



ГОС

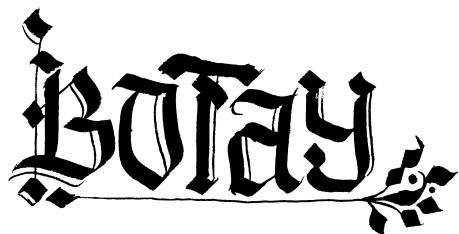
ПО

ФИЗИКЕ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН.
Общая физика.



СОСТАВИТЕЛИ:
ШАМСИМУХАМЕТОВ Данил
Носов Григорий

А ТАКЖЕ АВТОР ОБЛОЖКИ:
ЕРМОЛАЕВА ЛЮБА



Содержание

1	1. Законы Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.	6
2	2. Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Инвариантность интервала.	7
3	3. Законы сохранения энергии и импульса. Упругие и неупругие столкновения.	9
4	4. Уравнение движения материальной точки в релятивистской механике. Импульс и энергия материальной точки.	11
5	5. Закон всемирного тяготения и законы Кеплера. Движение тел в поле тяготения.	12
6	6. Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Гироскопы.	14
7	7. Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности. Уравнение Бернуlli.	17
8	8. Закон вязкого течения жидкости. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса, его физический смысл.	19
9	9. Упругие деформации. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Энергия упругой деформации.	20
10	10. Уравнение состояния идеального газа, его объяснение на основе молекулярно-кинетической теории. Уравнение неидеального газа Ван-дер-Ваальса.	22
11	11. Квазистатические процессы. Первое начало термодинамики. Количество теплоты и работа. Внутренняя энергия. Энтальпия.	25
12	12. Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Энтропия и закон ее возрастания. Энтропия идеального газа.	28
13	13. Термодинамические потенциалы. Условия равновесия систем.	32
14	14. Распределения Максвелла и Больцмана.	35
15	15. Теплоемкость. Закон равномерного распределения энергии по степеням.	

ням свободы. Зависимость теплоемкости газов от температуры.	38
16 16. Фазовые переходы. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний.	42
17 17. Явления переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение стационарной теплопроводности.	46
18 18. Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.	51
19 19. Флуктуации. Броуновское движение. Соотношение Эйнштейна.	54
20 20. Закон Кулона. Теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной формах. Теорема о циркуляции для статического электрического поля. Потенциал. Уравнение Пуассона.	57
21 21. Электростатическое поле в веществе. Вектор поляризации, электрическая индукция. Граничные условия для векторов E и D	60
22 22. Магнитное поле постоянных токов в вакууме. Основные уравнения магнитостатики в вакууме. Закон Био-Савара. Сила Ампера. Сила Лоренца.	63
23 23. Магнитное поле в веществе. Основные уравнения магнитостатики в веществе. Граничные условия для векторов B и H.	65
24 24. Закон Ома. Индуктивность, емкость конденсатора. Закон Фарадея.	68
25 25. Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках. ЭДС индукции. Само и взаимоиндукция. Теорема взаимности.	72
26 26. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Ток смещения. Материальные уравнения.	75
27 27. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.	77
28 28. Квазистационарные токи. Свободные и вынужденные колебания в электрических цепях. Явление резонанса. Добротность колебательного контура, ее энергетический смысл.	79
29 29. Спектральное разложение электрических сигналов. Спектры колеба-	

ний, модулированных по амплитуде и фазе.	83
30 30. Электрические флуктуации. Дробовой и тепловой шумы. Предел чувствительности электроизмерительных приборов.	87
31 31. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца.	89
32 32. Электромагнитные волны в волноводах. Критическая частота. Объемные резонаторы.	91
33 33. Плазма. Плазменная частота. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дебаевский радиус.	95
34 34. Интерференция волн. Временная и пространственная когерентность. Соотношение неопределенностей.	98
35 35. Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера. Границы применимости геометрической оптики.	102
36 36-37. Спектральные приборы (призма, дифракционная решетка, интерферометр Фабри-Перо) и их основные характеристики. Дифракционный предел разрешения оптических и спектральных приборов. Критерий Рэлея.	107
37 38. Пространственное Fourier-преобразование в оптике. Дифракция на синусоидальных решетках. Теория Аббе формирования изображения.	113
38 39. Принципы голограммии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Объемные голограммы.	116
39 40. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Классическая теория дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсии.	120
40 41. Поляризация света. Угол Брюстера. Оптические явления в одноосных кристаллах.	124
41 42. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Брэгга-Вульфа. Показатель преломления вещества для рентгеновских лучей.	129
42 43. Квантовая природа света. Внешний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна. Эффект Комptonа.	130

43 44. Спонтанное и вынужденное излучение. Инверсная заселенность уровней. Принцип работы лазера.	133
44 45. Излучение абсолютно черного тела. Формула Планка, законы Вина и Стефана-Больцмана.	136
45 46. Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля. Опыты Девиссона-Джермера и Томсона по дифракции электронов.	138
46 47. Волновая функция. Операторы координаты и импульса. Средние значения физических величин. Соотношение неопределенности для координаты и импульса. Уравнение Шредингера.	141
47 48. Постулаты Бора. Энергетический спектр водородоподобных атомов. Характеристическое излучение. Закон Мозли.	144
48 49. Опыты Штерна и Герлаха. Пространственное квантование. Сpin электрона. Орбитальный и спиновый магнитные моменты электрона.	148
49 50. Тождественность частиц. Симметрия волновой функции относительно перестановки частиц. Бозоны и фермионы. Принцип Паули. Электронная структура атомов. Таблица Менделеева.	151
50 51. Тонкая и сверхтонкая структуры оптических спектров. Правила отбора при поглощении и испускании фотонов атомами.	154
51 52. Эффект Зеемана в слабых магнитных полях.	156
52 53. Эффект Зеемана в сильных магнитных полях	157
53 54. Ядерный и электронный магнитный резонансы.	158
54 55. Закон радиоактивного распада. Период полураспада и среднее время жизни ядра.	160
55 56. Туннелирование частиц сквозь потенциальный барьер. Альфа-распад. Закон Гейгера-Нэттола и его объяснение.	162
56 57. Виды бета-распадов. Объяснение непрерывности энергетического спектра электронов распада. Нейтрино.	165
57 58. Ядерные реакции. Составное ядро. Сечение нерезонансных реакций. Закон Бете.	167

58 59. Резонансные ядерные реакции. Формула Брейта-Вигнера.	170
59 60. Деление ядер под действием нейтронов. Принцип работы ядерного реактора на тепловых нейтронах.	172
60 61. Соотношение неопределенностей для энергии и времени. Оценка вре- мени жизни виртуальных частиц, радиусов сильного и слабого взаимо- действий.	174
61 62. Фундаментальные взаимодействия и фундаментальные частицы (леп- тоны, кварки и переносчики взаимодействий). Кварковая структура ад- ронов.	176

1. Законы Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.

ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА.

Первый закон Ньютона: *тело, не подверженное внешним воздействиям, либо находится в состоянии покоя либо движется прямолинейно и равномерно.*

Такое тело называется **свободным**, а его движение **движением по инерции**.

Импульсом тела называется величина: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. С учетом этого определения **ПЗН:** *В отсутствие внешних воздействий импульс тела сохраняется: $\mathbf{p} = \text{const}$*

ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА.

Силой называется всякая причина изменения импульса: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

Второй закон Ньютона: *ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально приложенной силе, обратно пропорционально массе тела и направлено по той прямой, по которой эта сила действует.*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА.

Третий закон Ньютона: *силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположены направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под **системой отсчета** понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Классическая механика постулирует, что существуют системы отсчета, в которых **свободные** тела движутся прямолинейно и равномерно, такие СО называются **инерциальными**.

Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета S, то таких систем бесконечно много: таковыми являются любые системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно S.

Остальные системы отсчета являются **неинерциальными**.

2. Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна.

Преобразования Лоренца. Инвариантность интервала.

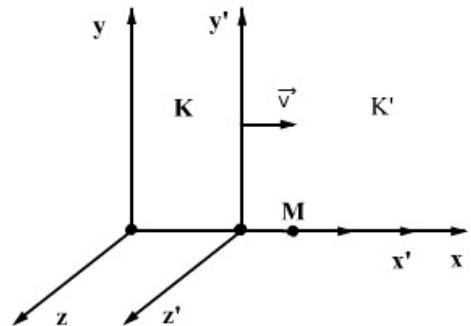
ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ.

Принцип относительности Галилея: все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Это значит, что уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованию координат и времени от одной инерциальной системы к другой.

Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную K и движущуюся K' относительно первой вдоль оси X с постоянной скоростью v . Эти координаты связаны между собой соотношениями, которые называются преобразованием Галилея.

Преобразование Галилея: $\begin{cases} x = x' + vt, \ t = t' \\ z = z', \ y = y' \end{cases}$



Такой способ описания взаимодействий частиц подразумевает под собой предположение о **мгновенности распространения взаимодействия**, поэтому два события, одновременные в первой СО, одновременны и во второй.

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА.

Опыт, однако, показывает, что *мгновенных взаимодействий в природе не существует*. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность.

В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдем «скорость распространения взаимодействий».

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Эта постоянная скорость одновременно является скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют *скоростью света*:

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

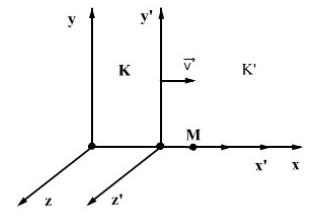
Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействия называется принципом относительности Эйнштейна.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА.

Из принципа относительности Эйнштейна следует, что *время не абсолютно, оно течет по-разному во всех системах отсчета*. Механика, основанная на принципе относительности Эйнштейна, называется **релятивистской**.

Вновь рассмотрим задачу о двух системах отсчета K и K' , где K' движется со скоростью \mathbf{v} относительно другой вдоль оси X . Взаимосвязь координат в *релятивистской* механике будет описываться преобразованиями Лоренца.

$$\text{Преобразование Лоренца: } \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ z = z', & y = y' \end{cases}$$



При скоростях $v \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ИНТЕРВАЛА.

Пространство Минковского – 4-х мерное псевдоевклидово метрическое пространство, объединяющее пространство и время.

Событие – вектор в 4-х мерном пространстве Минковского (ct, x, y, z) .

Интервал – аналог расстояния между двумя событиями в пространстве Минковского, являющийся обобщением евклидового расстояния между двумя точками.

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 - \text{квадрат интервала}$$

Покажем, что квадрат интервала инвариантен относительно инерциальных систем отсчета. Рассмотрим интервал между двумя событиями в системе отсчета K . Чтобы найти интервал в системе K' , нужно записать преобразование Лоренца для координат. Сделаем замену:

$$ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad sh\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} ct' = ctch\psi - xsh\psi \\ x' = xch\psi - ctsh\psi \\ y' = y, \quad z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (s')^2 &= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \\ &= (ctch\psi - xsh\psi)^2 - (xch\psi - ctsh\psi)^2 - y^2 - z^2 = \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \end{aligned}$$

Из этих расчетов и следует инвариантность интервала в пространстве Минковского.

Типы интервалов:

$s_{12}^2 > 0$ – временноподобные интервалы

$s_{12}^2 = 0$ – светоподобные интервалы

$s_{12}^2 < 0$ – пространственноподобные интервалы

3. Законы сохранения энергии и импульса. Упругие и неупругие столкновения.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Работа силы \mathbf{F} по перемещению $d\mathbf{s}$: $dA = \mathbf{F}d\mathbf{s} \Rightarrow A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}d\mathbf{s}$

Поскольку по второму закону Ньютона $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \Rightarrow dA = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} ds = m\mathbf{v}d\mathbf{v}$

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1, \quad K - \text{кинетическая энергия}$$

Классификация сил: консервативные, диссипативные, гироскопические.

1) **Консервативные силы** – силы, работа которых по замкнутой траектории равна нулю. Пример – сила тяготения – $\mathbf{F} = mg$

2) **Диссипативные силы** – силы, при действии которых на механическую систему её полная механическая энергия убывает. Их работа зависит не только от начальной и конечной точек, но и от траектории, соединяющей эти точки. Пример – сила трения, которая направлена против скорости: $\mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{v}$. Поэтому её работа $dA = \mathbf{F}vdt < 0$.

3) **Гироскопические силы** – силы, которые всегда направлены перпендикулярно скорости тела ($\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$), вследствие чего их работа на любой траектории равна нулю. Пример – сила Лоренца: $\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$

Выберем начало отсчета О. **Потенциальной энергией** называется работа консервативных сил, совершаемая при переходе из рассматриваемого положения точки (1) в начало отсчета (О): $U_1 = A_{10}$

Величина $U(r)$ является функцией только положения точки, задаваемого радиус-вектором r , и не зависит от траектории, соединяющей точку (1) с началом отсчёта О.

Связь силы с потенциальной энергией: $\mathbf{F} = -\nabla U$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА.

Закон сохранения энергии при наличии только консервативных сил.

Работа консервативных сил на траектории 1 → 2:

$$A_{12} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow [E_1 = E_2] - \text{закон сохранения энергии}$$

$$E = K + U - \text{полная энергия системы}$$

Закон сохранения энергии при наличии диссипативных сил.

Пусть в системе действуют, наряду с консервативными, также и диссипативные силы. Работа всех сил на траектории 1 → 2 :

$$A_{12} = A_{12}^{\text{конс}} + A_{12}^{\text{дисс}} \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дисс}} \Rightarrow [E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дисс}}] - \text{ЗСЭ}$$

Это значит, что изменение полной энергии равно работе диссипативных сил.

Закон сохранения импульса – в отсутствие внешних сил импульс материальной системы сохраняется: $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \text{const}$

УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ.

Если в результате столкновения образуются те же частицы, что имелись до столкновения, причем внутреннее состояние (в частности, внутренняя энергия) частиц не меняется, то столкновение называется **абсолютно упругим**:

$$a + A \rightarrow a + A$$

Если же меняется внутреннее состояние частиц, образуются новые частицы (которых не было до столкновения) или исчезают исходные частицы, то столкновение называется **неупругим**. В частности, если имеет место слипание частиц, то процесс называется **абсолютно неупругим**

$$a + A \rightarrow C, \quad a + A \rightarrow b + B, \quad a + A \rightarrow b_1 + b_2 + \dots + B_1 + B_2 + \dots$$

4. Уравнение движения материальной точки в релятивистской механике. Импульс и энергия материальной точки.

ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Все законы и выражения, приведенные в данном билете, будут сформулированы для релятивистской механики. Они получены опытным путем при исследовании движения заряженных частиц в ускорителе.

$$\text{Импульс частицы: } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{Энергия частицы: } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Связь энергии-импульса: $\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}$. При $v = 0, E = mc^2$ – **энергия покоя частицы**.

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 = inv \text{ – не зависит от СО}$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \boxed{\text{– Энергия, выраженная через импульс частицы}}$$

Примечание: понятие импульса можно считать первичным, логически неопределяемым. Его свойства специфицируются на основе закона сохранения импульса, который мы считаем фундаментальным законом природы.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ.

В настоящее время известен единственный способ разгонять частицы до релятивистских скоростей — воздействовать на них электромагнитным полем, из-за чего область применимости классической релятивистской механики исчерпывается движением заряженных частиц в не очень сильном электромагнитном поле.

Уравнение движения заряда в электромагнитном поле записывается в виде:

$$\text{ВЗН: } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]}$$

В правой части стоит выражение, равное сумме сил электрического поля, действующего на заряд, и магнитного поля, действующего на движущейся заряд.

5. Закон всемирного тяготения и законы Кеплера. Движение тел в поле тяготения.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ.

В рамках классической механики гравитационное взаимодействие двух любых материальных точек описывается

Законом всемирного тяготения: сила притяжения между двумя материальными точками массы m и M , разделенными расстоянием R , прямо пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\boxed{\mathbf{F} = -G \frac{mM}{R^3} \mathbf{R}}, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{дин} \cdot \text{см}^2}{\text{с}^2} \text{ (СГС)} - \text{гравитационная постоянная}$$

Центральная сила: $\mathbf{F} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

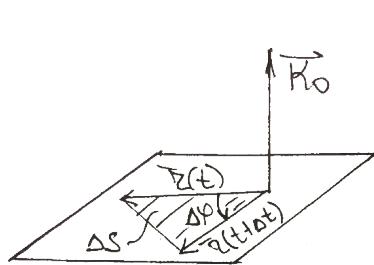
Первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон Кеплера: радиус векторы планет за равные промежутки времени заметают равные площади. (Секторальная скорость планет постоянна.)

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит.

$$\frac{(T_1)^2}{(T_2)^2} = \frac{(R_1)^3}{(R_2)^3}$$

Для простоты приведем доказательства второго и третьего законов Кеплера.



▷ Так как \mathbf{F} центральная сила, $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \Rightarrow \frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = 0$
 $\Rightarrow K_0 = \text{const} \Rightarrow$ движение происходит в плоскости $\perp \mathbf{K}_0$
Момент импульса $K_0 = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{const} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta S \simeq 1/2r^2(t)\Delta\varphi \Rightarrow \dot{S} = 1/2r^2\dot{\varphi} = \text{const}$
Таким образом, секторальная скорость в поле центральной силы постоянна ▷

$$\triangleleft \frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} - \text{I космическая скорость}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} \Rightarrow \boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}} \triangleright$$

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ.

Момент импульса в центральном поле равен $L = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}] \Rightarrow L = mr^2\dot{\varphi}$
 (в предыдущем пункте, дабы избежать разногласий с рисунком, мы обозначали его K).

Постановка задачи: определить движение одного тела m в гравитационном поле другого тела M в условиях отсутствия внешнего взаимодействия.

В гравитационном поле, как и во всяком центральном поле, выполняются законы сохранения энергии и момента импульса. Именно ими и описывается траектория движения в поле тяготения.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = \text{const}, \quad L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

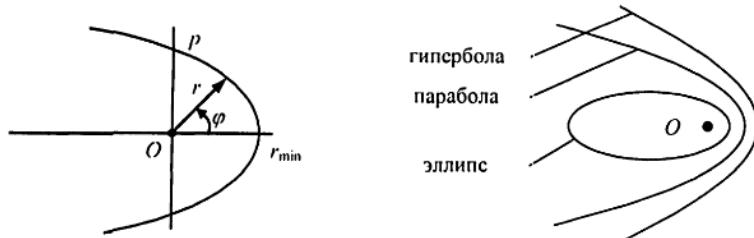
Решение этой системы уравнения является лишь кропотливым набором сухих математических выкладок, которые мы с радостью опустим. Гораздо интереснее заглянуть в ответ и понять его физический смысл:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

где $p = \frac{L^2}{2Mm^2}$ – параметр, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ – эксцентриситет

В общем случае в центральном гравитационном поле возможны три типа траекторий тел, которые показаны на рисунке.

- Эллипс – $E < 0$, $(0 \leq \varepsilon < 1)$
- Парабола – $E = 0$, $(\varepsilon = 1)$:
- Гипербола – $E > 0$, $(\varepsilon > 1)$



$$\begin{cases} E \geq 0 & \text{— движение в неограниченной области — **инфinitное**} \\ E < 0 & \text{— движение в ограниченной области — **финитное**.} \end{cases}$$

6. Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Гироскопы.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ.

Пусть на тело в точке с р-в \mathbf{r} , обладающее импульсом \mathbf{p} , действует сила \mathbf{F} .

$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ – момент импульса тела

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m[\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \mathbf{M} \text{ – момент силы}$$

Уравнение моментов: производная момента импульса равна моменту силы относительно одного и того же начала отсчета.

В центральном поле $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$, а значит $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{const}$

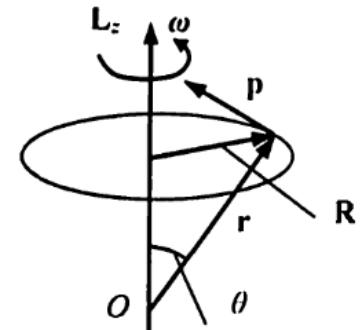
ЗСМИ: если момент силы равен нулю то момент импульса величина постоянная.

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

Твёрдое тело – это такое тело, у которого расстояние между любой парой точек не меняется со временем. Рассмотрим вращение твердого тела относительно оси z . Возьмем произвольную точку тела.

$$(L_i)_z = m_i R_i v_i = m_i \omega R_i^2$$

R_i – расстояние до оси z , v_i – скорость относительно оси z



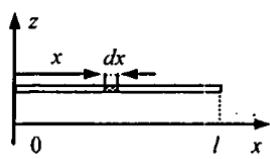
$$L_z = \sum_i (L_i)_z = \sum_i (m_i R_i^2) \omega = I_z \omega$$

Здесь введена величина $I_z = \sum_i (m_i R_i^2)$ – **момент инерции относительно оси z** .

Для непрерывного распределения масс формула момента инерции принимает вид:

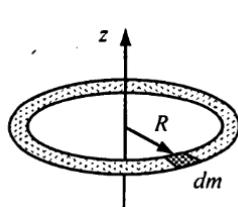
$$I = \int R^2 dm$$

Моменты инерции простейших тел



Однородный тонкий стержень длины l .

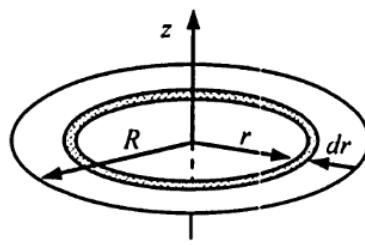
$$dm = \frac{m}{l} dx \Rightarrow I = \int_0^l x^2 dm = \frac{1}{2} ml^2 \text{ – ось через конец,}$$



$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm = \frac{1}{12} ml^2 \text{ – ось через центр}$$

Тонкое кольцо радиуса R .

$$I = \int R^2 dm = mR^2$$



Тонкий сплошной диск радиуса R .

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} dS \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$$

$$I = \int_0^R r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$

Тонкостенная сфера радиуса R и массы m (ось через центр сферы): $I = \frac{2}{3} m R^2$

Шар радиуса R и массы m (ось через центр шара): $I = \frac{2}{5} m R^2$

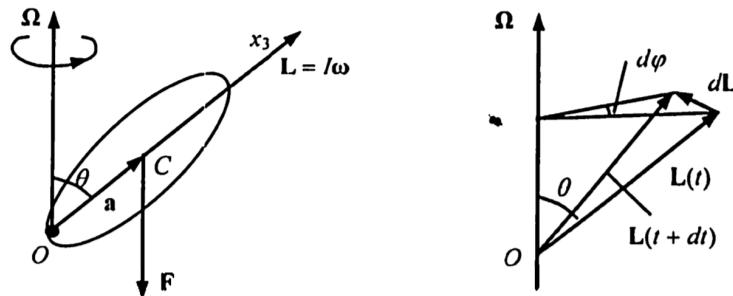
$$I \frac{d\omega}{dt} = M$$

– уравнение вращения твердого тела относительно оси:

ГИРОСКОПЫ.

Определение: Гирокоп – это быстро вращающееся симметричное твёрдое тело, ось вращения которого может менять свое направление.

Рассмотрим движение гирокопа при наличии постоянной внешней силы. Пусть ось вращения гирокопа – это одна из его главных осей. Обозначим её x_3 . Тогда $\vec{L} = I_3 \vec{\omega}$, где I_3 – момент инерции относительно оси вращения.



"Включим" теперь внешнюю силу \vec{F} . Радиус-вектор точки приложения силы обозначим как \vec{a} . Тогда уравнение динамики вращения твёрдого тела имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{a} \times \vec{F}$$

Отсюда следует, что бесконечно малое приращение вектора момента импульса перпендикулярно плоскости \vec{a}, \vec{F} . Поскольку эта плоскость непрерывно поворачивается вместе с векторами \vec{L} и \vec{a} , то при неизменном направлении силы \vec{F} и неизменной точке приложения силы к гирокопу вектор \vec{L} совершает регулярное вращение вокруг вертикальной оси. Такое движение называется *вынужденной прецессией*.

Заметим, что в рассматриваемых условиях оказывается $d\vec{L} \perp \vec{L}$. На основании свойств векторного произведения это позволяет положить:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Введённый здесь вектор $\vec{\Omega}$ есть вектор угловой скорости прецессии. Чтобы найти величину $\vec{\Omega}$, заметим:

$$|d\vec{L}| = 2L_{\perp} \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = L_{\perp} d\varphi$$

Величина $L_{\perp} = L \sin \theta$. Поскольку $d\varphi/dt = \Omega$, то величина $|d\vec{L}/dt|$ оказывается равной:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| &= \Omega L \sin \theta; \quad |\vec{M}| = |\vec{a} \times \vec{F}| = aF \sin \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega L \sin \theta &= aF \sin \theta \Rightarrow \Omega = \frac{aF}{L} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = -\frac{a}{L} \vec{F}} \end{aligned}$$

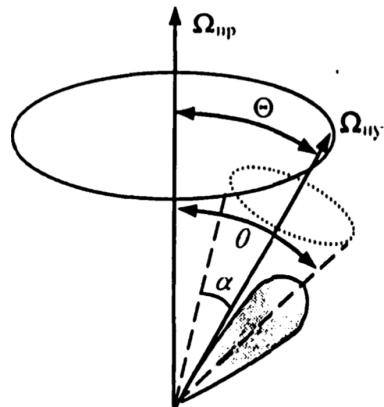
Стоит так же добавить, у обычного волчка точка закрепления не совпадает с центром масс. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I'_x = I_x + ma^2$$

Здесь I_x – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, a – расстояние от точки закрепления до центра масс. Тогда ось волчка прецессирует вокруг направления сохраняющегося момента импульса \vec{L} с угловой скоростью:

$$\vec{\Omega}_{\text{нут}} = \frac{\vec{L}}{I'_x}$$

Ось x перпендикулярна оси вращения волчка. Это движение называется *нутацей*.



7. Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности. Уравнение Бернулли.

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ.

Вязкость – свойство жидкостей сопротивляться перемещению одной части относительно другой.

Идеальная жидкость – жидкость, у которой вязкость пренебрежима мала.

Жидкость несжимаема, если её плотность одинакова во всем объеме и не зависит от времени.

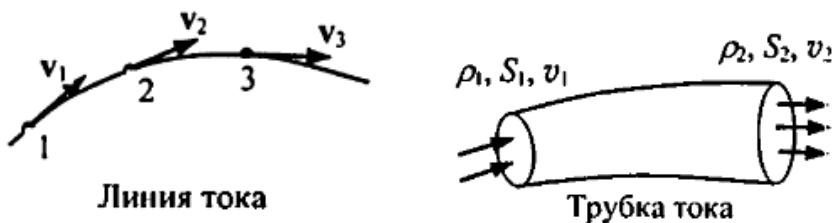
Течение называется **стационарным**, если скорость течения жидкости в каждой её точке не меняется со временем.

Линией тока называется такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением скорости течения жидкости в этой точке.

Различные линии тока не пересекаются, иначе частица жидкости в точке пересечения не имела бы определенного значения и направления скорости и могла бы дальше двигаться по разным траекториям. Тем самым траектория частиц не определялась бы однозначно начальными условиями

Выберем в жидкости произвольный замкнутый контур Γ_0 . Через каждую точку этого контура проходит какая-либо линия тока. Совокупность этих линий ограничивает в пространстве **трубку тока**.

При стационарном течении трубки тока не меняются со временем.



УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

Рассмотрим стационарное течение. Выберем некоторую трубку тока. За время dt через левое сечение в трубку войдет масса жидкости dm_1 а через правое сечение выйдет масса dm_2 . Вследствие стационарности течения количество жидкости в трубке не меняется со временем. Поэтому $dm_1 = dm_2$:

$$dm_1 = \rho_1(v_1 dt S_1), \quad dm_2 = \rho_2(v_2 dt S_2) \Rightarrow [\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2] - \text{уравнение непрерывности}$$

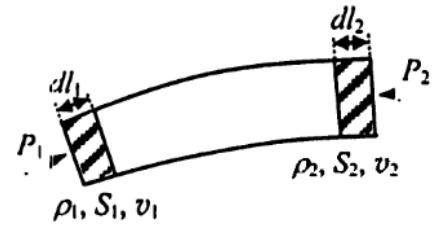
В случае несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2$: $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.

Рассмотрим ту же трубку тока. Пусть в левом сечении трубы действует давление P_1 , а в правом сечении давление P_2 .

ε_1 и ε_2 – энергии единицы массы жидкости соответственно втекающей и вытекающей из трубы (выбираем трубку достаточно малого сечения, чтобы ε была одинаковая для всего сечения). Если потенциальная энергия определяется силой тяжести:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + gh + u, \quad u – \text{внутренняя энергия единицы массы}$$



Над поступившей жидкостью сила давления за время dt проделывает соответственно работу dA_1 , на выходе из трубы против силы давления проделывается работа dA_2 .

$$dA_1 = P_1 S_1 (v_1 dt), \quad dA_2 = P_2 S_2 (v_2 dt), \quad dE_1 = dE_2 \Rightarrow dA_1 + \varepsilon_1 dm_1 = dA_2 + \varepsilon_2 dm_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_1 S_1 v_1 dt + \varepsilon_1 \rho_1 S_1 v_1 dt = P_2 S_2 v_2 dt + \varepsilon_2 \rho_2 S_2 v_2 dt, \quad \text{пользуясь уравнением непрерывности получаем:}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \varepsilon_2$$

– **уравнение Бернулли**

В случае, когда внутренняя энергия жидкости не меняется получаем:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{const}$$

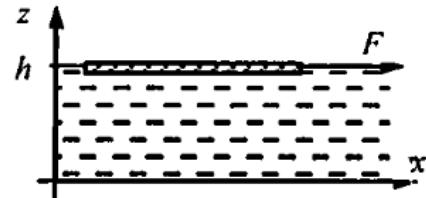
8. Закон вязкого течения жидкости. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса, его физический смысл.

ЗАКОНЫ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

Реальные жидкости не являются идеальными — в них действуют силы трения, называемые **вязкостью**.

Чтобы пластина площади S , покоящаяся на слое жидкости толщиной h и имеющую коэффициент вязкости η начала двигаться со скоростью v ,

$$\text{необходима сила } F = \eta S \frac{v}{h}, \quad [\nu] \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \text{с}^1$$

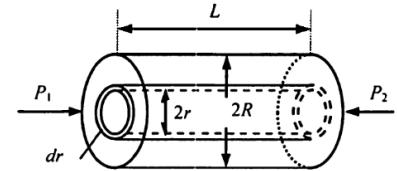


Со стороны жидкости на пластину действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\eta S \frac{dv_x}{dz}$

ФОРМУЛА ПУАЗЕЙЛЯ.

Пусть через длинную трубку радиуса R течет вязкая жидкость. Рассмотрим трубку радиуса r внутри большей. Тогда сила трения, действующая на меньший цилиндр:

$$F_2 = (2\pi r L) \eta \frac{dv}{dz}; \quad \text{Напор: } (P_1 - P_2) \pi r^2 \Rightarrow$$



При стационарном течении жидкости сумма всех сил равна нулю а также в трубе постоянного диаметра скорость жидкости не зависит от координаты вдоль оси X трубы.

$$(2\pi r L) \eta \frac{dv}{dz} = (P_1 - P_2) \pi r^2 \Leftrightarrow dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L} r dr$$

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad - \text{распределение скоростей} \quad v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2), \quad v(R) = 0$$

Найдем полный **расход жидкости** Q , т.е. её массу, протекающую за единицу времени через всё сечение трубы.

$$dQ = \frac{dm}{dt} = \rho v(r) dS = 2\pi r dr \rho v(r) \Rightarrow Q = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} \pi \rho R^4 \quad - \text{формула Пуазеля}$$

ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА.

Ламинарное течение — это упорядоченный режим течения, без перемешивания между слоями жидкости. **Турбулентное течение** — это такой режим течения, когда элементы жидкости совершают нерегулярное, хаотическое движение. Переход от одного режима течения к другому происходит при изменении числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}, \quad l, U \text{ — характеристические длина и скорость}$$

$Re < 1000$ — ламинарное течение, $1000 < Re < 2000$ — неустойчивое течение, $Re > 2000$ — турбулентное течение.

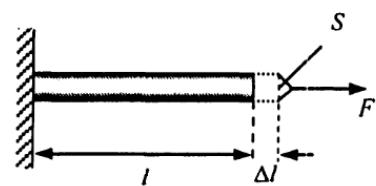
9. Упругие деформации. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Энергия упругой деформации.

УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ.

Деформациями называются изменения объёма или формы тел под действие приложенных сил. **Упругими** называют такие деформации, которые исчезают после прекращения действия сил. **Пластическими** называют деформации, не исчезающие после прекращения действия сил. Минимальная нагрузка, приводящая к разрушению тела, называется **пределом прочности**.

Рассмотрим стержень, который закреплен на одном конце, а к другому концу которого приложена сила F . **Напряжением** называется сила, приложенная на единицу площади:

$$\sigma = F/S$$



Если сила приводит к удлинению стержня, то величина σ называется **натяжением** и обозначается $\sigma = T$, иначе **давлением** $\sigma = -P$.

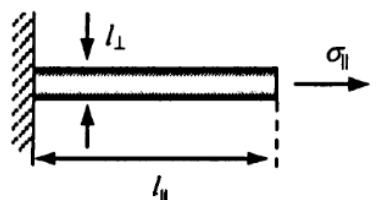
$$\varepsilon = \Delta l/l - \text{деформация}, \varepsilon_{\parallel} = \frac{\Delta l_{\parallel}}{l_{\parallel}} - \text{продольная}, \varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta l_{\perp}}{l_{\perp}} - \text{поперечная}$$

МОДУЛЬ ЮНГА И КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА.

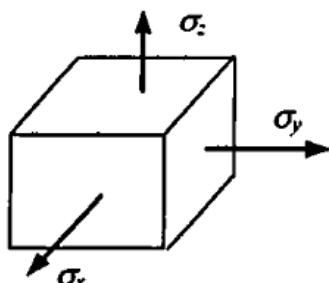
Закон Гука: деформация пропорциональна силам, вызывающим эти деформации. Он выполняется только для малых упругих деформаций $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, E – **модуль Юнга**

$$F = k\Delta l = k\varepsilon l = kl\frac{\sigma}{E} = \sigma S \Rightarrow E = \frac{kl}{S}$$

$$, \mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} - \text{коэффициент Пуассона}$$



$$\text{Уравнение для поперечной деформации: } \varepsilon_{\perp} = -\mu \frac{\sigma_{\parallel}}{E}$$

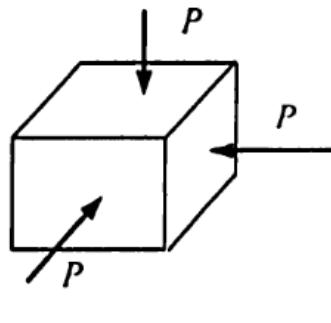


Уравнения трёхосного нагружения.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x))$$

Эти уравнения описывают деформацию под действием трех взаимно перпендикулярных сил. Рассмотрим на примере всестороннего сжатия.

Уравнения всестороннего сжатия.

$$\Delta V = (l_x + \Delta l_x)(l_y + \Delta l_y)(l_z + \Delta l_z) - l_x l_y l_z \approx l_y l_z \Delta l_x + l_x l_z \Delta l_y + l_y l_x \Delta l_z$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{l_x l_y l_z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{3P}{E}(1 - 2\mu) = -\frac{P}{K}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad \text{— модуль всестороннего сжатия}$$

Отсюда вытекает *одно из свойств коэффициента Пуассона*. Если тело несжимаемо, но под действием внешних сил может только менять свою форму, то $\Delta V = 0$. Тогда $\mu = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Для всех тел коэффициент } \mu \text{ заключен в диапазоне: } 0 < \mu \leq \frac{1}{2}.}$$

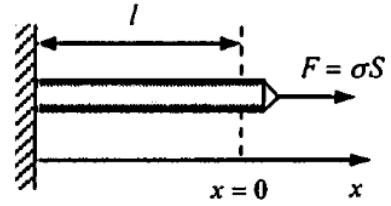
Требование $\mu > 0$ связано с тем, что при растяжении стержня его поперечные размеры уменьшаются.

ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ.

Найдем работу стержня по удлинению от $x = 0$ до $x = \Delta l$.

$$dA = Fdx = \sigma S dx = E S \varepsilon dx = \frac{ES}{l} x dx$$

$$A = \int_{\Delta l}^0 \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{2l} (\Delta l)^2 = \frac{ESl}{2} \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2} V$$



Эта величина равна потенциальной энергии деформации U .

$$u = \frac{U}{V} \Rightarrow \boxed{u = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}} \quad \text{— плотность энергии деформации}$$

При любом трехосном нагружении (работа не зависит от способа деформирования):

$$u = u_x + u_y + u_z = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}$$

Для всестороннего сжатия $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$ плотность энергии деформации:

$$u = -\frac{P}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = -\frac{P}{2} \frac{\Delta V}{V} = \frac{P^2}{2K}$$

10. Уравнение состояния идеального газа, его объяснение на основе молекулярно-кинетической теории. Уравнение неидеального газа Ван-дер-Ваальса.

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Определение: *Идеальным* называется такой газ, у которого взаимодействием молекул между собой можно пренебречь.

Определение: *Макропроцессы* – это процессы, характеризуемые небольшим числом величин (P, V, T и, быть может, еще некоторыми другими).

Определение: *Термодинамическое равновесие* – состояние изолированной системы, в котором макроскопические процессы прекращаются, скорости прямых и обратных реакций сравниваются, давление и температура принимают постоянные по объему системы значения.

Определение: *Уравнением состояния* вещества называется соотношение, связывающее параметры, описывающие состояние термодинамического равновесия вещества.

Используемые константы:

1. Универсальная газовая постоянная: $R = 8,31451 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
2. Число Авогадро (количество молекул в одном моле вещества): $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ молекул
3. Постоянная Больцмана: $k = \frac{R}{N_A} = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$

Уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \nu RT$$

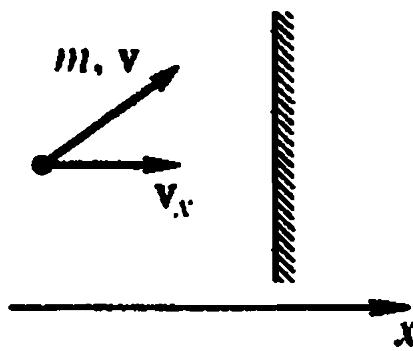
Если m – полная масса, ρ – плотность газа, то уравнение можно представить в виде:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{или} \quad P = \frac{\rho RT}{\mu}$$

ОБЪЯСНЕНИЕ НА ОСНОВЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.

Сопоставление молекулярно-кинетической теории и уравнения состояния идеального газа дает связь температуры и кинетической энергии частиц газа.

Рассмотрим столкновения молекул идеального газа с неподвижной стенкой и выделим группу молекул, имеющих скорость \vec{v} . В единице объема газа число таких молекул обозначим за $n(\vec{v})$. Для одной молекулы x -компонента импульса равна $p_x = mv_x$.



В результате упругого столкновения молекула передает стенке импульс $2p_x$. За время dt до стенки долетят молекулы, удаленные от нее на $v_x dt$. Всего $n(\vec{v})Sv_x dt$ (S – площадь стенки) молекул и общий импульс, передаваемый стенке $2p_x nSv_x dt$. Суммируя по всем группам молекул, получим полный импульс за время dt :

$$\sum_{\vec{v}, v_x > 0} 2p_x nSv_x dt = F_x dt$$

Отсюда следует, что давление равно:

$$P = \frac{F_x}{S} = 2 \sum_{\vec{v}, v_x > 0} n(\vec{v})v_x p_x = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{\vec{v}, v_x} n(\vec{v})v_x p_x = n \overline{v_x p_x} \sum_{\vec{v}} n(\vec{v})$$

Вследствие изотропии (одинаковости физических свойств по всем направлениям) газа $\overline{v_x p_x} = \overline{v_y p_y} = \overline{v_z p_z} = (1/3)\overline{\vec{v} \vec{p}}$. Поэтому

$$P = \frac{1}{3}n \overline{\vec{v} \vec{p}}$$

Для молекул массы m импульс равен $\vec{p} = m\vec{v}$, так что $\vec{v}\vec{p} = 2\varepsilon_{\text{кин}}$. Поэтому можем записать уравнение состояния в другой форме: $P = (2/3)n\bar{\varepsilon}_{\text{кин}}$ или $PV = (2/3)E$, где E – полная кинетическая энергия молекул газа в данном объеме. Сопоставление этого уравнения и уравнения состояния идеального газа в форме $PV = \nu RT$ дает связь температуры и кинетической энергии частиц газа: $E = N\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = (3/2)\nu RT$. Из этого уравнения можем также получить связь средней кинетической энергии молекулы и температуры: $\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = (3/2)kT$.

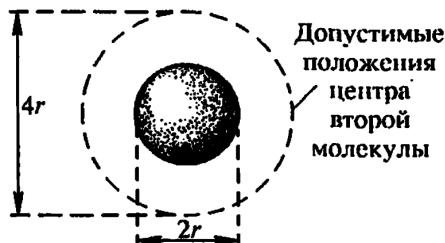
УРАВНЕНИЕ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА.

Если взаимодействие молекул друг с другом достаточно сильное, то свойства вещества могут существенно отличаться от свойств идеального газа. Одним из наиболее известных уравнений состояния неидеального газа является **уравнение Ван-дер-Ваальса**:

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT$$

Вывод: К данному уравнению можно прийти, модифицировав уравнение состояния идеального газа следующим образом:

1) Учтем, что молекулы имеют конечные размеры. Если радиус молекулы равен r , то расстояние между центрами молекул не может быть меньше $2r$. Иными словами, центр молекулы не может попасть в объем $8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$.



Тогда ограничение объема на одну молекулу составит:

$$\frac{1}{2}(8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3) = 4V_0$$

где $V_0 = 4\pi r^3/3$ — объем одной молекулы.

В результате объем, разрешенный для движения молекул, составит

$$V_{\text{доп.}} = V - \nu b,$$

$$b \approx 4 \cdot (\text{объем молекулы в одном моле}) = 4N_A V_0$$

2) Учтем, что молекулы притягиваются друг к другу. Одним из механизмов такого притяжения может быть перераспределение зарядов и образование диполей.



Давление газа определяется столкновениями молекул со стенкой. Сила, действующая на одну молекулу у стенки со стороны газа, пропорциональна плотности числа частиц в газе n . Частота соударений молекул со стенкой также пропорциональна n . То есть давление газа уменьшается на $\Delta P \sim n^2$. Переходя от плотности n к объему V по формуле $n = (\nu N_A)/V$, мы можем записать поправку к давлению $\Delta P = a(\nu/V)^2$. Получаем:

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{a\nu^2}{V^2} \Rightarrow \boxed{\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT}$$

Таким образом: мы получили уравнение состояния для неидеального газа Ван-дер-Ваальса, в котором параметр a учитывает притяжение молекул, а параметр b — отталкивание молекул.

Стоит сказать, что приведенные рассуждения не являются строгими, но полученное в результате уравнение позволяет описать многие свойства реальных газов.

11. Квазистатические процессы. Первое начало термодинамики. Количество теплоты и работа. Внутренняя энергия. Энталпия.

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ.

Для определения квазистатических процессов рассмотрим систему, которая в начальный момент времени находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой (или изолирована). Если изменить параметры внешней среды (или осуществить какое-либо воздействие), то в результате релаксации в этой системе установится новое равновесное состояние. В случае слабого изменения внешних условий (слабого воздействия) начальное и конечное состояния системы мало отличаются.

Осуществляя большое число малых воздействий, можно перевести систему в некоторое конечное состояние, значительно отличающееся от начального. Совокупность всех промежуточных состояний называют *траекторией процесса*.

Определение: Процесс называется *квазистатическим* или *равновесным*, если по ходу этого процесса рассматриваемая система в каждый момент находится вблизи некоторого состояния термодинамического равновесия, отвечающего суммарному результату произведенного на нее воздействия.

Поскольку равновесное состояние системы характеризуется небольшим числом параметров, то описание равновесного процесса сводится к установлению закона изменения тех же параметров. Для равновесного процесса скорость изменения макроскопического параметра x должна удовлетворять условию $\tau|dx/dt| \ll |\Delta x|$, где τ – время релаксации, Δx – характерный масштаб изменения величины x .

РАБОТА, ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛОТЫ.

Работа в квазистатическом процессе.

Работа, совершаемая *над системой* при увеличении ее объема на dV , равна $\delta A^{\leftarrow} = P_{\text{внеш}}(-dV)$, где $P_{\text{внеш}}$ – давление оказываемое внешней средой на систему.

Работа, совершаемая *системой* при увеличении ее объема на dV , равна $\delta A^{\rightarrow} = PdV$, где P – давление в системе. В общем случае $\delta A^{\rightarrow} \neq -\delta A^{\leftarrow}$. Однако в квазистатическом процессе $P_{\text{внеш}} = P$, так что $\delta A^{\rightarrow} = -\delta A^{\leftarrow}$.

В общем случае элементарная работа δA^{\rightarrow} зависит от текущего состояния внешней среды, которое может меняться в ходе процесса. Поэтому работа $\delta A_{1 \rightarrow 2}^{\rightarrow} = \int_{(1)}^{(2)} \delta A^{\rightarrow}$ может зависеть не только от начального и конечного состояний, но и от пути перехода между ними. Иначе говоря, работа *не является функцией состояния*.

Определение: Если при любых изменениях температуры окружающих тел состояние системы внутри оболочки не меняется, то оболочка называется *адиабатической*. При этом предполагается, что значения прочих внешних параметров остаются неизменными.

Внутренняя энергия.

Если система заключена в адиабатическую оболочку, то работа внешних сил не зависит от траектории процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями системы:

$$\delta A_{1 \rightarrow 2}^{\swarrow} = U_2 - U_1$$

Величина U называется *внутренней энергией* и является функцией состояния.

Внутренняя энергия *идеального газа* есть функция только температуры: $U = U(T)$, поскольку она определяется только кинетической энергией молекул (потенциальная энергия взаимодействия молекул такого газа пренебрежимо мала). Для ν молей идеального одноатомного газа имеем:

$$U = \nu N_A \bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = \frac{3}{2} \nu R T$$

Количество теплоты.

Пусть система заключена в жесткую, но теплопроводящую оболочку, так что имеет место чисто тепловой контакт системы с внешней средой, а макроскопическая работа не совершается.

Приращение внутренней энергии в процессе чистого теплообмена называется *количеством теплоты*, полученным системой в этом процессе:

$$Q^{\swarrow} = U_2 - U_1$$

Теплота, отданная системой при чистом теплообмене, равна

$$Q^{\nearrow} = -Q^{\swarrow} = U_1 - U_2$$

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии и в соответствии со сказанным выше записывается в виде:

$$\boxed{\delta Q^{\swarrow} = dU + \delta A^{\nearrow}}$$

Таким образом: Теплота, поступившая в систему, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение работы этой системой.

В случае квазистатического процесса отсюда следует:

$$dU = \delta Q^{\swarrow} - P dV$$

ЭНТАЛЬПИЯ.

Определение: Энталпия – это термодинамическое свойство вещества, которое указывает уровень энергии, сохраненной в его молекулярной структуре.

Это значит, что, хотя вещество может обладать энергией на основании температуры и давления, не всю ее можно преобразовать в теплоту. Часть внутренней энергии всегда остается в веществе и поддерживает его молекулярную структуру. Часть кинетической энергии вещества недоступна, когда его температура приближается к температуре окружающей среды. Следовательно, *энталпия* – это количество энергии, которая доступна для преобразования в теплоту при определенной температуре и давлении:

$$H = U + PV$$

12. Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Энтропия и закон ее возрастания. Энтропия идеального газа.

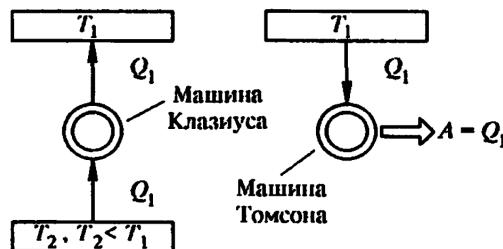
ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.

Определение: *Тепловой машиной* называется устройство, которое преобразует теплоту в работу или обратно и действует строго периодически, то есть после завершения цикла возвращается в исходное состояние.

Приведем две формулировки *второго начала термодинамики*.

Формулировка Клаузиуса: Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого был бы переход тепла от тела более холодного к телу более нагретому (иначе говоря, невозможна машина Клаузиуса).

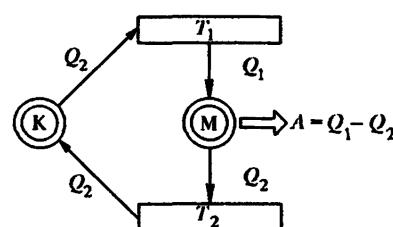
Формулировка Томсона (Кельвина): Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет теплоты, взятой от одного какого-либо тела (иначе говоря, невозможна машина Томсона).



Теорема: Формулировки Клаузиуса и Томсона эквивалентны. Другими словами, если допустить существование какой-либо одной машины (Клаузиуса или Томсона), то должна существовать и другая машина.

Доказательство:

- Пусть существует машина Томсона. Тогда производимую этой машиной работу можно целиком превратить в тепло и передать термостату с более высокой температурой. Получившийся процесс соответствует машине Клаузиуса.
- Пусть существует машина Клаузиуса K. Возьмем обыкновенную тепловую машину M, работающую между резервуарами с температурами T_1 и $T_2 < T_1$ и производящую работу $A = Q_1 - Q_2$. Параллельно ей включим машину Клаузиуса K, чтобы она отбирала всю теплоту Q_2 , переданную резервуару машиной M, и возвращала ее в резервуар T_1 .



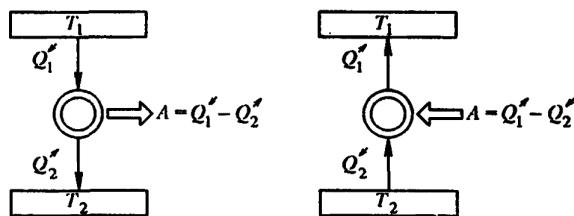
В итоге состояние резервуара T_2 по завершении цикла не меняется, а вся « $K + M$ » производит работу за счет тепла, взятого у одного резервуара. Тем самым реализована машина Томсона.

Теорема доказана.

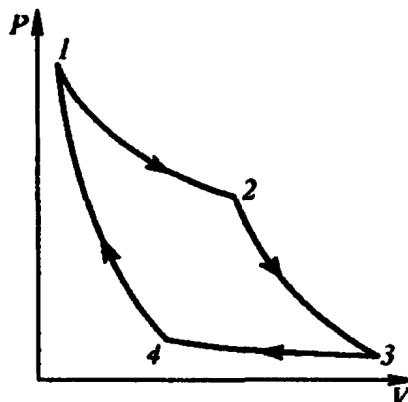
ЦИКЛ КАРНО.

Определение: Адиабатическим называется процесс, происходящий в теплоизолированной системе, когда $Q^{\leftarrow} = 0$.

Определение: Машина Карно – это тепловая машина, работающая между двумя резервуарами с температурами T_1 и T_2 ($T_2 < T_1$) по обратимому циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат. Обратимым называют цикл, который можно провести как в прямом, так и в обратном направлении в замкнутой системе.



Определение: Циклом Карно называют обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, по которому работает машина Карно.



Как и любая тепловая машина, машина Карно имеет свой КПД.

Определение: КПД тепловой машины — отношение работы, произведенной машиной за один цикл, к теплоте, поглощенной в ходе рассматриваемого цикла.

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1$$

КПД машины Карно: Возьмем в качестве рабочего вещества идеальный газ.

1-2) Так как газ идеальный, то на этой изотерме $U_1 = U_2$ и машина получает теплоту:

$$Q_{12}^{\leftarrow} = A_{12}^{\rightarrow} = \int_{(1)}^{(2)} P dV = \nu R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2-3) Для идеального газа изменение внутренней энергии пропорционально изменению температуры. Введем обозначение: $C_V = \frac{dU}{dT}$. Данный процесс адиабатический, значит $\delta Q^{\leftarrow} = dU + PdV = 0$. Так как $C_V = const$, то:

$$C_V dT + \frac{\nu R T}{V} dV = 0 \Rightarrow T V^{\gamma-1} = const, \text{ где } \gamma = 1 + \frac{\nu R}{C_V}$$

Таким образом, $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow (V_3/V_2)^{\gamma-1} = T_1/T_2$.

3-4) На этой изотерме машина отдает теплоту:

$$Q_{34}^{\rightarrow} = -Q_{34}^{\leftarrow} = -A_{34}^{\rightarrow} = -R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

4-1) Аналогично (2-3): $T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow (V_4/V_1)^{\gamma-1} = T_1/T_2$.

В итоге: $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$, так что $Q_{34}^{\rightarrow} = R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$. То есть КПД равен:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{34}^{\rightarrow}}{Q_{12}^{\leftarrow}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

ЭНТРОПИЯ И ЗАКОН ЕЕ ВОЗРАСТАНИЯ.

В 1850 г. Клаузиус, используя теорему Карно о максимальном КПД идеального цикла (не может превышать КПД машины Карно), получил неравенство (*неравенство Клаузиуса*). Для кругового процесса:

$$\oint \frac{\delta Q^{\leftarrow}}{T} \leq 0$$

Если процесс обратимый, то неравенство Клаузиуса переходит в равенство.

Энтропия.

Рассмотрим произвольный обратимый круговой процесс, проходящий через точки 1 и 2: $L = L_{1 \rightarrow 2}^{(1)} + L_{2 \rightarrow 1}^{(2)}$. Тогда из равенства Клаузиуса:

$$0 = \oint_L \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{L_{2 \rightarrow 1}^{(2)}} \frac{\delta Q}{T} \text{ или } \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(2)}} \frac{\delta Q}{T}$$

Ввиду произвольности траекторий $L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}$ и $L_{1 \rightarrow 2}^{(2)}$ интеграл в отсутствие необратимых процессов не зависит от пути, соединяющего точки 1 и 2. Это значит, что

$$\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T} = S_2 - S_1$$

Для бесконечно малого участка траектории имеем:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Величина S является функцией состояния и называется *энтропией*. Она определена с точностью до произвольной постоянной.

Закон возрастания энтропии.

Рассмотрим круговой процесс включающий обратимый ($L_{1 \rightarrow 2}^{(2)}$) и необратимый ($L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}$) участки. Применим неравенство Клаузиуса:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{L_{2 \rightarrow 1}^{(2)}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} + (S_1 - S_2) \leq 0$$

Отсюда вытекает неравенство:

$$S_2 - S_1 \geq \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T}$$

Следствие: Рассмотрим замкнутую систему. Тогда $\delta Q = 0$ и из последнего неравенства вытекает, что $\Delta S \geq 0$: энтропия замкнутой системы не убывает.

В состоянии термодинамического равновесия энтропия максимальна, то есть $\frac{dS}{dt} = 0$.

ЭНТРОПИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Рассмотрим бесконечно малый обратимый процесс. С учетом уравнения состояния идеального газа имеем:

$$\delta Q = TdS = dU + PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}$$

Величину C_V мы взяли для одного моля газа. Отсюда, так как для идеального газа $C_V = const$, следует:

$$S = S_0 + \nu C_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \nu R \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

13. Термодинамические потенциалы. Условия равновесия систем.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ.

Определение: Термодинамические потенциалы – это функции определенных наборов термодинамических параметров, позволяющие находить все термодинамические характеристики системы как функции этих параметров.

Наиболее часто используемые термодинамические потенциалы приведены в таблице:

Внутренняя энергия	$U = U(S, V)$	$dU = T dS - P dV$	$T = (\partial U / \partial S)_V$ $P = -(\partial U / \partial V)_S$
Энталпия (тепловая функция)	$H = U + PV$ $H = H(S, P)$	$dH = T dS + V dP$	$T = (\partial H / \partial S)_P$ $V = (\partial H / \partial P)_S$
Свободная энергия Гельмгольца	$F = U - TS$ $F = F(T, V)$	$dF = -S dT - P dV$	$S = -(\partial F / \partial T)_V$ $P = -(\partial F / \partial V)_T$
Термодина- мический потенциал Гиббса	$\Phi = U + PV - TS$ $\Phi = \Phi(T, P)$	$d\Phi = -S dT + V dP$	$S = -(\partial \Phi / \partial T)_P$ $V = (\partial \Phi / \partial P)_T$

Замечание: Термодинамический потенциал Гиббса еще называют *свободной энталпиеей*.

Некоторые термодинамические потенциалы допускают интерпретацию, указывающую на принципиальную возможность их измерения:

- изменение *внутренней энергии* равно работе, совершенной над системой в адиабатическом процессе, или теплоте, полученной системой в изохорном процессе
- изменение *энталпии* равно теплоте, полученной системой в изобарическом процессе
- изменение *свободной энергии* равно работе, совершенной над системой в изотермическом процессе

Рассматриваемые в этих формулировках процессы предполагаются *обратимыми*.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ.

Мы уже говорили о понятии равновесия системы. Рассмотрим теперь состояние *устойчивого равновесия*.

Определение: Состояние *устойчивого равновесия* – это состояние системы, характерное тем, что если каким-либо внешним воздействием вывести из него рассматриваемую систему, а затем снять это внешнее воздействие, то система сама возвратится в исходное состояние равновесия.

Условие равновесия для изолированной системы было приведено в прошлом билете, где обсуждался закон возрастания энтропии.

Наибольший интерес представляют четыре типа условий взаимодействия неизолированной системы, стремящейся к равновесию, с окружающей средой:

- 1) Объем системы сохраняется постоянным, но система может обмениваться с окружающей средой теплотой, причем так, чтобы энтропия системы оставалась постоянной: $V = \text{const}$, $S = \text{const}$.
- 2) Система может обмениваться с окружающей средой и теплотой, и механической работой, но с таким условием, чтобы давление и энтропия системы оставались постоянными: $P = \text{const}$, $S = \text{const}$.
- 3) Объем системы сохраняется постоянным, но система может обмениваться с окружающей средой теплотой, причем так, чтобы температура системы оставалась постоянной: $V = \text{const}$, $T = \text{const}$.
- 4) Система может обмениваться с окружающей средой и теплотой, и механической работой, но с таким условием, чтобы давление и температура в системе оставались постоянными: $P = \text{const}$, $T = \text{const}$.

Найдем критерии равновесия для каждого из этих четырех возможных случаев.

1. $V = \text{const}$, $S = \text{const} \Rightarrow dV = 0$, $dS = 0$. Из неравенства Клаузиуса и первого начала термодинамики получаем: $dU \leq TdS - PdV$. Получаем, что критерием равновесия данной системы является условие $dU \leq 0$. Иначе говоря, с приближением к состоянию равновесия внутренняя энергия системы убывает, достигая минимума в состоянии равновесия. Таким образом, в состоянии равновесия:

$$U = U_{\min}, \quad dU = 0, \quad d^2U > 0$$

2. $P = \text{const}$, $S = \text{const} \Rightarrow dP = 0$, $dS = 0$. Так как $H = U + PV$, то $dH = dU + PdV + VdP$. Отсюда получаем, что $dH \leq TdS + VdP$. Следовательно, критерием равновесия данной системы является условие $dH \leq 0$. Иначе говоря, с приближением к состоянию равновесия энталпия системы убывает, достигая минимума в состоянии равновесия. Таким образом, в состоянии равновесия:

$$H = H_{\min}, \quad dH = 0, \quad d^2H > 0$$

3. $V = const, T = const \Rightarrow dV = 0, dT = 0. TdS = d(TS) - SdT$, значит можем записать: $dU - d(TS) = d(U - TS) = dF \leq -SdT - PdV$. Отсюда следует, что критерием равновесия данной системы является условие $dF \leq 0$. То есть с приближением к состоянию равновесия свободная энергия системы убывает, достигая минимума в состоянии равновесия. Таким образом, в состоянии равновесия:

$$F = F_{\min}, \quad dF = 0, \quad d^2F > 0$$

4. $P = const, T = const \Rightarrow dP = 0, dT = 0$. Из уравнений $dU - d(TS) \leq -SdT - PdV$ и $dH = dU + PdV + VdP$ получаем, что $dH - d(TS) = d(H - TS) = d\Phi \leq -SdT + VdP$. Отсюда следует, что критерием равновесия данной системы является условие $d\Phi \leq 0$. Таким образом, в состоянии равновесия:

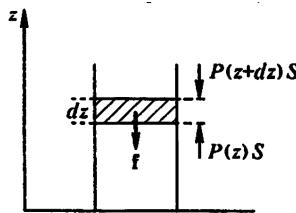
$$\Phi = \Phi_{\min}, \quad d\Phi = 0, \quad d^2\Phi > 0$$

14. Распределения Максвелла и Больцмана.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА.

Распределение Больцмана определяет распределение частиц в силовом поле в условиях теплового равновесия. Выведем его.

Пусть \vec{f} – объемная сила в расчете на одну частицу. Выделим в газе элемент объема толщиной dz и площадью основания S .



В этом элементе находится $dN = nSdz$ частиц, где n – объемная плотность числа частиц. Условие механического равновесия слоя имеет вид:

$$f_z dN + P(z)dS - P(z+dz)S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z n$$

Пусть сила \vec{f} – потенциальная, $\vec{f} = -\text{grad } u(\vec{r})$, $f_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$. Тогда для идеального газа ($P = nkT$) при $T = \text{const}$ следует:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z} \frac{P}{kT} \Rightarrow \frac{\partial(\ln P)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{kT} \right) \Rightarrow P = P_0 \exp \left(-\frac{u}{kT} \right)$$

Замечание: Для частного случая однородного поля тяжести $\vec{f} = m\vec{g}$ потенциальная энергия равна $u = -m\vec{g}\vec{r} = mgz$. Тогда:

$$P = P_0 \exp \left(-\frac{mgz}{kT} \right)$$

Это соотношение называется *барометрической формулой*.

Поскольку $P = nkT$, то распределение плотности числа частиц n идеального газа в потенциальном поле имеет вид:

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{u}{kT} \right)$$

Это распределение дает средние значения плотности, поскольку состояние равновесия динамическое и есть флуктуации в какие-то моменты времени.

Для числа частиц $dN = ndV$, находящихся в элементе объема dV , следует:

$$dN = n_0 \exp \left(-\frac{u}{kT} \right) dV$$

Последние два соотношения называются **распределением Больцмана**.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА.

Распределение Максвелла определяет распределение молекул идеального газа по скоростям. Выведем его.

Предположим, что газ в заданном объеме находится в состоянии равновесия, причем движение отдельных его частиц имеет совершенно хаотический характер. Число молекул в единице объема, имеющих скорости в диапазоне $v_x \div v_x + dv_x, v_y \div v_y + dv_y, v_z \div v_z + dv_z$, то есть в элементе объема пространства скоростей $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, равно $dn_{\vec{v}} = n\varphi(\vec{v})d^3v$.

Здесь n – полное число частиц в единице объема. В соответствии с тем, что движение отдельных его частиц имеет совершенно хаотический характер, все направления скорости равновероятны. Поэтому $\varphi(\vec{v}) = f(v)$, где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

В связи с изотропией газа, мы можем представить распределения вероятностей отдельных компонент скоростей в одном и том же виде. Представим их в виде:

$$dW(v_x) = \varphi_1(v_x)dv_x, \quad dW(v_y) = \varphi_1(v_y)dv_y, \quad dW(v_z) = \varphi_1(v_z)dv_z$$

Предполагая, что компоненты v_x, v_y, v_z – независимые случайные величины, запишем вероятность некоторого значения вектора скорости \vec{v} :

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \varphi_1(v_x)\varphi_1(v_y)\varphi_1(v_z)dv_x dv_y dv_z$$

С другой стороны:

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \frac{dn_{\vec{v}}}{n} = f(v)dv_x dv_y dv_z$$

Таким образом: $f(v) = \varphi_1(v_x)\varphi_1(v_y)\varphi_1(v_z)$ или $\ln f(v) = \ln \varphi_1(v_x) + \ln \varphi_1(v_y) + \ln \varphi_1(v_z)$. Продифференцируем это уравнение по переменной v_x :

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'_1(v_x)}{\varphi_1(v_x)}$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v_x}{v}$, то это равенство можно записать в виде:

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_x} \frac{\varphi'_1(v_x)}{\varphi_1(v_x)}$$

Заметим, что правая часть полученного равенства зависит только от одной компоненты скорости, в то время как левая зависит от всех компонент. Это значит, что обе стороны равенства должны быть постоянными. Введем обозначения:

$$\frac{1}{v_x} \frac{\varphi'_1(v_x)}{\varphi_1(v_x)} = -2\alpha \Rightarrow \varphi_1(v_x) = A \exp(-\alpha v_x^2)$$

Аналогично находим:

$$\varphi_1(v_y) = A \exp(-\alpha v_y^2), \quad \varphi_1(v_z) = A \exp(-\alpha v_z^2), \quad f(v) = \varphi_1(v_x)\varphi_1(v_y)\varphi_1(v_z) = A^3 \exp(-\alpha v^2)$$

В результате для $dn_{\vec{v}}$ получаем выражение:

$$dn_{\vec{v}} = nA^3 \exp(-\alpha v^2) d^3v$$

Константу A определим из нормировки: $\int dn_{\vec{v}} = n \int f(v) d^3v = n$, откуда $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

Осталось разобраться с параметром α . Для этого найдем среднюю кинетическую энергию молекул:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} dn_{\vec{v}} = \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} d^3v = \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 dv = \frac{3m}{4\alpha}$$

Эта величина должна быть равна $\frac{3}{2}kT$, откуда находим, что $\alpha = \frac{m}{2kT}$.

Итак: В однородном по пространству идеальном газе со средней плотностью n в равновесном состоянии число молекул, обладающих скоростями в интервале

$$v_x \div v_x + dv_x, v_y \div v_y + dv_y, v_z \div v_z + dv_z$$

определяется **распределением Максвелла**:

$$dn_{\vec{v}} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) d^3v$$

15. Теплоемкость. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Зависимость теплоемкости газов от температуры.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ.

Определение: Теплоемкостью тела называется отношение бесконечно малого количества теплоты δQ , полученного телом, к приращению его температуры dT :

$$C = \frac{\delta Q^\leftarrow}{dT}$$

В частности, широко используются теплоемкости при постоянном объеме и давлении:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q^\leftarrow}{dT} \right)_V, \quad C_P = \left(\frac{\delta Q^\leftarrow}{dT} \right)_P$$

Напомним, что мы уже сталкивались с теплоемкостью C_V , но она имела другой вид. Получим новые выражения для теплоемкостей при постоянном объеме и давлении:

$$\delta Q = CdT = dU + PdV$$

При $V = const$, $dV = 0$ следует: $\delta Q|_V = C_V dT = dU$. Таким образом:

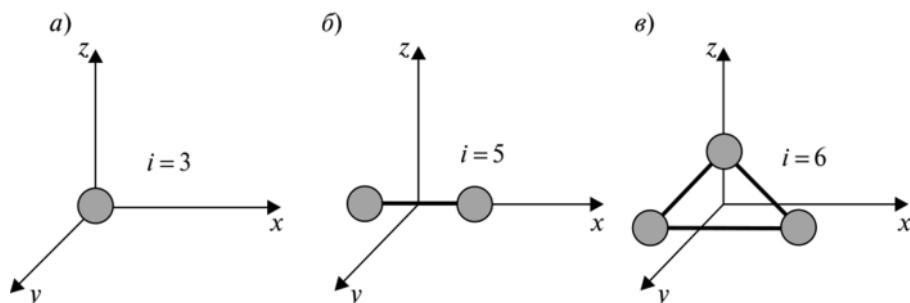
$$C_V = \left(\frac{\delta U}{dT} \right)_V$$

При $P = const$ следует: $\delta Q|_P = C_P dT = dU + PdV = d(U + PV) = dH$. Таким образом:

$$C_P = \left(\frac{\delta H}{dT} \right)_P$$

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ.

Напомним, что числом степеней свободы i называется число независимых переменных, определяющих положение тела в пространстве. Положение одноатомной молекулы, как и материальной точки, задается тремя координатами, поэтому у нее три степени свободы.



Многоатомная молекула может еще и вращаться. Например, у двухатомных молекул вращательное движение можно разложить на два независимых вращения, а любое вращение можно разложить на три вращательных движения вокруг взаимно перпендикулярных осей. Но для двухатомной молекулы вращение вокруг ее собственной оси не изменит ее положение в пространстве, а момент инерции относительно этой оси равен нулю. То есть у двухатомных молекул пять степеней свободы, а у трехатомных – шесть степеней свободы.

Итак, если частица идеального газа простая, то она имеет лишь три степени свободы поступательного движения. Ее энергия равна: $E = \frac{3}{2}kT$.

Если же частица идеального газа сложная, то она обладает большим числом степеней свободы и, следовательно, большей энергией. Например, если сложная частица состоит из двух точечных частиц, то имеются две возможности. Если две частицы между собой жестко связаны и ведут себя подобно твердой гантели, то сложная частица имеет пять степеней свободы: три поступательные и две вращательные. В этом случае энергия частицы равна $E = \frac{5}{2}kT$.

Если же наряду с этим связь между частицами не жесткая и они могут совершать колебательное движение вдоль соединяющей их линии, то добавляются кинетическая энергия $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}kT$ и потенциальная энергия $E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}kT$ колебаний, то есть еще две степени свободы. Всего при этом на одну сложную частицу приходится энергия:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}} = \frac{7}{2}kT$$

Больцман доказал, что средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы, равна $\frac{1}{2}kT$.

То есть, если частица имеет i степеней свободы, то ее энергия равна:

$$E = \frac{i}{2}kT$$

Это выражение называется **теоремой о равномерном распределении средней энергии по степеням свободы**.

Замечание: В заданном постоянном объеме теплоемкость газа в расчете на одну молекулу, соответствующая данной энергии равна:

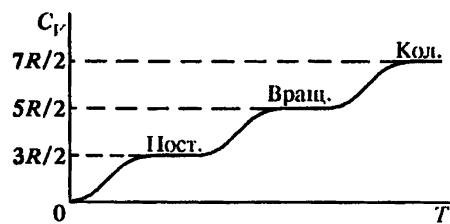
$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{i}{2}k$$

ЗАВИСИМОСТЬ ТЕПЛОЕМКОСТИ ГАЗОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ.

Мы уже выяснили, что в соответствии с законами классической механики на каждую степень свободы молекулы приходится теплоемкость $R/2$ (в расчете на один моль вещества). В частности, для газа, состоящего из двухатомных молекул, теплоемкость складывается из поступательной, вращательной и колебательной частей и равна:

$$C_V = \underbrace{\frac{3}{2}R}_{\text{пост}} + \underbrace{\frac{2}{2}R}_{\text{вр}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\right)}_{\text{кол.}} = \frac{7}{2}R$$

Это значит, что теплоемкость должна быть постоянной. Вместе с тем опыт говорит, что теплоемкость зависит от температуры:



То есть, при понижении температуры "замораживаются" сначала колебательные степени свободы, а затем и вращательные степени свободы. Объясним это поведение теплоемкости с помощью квантовой механики.

Объяснение: Двухатомную молекулу при не слишком высоких энергиях можно рассматривать как одномерный гармонический осциллятор. Согласно законам квантовой механики энергия гармонического осциллятора с классической частотой ω может принимать только дискретный набор значений:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

Воспользуемся распределением состояний макроскопической термодинамической системы частиц Гиббса. В соответствии с ним вероятность того, что молекула обладает энергией ε_n равна:

$$W_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

Статистическая сумма Z находится следующим образом:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{\exp(-\hbar\omega/2kT)}{1 - \exp(-\hbar\omega/kT)}$$

Зная величину Z , можно найти среднюю энергию молекулы:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n W_n = -\frac{\partial \ln Z}{\partial(1/kT)} = \frac{1}{2} \cdot \hbar\omega \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

Соответственно энергия 1 моля рассматриваемых молекул составит $E = N_A \bar{\varepsilon}$ и для молярной теплоемкости получаем:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = R \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\hbar\omega/2kT)}$$

Таким образом: Теплоемкость убывает до нуля при уменьшении температуры. Причиной является дискретность уровней гармонического осциллятора.

16. Фазовые переходы. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний.

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ.

Определение: *Фаза* – это физически однородная часть системы, отличающаяся своими физическими свойствами от других частей и отделенная от них четко выраженной границей.

Определение: *Фазовым переходом* называется переход вещества из одной фазы в другую при изменении внешних условий (температуры, давления, электрического и магнитного полей), при подводе или отводе тепла и так далее.

Определение: *Экстенсивными* называют величины, пропорциональные объему подсистемы. Величины, не зависящие от объема выделенной подсистемы, называются *интенсивными*.

Определение: *Химический потенциал* μ – это величина, определяющая изменение энергии системы при добавлении одной частицы вещества:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN, \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}$$

При наличии в системе частиц различного сорта вводятся свои химические потенциалы для каждого из них. Например, в случае n различных сортов частиц дифференциал внутренней энергии равен:

$$dU = TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$$

Интенсивные величины не зависят от числа частиц в системе, а экстенсивные пропорциональны этому числу. В частности, это означает, что

$$\Phi = \Phi(T, P, N) = Nf(T, P) \Rightarrow \mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{P,T} = \frac{\Phi}{N}$$

Таким образом: Химический потенциал $\mu = \mu(P, T)$ есть термодинамический потенциал в расчете на одну частицу. Поскольку $d\Phi = -SdT + VdP + \mu dN$ и $\Phi = \mu N$, то

$$d\mu = -sdT + vdP$$

где $s = S/N$ и $v = V/N$ – энтропия и объем в расчете на одну частицу. Химический потенциал μ – интенсивная величина.

Условия равновесия фаз.

В состоянии равновесия во всем веществе выполняются следующие условия:

- $P = \text{const}$ – условие механического равновесия
- $T = \text{const}$ – условие теплового равновесия
- $\mu = \text{const}$ – условие равновесия по отношению к переходу частиц между различными фазами.

Первые два условия очевидны. Обоснуем последнее.

Обоснование: Рассмотрим двухфазную систему, помещенную в жесткую адиабатическую оболочку.



Проведем в системе некоторый бесконечно малый процесс, в ходе которого фазы находятся в тепловом и механическом равновесии. Тогда изменения внутренней энергии фаз 1 и 2 будут равны:

$$dU_1 = TdS_1 - PdV_1 + \mu_1 dN_1, \quad dU_2 = TdS_2 - PdV_2 + \mu_2 dN_2$$

Сложим почленно, введем полную энтропию системы $S = S_1 + S_2$. Так как система изолирована, то ее энергия и объем сохраняются, число молекул вещества не меняется, то есть $dU_1 = -dU_2$, $dV_1 = -dV_2$, $dN_1 = -dN_2$. Следовательно, изменение полной энтропии системы в результате процесса определится из соотношения:

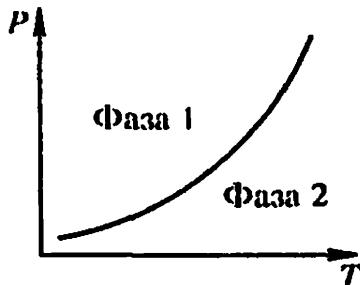
$$TdS = (\mu_1 - \mu_2)dN_2$$

В состоянии термодинамического равновесия энтропия имеет максимум, то есть $dS = 0$ и из последнего равенства следует:

$$\boxed{\mu_1 = \mu_2}$$

УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА-КЛАУЗИУСА.

Мы выяснили, что состояния равновесия двух фаз выполняется $\mu_1(P,T) = \mu_2(P,T)$. Отсюда следует, что P есть некоторая функция от T . То есть, фазы могут существовать, если только давление и температура в системе лежат на кривой фазового равновесия:



Найдем дифференциальное уравнение кривой фазового равновесия. При изменении T и P выполняются равенства:

$$d\mu_1 = -s_1dT + v_1dP, \quad d\mu_2 = -s_2dT + v_2dP$$

Из равенства этих химических потенциалов следует:

$$(s_2 - s_1)dT = (v_2 - v_1)dP \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

Введем обозначение $q_{12} = T(s_2 - s_1)$. Эта величина называется *теплотой фазового перехода* $1 \rightarrow 2$ (в расчете на одну частицу) и имеет смысл энергозатрат на осуществление перехода. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

Это соотношение называется **уравнением Клапейрона-Клаузиуса**. Оно имеет смысл дифференциального соотношения температуры и давления на кривой фазового равновесия.

ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЙ.

Определение: Плоскость (P,T) на которой нанесены различные кривые фазового равновесия, называется *фазовой диаграммой* или *диаграммой состояния*.

При выводе уравнения Клапейрона-Клаузиуса мы уже рассмотрели одну фазовую диаграмму. Приведем еще несколько примеров:

Фазовое равновесие «жидкость–пар».

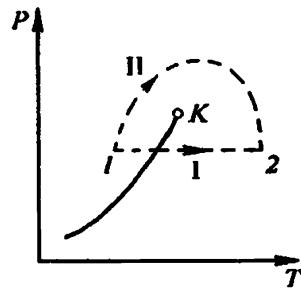
Пусть фаза 1 – жидкость, а фаза 2 – пар, так что $v_2 \gg v_1$. Примем, что $q_{12} = \text{const} \equiv q$.

Для фазы 2 применим уравнение состояния идеального газа $Pv_2 = kT$. Тогда из уравнения Клапейрона-Клаузиуса следует:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{kT^2} P$$

Решая это уравнение, находим:

$$P = P_0 \exp \left(\frac{q}{kT_0} - \frac{q}{kT} \right), \quad P(T_0) = P_0$$

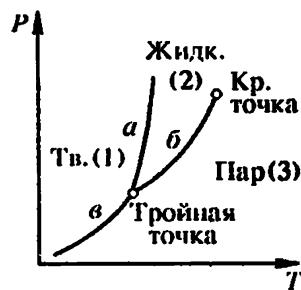


Кривая фазового равновесия может оборваться при высоких температурах, где исчезает различие между фазами. Точка, в которой это происходит, называется *критической точкой*. Критическая точка обязательно имеется на кривой равновесия системы «жидкость-пар», что мы и наблюдаем.

Фазовое равновесие «твердое тело–жидкость–пар».

Рассмотрим трех фазную систему. Для равновесия необходимо:

- $\mu_1(P,T) = \mu_2(P,T)$ – для контакта «твердая фаза–жидкость». Это условие определяет кривую плавления.
- $\mu_2(P,T) = \mu_3(P,T)$ – для контакта «жидкость–пар». Это условие определяет кривую испарения.
- $\mu_1(P,T) = \mu_3(P,T)$ – для контакта «пар–твердая фаза». Это условие определяет кривую возгонки (сублимации).



Из трех выписанных уравнений независимыми являются только два, тогда как третье вытекает из них. Это значит, что точка пересечения двух кривых (а) и (б) принадлежит также и третьей кривой (в). Таким образом, все три кривые, задаваемые этими уравнениями, могут одновременно пересекаться лишь в изолированной точке, которая называется *тройной точкой*.

17. Явления переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение стационарной теплопроводности.

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА.

Диффузия.

Определение: *Диффузия* – неравновесный процесс пространственного перераспределения компонент смеси относительно друг друга, обусловленный случайным (тепловым) движением молекул.

Рассмотри этот процесс подробнее. Ограничимся случаем двухкомпонентных смесей. Пусть имеется смесь с плотностью $n = n_1 + n_2$, где n_i – плотности компонентов. Концентрации компонентов определяются как:

$$c_1 = \frac{n_1}{n}, \quad c_2 = \frac{n_2}{n}, \quad c_1 + c_2 = 1$$

Пусть средняя скорость течения газа $\vec{u} = \frac{1}{n} \sum_i \vec{v}_i = 0$, а диффузия осуществляется только вдоль оси x . Тогда плотности потоков компонентов смеси $\vec{j} = n\vec{u}$ даются *законом Фика*:

$$j_1 = -Dn \frac{dc_1}{dx}, \quad j_2 = -Dn \frac{dc_2}{dx} \Rightarrow j_1 + j_2 = 0$$

Это равенство означает, что диффузия сама по себе не меняет плотности среды, но приводит к изменению лишь относительных концентраций компонент.

Величина D называется *коэффициентом диффузии*.

Если $n = n_1 + n_2 = const$, то формулы закона Фика принимают более простой вид:

$$j_1 = -D \frac{dn_1}{dx}, \quad j_2 = -D \frac{dn_2}{dx}$$

Если скорость течения газа ненулевая, то добавляются слагаемые, учитывающие течение газа как целого:

$$j_1 = -Dn \frac{dc_1}{dx} + nc_1 u, \quad j_2 = -Dn \frac{dc_2}{dx} + nc_2 u, \quad j = j_1 + j_2 = nu$$

Для трехмерного случая:

$$\vec{j}_1 = -Dn \operatorname{grad} c_1 + nc_1 \vec{u}, \quad \vec{j}_2 = -Dn \operatorname{grad} c_2 + nc_2 \vec{u} \Rightarrow \vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = n\vec{u}$$

Теплопроводность.

Определение: *Теплопроводность* — это один из видов переноса тепла от более нагретых частей вещества к менее нагретым.

Теплопроводность осуществляется путем непосредственной передачи энергии от частиц с большей энергией к частицам с меньшей энергией и приводит к выравниванию температуры во всем веществе. Теплопроводность — неравновесный процесс. Рассмотрим его подробнее.

Для одномерного переноса тепла плотность потока тепла дается *законом Фурье*:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

Величина q называется *плотностью потока тепла* и имеет смысл количества тепловой энергии, пересекающей единичную площадку за единицу времени. Величина κ называется *коэффициентом теплопроводности*. Он является физическим параметром вещества и характеризует его способность проводить тепло.

В трехмерном случае плотность потока тепла — это вектор:

$$\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} T$$

Следует обратить внимание на то, что тепловой поток направлен в сторону убывания температуры, то есть обеспечивает перенос тепла от более нагретых областей вещества к менее нагретым.

Вязкость.

Определение: *Вязкость* — свойство текучих тел оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

Механизм внутреннего трения заключается в том, что хаотически движущиеся частицы переносят импульс из одного слоя в другой, что приводит к выравниванию скоростей. Рассмотрим этот процесс подробнее:

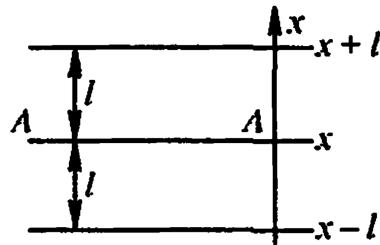
Сила вязкого трения, действующая по площади S на слой жидкости (газа), параллельный скорости течения вдоль одной оси $\vec{u}(x)$, со стороны нижележащего слоя дается *законом Ньютона*:

$$F_z = -\eta S \frac{du}{dx}$$

Очевидно, что сила действует перпендикулярно скорости. Величина η называется *коэффициентом вязкости*. Он зависит от природы вещества и численно равен количеству движения, которое переносится в единицу времени через площадку единичной площади при градиенте скорости, равном единице, в направлении, перпендикулярном площадке.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ.

Мы уже коснулись понятий коэффициентов переноса для диффузии, теплопроводности и вязкости. Теперь разберемся с ними подробнее и попытаемся их оценить. Для этого примем, что вдоль каждой из осей координат (x, y, z) движется по $1/3$ всех молекул, $1/6$ в положительном и $1/6$ – в отрицательном направлениях. Рассмотрим перенос молекул вдоль оси x .



Число молекул, проходящих вверх и вниз за время свободного пробега τ через единицу площади с координатой x , равно:

$$N^{(\uparrow)} = \frac{1}{6}n(x - l)\vec{v}\tau, \quad N^{(\downarrow)} = \frac{1}{6}n(x + l)\vec{v}\tau$$

Коэффициент диффузии.

По определению диффузионного потока:

$$j = \frac{N^{(\uparrow)} - N^{(\downarrow)}}{\tau} \simeq -\frac{1}{3}\vec{v}l \frac{dn}{dx} \Rightarrow D = \frac{1}{3}\vec{v}l$$

Поскольку $l = \frac{1}{n\sigma}$, $n \sim \frac{P}{T}$, $\vec{v} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$, где σ – эффективное сечение молекулы, то:

$$D \sim \frac{T^{3/2}}{P\sqrt{m}}$$

Коэффициент теплопроводности.

Будем считать, что перемещения газа как целого вдоль оси x нет. Это значит, что $N^{(\uparrow)} = N^{(\downarrow)}$. Пусть $\varepsilon(x) = c_V T(x)$ – энергия молекулы в точке x , c_V – теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу. Тогда согласно определению теплового потока:

$$q = \frac{\varepsilon(x - l)N^{(\uparrow)} - \varepsilon(x + l)N^{(\downarrow)}}{\tau} = -N^{(\uparrow)} \frac{2l}{\tau} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} = -\frac{1}{3}n\vec{v}l c_V \frac{dT}{dx}$$

Введем обозначение $C_V = nc_V$ – теплоемкость единицы объема. Тогда:

$$\kappa = \frac{1}{3}n\vec{v}l c_V = C_V D$$

Коэффициент вязкости.

С молекулярно-кинетической точки зрения вязкость – это перенос тангенциальной компоненты импульса в направлении, перпендикулярном скорости течения. Пусть $u(x)$ – средняя скорость упорядоченного движения молекул. Тогда импульсы, переносимые из одного слоя газа в другой, равны:

$$p_z^{(\uparrow)} = mu(x - l)N^{(\uparrow)} \quad \text{и} \quad p_z^{(\downarrow)} = mu(x + l)N^{(\downarrow)}$$

Результирующий импульс, приобретаемый верхним слоем за время τ : $\Delta p_z = p_z^{(\uparrow)} - p_z^{(\downarrow)}$. Опять же считаем, что переноса газа как целого вдоль оси x нет. Соответственно сила трения, действующая на верхний слой газа со стороны нижнего, равна:

$$(\text{Сила на единицу площади})_z = \frac{\Delta p_z}{\tau} = -N^{(\uparrow)} \frac{2lm}{\tau} \frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{3}mn\vec{v}l \frac{du}{dx}$$

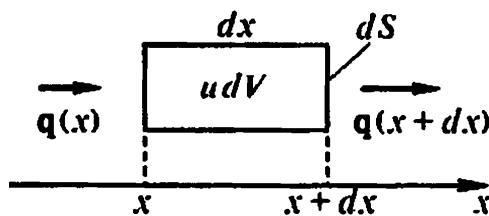
Такая же, но противоположного знака, сила действует на нижний слой жидкости со стороны верхнего слоя. Отсюда находим:

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3}mn\vec{v}l = \rho D}$$

УРАВНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Определение: Уравнение теплопроводности – дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое описывает распределение температуры в заданной области пространства и ее изменение во времени.

Выведем его. Для этого Рассмотрим перенос тепловой энергии вдоль оси x .



В объеме $dV = dSdx$ количество энергии, содержащейся в данный момент времени t , равно $dU = udVt$, где $u = u(x,t)$ – объемная плотность энергии. $q = q(x,t)$ – плотность потока тепла. Количество энергии, поступившей в объем dV в единицу времени, равно:

$$(q(x,t) - q(x+dx,t))dS = -\frac{\partial q}{\partial x}dV$$

Эта же величина есть скорость изменения количества энергии в выделенном объеме dV и ее можно представить в виде $(\partial u / \partial t)dV$. Таким образом, мы приходим к *уравнению теплового баланса*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Преобразуем это уравнение для случая идеального газа. Учтем, что $du = C_V dT$, а $C_V = \rho C_V^{(m)}$ где C_V – теплоемкость единицы объема вещества при постоянном объеме, $C_V^{(m)}$ – соответствующая удельная теплоемкость, ρ – массовая плотность среды. Учитывая связь плотности потока тепла и температуры, устанавливаемую законом Фурье, получим:

$$\rho C_V^{(m)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Это уравнение называется **уравнением теплопроводности**.

В трехмерном случае оно записывается в виде:

$$\rho C_V^{(m)} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T)$$

18. Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ.

До сих пор мы не учитывали существования границы раздела различных сред. Однако ее наличие может оказаться весьма существенным. Молекулы жидкости испытывают силы взаимного притяжения. На молекулы внутри жидкости силы притяжения действуют со всех сторон и взаимно уравновешивают друг друга. Молекулы же на поверхности жидкости не имеют соседей снаружи, и результирующая сила притяжения направлена внутрь жидкости. В итоге поверхность воды стремится стянуться под воздействием этих сил. По совокупности этот эффект приводит к формированию так называемой *силы поверхностного натяжения*.

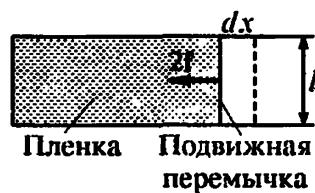
Определение: *Поверхностным натяжением* называется работа которую нужно затратить в изотермическом квазистатическом процессе для увеличения поверхности на единицу при неизменном объеме.

Получим выражение для этой величины. В изотермическом процессе работа идет на изменение свободной энергии $F = F_{\text{об}} + F_{\text{пов}}$. Здесь $F_{\text{об}}$ – объемная энергия, пропорциональная величине объема V , $F_{\text{об}} \sim V$, а $F_{\text{пов}}$ – поверхностная энергия, пропорциональная площади поверхности Π , $F_{\text{пов}} \sim \Pi$. Полагают:

$$F_{\text{пов}} = \sigma \Pi$$

Коэффициент пропорциональности σ в данном равенстве называют **коэффициентом поверхностного натяжения**.

Для выяснения смысла величины σ рассмотрим пленку, находящуюся на жесткой раме, ограниченной с одной стороны подвижной перемычкой.



Пусть f – сила, приходящаяся на одну сторону пленки. Всего у пленки две стороны. Поэтому работа против силы $2f$ равна $dA = 2fdx$. Эта работа идет на увеличение каждой из двух сторон на $d\Pi = ldx$. Поэтому та же работа равна $dA = 2\sigma d\Pi$. Отсюда находим:

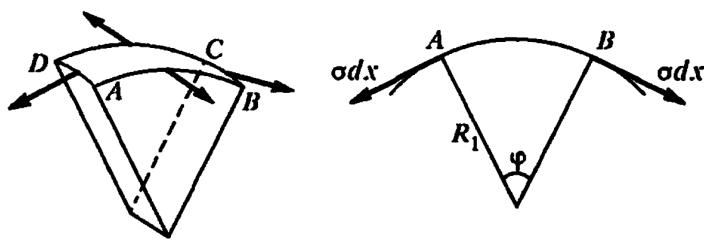
$$\sigma = \frac{f}{l}$$

Таким образом: Коэффициент поверхностного натяжения есть сила, приходящаяся на единицу длины границы поверхности.

ФОРМУЛА ЛАПЛАСА.

Если поверхность жидкости искривлена, то из-за поверхностного натяжения по разные стороны поверхности существует разность давлений, которая зависит от кривизны этой поверхности. Рассмотрим этот эффект подробнее.

Пусть жидкость находится под кривой поверхностью. Выделим на поверхности прямоугольник $ABDC$ со сторонами $AD = dx$, $AB = dy$.



Равнодействующая сила, приложенных к сторонам AD и BC , направлена по радиусу и равна:

$$dF_1 = 2\sigma dx \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{AB}{R_1} = \frac{dy}{R_1}$$

R_1 – радиус кривизны поверхности вдоль дуги AB . Поэтому:

$$dF_1 = \frac{\sigma}{R_1} dxdy = \frac{\sigma}{R_1} d\Pi$$

Аналогично для сил, приложенных к сторонам AB и DC , находим:

$$dF_2 = \frac{\sigma}{R_2} dxdy = \frac{\sigma}{R_2} d\Pi$$

Полная сила равна $dF = dF_1 + dF_2 = \sigma K d\Pi$, где $K = 1/R_1 + 1/R_2$. Если обозначить $P^{(i)}$ – давление под поверхностью, $P^{(e)}$ – давление над поверхностью, то:

$$P^{(i)} - P^{(e)} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Это равенство называется **формулой Лапласа**.

СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ И ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

Для молекулы, находящейся в объеме жидкости, равнодействующая сила со стороны других молекул в среднем равна нулю. Поэтому потенциальная энергия молекулы вблизи поверхности оказывается больше, чем в объеме. Рассмотрим эти энергии подробнее.

Работа сил поверхностного натяжения при изменении площади поверхности на $d\Pi$:

$$\delta A^{(\nearrow)} = -\sigma d\Pi$$

Знак "−" связан с тем, что силы поверхностного натяжения совершают положительную работу при уменьшении площади поверхности. С учетом этого запишем первое начало термодинамики $\delta Q^{(\swarrow)} = dU + \delta A^{(\nearrow)}$ применительно к поверхности:

$$\delta Q^{(\swarrow)} = dU - \sigma d\Pi$$

Так как мы рассматриваем квазистатические процессы, то можем ввести энтропию формулой $\delta Q^{(\swarrow)} = TdS$. Тогда основное термодинамическое соотношение для обратимых процессов примет вид:

$$TdS = dU - \sigma d\Pi$$

Выражение для работы определено для случая изотермического процесса. Поэтому при $T = const$ величина $\delta A^{(\nearrow)}$ дает убыль свободной энергии. Следовательно, полный дифференциал свободной энергии можно записать в виде:

$$dF = -SdT + \sigma d\Pi$$

Воспользуемся определением свободной энергии $F = U - TS$ и уравнением Гиббса-Гельмгольца применительно к поверхности. Получим:

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\Pi}$$

Представим поверхностную свободную энергию в виде $F = \sigma\Pi$. Тогда для поверхностной внутренней энергии получим выражение:

$$U = \left(\sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) \Pi$$

Таким образом: Мы получили, что поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности. Это полностью согласуется с теорией, поскольку число молекул, находящихся в поверхностном слое, пропорционально площади границы раздела Π , а значит и поверхностная энергия также пропорциональна Π .

19. Флуктуации. Броуновское движение. Соотношение Эйнштейна.

ФЛУКТУАЦИИ.

Определение: *Флуктуациями* называются случайные отклонения физических величин от их средних значений.

Пусть f – некоторая случайная величина, а \bar{f} – ее среднее значение. Тогда флуктуация есть $\Delta f = f - \bar{f}$. Согласно определению $\overline{\Delta f} = 0$.

Величина $\sigma = \sqrt{(\Delta f)^2}$ называется *среднеквадратичной флуктуацией*. Очевидно, что ее квадрат является дисперсией случайной величины f .

Величина $\delta_f = \frac{\sqrt{(\Delta f)^2}}{\bar{f}}$ называется *относительной среднеквадратичной флуктуацией*.

Во многих практических важных случаях флуктуации $x = \Delta f$ физических величин имеют гауссово распределение вероятностей:

$$dW(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad \bar{x} = 0, \quad \overline{x^2} = \sigma^2$$

Приведем несколько примеров флуктуаций термодинамических величин:

- Флуктуации числа частиц идеального газа в выделенном объеме:

$$\boxed{\overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}, \quad \delta_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}}$$

- Флуктуации малого объема:

$$\boxed{\overline{(\Delta V)^2} = \frac{V^2}{N}, \quad \delta_V = \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

- Флуктуации температуры в заданном объеме:

$$\boxed{\overline{(\Delta T)_V^2} = \frac{kT^2}{C_V}}$$

В итоге: Знание флуктуаций термодинамических величин помогает значительно улучшить точность измерений. Ведь при измерении физической величины, значение которой меньше, чем величина флуктуации самого прибора, невозможно определить, чем обусловлено показание прибора – флуктуацией или измеряемой величиной. Повышение точности измерений может быть достигнуто путем проведения многократных измерений.

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Определение: Броуновским движением называется беспорядочное движение малых частиц, находящихся в жидкости или газе, вызванное случайными ударами молекул окружающей среды.

Определим закон движения броуновских частиц. Для этого рассмотрим маленькую частицу, которая движется в среде. Тогда на нее действуют два типа сил:

- 1) Сила торможения за счет вязкого трения $\vec{F} = \vec{v}/B$. Величина B называется *подвижностью частицы* и в случае сферических частиц определяется по формуле $B = (6\pi R\eta)^{-1}$.
- 2) Флуктуационная (случайная) сила \vec{X} со стороны молекул среды, $\overline{\vec{X}} = 0$.

У учетом этих сил уравнение движения принимает вид:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{X} - \frac{1}{B} \frac{d \vec{r}}{dt}$$

Уравнение такого типа, учитывающее детерминированные и случайные силы, называется уравнением Ланжевена. Умножая его почленно на \vec{r} и усредняя по большому числу различных частиц, получим:

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{(\vec{r})^2} + \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \overline{(\vec{r})^2} = \overline{m(\vec{v})^2} + \overline{\vec{r}\vec{X}}$$

Здесь было использовано тождество:

$$\vec{r} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 (\vec{r})^2}{dt^2} - \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2$$

Вследствие случайного характера силы \vec{X} величина $\overline{\vec{r}\vec{X}} = 0$. По теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы имеем:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT$$

Это приводит к уравнению:

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{(\vec{r})^2} + \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \overline{(\vec{r})^2} = 3kT$$

Решив полученное дифференциальное уравнение, имеем:

$$\overline{(\vec{r})^2} = \overline{r_0^2} + 6kTBt + C \exp \left(-\frac{t}{mB} \right)$$

Здесь r_0^2 и C – константы интегрирования, определяемые из начальных условий. На достаточно больших временах $t \gg mB$ получаем закон Эйнштейна-Смолуховского:

$$\boxed{\overline{(\vec{r})^2} = r_0^2 + 6kTBt}$$

Величину r_0 можно интерпретировать следующим образом. Пусть в начальный момент $t = 0$ имеется "рой" частиц, среднеквадратичное расстояние которых от центра равно r_0 . Тогда закон Эйнштейна-Смолуховского дает среднеквадратичный радиус такого "роя" в последующие моменты времени.

СООТНОШЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА.

Броуновское движение частицы аналогично процессу диффузии. Поэтому подвижность B оказывается связанной с коэффициентом диффузии D . Эта связь может быть установлена следующим способом:

Рассмотрим среднюю скорость \vec{u} дрейфа молекул под действием силы \vec{F} . Из определения подвижности она равна $\vec{u} = B\vec{F}$. Следовательно, под действием этой силы возникает поток \vec{j} . Причем $j_x^{(F)} = nu_x = nBF_x$.

Будем считать, что сила \vec{F} потенциальна, то есть $F_x = -\partial U / \partial x$. Тогда можем воспользоваться распределением Больцмана:

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right)$$

Поэтому x -компоненты диффузионного потока оказываются равной:

$$j_x^{(D)} = -D \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{D}{kT} n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial U}{\partial x} = -n \frac{D}{kT} F_x$$

В состоянии равновесия сумма потоков равна нулю: $j_x^{(D)} + j_x^{(F)} = 0$. Отсюда следует соотношение Эйнштейна:

$$\boxed{D = kTB}$$

Таким образом: Соотношение Эйнштейна связывает подвижность с диффузией. На основании этого закон броуновского движения можно записать в виде:

$$\overline{(\vec{r})^2} = r_0^2 + 6Dt$$

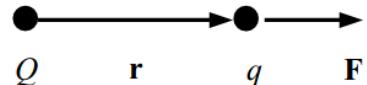
20. Закон Кулона. Теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной формах. Теорема о циркуляции для статического электрического поля. Потенциал. Уравнение Пуассона.

ЗАКОН КУЛОНА.

Заряд – мера взаимодействия заряженного тела с полем. **Электромагнитным полем** называется область пространства, где действуют электрические и магнитные силы. **Точечный заряд** – заряд, размерами и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь.

Закон Кулона: сила \mathbf{F} , действующая на точечный заряд q со стороны заряда Q в вакууме, находящемуся на расстоянии r от него, является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы и описывается формулой:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r}$$



Напряженностью электрического поля в некоторой точке называется сила, действующая на единичный точечный заряд:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

ТЕОРЕМА ГАУССА.

Теорема Гаусса в интегральной форме: поток напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен (с коэффициентом 4π) суммарному заряду, находящемуся внутри поверхности:

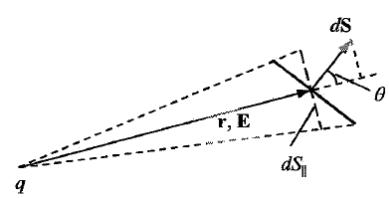
$$\Phi = 4\pi q \text{ или } \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q, \text{ где } q = \int_V \rho dV - \text{инт. форма} \quad \text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho - \text{диф. форма}$$

Доказательство

Точечный заряд q внутри выпуклой поверхности.

Элементарный поток $d\phi = \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{r^3} \vec{r} d\vec{S} = \frac{q}{r^2} dS_{||}$
где $dS_{||}$ – проекция вектора $d\vec{S}$ на радиус-вектор \vec{r}
 $d\Omega$ – телесный угол, под которым видна площадка $dS_{||}$

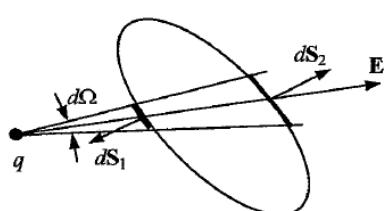
$$d\phi = \frac{q}{r^2} dS_{||} = \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = q d\Omega, \quad \phi = \int_{4\pi} q d\Omega = 4\pi q$$



Точечный заряд q вне поверхности.

Поток напряженности поля через две площадки:

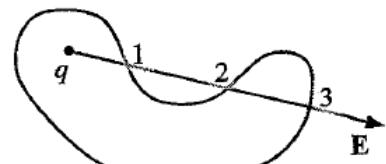
$$d\phi_1 = \vec{E} d\vec{S}_1 = -\frac{q}{r_1^2} dS_{1,||} = -qd\Omega \quad d\phi_2 = \vec{E} d\vec{S}_2 = +\frac{q}{r_2^2} dS_{2,||} = +qd\Omega \Rightarrow d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 0$$



Точечный заряд q внутри невыпуклой поверхности.

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3, d\phi_1 = -d\phi_2 = +d\phi_3$$

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 = d\phi_1 \Rightarrow \phi = \int_{4\pi} q d\Omega = 4\pi q$$



ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.

Теорема о циркуляции в интегральной форме: для произвольной траектории L при совпадении начальной и конечной точек имеем:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) \equiv \oint_L (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = 0$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

ПОТЕНЦИАЛ.

Из теоремы о циркуляции вытекает очень важное следствие – возможность в каждой точке электростатического поля задавать вместо векторной величины \mathbf{E} скалярную. Для этого вводится понятие **потенциала**.

Работа сил поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 равна:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = qQ \int_{(1)}^{(2)} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r^3} = qQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Эта работа зависит от положения начальной и конечной точек, но не зависит от траектории, соединяющей эти точки. Следовательно, поле точечного заряда консервативно.

Так как электростатическое поле произвольной системы зарядов консервативно, и можно ввести потенциальную энергию заряда q в этом поле: работа сил поля на пути $1 \rightarrow 2$ равна убыли потенциальной энергии рассматриваемого заряда:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = U_1 - U_2$$

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ поля между точками 1 и 2 называется работа сил поля по перемещению единичного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Потенциал определен с точностью до произвольной постоянной. Выбирая какую-либо точку \mathbf{r}_0 за начало отсчета, т.е. полагая $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$, мы определяем *потенциалы* всех прочих точек по отношению к выбранной.

Часто за начало отсчета выбирают бесконечно удаленную точку, полагая $\varphi(\infty) = 0$. По отношению к ней **потенциал** точечного заряда Q равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}$$

Поскольку электростатическое поле можно характеризовать потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$, то говорят, что это поле **потенциальное**.

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА.

На бесконечно малой траектории $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ имеем $\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = -d\varphi = E(\vec{r})d\vec{r}$.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad}\varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = -4\pi\rho} \text{ — уравнение Пуассона}$$

Здесь введен **оператор Лапласа(лапласиан)** — $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

21. Электростатическое поле в веществе. Вектор поляризации, электрическая индукция. Граничные условия для векторов E и D

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.

Свободные заряды – это заряды, которые могут перемещаться на большие расстояния в веществе (много больше межатомных расстояний).

Связанные (поляризационные) заряды – это заряды, которые под действием внешних полей или сил мало смещаются относительно своего положения равновесия и возвращаются назад, в положение равновесия, после снятия внешнего воздействия.

Проводниками называют вещества, обладающие малым сопротивлением. В них имеются свободные заряды (электроны), которые могут перемещаться под действием сколь угодно малых полей.

Если рассматривается стационарное состояние, когда нет токов, то в объеме проводника электрическое поле $E = 0$. Если бы поле было не нуль, то возникло бы упорядоченное движение зарядов – ток. В состоянии равновесия:

1. поле в объеме вещества равно нулю: $E^{(i)} = 0$
2. $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E^{(i)} \Rightarrow \rho = 0$. Это значит, что свободные заряды могут располагаться только на поверхности проводника.

Диэлектриками называются вещества, плохо проводящие электрический ток. Их большое сопротивление связано с тем, что в них очень мало свободных зарядов. Связанные же заряды тока не производят.

При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда.

ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ, ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ.

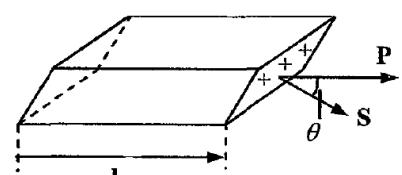
Поляризация – это пространственное перераспределение связанных зарядов, приводящее к появлению объемного дипольного момента среды.

Вектор поляризации \vec{P} – это дипольный момент единицы объема вещества. Поляризация называется **однородной**, если вектор поляризации является постоянным по объему вещества: $\vec{P} = \text{const}$, и **неоднородной**, если \vec{P} меняется от точки к точке.

Поверхностная плотность поляризационных зарядов

Рассмотрим косоугольный параллелепипед, вырезанный из поляризованного вещества с однородной поляризацией. σ – поверхностная плотность заряда на гранях.

$$\vec{p} = (\sigma S) \vec{l} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}, P_n = \frac{\vec{P} \cdot \vec{S}}{S} = \frac{\vec{S}}{S} \left(\frac{\sigma S \vec{l}}{\vec{S} \vec{l}} \right) = \sigma \Rightarrow \boxed{P_n = \sigma}$$



Объемная плотность поляризационных зарядов

Пусть теперь поляризация неоднородная. Рассмотрим в веществе некоторый объём произвольной формы. Разобьем всю его поверхность на элементарные площадки. Если в результате поляризации на площадке $d\vec{S}$ внешней поверхности оказывается заряд $dq = \sigma dS$, то это можно интерпретировать так, что в объеме через рассматриваемую площадку вошел заряд $(dq)_{ex} = -dq = -\sigma dS$. Тогда через всю поверхность в выделенный объем вещества вошел поляризационный заряд

$$q_{pol} = - \oint_S \sigma dS = - \oint_S P_n dS = - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow q_{pol} = - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV$$

Если ввести объемную плотность поляризационных зарядов $\rho_{pol} = \int_V \rho_{pol} dV$, то ввиду произвольности выбранного объема находим:

$$\boxed{\rho_{pol} = -\operatorname{div} \vec{P}}$$

Общий вид теоремы Гаусса.

В частном случае однородной поляризации, когда $\vec{P} = const$, имеет $\rho_{pol} = 0$. В общем случае в теореме Гаусса следует учесть наличие не только свободных, но и связанных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_{cb} + \rho_{pol}),$$

где ρ_{cb} - плотность свободных зарядов в объеме, а ρ_{pol} - плотность поляризационных зарядов. Учитывая равенство $\rho_{pol} = -\operatorname{div} \vec{P}$ получаем $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_{cb} - \operatorname{div} \vec{P})$.

Обозначим $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где \vec{D} - вектор электрической индукции
где \vec{P} - вектор поляризации. Если $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, α - поляризуемость среды, то

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \text{ - диэлектрическая проницаемость среды}}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_{cb} \Leftrightarrow \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q \text{ - общий вид теоремы Гаусса}$$

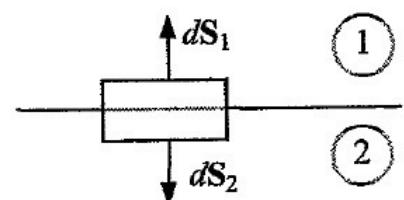
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ Е И D.

Применим теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред. Полагая: $dS_1 = dS_2 = dS$, $q = \sigma dS$, $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = \vec{n} dS$, имеем:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow \vec{D}_1 d\vec{S}_1 + \vec{D}_2 d\vec{S}_2 = 4\pi \sigma dS,$$

где σ - поверхностная плотность только свободных зарядов. Отсюда следует первое граничное условие:

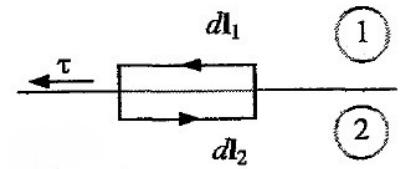
$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n} = 4\pi \sigma \Leftrightarrow \boxed{D_{1n} - D_{2n} = 4\pi \sigma}$$



Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, проходящему на бесконечно малом расстоянии над и под поверхностью раздела сред.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0$$

Поскольку $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$, $d\vec{l}_1 = \tau dl$, то $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\tau = 0$. Отсюда находим второе граничное условие:



$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$

22. Магнитное поле постоянных токов в вакууме. Основные уравнения магнитостатики в вакууме. Закон Био-Савара. Сила Ампера. Сила Лоренца.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ВАКУУМЕ.

Электрический ток - это упорядоченное движение зарядов (электронов и ионов).

Постоянный ток - это неизменное во времени движение зарядов.

Пусть ток течёт по проводнику. Тогда **силой тока** называется количество заряда, переносимого через сечение за единицу времени: $[J] = \frac{\text{заряд}}{\text{с}}$

Магнитным полем называется силовое поле, действующее на *движущиеся* заряды, токи и тела, обладающие магнитным моментом. Неизменные во времени токи создают постоянные магнитные поля. Магнитной поле характеризуется вектором **магнитной индукции** \vec{B} , определяющим силу, действующую на движущийся заряд.

СИЛА ЛОРЕНЦА.

Силой Лоренца называется сила, действующая на движущийся заряд q со стороны магнитного поля:

$$\vec{F}_L = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}],$$

где вектор магнитной индукции \vec{B} не зависит от величины заряда и характеризует поле.

СИЛА АМПЕРА.

Силой Ампера называют силу, действующую на токи со стороны магнитного поля. $\vec{j}dV$ - объемный элемент тока, $Jd\vec{l}$ - линейный элемент тока.

Законом Ампера называются соотношения, описывающие силу, действующую на 1) объемный элемент тока $\vec{j}dV$. 2) линейный элемент тока $Jd\vec{l}$.

$$1) \boxed{d\vec{F} = \frac{dV}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]}, \quad 2) \boxed{d\vec{F} = \frac{J}{c} [d\vec{l} \times \vec{B}].}$$

ЗАКОН БИО-САВАРА.

Закон Био-Савара определяет магнитное поле, создаваемое объёмным и линейным элементами тока.

Если радиус-вектор точки наблюдения по отношению к рассматриваемому элементу тока есть \vec{R} , то поле, создаваемое объемным элементом тока $\vec{j}dV$, равно

$$d\vec{B} = \frac{dV}{c} \frac{[\vec{j} \times \vec{R}]}{R^3},$$

а поле линейного элемента тока $Jd\vec{l}$ дается выражением

$$d\vec{B} = \frac{J}{c} \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3}.$$

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ.

Преобразуем формулу, выражающую закон Био-Савара. Пусть радиус-вектор точки наблюдения есть \vec{r} , а радиус-вектор объемного элемента тока, создающего магнитное поле, есть \vec{r}_1 . Тогда $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$. Вспомним соотношения:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right), \quad [\vec{a} \times \nabla \phi] = -\operatorname{rot}(\vec{a} \phi)$$

Тогда формула Био-Савара примет вид:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{dV_1}{c} \frac{[\vec{j}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\frac{dV_1}{c} \vec{j}(\vec{r}_1) \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) dV_1$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int_V \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) dV_1, \quad \text{обозначая } \vec{A}(\vec{r}) = \int_V \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) dV_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}}$$

Введенный здесь вектор **A** называется **векторным потенциалом**. Его роль по отношению к магнитному полю подобна той, которую скалярный потенциал φ играет по отношению к электрическому полю.

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ.

Имея ввиду тождество $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$ и $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ получаем:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{— теорема Гаусса в дифференциальной форме}$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса $\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \oint_{S(V)} \vec{B} d\vec{S}$. Тогда получаем

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{— теорема Гаусса в интегральной форме}$$

ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}.$$

Вспомним $\Delta \varphi = -4\pi\rho$, $\varphi = \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_1$, $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_1 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Наконец, вспоминая, что $\operatorname{rot} \vec{B} = -\Delta \vec{A}$, приходим к **теореме о циркуляции**:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \uparrow \text{ T. Стокса: } \int_S \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} \uparrow \Rightarrow \oint_{L(S)} \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J$$

23. Магнитное поле в веществе. Основные уравнения магнитостатики в веществе. Граничные условия для векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} .

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.

В веществе магнитное поле формируется как внешним полем, там и циркулирующими в этом веществе токами. На микроуровне поле резко меняется во времени и пространстве. Это поле называется **микрополем** \vec{B} . Однако если произвести усреднение по малому объему ΔV , в котором, тем не менее, имеется много частиц-зарядов, то получим *среднее поле*:

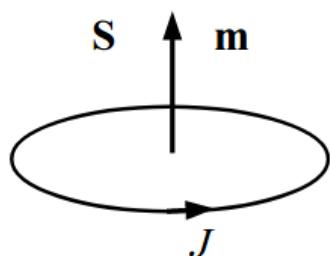
$$\vec{B} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{B} dV$$

Среднее поле меняется существенно медленнее вследствие статического усреднения при случайном движении частиц.

МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ.

Элементарным источником магнитного поля является замкнутый виток с током. Ему приписывают **магнитный момент**:

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} \mathbf{S}$$



Пусть однородное магнитное поле \mathbf{B} параллельно плоскости витка. Момент сил, действующий на виток с током:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}]$$

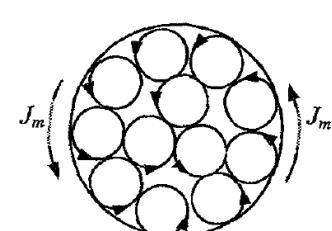
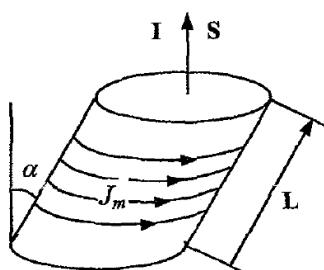
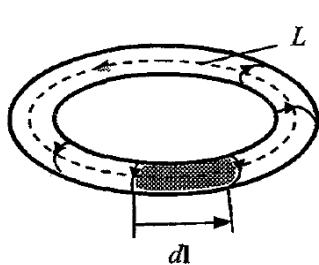
ВЕКТОР НАМАГНИЧЕННОСТИ. МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ТОКИ.

Токи проводимости – токи, связанные с перемещением свободных зарядов, являются сторонними по отношению к веществу. **Молекулярные токи** обусловлены орбитальным движением и спином (собственным моментом импульса) электронов в атомах (молекулах) и ядер вещества.

Вектором **намагничивания** называется магнитный момент объема вещества:

$$\mathbf{I} = d\mathbf{m}/dV$$

Намагниченность называется **однородной**, если \mathbf{I} не зависит от выбора точки в веществе, иначе **неоднородная**.



Выделим в веществе достаточно малый цилиндр, так что поле в нем можно считать практически однородным. Кольцевые молекулярные токи, циркулирующие в объеме, компенсируют друг друга всюду, кроме точек боковой поверхности, в результате остается только поверхностный ток, текущий по боковой поверхности цилиндра.

По определению вектора намагничивания магнитный момент цилиндра равен:

$$\vec{m} = VI = LS \cos \alpha \vec{I} = (\vec{L} \vec{S}) \vec{I}, \vec{m} = \frac{J_m}{c} \vec{S} \Rightarrow LS \cos \alpha \vec{I} = \frac{J_m}{c} \vec{S} \Rightarrow dJ_m = c \vec{I} d\vec{l}$$

Полный ток намагничивания, пересекающий контур L равен:

$$J_m = c \oint_L \vec{I} d\vec{l}$$

Это соотношение представляет собой связь молекулярного тока с вектором намагничивания в **интегральной форме**.

Поскольку, с другой стороны, ток, текущий через поверхность S, можно выразить через плотность тока формулой:

$$J_m = \int \vec{j}_m d\vec{S}, \text{ Т. Смокса} - J_m = c \int \text{rot} \vec{I} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\vec{j}_m = c \text{rot} \vec{I}}$$

Это соотношение даёт связь молекулярного тока с вектором намагничивания в **дифференциальной форме**.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ В ВЕЩЕСТВЕ.

Применим теорему о циркуляции для магнитного поля в вакууме:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_m)$$

J и J_m – ток проводимости и молекулярный ток, пронизывающие контур L

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + c \oint_L \vec{I} d\vec{l}), \text{ вводя обозначение, } \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I} \Rightarrow \boxed{\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J}$$

Полученное соотношение представляет собой **теорему о циркуляции для магнитного поля в веществе в интегральной форме**. **Теорема о циркуляции в дифференциальной форме**:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

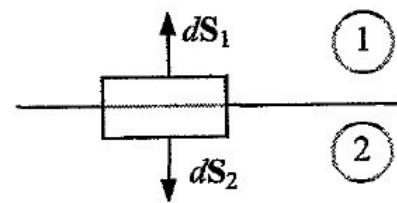
Введенный вектор $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I}$ называется **напряженностью магнитного поля**. $\vec{I} = \kappa \vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, κ - **магнитная восприимчивость**, μ - **магнитная проницаемость**.

$$\boxed{\mu = 1 + 4\pi\kappa}$$

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ В И Н.

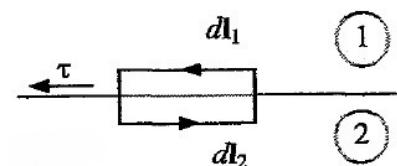
1) Применяя теорему Гаусса к бесконечно маленькому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред имеем:

$$d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = \vec{n}dS, \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \Rightarrow \\ \vec{B}_1 d\vec{S}_1 + \vec{B}_2 d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow (\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\vec{n} = 0 \Rightarrow [B_{1n} = B_{2n}]$$



2) Применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, проходящему на бесконечно малом расстоянии над и под поверхностью раздела сред:

$$\oint_l \vec{H}dl = \frac{4\pi}{c}J \Rightarrow \vec{H}_1 dl_1 + \vec{H}_2 dl_2 = \frac{4\pi}{c}i_N dl$$



Здесь вектор N задаёт нормаль к плоскости контура, так что величина i_N есть линейная плотность тока, пересекающего контур по нормали к нему. Поскольку $dl_2 = -dl_1$, $dl_1 = \tau dl$, $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\vec{\tau} = i_N$ Отсюда находим

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c}i_N \Leftrightarrow \vec{n}(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \frac{4\pi}{c}\vec{\tau}$$

24. Закон Ома. Индуктивность, емкость конденсатора. Закон Фарадея.

ЗАКОН ОМА.

Георг Ом экспериментально установил, что сила тока J , текущего по однородному металлическому проводнику, в котором не действуют сторонние силы, пропорциональна напряжению U на концах проводника.

$$J = \frac{U}{R}$$

1) *Дифференциальная форма.*

Плотность тока в веществе, пропорциональная напряженности электрического поля:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}$$

λ - проводимость среды, $\rho = \frac{1}{\lambda}$ - удельное сопротивление. При наличии сторонних сил вводится эффективная напряженность поля этих сил $\vec{E}_{cmop.} = \vec{F}_{cmop.}/e$, после чего:

$$\boxed{\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{cmop.})} \text{ - закон Ома в дифф. форме}$$

2) *Интегральная форма*

Рассмотрим участок цепи, содержащий источник ЭДС и проводящие участки с удельной проводимостью λ . Пусть S – площадь поперечного сечения проводника. Тогда полный ток равен:



$$J = jS, j = \lambda(E + E_{cmop.}) \Rightarrow E + E_{cmop.} = \frac{j}{\lambda} = \frac{J}{\lambda S}$$

Проинтегрируем это равенство по всему рассматриваемому участку цепи от точки 1 до точки 4, предполагая, что ток во всех участках цепи одинаков:

$$\int_{(1)}^{(2)} (E + E_{cmop.}) dl = J \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}, \quad R = \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}$$

Введенное обозначение R называется **сопротивлением** рассматриваемого участка.

Введем также **электродвижущую силу (ЭДС)** источника сторонней силы:

$$\varepsilon = \int_{(1)}^{(4)} E_{cmop.} dl$$

Правило знаков:

- 1) $\varepsilon > 0$ - при прохождении источника в направлении от - к +
- 2) $\varepsilon < 0$ - при прохождении источника в направлении от + к -

В итоге приходим у **закону Ома в интегральной форме:**

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_4 + \varepsilon = JR}$$

Если участок замкнутый, т.е. точки 1 и 4 совпадают, то закон Ома принимает вид:

$$\varepsilon = JR$$

Правила Кирхгофа.

- Для любого узла сумма токов, входящих в узел (с учётом знаков), равна нулю:

$$\sum_k J_k = 0$$

Это правило выражает закон сохранения заряда: заряды в узлах не могут рождаться или исчезать.

- Для любого замкнутого участка цепи выполняется равенство:

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_k J_k R_k$$

ИНДУКТИВНОСТЬ. САМО и ВЗАИМОИНДУКЦИЯ.

Магнитный поток – скалярная величина, количественно описывающая прохождение магнитного поля через некоторую поверхность.

Если имеется замкнутый контур L и опирающаяся на него поверхность S , то магнитный поток через этот контур равен:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Пусть по витку течет ток J . Он создает магнитное поле \vec{B} , величина которого пропорциональна величине тока: $B \sim J$. Соответственно магнитный поток также пропорционален току: $\Phi \sim J$. Полагают (в гауссовой системе единиц)

$$\Phi = \frac{1}{c} L J,$$

где c – скорость света, L – **коэффициентом самоиндукции**.

Пусть теперь имеются два витка, по одному из которых течет ток J_1 . Тогда магнитное поле, создаваемое этим током, $B \sim J_1$, а магнитный поток через второй виток $\Phi_{21} \sim J_1$. В гауссовой системе единиц записывают:

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} J_1, \Rightarrow \Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} J_1 + \frac{1}{c} L_{22} J_2$$

где L_{21} – **коэффициент взаимной индукции** 1 и 2 витка, L_{22} – коэффициентом самоиндукции 2 витка.

Индуктивность соленоида.

Рассмотрим идеальный соленоид со следующими параметрами: S - площадь основания, l - длина, N - число витков. Тогда из граничных условий находим поле внутри соленоида:

$$B = \mu H = \mu \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N}{l} J$$

Тогда магнитный поток через один виток: $\Phi_1 = BS = \frac{4\pi\mu N}{cl} SJ$; а через N витков: $\Phi = N\Phi_1 \equiv \frac{1}{c} L J$. Таким образом, находим **индуктивность соленоида**:

$$L = \frac{4\pi\mu S}{l} N^2$$

ЕМКОСТЬ КОНДЕНСАТОРА.

Емкость проводника, который несет заряд q , и потенциал которого φ : $C = \frac{q}{\varphi}$

Емкость шара радиуса R : $\varphi = \frac{q}{\varepsilon R} \Rightarrow C = \varepsilon R$.

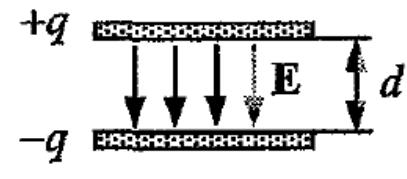
Емкостью конденсатора, где φ_-, φ_+ - потенциалы на двух обкладках, называется

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}$$

Плоский конденсатор – это две близко расположенные плоские металлические пластины. Поле внутри такого конденсатора однородно.

Если размеры пластин велики, то вне конденсатора поле практически отсутствует, а внутри оно почти всюду однородное с напряженностью

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon},$$



где ε - диэлектрическая проницаемость среды в конденсаторе, σ - поверхностная плотность зарядов. Разность потенциалов пластин равна:

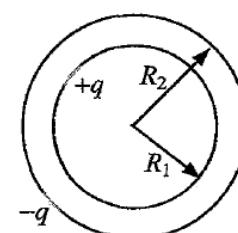
$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{(-)}^{(+)} Edx = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}d = \frac{4\pi q}{\varepsilon S}d \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.$$

Сферический конденсатор – это две концентрические проводящие сферы, из которых одна несёт положительный заряд, а другая – такой же, но отрицательный.

По теореме Гаусса поле вне такого конденсатора равно нулю, поскольку суммарный заряд системы равен нулю, а система сферически симметрична.

Между обкладками конденсатора $R_1 < r < R_2$ разность потенциалов оказывается равной:

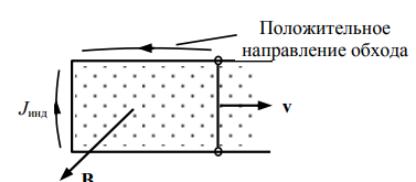
$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{q}{\varepsilon R_1} - \frac{q}{\varepsilon R_2} \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$



ЗАКОН ФАРАДЕЯ.

Рассмотрим проводящую рамку, замкнутую подвижной перемычкой, помещенную в магнитное поле с индукцией:

$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel.$$



1) Для \vec{B}_\perp : Пусть \vec{B}_\perp направлен к нам, тогда если перемычка движется со скоростью v , то на заряды в ней действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Эта сила приводит заряды в движение, вызывая индукционный ток в отрицательном направлении обхода контура. Она эквивалентна силе, создаваемой сторонним электрическим полем и индуцирует в перемычке длиной l ЭДС индукции:

$$\vec{E}_{stor} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \varepsilon_{ind} = \oint \vec{E}_{stor} d\vec{l} = -E_{stor} l = -\frac{1}{c} Blv.$$

Знак «-» здесь связан с тем, что ЭДС индукции создает ток в отрицательном направлении.

$$lv = \frac{dS}{dt}, d\Phi = BdS \Rightarrow \varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

2) Для $\vec{B}_{||}$ нет индукционного тока, так как составляющая силы Лоренца перпендикулярна плоскости контура.

Из полученного следует, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур движущегося или неподвижного проводника, возникает индукционный ток, причем ЭДС индукции равна:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

— закон электромагнитной индукции Фарадея

Пусть магнитный поток растет со временем. Тогда возникает ЭДС индукции ε_{ind} , создающая ток J_{ind} в отрицательном направлении. Этот ток создает дополнительное магнитное поле $\Delta \vec{B}$, ориентированное против исходного поля \vec{B} . Таким образом, получаем:

Правило Ленца: индуцированный ток имеет такое направление, чтобы с помощью созданного им магнитного поля препятствовать изменению магнитного потока, то есть чтобы ослабить действие причины, возбуждающей этот ток.

ТРАКТОВКИ ЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ.

Фарадеевская трактовка: электромагнитная индукция состоит в возникновении индукционного электрического тока. Для её наблюдения требуется замкнутый проводник.

Максвелловская трактовка: явление электромагнитной индукции состоит в том, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в пространстве электрическое поле; проводники для этого не требуются. Индукционные же токи возбуждаются в проводниках индуцированным электрическим полем.

Вихревое электрическое поле.

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \varepsilon_{int} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{ind} = \oint_{L(S)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Воспользуемся теоремой Стокса: $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$. Ввиду произвольности контура L :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Полученное равенство представляет собой *дифференциальную форму закона электромагнитной индукции*. В отличие от электростатики теперь $\text{rot} \vec{E} \neq 0$. Это значит, что индуцируемое электрическое поле является не потенциальным, а вихревым.

25. Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках.

ЭДС индукции. Само и взаимоиндукция. Теорема взаимности.

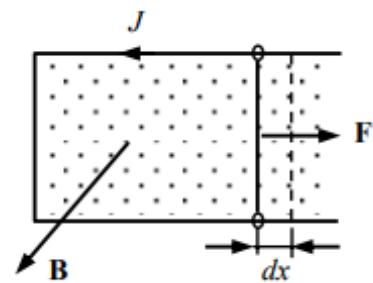
Первые три пункта подробно разобраны в предыдущем билете. Но прежде чем приступить к разговору о теореме взаимности, необходимо ввести понятие *магнитной энергии* – энергии магнитного поля, создаваемой током.

РАБОТА СИЛ АМПЕРА, МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ ТОКА.

Рассмотрим рамку, по которой может свободно скользить перемычка, помещенную в магнитное поле. Пусть поле направлено под углом к плоскости рамки:

$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel,$$

где \vec{B}_\perp - составляющая, направленная по нормали к плоскости, \vec{B}_\parallel - лежащая в плоскости контура.



1) Для \vec{B}_\perp : если по рамке течет ток J , то на перемычку действует сила Лоренца $F = \frac{J}{c}lB$, l - длина перемычки. При смещении на dx :

$$dA = Fdx = \frac{J}{c}Bl dx = \frac{J}{c}d\Phi, \quad d\Phi = \frac{1}{c}LdJ$$

При смещении на конечное расстояние:

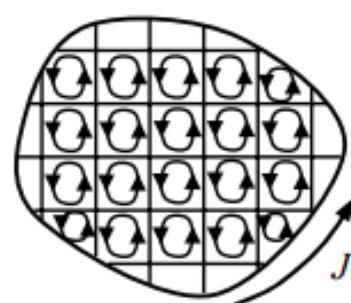
$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} \frac{L}{c^2} J dJ = \frac{LJ_2^2}{2c^2} - \frac{LJ_1^2}{2c^2} = U_2 - U_1, \quad \text{где } U = \frac{LJ^2}{2c^2} - \text{магнитная энергия тока}$$

2) Для \vec{B}_\parallel : Создается сила перпендикулярная плоскости и, следовательно, перпендикулярная смещению перемычки и поэтому не производящая работу.

Получаем, что магнитный поток, приводящий к производству работы, определяется только компонентой поля \vec{B}_\perp :

$$\Phi = \vec{B}_\perp \cdot S = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Рассмотрим теперь произвольно деформируемый виток и поле, меняющееся от точки к точке. В этом случае весь замкнутый контур нужно мысленно разбить на бесконечно малые замкнутые элементы тока. Поскольку токи в общих участках соседних витков равны по величине и противоположны по направлению, то токи по всей плоскости исходного контура компенсируют друг друга, и остается только ток J в исходном контуре.



Считая поле в пределах одного элемента однородным, получаем:

$$dA = \frac{J}{c}d\Phi$$

Следствие.

В рассматриваемом процессе совершается работа над зарядами в проводнике, и им сообщается дополнительная энергия. В то же время само магнитное поле работу не может производить, поскольку сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения зарядов.

Для разрешения этого противоречия учтем, что заряды в перемычке движутся не только в направлении проводника (\vec{u}_{\parallel}), но и в направлении движения перемычки (\vec{u}_{\perp}):

$$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$$

Эта вторая составляющая скорости приводит к появлению силы Лоренца: $\vec{F}' = e\vec{u}_{\perp} \times \vec{B}/c$, действующей против направления тока J .

Поэтому для поддержания неизменного тока в цепь обязательно должны быть включены сторонние ЭДС. Именно благодаря им и производится работа, сообщающая электронам дополнительную энергию.

ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ.

Пусть имеется набор n витков, по которым циркулируют токи J_i . Энергия этой системы есть функция только токов и не зависит от того, как эти токи возникли:

$$U = U(J_1, J_2, \dots, J_n), \quad \Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{k=1} L_{ik} J_k - \text{магнитный поток через } i\text{-й виток равен}$$

Здесь L_{ii} – коэффициент самоиндукции i -го витка, а L_{ik} – коэффициент взаимной индукции i -го и k -го витков. Будем предполагать $L_{ik} = \text{const}$. При изменении токов магнитные потоки меняются:

$$d\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n L_{ik} dJ_k, \quad dU = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n J_i d\Phi_i \Rightarrow dU = \frac{1}{c^2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} J_i dJ_k$$

Выполним дифференцирование по i и k току в одном и другом порядке:

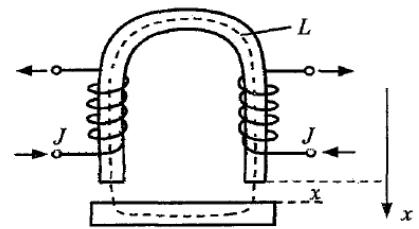
$$\frac{\partial U}{\partial J_k} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n L_{ik} J_i \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial J_i \partial J_k} = \frac{1}{c^2} L_{ik}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial J_k \partial J_i} = \frac{1}{c^2} L_{ki} \Rightarrow \boxed{L_{ik} = L_{ki}}$$

Полученное соотношение называется **теоремой взаимности**. Оно говорит о том, что отношение магнитных потоков, создаваемых витками с током, равно отношению этих токов:

$$\boxed{\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{12}} = \frac{J_1}{J_2}}$$

ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ ДВУХ КАТУШЕК НА ОБЩЕМ МАГНИТОПРОВОДЕ.

Пусть на одном сердечнике насажены 2 катушки с числом витков соответственно N_1 и N_2 . Считаем, что сердечник имеет длину l и постоянное сечение площадью S . Роль сердечника сводится к тому, что он полностью передает магнитный поток от одного катушки к другой. Катушки считаем идеальными соленоидами.



Пустим по катушке 1 ток J_1 . Тогда в ней создается магнитное поле

$$B_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l} S$$

Этот поток пронизывает все N_2 витков второй катушки, что дает полный магнитный поток через вторую катушку:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 N_2 J_1}{l} S = \frac{1}{c} L_{21} J_1$$

Таким образом коэффициент взаимной индукции:

$$L_{21} = \frac{4\pi\mu S}{l} N_1 N_2; \text{ аналогично } L_{12} = \frac{4\pi\mu S}{l} N_2 N_1$$

В рассмотренном примере индуктивности удовлетворяют соотношениям

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Их справедливость связана с тем, что **магнитная проницаемость сердечника не зависит от величины магнитного поля**. Соотношение $L_{12} = L_{21}$ не будет выполняться, если окажется $\mu = \mu(H)$. Тогда обмотки при одинаковых токах создают в сердечнике различные магнитные поля, так что в выражения для L_{12} и L_{21} будут входить различные коэффициенты μ , что и приведет к неравенству $L_{12} \neq L_{21}$.

26. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Ток смещения. Материальные уравнения.

ТОК СМЕЩЕНИЯ.

Максвелл обнаружил, что теорема о циркуляции для постоянного магнитного поля оказывается неверной в случае переменного электрического поля. Покажем почему:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

С другой стороны, если плотность заряда меняется со временем, $d\rho/dt \neq 0$, то в силу уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} \neq 0$$

. Это противоречие показывает, что необходимо видоизменить теорему о циркуляции. Для решения этой задачи Максвелл ввел **ток смещения** \vec{j}_{cm} соотношением:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{cm})$$

и потребовал, чтобы выполнялось условие непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{cm}) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j}_{cm} = -\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D} \right) \Rightarrow \vec{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Таким образом, теорема о циркуляции для магнитного поля, которая согласуется с законом сохранения заряда:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{cm})$$

$$J_{cm} = \int_S \vec{j}_{cm} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} - \text{полный ток смещения}$$

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.

1. Теорема Гаусса для электрического поля (утверждение, что силовые линии электрического поля могут начинаться и кончаться только на зарядах):

$$\oint_{S(V)} \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q, \quad Q = \int_V \rho dV \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

Q – суммарный свободный заряд в объеме V , ограниченном поверхностью $S(V)$.

2. Теорема о циркуляции для электрического поля (следствие закона Фарадея):

$$\oint_{L(S)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Теорема Гаусса для магнитного поля (нет свободных магнитных зарядов):

$$\oint_{S(V)} \vec{B} d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

4. Теорема о циркуляции для магнитного поля (следствие представления о токах смещения)

$$\oint_{L(S)} \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Здесь J – полный ток проводимости, пересекающий поверхность S .

Границные условия. При наличии четко выраженной границы раздела сред 1 и 2 должны выполняться следующие граничные условия:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad E_{2t} = E_{1t}, \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

*Для того, чтобы уравнения Максвелла полностью описывали поведение электромагнитного поля, необходимо не только наложить граничные условия на разделы сред, но и записать соотношения, называемые **материальными уравнениями**, связывающими векторы полей.*

1. Определение вектора электрической индукции:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

где \vec{P} – вектор поляризации. Если $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, α – поляризуемость среды, то

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\alpha \quad \text{диэлектрическая проницаемость среды}$$

2. Определение вектора напряженности магнитного поля в веществе:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I}$$

где \vec{I} – вектор намагничивания. Если $\vec{I} = \kappa \vec{H}$, то

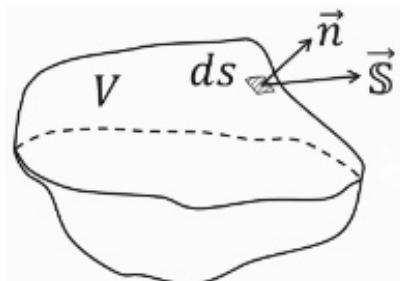
$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa$$

κ – магнитная восприимчивость среды, μ – магнитная проницаемость

27. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Сформулируем ЗСЭ для некоторой области, пронизываемой ЭМ полем.



Пускай есть область V и она ограничена замкнутой поверхностью s . Тогда в этой области сосредоточена некоторая энергия $W_{\text{эл-м}}$.

Посмотрим, как может меняться эта энергия:

$$\frac{\partial W_{\text{эл-м}}}{\partial t} = P - Q - \oint_s \vec{S} d\vec{s} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial w_{\text{эл-м}}}{\partial t}}_{= -\text{div } \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E}_{\text{стор}}} = -\text{div } \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E}_{\text{стор}}$$

Энергия внутри изменяется потому что частично во вне уходит при помощи электромагнитных волн. Через площадку $d\vec{s}$ за единицу времени выходит поток энергии \vec{S} . Тогда последнее слагаемое есть полная энергия, уносимая электромагнитными волнами.

$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_{\text{стор}} dV$ – мощность батарейки внутри области.

$Q = \int_V \frac{j^2}{\lambda} dV$ – мощность Джоулевых потерь проводников (часть энергии уходит в тепло).

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА.

Пусть в некоторой области пространства присутствует переменное во времени электромагнитное поле. Запишем изменение его плотности энергии:

$$dw = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Выразим выражения для производных $\partial \mathbf{D} / \partial t$ и $\partial \mathbf{B} / \partial t$ из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E} \left(\text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} \right] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}] - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

В силу векторного тождества получим ЗСЭ без учета работы сторонних сил:

$$\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{= -\text{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \right)} = -\text{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \right) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Тем самым мы получаем выражение для вектора плотности потока энергии \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] - \text{вектор Пойнтинга}$$

\mathbf{S} определяет количество энергии поля, протекающее через единичную площадку в единицу времени и её направление.

ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Импульс электромагнитной волны, обладающей энергией W :

$$p = \frac{W}{c}$$

Вектор Пойнтинга \vec{S} указывает направление распространения такой волны, соответственно должен быть сонаправлен с её импульсом. Также для плотности энергии верно:

$$g = \frac{w}{c}$$

Соответственно для **плотности импульса** \vec{g} справедлива запись:

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{[\vec{E} \times \vec{H}]}{4\pi c} - \text{плотность импульса ЭМ поля}$$

28. Квазистационарные токи. Свободные и вынужденные колебания в электрических цепях. Явление резонанса. Добротность колебательного контура, ее энергетический смысл.

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ.

Процесс считается **квазистационарным**, если мгновенные значения тока во всех участках проводника (неразветвленной цепи) одинаковы, а электрические поля в конденсаторах такие же, как в электростатике.

Для сигнала частоты ω имеем длину волны $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$, где период $T = 2\pi/\omega$.

Если длина цепочки $l \ll \lambda$ или $l \ll cT$, то во всех участках токи и напряжения меняются синхронно в одной фазе. Время прохождения всей цепи $\tau \sim l/c$. Тогда:

Условие квазистационарности: $\tau \ll T$

Для источника тока частотой 50 Гц имеем оценку длины проводов: $l \ll 10^4$ км.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР.

При рассмотрении колебательных процессов в электрических цепям будем пользоваться системой СИ. В ней $\Phi = LJ, \varepsilon = -d\Phi/dt$.

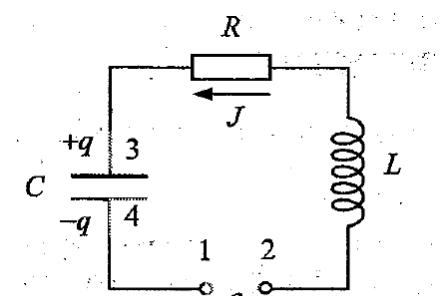
Вывод уравнения колебательного контура:

По т. о циркуляции эл. поля для контура $\Gamma = \{12341\}$:

$$\oint_{(12341)} E_l dl = \int_{(12)} E_l dl + \int_{(23)} E_l dl + \int_{(34)} E_l dl + \int_{(41)} E_l dl$$

$$\int_{(41)} E_l dl = 0 \text{ потенциал не меняется. } \int_{(12)} E_l dl = \phi_1 - \phi_2 = \varepsilon.$$

$$\int_{(23)} E_l dl = JR, \int_{(34)} E_l dl = \phi_3 - \phi_4 = V = q/C$$



$$\text{В итоге имеем: } -\frac{d\Phi}{dt} = -\varepsilon + JR + \frac{q}{C} \Rightarrow \boxed{L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = \varepsilon}$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

Уравнение свободных колебаний. В той же цепи, но без ЭДС: $L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = 0$.

Введем обозначения: $2\gamma = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и учтём $J = dq/dt$. Тогда у нас получится:

Уравнение свободных колебаний: $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Гармонические колебания: колебания при сопротивлении цепи $R = 0$. Тогда $\gamma = 0$ и

$$\boxed{\text{Уравнение гармонического осциллятора: } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

Его решение: $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Амплитуда q_0 и начальная фаза ϕ_0 определяются начальными условиями. Частота: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$\text{Формула Томсона: } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Затухающие колебания. В общем случае: $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Введём комплекснозначную функцию \hat{q} , такую, что $\operatorname{Re} \hat{q}(t) = q(t)$ и будем искать решение вида: $\hat{q}(t) = q_0 \exp(i\Omega t)$.

Подставим это в $\frac{d^2\hat{q}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\hat{q}}{dt} + \omega_0^2\hat{q} = 0$ и получим: $(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2)\hat{q} = 0$.

$$\text{Получим выражение для } Q = -\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$$

Общее решение диффура: $\hat{q}(t) = q_{10} \exp(i\Omega_1 t) + q_{20} \exp(i\Omega_2 t)$. Частные случаи:

1. **Слабое затухание** ($\omega_0 > \gamma$). Введём $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ и получим: $\Omega_{1,2} = i\gamma \pm \omega$;

$$\hat{q}(t) = \exp(-\gamma t) \left(q_{10} \exp(i\omega t) + q_{20} \exp(-i\omega t) \right) \Rightarrow q(t) = \underbrace{\exp(-\gamma t) \left(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \right)}_{q(t)}$$

2. **Сильное затухание** ($\omega_0 < \gamma$). Введём $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ и получим: $\Omega = i(\gamma \pm \Gamma)$

$$q(t) = \underbrace{\exp(-\gamma t) \left(q_{10} \exp(\Gamma t) + q_{20} \exp(-\Gamma t) \right)}_{q(t)}$$

3. **Вырожденный случай** ($\omega_0 = \gamma$) тогда $\Omega_1 = \Omega_2$ и решение вырождается в:

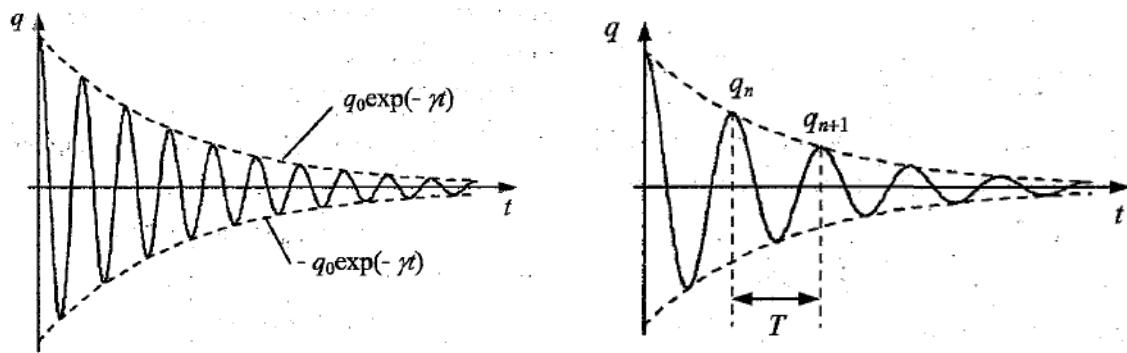
$$q(t) = \exp(-\gamma t) (C_1 + C_2 t)$$

Рассмотри гармонические затухающие колебания с убывающей амплитудой:

$$q(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi_0), \quad A(t) = q_0 \exp(-\gamma t)$$

Выберем два последовательных максимума q_n, q_{n+1} :

- 1) $\delta = \ln(q_n/q_{n+1})$ – **логарифмический декремент затухания**.
- 2) **Коэффициент затухания** γ показывает, с какой скоростью убывает амплитуда колебаний $A(t)$. Для LRC-конттура $\gamma = R/(2L)$.
- 3) **Время затухания** $\tau = 1/\gamma$ время убывания амплитуды колебаний в e раз.



При $\dot{q} = 0$ время между соседними максимумами составляет $T = 2\pi/\omega$ и это же период колебаний множителя $\cos(\omega t + \phi_0)$ в $q(t)$, значит:

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{A(T_n)}{A(T_{n+1})} = e^{\gamma T} \Rightarrow \text{Логарифмический декремент равен: } \delta = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\omega}$$

Для слабого затухания ($\gamma \ll \omega_0$) для LRC-контура находим:

$$\omega \equiv \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi\gamma}{\omega} = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}$$

И смысл лог. декремента состоит в том, что за характерное время колебаний $\tau = 1/\gamma$ осциллятор совершил $n = \tau/T = 1/(\gamma T) = 1/\delta$ колебаний.

ДОБРОТНОСТЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА.

Добротность колебательной системы это величина $Q = \pi n$

$$n = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\pi\gamma} \Rightarrow Q = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\pi}{\delta} \Rightarrow Q_{LRC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

За один период колебаний амплитуда колебаний заряда и тока убывает в $e^{\gamma T}$ раз. Если в начале в контуре запасена энергия $W(t)$ то к началу следующего цикла остаётся энергия $W(t+T) = e^{2\gamma T} W(t)$.

Потери энергии за цикл $\Delta W = W(t) - W(t+T) = (1 - e^{-2\gamma T})W(t)$. При слабых затуханиях $2\gamma T \ll 1$, $\Delta W = 2\gamma T \cdot W(t)$ следует:

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2\pi} Q.$$

Энергетический смысл добротности $Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

Рассмотрим вынужденные колебания в LRC контуре с гармонической внешней ЭДС:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos(\omega t), \quad x_0 = \frac{\varepsilon_0}{L} \Rightarrow q(t) = q_{\text{oo}}(t) + q_{\text{ср}}(t)$$

$$q_{\text{oo}}(t) = e^{-\gamma t} q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

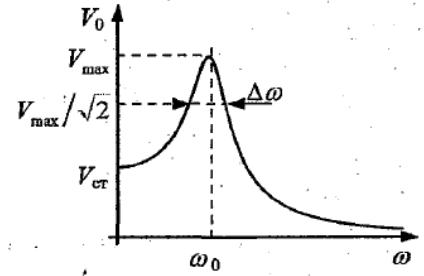
Рассмотрим установившийся режим, то есть когда осталось только частное решение:

$$q_{\text{ср}}(t) = q_0(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \Rightarrow \text{в итоге: } q_0(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА.

$$V_{\max} = \frac{x_{ct}}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} V_0; \quad \frac{V_{\max}}{V} = Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

При малых $\gamma \Rightarrow \omega \equiv \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \gamma, \quad \omega_2 = \omega_0 + \gamma$.



Следовательно, чем выше добротность системы, тем уже резонансная кривая.

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2, \quad (\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2$$

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \omega_0/Q$$

29. Спектральное разложение электрических сигналов. Спектры колебаний, модулированных по амплитуде и фазе.

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.

Линейной электрической цепью называют такую цепь, все компоненты которой линейные. К линейным компонентам относятся зависимые и независимые идеализированные источники токов и напряжений, *резисторы*, и любые другие компоненты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, наиболее известны *электрические конденсаторы* и *катушки индуктивности*. Если цепь содержит отличные от перечисленных компоненты, то она называется **нелинейной**.

Линейной системой будем называть любую линейную электрическую цепь.

При исследовании отклика *линейных систем* на внешнее воздействие $\varepsilon(t)$ основной задачей является поиск решений уравнения вида:

$$\hat{A}(q) = \varepsilon(t) \quad (1)$$

где \hat{A} – *линейный* оператор соответствия. $\hat{A} : q(t) \rightarrow \varepsilon(t)$.

Линейность оператора означает, что для любых функций вида $q_1(t)$ и $q_2(t)$ (из области его определения) и любых констант C_1 и C_2 (в общем случае комплексных) выполняется тождество:

$$\hat{A}(C_1 q_1 + C_2 q_2) = C_1 \hat{A}(q_1) + C_2 \hat{A}(q_2)$$

Пример: Приведем в пример исследование вынужденных колебаний в *LCR*-контуре. Запишем для него уравнение колебаний:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} = \varepsilon(t)$$

Это уравнение можно переписать в виде (1) если ввести *линейный* (очевидно) оператор:

$$\hat{A} = L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C}$$

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.

*Мы уже знаем, что задача отклика линейной системы на внешнее гармоническое воздействие разрешима. То есть если на некоторую схему подать внешний гармонический сигнал, то на выходе мы можем получить сигнал тоже гармонический. Простым примером являются вынужденные колебания в *LRC* контуре.*

Остается открытым вопрос об отклике линейной системы на внешнее негармоническое воздействие. Оказывается, что любой сигнал можно представить в виде суммы гармонических колебаний, а на практике, приблизить с некоторой точностью их конченой суммой.

Ввиду того, что задача об отклике линейной системы на внешнее *гармоническое* воздействие в общем случае разрешима, тогда вследствие линейности (1) можно найти отклик и на *негармоническое* воздействие, представимое в виде линейной комбинации гармонических:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{0k} e^{i\omega_k t} - \text{гармоническое } q_k : \hat{A}(q_k) = \varepsilon_k(t) \Rightarrow q(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t)$$

Отклик на суммарное воздействие $\varepsilon(t)$ равен сумме откликов q_k на **элементарные воздействия** $\varepsilon_k(t)$.

Чтобы разложить произвольную функцию $\varepsilon(t)$ воспользуемся теоремой Фурье. Периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

А непериодическая – в интеграл Фурье.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt$$

Такое разложение электрических сигналов называется **спектральным**.

А функция $C(\omega)$ – **фурье-спектром** функции $\varepsilon(t)$.

Пример спектрального разложения.

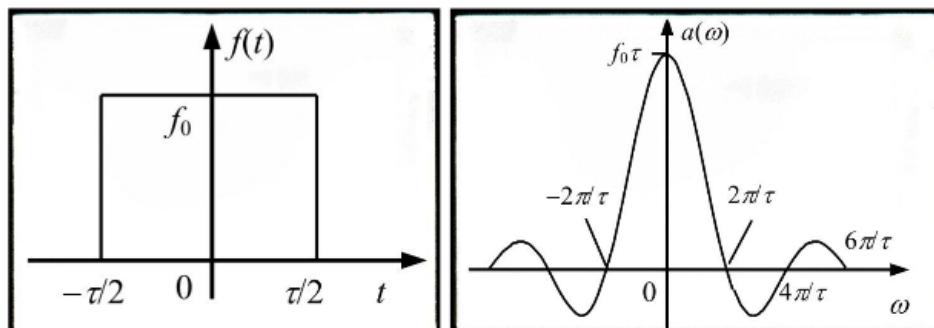
Получим спектральное разложение для функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ f_0, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases}$

Фурье-спектр этой функции определяется по формуле:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{f_0}{i\omega} (e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}) = f_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Таким образом функцию $f(t)$ можно представить в виде **интеграла Фурье**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega t \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega$$



МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ.

В системах связи часто возникают задачи, связанные с необходимостью изменения спектра сигнала. Например, эффективное излучение и прием сигналов возможен при размерах антенны порядка длины волны, поэтому для передачи низкочастотных сигналов используют высокочастотное (несущее) колебание, у которого один из параметров (амплитуду, частоту или фазу) изменяют пропорционально низкочастотному (модулирующему) сигналу.

Такая операция называется **модуляцией**.

В общем случае несущее гармоническое колебание имеет вид:

$$u(t) = U \cos(\omega_0 t + \psi)$$

Оно характеризуется тремя параметрами: амплитудой U , несущей частотой ω_0 и фазой ψ . В зависимости от того, какой параметр несущего колебания изменяется, вводятся понятия **амплитудной модуляции** и **угловой модуляции**. К угловым видам модуляции относятся **фазовая модуляция** и **частотная модуляция**.

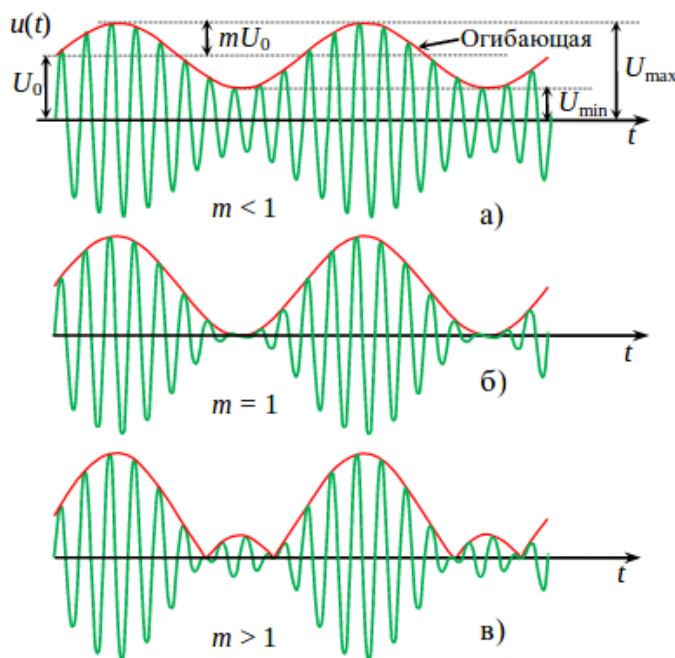
$$u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t)) \quad (2)$$

Сигнал вида (2) называют **модулированным**, если за времена, на которых изменение $U(t)$ и $\psi(t)$ существенно, функция $u(t)$ совершил большое число колебаний с почти постоянными амплитудой и частотой.

АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ.

Амплитудно-модулированный сигнал: $u(t) = U(t) \cos \omega_0 t = U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$

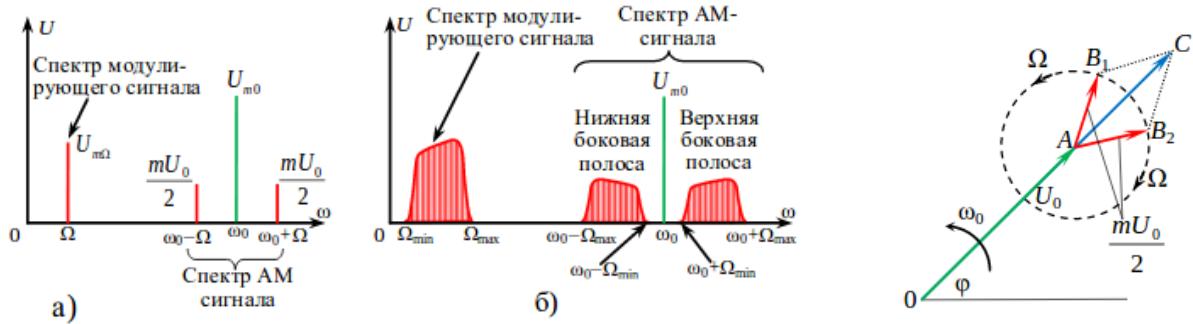
Ω – частота модуляции, m – глубина модуляции.



Найдем разложение Фурье АМ сигнала. Запишем его в комплексной форме:

$$\begin{cases} S(t) = U_0(1 + m \cos \Omega t)e^{i\omega_0 t} \\ \cos \Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega_0 t} + e^{-i\Omega_0 t}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{mA_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{mA_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}}$$

Таким образом спектр состоит из трех гармоник: $\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega$.



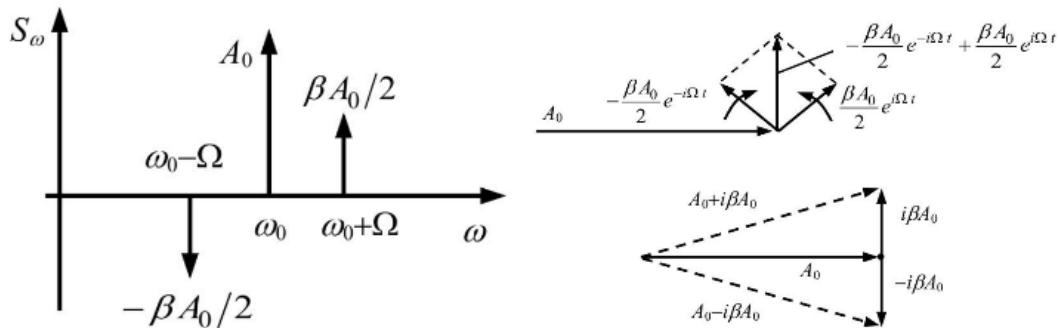
ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ.

Фазово-модулированный сигнал: $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \beta \psi(t)), |\psi(t)| \leq 1$.

Найдем разложение Фурье ФМ сигнала. Запишем его в комплексной форме, где $\beta \ll 1$.

$$\begin{cases} S(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)} \\ \sin \Omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\Omega_0 t} - e^{-i\Omega_0 t}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} - \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}}$$

Таким образом спектр состоит из трех гармоник: $\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega$.



30. Электрические флуктуации. Дробовой и тепловой шумы. Предел чувствительности электроизмерительных приборов.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ.

Проблематика: любая современная техника и любое измерение слабых сигналов всегда имеет дело с флуктуационными процессами, которые мешают их измерению. Нужно иметь представление, почему такие процессы возникают.

Существуют два главных механизма электрических флуктуаций.

1) *Первый механизм возникает на зажимах всех резисторов. На его концах появляется некое шумовое (флуктуационное) напряжение – тепловой шум.*

Природа теплового шума. Он возникает во всех резисторах, т.к. носители заряда, которые в этих резисторах имеются испытывают беспорядочное тепловое движение и на его концах возникает случайное изменение напряжения.

2) *Второй механизм встречается в электрических лампах, где есть пролет электронов от катода к аноду. Анодный ток испытывает флуктуации типа дробового шума.*

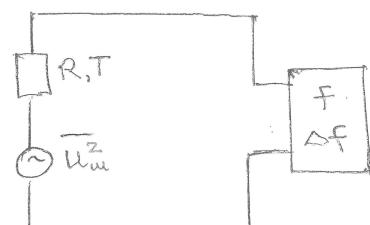
Природа дробового шума. Под анодным током подразумевается движение полчища электронов от катода к аноду, которое образует некоторый средний по времени ток. Дробовой шум обусловлен дискретностью движущего заряда, за счет чего и происходит флуктуационное отклонение мгновенного тока от его среднего значения.

Как описать такие шумовые процессы? Как правило они характеризуются случайнym шумовым напряжением, где рассматривается его средний квадрат.

ТЕПЛОВОЙ ШУМ.

Рассмотрим контур с резистором R температуры T . Пусть частотная полоса генератора частот Δf . Тогда среднее значение квадрата флуктуационного напряжение, вызванного тепловым шумом, определяется формулой:

$$\overline{u_w^2} = 4kTR\Delta f \quad \text{формула Найквиста}$$



k – постоянная Больцмана. Оценим значение таких флуктуаций. Пусть: .

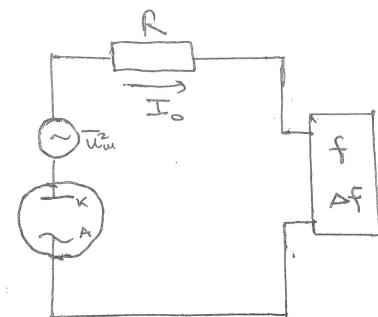
$$\begin{aligned} R &= 10^4 \text{ Ом} \\ T &= 300 \text{ K} \Rightarrow \sqrt{\overline{u_w^2}} = \sqrt{4kTR\Delta f} \sim 4 \cdot 10^{-7} \text{ В} \\ \Delta f &= 10^3 \text{ Гц} \end{aligned}$$

Как мы видим, значение тепловых флуктуаций мало и на работу современных устройств влияет слабо. Даже если частотную полосу увеличить в сто раз, величина флуктуации изменится лишь в десять раз, и все равно будет очень мала.

ДРОБОВОЙ ШУМ.

Рассмотрим контур с резистором R , через который течет анодный ток I_0 . Пусть частотная полоса генератора частот Δf . Тогда среднее значение квадрата флюктуационного тока, вызванного дробовым шумом, определяется формулой:

$$\overline{i_{uu}^2} = 2eI_0\Delta f \quad \text{формула Шоттки}$$



Оценим значение флюктуаций шумового напряжения на резисторе. Пусть:

$$\begin{aligned} R &= 10^4 \text{ Ом} \\ I_0 &= 10-3 \text{ А} \Rightarrow \sqrt{\overline{u_{uu}^2}} = R\sqrt{\overline{i_{uu}^2}} = R\sqrt{2eI_0\Delta f} \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ В} \\ \Delta f &= 10^3 \text{ Гц} \end{aligned}$$

Как мы видим, дробовой шум при тех же параметрах значительно сильнее теплового.

ПРЕДЕЛ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ.

Наличие флюктуаций определяет предел чувствительности измерительных приборов. Если показания прибора, обусловленные измеряемым эффектом, окажутся того же порядка, что и флюктуации, то установить происхождение показаний прибора не представляется возможным.

Предел чувствительности – минимальное значение измеряемой величины, которое прибор способен различить.

$$u_{\text{чувств}} \approx \sqrt{\overline{u_{uu}^2}}$$

31. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

Определение: Электромагнитные волны – распространяющееся в пространстве возмущение электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторые виды электромагнитных волн:

1. *Плоская монохроматическая волна.* Такая волна описывается уравнением:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{a} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$

Величина a называется *амплитудой волны*, \vec{k} – *волновой вектор*, φ_0 – *начальная фаза*. Направление распространения волны задаётся направлением волнового вектора. Плоские монохроматические волны называют также *бегущими плоскими волнами*.

2. *Сферическая волна.* Такая волна описывается уравнением:

$$E(r,t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0)$$

В этом уравнении r – расстояние от начала координат до точки наблюдения. Колебания E происходят синфазно во всех точках пространства, отстоящих от источника на фиксированное расстояние $r = const$, то есть волновые поверхности – это сферы, центр которых находится в начале координат.

В отличие от плоской волны, в уравнении сферической нет скалярного произведения $\vec{k} \cdot \vec{r}$. Дифференцируя $\omega t - kr = const$, получаем $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} > 0$, то есть волновые поверхности бегут от источника, и волну называют *расходящейся*. Если в аргументе косинуса стоит $\omega t + kr$, то это *сходящаяся* сферическая волна.

Наконец, в отличие от плоской волны амплитуда колебаний в сферической волне по мере увеличения расстояния от источника убывает по закону $A(r) = \frac{a}{r}$.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ.

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Найдем общий вид волнового уравнения. Для этого рассмотрим фундаментальные уравнения Максвелла в области пространства, в которой отсутствуют свободные заряды и токи проводимости:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Будем считать, что среда распространения волны однородна и изотропна, а её свойства не зависят от величины электромагнитного поля, так что диэлектрическая ϵ и магнитная μ проницаемости постоянны.

Продифференцируем первое уравнение по t , а от обеих частей второго уравнения возьмем операцию rot :

$$\text{rotrot} \vec{E} = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Символ Δ в правой части равенства – оператор Лапласа. Из полученных соотношений легко исключить \vec{H} . В результате получим **волновое уравнение**:

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Здесь $v = c/n$ – скорость света в среде, $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ – показатель преломления среды. Аналогичное уравнение получается и для напряжённости магнитного поля H :

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

Таким образом: Получен фундаментальный вывод теории Максвелла – переменность во времени электрических и магнитных полей приводит к распространению в пространстве электромагнитных волн.

УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА.

Если воспользоваться *законом Гаусса*, который в соответствии с принятым условием $\rho = 0$ обеспечивает равенство $\text{div} \vec{E} = 0$, то волновые уравнения можно написать в упрощенном виде:

$$\boxed{\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E} = 0; \quad \Delta \vec{H} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{H} = 0}$$

Эти два уравнения называются **уравнениями Гельмгольца**. Они описывают стационарные волновые процессы, то есть распространение волн с некоторой постоянной частотой ω .

32. Электромагнитные волны в волноводах. Критическая частота. Объемные резонаторы.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ.

Для понимания темы необходимо вспомнить определение стоячей волны.

Определение: Стоячая волна – явление интерференции (наложения) волн, распространяющихся в противоположных направлениях, при котором перенос энергии ослаблен или отсутствует.

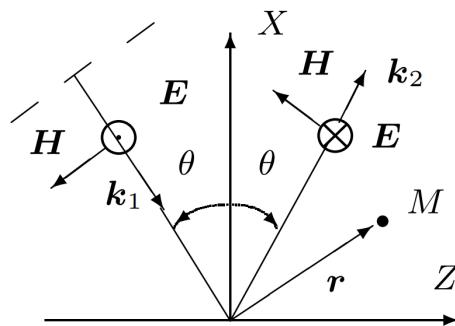
Чтобы найти структуру ЭМ-поля в прямоугольном металлическом волноводе, надо решить уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Мы же построим ЭМ-поле в волноводе, воспользовавшись методом Бриллюэна, складывая падающую и отражённые от стенок плоские волны.

Представим плоские электромагнитные волны в комплексной форме:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Векторная величина $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r})}$ называется комплексной амплитудой волны.

Рассмотрим отражение плоской ЭМ-волны от идеально проводящей, бесконечно протяжённой плоской поверхности. В некоторую точку M над проводящей плоскостью приходят две волны: падающая с напряжённостью $E_{\text{пад}}$ и, соответственно, отражённая с напряжённостью $E_{\text{отр}}$.



Из граничного условия на проводящей поверхности: $E_{\text{танг}}(t) = 0$ вытекает, что в отражённой и падающей волнах совпадают углы падения и отражения, частоты, волновые числа и модули амплитуд:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{E}_{\text{отр}} = -\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}$$

Знак "минус" в отражённой волне связан со сдвигом фаз на 180° при отражении волны от проводящей поверхности. $k_1 = k_2 = k = \omega/c$. Суммарное электрическое поле в точке M при этом равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 (e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} - e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}) e^{-i\omega t}$$

Результат вычисления скалярных произведений $\vec{k}_{1,2}\vec{r}$ удобно представить формулой:

$$\vec{k}_{1,2}\vec{r} = k(\mp x \cos \theta + z \sin \theta)$$

В итоге получаем:

$$\vec{E} = -2i\vec{E}_0 \sin(kx \cos \theta) e^{i(kz \sin \theta - \omega t)}$$

Эта формула описывает волну с амплитудой $2\vec{E}_0 \sin(kx \cos \theta)$, *продольным* волновым числом $k_z = k \sin \theta$, бегущую в направлении z с фазовой скоростью:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sin \theta}$$

Отметим две важные особенности этой волны. Во-первых, её фазовая скорость больше скорости света, а во вторых, при фиксированном угле θ амплитуда поля гармонически зависит от x и не меняется со временем.

Иначе говоря, в результате интерференции падающей и отражённой волн в пространстве над проводящей поверхностью в направлении оси x образуется система стоячих волн с *поперечным* волновым числом $k_\perp = k_x = k \cos \theta$.

Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках:

$$x_n = \frac{m\pi}{k \cos \theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Значит, поверхности нулевого электрического поля представляют собой плоскости, параллельные отражающей поверхности. То есть, добавляя другие плоские проводящие поверхности в эти плоскости, мы не исказим полученного распределения поля так как на них автоматически удовлетворяется граничное условие $E_{\text{танг}}(t) = 0$.

Таким образом: Мы показали, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться ЭМ-волна, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет продольные составляющие.

КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА.

Обратимся еще раз к соотношению $x_n = \frac{m\pi}{k \cos \theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$

Если даны две параллельные проводящие плоскости, расположенные на расстоянии a друг от друга, то между ними могут распространяться волны с углом падения θ из дискретного набора, определяемого равенствами:

$$\cos \theta_m = \frac{m\pi}{ka} = \frac{m\lambda}{2a} = \frac{m\pi c}{a\omega}$$

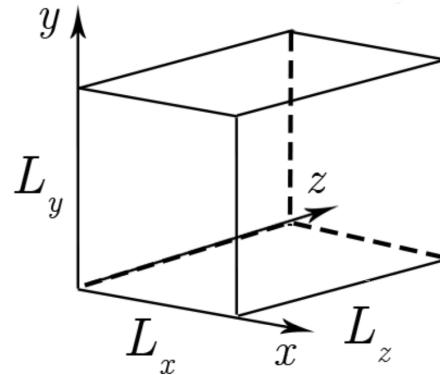
Так как косинус не может быть больше единицы, то для каждого m существует наименьшая **критическая частота**, соответствующая $m = 1$, при которой волна ещё может проходить через волновод:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi c}{a}$$

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ.

Определение: Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Рассмотрим резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда.



Запишем уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Векторные поля для монохроматических процессов задаются комплексными выражениями вида:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{E}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Поэтому, уравнения Максвелла приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \frac{\partial \hat{\vec{D}}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \hat{\vec{B}}}{\partial t}$$

Комплексные амплитуды для изотропных сред связаны соотношениями:

$$\hat{\vec{B}} = \mu \hat{\vec{H}}, \quad \hat{\vec{D}} = \epsilon \hat{\vec{E}}$$

Мы будем считать, что у нас однородная среда, то есть $\mu = \text{const}$ и $\epsilon = \text{const}$, причем $\mu = 1$. Тогда можем записать:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{i\omega \epsilon}{c} \frac{\partial \hat{\vec{E}}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \hat{\vec{B}}}{\partial t}$$

Для поля \vec{E} внутри прямоугольного резонатора получается следующее уравнение:

$$\Delta \hat{\vec{E}} + \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \hat{\vec{E}} = 0$$

Подберем резонансную частоту при заданных параметрах. Решения последнего уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} E_x = E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t} \\ E_y = E_{y0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{i\omega t} \\ E_z = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{i\omega t} \end{cases}$$

Границные условия на проводящей поверхности: $E_{\text{танг}}(t) = 0$. Значит:

$$\begin{cases} k_x L_x = \pi l \\ k_y L_y = \pi m \\ k_z L_z = \pi n \end{cases}$$

Числа l, m, n – целые, причем из этих чисел только одно может равняться нулю.

Считаем:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2 n^2} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c}$$

Отсюда получаем ответ:

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2 n^2}}$$

33. Плазма. Плазменная частота. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дебаевский радиус.

ПЛАЗМА.

Определение: *Плазма* – это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

Механические свойства плазмы в значительной степени диктуются электродинамикой. Плазма не только движется во внешнем электромагнитном поле, но и сама производит макроскопические электрические и магнитные поля. Поэтому, на микроуровне плазма отличается от обычного нейтрального газа. В газе частицы почти свободны и взаимодействуют друг с другом в моменты столкновений, а в плазме частицы непрерывно взаимодействуют друг с другом благодаря дальнодействующим силам.

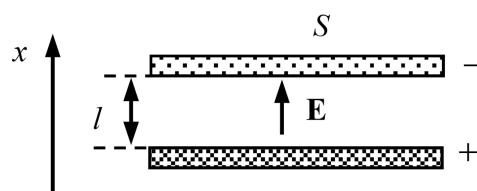
ДЕБАЕВСКИЙ РАДИУС.

Как было сказано в определении, в плазме плотности положительных и отрицательных зарядов должны практически совпадать по величине. Это свойство называется *квазинейтральностью* плазмы. Отклонения от квазинейтральности приводят к возникновению сильных полей, которые быстро восстанавливают её.

Если концентрация ионов равна n_i , а электронов – n_e , причём каждый ион отдаёт в плазму Z электронов, то условие квазинейтральности записывается в виде $Zn_i = n_e$.

Оценим характерные пространственные масштабы, в которых может нарушаться квазинейтральность. Ограничимся случаем однократно ионизированной плазмы $Z = 1$.

Пусть в слое толщиной l и объемом $V = Sl$ произошло разделение зарядов, причем все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы вблизи нижней.



Возникают нескомпенсированные заряды поверхностной плотностью $\sigma = neV/s = nel$, вследствие чего возникает поле $E = 4\pi\sigma = 4\pi nel$. Плотность энергии электрического поля: $w_E = E^2/8\pi$. Эта энергия образуется за счет кинетической энергии $w_T = nkT$ теплового движения электронов и ионов.

По закону сохранения энергии $w_T = w_E$, поэтому $E = \sqrt{8\pi nkT}$, а значит $l = \sqrt{\frac{kT}{2\pi ne^2}}$. Обозначим:

$$r_D = l/2 = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}$$

Величина r_D называется **дебаевским радиусом** и указывает пространственный масштаб, на котором может происходить отклонение от квазинейтральности.

ПЛАЗМЕННАЯ ЧАСТОТА.

Пусть в слое плазмы толщиной x произошло разделение зарядов: все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы вблизи нижней. В сформировавшемся конденсаторе возникло электрическое поле $E = 4\pi\sigma = -4\pi n e x$. (σ – поверхностная плотность заряда положительно заряженной пластины)

Запишем уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = eE \Rightarrow m\ddot{x} = -4\pi n e^2 x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_p^2 x$$

Здесь мы сделали замену:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$$

Эта величина ω_p называется **плазменной частотой**.

Как видно из полученного уравнения, электроны совершают *гармонические колебания* относительно ионов с плазменной частотой. Эти колебания называют *плазменными*. Их амплитуда порядка *дебаевского радиуса*.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ.

Пусть на плазму падает излучение – электромагнитная волна. Плазма представляет собой квазинейтральную смесь электронов и ионов, причем масса иона сильно больше массы электрона. Поэтому в поле внешней электромагнитной волны двигаются главным образом электроны. В типичных условиях $v_{\text{электр}} \ll c$, следовательно силой Лоренца со стороны магнитного поля волны можно пренебречь. Считаем, что амплитуда колебаний электронов мала по сравнению с длиной волны излучения. Тогда можно рассматривать движение электрона как движение в однородном электрическом поле волны, периодически меняющемся со временем: $E = E_0 \cos(\omega t)$.

Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль вектора электрического поля. Тогда уравнение движения отдельного электрона:

$$m\ddot{x} = eE_0 \cos(\omega t)$$

Его решение имеет вид:

$$x = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) = -\frac{eE}{m\omega^2}$$

В рассматриваемой ситуации электроны плазмы можно уподобить связанным зарядам в диэлектрике, поскольку они совершают малые колебания относительно своего исходного положения. Поэтому смещение, индуцированное электромагнитной волной, приводит к появлению эффективного дипольного момента электрона:

$$\vec{p} = -\frac{e^2 \vec{E}}{m\omega^2}$$

Если в единице объёма плазмы имеется N электронов, то вектор поляризации:

$$\vec{P} = N\vec{p} = -\frac{Ne^2}{n\omega^2}\vec{E} \equiv \alpha\vec{E}$$

Имея в виду, что $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha = \varepsilon\vec{E}$ заключаем, что **диэлектрическая проницаемость плазмы** равна:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{n\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}}$$

34. Интерференция волн. Временная и пространственная когерентность. Соотношение неопределенностей.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН.

Определение: *Интерференция* – это явление наложения волн, при котором интенсивность результирующей волны не равна всюду сумме интенсивностей складываемых волн.

Например: Пусть в пространстве распространяются две монохроматические волны с одной и той же частотой ω :

$$A_1(\vec{r}, t) = a_1 \cos[\varphi_1(\vec{r}) - \omega t], \quad A_2(\vec{r}, t) = a_2 \cos[\varphi_2(\vec{r}) - \omega t]$$

Рассмотрим суперпозицию этих волн: $A = A_1 + A_2$.

Определим интенсивность волны следующим соотношением:

$$I = \overline{A^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A^2(\vec{r}, t) dt$$

Усреднение выполняется по периоду колебаний T . Тогда в принятых обозначениях интенсивность суперпозиции волн равна:

$$I = \overline{A^2} = \overline{(A_1 + A_2)^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2} + 2\overline{A_1 A_2}$$

Для рассматриваемых волн справедливы соотношения:

$$\overline{A_1^2} = \frac{1}{2}a_1^2 = I_1, \quad \overline{A_2^2} = \frac{1}{2}a_2^2 = I_2$$

$$2\overline{A_1 A_2} = a_1 a_2 [\overline{\cos[\varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) - 2\omega t]} + \overline{\cos[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})]}] = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(r))$$

Тогда полная интенсивность оказывается равной:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(\vec{r}))$$

Таким образом: Интенсивность результирующей волны не равна сумме интенсивностей исходных волн.

ВРЕМЕННАЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ.

Временная когерентность.

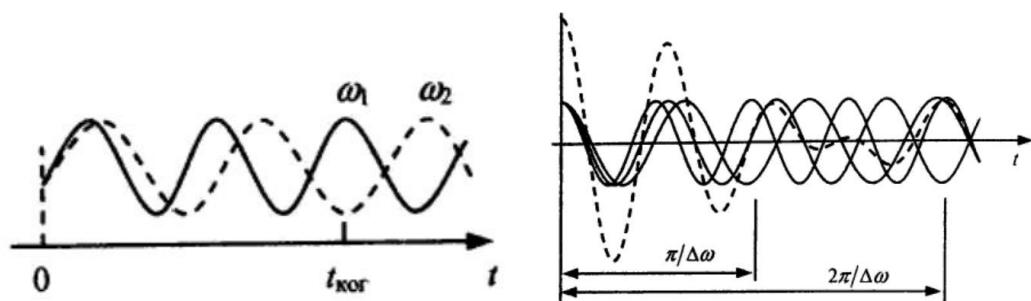
В общем случае реальная волна, испускаемая физической системой не является монохроматической. Но существуют источники, свет от которых представляет собой суперпозицию монохроматических волн. Сигналы от таких источников называются *квазимонохроматическими* и их можно представить в виде:

$$A(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

При этом амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся функции за характерное время основных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$. Рассмотрим, какие ограничения накладываются на наблюдаемость интерференции немонохроматичностью излучения:

Определение: Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз постоянна.

Определение: Время *когерентности* t называется такое время, в течении которого разность фаз рассматриваемых волн меняется незначительно. Когда сдвиг фаз составит примерно $\Delta\omega t \sim \pi$, разность фаз уже нельзя считать незначительной.



$$t \sim \frac{2\pi}{\Delta\omega}; \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}}$$

Эти формулы определяют время жизни волнового пакета с характерной шириной спектра $\Delta\omega$ (по частоте) и $\Delta\lambda$ (по длине волны).

Длина когерентности такого света:

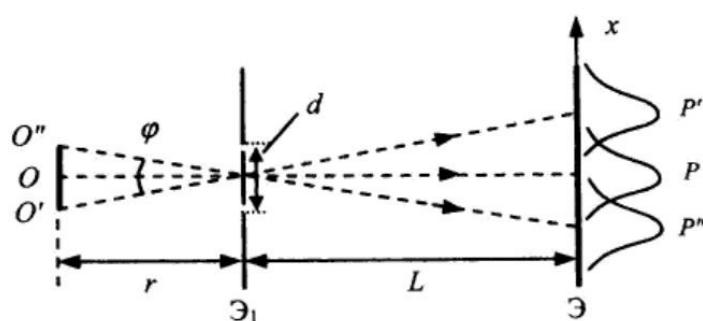
$$\boxed{l = ct \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}}$$

Пространственная когерентность.

Определение: Два точечных источника называют *пространственно когерентными*, если их размеры и взаимное расположение позволяют наблюдать интерференционные полосы.

Введенное определение обобщается на случай, когда источник представляет собой протяженное светящееся тело, если рассматривать тело как совокупность точечных источников.

Разные точки протяженного источника создают некогерентное излучение. Поэтому на экране будут складываться не амплитуды волн, создаваемых разными точками, а интенсивности. Для пояснения рассмотрим, например схему Юнга:



Каждая точка источника создаёт в схеме Юнга свою интерференционную картину и все эти картины накладываются одна на другую, но смешены одна относительно другой (как на рисунке). Если смещение невелико, то наблюдается такая же система интерференционных полос, как от точечного источника. В этом случае протяжённый источник является пространственно когерентным. Определим значения параметров системы, позволяющие наблюдать интерференцию.

Ширина полосы в опыте Юнга с точечным источником равна $\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$, где L - расстояние от экрана с щелями \mathcal{E}_1 до экрана наблюдения \mathcal{E} , а d - расстояние между щелями.

Таким образом: Мы рассмотрели необходимые условия выполнения временной и пространственной когерентностей, то есть условия наблюдения интерференционных картин. Координаты центров интерференционных картин от крайних точек источника равны:

$$x' = L \frac{\varphi}{2} - P', \quad x'' = -L \frac{\varphi}{2} - P''$$

Очевидно, что если сдвиг всех полос меньше ширины одной полосы, то будет наблюдаться интерференционная картина. Для этого необходимо, чтобы:

$$x' - x'' < \Delta x = \frac{\lambda L}{d} \Rightarrow \varphi < \frac{\lambda}{d} \Rightarrow d < \frac{\lambda}{\varphi}$$

Угловой диаметр φ , линейный размер b источника и расстояние r от него до прибора связаны соотношением $\varphi = \frac{b}{r}$.

То есть условие пространственной когерентности источника представимо в виде:

$$\frac{b}{r} < \frac{\lambda}{d}$$

Угол $\Omega = \frac{d}{r}$, под которым с места расположения источника видно расстояние между щелями на экране \mathcal{E}_1 , называется *апертурой интерференционной схемы*.

Условие пространственной когерентности источника состоит в том, что эта апертура должна быть достаточно малой:

$$\Omega < \frac{\lambda}{b}$$

Величина $\rho_{kog} = \frac{\lambda}{b} r = \frac{\lambda}{\varphi}$ называется *радиусом пространственной когерентности*.

Для наблюдения интерференционной картины необходимо, чтобы расстояние между щелями было меньше радиуса пространственной когерентности:

$$d < \frac{\lambda}{b} r = \rho$$

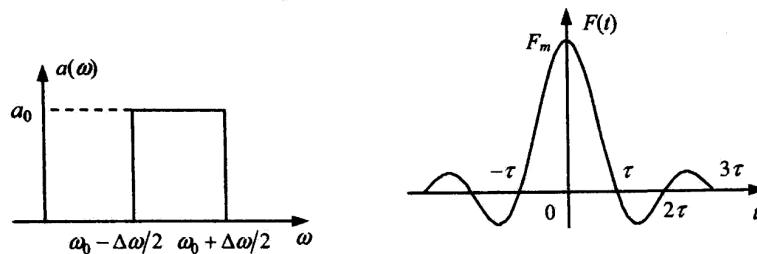
СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

Представим волновой пакет в виде суперпозиции монохроматических волн:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt$$

Пусть фурье-спектр сигнала даётся выражением:

$$a(\omega) = \begin{cases} a_0, & |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases}$$



Соответствующая времененная зависимость сигнала будет равна:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{a_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{-i\omega t} d\omega = a_0 e^{-i\omega_0 t} F(t)$$

Здесь введена функция:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i t} (e^{i\Delta\omega t/2} - e^{-i\Delta\omega t/2}) = F_m \frac{\sin(\Delta \cdot \omega t / 2)}{(\Delta \cdot \omega t / 2)}$$

Функция $F(t)$ обращается в первый раз в нуль при условии $\Delta\omega \cdot t/2 = \pi$, то есть в момент времени:

$$t = \tau = 2\pi/\Delta\omega$$

Поскольку ширина фурье-спектра сигнала равна $\Delta\omega$, а характерная длительность есть τ то мы получаем соотношение неопределенностей:

$\tau \cdot \Delta\omega = 2\pi$

Таким образом: Мы получили соотношение, означающее, что произведение характерного времени существования волнового пакета на ширину соответствующего фурье-спектра есть величина порядка 2π .

35. Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера. Границы применимости геометрической оптики.

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА-ФРЕНЕЛЯ.

Уже в XVI веке ученым было известно о способности света проникать в область геометрической тени. Однако объяснение явлению дано лишь в XIX веке. В 1800 году Томас Юнг предположил, что дифракция обусловлена диффузией света вдоль волновых фронтов, а первую количественную теорию дифракции предложил Френель в 1815-1818. Это явление было названо дифракцией.

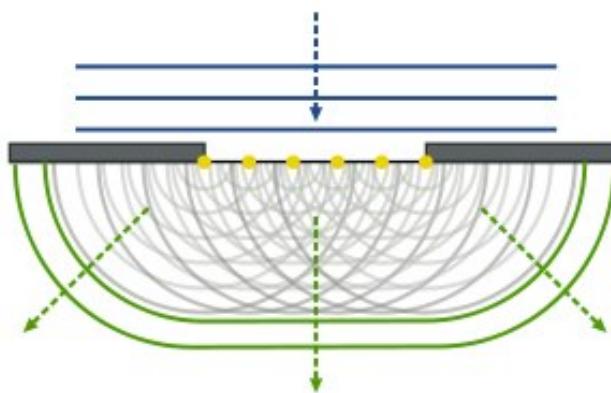
Определение: Дифракцией называется отклонение света от пути, предписываемого геометрической оптикой, обусловленное волновыми свойствами.

Принцип, позволяющий найти форму волнового фронта в различные моменты времени, если она известна в некоторый начальный момент, был сформулирован в 1678 году Гюйгенсом и состоял в следующем:

Принцип Гюйгенса: Каждая точка волнового фронта рассматривается как источник вторичных сферических волн. Огибающая фронтов этих волн в один и тот же момент времени дает новое положение волнового фронта.

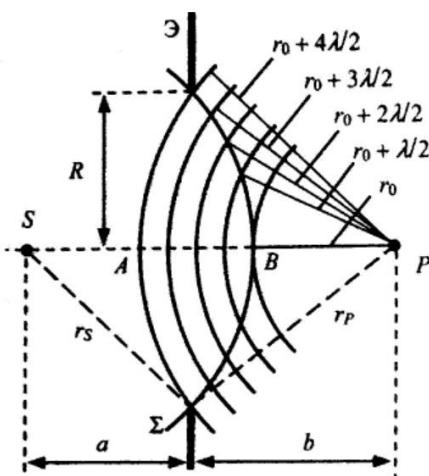
В 1816 году Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн:

Принцип Гюйгенса-Френеля: Каждый элемент волнового фронта является центром возмущения, порождающего вторичные сферические волны, в результате интерференции которых формируется результирующее световое поле в каждой точке пространства.



ЗОНЫ ФРЕНЕЛЯ.

Пусть источник S посылает сферическую волну на экран с круглым отверстием радиуса R . Из точки наблюдения, как из центра, проведем серию сферических поверхностей. Радиус первой, которая касается фронта – r_0 . Каждая из последующих имеет радиус на $\lambda/2$ больше, чем у предыдущей. Эти сферы разбивают весь волновой фронт на кольцевые области, называемые **зонами Френеля**.



Исключительно из геометрических соображений, находим:

$$r_n = \sqrt{n \frac{ab}{a+b} \lambda}$$

Величина r_n — радиус n -ой зоны Френеля. Для плоской волны $a \rightarrow \infty \Rightarrow r_n = \sqrt{nb\lambda}$

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ.

Пусть излучение падает на непрозрачный экран с отверстием размером b . Поскольку граница n -й зоны Френеля даётся формулой $r_n = \sqrt{nb\lambda}$, то по отношению к точке наблюдения P в отверстии укладывается число зон $n \sim b^2/\lambda h$.

Соответственно говорят, что при $n \ll 1$ имеет место *дифракция Фраунгофера*, при $n \sim 1$ реализуется *дифракция Френеля* и при $n \gg 1$ — *геометрическая оптика*.

Величина $f = b^2/\lambda h$ называется *параметром Френеля*. Используют также *волновой параметр*, определяемый формулой:

$$p = \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\lambda h}}{b}$$

Заметим, что волновой параметр имеет смысл отношения размера первой зоны Френеля к размеру препятствия.

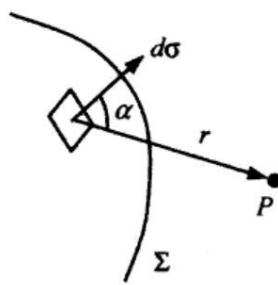
Таким образом: Законы геометрической оптики применимы, когда размер первой зоны Френеля много меньше размера препятствия. Это связано с тем, что в этом пределе открыта значительная часть волнового фронта, и роль краёв препятствия незначительна, так как точка наблюдения находится близко к экрану.

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ.

Френелю удалось не только дополнить принцип Гюйгенса, но и дать математическую формулировку принципа Гюйгенса—Френеля. Проделаем то же самое:

Пусть имеется стационарное волновое поле $S(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Заметим, что функция $A(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (не стоит на этом зацикливаться):

$$\Delta A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$



Если на волновом фронте выделить малую площадку $d\sigma$ с амплитудой волны A_σ , то ее можно можно рассматривать, как источник вторичной сферической волны $\sim A_\sigma e^{ikr}/r$.

Результирующая волна в точке P получается суммированием волн, проходящих от всех точек волнового фронта:

$$A(P) = \int_{\sigma} K(\alpha) A_\sigma \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

Коэффициент $K(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{i\lambda}$ – множитель, учитывающий ориентацию площадки по отношению к направлению на точку P . Эта формула дает приближенное решение уравнения Гельмгольца с граничным условием $A(\vec{r})|_{\sigma} = A_\sigma$ и называется *интегралом Френеля, или дифракционным интегралом.*

Этот интеграл можно записать в виде:

$$A(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S A_\sigma(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta$$

Пусть размер препятствия мал по сравнению с расстоянием r_0 до точки наблюдения, амплитудный множитель $\frac{1}{r}$, учитывающий уменьшение амплитуды в сферической волне по мере удаления от вторичного источника, можно заменить постоянной величиной $\frac{1}{r_0}$. Множитель наклона $\cos \alpha$ также считаем приблизительно одинаковым (и равным единице) для всех вторичных источников, расположенных в области отверстия. Не утомились?) Точное выражение для расстояния r от вторичного источника (малой площадки, расположенной в точке (ξ, η)) до точки наблюдения $P(x, y, z)$ равно:

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2}{z^2} + \frac{(y - \eta)^2}{z^2}}$$

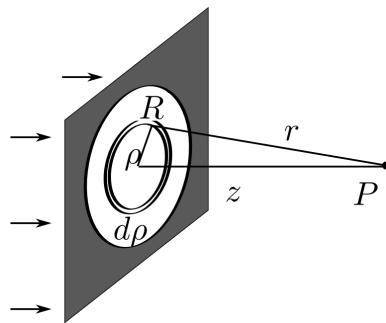
При вычислении фазы kr ошибка должна быть мала по сравнению с π , и следовательно, ошибка в вычислении r мала с $\lambda/2$. Считая поправку к единице под корнем малой, оставим только два члена разложения в ряд Тейлора, полагая, что отброшенные слагаемые вносят малую поправку по сравнению с λ . Это приближение называется *френелевским*:

$$r \approx z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z}$$

Будем считать, что отверстие освещается плоской волной амплитуды A_0 , а точка наблюдения лежит на оси z ($x = 0, y = 0$), тогда в итоге получаем:

$$A(0, 0) = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta$$

Теперь мы можем рассмотреть *дифракцию Френеля на круглом отверстии*. Найдем полем на оси отверстия в точке $P(0, 0, z)$, находящейся на расстоянии z от него.



Воспользуемся френелевским приближением:

$$A = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{\rho \leq R} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} d\xi d\eta$$

Величина $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ – расстояние от площадки $d\xi d\eta$ до центра отверстия, R – радиус отверстия. Перейдём, с учётом осевой симметрии, к интегрированию по кольцам радиуса ρ толщиной $d\rho$ (площадью $2\pi\rho d\rho$). Получаемый интеграл легко берётся, и мы находим комплексную амплитуду поля в точке P :

$$A = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_0^R e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} 2\pi\rho d\rho = A_0 e^{ikz} \left(1 - e^{-i\frac{k}{2z}R^2} \right)$$

Отсюда интенсивность в точке P равна:

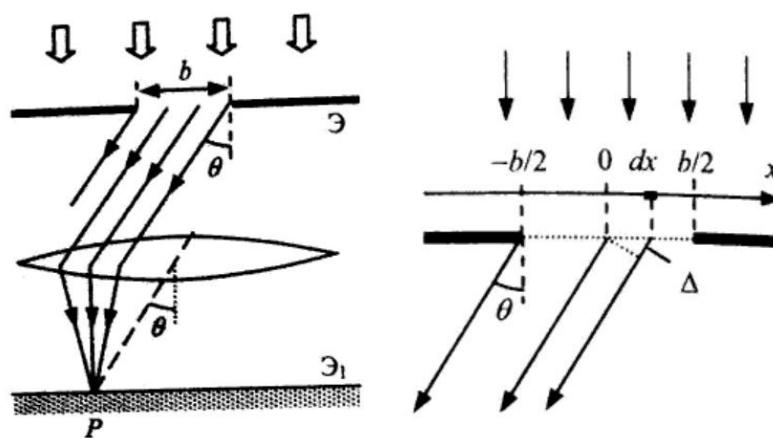
$$I = |A|^2 = 2I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{k}{2z} R^2 \right) \right)$$

Интенсивность $I_0 = A_0^2$ – интенсивность исходной плоской волны.

Таким образом: Интенсивность I_P на оси отверстия зависит от радиуса отверстия и расстояния до него.

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть плоская волна $A = A_0 e^{ikz}$ падает по нормали на экран с щелью, шириной b .



Дифракцию будем наблюдать в фокальной плоскости линзы. Для нахождения результирующего поля разобьем волновой фронт на полоски шириной dx . Нужно найти сумму всех волн, идущих в определенном направлении θ .

Разность хода: $\Delta = x \sin \theta$. Тогда амплитуда волны от полоски dx в направлении θ :

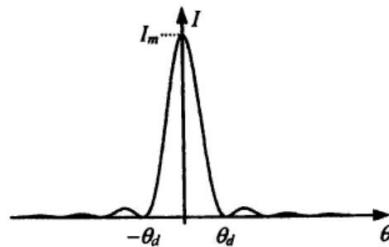
$$dA \sim A_0 e^{ik\Delta} \frac{dx}{b} = A_0 e^{ikx \sin \theta} \frac{dx}{b}$$

Сделаем замену $u = l \sin \theta$, тогда:

$$A(\theta) = \int dA \sim \frac{A_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iux} dx = A_0 \frac{\sin(ub/2)}{ub/2}$$

Отсюда следует выражение для интенсивности:

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin(ub/2)}{ub/2} \right)^2 \quad I_m = I(0)$$



Условие первого дифракционного минимума: $\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$.

36-37. Спектральные приборы (призма, дифракционная решетка, интерферометр Фабри-Перо) и их основные характеристики. Дифракционный предел разрешения оптических и спектральных приборов. Критерий Рэлея.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ.

Определение: Спектральными называются оптические приборы, в которых осуществляется физическое разложение электромагнитного излучения на монохроматические составляющие.

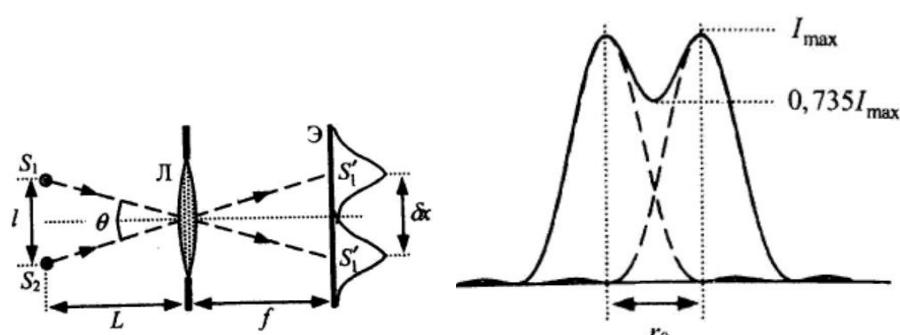
Спектральный состав электромагнитного излучения может много рассказать о своём источнике и о среде, в которой излучение распространялось. Каждый спектральный прибор предназначен для решения конкретной задачи спектроскопии. Наиболее важными характеристиками являются:

- *Разрешающая способность* $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ характеризует возможность прибора различать две близкие спектральные линии с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$.
- *Угловая дисперсия* $D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$ – производная зависимость угла отклонения $\varphi(\lambda)$ волны диспергирующим элементом по λ . По величине угловой дисперсии можно определить угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями: $\delta\varphi \approx D\delta\lambda$.
- *Дисперсионная область* – предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$ прибора, для которой дифракционные максимумы соседних порядков не перекрываются. Она определяет диапазон длин волн, при которых прибор может быть использован для анализа спектра.

КРИТЕРИЙ РЭЛЕЯ.

Для определения разрешающей способности приборов, будем пользоваться **критерием Рэлея**, который определяет условие, при котором источники считаются различимыми.

Пусть имеются два некогерентных точечных источника S_1 и S_2 . Интенсивность излучения в плоскости изображения Э равна сумме интенсивностей источников. С другой стороны, каждое из них создает дифракционное пятно Эйри с полушириной: $r_0 = \theta_d f = 1,22 \frac{\lambda}{D} f$, где f и D – фокусное расстояние и диаметр линзы.



Критерий Рэлея: Чтобы два источника были различимыми необходимо, чтобы расстояние между центрами дифракционных пятен было не меньше радиуса одного пятна.

Следствие: Если центры изображений (S' и S'') находятся на расстоянии $\delta x = f\theta$, то две точки разрешаются данным прибором, если $\delta x \geq r_0$:

$$\theta > 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

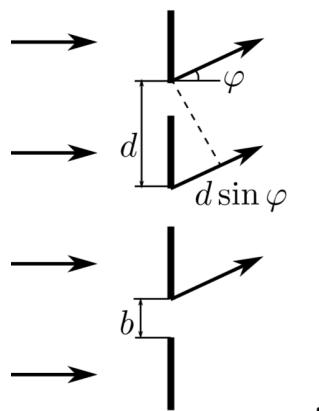
Если точки S_1 и S_2 находятся на расстоянии L от линзы, то они разрешаются, если расстояние между ними:

$$l = \theta L > 1,22 \frac{\lambda}{D} L$$

ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА.

Определение: *Дифракционная решетка* – непрозрачный экрана, в котором прорезано большое число N параллельных щелей – штрихов.

Пусть a – ширина щели, b – расстояние между ближайшими краями двух соседних щелей. Величина $d = a + b$ называется периодом решетки. Длина решетки с N штрихами равна $L = Nd$.



Если на решетку падает излучение с длиной волны λ по нормали к плоскости решётки, то вследствие дифракции они отклоняются от своего первоначального направления. Рассмотрим лучи, отклонившиеся на угол φ . Разность хода лучей от двух соседних штрихов равна $\Delta = d \sin \varphi$. Если эта величина равна целому числу длин волн, то волны от всех штрихов взаимно усиливают друг друга:

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда выражение для *угловой дисперсии* дифракционной решётки имеет вид:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2 \lambda^2}}$$

Направление на первый дифракционный минимум дается равенством:

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

Согласно критерию Рэлея, компоненты считаются разрешенными, если это же направление соответствует главному дифракционному максимуму компоненты $\lambda + \Delta\lambda$:

$$d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \left(m + \frac{1}{N} \right) \lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

Таким образом, приходим к следующему выражению для *разрешающей способности* дифракционной решётки:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

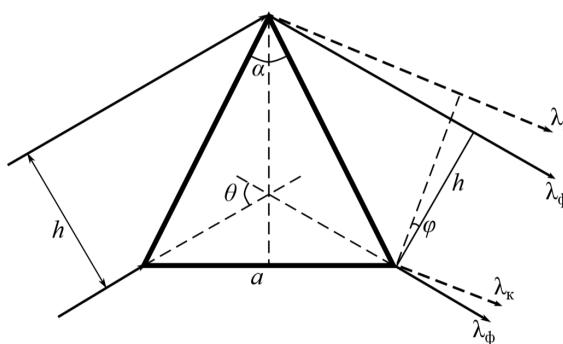
Дисперсионную область можно найти из равенства $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Дифракционная решетка работает в первом порядке спектра и ограничений на оптические спектры не возникает. Для нее *дисперсионная область* $\Delta\lambda \approx \lambda$.

ПРИЗМА.

Принцип действия этого спектрального прибора основан на зависимости коэффициента преломления стекла от длины световой волны. Комбинируя различные виды стекла, количество элементов, их форму, можно сконструировать множество призм для решения задач спектроскопии. Оценим угол $\delta\varphi$ между волновыми фронтами двух близких линий λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Пусть на призму с основанием a падает параллельный пучок света шириной h , и этот пучок целиком заполняет призму.



Симметричный ход лучей (внутри призмы лучи распространяются параллельно основанию) соответствует углу наименьшего отклонения падающего пучка θ , который в свою очередь зависит от преломляющего угла призмы α и показателя преломления $n(\lambda)$.

Максимальная разность хода двух лучей с длиной волны λ и $\lambda + \Delta\lambda$ возникает вблизи основания призмы:

$$\Delta = a[n(\lambda + \Delta\lambda) - n(\lambda)] \approx a \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda = h\delta\varphi$$

Для этой разности хода получаем *угловую дисперсию*:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{a}{h} \frac{dn}{d\lambda}$$

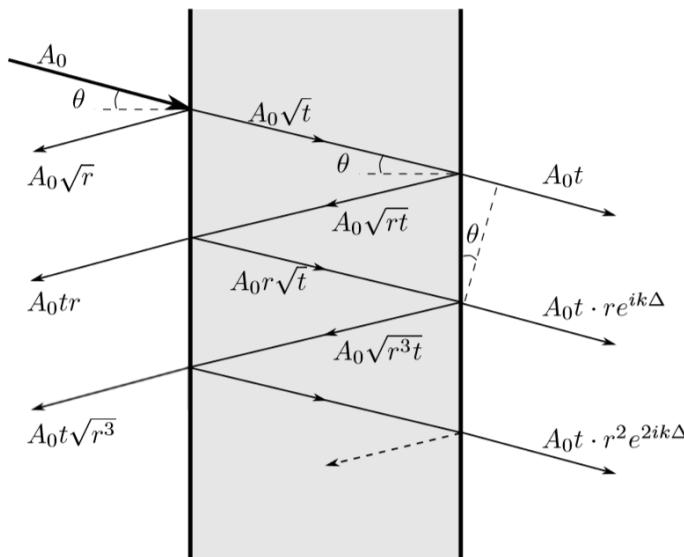
Воспользуемся критерием Рэлея направление на дифракционный максимум для одной длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ должно совпадать с направлением на дифракционный минимум для длины волны λ . Другими словами, для компоненты λ , разность хода лучей теперь будет равна длине волны:

$$\Delta \approx a \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda = \lambda \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Призма, как и дифракционная решетка, работает в первом порядке спектра и ограничений на оптические спектры не возникает. Для нее *дисперсионная область* $\Delta\lambda \approx \lambda$.

ИНТЕРФЕРОМЕТР ФАБРИ-ПЕРО.

Интерферометр Фабри–Перо применяется для исследования тонкой структуры спектральных линий, является неотъемлемым элементом лазера, выполняя роль оптического резонатора. Он состоит из двух стеклянных или кварцевых пластин с хорошо отполированными поверхностями, которые установлены параллельно друг другу на некотором расстоянии. На одну поверхность каждой пластины нанесены хорошо отражающие свет покрытия. Таким образом, интерферометр Фабри–Перо можно рассматривать как плоско-параллельную пластину, в которой происходят многократные отражения и интерференция световых волн.



Пусть L – расстояние между зеркалами, или *база интерферометра*. Из геометрических соображений находим разность хода двух интерферирующих волн, падающих на интерферометр под углом θ :

$$\Delta = 2L \left(\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \sin \theta \right) = 2L \cos \theta$$

Интерференционные максимумы будут наблюдаться для волн, падающих под углами θ_m , удовлетворяющими условию:

$$\Delta = 2L \cos \theta = m\lambda$$

Отсюда для малых углов $\theta_m \ll 1$ и больших порядков спектров имеем $m \approx M = 2L\lambda$. То есть:

$$-2L \sin \theta_m d\theta = -2L\theta_m d\theta = md\lambda \approx \frac{2L}{\lambda} d\lambda$$

Таким образом, *угловая дисперсия* интерферометра:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2L \sin \theta_m} \approx -\frac{1}{\lambda \theta_m}$$

Выражение для *разрешающей способности* интерферометра дадим без вывода:

$$R = \frac{2\pi L}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{1 - \rho}$$

Величина $\rho = r^2$ – энергетический коэффициент отражения от одной пластины, то есть $r = A_{\text{отр}}/A_{\text{пад}}$, где $A_{\text{отр}}$ и $A_{\text{пад}}$ – амплитуды отраженной и падающей на зеркало волн.

Рабочий порядок спектра интерферометр Фабри–Перо весьма высок ($2L/\lambda$), поэтому его *дисперсионная область* очень мала:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$$

Таким образом: Мы вывели основные характеристики спектральных приборов и можем рассчитать их дифракционные пределы разрешения для некоторых примеров.

- Диффракционная решётка с плотностью штрихов 500 мм^{-1} и размером однородной области 1 см , $N \approx 5 \cdot 10^3$ в первом порядке спектра имеет $R = 5 \cdot 10^3$ и $\delta\lambda = 1,1 \text{ \AA}^\circ$ для $\lambda = 5760 \text{ \AA}$, во втором $R = 10^4$; $\delta\lambda = 0,5 \text{ \AA}^\circ$.
- Призма с $|\frac{dn}{d\lambda}| \approx 10^3 \text{ см}^{-1}$ и основанием $a = 3 \text{ см}$: $R \approx 3 \cdot 10^3$, $\delta\lambda = 2 \text{ \AA}^\circ$.
- Интерферометр Фабри–Перо: $L = 1 \text{ мм}$, $r \approx 0,85$; $R \approx 6,6 \cdot 10^4$, $\delta\lambda = 0,09 \text{ \AA}^\circ$, порядок спектра $2L/\lambda \approx 3,5 \cdot 10^3$, эффективное число волн $\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \approx 19$.

РАЗРЕШАЮЩИЕ СПОСОБНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ.

Основным элементом всех этих приборов является линза. Поэтому достаточно рассмотреть, как для неё реализуется критерий Рэлея.

Глаз. Средний диаметр зрачка глаза составляет $D \sim 3 - 4$ мм. Принимая для оценки $D \sim 3$ мм, длину волны света $\lambda \sim 0,5$ мкм, получаем угловое разрешение глаза:

$$\theta \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{рад} \approx 0,7'$$

Телескоп. Для телескопа с диаметром объектива $D_{\text{тел}}$ размер пятна Эйри в $D_{\text{тел}}/D_{\text{гл}}$ глаз меньше, чем для глаза. Поэтому угловое разрешение составит:

$$\theta_{\text{тел}} = \theta_{\text{гл}} \frac{D_{\text{гл}}}{D_{\text{тел}}}$$

Микроскоп. Для микроскопа мы уже вывели разрешающую способность, поясняя критерий Рэлея:

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

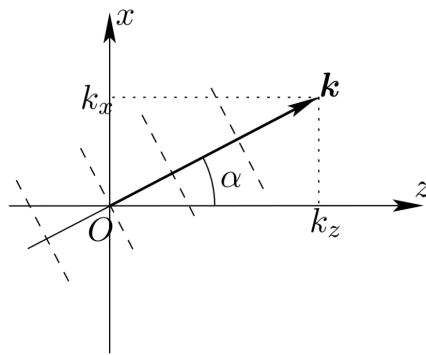
38. Пространственное Fourier-преобразование в оптике. Дифракция на синусоидальных решетках. Теория Аббе формирования изображения.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОПТИКЕ.

Рассмотрим плоскую волну, волновой вектор которой \vec{k} составляет угол α с осью z . Комплексная амплитуда такой волны имеет вид:

$$f(x, z) = ae^{i(k_x x + k_z z + \varphi)}$$

Обозначения: a – амплитуда волны, φ – начальная фаза, $k_x = k \sin \alpha$, $k_y = k \cos \alpha$ – проекции \vec{k} на оси x и z соответственно (мы рассматриваем для простоты случай $k_y = 0$).



Введём комплексный коэффициент $c = ae^{i\varphi}$ (определяющий и амплитуду, и начальную фазу) и обозначение $k_x = u$. Тогда:

$$f(x, z) = ce^{i(ux + \sqrt{k^2 - u^2}z)}$$

Волновое поле плоской волны в любой плоскости $z > 0$ можно найти, если известно поле плоской волны в плоскости $z = 0$:

$$f(x, 0) = ce^{iux} \Rightarrow f(x, z) = f(x, 0) \cdot e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}$$

Множитель $e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}$ определяет набег фазы плоской волны при распространении между двумя плоскостями, разделенными промежутком z . Обратим также внимание на аналогию ce^{iux} с комплексной формой записи гармонического колебания частоты ω – $f(t) = ce^{i\omega t}$. На основании этой аналогии величина $u = k \sin \alpha$ может быть названа пространственной частотой. Можно сказать, что волны разных направлений α – это волны разных пространственных частот.

Итак, граничное поле f_0 можно представить в виде:

$$f_0(x) = \sum c_n e^{iu_n x}$$

Набор чисел c_n представляет собой пространственный спектр волнового поля $f_0(x)$. Каждое слагаемое в сумме есть поле плоской волны (в плоскости $z = 0$), направление α_n которой определяется пространственной частотой.

В общем случае, поле $f_0(x)$ представляется в виде интеграла Фурье:

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} du, \quad C_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-iux} dx$$

Таким образом: Волновое поле представляется в виде суперпозиции плоских волн, каждой из которых отвечает определённое направление волнового вектора. Иными словами, рассматривается **пространственное преобразование Фурье**.

ДИФРАКЦИЯ НА СИНУСОИДАЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ.

Рассмотрим амплитудную синусоидальную решётку. Функция пропускания такой решётки с периодом $d = 2\pi/\Omega$ равна:

$$t(x) = 1 + m \cos \Omega x$$

Пусть решётка освещается плоской нормально падающей волной амплитуды a , то есть $f_s(x) = ae^{ikz}$. Решётка установлена в плоскости $z = 0$, поэтому $f_s = a$. Тогда:

$$f_0(x) = a(1 + m \cos \Omega x)$$

Воспользуемся тождеством: $\cos \Omega x = \frac{1}{2}e^{i\Omega x} + \frac{1}{2}e^{-i\Omega x}$. Следовательно:

$$f_0(x) = a + \frac{am}{2}e^{i\Omega x} + \frac{am}{2}e^{-i\Omega x}$$

Комплексная амплитуда волны в плоскости z , то есть решение уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$f(x,z) = ae^{ikz} + \frac{am}{2}e^{i(\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2}z)} + \frac{am}{2}e^{i(-\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2}z)}$$

Полагаем, что период решётки $d = 2\pi\Omega$ существенно больше длины волны λ и, следовательно, частота решётки много меньше k : $\Omega \ll k$. Тогда можно считать $\sqrt{k^2 - \Omega^2} \approx kz - \frac{z}{2k}\Omega^2$. Используя это находим:

$$f(x,z) = ae^{ikz} \left[1 + me^{-i\frac{z}{2k}\Omega^2} \cdot \cos \Omega x \right]$$

Теперь мы можем проанализировать картины дифракции на различных расстояниях от решётки:

- На расстояниях z_n , для которых $\frac{z_n}{2k}\Omega^2 = 2\pi n$, то есть $z_n = \frac{2d^2}{\lambda}n$ имеем $e^{-i\frac{z}{2k}\Omega^2} = 1$. Тогда, при малой глубине модуляции m , пренебрегая членами m^2 , следует:

$$f(x,z) = ae^{ikz_n}(1 + m \cos \Omega x) \Rightarrow I(x,z_n) = |f(x,z_n)|^2 \approx a^2(1 + 2m \cos \Omega x)$$

- На расстояниях z_n , для которых $\frac{z_n}{2k}\Omega^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, имеем $e^{-i\frac{z}{2k}\Omega^2} = i$. Тогда:

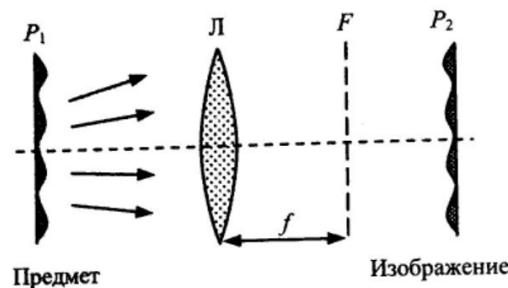
$$f(x,z) = a(1 + im \cos \Omega x) \Rightarrow I(x,z_n) = |f(x,z_n)|^2 \approx a^2 = const$$

Таким образом: Периодически по z изменяется видность наблюданной дифракционной картины. Причина этих изменений – в различии фазовых набегов трёх плоских волн, бегущих в области $z > 0$ от решётки: осевой волны, бегущей вдоль оси z , и двух боковых волн, бегущих в направлениях $\sin \alpha = \pm \Omega/k = \pm \lambda/d$.

ТЕОРИЯ АББЕ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ.

По теории Эрнеста Аббе, формирование изображения с помощью одиночной линзы происходит в два этапа.

- Свет распространяется от плоскости P_1 , до фокальной F , где формируется пространственный спектр предметной волны (первая дифракция): линза осуществляет первое пространственное преобразование Фурье и создаёт в плоскости F первичное изображение.



- Свет распространяется от фокальной F до плоскости P_2 . Если плоскости P_1 и P_2 *сопряжённые*, т.е амплитудно-фазовые соотношения точек поля в плоскостях P_1 и P_2 одинаковые, то в P_2 формируется изображение предмета (или вторичное изображение). Соответственно, первичное изображение подвергается обратному преобразованию Фурье (что рассматривается как вторая дифракция).

Формирование изображения по Аббе называется **принципом двойной дифракции**.

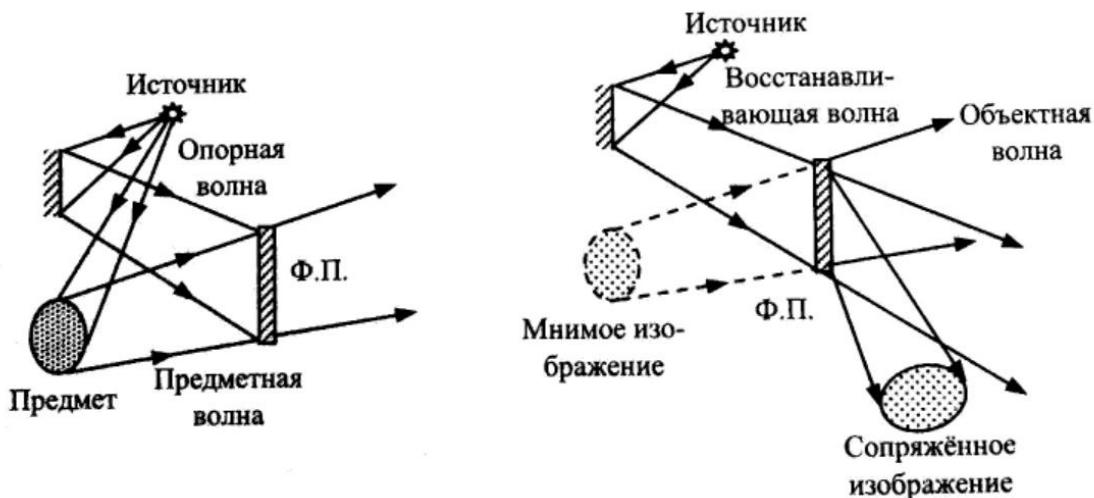
39. Принципы голограммии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Объемные голограммы.

ПРИНЦИПЫ ГОЛОГРАФИИ.

Определение: *Голограммия* – это метод точной записи волновых полей с учётом амплитуды и фазы.

Определение: *Голограмма* – объемное изображение на пластинке, полученное с помощью *голограммии*.

Для записи голограммы используется, наряду с волной от фотографируемого предмета (*предметной волной*), ещё одна волна, называемая *опорной*. На фотографии записывается результат их интерференции, в результате чего записывается информация о фазе предметной волны (относительно опорной, заданной изначально). При освещении голограммы восстанавливающей волной (которая должна быть идентичной опорной) восстанавливается предметная волна.

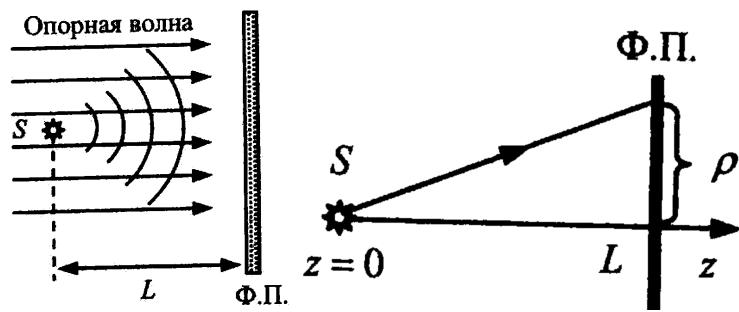


ГОЛОГРАММА ГАБОРА.

Если плоская опорная волна попадает по нормали на фотопластинку, то реализуется схема *Габора*. Рассмотрим голограмму точечного источника в схеме Габора. Поле на фотопластинке представляет собою интерференцию волны от источника и опорной волны:

$$A = A_s \frac{e^{ikr}}{r} + A_{\text{оп}} e^{ikz}$$

На фотопластинке записывается распределение интенсивности $I = |A|^2$. В соответствии с принципами фурье-оптики голограмму можно рассматривать как объект с функцией пропускания $D = \beta I$. Положим, что источник находится далеко от фотопластинки.



Будем также считать, что в центре голограммы одинаковы амплитуды интерферирующих волн: $A_s/L = A_{\text{оп}} = A_0$ и их фазы. Отсюда следует, что можно положить:

$$A_s \frac{e^{ikr}}{r} \approx A_0 e^{ikr}$$

Находим распределение интенсивности на фотопластинке:

$$I = I_0 |e^{ikr} + e^{ikL}|^2 = 2I_0[1 + \cos k(r - L)]$$

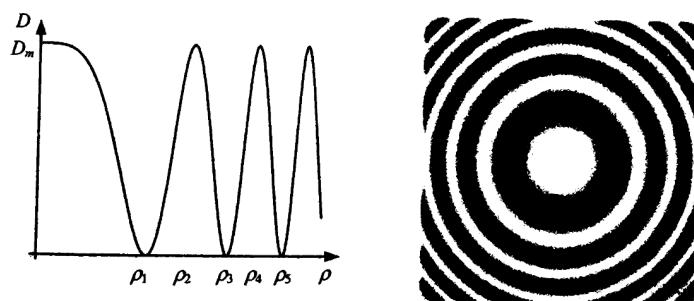
В малых углах:

$$r - L = \sqrt{L^2 + \rho^2} - L \approx \rho^2/2L$$

Таким образом получаем:

$$D = \beta I = \frac{1}{2} D_m [1 + \cos \left(\frac{k\rho^2}{2L} \right)]$$

График зависимости пропускания голограммы точечного источника от расстояния до центра и голограмма точечного источника изображены на рисунке:

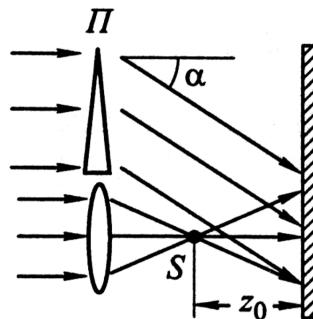


Голограмма представляет собой набор тёмных и светлых колец и называется *зонной пластинкой Габора*.

ГОЛОГРАММА С НАКЛОННЫМ ОПОРНЫМ ПУЧКОМ.

При наблюдении голограммических изображений, полученных по схеме Габора, действительное и мнимое изображения создают взаимные помехи: изображения S' и S'' находятся на одной прямой с точкой, в которой расположен глаз наблюдателя. Помехи создаются

также возникающей при восстановлении плоской волной, бегущей вдоль оси z и не несущей информации об объекте. В 1962 году Лейт и Упатниекс предложили использовать для записи голограммы наклонный опорный пучок.



Пусть предметом является точечный источник S . Наклон опорного пучка обеспечивается призмой Π . Поле предметной волны на голограмме в приближении малых углов:

$$A_{\text{п}}(x,y) = A_0 e^{i \frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2)}$$

Наклонная опорная волна имеет вид $A_{\text{оп}} = A_0 e^{iux}$, где $u = k \sin \alpha$ – пространственная частота опорной волны. Мы полагаем, что волны имеют равные амплитуды и создают в начале координат плоскости xy (плоскость голограммы) синфазные колебания. Функция пропускания проявленной голограммы, пропорциональная интенсивности суммарной волны при записи, имеет вид:

$$D(x,y) \sim \left| A_0 e^{iux} + A_0 e^{i \frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2)} \right|^2$$

Введение наклонного опорного пучка приводит к сдвигу мнимого и действительного изображений таким образом, что наблюдатель может рассматривать их из разных положений, в которых они не создают взаимных помех.

ОБЪЕМНЫЕ ГОЛОГРАММЫ.

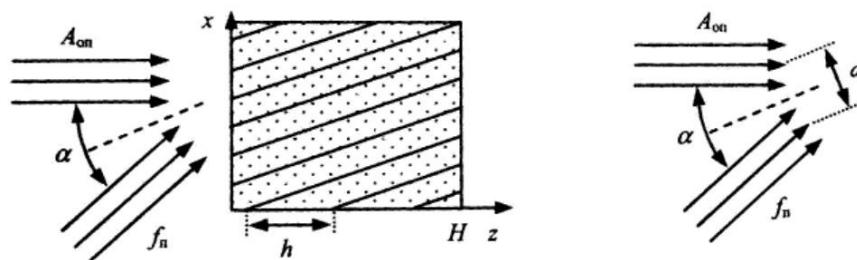
Если поле интерферирующих волн записывается в некотором объеме фоточувствительного материала, то мы можем выделить записанное изображение с высокой точностью. Такие голограммы называют **толстыми или объемными**.

Пусть предметная волна падает на фотопластинку под некоторым углом α :

$$f_p = f_0 e^{i \vec{k} \vec{r}}$$

Считаем, что опорная волна распространяется по нормали к поверхности голограммы.

$$A_{\text{оп}} = A_0 e^{ikz}$$



Интенсивность суммарной волны равна:

$$I = |A_0 e^{ikz} + f_0 e^{iux+iwz}|^2 = A_0^2 + f_0^2 + 2A_0 f_0 \cos[kx \sin \alpha - k(1 - \cos \alpha)z]$$

Следовательно, период структуры вдоль трассы опорной волны (оси z) равен:

$$h = \frac{2\pi}{k(1 - \cos \alpha)} = \frac{\lambda}{1 - \cos \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin^2(\alpha/2)} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}$$

Величина d – расстояние между соседними плоскостями интерференционной картины.

Таким образом: Голограмма представляет собой систему "зеркал" с периодом d , которые частично отражают, частично пропускают волну излучения. Отсюда следует, что *голограмма объемная, если её толщина:*

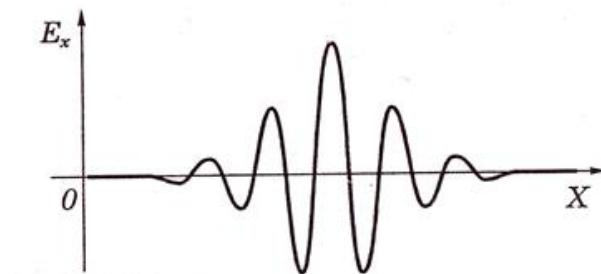
$$H \gg h = \frac{\lambda}{1 - \cos \alpha}$$

40. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Классическая теория дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсии.

ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ.

Суммарный волновой процесс, созданный в среде всеми гармоническими составляющими, частоты которых лежат в пределах узкой полосы частот $\Delta\Omega$ (вблизи несущей частоты ω_0), есть:

$$f(t, z) = \int A(\Omega) e^{i((\omega_0 + \Omega)t - k(\omega_0 + \Omega)z)} d\Omega$$



Такую группу волн принято называть **волновым пакетом**.

ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ.

Определение: *Фазовой скоростью* называется величина $v_\phi = \omega/k$, где v постоянна и определяется только свойствами среды, в которой распространяется волна.

В общем случае связь частоты и волнового числа, называемая *законом дисперсии* $\omega = \omega(k)$ может быть более сложной.

Рассмотрим две волны, с частотами ω_1 и соответствующими волновыми числами $k_1 = k(\omega_1)$ и $k_2 = k(\omega_2)$. Пусть волны задаются уравнениями:

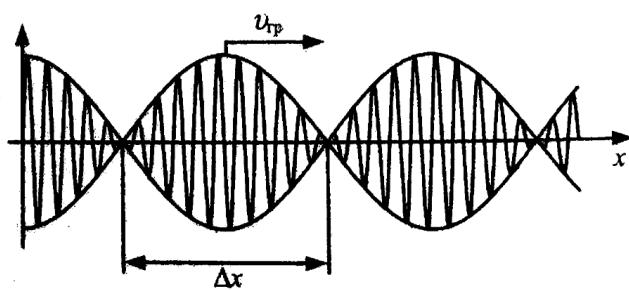
$$u_1(x, t) = a \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad u_2(x, t) = a \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Результирующее колебание есть сумма этих волн. Положим, что волновые числа близки и введем обозначения:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k, \quad k_2 - k_1 = \Delta k, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \quad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$$

Тогда для суммы волн можем записать:

$$u(x, t) = 2a \cos\left[\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)\right] \sin(kx - \omega t)$$



Рассматривая эволюцию такой волны во времени, мы наблюдаем неизменный профиль, то есть огибающую высокочастотных колебаний, если движемся вдоль волны со скоростью: $v_{rp} = d\omega/dk$. Эта величина называется **групповой скоростью**, с которой смещается огибающая высокочастотных колебаний.

ФОРМУЛА РЭЛЕЯ.

Найдем связь фазовой и групповой скоростей. Подставляем в формулу групповой скорости соотношение $\omega = kv_\Phi$:

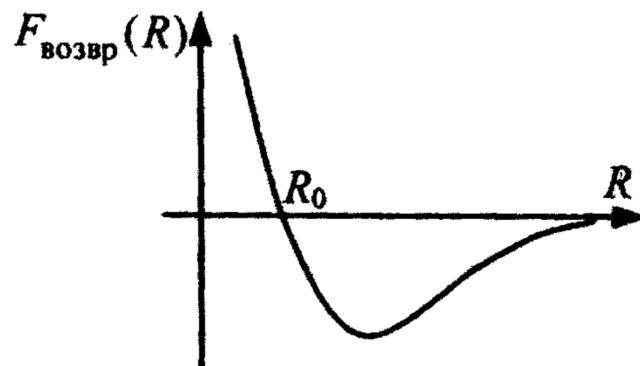
$$v_{rp} = v_\Phi + k \frac{dv_\Phi}{dk}$$

Подставляя $\lambda = 2\pi/k$, получим **формулу Рэлея**:

$$v_{rp} = v_\Phi - \lambda \frac{dv_\Phi}{d\lambda}$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ.

Классическая теория дисперсии, предложенная Лоренцом, основана на предположении, что среда представляет собой газ, состоящий из невзаимодействующих между собой атомов. В атоме имеется один электрон, называемый оптическим, квазиупруго связанный с атомом. Возвращающая сила равна $\vec{F}_{\text{возвр}} = -\beta \vec{r}$, где \vec{r} – радиус-вектор электрона относительно положения равновесия R_0 . Зависимость силы, действующей на электрон со стороны атома имеет вид:



Уравнение, описывающее поведение электрона под действием электромагнитной волны, имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{возвр}} + \vec{F}_{\text{тр}} + e\vec{E}$$

$$\vec{F}_{\text{возвр}} = -\beta\vec{r}, \quad \vec{F}_{\text{тр}} = -\eta\vec{v}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Сила трения, учитывает потери энергии вследствие излучения и передачи энергии среде. Предположим, что амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной электромагнитной волны, тогда можно считать $E_0 = \text{const}$. Вводя собственную частоту осциллятора $\omega_0 = \sqrt{\beta/m}$ и коэффициент затухания $\gamma = \eta/2m$, получим:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m} e^{-i\omega t}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \vec{E}$$

Дипольный момент атома равен $\vec{p} = e\vec{r}$. Заметим, что мы получили выражение для поляризуемости молекулы:

$$\vec{p} = \beta\vec{E} \Rightarrow \beta = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$$

Если в единице объема среды находится N атомов, то вектор поляризации среды $\vec{P} = n\vec{p}$. Поскольку $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E}$, то находим диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \text{плазменная частота.}$$

Таким образом: Диэлектрическая проницаемость зависит от частоты колебаний электромагнитной волны. Она в общем случае является также комплексной величиной.

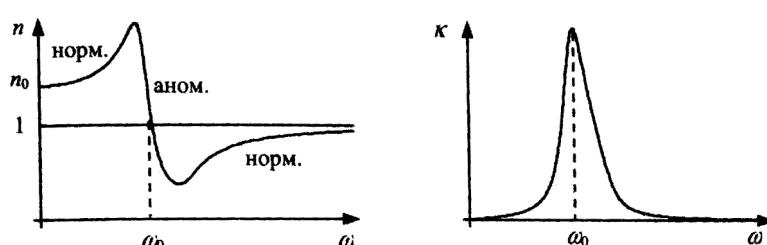
НОРМАЛЬНАЯ И АНОМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИИ.

Обозначим $\sqrt{\epsilon} = n + i\kappa$. Величина $n = \text{Re}\sqrt{\epsilon}$ называется *показателем преломления*, величина $\kappa = \text{Im}\sqrt{\epsilon}$ - *показателем поглощения*(затухания).

Когда диэлектрическая проницаемость мало отличается от единицы, можно получить следующие выражения для показателей преломления и поглощения:

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad \kappa = \frac{\gamma\omega_p^2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Из этих формул видим все основные особенности поведения $n = n(\omega)$, $\kappa = \kappa(\omega)$:



Область частот, где показатель преломления возрастает, называется областью **нормальной дисперсии**:

$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ или } \frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Область частот, где показатель преломления убывает, называется областью **аномальной дисперсии**:

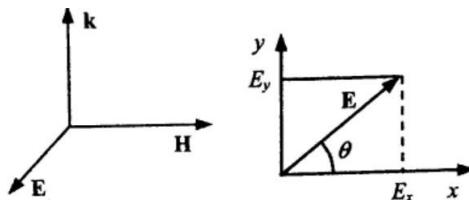
$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ или } \frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Таким образом: Аномальная дисперсия наблюдается, если частота электромагнитной волны попадает в окрестность резонансной частоты колебаний электрона. В этой области дисперсия имеет место резонансное возрастание показателя поглощения.

41. Поляризация света. Угол Брюстера. Оптические явления в одноосных кристаллах.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА.

Определение: Поляризацией называется характеристика векторных волновых полей, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.



Определение: Плоскость поляризации – плоскость, построенная на векторах \vec{E} и \vec{k} .

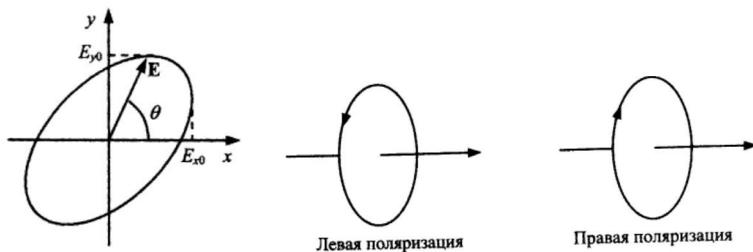
Свет называют естественным или неполяризованным, если ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в результирующей волне хаотически изменяется во времени, в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{k} . Плоская волна называется линейно поляризованной, если пара векторов \vec{E} и \vec{H} не изменяет с течением времени своей ориентации.

Выберем систему координат таким образом, что вектор k направлен вдоль оси z , а вектор \vec{E} лежит в плоскости (x, y) и пусть частота колебаний поля равна ω , тогда:

$$\begin{cases} E_x = E_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x) \\ E_y = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

Волна линейно поляризована, если разность фаз равна $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = 0, \pm\pi$. и вектор \vec{E} совершают колебания вдоль фиксированной прямой.

В противном случае волна называется эллиптически поляризованной. Вектор \vec{E} совершает вращение по эллипсу.

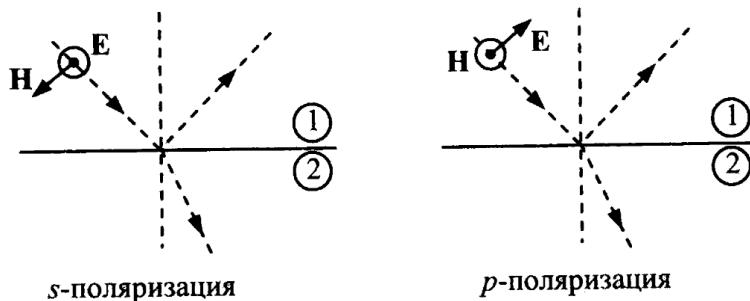


Если $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = 0, \pm\pi/2$ и $E_{x0} = E_{y0}$, то вектор \vec{E} движется по окружности и такая поляризация называется круговой. Различают два вида круговой поляризации: правая и левая. Если смотреть навстречу волновому вектору, то левой поляризации отвечает вращение вектора \vec{E} против часовой стрелки, а правой – наоборот.

УГОЛ БРЮСТЕРА.

Поляризация излучения возникает при отражении света от границы раздела сред с разными оптическими свойствами. В зависимости от ориентации вектора E по отношению к плоскости падения волны различают два типа поляризации:

1. *s-поляризация*, когда вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения
2. *p-поляризация*, когда вектор \vec{E} лежит в плоскости падения



Амплитудные коэффициенты отражения r и прохождения d волны определяются равенствами:

$$r = \frac{E'_0}{E_0}, \quad d = \frac{E''_0}{E_0}$$

Величины E_0 , E'_0 и E''_0 – амплитуды соответственно падающей, отражённой и преломлённой волн.

Рассмотрим *s*-поляризованный волну. Выберем условно направление вектора напряжённости электрического поля "нам навстречу" во всех трёх волнах – падающей, отражённой и прошедшей. На границе раздела диэлектриков 1 и 2 выполняются условия непрерывности касательных к границе раздела компонент $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ или:

$$\begin{cases} E_0 - E'_0 = E''_0 \\ H_0 \cos \theta + H'_0 \cos \theta' = H''_0 \cos \theta'' \end{cases}$$

Используя эти равенства, равенство $n_1 E_0 = H_0$ и закон Снеллиуса, для амплитудных коэффициентов отражения и преломления можно получить соотношения:

$$r_\perp = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}, \quad d_\perp = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')}$$

Введем относительный показатель преломления $n_{21} = n_2/n_1$ и еще раз используем закон Снеллиуса $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$. Тогда эти равенства можно переписать в виде:

$$r_\perp = \frac{\cos \theta - \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}, \quad d_\perp = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}$$

Аналогичным путем можем получить амплитудные коэффициенты отражения и преломления для p -поляризованной волны:

$$r_{||} = \frac{n_{21}^2 \cos \theta - \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}{n_{21}^2 \cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}, \quad d_{||} = \frac{2n_{21} \cos \theta}{n_{21}^2 \cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - (\sin \theta)^2}}$$

Полученные соотношения называются *формулами Френеля*. Они устанавливают соотношения между амплитудами падающей, отражённой и преломленной волн в зависимости от угла падения и поляризации падающей волны.

Согласно формулам Френеля коэффициент отражения для s -поляризованной волны не обращается в нуль ни при каких углах падения

Для p -поляризованной волны следует, что коэффициент отражения обращает в нуль при угле падения $\theta = \theta_B$, удовлетворяющем условию:

$$\tan \theta_B = n_{21}$$

Это значит, что при падении под таким углом отражённая волна оказывается полностью поляризованной, обладающей s -поляризацией. Данное явление названо по имени физика Дэвида Брюстера, открывшего его в 1815 году, а угол θ_B – **углом Брюстера**.

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ.

В некоторых кристаллах потенциальные ямы, в которых находятся электроны вблизи узлов решётки, не являются сферически-симметричными. При этом можно выбрать систему координат так, что для малых отклонений от положения равновесия потенциальная энергия электрона будет иметь вид:

$$U = a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2$$

Если два коэффициента a_i равны то кристалл называется *одноосным*. Положим $a_y = a_z = a_\perp$, $a_x = a_{||}$. Ось x при этом называется *оптической осью кристалла*. Поскольку отклонения от положения равновесия под действием внешнего поля у электронов вдоль разных осей координат обратно пропорциональны соответствующим коэффициентам a_i , то вектор удельного дипольного момента \vec{P} и, как следствие, вектор электрической индукции \vec{D} окажутся в общем случае неколлинеарны вектору \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon_\perp \vec{E}_\perp + \epsilon_{||} \vec{E}_{||}$$

Величины $\epsilon_{||}$ и ϵ_\perp – диэлектрические проницаемости кристалла вдоль и поперёк его оптической оси соответственно. Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла, которые в отсутствие электрических зарядов и токов имеют вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

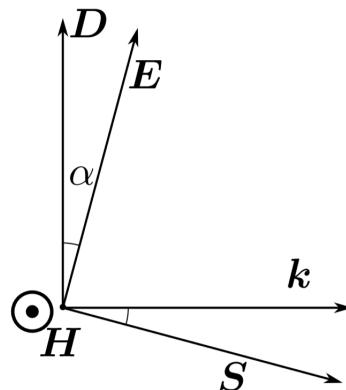
Рассмотрим распространение плоских монохроматических электромагнитных волн в одноосных кристаллах. Такие волны можно записать в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Отсюда следует, что $\text{rot} \vec{H} = -i\vec{k} \times \vec{H}$, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D}$ и аналогичные выражения для других векторов. Подставив эти выражения в уравнения Максвелла, получим, что \vec{E} , \vec{H} , и \vec{D} должны быть связаны соотношениями:

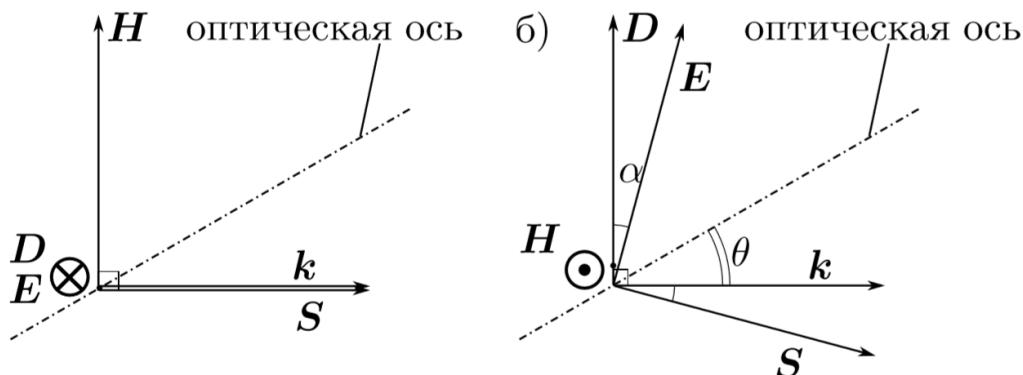
$$\vec{D} = -\frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{H}, \quad \vec{D} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

Отсюда видно, что векторы \vec{D} , \vec{H} , и \vec{k} взаимно перпендикулярны, то есть плоские волны поперечны в отношении \vec{D} и \vec{H} , но в общем случае не поперечны в отношении \vec{k} . Кроме того, вектор \vec{D} должен лежать в одной плоскости с векторами \vec{D} и \vec{k} , так как все они перпендикулярны вектору \vec{H} :



Таким образом, выполнение наложенных условий на расположение векторов возможно только в двух случаях:

1. Если вектор \vec{D} перпендикулярен плоскости, в которой лежат оптическая ось кристалла и волновой вектор \vec{k} (эта плоскость называется *главным сечением*)
2. Если вектор \vec{D} лежит в главном сечении



В первом случае плоская волна называется *обыкновенной*, а во втором – *необыкновенной* волной. Так как уравнения Максвелла линейны, в общем случае любое монохроматическое поле в кристалле можно представить в виде суперпозиции обыкновенной и необыкновенной волн.

Обыкновенная и необыкновенная волны распространяются в кристалле с разными скоростями. У обыкновенной волны $\vec{E} = \vec{E}_\perp$. Значит, векторы индукции и напряжённости электрического поля коллинеарны: $\vec{D} = \epsilon_\perp \vec{E}_\perp$, поэтому вид уравнений Максвелла для неё не отличается от уравнений для плоских волн в изотропных средах. Следовательно, фазовая скорость $v = \omega/k$ этой волны не зависит от направления \vec{k} и равна:

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\perp}} = \frac{c}{n_o}$$

У необыкновенной волны \vec{E} и \vec{D} в общем случае неколлинеарны, а фазовая скорость такой волны зависит от угла θ между оптической осью и волновым вектором. Тогда:

$$D = \epsilon E \cos \alpha, \quad v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n(\theta)}, \quad \epsilon = \frac{1}{\frac{(\sin \theta)^2}{\epsilon_{||}} + \frac{(\cos \theta)^2}{\epsilon_\perp}}$$

Таким образом: Плоская монохроматическая волна, попадающая из изотропной среды в анизотропный одноосный кристалл, распадается в общем случае на две взаимно ортогонально поляризованные плоские волны, распространяющиеся в общем случае в разных направлениях и с разными скоростями.

42. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Брэгга-Вульфа. Показатель преломления вещества для рентгеновских лучей.

ДИФРАКЦИЯ РЕНГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ.

К рентгеновскому диапазону относят электромагнитное излучение с длиной волны:

$$10^{-3} \text{ нм} < \lambda < 50 \text{ нм}$$

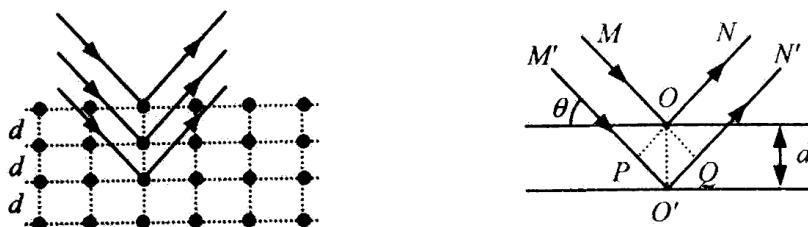
Исследования показали, что излучение с $\lambda > 0,2$ нм – жесткое и обладает большой проникающей способностью. Излучение же с $\lambda > 0,2$ нм поглощается сильнее и проникает в вещество на меньшую глубину.

Как и свет, рентгеновское излучение обладает волновыми свойствами, проявляющимися, в частности, в явлениях интерференции и дифракции. В то же время, вследствие малой длины волны, такие явления наблюдать заметно сложнее. В 1912 году немецкий физик Макс фон Лауз предложил для обнаружения дифракции рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$ использовать кристалл. Идея состояла в том, что межатомные расстояния в твёрдых телах именно такого порядка. Кроме того, в кристаллах атомы расположены регулярно, что позволяло ожидать интерференцию волн, рассеянных группой атомов.

ФОРМУЛА БРЭГГА-ВУЛЬФА.

Австралийский физик У. П. Брэгг и независимо российский физик Г. В. Вульф предложили простой способ расчёта картины дифракции рентгеновских лучей.

Рассмотрим схему, называемую *брэгговским отражением*, позволяющую рассчитывать дифракцию рентгеновского излучения на кристаллах. Введём атомные плоскости, то есть плоскости, содержащие большое число атомов. Обозначим d расстояние между парой соседних плоскостей, а θ – угол скольжения луча.



Отражение волны от кристалла можно рассматривать как результат интерференционного усиления волн, идущих от разных атомных плоскостей. Рассмотрим две соседние параллельные плоскости. Разность хода лучей MON и $M'O'N'$ равна:

$$\Delta = PO'Q = 2d \sin \theta$$

Условие интерференционного усиления этих волн называется **формулой Брэгга-Вульфа** и имеет вид:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

43. Квантовая природа света. Внешний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна. Эффект Комптона.

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА.

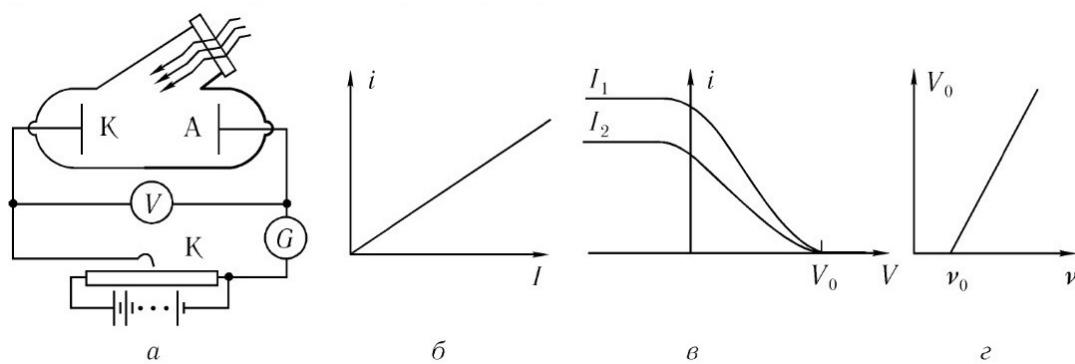
Вопрос о том, свет – это волны или частицы, был предметом обсуждений еще в XVII веке. К концу XIX века, благодаря работам Юнга и Френеля, волновая теория света торжествовала!

В 1887 г. Г. Герц поставил эксперимент по исследованию разряда между заряженными металлическими шариками и обнаружил, что если испускаемый шар облучать светом, для появления того же разряда требуется меньшее напряжение. В ходе эксперимента он наблюдал явление, ныне называемое **внешним фотоэлектрическим эффектом**. Именно объяснение этого явления впервые дало повод говорить о **квантовой природе света**.

ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ. УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА.

Испускание электронов фотокатодом, облучаемым светом, называется **внешним фотоэлектрическим эффектом**. Это явление объясняется фотонной теорией света.

Схема обычной установки по исследованию фотоэффекта показана на рисунке. В откаченной колбе имеются две металлические пластины-электрода – катод K и анод A , к которым прикладывается напряжение V от батареи. На катод через кварцевое стекло (оно, в отличии от обычного, пропускает ультрафиолетовые лучи) направляется свет от внешнего источника. В результате в цепи появляется ток i , который пропорционален интенсивности света I , что вполне согласуется с классическим представлением.



В 1902 г. немецкий ученый Ф. Ленард обнаружил, что существует максимальная длина волны света, выше которой фотоэффект невозможен, что фототок, независимо от интенсивности света, прекращается при одном и том же отрицательном потенциале V_0 , который называется *задерживающим потенциалом* и, что *существует минимальная частота излучения ν_0* , ниже которой фототок прекращается, а также установил замечательный факт, что энергия вылетающего электрона не зависит от интенсивности падающего света и прямо пропорциональна его частоте. Объяснение этого факта поставило целую проблему перед физикой.

В 1905 г. Эйнштейну объяснил это свойство фотоэффекта, введя предположение о том, что энергия в пучке монохроматического света состоит из порций, величина которых $h\nu$, что свет состоит из безмассовых частиц, называемых *фотонами*, энергия которых $\hbar\omega$ и, что фотоэффект возможен, если энергия фотона больше работы выхода электрона W . Таким образом максимальная кинетическая энергия электрона T_{max} равна:

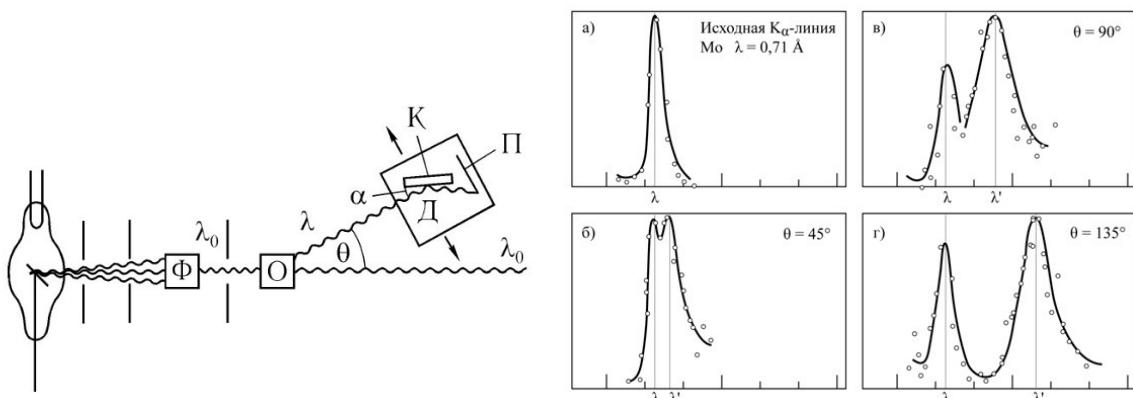
$$T_{max} = \hbar\omega - W \quad \text{— Уравнение Эйнштейна}$$

ЭФФЕКТ КОМПТОНА.

Проблематика: Есть ли импульс у фотона? Потрясающий ответ на это дали эксперименты американского физика Комптона.

В 1922 г. Комптон изучал рассеяние рентгеновских лучей на веществе. Он измерял энергию фотонов, рассеянных под разными углами. Эксперимент показал, что *энергия фотонов зависит от угла рассеяния*.

Описание эксперимента: На рисунке приведены схема установки для исследования эффекта Комптона и спектры фотонов, рассеянных на различные углы относительно падающего пучка.

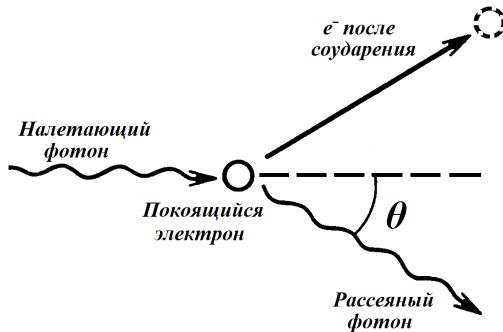


Наряду с непрерывным спектром у рентгеновского излучения есть монохроматические линии, пропустив его через систему щелей и фильтр, от него остается только монохроматическое излучение. Будем рассеивать такие γ -лучи на атомах графита и рассматривать лучи, прошедшие только под некоторым углом θ .

Наша цель снять зависимость интенсивности прошедшего излучения от его длины волны. Чтобы измерить длину волны необходимо под разными углами рассеивать свет на дифракционной решетке. Зная период решетки и угол рассеивания мы точно определим длину волны. Т.к. длина волны рентгеновского излучения мала (порядка 5 Å), дифракционная решетка тут не работает и за ДР берется кристалл К. В силу периодического распределения атомов кристалл — ДР. Вращая кристалл, чтобы изменять угол α падения на него, легко получить необходимое распределение.

Результаты: эксперимент показал, что в спектре рассеянных фотонов имеются две энергетические группы: энергия одних фотонов равна энергии падающих — *упругое соударение* с тяжелыми ядрами, энергия других меньше — *неупругое рассеяние* на электронах.

Обоснование: результаты экспериментов необъяснимы с позиции классических волновых представлений. Комптон заметил, что данное столкновение похоже на удар бильярдных шаров и рассмотрел падающий на электрон фотон как частицу, имеющую энергию и импульс. Записав законы сохранения, ему удалось описать полученные зависимости.



Пусть ω, ω', p, p' – соответственно частоты и импульсы падающего и рассеянного фотона, θ, ϕ – углы рассеяния фотона и электрона, p_e – импульс электрона.

$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega' = E_e \\ \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}_e \end{cases} \Rightarrow m^2c^2 = \frac{E_e^2}{c^2} - p_e^2 = \frac{1}{c^2}(\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega') - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2$$

Так как $\mathbf{p}\mathbf{p}' = pp' \cos\theta$ и $\frac{\hbar\omega}{c} = p, \frac{\hbar\omega'}{c} = p'$, после элементарных преобразований имеем:

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\theta)}}$$

Это соотношение можно переписать для длин волн $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}$ квантов:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)}$$

Величина $\Lambda = \frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-10}$ см называется *комптоновской длиной волны* электрона.

Итоги: В чем же заключается значение комптон-эффекта? В рамках принятого в XIX в. представления о чисто волновой природе электромагнитного излучения объяснить комптоновское рассеяние невозможно.

С классической точки зрения электромагнитная волна должна воздействовать сразу на все электроны мишени. При этом *доля энергии и импульса волны, передаваемая одному электрону, должна быть ничтожна малой*.

В комптоновском рассеянии, напротив, *энергия и импульс передаются отдельному электрону, причем во вполне заметных количествах*. Эксперимент показывает, что *законы сохранения энергии и импульса выполняются не для волны «в целом», а в одиночном, так сказать, «элементарном» акте рассеяния*, именно так, как это предписывает теория «бильярдных шаров».

44. Спонтанное и вынужденное излучение. Инверсная заселенность уровней. Принцип работы лазера.

СПОНТАННОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

Рассмотрим процессы взаимодействия излучения с атомом. Пусть в некоем объеме с зеркальными стенками находится в одном и том же состоянии n фотонов и один атом в возбужденном состоянии с уровнями энергии E_1 и E_2 такими, что $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, где ω – частота фотона.

Динамическое равновесие в системе наблюдается за счет того, что все время происходит поглощение и испускание фотона атомом. Когда атом находится в состоянии E_1 , у нас имеется $(n + 1)$ фотонов в системе. За большое время t атом много раз будет находиться то в первом, то во втором состоянии, и число среднее переходов N_{12} из нижнего состояния в верхнее будет равно числу обратных переходов N_{21} . Пусть $W_{12}^{(1)}$ – вероятность перехода атома в возбужденное состояние под действием фотона в единицу времени, а t_1 – время, которое атом проводит в среднем в нижнем состоянии. Тогда:

$$N_{12} = W_{12}^{(1)}(n + 1)t_1 = N_{21} \Rightarrow N_{12} = nW_{12}^{(1)}t_1 + W_{12}^{(1)}t_1 = N_{21}^{\text{вын}} + N_{21}^{\text{сп}}$$

То есть переходы из верхнего состояния в нижнее представляют собой сумму двух слагаемых: переходы, происходящие под действием внешнего излучения и самопроизвольные переходы атома из возбужденного состояния.

Отношение числа *вынужденных* к числу *спонтанных* переходов равно отношению вероятностей этих переходов:

$$\frac{N_{21}^{\text{вын}}}{N_{21}^{\text{сп}}} = n \Rightarrow \frac{w_{21}^{\text{вын}}}{w_{21}^{\text{сп}}} = n \Rightarrow w^{\text{сп}} = \frac{w_{21}^{\text{вын}}}{n} = W_1^{\text{вын}}$$

Таким образом:

1. Вероятность **вынужденного излучения** пропорциональна числу имеющихся в системе фотонов. Другими словами, чем больше фотонов, тем больше вероятность испустить еще один.
2. Вероятность **спонтанного излучения** $w^{\text{сп}}$ равна вероятности вынужденного перехода под влиянием одного фотона $W_1^{\text{вын}}$.

Полученный результат легко обобщается на случай с несколькими атомами в системе.

ИНВЕРСНАЯ ЗАСЕЛЕННОСТЬ УРОВНЕЙ.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия излучения со средой. Пусть на некую среду, содержащую N атомов при температуре T , падает по оси z монохроматическое

излучение интенсивности I и частоты ω такое, что энергия этого излучения равна разности энергетических уровней атомов среды. Пусть N_1 – число атомов среды, находящихся на основном состоянии, а N_2 – число атомов в возбужденном состоянии. Тогда уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$dI = -W_a^{(1)}IN_1dz + W_a^{(1)}IN_2dz + W_sN_2dz$$

Величины $W_a^{(1)}$ и W_s – вероятности поглощения и спонтанного излучения одного фотона. Если спонтанное излучение значительно менее вероятно, чем индуцированное (достаточно высока интенсивность падающего излучения), то:

$$\frac{dI}{I} = W_a^{(1)}(N_2 - N_1)dz \Rightarrow I = I_0 \exp[W_a^{(1)}(N_2 - N_1)z]$$

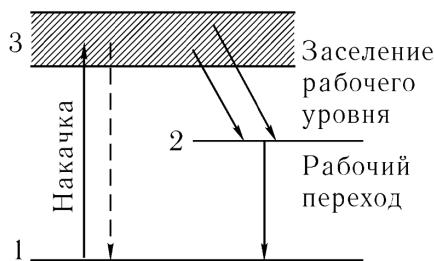
Итак: Если в среде заселенность уровней соответствует равновесной, то всегда $N_2 < N_1$ и происходит только затухание падающей волны. Чтобы происходило усиление падающего излучения, в среде должна быть неравновесная заселенность уровней, то есть $N_2 > N_1$. Такую среду называют средой с **инверсной заселенностью** уровней.

ПРИНЦИП РАБОТЫ ЛАЗЕРА.

Определение: Лазер или оптический квантовый генератор – это устройство, преобразующее энергию накачки (световую, электрическую, тепловую, химическую и др.) в энергию когерентного, монохроматического, поляризованного и узконаправленного потока излучения.

При спонтанном испускании частота фотона может быть произвольной в пределах контура спектральной линии, ширина которого определяется только шириной энергетических уровней, между которыми происходит лазерный переход. Произвольно также направление распространения фотона и фаза. В отличие от спонтанного излучения, при вынужденном испускании фотоны полностью тождественны фотонам, воздействующим на систему возбужденных атомов. Особенности вынужденного испускания позволяют генерировать **когерентное излучение**. Первоисточником является процесс спонтанного излучения, далее в игру вступает индуцированный процесс.

В простейшем варианте активная среда представляет собой трехуровневую систему: основной **1**, возбужденный **3** и метастабильный **2**.



Внешнее излучение ("накачка") переводит атомы из основного состояния **1** в возбужденное состояние **3**. Из этого состояния атомы частично возвращаются в основное состояние, а частично переходят в метастабильное состояние **2**. В этом состоянии они накапливаются, пока не возникнет индуцированное излучение. Чтобы свет источника "накачки" использовался эффективно, нужно, чтобы уровень, на который производится накачка (уровень **3**) был достаточно широким, а значит, короткоживущим. Уровень **2**, наоборот, должен быть долгоживущим, чтобы спонтанное излучение с этого уровня не могло конкурировать с индуцированным.

Газоразрядная трубка "световой накачки" обвивающая рабочий объем лазера, создает мощный поток фотонов, возбуждающих атомы рабочего вещества. Заметим, что никакое накопление возбужденных атомов во втором возбужденном состоянии невозможно. То самое излучение, которое переводит атомы из основного в возбужденное состояние (состояние **3**), вызывает индуцированное излучение этих атомов и их ускоренный переход в основное состояние. В процессе возбуждения часть атомов, однако, высвечивается из второго в первое возбужденное состояние и там накапливается.

Выше мы показали, что в активной среде происходит усиление падающего света. Однако, чтобы превратить усилитель в генератор когерентных колебаний, необходимо создать положительную обратную связь. В лазере обратную связь обычно получают, помещая активную среду между двумя параллельными зеркалами, имеющими высокий коэффициент отражения.

Отличительной особенностью открытого резонатора является то, что для осевых пучков его добротность оказывается очень высокой, потери обусловлены только дифракцией на краях зеркала. Эти потери очень малы и добротность открытого резонатора может достигать огромной величины – порядка 10^9 . Для всех наклонных к оси открытого резонатора световых пучков добротность оказывается малой, так как через несколько отражений наклонные лучи уходят через открытую боковую поверхность.

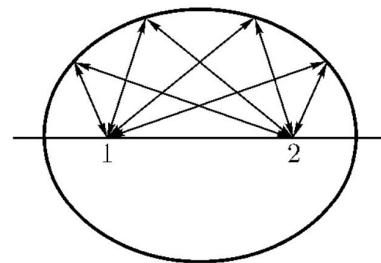
Таким образом: Открытый резонатор осуществляет одновременно как частотную фильтрацию излучения (в силу высокой добротности колебаний), так и пространственную фильтрацию (высокую добротность имеют строго осевые пучки). Излучаемая волна отражается от зеркал, опять возвращается в активное вещество, вновь вызывая индуцированные переходы. Атомы в метастабильном состоянии как бы ждут лишь того момента, когда "нужные" фотоны "приказывают" им излучать свет.

45. Излучение абсолютно черного тела. Формула Планка, законы Вина и Стефана-Больцмана.

ИЗЛУЧЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА.

Равновесное тепловое излучение – электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии со стенками полости, в которой оно заключено.

Рассмотрим два непрозрачных тела, обменивающихся электромагнитным излучением и имеющих одинаковую температуру. Заключим эти тела в зеркальную оболочку, полностью отражающую излучение. Такая оболочка играет в нашем случае роль обычной в термодинамике адиабатической оболочки, изолирующей тела от окружающего мира. По второму принципу термодинамики ни одно из этих тел не может нагревать другое.



Пусть, для простоты, оболочка имеет вид эллипсоида, а тела помещены в его фокусы. Все излучение, уходящее от первого тела, попадает в этом случае на второе, а все излучение, уходящее от второго тела, — на первое.

Обозначим через U_1 и U_2 потоки энергии, излучаемые этими телами. Эти потоки не равны потокам W_1 и W_2 , уходящим от тел, поскольку уходящая от каждого из них энергия складывается из излучаемой и отражаемой.

Введем коэффициент поглощения a , равный отношению интенсивностей поглощенного и падающего на тело излучения. Так как излучение, падающее на тело, может либо отражаться, либо поглощаться, то коэффициент отражения равен $(1 - a)$.

$$W_1 = U_1 + (1 - a_1)W_2$$

Заметим теперь, что при равновесии поток энергии U_1 , испускаемой первым телом, равен поглощаемому им потоку энергий от второго W_2 :

$$U_1 = a_1 W_2 \Rightarrow W_1 = W_2 \Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{a_1} = \frac{U_2}{a_2}}$$

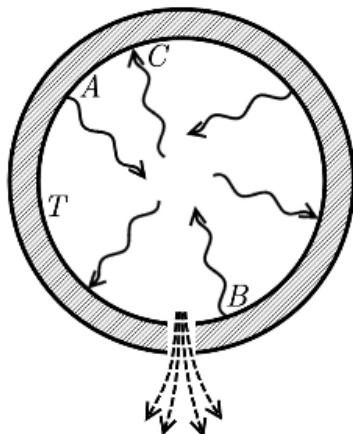
Таким образом, количество энергии, излучаемой телом, пропорционально его коэффициенту поглощения.

Абсолютно черное тело – физическая идеализация, тело *поглощающее все падающее на него электромагнитное излучение $a = 1$ частот и ничего не отражающее*. Из полученной формулы следует, что **излучение абсолютно черных тел является максимально возможным при данной температуре**.

Абсолютно черных тел в природе не существует, поэтому в физике для экспериментов используется модель. Она представляет собой непрозрачную замкнутую полость с небольшим отверстием, стенки которой имеют одинаковую температуру. Свет, попадающий внутрь сквозь это отверстие, после многократных отражений будет полностью поглощен, и отверстие снаружи будет выглядеть совершенно черным.

ФОРМУЛА ПЛАНКА.

Макс Планк получил соотношение для *объемной спектральной плотности излучения*, заполняющего полость сферы с небольшим отверстием, нагретой до некоторой температуры T , то есть энергию излучения, отнесенную к единичному объему и к единичному интервалу изменения частоты. Эта формула называется основной формулой равновесного излучения.



$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp \hbar\omega/kT - 1} \quad \text{формула Планка}$$

ЗАКОН СТЕФАНА-БОЛЬЦМАНА.

Формула Планка позволяет получить еще одно очень важное соотношение, названное законом Стефана-Больцмана.

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho(\omega)d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp \hbar\omega/kT - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4$$

Теперь мы можем найти *полную мощность излучения, испускаемого с единицы поверхности абсолютно-черного тела*.

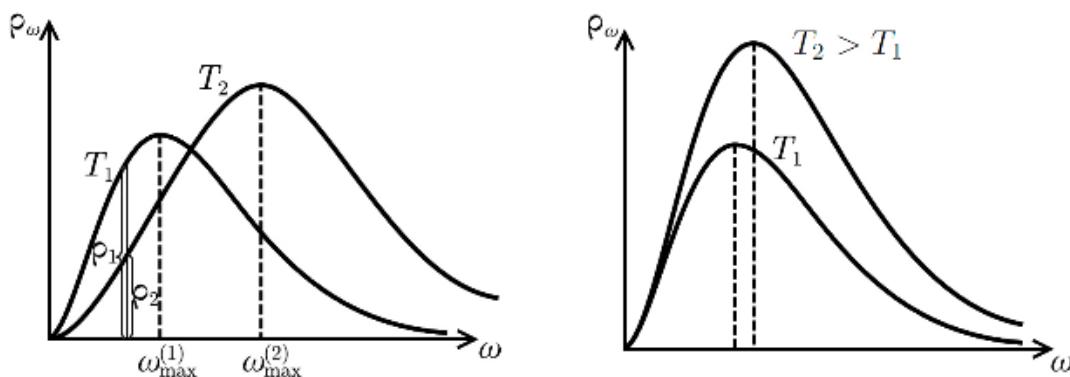
$$R_{\text{АЧТ}} = \frac{\pi^2}{60} \cdot \frac{k^4}{\hbar^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \quad \text{закон Стефана-Больцмана}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/(с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4)[\text{СГС}]$$

ЗАКОН СМЕЩЕНИЯ ВИНА.

Выведем еще один важный закон, так называемый закон сме- смешения Вина. Найдем частоту, при которой (для данной температуры) излучательная способность абсолютно черного тела максимальна. Приравнивая нулю $d\rho/d\omega$, найдем из формулы Планка:

$$\omega_{max} = 2.8 \frac{kT}{\hbar} \quad \text{закон Вина}$$



46. Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля. Опыты Девиссона-Джермера и Томсона по дифракции электронов.

КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ.

Корпускулярно-волновой дуализм – свойство природы, состоящее в том, что материальные микроскопические объекты могут при одних условиях проявлять свойства классических волн, а при других – свойства классических частиц.

$$\begin{cases} E \text{ и } \mathbf{p} - \text{характеризуют частицу} \\ \omega \text{ и } \mathbf{k} - \text{характеризуют волну} \end{cases}$$

ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ.

В 1923 г. французский наследный принц, физик Луи де Бройль выдвинул чрезвычайно смелое утверждение: «Известно, что фотон не только волна, но и частица. Почему же электрону, который частица, да и вообще любой частице, не быть также волной?».

Он предположил, что для частицы частота и волновое число связаны с энергией и импульсом теме же соотношениями, что и световые волны:

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

Подставив эти соотношения в выражение для плоской волны получим плоскую волну для свободной частицы, называемую **волной де Бройля**.

$$\psi(\mathbf{r},t) = Ce^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} - \text{плоская волна} \Rightarrow \boxed{\psi(\mathbf{r},t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr}-Et)}} - \text{волну де Бройля}$$

Каждой движущейся частицы с импульсом p нужно поставить в соответствие волну с некоторой длиной волны λ . Луи де Бройль вывел соотношение для длины волны частицы, сделавшее его имя бессмертным, «узаконив» квантово-волновой дуализм:

$$\boxed{\lambda_{dB} = h/p} - \text{длина волны де Бройля}$$

Критерий наблюдения волновых свойств частицы: квантовые особенности объекта наблюдаются только тогда, когда его длина волны де Бройля порядка размера системы.

Пример: 1) Длина волны де Бройля для стальной дробинки диаметра порядка 1 мм, массы порядка 0,005 г, летящей со скоростью 100 м/с, составляет порядка $\lambda_{dB} \sim 10^{-25}$ мм. Её волновые свойства не заметны и поведение дробинки чисто классическое.

2) Электрон в атоме водорода: $E \sim 10$ эВ, размер атома $\sim 10^{-8}$ см.

$$\lambda_{dB} = h/\sqrt{2mE} \simeq 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Длина волны электрона оказалась порядка размера системы (атома водорода), значит рассмотрение поведения электрона в атоме должно вестись на квантовом языке.

Чтобы лучше понять природу таких волн, вычислим также фазовую и групповую скорость волн де Бройля для нерелятивистской частицы массой m и скоростью v .

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{v}{2}$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Получим тот же результат для релятивистского случая:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} = \frac{pc^2}{E} = v$$

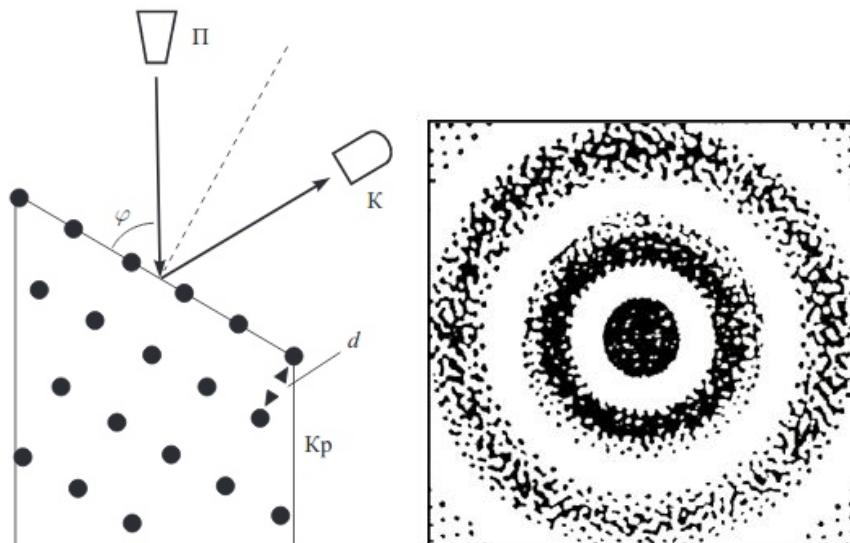
Мы показали, что групповая скорость волны де Бройля равна механической скорости частицы, однако волна де Бройля не является волной, движущейся вместе с частицей. **Волна де Бройля и частица – один и тот же объект, просто частицы обладает свойством волны, и если мы хотим это подчеркнуть, мы говорим о дебройлевской длине волны.**

Физический смысл: волна де Бройля определяет вероятность обнаружения частицы в данном месте пространства в данный момент времени. Такое толкование полностью эквивалентно для фотона.

ОПЫТЫ ПО ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ.

Знаменитые опыты по дифракции электронов, поставленные в 1927 г. Клинтоном Дэвиссоном и Лестером Джермером (параллельно похожий опыт проводил Дж.П.Томсон) подтвердили идеи Луи де Бройля.

Описание эксперимента: в опыте изучалось отражение пучка электронов от кристалла никеля, имеющего структуры, подобную дифракционной решетке с периодом d . Исследовалась интенсивность отраженного пучка в зависимости от энергии падающих на кристалл электронов при заданном угле отражения, а также, при заданной энергии, – в зависимости от угла отражения.



Параллельный пучок электронов из электронной пушки попадал на мишень. Отраженные в каком-то определенном направлении электроны собирались коллектором. Их ток измерялся. Схема опыта представлена на рисунке.

Результаты: оказалось, что имеет место точная аналогия интерференционному отражению рентгеновских лучей от кристаллов, описываемому формулой Брэгга-Вульфа. Отраженный луч наблюдается только в том случае, если длина волны соответствует условию Брэгга:

$$2d \sin \phi = n\lambda$$

где ϕ – угол скольжения, d – постоянная решетки, n – порядок интерференции.

Отражение электронов происходило именно так, как если бы электрон представлял собой волну, и при этом длина волны которой зависит от энергии электронов.

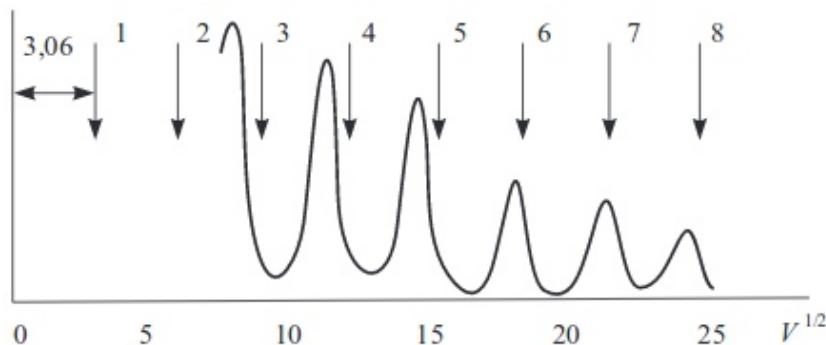
Подтверждение гипотезы де Бройля: интерференционные максимумы наблюдались при длинах волн, равных:

$$\lambda_n = \frac{2d \sin \phi}{n}$$

Максимумы тока наблюдаются при значениях ускоряющего напряжения $V = V_n$, удовлетворяющих условию:

$$\sqrt{V_n} = \sqrt{V_1}n$$

Здесь V_1 – значение напряжения, при котором наблюдается первый максимум.



$$p_n = \sqrt{2meV_n} \Rightarrow p_n = p_1 n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\kappa}{p_n}, \text{ где } \kappa = 2p_1 d \sin \phi$$

По формуле $\kappa = \lambda_n p_n$ можно измерить значение постоянной κ . Она оказалась совпадающей с постоянной Планка h , входящей в формулы длины волны де Бройля.

Таким образом, гипотеза Луи де Бройля была подтверждена.

47. Волновая функция. Операторы координаты и импульса. Средние значения физических величин. Соотношение неопределенности для координаты и импульса. Уравнение Шредингера.

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ.

I. Состояние частицы характеризуется функцией $\psi(\mathbf{r},t)$, называемой **волновой**.

$$\psi(\mathbf{r},t) = Ce^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr}-Et)}$$

II. **Координата.** Вероятность местонахождения частицы определяется квадратом амплитуды ψ . Вероятность dW найти частицу в области dV в момент t :

$$dW(\mathbf{r},t) = |\psi|^2 dV, \text{ где } |\psi|^2 = \psi^* \psi \Rightarrow W(V,t) = \int_V |\psi|^2 dV$$

Вероятность обнаружения частицы в объеме V в момент времени t .

Импульс. Покажем, как волновая функция может описать не только координату объекта, но и его импульс. Разложим ψ -функцию в ряд Фурье:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

$dW = |f(k)|^2 dk$ – вероятность того, что волновое число лежит в интервале между k и $k + dk$, а следовательно импульс между $\hbar k$ и $\hbar(k + dk)$.

Свойства волновой функции.

1) **Условие нормировки:** частица обязательно находится в каком-то месте пространства. Вероятность её обнаружения равна единице.

$$W(\infty, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$$

Волновая функция на бесконечности должна стремиться к нулю: $\psi(\pm\infty) \rightarrow 0$

Переходя к сферическим координатам, и считая, что волновая функция сферически симметрична, т.е. зависит только от радиуса, получаем:

$$W(\mathbf{r},t) = 4\pi \int |\psi|^2 r^2 dr$$

Значит волновая функция должна убывать с расстоянием быстрее, чем $\frac{1}{r}$.

2) **Принцип суперпозиций состояний:** если какая-либо система способна находиться в состояниях как с волновой функцией ψ_1 , так и ψ_2 , то она может находиться и в состоянии с волновой функцией:

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$$

где c_1 и c_2 – любые числа, для которых функция ψ удовлетворяет условию нормировки.

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.

По определению среднего значения (математического ожидания):

$$\langle \xi \rangle = \sum_k \xi_k p_k - \text{дискретное распределение}, \quad \langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p(\xi) d\xi - \text{непрерывное распределение}$$

Это означает, что среднее значение координаты равно:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx$$

ОПЕРАТОРЫ КООРДИНАТЫ И ИМПУЛЬСА.

Введем некоторый математический оператор \hat{f} и определим его следующим образом:

$$\langle f \rangle = \int \psi^*(\hat{f}\psi) dr$$

где $(\hat{f}\psi)$ – результат воздействия оператора f на функцию ψ . Для координаты x :

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi dx = \int \psi^* x \psi dx \Rightarrow \boxed{\hat{x} = x} - \text{оператор координаты}$$

Оператор координаты просто равен ей самой. То же самое будет и для степеней x , а так как любая функция от координаты может быть разложена в ряд, то её оператор будет равен ей самой.

$$\hat{f}(x) = f(x) \Rightarrow \langle f \rangle = \int \psi^*(x) f(x) \psi(x) dx \Rightarrow \langle p_x \rangle = \int \psi^*(x) \hat{p}_x \psi(x) dx$$

Для свободной частицы среднее значение импульса просто равно импульсу частицы.

$$\langle p_x \rangle = p_x = \int A e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} \hat{p}_x A e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} dx, \quad A^2 \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} dx = 1 - \text{нормировка}$$

Из условия выполнения этих равенств находим оператор импульса:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \Rightarrow \boxed{\hat{p}(\mathbf{r}) = -i\hbar \nabla} - \text{оператор импульса}$$

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА.

Еще одно важное отличие микромира от макромира заключается в том, что в макромире нет проблем определения координат. Импульс и координата называются сопряженными координатами системы.

Анализируя возможности измерения сопряженных координат электрона, Гейзенберг пришел к заключению, что условия, благоприятные для измерения положения, затрудняют нахождение импульса, и наоборот.

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar - \text{соотношение неопределенностей Гейзенberга}$$

Соотношение неопределенностей говорит о том, что любая попытка измерить положение в пространстве не может быть сделано лучше, чем с точностью $\Delta x \Delta p$. Неопределенности в координате и в импульсе, которые входят в формулу, происходят не от несовершенства наших знаний, а от того, что волновая функция электрона действительно «размазана» по соответствующей области.

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА.

Открытым остался один вопрос: как находить волновую функцию? Ведь если волновая функция способна описать физическое состояние, то надо найти уравнение, которому она удовлетворяет. Рассмотрим волновую функцию свободной частицы:

$$\psi(\mathbf{r},t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r}-Et)} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) \psi, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi \Rightarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi, \text{ заметим, что } \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Rightarrow i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{T}\psi$$

T – кинетическая энергия. Естественным обобщением полученного уравнения на случай частицы, движущейся в силовом поле, является добавления в правую часть члена $\hat{U}\psi$, $E = T + U$. В классической механике функция Гамильтона консервативной системы $H(p,q)$ равна её полной энергии E . Учитывая все обобщения получим:

$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

– уравнение Шредингера

Полученное уравнение очень сложное. Если есть свободная частица, то оно принимает вид:

$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi$

– Стационарное уравнение Шредингера

Оно описывает систему, не изменяющуюся во времени.

Найдем оператор полной энергии частицы.

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = U(x,y,z) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2z}{\partial z^2} \right)$$

48. Постулаты Бора. Энергетический спектр водородоподобных атомов. Характеристическое излучение. Закон Мозли.

ПОСТУЛАТЫ БОРА.

- Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, в атоме осуществляются только некоторые стационарные орбиты, при движении по которым, вопреки представлениям классической электродинамики, электрон не излучает энергию.
- Из всех возможных орбит осуществляются только некоторые, удовлетворяющие определенным условиям, а именно, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка \hbar :

$$L = p_e r = m_e v r = n \hbar$$

- Излучение испускается или поглощается в виде кванта энергии $\hbar\omega$ при переходе электрона из одного состояния с энергией E_m в другое, обладающее энергией E_n , т.е:

$$\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$$

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ.

Рассмотрим движение электрона в атоме водорода со скоростью v по орбите с номером n и радиусом r_n . Наша задача определить его энергетический спектр, а значит найти энергетические уровни и длину волны излученного при переходе света. Запишем для него ЗСЭ и второй закон Ньютона. Заряд протона Ze .

$$\begin{cases} E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} \stackrel{(2)}{=} -\frac{Ze^2}{2r} \\ \frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow \frac{m^2v^2r^2}{mr^3} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow r = \frac{L^2}{mZe^2} \end{cases}$$

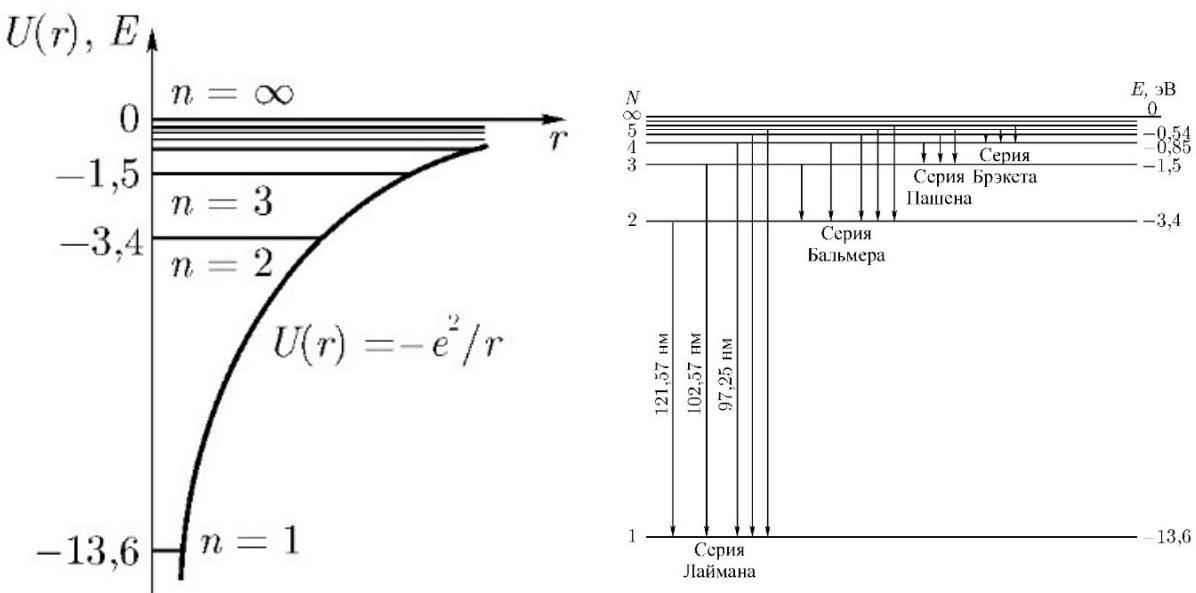
Воспользуемся вторым постулатом Бора для определения момента импульса. Получим:

$$\begin{cases} r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2 - \text{радиус } n\text{-ой Боровской орбиты.} \\ E_n = -\frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} - \text{полная энергия электрона на } n\text{-ой орбите} \end{cases}$$

Воспользуемся третьим постулатом Бора, рассмотрев уровни m и n :

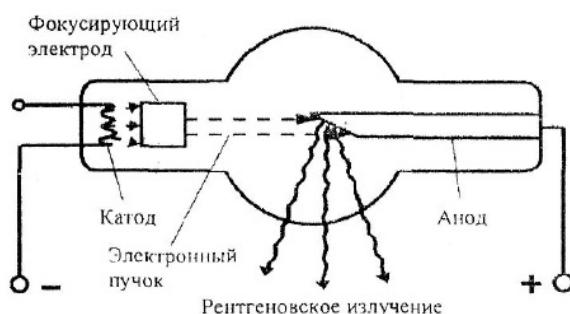
$$h\nu_{nm} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \dagger \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \dagger \quad \boxed{\frac{1}{\lambda_{nm}} = RZ^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

Здесь $R = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} = 13,6 \text{ эВ} = 10973731,59 \text{ м}^{-1}$ – **постоянная Ридберга**. Она равна энергии перехода электрона с орбиты с $n = 1$ в область непрерывного спектра, т.е. на орбиту с $m = \infty$. Итак, все необходимое найдено.



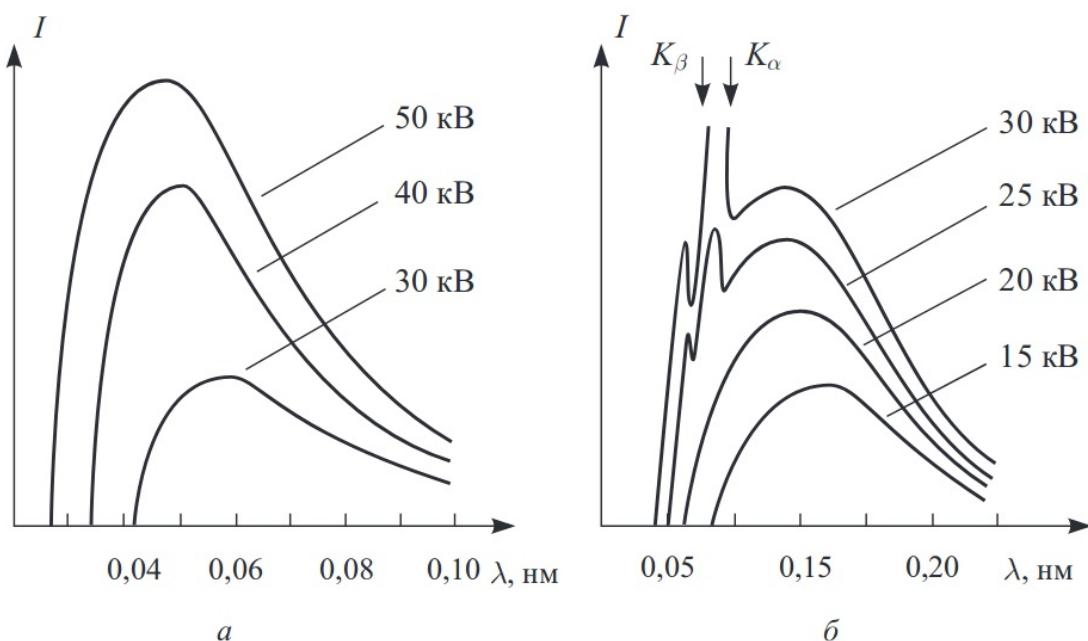
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

О рентгеновском излучении: в этом пункте мы будем говорить о *характеристическом рентгеновском излучении*. Важно понимать, что всякое ускоренное движение электронов порождает излучение. Рентгеновские лучи возникают при торможении потока электронов, бомбардирующих анод. Такое излучение обладает сплошным спектром, ибо представляет собой случайную последовательность коротких импульсов разной длительности.



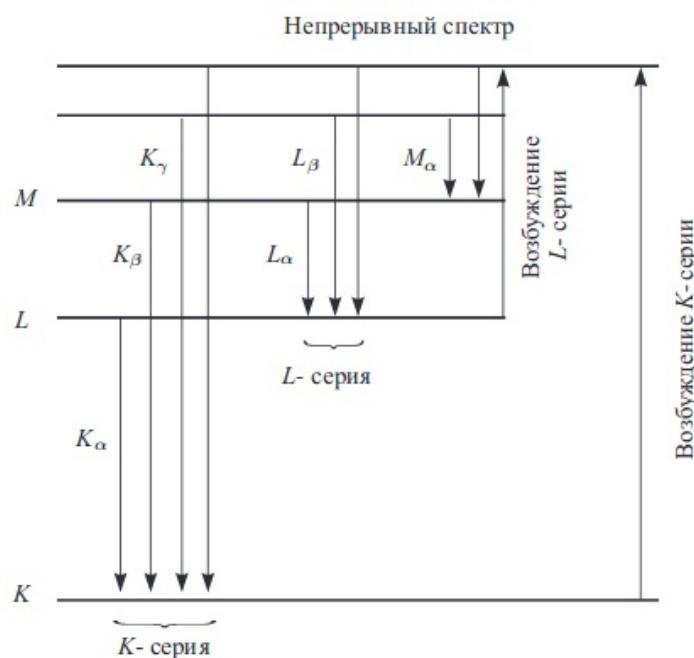
Особенности спектра рентгеновского излучения: 1) сплошной спектр тормозного излучения имеет максимум при некоторой определенной длине волны.

- 2) С коротковолновой стороны спектр резко обрывается при некоторой длине волны, определяемой по простому правилу: $h\nu = h\frac{c}{\lambda} = eV$.
- 3) Характер спектра тормозного излучения не зависит от природы антикатода.
- 4) Сплошное тормозное излучение наблюдается, когда энергия электронов не превышает некоторой определенной критической величины E_K , характерной для вещества анода. Иначе наблюдается *характерное излучение*. Оно называется так, потому что характерно для вещества анода.



Спектр тормозного рентгеновского излучения при облучении вольфрамового анода (*a*); то же при облучении молибденового анода (*b*)

Характерное излучение: выглядит как монохроматическое и состоит из нескольких характерных линий. Каждый элемент дает совершенно определенный, только ему присущий спектр характеристического излучения, вне зависимости от своего химического состояния. Это резко отличает рентгеновский спектр от оптического и свидетельствует об участии в его возбуждении внутренних электронов.



Некоторые линии характеристического рентгеновского излучения. Слева указаны атомные слои K , L , M

Спектральные линии характеристического излучения группируются в серии. Самая коротковолновая получила наименование K , следующие – L, M, N и т.д.

ЗАКОН МОЗЛИ.

Генри Мозли в 1913-1914 годах установил, что частоты линий характеристического рентгеновского спектра связаны с порядковым номером атома Z соотношением:

$$\boxed{\sqrt{\nu} = A(Z - \sigma)}$$

где A и σ – величины, сохраняющие свое значение в пределах одной и той же серии для всех элементов, но меняющиеся при переходе от серии к серии.

Оценочное соотношение очень просто получить из формулы Ридберга:

$$h\nu_{nm} = RZ^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \sqrt{\nu_{nm}} = AZ$$

Однако притягивающее действие ядра ослаблено экранирующим действием других электронов. Чем ближе электрон к ядру, тем сильнее действие ядра и слабее экранирующее действие. Это действие учитывается уменьшением Z на некоторую величину σ , называемую **постоянной экранирования**. Так для K-серии $\sigma = 1$, для L-серии $\sigma = 3.5$.

Из этих соображений и следует формула Мозли.

Тот факт, что значение σ в заданной серии оказывается одинаковым для всех элементов, является важным обстоятельством. Это значит, что внутренние группы электронов построены одинаково у атомов разных элементов. Следовательно в нормальном состоянии электронная система атома представляет совокупность последовательных слоев электронов, окружающих ядро. Первый из них K-слой, затем слой L и т.д.

Это очень важный вывод для построения теории атома.

49. Опыты Штерна и Герлаха. Пространственное квантование. Спин электрона. Орбитальный и спиновый магнитные моменты электрона.

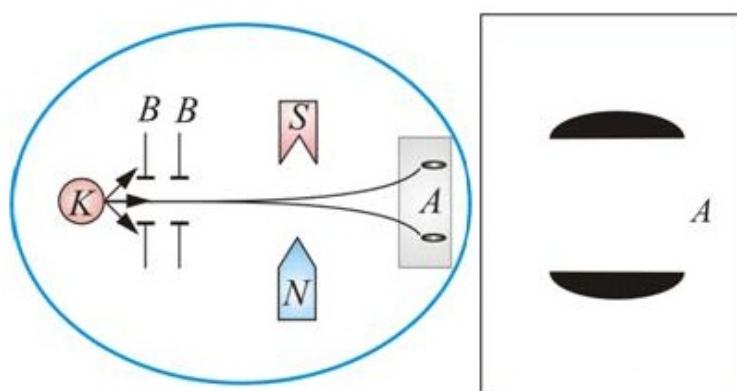
ОПЫТЫ ШТЕРНА И ГЕРЛАХА.

В 1922 году немецкие физики О. Штерн и В. Герлах поставили опыты, целью которых было измерение магнитных моментов P_m атомов различных химических элементов.

Идея: для химических элементов, имеющих один валентный электрон, магнитный момент атома равен магнитному моменту одного валентного электрона. Идея опыта заключалась в измерении силы, действующей на атом в сильно неоднородном магнитном поле.

Неоднородность магнитного поля должна быть такова, чтобы она сказывалась на расстояниях порядка размера атома. Только при этом можно было получить силу, действующую на каждый атом в отдельности.

Описание эксперимента: Схема опыта изображена на рис. В колбе с вакуумом, 10–5 мм рт. ст., нагревался серебряный шарик K, до температуры испарения. Атомы серебра летели с тепловой скоростью около 100 м/с через щелевые диафрагмы B и, проходя резко неоднородное магнитное поле, попадали на фотопластинку A.



Результаты: Если бы момент импульса атома L (и его магнитный момент P_m) мог принимать произвольные ориентации в пространстве (т.е. в магнитном поле), то можно было ожидать непрерывного распределения попаданий атомов серебра на фотопластинку с большой плотностью попаданий в середине. Но на опыте были получены совершенно неожиданные результаты: *на фотопластинке получились две резкие полосы – все атомы отклонялись в магнитном поле двояким образом, соответствующим лишь двум возможным ориентациям магнитного момента.*

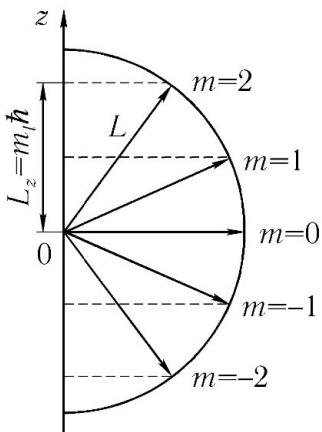
Этим доказывался квантовый характер магнитных моментов электронов.

Кроме того, в этих опытах было обнаружено новое явление. Валентный электрон в основном состоянии атома серебра имеет орбитальное квантовое число $l = 0$ (s-состояние). Но при $l = 0, L = \hbar^2 l(l + 1)$ (проекция момента импульса на направление внешнего поля равна нулю). Возник вопрос: *пространственное квантование какого момента импульса обнаружилось в этих опытах и проекция какого магнитного момента равна магнетону Бора?*

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ КВАНТОВАНИЕ.

Рассмотрим электрон, движущийся по круговой орбите с некоторой постоянной скоростью. Проекция момента количества движения на любую выбранную ось квантуется и равна целому числу постоянных Планка. m_l - **магнитное квантовое число**.

$$L_z = m_l \hbar, \text{ где } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l; \quad l = \max m_l - \text{орбитальное квантовое число}$$



Таким образом, проекция момента импульса может принимать $2l + 1$ значение.

Тот факт, что проекция момента импульса не может иметь произвольного направления по отношению к любому фиксированному направлению получил название **пространственного квантования**.

Получим закон квантирования квадрата момента количества движения.

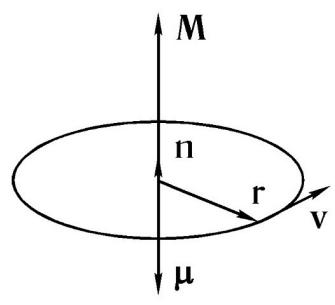
$$L^2 = \langle \mathbf{L}^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle = 3\langle L_x^2 \rangle$$

Все значения L_z равновероятны, поэтому его среднее значение равно сумме всех $2l + 1$ возможных значений $\langle L_z^2 \rangle$ от $l\hbar$ до $-l\hbar$, деленной на их полное число:

$$\langle L_z^2 \rangle = \hbar^2 \frac{l^2 + (l-1)^2 + \dots + (-l)^2}{2l+1} = \frac{2\hbar^2}{2l+1} (1^2 + 2^2 + \dots + l^2) = \frac{2\hbar^2}{2l+1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} = \frac{\hbar^2}{3} l(l+1)$$

Подставляя полученное выражение, получаем: $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$

ОРБИТАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА.



Рассмотрим классическую задачу о магнитном моменте электрона, движущегося по окружности. С движением заряженной частицы массой m со скоростью v по окружности радиуса r связаны механический момент \mathbf{L} и магнитный μ .

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad \mu = \frac{IS}{c}\mathbf{n}, \quad \dagger \quad I = \frac{ev}{2\pi r}, \quad S = \pi r^2 \quad \dagger \Rightarrow \\ \mu = -\frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathbf{v}] = -\frac{e}{2mc}\mathbf{L}$$

Коэффициент связи между μ и \mathbf{L} называют **гиромагнитным соотношением**. Оно не всегда принимает такое значение, поэтому его записывают, как $g \frac{e}{2mc}$, а коэффициент g называют **g -фактором**. Он равен 1 для орбитального движения электрона. Таким образом:

$$\mu = -g \cdot \frac{e}{2mc} \mathbf{L} \quad \stackrel{g=1}{\Rightarrow} \quad \mu_z = -\frac{e}{2mc} L_z = -\hbar \cdot \frac{e}{2mc} m_l$$

Итак, мы получили, что **правила квантирования магнитного момента электрона такие же, как и для механического**. Закон квантирования может быть записан в форме:

$$\mu_z = -\mu_B m_l - \text{орбитальный магнитный момент},$$

$$\mu_B = e\hbar/2mc = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс} - \text{магнитон Бора}, \text{ единица магнитного момента.}$$

СПИН ЭЛЕКТРОНА.

Вернемся к результатам опыта Штерна и Герлаха и подумаем, чего можно было бы ожидать в случае водорода?

Если атомы водорода находятся в s -состоянии ($l=0$), то никакого расщепления пучка не будет, наблюдается $2l+1 = 0+1 = 1$ линия. Если атомы водорода находятся в p -состоянии ($l=1$), наблюдаются 3 линии.

В нашем опыте $l = 0$ наблюдается не одна, а две линии. Это свидетельствует о том, что мы до сих пор не учли собственное вращение электрона и наличие у электрона *собственного магнитного момента*, который мы назовем s .

$$2s + 1 - \text{возможных состояний} \Rightarrow 2s + 1 = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

В 1925 г. Дж. Уленбек и С. Гаудсмит пришли к выводу о наличии у электрона собственного механического момента, равного $L_s = \hbar/2$ и назвали его **спином**.

Соответственно **магнитное квантовое число** $m_s = \pm \frac{1}{2}$

СПИНОВЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА.

Еще одной неожиданностью результатов опытов Штерна и Герлаха явилось значение магнитного момента электрона, которое легко вычислить из величины расщепления. Оказалось, что проекция магнитного момента электрона на выделенную ось равна одному магнетону Бора.

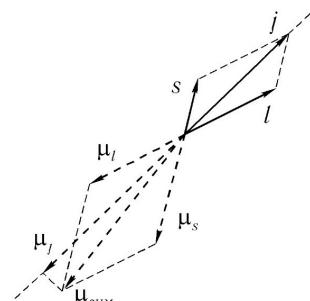
$$\mu_{s_z} = -\mu_B = -2m_s\mu_B = -2\frac{e}{2mc}s_z = g\frac{e}{2mc}s_z - \text{спиновый магнитный момент электрона.}$$

Отсюда g -фактор электрона равен 2. В силу наличия у электрона как спинового, так и орбитального моментов, **полный механический момент** равен их сумме:

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \Rightarrow j = |l \pm s| = |l \pm \frac{1}{2}| \Rightarrow |\mathbf{j}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}, j_z = \hbar m_j$$

Из-за разных гиromагнитных соотношений для спинового и орбитального моментов суммарный магнитный момент оказывается непараллельным суммарному механическому моменту. Чтобы решить эту проблему вводится фактор Ланде g_L , который есть коэффициент пропорциональности между \mathbf{j} и μ_j :

$$\boxed{\mu_j = -g_L \mu_B \mathbf{j}, \quad \mu_l = -l \mu_B, \quad \mu_s = -2s \mu_B}$$



Опуская математические выкладки, напишем выражение для фактора Ланде:

$$\boxed{g_L = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}}$$

50. Тождественность частиц. Симметрия волновой функции относительно перестановки частиц. Бозоны и фермионы. Принцип Паули. Электронная структура атомов. Таблица Менделеева.

ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТИЦ.

Принцип тождественности частиц: все частицы одного сорта абсолютно неразличимы. Возможность пометить их означала бы сделать их разными, что невозможно.

В классической механики мы можем пометить тела. При упругом нецентральном ударе легко определить, какой шар полетел вправо, а какой влево. В квантовой механике это в принципе невозможно.

СИММЕТРИЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВКИ ЧАСТИЦ.

Рассмотрим две частицы, характеризуемые наборами ξ_1 и ξ_2 всех переменных, от которых зависят их волновые функции. Попробуем поменять их местами. Оказывается, что не достаточно просто инвертировать их координаты, важно учитывать также спиновое состояние частицы.

Из принципа тождественности следует, что волновые функции системы частиц, получающиеся друг из друга перестановкой пар одинаковых частиц, могут отличаться только несущественным множителем e^{ia} .

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1)e^{ia}, \quad \text{плотность вероятности } |\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2 \Rightarrow e^{ia} = \pm 1$$

Следовательно, **перестановка пары частиц местами либо оставляет волновую функцию неизменной, либо меняет ее знак**. И поскольку состояние частицы характеризуется как ее положением в координатном пространстве, так и ориентацией ее спина, то в первом случае волновая функция является **симметричной** функцией координат и проекций спинов частиц, а во втором — **антисимметричной**.

БОЗОНЫ И ФЕРМИОНЫ.

Как показывает опыт, симметрия или антисимметрия волновой функции зависит от спина частиц. Частицы с полуцелым спином, в том числе электроны, протоны, нейтроны, описываются только антисимметричными волновыми функциями, они подчиняются статистике Ферми-Дирака и потому называются **фермионами**.

Частицы с целым спином — фотоны, мезоны и др. — описываются только симметричными волновыми функциями, они подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна и называются **бозонами**. Среднего числа частиц в заданном состоянии:

$$\langle n_i \rangle = \frac{g_i}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1} \quad \text{ст. Ферми-Дирака,} \quad \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1} \quad \text{ст. Бозе-Эйнштейна}$$

n_i — количество частиц в состоянии i , ε_i — энергия состояния i , μ — химический потенциал системы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютное значение температуры.

ПРИНЦИП ПАУЛИ.

Запишем волновую функцию двух одинаковых частиц a и b , описывающихя квантовыми состояниями ξ_1 и ξ_2 . Нельзя забывать, что частицы неотличимы друг от друга, поэтому функция должна быть *симметричной* для бозонов и *антисимметричной* для фермионов. Используя условие нормировки и принцип суперпозиции, запишем:

$$\Psi_{sim(antisim)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(\xi_1)\psi_b(\xi_2) \pm \psi_b(\xi_1)\psi_a(\xi_2) \}$$

Теперь пусть a и b – фермионы. Поместим их вместе $a = b$, теперь $\Psi_{antisim} = 0$, чего быть не может. Исходя из этих соображений сформулируем:

Принцип исключения Паули – в системе одинаковых частиц с полуцелым спином две и более частиц не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии.

Исходя из этого на одном уровне энергии атома не может располагаться более двух электронов с противоположенными проекциями спинов. Существование оболочной структуры атома является одним из важнейших следствий принципа Паули. Благодаря этому удается объяснить периодичность свойств химических элементов.

ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА АТОМОВ.

Введем следующую терминологию. Совокупность электронов с заданным значением главного квантового числа n будем называть **слоем**. Слои обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, как показано в табл.1.

Говорят, например, что группа электронов, характеризуемых главным квантовым числом $n = 1$, образует K -слой, при $n = 2$ мы имеем L -слой и т. д. Совокупность электронов с заданным значением орбитального момента l образует **оболочку**.

Таблица 1. Обозначения электронных слоев атома

n	1	2	3	4	5
Обозначение слоя	K	L	M	N	O
Наибольшее число электронов в слое	2	8	18	32	50

Таблица 2. Обозначения электронных оболочек атома

l	1	2	3	4	5
Оболочка	s	p	d	f	g
Наибольшее число электронов в оболочке	2	6	10	14	18

Емкости оболочек и слоев: в слое n имеется n оболочек – $l = 0, 1, \dots, n - 1$.

Число различных состояний в оболочке определяется числом проекций орбитального момента l , а также с учетом принципа Паули при заданных значениях n, l, m может существовать только два электрона с противоположенными проекциями спинов. Таким образом, оболочка l в любом выбранном слое может вмещать:

$$N_{nl} = 2(2l + 1)$$

Емкость слоя определяется числом оболочек, образующих его, и емкостью оболочек.

$$N_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2$$

ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА.

Ограничимся приведением таблицы заполнения электронных оболочек, из которой метод заполнения таблицы Менделеева становится очевидным.

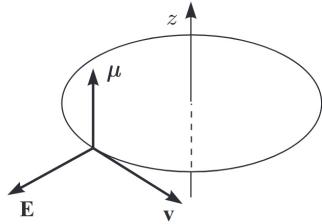
Слой			K	L		M		
Оболочка			$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$
Максимальное число электронов в оболочке			2	2	6	2	6	10
№	Элемент	$E_{\text{ион}}$, эВ						
1	H	13,60	1					
2	He	24,45	2					
3	Li	5,37	2	1				
4	Be	9,48	2	2				
5	B	8,4	2	2	1			
6	C	11,22	2	2	2			
7	N	14,47	2	2	3			
8	O	13,56	2	2	4			
9	F	18,6	2	2	5			
10	Ne	21,48	2	2	6			
11	Na	2,12	2	2	6	1		
12	Mg	7,61	2	2	6	2		
13	Al	5,96	2	2	6	2	1	
14	Si	7,39	2	2	6	2	2	
15	P	10,3	2	2	6	2	3	
16	S	10,31	2	2	6	2	4	
17	Cl	12,96	2	2	6	2	5	
18	Ar	15,69	2	2	6	2	6	

Однако стоит отметить, что для больших слоев схема заполнения усложняется из-за большой центробежной энергии и, например, уровень $4s$ заполняется раньше чем $3d$, потому что это энергетически выгоднее.

51. Тонкая и сверхтонкая структуры оптических спектров. Правила отбора при поглощении и испускании фотонов атомами.

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ОПТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ.

Действие кулоновского поля ядра на магнитный момент движущегося по орбите электрона называют **спин-орбитальным взаимодействием**.



Рассмотрим эту задачу подробнее, $l \neq 0$. Перейдем в систему отсчета электрона, тогда в этой системе вокруг него будет вращаться ядро со скоростью \mathbf{v} и создаст в точке нахождения электрона магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}], \text{ где } \mathbf{E} = \frac{Ze\mathbf{r}}{r^3}$$

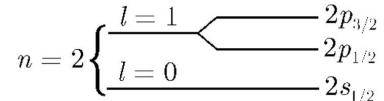
Потенциальная энергия взаимодействия магнитного момента с магнитным полем:

$$U = -\mu B = -\frac{1}{c} \mu [\mathbf{v}, \mathbf{E}], \Rightarrow \text{в ЛСО(покоится ядро): } U = \frac{1}{c} \mu [\mathbf{v}, \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \mu_z v E$$

Выделим некоторое направление механического момента орбитального движения электрона. Спин может обладать двумя взаимно противоположными направлениями относительно этого момента. Учитывая, что собственный магнитный момент электрона равен магнетону Бора и $\mu_z = \pm \mu_B$, получаем:

$$U = \mp \frac{v}{c} \mu_B E$$

Энергия этого взаимодействия зависит от того, как ориентированы относительно друг друга спин и орбитальный момент. Две ориентации — две энергии. Это и приводит к дублетному расщеплению.



*Рассмотренное расщепление уровней носит название **тонкой структуры** и ярко проявляется в оптических спектрах.* Расщепление уровней тонкой структуры имеет масштаб порядка:

$$(\Delta U_{ls})_{\text{т.с.}} = 2 \frac{v}{c} \mu_B E \sim 10^{-3} \text{ эВ}$$

Здесь мы пользовались такими оценками: $E \sim \frac{e}{r^2}$, $r \sim r_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$, $v \sim v_B = \frac{\hbar}{m_e r_B} = \frac{e^2}{\hbar}$

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ОПТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ.

Более точные спектроскопические исследования показали, что помимо тонкой структуры, существует еще более тонкое расщепление спектральных линий и, следовательно, энергетических уровней. Это расщепление получило название **сверхтонкой структуры**. Ее происхождение связано со взаимодействием магнитного момента ядра с магнитным полем, создаваемым электронами атома.

$$(\Delta U_{ls})_{\text{с.т.с.}} \sim 10^{-6} \text{ эВ}$$

ПРАВИЛА ОТБОРА.

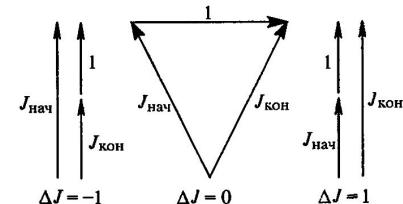
Правилами отбора в спектроскопии называют ограничения и запрет на переходы между уровнями квантовомеханической системы с поглощением или излучением фотона, наложенные законами сохранения и симметрией.

Правилами отбора полностью определяются оптические спектры атомов, т. е. то, какие переходы из высоковозбужденного состояния возможны, а значит, какие линии мы увидим в спектре испускания нагретых газов.

Поскольку при дипольном излучении фотон уносит момент импульса, равный 1, то разность полных моментов импульсов атома в начальном и конечном состояниях должна соблюдать

Первое правило отбора:

$$\begin{cases} \Delta J = \pm 1,0 \text{ при } J_{\text{нач}} \neq 0 \text{ и } J_{\text{кон}} \neq 0 \\ \Delta J = \pm 1, \text{ при } J_{\text{нач}} = 0 \text{ или } J_{\text{кон}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta m_j = \pm 1,0}$$



Рассмотрим теперь какие правила отбора следуют для векторов **S** и **L**. Расчет показывает, что для электромагнитного излучения, лежащего в оптическом диапазоне, взаимодействие фотона с зарядом электрона оказывается гораздо сильнее взаимодействия с магнитным моментом, так что можно считать, что излучение не связано с магнитным моментом. Орбитальный и спиновый угловые моменты по-разномуказываются на электрическом и магнитном моментах атома. Орбитальный угловой момент влияет как на первый, так и на второй, а направление спина — только на магнитный момент. Поэтому неизбежно следует

Второе правило отбора: при испускании фотонов оптического диапазона вектор спина не претерпевает изменений, т. е.

$$\boxed{\Delta \mathbf{S} = 0}$$

Выведенные выше правила отбора по *J* и *S* позволяют сформулировать

Третье правило отбора:

$$\begin{cases} \Delta L = \pm 1,0 \text{ при } L_{\text{нач}} \neq 0 \text{ и } L_{\text{кон}} \neq 0 \\ \Delta L = \pm 1, \text{ при } L_{\text{нач}} = 0 \text{ или } L_{\text{кон}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta m_l = \pm 1,0}$$

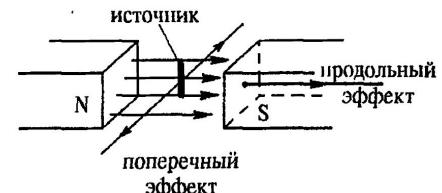
Особо отметим, что переходы с $\Delta L = 0$ невозможны для водорода и водородоподобных атомов в связи с *законом сохранения четности волновой функции*.

52. Эффект Зеемана в слабых магнитных полях.

ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА В СЛАБЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.

Эффект Зеемана – явление расщепления спектральных линий в магнитном поле.

На рисунке изображена схема наблюдения *продольного* и *поперечного* эффектов Зеемана. Источник излучения устанавливается между полюсами электромагнита. *Поперечный* эффект наблюдается в направлении распространения света, перпендикулярном полю, а *продольный* по направлению поля \mathbf{B} .



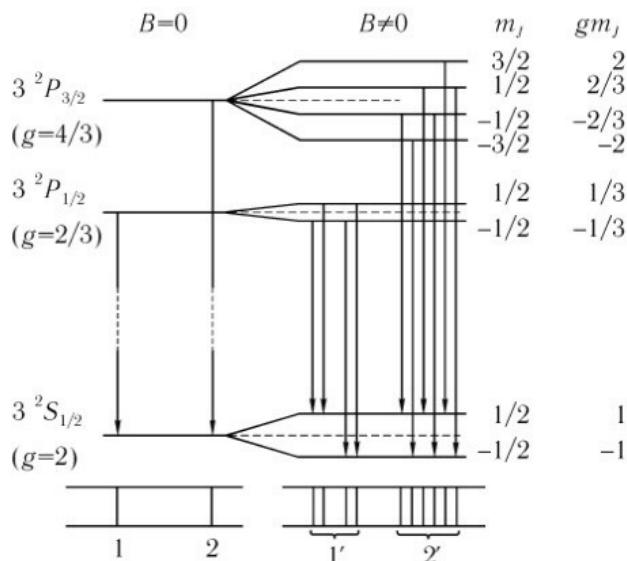
В слабых магнитных полях наблюдается **сложный эффект Зеемана**. «Сила» поля характеризуется величиной магнитного расщепления в данном поле \mathbf{B} по сравнению с энергией спин-орбитального взаимодействия тонкой структуры $\Delta U_{ls} \sim 10^{-3}$ эВ.

$$\text{Условие наблюдения: } E_B \ll \Delta U_{ls}$$

Дополнительная энергия в данном магнитном поле равна:

$$E_B = -(\mu\mathbf{B}) = g\mu_B(\mathbf{j}\mathbf{B}) = g\mu_B m_j B$$

Здесь m_j определяет проекции вектора \mathbf{j} на направление внешнего поля \mathbf{B} и принимает $2j + 1$ значение. Расщепление уровней оказывается эквидистантным, а сама величина расщепления линейно растет с полем.



Поскольку внешнее расщепление меньше внутреннего (тонкой структуры), то не происходит перекрытия расщепленных термов. На рисунке изображена схема расщепления дуплета **Na**. Сам дуплет есть проявление тонкой структуры. *В соответствии с правилами отбора наблюдаются* $10 = (4 + 6)$ линий.

53. Эффект Зеемана в сильных магнитных полях

ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.

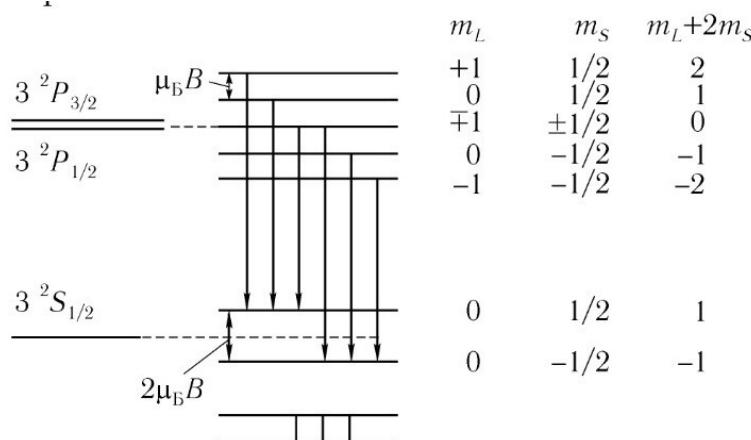
В сильном магнитном поле наблюдается простой эффект Зеемана.

Условие наблюдения: $E_B \gg \Delta U_{ls}$

Теперь мы считаем величину ΔU_{ls} практически равной нулю, то есть пренебрегаем спин-орбитальным взаимодействием. Это означает, что оператор энергии не зависит от ориентации спинового и орбитального момента, а следовательно и не зависит от суммарного вектора $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Остается зависимость только от проекций векторов L и S на вектор B , т.е. только от квантовых чисел m_l и m_s . Итак, учитывая, что $g_l = 1, g_s = 2$, магнитная часть энергии в сильном поле равна:

$$U_B = g_l \mu_B m_l B + g_s \mu_B m_s B = \mu_B B$$



Малость спин-орбитального взаимодействия приводит к исчезновению различия между уровнями $3^2P_{1/2}$ и $3^2P_{3/2}$ и слиянию их в один уровень 3^2P .

Сколько линий будет наблюдаваться в сильном поле? Пусть имеются два уровня с энергиями E_1 и E_2 . Разность энергий этих уровней в сильном поле равна:

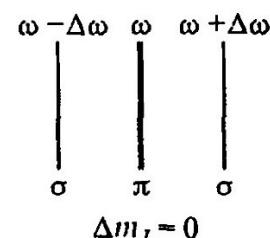
$$\Delta U_B = [E_2 + \mu_B B(m_{L2} + 2m_{S2})] - [E_1 + \mu_B B(m_{L1} + 2m_{S1})]$$

По правилам отбора возможны переходы только между уровнями с $m_{S1} = m_{S2}$, поэтому:

$$\Delta U_B = [E_2 - E_1] + \mu_B B(m_{L2} - m_{L1}), \quad \Delta m_l = \pm 1, 0$$

Значит в сильном поле будут наблюдаваться лишь три линии – одна не смещенная и две смещенные на $\pm \mu_B B$. Потому эффект Зеемана в сильном поле и называется *простым*.

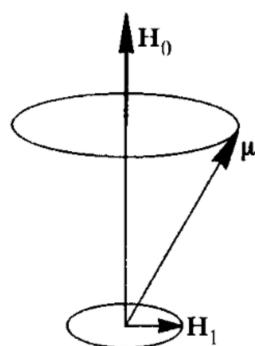
При $\Delta m_L = 0$ возникает *линейно-поляризованный свет*, а переходы с $\Delta m_l = \pm 1$ обуславливают вращение электрона вокруг оси, благодаря чему возникает *излучение с круговой поляризацией*.



54. Ядерный и электронный магнитный резонансы.

Многие из веществ в намагниченном состоянии приобретают способность поглощать энергию электромагнитных волн. Это поглощение носит резонансный характер, то есть происходит лишь про определенном соотношении между длиной электромагнитной волны и напряженностью постоянного магнитного поля, намагничивающего образец. Это явление получило название **магнитного резонанса**.

Рассмотрим частицу с магнитным моментом $\vec{\mu}$ и моментом импульса \vec{L} , помещенную во внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 .



Магнитным момент $\vec{\mu}$ будет прецессировать вокруг \vec{H}_0 с лармировской частотой:

$$\omega_0 = \frac{\mu H_0}{L} = \gamma H_0$$

Величина $\gamma = \mu/L$ – *гиromагнитное отношение*. Приложим перпендикулярно постоянному полю слабое по сравнению с ним магнитное поле \vec{H}_1 , вращающееся вокруг \vec{H}_0 с частотой ω . Если $\omega \neq \omega_0$, то фазы этих двух вращений будут непрерывно расходиться, а магнитный момент будет испытывать малые периодические изменения, быстро меняющиеся по величине и направлению. Такие изменения вызовут только малые изменения угла наклона между $\vec{\mu}$ и \vec{H}_0 , периодически и быстро меняющиеся во времени. То есть в среднем направление вектора $\vec{\mu}$ останется неизменным.

Совсем иная картина будет наблюдаться, когда $\omega = \omega_0$. В этом случае и возникает **магнитный резонанс**. Он состоит в том, что дополнительный момент сил действует все время в одну и ту же сторону, устанавливая вектор $\vec{\mu}$ либо параллельно, либо антипараллельно постоянному магнитному полю \vec{H}_0 . При этом длина вектора $\vec{\mu}$ меняться не будет, но будет меняться его проекция μ_z на направление поля \vec{H}_0 .

Если рассмотреть этот процесс с квантовой точки зрения, то отличие будет только в том, что проекция μ_z квантуется, и по этой причине ее изменения во времени происходят скачкообразно. Если воспользоваться принципом соответствия, то это приводит к правилу отбора $\Delta m_J = \pm 1$, которое должно соблюдаться при квантовых переходах между подуровнями расщепившегося зеемановского уровня. То есть разрешенными являются только переходы между соседними подуровнями. Расстояние между подуровнями составляет $\Delta E = \gamma H \Delta m_J \hbar$, так что частота перехода будет $\omega = \Delta E / \hbar = \gamma H \Delta m_J$, что совпадает с $\pm \omega_0$ при условии $\Delta m_J = \pm 1$.

Для наблюдения магнитного резонанса удобнее пользоваться не вращающимся полем \vec{H}_1 , а полем, синусоидально колеблющимся в одном и том же направлении перпендикулярно к основному полю \vec{H}_0 . Его можно представить в виде суммы двух полей одинаковой напряженности, вращающихся с одной и той же угловой скоростью, но в противоположных направлениях. Из них поле, вращающееся против прецессии частицы оказывает на нее быстро осциллирующее воздействие, не играющее роли в рассматриваемом явлении.

Если от формулы для резонансной частоты перейти к длинам волн, получим:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{|\gamma| H_0}$$

Если магнитный и механический моменты частицы обусловлены электронами электронной оболочки атома, то магнитный резонанс называют *электронным парамагнитным резонансом* (ЭПР). Если же атомными ядрами, то его называют *ядерным магнитным резонансом* (ЯМР).

55. Закон радиоактивного распада. Период полураспада и среднее время жизни ядра.

ЗАКОН РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА.

Определение: Радиоактивность – самопроизвольное изменение состава атомного ядра, происходящее за время, существенно большее характерного ядерного времени (10^{-22} с).

Принято считать, что изменение состава ядра должно происходить не раньше чем через 10^{-12} с после его рождения. Распады ядер часто происходят значительно быстрее, но такие распады уже не принято относить к радиоактивным.

Различают следующие виды радиоактивного распада:

1. α -распад
2. β -распад
3. спонтанное деление атомного ядра
4. протонный распад
5. двухпротонный распад и другие

В дальнейшем рассмотрим их подробнее. Вообще говоря, радиоактивный распад носит принципиально вероятностный характер. Вероятность распада ядра за единицу времени называется *постоянной распада* λ . Это значит, что из N имеющихся радиоактивных ядер за единицу времени в среднем распадается λN ядер. Эта величина называется *активностью* радиоактивного источника. Пусть N – число (очень большое) радиоактивных ядер в момент времени t , а $N + dN$ – в более поздний момент $t + dt$. Величина dN отрицательна, поскольку ядра могут только распадаться. Тогда:

$$dN = -\lambda N dt$$

Поскольку λ не зависит от времени, после интегрирования получаем:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Время t можно отсчитывать от любого момента, принимаемого за начальный. Постоянная N_0 означает число нераспавшихся ядер в начальный момент времени. Эта формула выражает **основной закон радиоактивного распада**.

ПЕРИОД ПОЛУРАСПАДА И ВРЕМЯ ЖИЗНИ.

Пусть за какой-то промежуток времени распалось $-dN$ ядер. Предположим, что время "жизни" одного из этих ядер равно t , тогда время жизни $-dN$ ядер будет равно соответственно $-tdN$. Суммарное время жизни всех N_0 ядер определяется интегралом:

$$-\int_{N_0}^0 t dN = \lambda \int_0^\infty t N dt = \lambda N_0 \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{N_0}{\lambda}$$

Таким образом, среднее **время жизни** одного радиоактивного ядра равно:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

С введением времени жизни закон радиоактивного распада представим в виде:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Определение: Время $T_{1/2}$, по истечении которого число наличных радиоактивных атомов убывает в два раза, называется *периодом* или *временем полураспада*.

Для его определения на основании закона радиоактивного распада получим:

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}$$

Решая это уравнение, получим:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,6931\tau$$

56. Туннелирование частиц сквозь потенциальный барьер. Альфа-распад. Закон Гейгера-Нэттола и его объяснение.

ТУННЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЦ СКВОЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР.

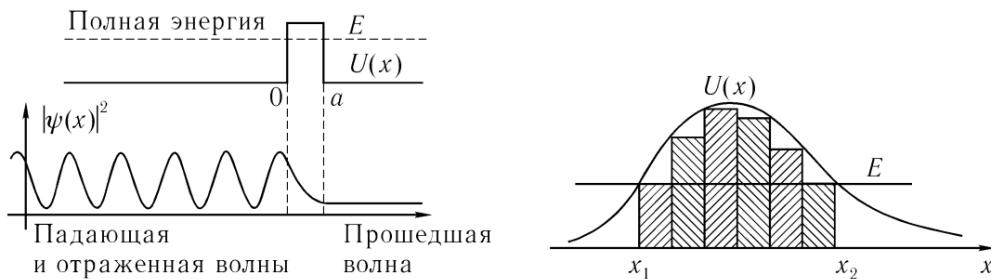
Рассмотрим прямоугольный потенциальный барьер. Запишем уравнения Шрёдингера в различных областях:

$$\text{область I и III: } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0, \quad \text{область II: } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} \psi_I = 1 \cdot e^{i\sqrt{2mE}x/\hbar} + Be^{-i\sqrt{2mE}x/\hbar} \\ \psi_{II} = \alpha e^{\sqrt{2m(U_0-E)x/\hbar}} + \beta e^{-\sqrt{2m(U_0-E)x/\hbar}} \\ \psi_{III} = Ce^{i\sqrt{2mE}x/\hbar} \end{cases}$$

Здесь B – амплитуда отраженной волны, амплитуда падающей волны A принимаем равной 1, C – амплитуда волны, прошедшей в область III ("сквозь"барьер), α и β – амплитуды двух вещественных экспонент, через которые выражается волновая функция в области II (под барьером).



Введем понятие *вектора плотности потока вероятности*:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$$

Коэффициент прозрачности (проницаемость) барьера D представляет собой отношение потоков вероятностей прошедшей и падающей волн. За исключением случая, когда энергия частицы мало отличается от высоты барьера, считаем, что $\alpha \ll \beta$, то есть что в области II, под барьером, волновая функция спадает экспоненциально:

$$\psi_{II} \simeq \beta e^{-\sqrt{2m(U_0-E)x/\hbar}}$$

Тогда коэффициент прозрачности D прямоугольного барьера высотой U_0 и ширины a можно получить следующим образом:

$$D = |\psi_{II}(a)|^2 \simeq e^{-2\sqrt{2m(U_0-E)a/\hbar}}$$

Полученный результат легко обобщается на случай барьера произвольной формы, который можно разбить на ряд прямоугольных барьеров:

$$D \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx \right\}$$

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому квантовому явлению – **туннельному эффекту**, в результате которого микрообъект может пройти через барьер.

Прохождение частицы сквозь барьер можно пояснить *соотношением неопределенности*. Неопределенность импульса на отрезке Δx составляет $\Delta p > \hbar/\Delta x$. Связанная с этим разбросом кинетическая энергия $\Delta p^2/2m$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия оказалась больше потенциальной и частица смогла пройти сквозь потенциальный барьер.

АЛЬФА-РАСПАД.

Спонтанному α -распаду подвержены только тяжелые ядра с $Z > 83$ и небольшая группа редкоземельных ядер в области $A = 140 \div 160$. При α -распаде исходное материнское ядро испускает ядро гелия (α -частицу) и превращается в дочернее ядро, числа протонов и нейtronов у которого уменьшаются на две единицы каждое. Период полураспада активных ядер изменяется в чрезвычайно широких пределах: от $3 \cdot 10^{-7}$ с до $1,4 \cdot 10^{17}$ лет. Диапазон изменения энергии вылетающих α -частиц значительно меньше – от 4 до 9 МэВ, причем чем меньше их энергия, тем больше период полураспада.

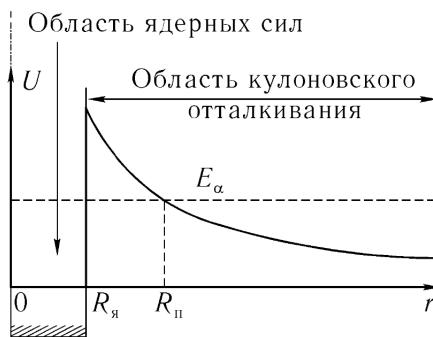
ЗАКОН ГЕЙГЕРА-НЭТТОЛА.

Функциональная связь между энергией α -частицы E и периодом полураспада радиоактивного ядра $T_{1/2}$ хорошо описывается формулой, полученной на основе экспериментальных данных Г. Гейгером и Дж. Нэттолом в 1911 году:

$$\lg T_{1/2} = a/\sqrt{E} + b$$

В свою очередь, Г. Гамов и, независимо, Р. Герни и Э. Кондон показали, что вероятность вылета α -частицы из ядра определяется вероятностью ее проникновения через кулоновский барьер. Рассмотрим вид потенциальной энергии α -частицы в ядре и его окрестности. Вне ядра короткодействующие ядерные силы быстро обращаются в нуль, и на α -частицу действует только электростатическое кулоновское отталкивание, с потенциалом:

$$U_{\text{кул}} = \frac{2(Z-2)e^2}{r}$$



На границе ядра вступает в игру сильное притяжение, обусловленное ядерными силами, и потенциальная кривая резко уходит вниз. Внутри ядра потенциал можно считать примерно постоянным. Для осуществления α -распада частице необходимо преодолеть этот потенциальный барьер, что невозможно с точки зрения классической физики. Однако здесь вступает в силу эффект *туннелирования*. Он и обеспечивает, хоть и небольшую, вероятность обнаружить частицу вне ядра. Проницаемость D барьера для α -частицы с энергией E определяется следующим выражением:

$$D = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{R_\text{n}}^{R_\alpha} \sqrt{2m_\alpha(U - E)} dr \right)$$

Интегрирование производится в пределах от радиуса ядра $R_\text{я}$ до точки поворота R_n , определяемой из условия:

$$E = \frac{2(Z-2)e^2}{R_\text{n}}$$

Будем считать, что $U \gg E$. В силу малости \hbar , стоящей в выражении для проницаемости барьера в экспоненте, фактически вклад области, где $U \sim E$, мал, и накладываемое нами условие физически оправдано. При этих предположениях:

$$\ln D \simeq -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_{R_\text{n}}^{R_\alpha} \sqrt{\frac{2(Z-2)e^2}{r}} dr \simeq -A \int_{R_\text{n}}^{R_\alpha} \frac{dr}{\sqrt{r}} \simeq -A(\sqrt{R_\alpha} - \sqrt{R_\text{n}}) = -A(B/\sqrt{E} + C)$$

Величины A, B, C – константы. Поскольку период полураспада обратно пропорционален проницаемости барьера, из последнего выражения следует экспериментально наблюдаемый закон Гейгера-Нэттола:

$$\lg T_{1/2} = a/\sqrt{E} + b$$

Реально коэффициенты a и b – не константы, однако они очень слабо зависят от атомного номера материнского ядра Z :

$$a \simeq 1,6Z; \quad b \simeq -1,6Z^{2/3} - 21,4$$

Это справедливо, если $T_{1/2}$ выражается в секундах, E – в мегаэлектронвольтах.

Таким образом: Период полураспада не зависит от атомного веса, слабо зависит от Z и в сильной степени – от энергии вылетающих α -частиц.

57. Виды бета-распадов. Объяснение непрерывности энергетического спектра электронов распада. Нейтрино.

ВИДЫ БЕТА-РАСПАДОВ.

Бета-распад – процесс самопроизвольного превращения нестабильного ядра в ядроизобару (ядро с тем же атомным номером) с зарядом, отличным от исходного на $\Delta z = \pm 1$. Конечным результатом этого процесса является превращение в ядре нейтрона в протон или протона в нейtron. Можно сказать, что β -распад есть не внутриядерный, а *внутринуклонный* процесс.

Различают три вида β -распада:

1. *Электронный β^- -распад*, в котором ядро испускает электрон, а потому зарядовое число Z увеличивается на единицу
2. *Позитронный β^+ -распад*, в котором ядро испускает позитрон и по этой причине его зарядовое число уменьшается на единицу
3. *Электронный захват (e-захват)*, в котором ядро поглощает один из электронов электронной оболочки, а потому зарядовое число уменьшается на единицу. Обычно электрон поглощается из K -слоя атома, поскольку этот слой ближе всего находится от ядра. В этом случае e -захват называют также K -захватом.

Главной особенностью β -распада является то, что он обусловлен не ядерными и не электромагнитными силами, а слабым взаимодействием, вероятность которого примерно в 10^{14} раз меньше ядерного. Поэтому периоды полураспадов β -активных ядер в среднем довольно велики – порядка нескольких минут и даже часов. Процессы β -распада идут всегда, когда они энергетически возможны. Кулоновский барьер для β -распада несуществен в силу очень малой массы электрона.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА.

Характерной особенностью β -распада является энергетический спектр вылетающих частиц. В отличие от α -частиц, в данном случае мы имеем непрерывный энергетический спектр электронов β -распада.



То есть по сути, исследования приводили к тому, что в этом распаде как будто нарушается закон сохранения энергии, потому что часть энергии куда-то "исчезала". Для объяснения этого парадокса В. Паули предположил, что при β -распаде вместе с электроном вылетает, унося с собой недостающую энергию, еще одна частица. Она нейтральная и обладает большой проникающей способностью. Тогда, при одиночном акте распада соотношение энергий электрона и этой частицы может быть любым, то есть энергия электрона может принимать любые значения от нуля до максимальной возможной энергии (*полной выделяющейся энергии*).

НЕЙТРИНО.

Эту незаряженную гипотетическую частицу Ферми назвал **нейтрино**. Она очень слабо взаимодействует с веществом, так как не ионизирует атомы среды, с которыми сталкивается.

Масса нейтрино, если таковая имеется у этой частицы, должна быть во всяком случае меньше массы электрона. Это видно из того, что при β -распаде, когда должен соблюдать-ся и закон сохранения импульса, электроны уносят меньше половины освобождающейся энергии.

Нейтрино не может быть нейтроном, так как в противном случае при испускании нейтрино заметно изменялась бы масса ядра, а это при β -распаде не наблюдается. Кроме того, если бы нейтрино и нейtron были одной и той же частицей, то она обнаружилась бы при столкновении с другими атомными ядрами.

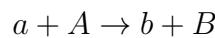
Поскольку нейтрино не ионизует атомы, магнитный момент этой частицы также должен равняться нулю (или, во всяком случае, быть весьма малым). Теоретические расчеты энергетического спектра электронов (позитронов), рождающихся при β -распаде, выполненные при разных предположениях относительно спина нейтрино, показали, что спин этой частицы равен $1/2$.

58. Ядерные реакции. Составное ядро. Сечение нерезонансных реакций. Закон Бете.

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ.

При сближении ядра с какой-либо частицей до расстояний порядка 10^{13} см они вступают во взаимодействие, которое может привести к преобразованию обоих столкнувшихся объектов. Этот процесс называется **ядерной реакцией**.

Во время ядерной реакции происходит перераспределение энергии и импульса обеих частиц, в результате чего образуются две или более другие частицы, вылетающие из места взаимодействия. Наиболее распространенным видом реакции является взаимодействие легкой частицы a с ядром A , в результате которого также образуются легкая частица b и ядро B :



Обычно ядерная реакция между частицей a и ядром A может идти несколькими конкурирующими способами. Разные возможные пути протекания ядерной реакции на втором этапе называют *каналами реакции*, а начальный этап – *входным каналом*.

СЕЧЕНИЕ НЕРЕЗОНАНСНЫХ РЕАКЦИЙ.

Рассмотрим идеализированную модель. Пусть каждое ядро – шарик радиуса r , падающие частицы – материальные точки, летящие строго по прямолинейным траекториям. Предположим также, что если траектория частицы пересекает шарик-ядро, то реакция происходит, а если не пересекает – то не происходит. Расстояния между ядрами атомов даже в твердом теле в десятки тысяч раз больше размеров самих ядер, поэтому можно считать, что если на пути потока частиц находится пластинка вещества, имеющая площадь S и содержащая n ядер, то площадь, перекрытая ядрами, равна $n\sigma_r = n\pi r^2$, а остальная часть площади пустая. Тогда, если на эту площадку падает N частиц, то из них попадут в ядра и вызовут ядерную реакцию столько частиц:

$$N_r = \frac{\sigma_r n}{S}$$

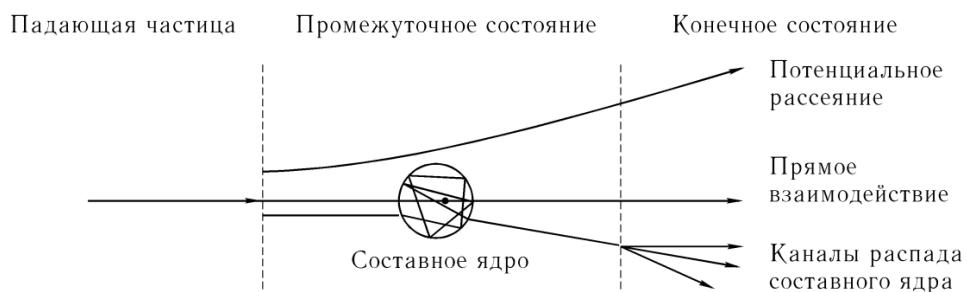
В действительности все обстоит гораздо сложнее. Подлетая к ядру, частица может изменить направление своего движения, а если столкнется, то может отлететь от него или вызвать другую ядерную реакцию. Поэтому для расчета числа происходящих реакций, подбирают такую площадку $\sigma \neq \sigma_r$, чтобы можно было мысленно поместить ее в центр ядра и свести задачу к предыдущей. Такая условная площадка и называется **эффективным сечением ядра** для данной реакции.

Следует иметь в виду, что в определенных условиях одни и те же частицы на ядрах одного изотопа могут вызывать ядерные реакции разных типов. Каждый тип реакции в таких условиях будет характеризоваться своим эффективным сечением, которое называется *парциальным сечением*. Сумма парциальных сечений всех возможных процессов, включая рассеяние, называется полным эффективным сечением взаимодействия частиц с ядром и обозначается символом σ_t .

Итак: Эффективное сечение реакции лишь по названию и размерности напоминает геометрическое сечение ядра. Фактически же эффективное сечение – это условная величина, определяющая *вероятность* рассматриваемой ядерной реакции. В качестве единицы сечения обычно выбирается *барн*: $1 \text{ б} = 10^{-28} \text{ м}^2$.

СОСТАВНОЕ ЯДРО.

Нильс Бор предложил рассматривать ядерную реакцию как процесс, состоящий из двух стадий: образования *составной системы* C (**составного ядра**) и ее распада на продукты реакции:



Внесенная частицей энергия распределяется между всеми нуклонами ядра, происходят многочисленные перераспределения энергии, и поэтому проходит относительно большое время, прежде чем энергия сконцентрируется на одной или нескольких частицах настолько, что они смогут покинуть составную систему.

Согласно предположению Бора, сечение ядерной реакции можно записать в виде:

$$\sigma_{ab} = \sigma_C(a)P_C(b)$$

При этом $\sigma_C(a)$ – сечение образования составной системы частицей a , падающей на ядро-мишень, а $P_C(b)$ – вероятность распада образовавшегося составного ядра C с испусканием частицы b и образованием конечного ядра.

ЗАКОН БЕТЕ.

Рассмотрим подробнее сечение $\sigma_C(a)$. Пусть ядро имеет строго определенную сферическую поверхность радиуса R и ядерные силы действуют до тех пор, пока расстояние частицы a от центра ядра превосходит R . После проникновения через ядерную поверхность частица движется со средней кинетической энергией T , которая заметно больше ее энергии E вне ядра. Вообще говоря, положение частицы является неопределенным в пределах длины волны $\lambda = \hbar/\sqrt{2mE}$, что можно учесть, заменив R на $R + \lambda$.

Для сильно взаимодействующей частицы при прохождении через границу ядра происходит резкий скачок потенциала, вызванный попаданием частицы в область действия больших сил ядерного притяжения.

Для оценки коэффициента прохождения рассмотрим упрощенную задачу для прямоугольной потенциальной ямы U_0 . Тогда:

$$D = \frac{4kK}{(K+k)^2}, \quad \text{где } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad K = \frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar}$$

Это получается путем решения уравнений Шрёдингера на границах этой потенциальной ямы. Тогда для сечения получаем:

$$\sigma_C(a) \simeq \pi(R+\lambda)^2 \frac{4kK}{(K+k)^2}$$

При $E \ll U_0$, то есть $k \ll K$ и $\lambda \gg R$ имеем:

$$\sigma_C(a) \simeq 4\pi\lambda^2 \sqrt{E/U_0}$$

Так как $\lambda^2 = \hbar^2/(2mE)$ и $E = mv^2/2$, то:

$$\sigma_C(a) \simeq \frac{2\pi\hbar^2}{m\sqrt{EU_0}}$$

Таким образом: $\sigma_C(a)$ обратно пропорционально скорости частицы v . Полученная связь называется **законом Бете**. Он имеет простую качественную интерпретацию: вероятность взаимодействия частицы с ядром пропорционально времени их взаимодействия, а оно примерно равно частному от деления области взаимодействия на скорость.

59. Резонансные ядерные реакции. Формула Брэйта-Вигнера.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ.

До этого мы рассматривали механизм ядерной реакции, проходящей через составное ядро, без учета его дискретных уровней, так как говорили о составных ядрах с большой энергией возбуждения, перекрывающей эти уровни. Однако образующееся на промежуточной стадии ядерной реакции составное ядро обладает рядом квазистационарных состояний то есть происходят **резонансные ядерные реакции**. Конечное время жизни таких состояний обусловлено возможностью распада ядра на частицы и конечное ядро.

Обратная величина времени жизни уровня τ_s соответствует вероятности испускания в единицу времени γ -кванта (фотона с высокой энергией) или частицы. Она называется *шириной уровня*:

$$\Gamma^s = \frac{\hbar}{\tau_s}$$

Связь ширины уровня с его временем жизни следует из соотношения неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t = \Gamma \tau = 2\pi \hbar$$

ФОРМУЛА БРЕЙТА-ВИНГЕРА.

Рассмотрим переход системы из возбужденного в основное состояние, сопровождающийся электромагнитным излучением. Тогда напряженность поля такого излучения:

$$A(t) = A_0 \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega_0 t - \alpha t/2), & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что \vec{k} – волновой вектор, $\omega_0 = (E_n - E_0)/\hbar$ – частота соответствующая энергии перехода, а α – коэффициент затухания, по сути он является шириной Γ .

Найдем частотный спектр $A(\omega)$ испускаемого излучения. Согласно формуле Фурье:

$$A(\omega) = \int_0^\infty A(t) e^{i\omega t} dt = \frac{A_0}{2\pi} \frac{1}{\alpha/2 - i(\omega - \omega_0)}$$

Таким образом, спектральная интенсивность излучения $I(\omega)$ равна:

$$I(\omega) = |A(\omega)|^2 = \left(\frac{A_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Максимальная интенсивность излучения I_0 соответствует частоте ω_0 и равна $(A_0/\pi\alpha)^2$. Тогда в принятых обозначениях:

$$I(\omega) = I_0 \frac{(\alpha/2)^2}{\alpha^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Очевидно, что процесс, обратный испусканию, – резонансное поглощение имеет ту же частотную зависимость. Следовательно, эффективное сечение резонансного поглощения $\sigma(\omega)$ имеет вид:

$$\boxed{\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{(\alpha/2)^2}{\alpha^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}}$$

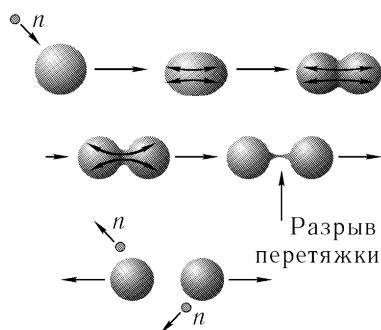
Величина σ_0 – максимальное эффективное сечение поглощения, определяемое физикой процесса. Полученное выражение называется **формулой Брейта-Вигнера**.

60. Деление ядер под действием нейтронов. Принцип работы ядерного реактора на тепловых нейтронах.

ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРОНОВ.

Деление атомных ядер – это процесс, характерный только для самых тяжелых ядер, начиная от тория и далее в сторону больших Z . Известно, что для вырываания из ядра одного нуклона требуется энергия в миллионы электроновольт, поэтому ученые недоумевали от возможности деления атомного ядра медленными нейтронами. Однако, если провести аналогию деления ядра с делением заряженной капли жидкости при деформации, все становится ясно.

При попадании нейтрона ядро начинает колебаться и принимает вытянутую форму. Действующие между нуклонами ядерные силы, приводят к появлению "поверхностного натяжения". Они стремятся вернуть ядру первоначальную форму. Однако, если вытянутость ядра в какой-то момент времени оказывается достаточно большой, электростатические силы отталкивания одноименных зарядов могут превзойти силы "поверхностного натяжения". Тогда ядро начнет еще больше растягиваться, пока не разорвется:



ПРИНЦИП РАБОТЫ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА.

При делении тяжелого ядра должна освобождаться большая энергия Q_f , поскольку энергия связи, приходящаяся на один нуклон в тяжелых ядрах $\varepsilon_{\text{тяж}}$ примерно на 0,8 МэВ меньше соответствующей энергии $\varepsilon_{\text{ср}}$ для средних ядер; так, например, для ядра ^{238}U :

$$Q_f \simeq A(\varepsilon_{\text{тяж}} - \varepsilon_{\text{ср}}) \simeq 238 \cdot 0,8 \simeq 200 \text{ МэВ}$$

Выделением большого количества энергии при делении тяжелых ядер и объясняется привлекательность использования ядерной энергии. Рассмотрим принцип работы ядерного реактора.

Так как процесс деления ядер обычно вызывается нейтронами, за чем следует возникновение новых нейтронов, появляется возможность осуществления самоподдерживающегося процесса из следующих друг за другом актов деления. Такие самоподдерживающиеся процессы принято называть *цепными реакциями*.

При делении возникают быстрые нейтроны с энергией порядка одного миллиона электронвольт. Если такие нейтроны замедлить, то их способность вызывать деление возрастает (работает закон Бете $1/v$). В качестве замедлителя нейтронов обычно используют воду либо графит.

Условие возникновения цепной реакции удобно рассматривать, введя в рассмотрение *коэффициент размножения* k , определяемый как отношение числа нейтронов какого-либо одного поколения к числу тепловых нейтронов в предшествующем поколении. Если коэффициент размножения $k > 1$, то выделяется огромная мощность и реакция может стать неуправляемой, что приводит к сильному перегреву реактора. Управление реактором становится возможным благодаря наличию при делении небольшого числа запаздывающих нейтронов, возникающих в определенных реакциях через некоторое время после деления. Объясним, чем они могут помочь.

Если среднее время жизни одного поколения нейтронов равно T , то за единицу времени число нейтронов N изменится в $(k - 1)/T$ раз, то есть:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k - 1}{T} N \Rightarrow N = N_0 \exp(t/\tau_0)$$

Величина N_0 – начальное число нейтронов, а характерное время τ_0 – *период реактора*.

Посмотрим, что изменит добавление запаздывающих нейтронов, доля которых составляет β . Среднее время жизни поколения всех нейтронов T равно среднеарифметическому от жизни $(1 - \beta)\nu$ мгновенных и $\beta\nu$ запаздывающих:

$$T = \frac{(1 - \beta)\nu T_0 + \beta\nu T_3}{\nu} \simeq T_0 + \beta T_3$$

Практически всегда $\beta T_3 \gg T_0$, поэтому период реактора определяется средним временем запаздывания нейтронов.

Таким образом: Наличие запаздывающих нейтронов решающим образом упрощает проблему регулирования скорости протекания цепной реакции.

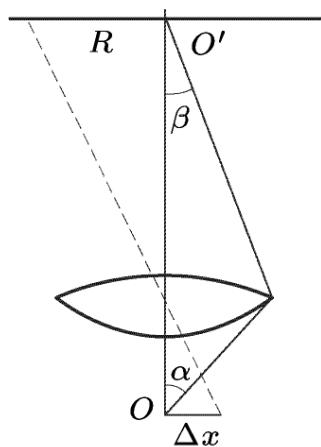
61. Соотношение неопределенностей для энергии и времени. Оценка времени жизни виртуальных частиц, радиусов сильного и слабого взаимодействий.

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

Мы не всегда можем приписать точное значение данной физической величине. Часто можно указать лишь вероятность того, что она принимает те или иные определенные значения. Например, координата свободно движущегося электрона, которому соответствует плоская волна де-Бройля $\psi(x) = e^{ikx}$, полностью неопределенна. Это сразу следует из вероятностного смысла волновой функции. Квадрат ее модуля $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$ представляет собой плотность вероятности найти частицу в точке x . Поскольку $|e^{ikx}|^2 = 1$ и не зависит от координаты, волновая функция соответствует постоянной плотности вероятности. Другими словами, у свободной частицы координата полностью неопределенна, а импульс известен точно.

Анализируя возможности измерения координаты и импульса электрона, Гейзенберг пришел к заключению, что условия, благоприятные для измерения положения, затрудняют нахождение импульса, и наоборот. Для доказательства он пользовался мысленным экспериментом.

Пусть частица находится под микроскопом. Для определения ее положения она освещается монохроматическим фотоном короткой длины волны λ . По месту попадания фотона на фотопластинку и судят о положении частицы. При освещении пучком света изображением частицы служит дифракционная картина со светлыми и темными кольцами и светлым кружком в центре.



При рассеянии на электроне фотон с той или иной вероятностью может попасть в любую точку потенциально возможной дифракционной картины, где интенсивность света отлична от нуля. Практически все фотоны могут попасть только в пределы центрального кружка. Интенсивностью остальных колец можно пренебречь.

Радиус центрального кружка: $R \approx \lambda/\beta$. Неточность положения электрона Δx найдется из условия синусов Аббе: $R\beta = \Delta x \sin \alpha$, то есть $\lambda = \Delta x \sin \alpha$. Чем меньше λ , тем точнее определяется положение частицы. Но при рассеянии фотона на электроне последний испытывает отдачу, в результате чего импульс электрона получает неконтролируемое приращение $\Delta p_x \sim (h \sin \alpha)/\lambda$. Чем меньше λ , тем больше это приращение.

Таким образом: При одновременном измерении x и p_x мы приходим к *соотношению неопределенности*:

$$\boxed{\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar; \quad \Delta p_y \cdot \Delta y \geq \hbar; \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \hbar}$$

Соотношение неопределенности можно представить иначе:

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \Delta E = v \Delta p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta P \Rightarrow \Delta x \Delta p_x = \boxed{\Delta E \Delta t \geq \hbar}$$

Это соотношение означает, что чем короче время существования какого-то состояния или время, отведенное для его наблюдения, тем с меньшей определенностью можно говорить об энергии этого состояния. Наоборот, чем больше это время, тем с большей точностью определена энергия состояния.

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ.

Определение: *Виртуальная частица* – объект, который характеризуется почти всеми квантовыми числами, присущими одной из реальных элементарных частиц, но для которого нарушена свойственная последней связь между энергией и импульсом частицы. Такие частицы, родившись, не могут "улететь на бесконечность". Они обязаны либо поглотиться какой-либо частицей, либо распасться на реальные частицы.

В квантовой теории поля взаимодействие частиц рассматривается как рождение или поглощение одной свободной частицей других (*виртуальных*) частиц, иначе говоря, каждая частица окружена облаком виртуальных частиц. С точки зрения классической физики это невозможно, но в квантовой механике в соответствии с соотношением неопределенностей частица может испустить виртуальную на короткое время $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$, где ΔE – неопределенность в энергии, примерно равная энергии покоя mc^2 .

Если считать скорость движения виртуальной частицы равной скорости света c , то радиус действия возникающих таким образом обменных сил должен быть порядка \hbar/mc , то есть порядка комптоновской длины волны виртуальной частицы.

РАДИУСЫ СИЛЬНОГО И СЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ.

Сильное взаимодействие удерживает нуклоны в атомных ядрах и присуще также большинству элементарных частиц, так называемых адронов. Экспериментально было установлено, что радиус действия ядерных сил составляет примерно 10^{-13} см.

Слабые взаимодействия вызывают β -распад радиоактивных ядер и наряду с электромагнитными силами управляют поведением лептонов – элементарных частиц, не участвующих в сильных взаимодействиях. Эксперименты показывают, что радиус действия слабого взаимодействия порядка 10^{-16} см, то есть масса ответственных за него виртуальных частиц должна быть ~ 100 ГэВ.

62. Фундаментальные взаимодействия и фундаментальные частицы (лептоны, кварки и переносчики взаимодействий). Кварковая структура адронов.

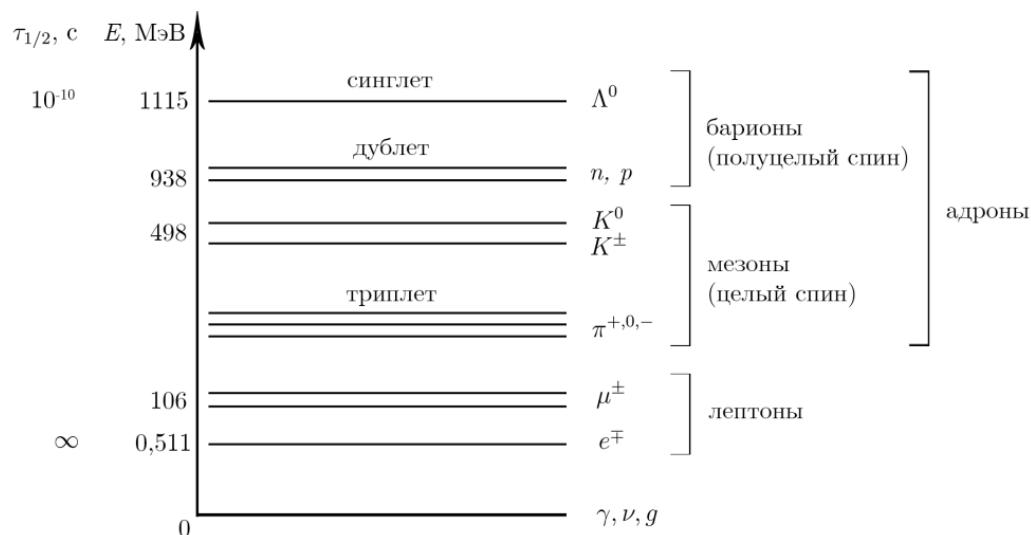
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЧАСТИЦЫ.

Определение: Элементарными частицами сейчас условно называют большую группу мельчайших микрочастиц, не являющихся атомами или атомными ядрами (за исключением протонов – ядер атома водорода).

Все частицы (в том числе и неэлементарные частицы и квазичастицы) разделяются на *бозоны* и *фермионы*.

Бозоны – частицы или квазичастицы, обладающие нулевым или целочисленным спином. К ним относятся гипотетический *гравитон* (спин 2), *фотон* (спин 1), промежуточные векторные *бозоны* (спин 1), *глюоны* (спин 1), *мезоны* и *мезонные резонансы*, а также античастицы всех перечисленных частиц.

Частицы или квазичастицы с полуцелым спином называются *фермионами*. К ним относятся *лептоны*, все *барионы* и *барионные резонансы*, *кварки* (спин 1/2), а также соответствующие античастицы.



Все процессы и явления в природе осуществляются в результате четырех взаимодействий: *сильных*, *электромагнитных*, *слабых* и *гравитационных*.

Сильное взаимодействие вызывают процессы, протекающие наиболее быстро по сравнению с другими процессами. Оно обеспечивает сильную связь элементарных частиц (например нуклонов в ядре).

Электромагнитное взаимодействие сводится к взаимодействию электрических зарядов (и магнитных моментов) частиц с электромагнитным полем. Оно обеспечивает связь электронов в атомах, ионов в кристаллах, атомов в молекулах и характеризуется бесконечным радиусом действия.

Слабое взаимодействие вызывает очень медленно протекающие процессы с элементарными частицами. Оно отвечает за β -распад и слабые распады элементарных частиц.

Гравитационное взаимодействие доминирует в случае больших масс. Но в мире элементарных частиц, ввиду малости их масс, даже на самых малых расстояниях порядка это взаимодействие ничтожно. Как и электромагнитное взаимодействие это взаимодействие характеризуется бесконечным радиусом действия.

Переносчиками этих взаимодействий являются описанные выше элементарные частицы. Остановимся на этом подробнее. Переносчиками *электромагнитного взаимодействия* являются *фотоны*. Переносчиками *слабого взаимодействия* являются родственные им W^\pm, Z^0 -бозоны. Для *гравитационного взаимодействия* переносчик – *гравитон*, но его пока не нашли, поэтому его называют гипотетическим. Переносчиком *сильного взаимодействия* является π -мезон – сильно взаимодействующая частица наименьшей массы.

Взаимодействие	Переносчик	$R_{\text{вз}}$
сильное	π	10^{-13}
слабое	W^\pm, Z^0	10^{-16}
электромагнитное	γ	∞
гравитационное	g	∞

Определение: *Лептонами* называются частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях и имеющие спин $1/2$.

В настоящее время установлено существование шести заряженных лептонов: *электрон* e^- , *позитрон* e^+ , *мюоны* μ^\pm , тяжелые лептоны τ^\pm (*таоны*), и соответствующих им шести нейтральных частиц: *электронное нейтрино* ν_e и антинейтрино $\bar{\nu}_e$, *мюонное нейтрино* ν_μ и антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$, *таонное нейтрино* ν_τ и антинейтрино $\bar{\nu}_\tau$.

Все лептоны, на современном уровне знания, можно назвать *истинно элементарными частицами*, так как у них не обнаружена внутренняя структура.

КВАРКОВАЯ СТРУКТУРА АДРОНОВ.

Определение: *Адроны* – сильно взаимодействующие частицы.

Обилие уже открытых и вновь открываемых адронов наводит на мысль, что все они построены из каких-то других, более фундаментальных частиц. Эти частицы были названы **кварками**. Кварки являются гипотетическими частицами. Более того, полагают, что они вообще не могут наблюдаться как свободные частицы. Основные характеристики кварков, получившие название ароматов, приведены в таблице:

Название	Символ	Масса, МэВ	Заряд					
			$Q(e)$	B	S	C	b	t
Верхний	u	300	+2/3	1/3	0	0	0	0
Нижний	d	300	-1/3	1/3	0	0	0	0
Странный	s	500	-1/3	1/3	-1	0	0	0
Очарованный	c	1500	+2/3	1/3	0	+1	0	0
Красивый	b	5000	-1/3	1/3	0	0	+1	0
Правдивый	t	175000	+2/3	1/3	0	0	0	+1

Обращают на себя внимание дробные значения электрического заряда Q и барионного заряда B , не встречающиеся ни у одной из наблюдавшихся элементарных частиц. Заряд можно себе представить как проекцию вектора, тогда для кварков можно сказать, что вектор зарядов кварков имеет две проекции: $+2/3$ и $-1/3$. Кроме перечисленных ароматов, кварки имеют еще одно квантовое число – цвет: *желтый, красный и синий*.

Основным предположением кварковой модели является то, что мезоны состоят из кварка и антитварка $M = (q_1, \bar{q}_2)$, а барионы из трех кварков $B = (q_1, q_2, q_3)$. Обычным адронам соответствуют связанные состояния, построенные только из u и d -кварков. Наличие в связанном состоянии наряду с u и d -кварками одного s, c, b или t -кварка означает, что соответствующий адрон – странный ($S = -1$), очарованный ($C = 1$), красивый ($b = 1$) или правдивый ($t = 1$).

Частица	Масса, МэВ	Q	I_3	Кварковый состав
π^+	140	+1	+1	$u\bar{d}$
π^0	135	0	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}^*$
π^-	140	-1	-1	$\bar{u}d$
K^+	494	1	+1/2	$u\bar{s}$
K^0	498	0	-1/2	$d\bar{s}$
K^-	494	-1	-1/2	$\bar{u}s$
p	938	+1	1/2	uud
n	940	0	-1/2	udd
Λ^0	1115	0	0	uds
Σ^+	1189	+1	+1	uus
Σ^0	1192	0	0	uds
Σ^-	1197	-1	-1	dds
Δ^{++}	1236	+2	3/2	uuu
Δ^-	1236	-1	-3/2	ddd
Ξ^-	1321	-1	-1/2	dss
Ξ^0	1345	0	1/2	uss
Ω^-	1672	-1	0	sss

СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ.

Дадим наименования, условные обозначения и размерности наиболее употребительных единиц в системе СИ.

Для перехода к другим системам – СГСЭ и СГСМ – в последних столбцах приведены соотношения между единицами этих систем и соответствующими единицами системы СИ.

Различие в системах СГС имеет место для электрических величин. Это обусловлено тем, что в качестве четвертой основной единицы в системе СГСЭ принята электрическая проницаемость пустоты ($\epsilon_0 = 1$), а в системе СГСМ – магнитная проницаемость пустоты ($\mu_0 = 1$).

Существует так же система Гаусса. В ней основными единицами являются грамм, сантиметр, секунда, $\epsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$ для вакуума. В этой системе электрические величины измеряются в системе СГСЭ, магнитные – в системе СГСМ.

Величина	Наименование	Размерность	Обозначение		Содержит единиц систем СГС	
			русским шрифтом	латинским шрифтом	СГСЭ	СГСМ
1. Основные единицы						
Длина	метр	м	м	м	10^2 см	10^2 см
Масса	килограмм	кг	кг	kg	10^3 г	10^3 г
Время	секунда	сек	сек	sec	1 сек	1 сек
Сила тока	ампер	а	а	A	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
Температура	градус Кельвина	град	град	grad	-	-

2. Механические единицы						
Скорость	метр в секунду	м/сек	м/сек	м/сек	$10^2 \cdot$ м/сек	$10^2 \cdot$ м/сек
Ускорение	метр в секунду за секунду	м/сек ²	м/сек ²	м/сек ²	$10^2 \cdot$ см/сек ²	$10^2 \cdot$ см/сек ²
Энергия и работа	Джоуль	кг · м ² /сек ² =дж	дж	ј	10^7 эрг	10^7 эрг
Сила	Ньютон	кг · м/сек ² =дж/м	н	N	10^5 дин	10^7 дин
Мощность	ватт	кг · м ² /сек ³ =дж/сек	вт	W	10^7 эрг/сек	10^7 эрг/сек

4. Электрические единицы						
Количество электричества	кулон	$a \cdot \text{сек} = \text{к}$	к	с	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
Напряжение, ЭДС	вольт	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{а} \cdot \text{сек}^3 = \text{в}$	в	V	$1/300$	10^8
Напр. эл. поля	вольт на метр	$\text{кг} \cdot \text{м} / \text{а} \cdot \text{сек}^3 = \text{в/м}$	в/м	V/m	$1/3 \cdot 10^{-4}$	10^6
Электроемкость	фарада	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^4 / \text{кг} \cdot \text{м}^2 = \text{а} \cdot \text{сек} / \text{в} = \text{сек/ом}$	ϕ	F	$9 \cdot 10^{11} \text{ см}$	10^{-9}
Электрическое сопротивление	ом	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^3 = \text{в/а}$	ом	Ω	$1/9 \cdot 10^{-11}$	10^9
Удельное сопротивление	ом на метр	$\text{кг} \cdot \text{м}^3 / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^3 = \text{ом} \cdot \text{м}$	$\text{ом} \cdot \text{м}$	$\Omega \cdot \text{м}$	$1/9 \cdot 10^{-9}$	10^{11}
Диэлектрическая проницаемость	фарада на метр	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^4 / \text{кг} \cdot \text{м}^3 = \phi/\text{м}$	$\phi/\text{м}$	$F/\text{м}$	$36\pi \cdot 10^9$	$4\pi \cdot 10^{-11}$

4. Магнитные единицы						
Магнитный поток	вебер	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{а} \cdot \text{сек}^2$	вб	W/b	$1/300$	10^8 мкс
Магнитная индукция	tesла	$\text{кг}/\text{а} \cdot \text{сек}^2$	тл	T	$10^{-6} \cdot 1/3$	10^4 гс
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	а/м	а/м	$A/\text{м}$	$12\pi \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э}$
Индуктивность	генри	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^2 = \text{ом} \cdot \text{сек}$	гн	H	$1/9 \cdot 10^{-11}$	10^9 см
Магнитная проницаемость	генри на метр	$\text{гн}/\text{м}$	$\text{гн}/\text{м}$	$H/\text{м}$	$1/36\pi \cdot 10^{13}$	$1/4\pi \cdot 10^7$

5. Оптические единицы						
Световой поток	люмен	$\text{св} \cdot \text{стер}$	лм	lm	—	—
Яркость	нит	$\text{св}/\text{м}$	нт	nt	—	—
Освещенность	люкс	$\text{лм}/\text{м}^2$	лк	I_x	—	—
Освещенность	люкс	$\text{лм}/\text{м}^2$	лк	I_x	—	—

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ.

Константа	Обозначение	Числовое значение	Размерность и единица физической величины
Скорость света в вакууме	c	299 792 458	м/с
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566\,370\,614\dots$	10^{-7} Н/А ²
Электрическая постоянная	ϵ_0	$(\mu_0 c^2)^{-1} = 8,854\,187\,817\dots$	10^{-12} Ф/м
Гравитационная постоянная	G	6,672 59(85)	10^{-11} м ³ /(кг·с ²)
Постоянная Планка в электрон-вольтах $h/\{e\}$	h	6,626 075 5(40)	10^{-34} Дж·с
$h/2\pi$ в электрон-вольтах $\hbar\{e\}$	\hbar	4,135 669 2(12)	10^{-15} эВ·с
Планковская масса $(\hbar c/G)^{1/2}$	m_P	1,054 572 66(63)	10^{-34} Дж·с
Элементарный заряд	e	6,582 1220(20)	10^{-16} эВ·с
Магнетон Бора $e\hbar/2m_e$	μ_B	2,176 71(14)	10^{-8} кг
Боровский радиус $\alpha/(4\pi R_\infty)$	a_0	1,602 177 33(49)	10^{-19} Кл
Масса покоя электрона	m_e	9,274 0154(31)	10^{-24} Дж/Тл
Боровский радиус $\alpha/(4\pi R_\infty)$	a_0	0,529 177 249(24)	10^{-10} м
Отношение заряда электрона к его массе	$-\frac{e}{m_e}$	9,109 389 7(54)	10^{-31} кг
Классический радиус электрона $\alpha^2 a_0$	r_e	-1,758 819 62(53)	10^{11} Кл/кг
Масса покоя протона	m_p	2,817 940 92(38)	10^{-15} м
Отношение массы протона к массе электрона	$\frac{m_p}{m_e}$	1,672 6231(10)	10^{-27} кг
Масса покоя нейтрона	m_n	1,674 9286(10)	10^{-27} кг
Масса покоя дейтрана	m_d	3,343 5860(20)	10^{-27} кг
Постоянная Авогадро	N_A	6,022 1367(36)	10^{23} моль ⁻¹
Атомная единица массы $1 \text{ а.е.м.} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) \equiv m_{\text{а.е.м.}}$	а.е.м.	1,660 5420(10)	10^{-27} кг
Постоянная Фарадея	F	96 485,309(29)	Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 510(70)	Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана R/N_A	k	1,380 658(12)	10^{-23} Дж/К