ионов железа и никеля. Среди наблюдаемых линий «корония» есть линии, соответствующие переходам $^1D_2 \to {}^3P_2$ ($\lambda_1 = 2649$ Å) и $^1D_2 \to {}^3P_1$ ($\lambda_2 = 3987$ Å) иона железа Fe^{10+}. Найти длину линии перехода $^3P_0 \to {}^3P_1$ в схеме Рассела—Саундерса (LS-схема).

Указание. Энергия спин-орбитального взаимодействия есть $\mathcal{E}_{SL} = A\langle(\mathbf{L},\mathbf{S})\rangle$, где A — константа (для иона Fe^{10+} константа $A<0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов орбитального момента $\mathbf{L}$ и спина $\mathbf{S}$.

$\langle \vec{J}^2\rangle = \langle(\vec{L}+\vec{S})^2\rangle = 2\langle\vec{L}\vec{S}\rangle + \langle\vec{L}^2\rangle + \langle\vec{S}^2\rangle$

$\langle\vec{L}\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}[\langle\vec{J}^2\rangle - \langle\vec{L}^2\rangle - \langle\vec{S}^2\rangle] = \frac{1}{2}[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$ (1)

Энергия спин-орбитального взаимодействия:

$E_{SL} = A\langle\vec{L}\vec{S}\rangle \overset{(1)}{=} \frac{A}{2}[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$ (2)

Энергии уровней тонкой структуры $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$, отличающиеся энергиями E_{SL}:

$E(^3P_2) - E(^3P_1) = [E(^3P) + \Delta E_{SL}(J=2)] - [E(^3P) + E_{SL}(J=1)] = E_{SL}(J=2) - E_{SL}(J=1) \overset{(2)}{=}$

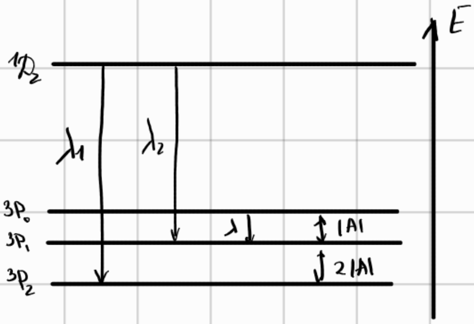
$= A\frac{2\cdot3 - 1\cdot2 - 1\cdot2}{2} - A\frac{1\cdot2 - 1\cdot2 - 1\cdot2}{2} = \frac{A}{2}(2+2) = 2A < 0$ (3)

$E(^3P_1) - E(^3P_0) = [E(^3P) + E_{SL}(J=1)] - [E(^3P) + E_{SL}(J=0)] = E_{SL}(J=1) - E_{SL}(J=0) =$

$\overset{(2)}{=} A\frac{1\cdot2 - 1\cdot2 - 1\cdot2}{2} - A\frac{0 - 1\cdot2 - 1\cdot2}{2} = \frac{A}{2}(-2+4) = A < 0$ (4)

С другой стороны:

$E(^3P_1) - E(^3P_2) = [E(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_2}] - [E(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_1}] = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$ (5)



$$\frac{hc}{\lambda} = E(^3P_0) - E(^3P_1) \overset{(3),(4)}{=} \frac{E(^3P_1) - E(^3P_2)}{2} \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{hc}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\cdot 2649\cdot 3987}{3987-2649} = 15787\ \text{Å}}$$ ← Ответ

6.75. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -3{,}4$ эВ, и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в нуль на интервале $0 < r < \infty$. На сколько линий расщепится данный уровень энергии в слабом и сильном магнитных полях?

$$E = -\frac{R_1}{n^2} \hookrightarrow n = \sqrt{-\frac{R_1}{E}} = \sqrt{\frac{13{,}6}{3{,}4}} = 2$$

$$l = n - n_r - 1 = 2 - 2 = 0$$

$$S = \frac12;\ j = s = \frac12$$

В сильном магнитном поле (простой эффект Зеемана):

$$E_B = E + \mu_B B(m_l + 2m_s)$$

$$m_l + 2m_s = \pm 1$$

Число уровней: $\boxed{N_1 = 2}$ ← Ответ

В слабом магнитном поле (сложный эффект Зеемана):

$$E_B = E + 2\mu_B B m_j$$

$$m_j = \pm\frac12$$

Число уровней: $\boxed{N_2 = 2}$ ← Ответ

(Уровень расщепляется на 2 подуровня при $\forall$ поле B)

6.80. Пучок атомов, находящихся в основном состоянии, расщепляется в эксперименте типа Штерна—Герлаха на 9 компонент. Магнитный момент атома в этом состоянии равен $2{,}4\mu_Б$. Найти орбитальный момент атома, если мультиплетность данного состояния равна 5. Момент в атомной физике — это величина его максимальной проекции.

$(\mu_z)_{max} = 2{,}4\mu_B$

$2S+1 = 5$

$L - ?$

По условию: $2S+1 = 5 \hookrightarrow S = 2$ (1)

Число расщепившихся компонент в эксперименте Штерна - Герлаха: $2J+1 = 9$ (по условию) $\hookrightarrow J = 4$ (2)

Магнитный момент атома (max проекция):

$$\underbrace{(\mu_z)_{max}}_{2{,}4\mu_B} = g\mu_B J \overset{(2)}{=} 4g\mu_B \hookrightarrow g = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6 = \frac35 \quad (3)$$

$$g = \frac32 + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2(J+1)J} \quad (4)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ (4): $\frac35 = \frac32 + \frac{2\cdot 3 - L(L+1)}{2\cdot 4\cdot 5}$

$$24 = 60 + 6 - L(L+1) \hookrightarrow L^2 + L - 42 = 0 \hookrightarrow \left[L = \frac{-1+\sqrt{169}}{2} = \frac{-1+13}{2} = 6 \right]$$

Ответ

T4. Найти все термы невозбужденного атома углерода, на внешней оболочке $2p$ оболочке которого находятся два электрона (электронная конфигурация $1s^2 2s^2 2p^2$).

Ответ: ^1D, ^3P, ^1S.

1. Все возможные одноэлектронные состояния $|m_l, m_s\rangle$ (всего $q = 2(2l+1) = 2(2\cdot 1+1) = 6$):

1) $|1, \frac{1}{2}\rangle$ 4) $|1, -\frac{1}{2}\rangle$

2) $|0, \frac{1}{2}\rangle$ 5) $|0, -\frac{1}{2}\rangle$

3) $|-1, \frac{1}{2}\rangle$ 6) $|-1, -\frac{1}{2}\rangle$

2. Все возможные двухэлектронные состояния $|M_L, M_S\rangle$, где $M_L = m_{l_1} + m_{l_2}$, $M_S = m_{s_1} + m_{s_2}$

(всего $C_q^2 = C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$)

12, 13, 14, 15, 16 $|1,1\rangle$, $|0,1\rangle$, $|2,0\rangle$, $|1,0\rangle$, $|0,0\rangle$

23, 24, 25, 26 $|-1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|0,0\rangle$, $|-1,0\rangle$

34, 35, 36 $|0,0\rangle$, $|-1,0\rangle$, $|-2,0\rangle$

45, 46 $|1,-1\rangle$, $|0,-1\rangle$

56 $|-1,-1\rangle$

3. Выбираем состояние с максимальным M_L, а в случае нескольких таких состояний выбираем из них состояние с максимальным M_S: $|2,0\rangle \hookrightarrow$ есть терм $L=2$, $S=0$ (^1D)

4. Из полного списка состояний подчеркиваем $(2L+1)(2S+1) = 5$ состояний, отвечающих этому терму

5. Повторяем п. 3 и п. 4, пока не будут выбраны все состояния

$L = 2$, $S = 0$ (^1D)

$L = 1$, $S = 1$ (^3P)

$L = 0$, $S = 0$ (^1S)

По правилу Хунда основное состояние соответствует терму ^3P