

Государственный квалификационный экзамен по общей физике

*Варианты экзаменационных
контрольных с решениями
1996-2004*



Java Technology

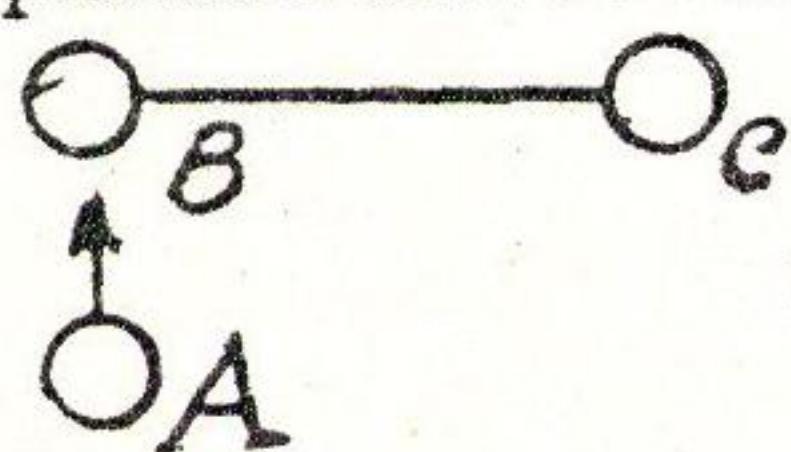
Created by lavr@1-313

Содержание

ВАРИАНТ	УСЛОВИЕ	РЕШЕНИЕ
1996 А	3	24
1996 Б	4	25
1996 В	5	26
1997 А	6	28
1997 Б	7	29
1997 В	8	30
1998 А	9	32
1998 Б	10	33
1999 А	11	34
1999 Б	12	35
1999 В	13	37
2000 А	14	39
2000 Б	15	40
2000 В	16	41
2003 А	17	43
2003 Б	18	44
2003 В	19	45
2004 А	21	47
2004 Б	22	49
2004 В	23	52

Вариант А

1. Столкновение атома A с двухатомной молекулой BC можно рассматривать как столкновение двух свободных частиц A и B (см.рис). Показать,



что при этом передаваемая энергия перераспределяется поровну между вращательным движением молекулы и поступательным движением ее центра масс.

2. Импульс излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,05 \text{ мкм}$) с длительностью $\tau = 10^{-8} \text{ с}$ и диаметром лазерного пучка $D = 0,5 \text{ см}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$ на поверхность образца из алюминия. Оценить энергию лазерного импульса, необходимую для нагрева алюминия до температуры плавления. Коэффициент теплопроводности алюминия $\kappa = 2,1 \text{ Вт}/\text{см}\cdot\text{К}$, температура плавления $T_p = 2200^\circ\text{C}$, плотность $\rho = 2,7 \text{ г}/\text{см}^3$, коэффициент поглощения $\alpha = 10\%$.

3. В сильном магнитном поле H при наблюдении в направлении, перпендикулярном полю (поперечный эффект Зеемана) в спектре излучения имеется три линейно-поляризованных линии: несмещенная спектральная линия длины волны λ с электрическим вектором, направленным вдоль магнитного поля, и две смещенные с электрическим вектором $E \perp H$. Это излучение пропускается через два скрещенных поляризатора, между которыми находится анизотропная кристаллическая пластинка с заданными Δn и d . Оптическая ось пластины составляет углы 45° с направлениями поляроидов. При какой величине магнитного поля в спектре излучения будут видны лишь две линии?

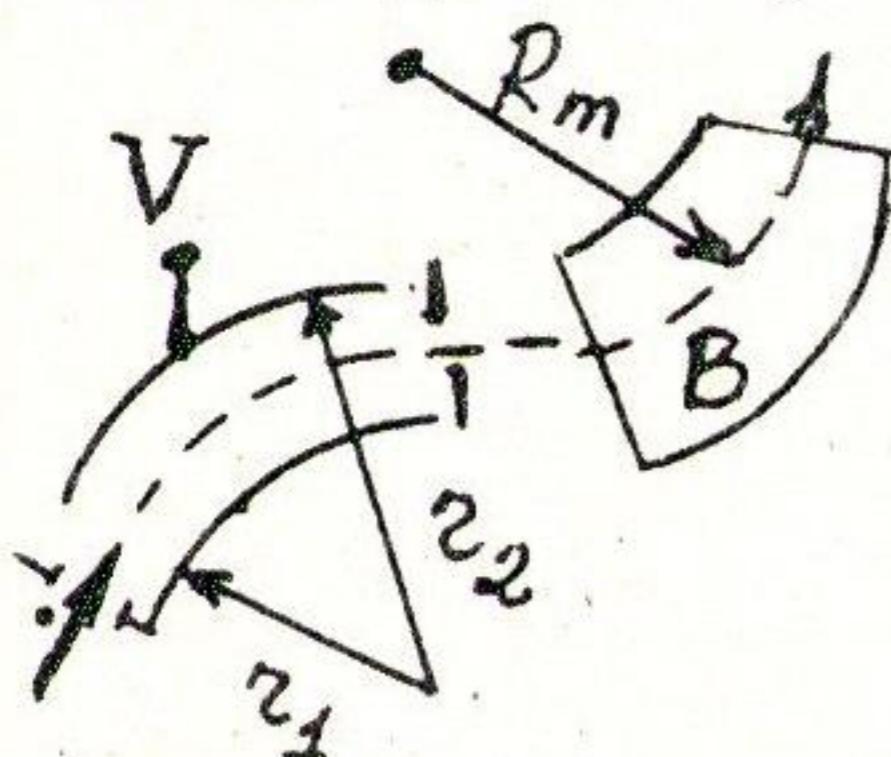
4. Потенциальная энергия атома в кристалле хорошо описывается функцией $U(x) = \gamma x^2 - \delta x^3$, причем можно считать, что $U(a) \approx 0$, где x — отклонение атома от положения равновесия, а a — постоянная решётки. Оценив параметры γ и δ , найти (в эВ) энергию связи атома в кристалле серебра ($A=108$), считая ее примерно равной глубине потенциала. Скорость звука в серебре $s = 2,6 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с}$.

5. Из широкой сверхпроводящей ленты был свернут длинный цилиндр радиусом $a=1 \text{ см}$ и края ленты сварены вдоль образующей. Измерения показали, что электрический контакт в месте сварки оказался не очень хорошим, ибо за один час ток в цилиндре уменьшался на 1%. Каково сопротивление R единицы длины сварного шва?

Вариант Б

1. Показать, что при лобовом столкновении легкой частицы массы m с неподвижной тяжелой частицей массы M относительная потеря энергии не зависит от скорости. Предполагая, что быстрый нейtron в среде испытывает только лобовые упругие столкновения, определить, сколько соударений потребуется нейтрону с энергией 1 МэВ, чтобы замедлиться в графите до тепловой скорости.

2. Сепаратор частиц устроен следующим образом: на вход цилиндрического конденсатора с внешним и внутренним радиусами r_1 и r_2 попадают



ионы разных масс и, двигаясь по окружности, попадают затем в магнитное поле B . Какое отношение M/q массы иона к его заряду, если он прошел этот сепаратор при напряжении на конденсаторе V , а радиус его траектории в магнитном поле равен R_m ?

3. При измерении угловых размеров удаленных источников методом Физо перед объективом телескопа, имеющего фокусное расстояние F , устанавливается экран с двумя параллельными щелями ширины D , расположеными на расстоянии d друг от друга. Рассчитать распределение интенсивности $I(x)$ в фокальной плоскости объектива для случая точечного источника, испускающего свет длиной волны λ , и определить, сколько интерференционных полос можно наблюдать в пределах главного интерференционного максимума.

4. Найти проводимость плазмы с концентрацией электронов n_e и числом столкновений в единицу времени ν_e , предполагая, что электрон при столкновении с ионом полностью теряет направление своего импульса.

5. Пластина из сверхпроводника II рода расположена в большем чем H_{c1} магнитном поле H , перпендикулярном ее плоскости. Если вдоль пластины пропустить ток плотности j , то в результате взаимодействия с этим током вихри приходят в движение с конечной скоростью v , определяемой силой трения $F_L = \eta v$. Какое электрическое поле появится в сверхпроводнике?

Вариант В

1. Согласно астрономическим наблюдениям мы живем в расширяющейся Вселенной, причем скорость расширения v пропорциональна ее текущему радиусу R : $v(R) = HR$, где постоянная $H = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ называется постоянной Хаббла. Оценить критическую плотность сферически симметричной Вселенной, при которой расширение никогда не сменится сжатием.

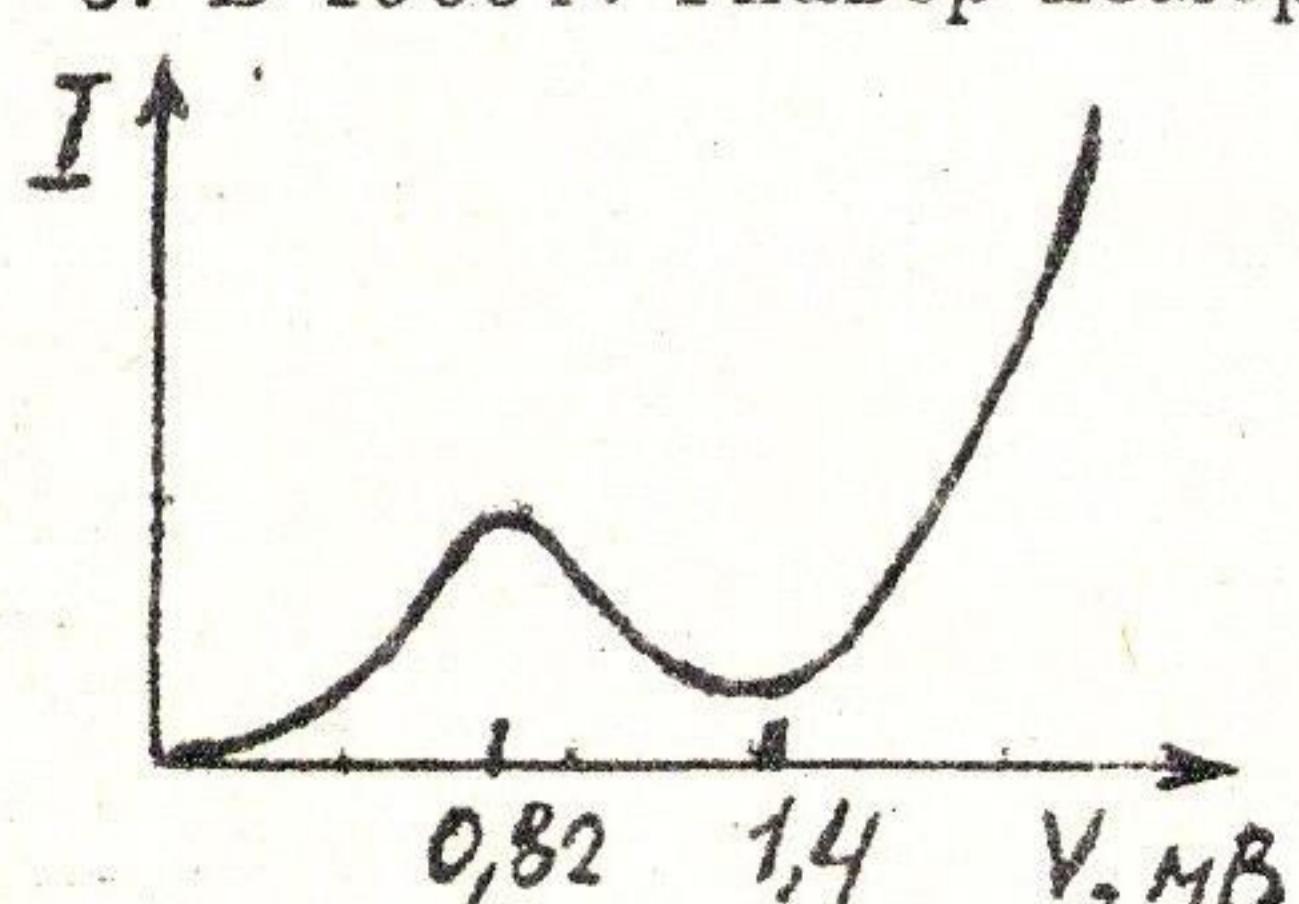
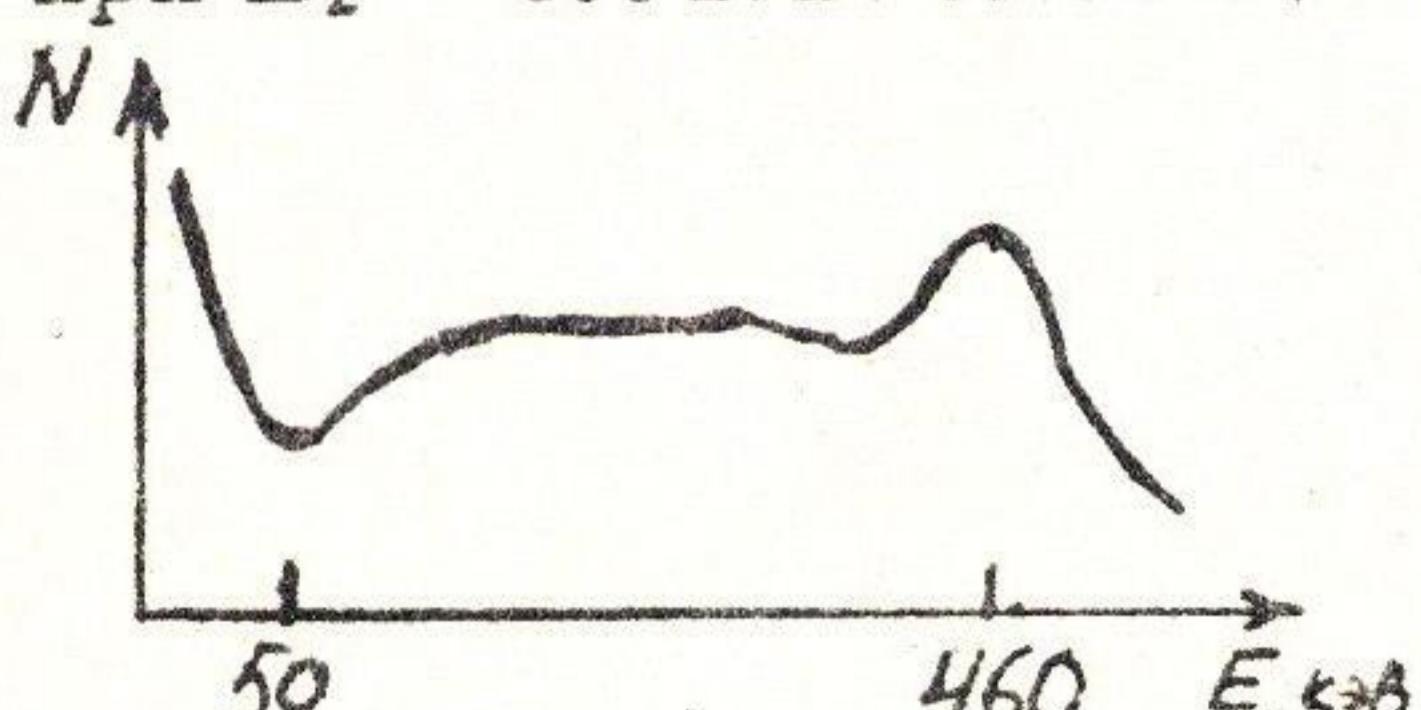
2. В холодильной машине Клода газ поступает при температуре $T_1 = 300 \text{ K}$ и под постоянным давлением в цилиндр с поршнем (детандер), где он адиабатически расширяется до фиксированного конечного давления. При этом газ совершает работу и охлаждается на ΔT . Во сколько раз уменьшится ΔT , т.е. насколько менее эффективным оказывается этот способ охлаждения, если начальная температура будет равна $T_2 = 50 \text{ K}$? Теплоемкость газа считать постоянной.

3. На дифракционную решетку с $N = 10^5$ числом щелей, ширина которых равна половине периода, нормально падает плоская волна. Дифракционная картина фокусируется линзой на фотопластинку. Оценить допустимые изменения атмосферного давления в лаборатории во время экспозиции, чтобы полностью использовать разрешающую способность решетки. Показатель преломления воздуха связан с атмосферным давлением (в паскалях) соотношением $n - 1 = 3 \cdot 10^{-9} P$.

4. В рентгеновском спектре нейтронной звезды массы $M = 10^{33} \text{ g}$ наблюдаются провал (поглощение излучения) при энергии $E_1 = 50 \text{ кэВ}$ и максимум при $E_2 = 460 \text{ кэВ}$. Поглощение при энергии E_1 связывают с квантовыми

переходами свободных электронов в магнитном поле звезды, а максимум при E_2 — с электрон-позитронной аннигиляционной линией, смещенной в ее гравитационном поле. Оценить радиус звезды и величину ее магнитного поля.

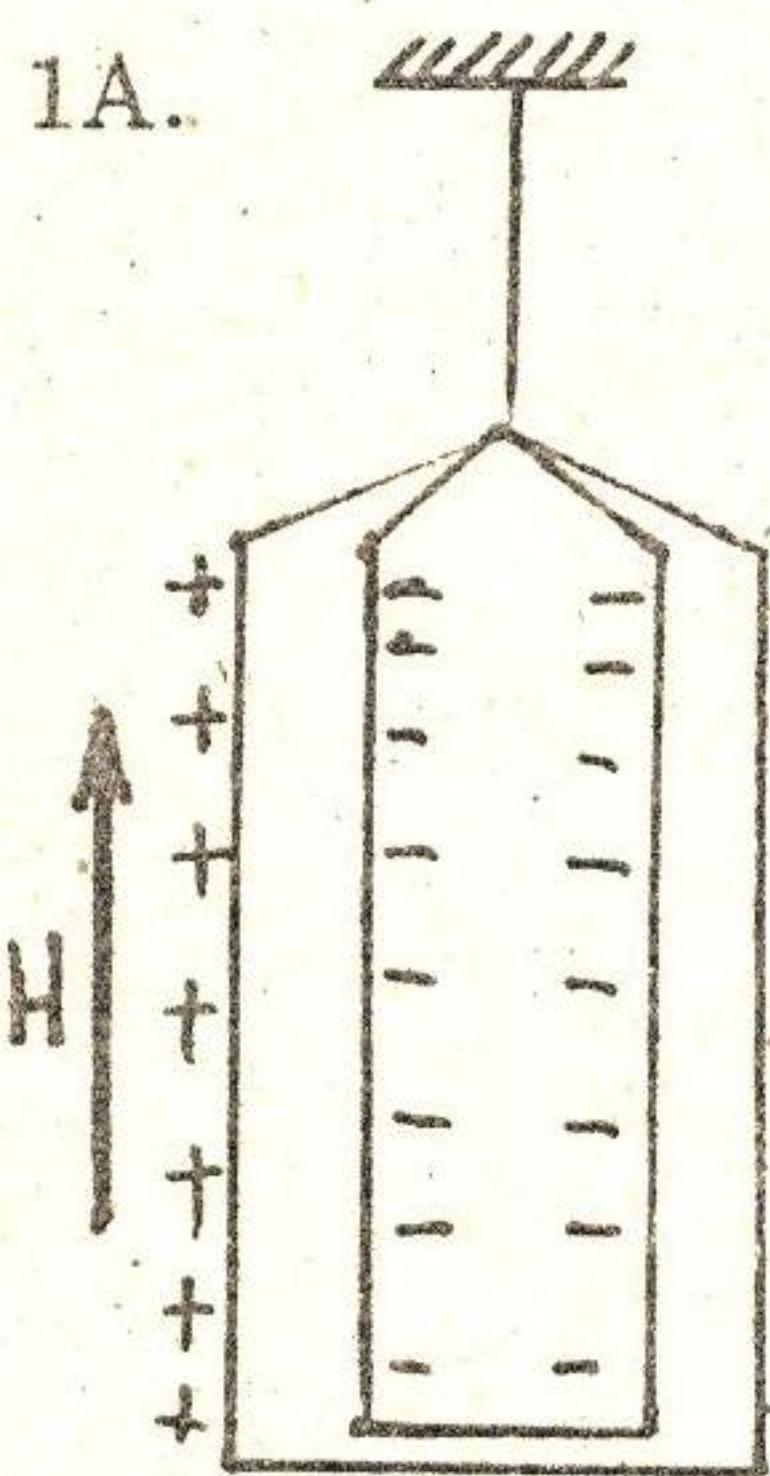
5. В 1960 г. Гиавер измерил вольтамперную характеристику сверхпроводящей системы алюминий-свинец при температуре, меньшей критических температур обоих металлов (см.рис.). Она имела максимум при $V_1 = 0,82 \text{ мВ}$ и минимум при $V_2 = 1,4 \text{ мВ}$. Найти величины энергетических щелей (в эВ) и критические температуры свинца и алюминия.



Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 31 мая 1997г.

Вариант А

1А.



Тонкостенный металлический стакан радиуса $R_2 = 2$ см, длиной $l = 10$ см и массой $M = 1$ г и расположенный внутри такой же длины и массы цилиндр радиуса $R_1 = 1,5$ см подвешены в вакууме на тонкой нити в направленном вдоль их осей магнитном поле $H = 10^4$ Э (см. рисунок). Цилиндр и стакан заряжены разноименными и одинаковыми по величине зарядами до разности потенциалов $V = 3000$ В и в какой-то момент внутренний цилиндр касается дна наружного стакана и разность потенциалов падает до нуля. На сколько градусов повернется система в результате за 1 час?

2А. Одноатомный идеальный газ находится между двумя неподвижными плоскостями, причем длина свободного пробега много больше расстояния между ними. Газ адиабатически сжимается, так что объем газа уменьшается вдвое. Найти конечную температуру, если вначале температура $T_0 = 300$ К.

3А. Для защиты от механических повреждений стекла современных очков покрывают алмазной пленкой. Какая часть падающего светового потока отражается от пленки на длине волны $\lambda = 6000$ Å, если толщина пленки равна $d = 625$ Å, показатель преломления стекла $n_2 = 1,7$, алмазной пленки $n_1 = 2,4$?

4А. Из экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов на кристалле КВг известно, что максимальная частота фононов акустических поперечных колебаний атомов ребер его кубической решетки составляет $\omega = 7,85 \cdot 10^{12}$ 1/с. Оценить в рамках модели колебаний одномерной цепочки скорость поперечных звуковых колебаний вдоль этого направления. Плотность кристалла $\rho = 2,75$ г/см³.

5А. Найти выражение для кинетической энергии электронов на единицу длины вихря магнитного потока, проникшего в сверхпроводник II рода при $H > H_{c1}$, считая заданными плотность сверхпроводящих электронов n_s , длину проникновения λ и длину когерентности $\xi \ll \lambda$. Считать, что вихрь занимает по радиусу размер от ξ до λ .

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 31 мая 1997г.

Вариант Б

1Б. В вакуумном фотоэлементе между анодом и фотокатодом приложено напряжение в несколько сотен вольт. Найти временное разрешение (минимальную длительность импульса фототока) при освещении фотокатода короткими ($< 10^{-11}$ сек) импульсами света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Красная граница фотокатода $\lambda_k = 1000$ нм, напряженность поля между анодом и фотокатодом $E = 300$ В/см.

2Б. В 1911 г. Г.Камерлинг-Оннес при измерении сопротивления ртути, охлаждаемой жидким гелием, обнаружил, что при откачке паров гелия из криостата сопротивление ртути исчезает и так было открыто явление сверхпроводимости. Вычислить, до какого давления надо было откачивать пары гелия, если температура кипения Не при давлении 1 атм $T_k = 4,22$ К, теплота испарения при этом давлении $q = 84$ Дж/моль, а критическая температура сверхпроводящего перехода ртути $T_c = 4,15$ К.

3Б. Телезритель, желая дать возможность супруге спокойно смотреть нескончаемый мексиканский сериал, купил второй телевизор и подключил его с помощью кабеля к разрезу такого же кабеля, идущего от антенны к первому телевизору. Оба телевизора оказались включенными параллельно. Считая, что до переделки кабель был согласован как с телевизором, так и с антенной (отраженных волн в кабеле не было), найти, во сколько раз уменьшилась после переделки амплитуда сигнала на входе телевизора.

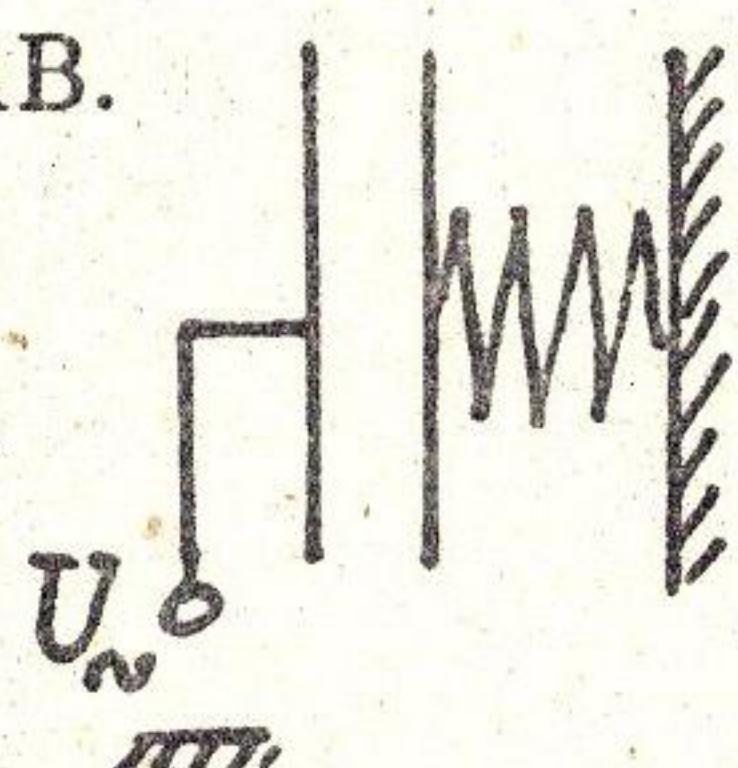
4Б. Оценить отношение средней потенциальной энергии взаимодействия двух электронов к энергии Ферми для металла, электроны которого наполовину заполняют зону проводимости. Концентрация атомов $n = 3 \cdot 10^{22} \text{ 1/cm}^3$, эффективную массу электронов считать равной массе свободного электрона.

5Б. Найти магнитную энергию единицы длины вихря во внешнем поле $H > H_{c1}$, считая заданными плотность сверхпроводящих электронов n_s и длину проникновения $\lambda \gg \xi$ (длины когерентности). Считать, что вихрь занимает по радиусу размер от ξ до λ .

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 31 мая 1997г.

Вариант В

1В.



Одна из металлических пластин плоского конденсатора соединена с жесткой стенкой через пружину, а к другой (неподвижной) подводится переменное напряжение $U = U_0 \cos(\omega t/2)$, где $\omega = 100 \text{ c}^{-1}$ – резонансная частота механических колебаний пластины добротностью $Q = 100$. Найти амплитуду колебаний пластины конденсатора. Расстояние между пластинами $d = 1 \text{ мм}$, площадь пластины $S = 5 \text{ см}^2$, ее масса $M = 10 \text{ г}$, а $U_0 = 100 \text{ В}$.

2В. Газообразный азот, находящийся при температуре $T_1 = 100 \text{ К}$ в объеме $V_1 = 1 \text{ л}$ при давлении $P_1 = 10 \text{ атм}$, однократно адиабатически расширяется до давления $P_2 = 1 \text{ атм}$. Какое максимальное количество жидкого азота (в см^3) может быть получено при этом? Темплота испарения азота $\lambda = 160 \text{ Дж/см}^3$, температура кипения $T_2 = 77 \text{ К}$.

3В. Солнечное излучение фокусируется линзой диаметром $D = 5 \text{ см}$ и фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$. Оценить напряженность электрического поля в фокусе (в В/см). Солнечная постоянная $E_C = 1,35 \text{ кВт/м}^2$, угловой диаметр Солнца $\alpha_C = 10^{-2} \text{ рад}$.

4В.

В германий введены примеси золота ($N_{\text{Au}} = 10^{14} / \text{см}^3$), атомы которого могут захватить один или два электрона, и сурьмы ($N_{\text{Sb}} = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Акцепторные уровни атомов золота E_1 и E_2 лежат выше потолка валентной зоны на $0,15 \text{ эВ}$ и $0,5 \text{ эВ}$ соответственно. Донорный уровень атомов сурьмы лежит на $E_3 = 0,01 \text{ эВ}$ ниже дна зоны проводимости. Определить тип проводимости легированного кристалла и оценить концентрацию носителей при температуре $T = 77 \text{ К}$. Ширина запрещенной зоны $E_g = 0,7 \text{ эВ}$, а эффективные плотности состояний для зоны проводимости и валентной зоны (факторы зоны) $N_c = N_v = 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

5В. Длинный цилиндр из сверхпроводника II рода массой $M = 25 \text{ г}$ и высотой $l = 10 \text{ см}$ подведен на тонкой нити. Вдоль оси цилиндра прикладывается такое магнитное поле $H = 10^4 \text{ Э} \gg H_{c1}$, что индукция $B \simeq H$. Вначале температура цилиндра $T < T_c$, цилиндр покоялся, а затем температура увеличилась выше критической. Найти установившуюся угловую частоту вращения цилиндра. Глубина проникновения магнитного поля $\lambda = 10^{-5} \text{ см}$, плотность сверхпроводящих электронов $n_s = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Вариант А

1А. Небольшая уединенная планета покрыта тонким слоем льда с температурой наружной поверхности $T_s = 60$ К. Тепло подводится к поверхности льда из недр планеты за счет теплопроводности льда. Считая коэффициент теплопроводности $\kappa = 2 \cdot 10^5$ эрг/см·с·град не зависящим от температуры и коэффициент серости льда $\varepsilon = 0,75$, оценить максимально возможную толщину ледяной корки такой планеты.

2А. При измерении теплоемкости металла в области низких температур ($T \ll \Theta$) получены следующие результаты:

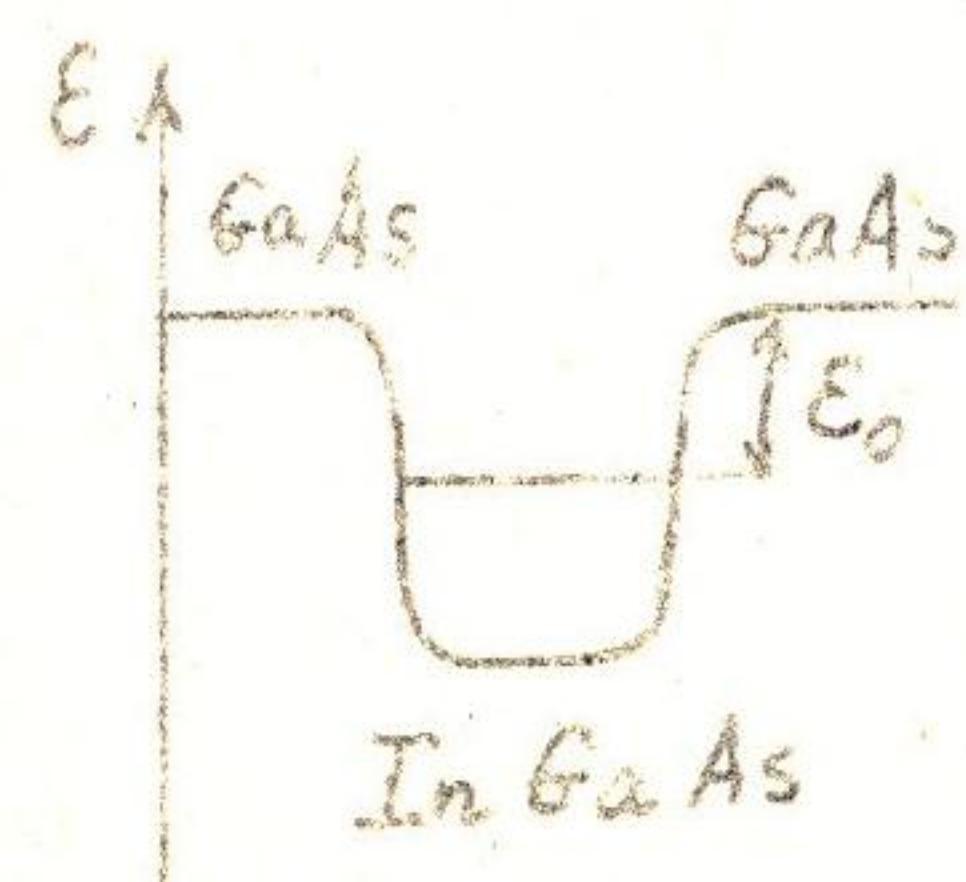
T, K	1,41	2	2,45	3
$C_V, 10^{-4}$ кал/град·моль	3,1	6,26	9,8	15,7

Оценить величину температуры Ферми этого металла.

3А. Сопротивление ($p-n$)-перехода при небольшом положительном напряжении ($eV/kT \ll 1$) равно $R = 400$ Ом, а его площадь $S = 0,5$ см². Предполагая, что ток переносится главным образом дырками, оценить максимальную плотность обратного тока (тока насыщения) при температуре $T = 300$ К.

4А. Удельное сопротивление сплава Ag+1%Ni при температуре $T \approx 0$ К равно $\rho = 10^{-6}$ Ом·см. Постоянная решетки $a = 3$ Å, решетку считать кубической, в зону проводимости каждый атом серебра отдает один электрон. Оценить величину сечения рассеяния электронов на атомах никеля.

5А. Квантоворазмерная структура GaAs-InGaAs-GaAs представляет собой слой InGaAs, расположенный между толстыми слоями GaAs. В такой структуре движение электронов в параллельном к слоям направлении является свободным, а в перпендикулярном к слоям направлении, электроны оказываются в одномерной потенциальной яме (см. рис.).



В этом потенциале имеется только одно связанное состояние электронов с энергией связи $\varepsilon_0 = 50$ мэВ. Эффективная масса электронов $m^* = 0,08 m_e$. Оценить максимальную плотность электронов (на единицу поверхности), которые могут быть покализованы в слое InGaAs при нулевой температуре.

Письменный экзамен по физике, III курс, 2 июня 1998 г.

Вариант Б

1Б. На длинный сапфировый стержень радиуса $r = 1$ см нанесена тонкая пленка толщиной $a = 0,2$ мм с удельным сопротивлением $\rho = 1$ мкОм·см, а затем слой диэлектрика толщиной $b = 0,2$ мм, его коэффициент теплопроводности $\kappa = 2 \cdot 10^3$ эрг/с·см·К. По пленке пропускается ток плотностью $j = 100$ А/см². Считая диэлектрический слой абсолютно черным телом, оценить температуру внешней и внутренней поверхности диэлектрической пленки.

2Б. При измерении теплоемкости металла в области низких температур ($T \ll \Theta$) получены следующие результаты:

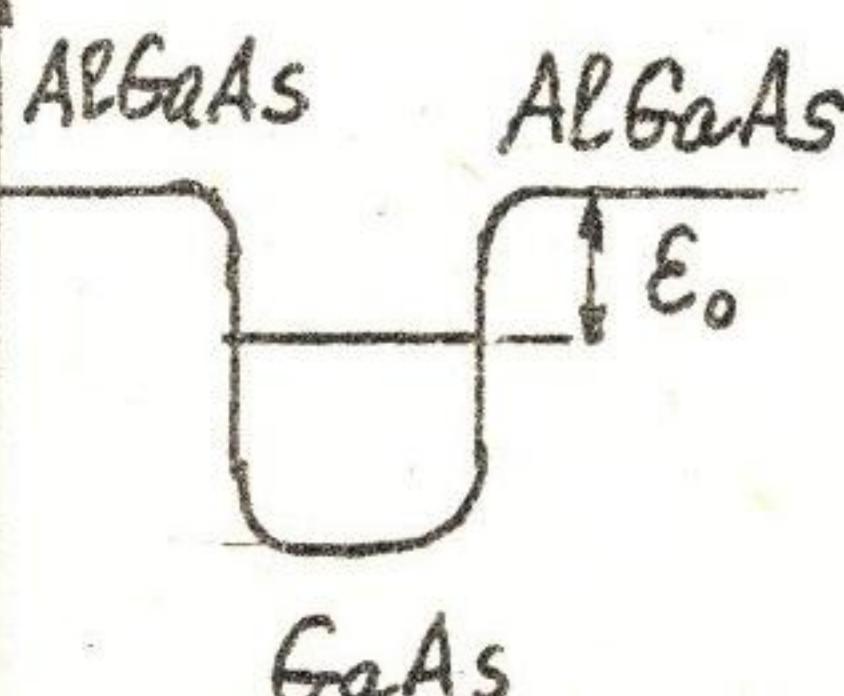
T, K	1,08	1,24	1,46	1,62	1,91
$C_V, 10^{-4}$ мДж/град.моль	2,18	2,62	3,31	3,89	5,10

Оценить величину дебаевской температуры этого металла.

3Б. Валентная зона многих полупроводников характеризуется несколькими ветвями $E(k)$, каждой из которых соответствует свой тип дырок. Так, например, в Ge в центре зоны Бриллюэна имеются минимумы энергии двух ветвей с эффективными массами $m_{p1} = 0,04m_e$ и $m_{p2} = 0,34m_e$. Оценить долю легких дырок от общего их числа в Ge.

4Б. Оценить удельное сопротивление металла с $A = 100$ при температуре $T = 300$ К, считая, что радиус эффективного рассеяния электронов на фонах порядка амплитуды тепловых колебаний атомов, фермиевская скорость $v_F = 3 \cdot 10^8$ см/с, температура Дебая $\Theta = 200$ К.

5Б. Современная технология позволяет изготовить так называемые "квантовые проволоки" — проводящий канал на полупроводниковой структуре AlGaAs-GaAs-AlGaAs, в котором электроны ведут себя как одномерный газ с эффективной массой $m^* = 0,07m_e$.

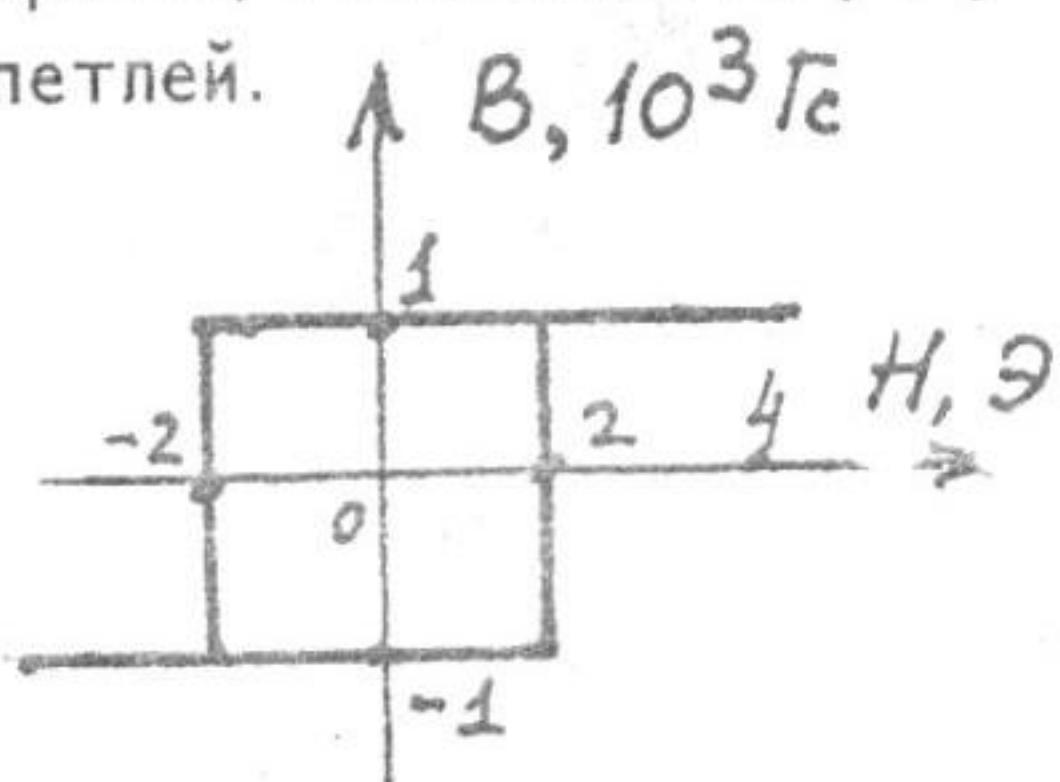


При этом в поперечном направлении электроны находятся в потенциальной яме, в которой имеется только один уровень с энергией связи $\epsilon_0 = 50$ мэВ (см. рисунок). Какова максимальная погонная плотность локализованных электронов в такой структуре при нулевой температуре?

Вариант А

1А. Спутник массы $m = 200$ кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения $F = Cv^3$, ($C = 3 \cdot 10^{-16}$ кг·с/м²). С какой радиальной скоростью спускается спутник?

2А. Сердечник трансформатора изготовлен из пермаллоя (магнитомягкий сплав Ni с Fe, средний атомный вес ≈ 57), его гистерезисная кривая, показанная на рисунке, хорошо аппроксимируется прямоугольной петлей.



Плотность пермаллоя $\rho = 8$ г/см³, обмотка создает в сердечнике поле $H = H_0 \sin \omega t$ и амплитудой $H_0 = 3$ Э. Считая теплоемкость материала классической, оценить скорость нагрева сердечника, пренебрегая тепловыми потерями.

3А. При конечной температуре в результате флуктуаций могут самоизвестно возникнуть колебания математического маятника. Каково при этом изменение энтропии (температура неизменна)?

4А. Лазерное разделение изотопов основано на селективном возбуждении изотопов одного сорта. Для эффективного разделения необходимо, чтобы изотопический сдвиг линии поглощения был не менее полуширины линии. Оценить максимальную температуру паров натрия, чтобы можно было таким способом выделить изотоп ^{22}Na из смеси изотопов ^{22}Na и ^{23}Na .

5А. При конечных температурах продольное сопротивление в двумерном электронном газе в условиях целочисленного квантового эффекта Холла оказывается хотя и малым, но конечным. Оценить величину проводимости в кремниевой МОП структуре с плотностью электронов $n_0 = 10^{12}$ 1/см² при полностью заполненном первом уровне Ландау (фактор заполнения $\nu = 1$, т.е. число квантов потока равно числу электронов) и температуре $T = 1,5$ К. Время релаксации электронов, определяемое примесями, равно $\tau = 10^{-10}$ с. Эффективная масса электронов $m^* = 0,2m_e$.

Вариант Б

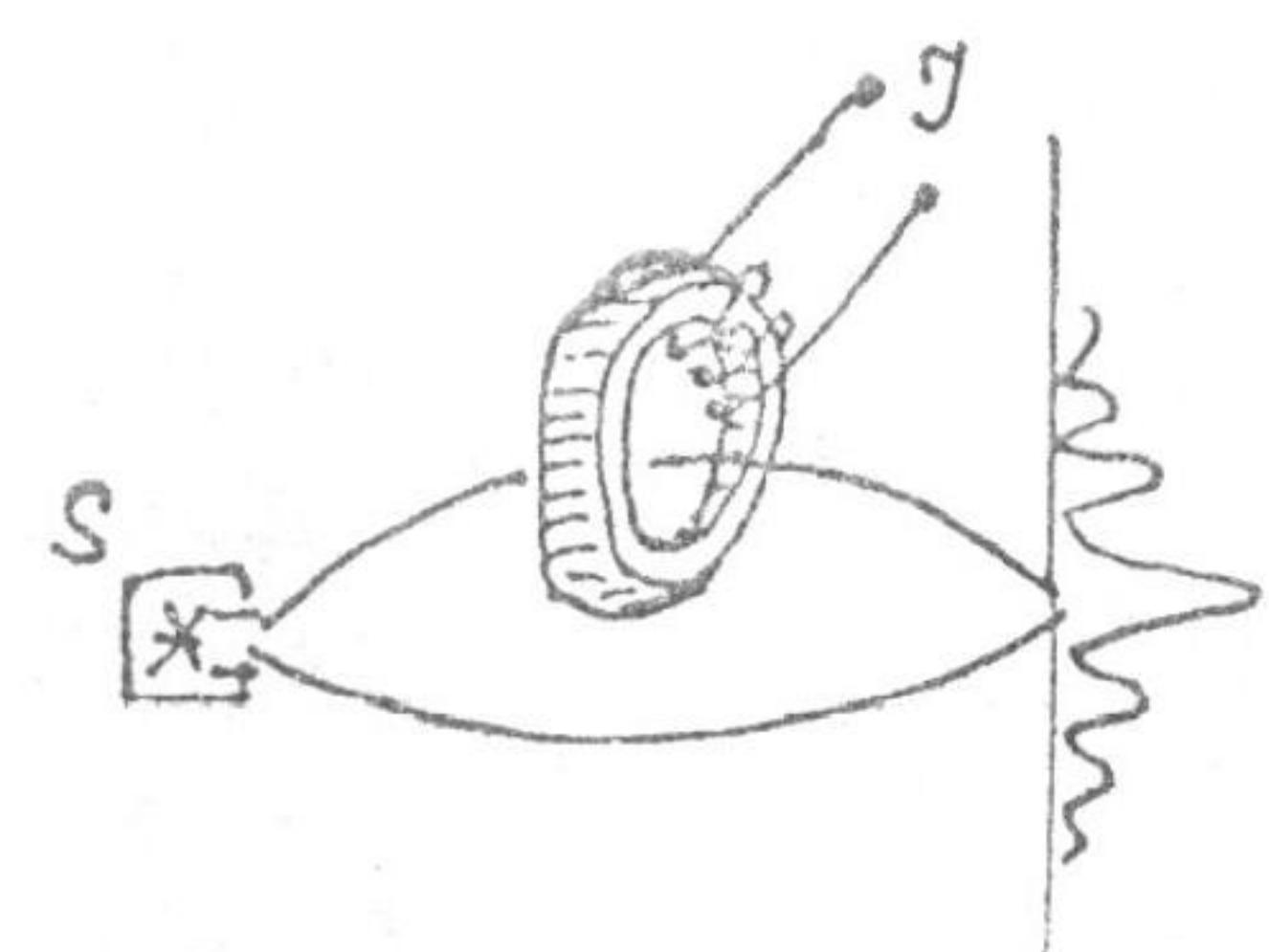
1Б. Космический корабль сферической формы движется равномерно со скоростью v в области космической пыли плотностью ρ , которая прилипает к кораблю. КПД реактивного двигателя корабля η . Оценить установившуюся температуру обшивки корабля T , считая ее черным телом. Изменение массы корабля вследствие налипания пыли и расхода топлива не учитывать.

2Б. Точечный магнитный диполь с магнитным моментом $\mu = 1000 \text{ Гс}/\text{см}^3$ висит над поверхностью сверхпроводника I-го рода (температура $T \approx 0 \text{ K}$), у которого критическое магнитное поле $H_c = 500 \text{ Гс}$. Каков максимально допустимый вес P диполя?

3Б. В ультрафиолетовых лучах ($\lambda = 1000 \text{ \AA}$) производится фотографирование биомолекулы, находящейся в растворе. Оценить максимальное время экспозиции, при которой еще может быть получено на фотографии предельное разрешение? Температура раствора $T = 300 \text{ K}$, подвижность молекулы $B = 10^4 \text{ см}/\text{с}\cdot\text{дн}$.

4Б. Резонансное поглощение света было обнаружено впервые Р. Вудом в 1904 г. Может ли наблюдаться атомами ^{39}K резонансное поглощение оптического излучения от ^{41}K ? Температура паров калия равна 200°C .

5Б. В 1986 г. Осакабе с соавторами с целью проверки эффекта Ааронова-Бома провел следующий эксперимент. Монохроматические электроны из источника S походили вне и внутри торOIDального магнита, покрытого слоем сверхпроводника с $T_c = 9.2 \text{ K}$, и, попадая на экран, создавали интерференционную картину.

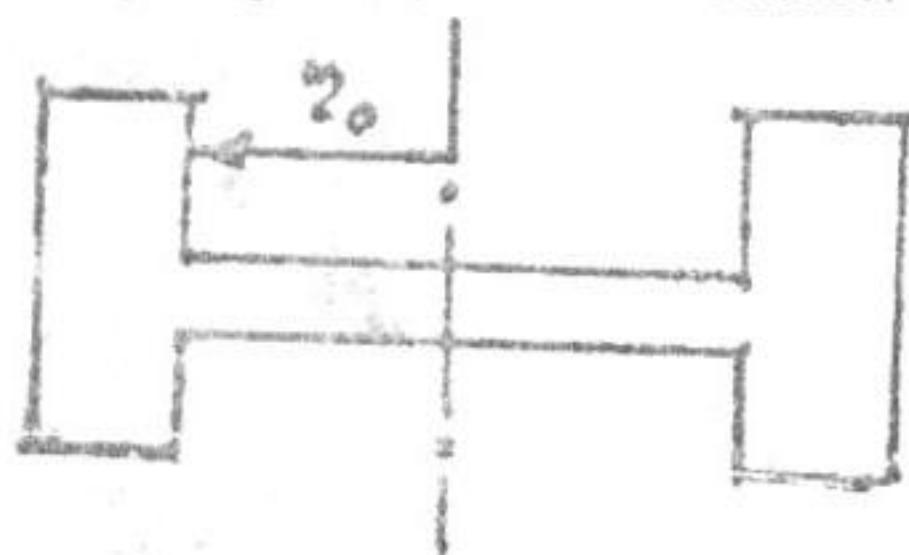


Эксперимент проводился вначале при $T_1 = 15 \text{ K}$, и магнитный поток через торOIDальный магнитный сердечник, создаваемый внешним источником тока, $\Phi = 2,8\Phi_0 = \hbar c/e$. Затем при неизменной величине тока через обмотку магнита температура понижалась до $T_2 = 5 \text{ K}$. На какую часть интерференционной полосы сдвинулась при этом картина?

Письменный Госэкзамен по Физике, III курс, 13 июня 1999г
Вариант В

1В. Считая Землю абсолютно черным телом, а орбиту Земли круговой с радиусом $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, оценить среднюю температуру земной поверхности (светимость Солнца $L_c = 3,83 \cdot 10^{26}$ Вт). Исходя из экологических оценок, согласно которым величина допустимого перегрева планеты Земля составляет $\Delta T \approx 0,1$ К, определить допустимый предел уменьшения радиуса земной орбиты ΔR .

2В. Тороидальный квазистационарный СВЧ-резонатор, показанный на рисунке, изготовлен из сверхпроводника I рода, критическое



магнитное поле которого равно 500 Гс. Какая максимальная напряженность поля (в В/см) может быть получена между его емкостными обкладками радиуса $r_0 = 3$ см? Резонансная частота $\omega_0 = 6 \cdot 10^9$ с⁻¹.

3В. И источником света является торец газоразрядной трубки диаметром $d = 6$ мм, средняя длина волны $\lambda = 0,6$ мкм, ширина доплеровского контура линии излучения $\Delta f = 1,5$ ГГц. Оценить расстояние от торца трубки, при котором длина когерентности излучения сравнима с радиусом поперечной когерентности.

Указание: если за источником света поместить экран с двумя малыми отверстиями, то интерференционная картина за экраном пропадает, когда расстояние между отверстиями равно радиусу поперечной когерентности света.

4В. Энергия возбуждения ядра может быть измерена по "изомерному" сдвигу частоты спектральной линии атома за счет "утяжеления" возбужденного ядра на величину $\Delta M = E_{\text{яд}}/c^2$ (Летохов, 1972). При измерении частоты спектральной линии паров атомов при температуре T для этого необходимо, чтобы изомерный сдвиг был больше доплеровского уширения. При какой температуре это условие будет выполнено для атома с $A = 100$ и энергии изомерного уровня ядра $E_{\text{яд}} = 0,3$ МэВ.

5В. Найти магнитный момент M единицы площади двумерного электронного газа с плотностью $N_s = 1,5 \cdot 10^{12}$ см⁻², образованного на поверхности кремниевой структуры во внешнем магнитном поле $B = 20$ Тл. Температуру считать равной 0 К, эффективная масса $m^*/m = 0,2$.

Указание: по определению $M = -\partial E / \partial B$, E — энергия системы.

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 июня 2000г.

Вариант А

1А. Ледяная комета движется в Солнечной системе в плоскости орбиты Юпитера с периодом T_k . Если она пролетает близко от Юпитера, она разрушается за счет приливных сил (из-за градиента гравитационного поля). Оценить число оборотов вокруг Солнца, которое может совершить комета размером $r_0 = 10$ км, не разрушаясь. Прочность ядра ледяной кометы $\sigma_0 = 10^5$ дин/см, период обращения Юпитера вокруг Солнца $T_J = 12$ лет $\ll T_k$, его масса $\eta = 10^{-3}$ массы Солнца.

2А. В холодильнике сломался выключатель и внутренняя лампочка продолжала гореть при закрытой дверце. Считая, что вся мощность лампочки ($N = 25$ Вт) переходит в тепло, определить, на сколько изменилась потребляемая холодильником мощность. Обычно при комнатной температуре $T_2 = 295$ К внутри холодильника поддерживается температура $T_1 = 275$ К. Холодильник считать идеальным.

3А. Внутри Земли вследствие радиоактивных превращений выделяется тепло со скоростью Q эрг/г·с в результате чего ниже глубины h от поверхности земные породы плавятся. Оценить величины Q и h , считая Землю однородным шаром. Средняя плотность Земли $\rho = 5,5$ г/см³, коэффициент теплопроводности пород $\chi = 3,5 \cdot 10^5$ эрг/(см·с·К) не зависит от температуры, температура плавления пород $T_{пл} = 2000$ К при давлении $p_r = 1,2 \cdot 10^{12}$ дин/см².

4А. Советский физик Г.А.Аскарян предложил использовать в качестве сверхмощных импульсных источников нейтронов ядерные микровзрывы миллиграммовых количеств делящихся веществ. Для перевода делящегося вещества в критическое состояние он предлагал сжимать такие микрозаряды импульсным лазерным излучением. Оценить, во сколько раз нужно уменьшить радиус шарика из ^{235}U массой 50 мг, чтобы началось размножение нейтронов. Какое давление развивается в веществе непосредственно перед началом цепной реакции, считая процесс сжатия адиабатическим? Валентность урана принять равной 2. Для быстрых нейтронов деления $\sigma(n, f) = 2$ барна, $\sigma(n, \gamma) = 0,1$ барна, плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³.

5А. При $T < 0,6$ К основным типом возбуждений в жидким ^4He являются фононы, и, как показывают эксперименты, величина теплопроводности прямо пропорциональна диаметру капилляра, в котором проводятся измерения. Каков коэффициент теплопроводности при $T=0,3$ К, если при 0,6 К он в таких экспериментах равен 0,2 Вт/(см·К)?

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 июня 2000г.

Вариант Б

1Б. В 1932 г. Чадвик, облучая нейтронами малых (по сравнению с энергией покоя) энергий парафин, состоящий в основном из водорода, и воздух, обнаружил, что максимальная скорость отдачи протонов равна $3,3 \cdot 10^9$ см/с, а ядер азота — $4,7 \cdot 10^8$ см/с. На основе этих экспериментов Чадвик впервые определил массу нейтрона. Какое отношение массы нейтрона к массе протона он получил? Тогда было известно из масс-спектроскопических измерений, что масса атома азота с точностью порядка 1% в 14 раз больше массы атома водорода.

2Б. С какой точностью должна быть стабилизирована температура одномодового лазерного резонатора, установленного на платформе из инвара, чтобы за счет ее флуктуации немонохроматичность излучения была порядка теоретической ширины лазерной линии $\Delta\omega/\omega = 10^{-14}$? Температурный коэффициент расширения инвара $\alpha = 10^{-6}/\text{К}$.

3Б. Внутри сферы радиуса R помещен шарик из плутония радиуса r_0 ($r_0 \ll R$). Вследствие радиоактивного распада Ри температура поверхности шарика постоянна и равна $T_0 = 300$ К. Внешняя сфера также поддерживается постоянной при температуре $T_R = 290$ К. Коэффициент теплопроводности воздуха, заполняющего пространство между сферами, $\chi = 2500$ эрг/(см·с·К). Считая поверхности шарика и сферы абсолютно черными, оценить радиус шарика r_0 , при котором поток тепла от него за счет излучения будет равен потоку тепла за счет теплопроводности.

4Б. Проводимость высокотемпературных сверхпроводников обусловлена электронами, движущимися по плоской квадратной атомной решетке с периодом a . Закон дисперсии электронов $E(k) = -E_0(\cos k_x a + \cos k_y a)$. Считая, что каждый атом отдает в зону проводимости один электрон, нарисовать, как выглядит область заполненных электронных состояний в k -пространстве (поверхность Ферми) в первой зоне Брилюэна, и найти ее площадь.

5Б. Термодинамические свойства жидкого ${}^3\text{He}$ хорошо описываются ферми-газовой моделью. Определить на основе этой модели насколько уменьшается вязкость ${}^3\text{He}$ при изменении температуры от 2 до 1 К.

Указание: учесть, что вероятность перехода частицы из начального состояния в конечное пропорциональна плотности конечных состояний.

гислу

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 июня 2000г.

Вариант В

1В. Известно, что для сбивания спутника с орбиты достаточно приложить к нему импульс, много меньший собственного импульса, если правильно выбрать направления воздействия. Существует проект сбивания спутников за счет отдачи, возникающей при испарении материала спутника под действием мощного лазерного излучения. Найти минимальную энергию лазерного излучения, необходимую для перевода спутника массой $m = 100$ кг с круговой орбиты на высоте $h = 200$ км на орбиту, касающуюся поверхности Земли. Импульс отдачи спутника, возникающий при воздействии излучения мощностью 1 Дж, равен $\alpha = 3$ дин·с/Дж. Изменением массы спутника пренебречь.

2В. Оценить, каково относительное увеличение средней энергии электронов в металле с $E_F = 5$ эВ при увеличении температуры от $T = 0$ К до комнатной.

3В. Температура поверхности шарика из плутония вследствие радиоактивного распада Ри поддерживается постоянной при $T_0 = 350$ К. На большом расстоянии от шарика температура воздуха $T_\infty = 300$ К, при $T = 300$ К коэффициент теплопроводности воздуха $\chi_\infty = 2500$ эрг/(см·с·К). Считая поверхность шарика абсолютно черной, оценить минимальный радиус шарика r_0 , при котором поток тепла от шарика за счет излучения оказывается равным потоку тепла за счет теплопроводности. При решении учесть зависимость χ от температуры.

4В. Согласно П. Дираку энергия электрона в вакууме может принимать значения как от mc^2 до $+\infty$, так и от $-\infty$ до $-mc^2$, однако все состояния с отрицательной энергией заняты и это "море Дирака" реально не проявляется в физических процессах. При переходе электрона из "моря" отрицательных значений в состояние с $E > mc^2$ рождается пара электрон + "дырка", т.е. электрон-позитронная пара, точно так же, как это происходит в собственном полупроводнике. Используя эту аналогию, оценить равновесные концентрации электронов и позитронов при температуре $T = 10^8$ К.

5В. В области температур от 1 до 10 мК растворенные в ${}^4\text{He}$ атомы ${}^3\text{He}$ ведут себя как идеальный ферми-газ. Насколько уменьшится удельная теплопроводность такого раствора в этом диапазоне температур, если концентрация ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ уменьшить с 5% до 1,25%? Теплопроводность атомов ${}^4\text{He}$ можно пренебречь.

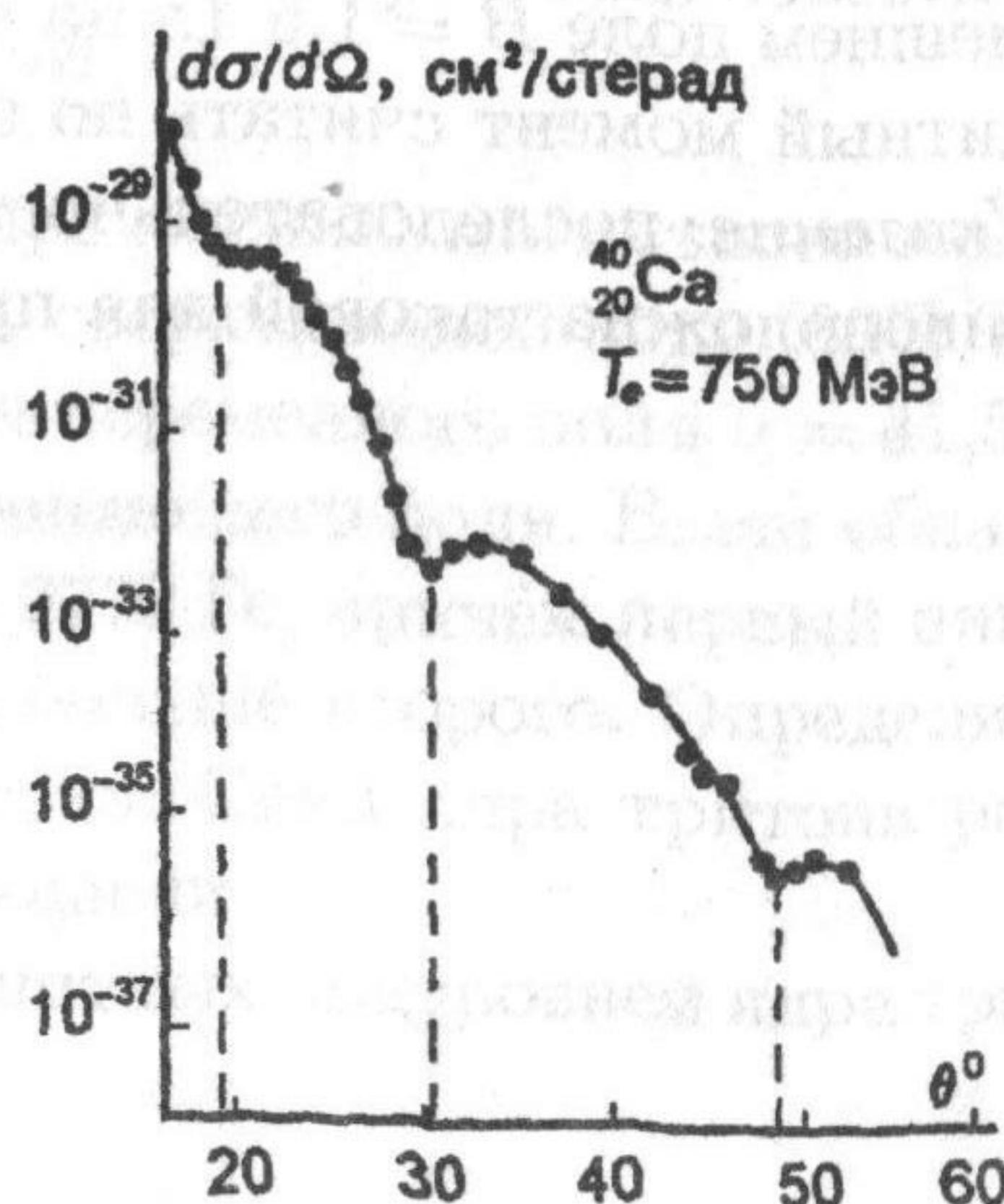
ГОС-2003. Вариант А

1А. Сейсмический датчик, установленный советским космическим аппаратом на Луне, зарегистрировал временную вариацию плотности налетающего на неё метеоритного облака. Было выдвинуто предположение, что это вызвано гигантским спутником Юпитера Ио, мимо которого пролетал стационарный метеоритный поток. Оценить, какой период временной вариации показаний сейсмодатчика зарегистрирован? Масса Юпитера $M = 1,9 \cdot 10^{27}$ кг, расстояние Ио от Юпитера $L = 422\,000$ км.

2А. Для уничтожения в нижних слоях атмосферы старого космического аппарата — шара радиусом $R = 1$ м — с Земли запускают ракету, которая летит прямо навстречу цели. При спуске шар раскалился, причём температура его поверхности $T = T_0 \cos^2 \theta$ ($T_0 = 1000$ К, угол θ отсчитывается от направления его движения). С какого наибольшего расстояния L головка самонаведения ракеты начнёт регистрировать тепловое излучение шара, если её чувствительность $j = 5 \cdot 10^{-7}$ Вт/м²?

3А. Нерадиационные переходы для подуровней электронного $1s$ -состояния атомов парамагнетика в магнитном поле могут происходить за счёт передачи энергии фонону, а момента импульса — всему кристаллу (за счёт спин-решёточной релаксации). Оценить минимальные линейные размеры кристаллов парамагнетика, при которых такое снятие возбуждения возможно. Усреднённая скорость звука в кристалле $s = 3,2$ км/с, индукция магнитного поля $B = 0,1$ Тл, смещения атомов на границах кристалла считать равными нулю.

4А. В угловом распределении электронов с энергией $E = 750$ МэВ, рассеянных на дважды магическом ядре кальция $^{40}_{20}\text{Ca}$, экспериментально наблюдается ряд последовательных дифракционных минимумов, как это показано на рисунке. Оценить из положений трёх отчетливых минимумов радиус ядра кальция, которое можно рассматривать в данной задаче как чёрный шарик, и величину R_0 в формуле для радиусов ядер.



5А. Воздух при условиях, близких к нормальным, медленно течёт по прикрытой с одной стороны стеклянным окном нагретой трубе диаметром $D = 1$ см и длиной $L = 10$ м, так что у стенок трубы температура на $\delta T = 10$ К больше, чем на оси. Для света, распространяющегося в трубе вдоль её оси и выходящего через окно, система представляет собой линзу. Определить форму волнового фронта на выходе трубы и оценить фокусное расстояние такой линзы. При нормальных условиях коэффициент преломления воздуха равен $n_0 = 1,0003$. Преломлением света на выходе из трубы пренебречь.

ГОС-2003. Вариант Б

1Б. Самые точные современные гравиметры (приборы для измерения ускорения свободного падения) измеряют g по времени падения пробного тела в вакууме, и при этом достигается точность измерений $0,04$ мкм/с² на базе $h = 20$ см. Какую ошибку при измерении на поверхности Земли вносит неоднородность g ?

2Б. Титановый шар-зонд (радиус $R = 1$ м, толщина стенки $d = 1$ мм), нагретый до температуры $T = 1000$ К, выпущен из искусственного спутника, находящегося в тени Земли. За какое время его температура упадёт на $\Delta T = 10$ К и какую энергию при этом потеряет оболочка шара, а какую тепловое излучение внутри шара? Дебаевская температура титана $\Theta = 420$ К, плотность $\rho = 4,5$ г/см³, атомная масса $A = 48$. Внутреннюю поверхность шара считать абсолютно чёрной, коэффициент отражения наружной поверхности $r = 0,77$.

3Б. В одномерной цепочке SnO найти отношение средних квадратов нулевых колебаний, соответствующих акустической и оптической ветвям в узком диапазоне волновых векторов вблизи коротковолновой границы первой зоны Бриллюэна.

4Б. Найти время распространения электромагнитного импульса заданной частоты вдоль основания стеклянной призмы с разрешающей силой $R = 10^4$. Длина волны в вакууме $\lambda_0 = 1,7 \cdot 10^{-4}$ см. «Оптическая длина» основания призмы составляет $L = 17$ см.

5Б. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как $n = n_0 - \chi I$ ($\chi = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см²/Вт), падает пучок света ($\lambda = 452$ нм) с

плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении:

$$I(r) = I_0 e^{-r^2/w^2} \quad (I_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2, \quad w = 1 \cdot 10^{-3} \text{ см}).$$

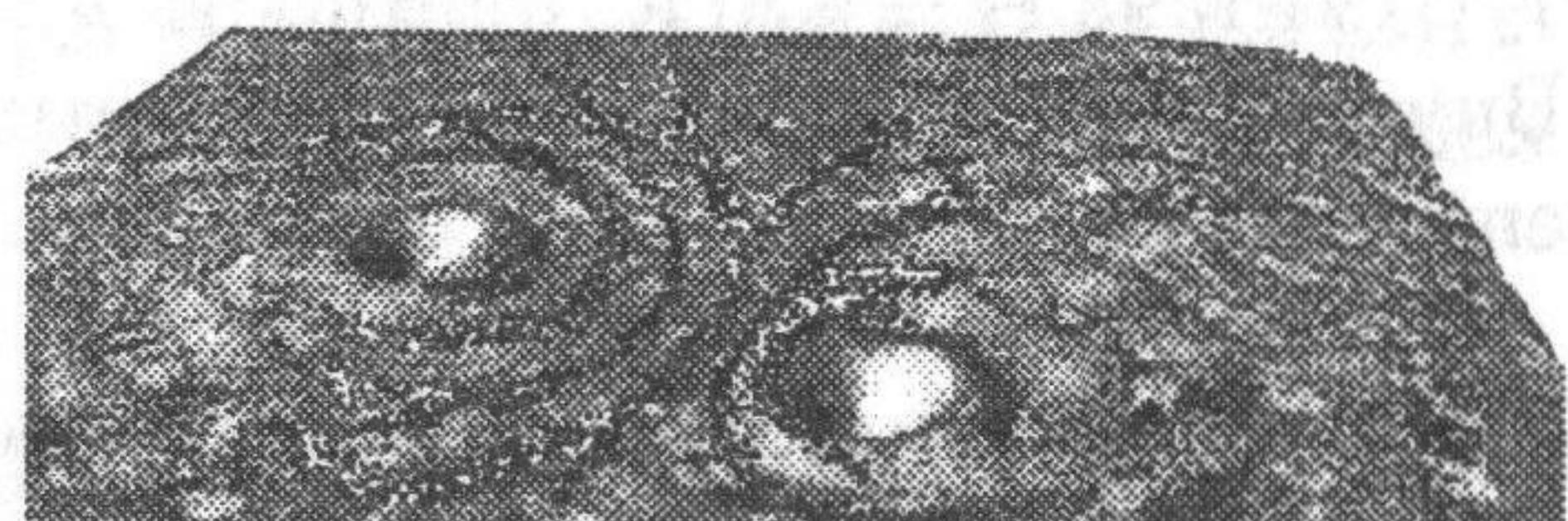
В результате взаимодействия света со средой в дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить число интерференционных колец в наблюдаемой картине.

ГОС-2003. Вариант В

1В. Нефтяные месторождения в России расположены, как правило, в области вечной мерзлоты, где часто на глубине около 5 м появляются плоские слои расплавившегося льда толщиной порядка $h = 3$ м. Это создаёт большие опасности при разведке и бурении скважин. Современный метод обнаружения таких водяных прослоек — картирование местности с помощью гравиметров. Какова должна быть точность этих приборов? Плотность льда $\rho_l = 0,917 \text{ г/см}^3$.

2В. Зеркальный металлический прямоугольный волновод с поперечным сечением 34×72 мм и длиной $L = 10$ м замкнут накоротко с обоих концов и через малое отверстие соединён с абсолютно чёрной полостью, нагретой до температуры $T = 600$ К. Оценить плотность электромагнитной энергии в волноводе (в эрг/Гц) в диапазоне длин волн 10 см.

3В. С помощью тунNELьного микроскопа в 1993 г. исследовалось распределение плотности двумерного электронного газа на поверхности монокристалла меди, где есть два точечных дефекта, на которых происходит интерференция волн де Бройля (см. фото). Расстояние между дефектами равно 42 \AA . Оценить поверхностную плотность электронов проводимости этого образца меди.



4В. На расстоянии $L = 20 \pm 0,01$ м от полихроматического импульсного источника нейтронов расположен поликристаллический образец. Упруго рассеянные нейтроны регистрируются через время t , намного большее длительности нейтронной вспышки, после нейтронной вспышки детектором, расположенным под углом $\theta = 60^\circ$ и по этому событию восстанавливается межплоскостное расстояние в кристалле. Какова должна быть точность измерения времени прихода нейтронов t ,

чтобы обеспечить относительную точность измерений межплоскостных расстояний 10^{-3} ? Угловое разрешение детектора $\Delta\theta = 0,06^\circ$.

5В. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как

$$n = n_0 - \chi I \quad (\chi = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{Вт}),$$

падает пучок света с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении:

$$I(r) = I_0 e^{-r^2/w^2} \quad (I_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2, \quad w = 1 \cdot 10^{-3} \text{ см}).$$

В дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить форму волнового фронта непосредственно за образцом и максимальную угловую расходимость наблюдаемой картины.

ГОС-2004. Вариант А

- 1А.** Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам, а летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия T_s (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего T_w на 7 дней. Оценить эксцентриситет земной орбиты.
- 2А.** На одну сторону поглощающей пластиинки нанесён слой α -активного тория ^{226}Th (период полураспада $T_{1/2} \simeq 31$ мин). При каком минимальном отношении масс тория и пластиинки возможна левитация системы в поле тяжести из-за отдачи, возникающей при испускании α -частиц ($\varepsilon_\alpha = 6,3$ МэВ). Самопоглощением α -частиц в ториевом слое пренебречь.
- 3А.** В методе внутрирезонаторной лазерной спектроскопии (ВРЛС), предложенном и реализованном в 1970 г. А.Ф. Сучковым и Э.А. Свириденковым, непосредственно в резонатор широкополосного лазера вносится кювета с поглощающим веществом. Отношение длины кюветы к длине резонатора $\alpha = 0,9$. Спектр поглощения исследуемых линий проявляется в виде провалов глубиной ΔI в спектре выходного излучения I_0 . Оценить минимальное значение коэффициента поглощения \varkappa , которое возможно зарегистрировать методом ВРЛС при длительности генерации $\tau = 200$ мс. Считать, что минимально регистрируемое поглощение $\Delta I/I_0$ составляет 5%.
- 4А.** Частичка пыли радиусом $r = 10^{-5}$ см взвешена в воздухе при комнатной температуре. Оценить магнитный момент частички (в ядерных магнетонах Бора), который возникает в результате «броуновского» вращательного движения. Заряд частички $Z = 10e$, плотность $\rho = 2$ г/см³.
- 5А.** Спектр фотопоглощения (зависимость коэффициента поглощения света от энергии квантов) кремния, легированного бором, при гелиевых температурах и энергии фотонов, меньших 50 мэВ, представляет собой серию пиков. При этом пик, соответствующий максимальной энергии поглощаемых квантов, расположен при $\hbar\omega = 43$ мэВ. Оценить по этим данным эффективную плотность состояний N_v (стат-фактор) в валентной зоне кремния при температуре $T = 4,2$ К. Диэлектрическая проницаемость кремния $\varepsilon = 12$, ширина запрещённой зоны в кремнии при данной температуре порядка 1 эВ. Закон дисперсии в валентной зоне считать изотропным и квадратичным.

ГОС-2004. Вариант Б

1Б. В системе глобального позиционирования (GPS) используется высокоточный цезиевый генератор, установленный на спутнике. Определить высоту полёта спутника, если при прохождении над приёмником на Земле регистрируемая частота совпадает с частотой генератора. Учесть, что энергии квантовых уровней любой системы зависят от гравитационного потенциала в месте нахождения системы. Вращение Земли не учитывать.

2Б. На тонкую плосковыпуклую линзу с фокусным расстоянием $F = -10$ см со стороны плоской части с радиусом $R = 2$ см падает параллельный поток монохроматического излучения с интенсивностью $I = 10$ кВт/см². На линзу нанесено просветляющее покрытие. Найти силу, действующую на линзу. Стекло считать идеальным (без потерь).

3Б. В центре сферической полости радиуса $R = 1$ м с матовой поверхностью, коэффициент диффузного отражения которой равен 1, подвешен абсолютно чёрный шарик радиуса $r = 1$ см, обладающий высокой теплопроводностью. В стенке полости имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см, через которое солнечное излучение попадает точно на шарик. Оценить установившуюся температуру шарика T , предполагая, что в полости устанавливается однородное равновесное излучение.

4Б. Серебро кристаллизуется в гранецентрированную кубическую решётку с периодом $a = 4,1$ Å. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 2680$ Å. Оценить (в электрон-вольтах) положение дна зоны проводимости серебра относительно вакуума. Эффективную массу электронов принять равной массе свободного электрона.

5Б. Электроны в гетероструктуре AlGaAs/GaAs при низких температурах образуют вырожденный двумерный электронный газ. Если отношение средней потенциальной к средней кинетической энергии на один электрон превышает 50, то возможно образование устойчивого периодического расположения электронов в пространстве — так называемого вигнеровского кристалла. Оценить, при какой поверхностной плотности электронов это возможно. Эффективная масса электронов в структуре $m^* = 0,067m_0$, статическая диэлектрическая проницаемость решётки $\epsilon = 12$. Оценку средней потенциальной энергии электрона проводить для ближайших соседей в центрированной гексагональной решётке.

ГОС-2004. Вариант В

1В. Релятивистский пучок однократно ионизованных атомов гелия, находящихся в основном состоянии, движется навстречу лазерному излучению с длиной волны $\lambda_0 = 248$ нм. Ионы поглощают это излучение, переходят в первое возбуждённое состояние, а затем испускают кванты света при обратном переходе. Найти длину волны этого излучения (в направлении движения ионов) в лабораторной системе отсчёта, а также кинетическую энергию ионов.

2В. Чтобы заставить левитировать каплю воды в атмосфере кислорода, эту систему помещали в неоднородное магнитное поле с градиентом $\frac{1}{2} \frac{dB^2}{dz} = B \frac{dB}{dz} = 4,2 \cdot 10^8$ (Гс)²/см (Я. Икезоэ, Н. Хирота, Дж. Накагава и К. Китазава – 1998 г). Найти, при каком давлении кислорода возможна левитация. Кислород является парамагнетиком с восприимчивостью $\chi(O_2) = 1,54 \cdot 10^{-7}$ при нормальных условиях (давлении $P_0 = 1$ атм и температуре 20 °C), а вода – диамагнетиком с восприимчивостью $\chi(H_2O) = -0,72 \cdot 10^{-6}$. Плотность кислорода при нормальных условиях $\rho(O_2) = 1,43 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Температуру считать постоянной, размагничивающие поля (влияние формы) не учитывать.

3В. В замкнутом вакуумированном объёме, стенки которого нагреты до температуры $T = 1000$ К, подвешены два чёрных шарика радиусом $a = 1$ см, охлаждаемых до низкой температуры. Расстояние между шариками $L = 1$ м. Найти направление и величину силы, действующей на каждый из шариков. Дифракционными эффектами пренебречь.

4В. Положение летящего самолёта определяется радиолокатором, излучающим импульсы длительностью 3 мкс. Диаметр антенны $D = 4$ м. С какой точностью можно определить высоту полёта самолёта, если расстояние до самолёта $l = 100$ км, длина волны радиоизлучения $\lambda = 10$ см. При каком размере антенны достигается минимальная погрешность в определении высоты и какова эта точность?

5В. Электронные и решёточные свойства некоторых типов углеродных нанотрубок можно описать в рамках одномерной модели. Оценить отношение теплоёмкостей решётки и электронов в таких нанотрубках при низких температурах. Считать, что скорость звука $s = 10^6$ см/с, а скорость Ферми $v_F = 10^8$ см/с.

Решения

Вариант А

1. (*Дипенюк*). Законы сохранения импульса и момента импульса:

$$\left. \begin{aligned} mv &= mv' + MV \\ mvl/2 &= mv'l/2 + J\omega \end{aligned} \right\} \quad v' = v - 2J\omega/ml, \quad V = 2J\omega/Ml$$

$$\frac{MV^2}{2} = M \frac{2J^2\omega^2}{M^2l^2} = \frac{J\omega^2}{2} \frac{4J}{Ml^2} = \frac{J\omega^2}{2}$$

2. (*Канавин*) Излучение фокусируется в пятно радиусом $r_f \simeq \lambda/D \sim 2 \cdot 10^{-3}$ см. Глубина прогретого вещества за время действия импульса $l_r \simeq \sqrt{\chi\tau} \sim 10^{-4}$ см, где $\chi = \kappa/C\rho \simeq 0,85 \text{ см}^2/\text{с}$ — коэффициент температуропроводности. Удельная теплоемкость алюминия $C = 3R/A \simeq 0,9 \text{ Дж/г}\cdot\text{К}$. Энергия, необходимая для нагрева вещества до плавления

$$E_k \simeq \pi r_f^2 l_r C \rho T_p / \alpha c \simeq 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$$

3. (*Раевский*) Пластина должна иметь толщину λ для основной линии и $\lambda/2$ для боковых

$$d\Delta n = m\lambda = (m \pm 1/2)\lambda'; \quad \lambda = 2\pi c/\omega, \quad \lambda' = 2\pi c/(\omega \pm \Omega)$$

$$\frac{d\Delta n}{2\pi c}(\omega - \Omega) = m - 1/2; \quad \frac{d\Delta n}{2\pi c}(\omega + \Omega) = m + 1/2, \quad \Omega = \frac{eB}{2m_e c}$$

$$\text{Откуда } B = \frac{2\pi m_e c^2}{ed\Delta n}.$$

4. (*Мейлихов*) При $x \ll a$ потенциальная энергия атома квадратична по x , т.е. атомы совершают гармонические колебания, соответствующие звуковым колебаниям с фазовой скоростью, равной скорости звука s . В этом случае $s \simeq a(\gamma/M)^{1/2}$, откуда $\gamma \simeq Ms^2/a^2$. Из условия $U(a) = 0$ следует, что $\delta \simeq Ms^2/a^3$.

Глубина потенциальной ямы $U(x)$ оценивается из условия

$$\partial U / \partial x = 0 = 2\gamma x - 3\delta x^2 \rightarrow \tilde{x} = 2\gamma/3\delta; \quad U_{\min} \sim E_{\text{cs}} = \frac{4\gamma^3}{9\delta^2} + \frac{8\gamma^3}{27\delta^2} = \frac{4\gamma^3}{27\delta^2}$$

Для серебра $M \simeq 2 \cdot 10^{-22}$ г, т.е. $E_{\text{cs}} = (4/27)Ms^2 \sim 15$ эВ.

5. (Ципенюк) Индуктивность единицы длины цилиндра $L = 4\pi S = 4\pi a^2$.

Изменение запасенной магнитной энергии равно омическим потерям

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2c^2} \right) = RI^2, \quad \text{или} \quad -\frac{dI}{dt} = \frac{Rc^2}{L} I$$

$$I(t) = I_0 \exp \left(-\frac{Rc^2}{L} t \right); \quad R = \frac{L}{c^2 t} \ln \left(\frac{I_0}{I(t)} \right) = \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 t} \ln 1,01 \sim 10^{-13} \Omega \text{m.}$$

Вариант Б

$$\left. \begin{aligned} 1. (\text{Ципенюк}) \quad \frac{mv_0}{mv_0^2} &= \frac{MV - mv_1}{MV^2 + mv_1^2} \\ \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} v_0 + v_1 &= (M/m)V \\ v_0^2 - v_1^2 &= (M/m)V^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} v_0 - v_1 &= V \\ v_0 + v_1 &= (M/m)V \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 2v_0 &= (1 + M/m)V \\ 2v_1 &= (M/m - 1)V \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Итак } \alpha = \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2 = \frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{M+m}{M-m} \right)^2 \quad E_{n+1} = \alpha E_n, \quad E_n = E_0 / \alpha^n.$$

$$\text{Для нейтрона в углероде } \frac{10^6}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^7 = \left(\frac{13}{11} \right)^{2n} \rightarrow n = 52.$$

2. (Ципенюк) Пусть энергия частицы E . В конденсаторе с напряженностью поля \mathcal{E} и радиусом траектории R_e :

$$\mathcal{E} = \frac{V}{R_e \ln r_2/r_1}, \quad \frac{Mv^2}{R_e} = q\mathcal{E}, \quad R_e = \frac{2E}{q\mathcal{E}}, \quad \frac{E}{q} = \frac{V}{2 \ln r_2/r_1}.$$

$$\frac{Mv^2}{R_m} = \frac{q}{c} v B, \quad R_m^2 = \frac{2Mc^2}{qB^2} \frac{V}{2 \ln r_2/r_1}, \quad \frac{M}{q} = \frac{R_m^2 B^2}{c^2 V} \ln r_2/r_1.$$

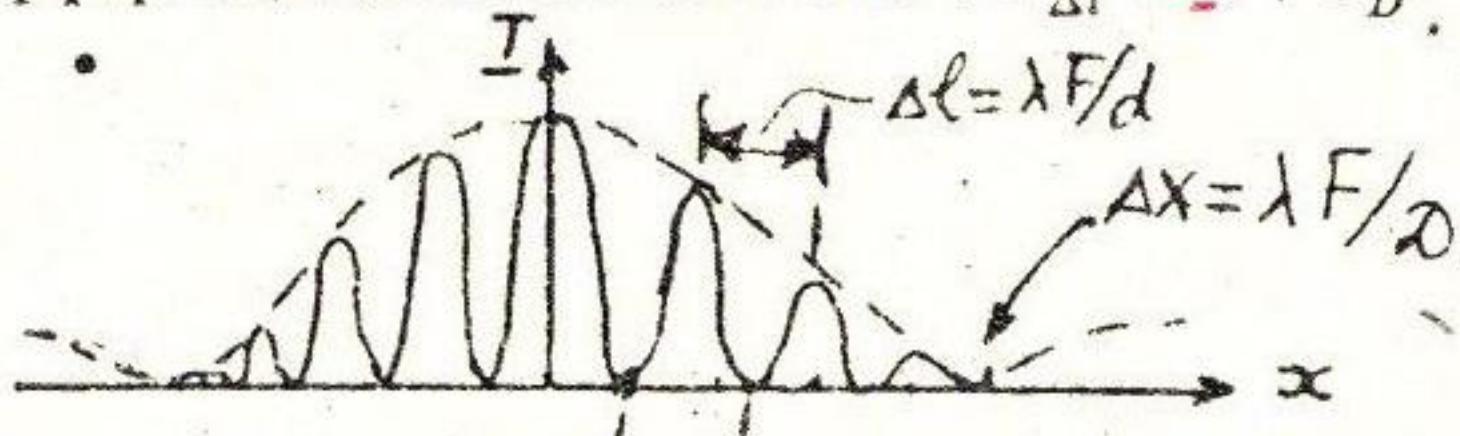
3. (Козел) Дифракционная картина на одной щели

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad \text{где } u = \frac{kD \sin \theta}{2} = \frac{kD\theta}{2} \quad (\theta - \text{угол наблюдения}).$$

Разность хода лучей от двух соседних щелей $\Delta = d \sin \theta \simeq d\theta$, линейная координата $x = F\theta$, откуда $\Delta = dx/F$. При интерференции двух волн от разных щелей с разностью хода Δ , получим

$$I(x) = 2I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 (1 + \cos k\Delta) = 2I_0 \left[\frac{\sin (kDx/2F)}{kDx/2F} \right]^2 \left(1 + \cos \frac{kdx}{F} \right)$$

Число интерференционных полос $N \approx 1 + 2 \frac{\Delta x}{\Delta l} \approx 1 + 2 \frac{d}{D}$.



4. (Ципенюк) Пусть длина плаэмы l , площадь сечения S , и под действием приложенного поля V устанавливается дрейфовая скорость u . Тогда сила трения (потеря импульса в ед. времени) равна

$$\nu_e m_e u = eE = eV/l$$

Ток $I = enuS = enS \frac{eE}{\nu m} = \frac{ne^2 SV}{m\nu l} = \frac{V}{R} = \frac{VS}{\rho l}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2}{m\nu}$.

5. (Ципенюк). Если ширина пластины b , а n — число вихрей на 1 см^2 , то сила Лоренца на единицу длины пластины $F_l = (1/c)IB$ действует на nb вихрей длины a , где $B = n\Phi_0$. Значит сила Лоренца, действующая на единицу длины вихря, равна

$$F_L = \frac{F_l}{nb} = \frac{\Phi_0 I}{cba} = \eta v.$$

Но $I/ab = j$, поэтому $v = (1/c)(j\Phi_0/\eta)$ и в результате движения вихрей (магнитного поля) возникает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c}vB = \frac{\Phi_0 Bj}{\eta c^2} = (\text{так как } B \approx H) = \frac{\Phi_0 H j}{\eta c^2}.$$

Вариант В

1. (Прут-Струминский) Полная энергия

2⁹ космии.

$$E = P + K = mR^2 \left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}\pi\rho G \right) = 0 \quad \text{можно } \frac{3}{5}$$

$$\text{Откуда } \rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3 \cdot 2,4^2 \cdot 10^{-36}}{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8}} = 1 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3.$$

2. (Ципенюк) При изменении температуры меняется масса по соотношению $PV = RTm/\mu$, а отбираемое от газа тепло равно

$$\delta Q = dU + p dV, \quad dU = mC_v dT = -p dV = \text{const}$$

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{T_2}{P_2 V_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{6}$$

3. (Козел) Дифракционная решетка работает в 1-ом порядке $m = 1$, т.к. ширина щели равна половине периода. Угловая расходимость дифракционного максимума

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{nNd \cos \theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} (n \approx 1).$$

Изменение угла дифракции из-за изменения n :

$$n \sin \theta = \frac{m\lambda}{d} (\lambda - \text{длина волны в вакууме})$$

Откуда $\Delta n \sin \theta + n \cos \theta \Delta \theta = 0 \rightarrow \Delta \theta = -(\Delta n/n) \operatorname{tg} \theta$.

Условие на допустимое изменение n : $|\Delta \theta| \approx \delta\theta$, откуда получаем

$$\frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \approx \Delta n \operatorname{tg} \theta; \quad \frac{\lambda}{Nd} \approx \Delta n \sin \theta = \Delta n \frac{\lambda}{d}, \quad \Delta n \approx \frac{1}{N}$$

В результате $\Delta p \approx \frac{\delta n}{3 \cdot 10^{-9}} = \frac{1}{N \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 3300 \text{ Па} = 1/3 \text{ атм}$

4. (Струминский) В магнитном поле энергия электронов квантуется (образуются уровни Ландау):

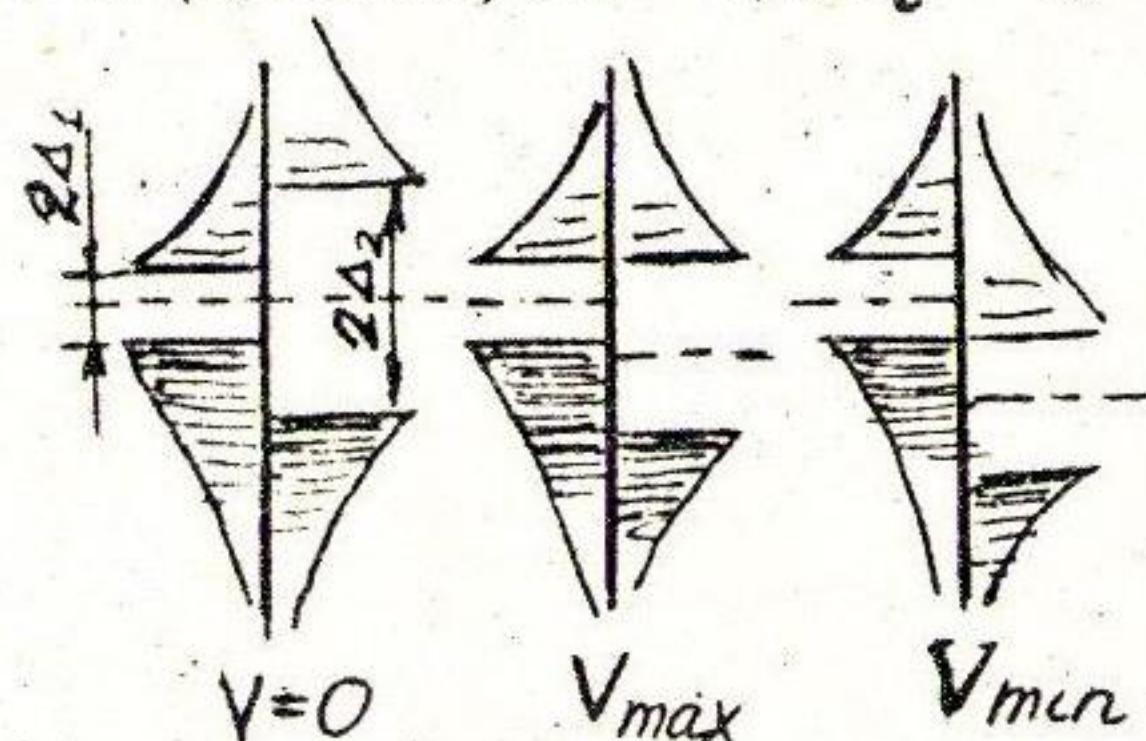
Чет смена

$$E_n = n \mu_B B; \quad \text{или} \quad \Delta E_n (\text{кэВ}) = 11,6 \frac{B}{10^{12}} (\text{Гс}); \quad B = 50 \cdot 10^{12} / 11,6 = 4,3 \cdot 10^{12} \text{ Гс}$$

Смещение аннигиляционной линии

$$\Delta E = 51 \text{ кэВ} = G \frac{Mm}{R} = G \frac{ME}{c^2 R}; \quad R = \frac{GME}{\Delta E c^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{33} \cdot 511}{51 \cdot 10^{21}} = 8 \text{ км.}$$

5. (Ципенюк) $2\Delta = 3,5kT_c \rightarrow T_c = \Delta / 1,75k$. Как следует из рисунка,



$$eV_{\max} = \Delta_2 - \Delta_1, \quad eV_{\min} = \Delta_2 + \Delta_1.$$

$$\Delta_2 = e \frac{V_1 + V_2}{2} = 1,11 \text{ мэВ},$$

$$\Delta_1 = e \frac{V_1 - V_2}{2} = 0,29 \text{ мэВ},$$

$$T_{c1} = 1,8 K, \quad T_{c2} = 7,2 K.$$

Решения.

Вариант А

1A. (Котельников). В силу перпендикулярности магнитного и электрического полей вектор Пойнтинга $S = (c/4\pi)[EH]$ отличен от нуля, а после короткого замыкания он становится равным нулю и система приобретает вращательный момент L :

$$E = \frac{V}{r \ln(R_2/R_1)}, dL = \frac{S}{c^2} 2\pi r l dr, L = l \int_{R_1}^{R_2} \frac{c}{4\pi} EH \frac{r}{c^2} 2\pi r dr = \frac{(R_2^2 - R_1^2)VHl}{4c \ln(R_2/R_1)}$$

Из условия $L = J\omega = \omega M(R_1^2 + R_2^2)$ получаем

$$\omega = \frac{(R_2^2 - R_1^2)VHl}{4Mc(R_1^2 + R_2^2) \ln(R_2/R_1)} = \frac{1,75 \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot 10}{12 \cdot 10^{10} \cdot 6,25 \cdot 0,29} = 8 \cdot 10^{-6}$$

За час угол поворота $\varphi = \omega t = 9 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ рад $\simeq 1,6$ град

2A. (Кириченко) В этой ситуации газ ведет себя как двумерный, уравнение адиабаты $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ сохранит свой вид, если учесть, что число степеней свободы $i = 2$:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{i/2 + 1}{i/2} = 2 \rightarrow TV = \text{const} \rightarrow T_k = 2T_0 = 600 K$$

3A. (Ципенюк) Отраженный поток от первой поверхности $\Phi_1/\Phi_0 = [(n_1 - 1)/(n_1 + 1)]^2 = 0,17$, прошедший поток $\Phi'_0 = 0,83\Phi_0$, а отраженный от второй границы $\Phi_2/\Phi'_0 = [(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)]^2 = 0,03$. Разность фаз за счет прохождения второго луча в пленке $(\Phi_2/\Phi_0 = 0,83 \cdot 0,03)$, *после отражения от второй поверхности проходит 0,83 · 0,03 = 0,83² · 0,03 =*

$$\Delta\varphi = 2kn_1d = \frac{4n_1d}{\lambda}\pi = \frac{4 \cdot 2,4 \cdot 6,25 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-5}}\pi = \pi$$

С учетом того, что при отражении от первой поверхности волна приобретает сдвиг фаз π , для величины отраженного потока получаем

$$\Phi_{\text{отр}}/\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + 2\sqrt{\Phi_1\Phi_2} \cos(\Delta\varphi - \pi) = 0,17 + 0,03 + 0,12 = 0,31 \quad (0,306)$$

Точная формула, учитывающая многократные отражения: 0,

4A. (Ципенюк). В одномерной решетке с двумя различными атомами (тяжелым $M_1 = M_B$, и легким $M_2 = M_K$) частота колебаний

$$\omega(\pi/a) = \sqrt{2\gamma/M_1}, \quad \omega(\text{??}) = \sqrt{\gamma/(2(M_1 + M_2))} ka,$$

$$1/a^3 = \rho/(4M_1 + 4M_2) \rightarrow a = [(4 \cdot 120 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24})/2,74]^{1/3} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Поэтому скорость звука $s = \omega(\pi/a)\sqrt{M_1/(4(M_1 + M_2))}a = 2,1 \cdot 10^5 \text{ см/с}$

5А. (Ципенюк). Скорость электронов в вихре находится из условия квантования

$$\oint p \, dq = 2m \oint v_s \, dl = 2mv_s \cdot 2\pi r = 2\pi\hbar \quad v_s = \hbar/2mr$$

$$E_k = \frac{n_s}{2} \int_{\xi}^{\lambda} \frac{2mv_s^2}{2} 2\pi r dr = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \int_{\xi}^{\lambda} \frac{dr}{r} = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \ln \lambda/\xi$$

Другой подход: Момент импульса пары $L_z = \hbar$, энергия вращения $\epsilon = L^2/2I = \hbar^2/(2 \cdot 2mr^2)$, число пар $dN = (n_s/2)dV = (n_s/2)2\pi r dr$, кинетическая энергия единицы длины вихря

$$E = \int_{\xi}^{\lambda} \epsilon dN = \frac{\hbar^2 n_s}{2 \cdot 2m \cdot 2} 2\pi \int \frac{r dr}{r^2} = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \ln(\lambda/\xi)$$

Вариант Б

1Б. (Петухов). Временное разрешение определяется разбросом времени пролета электронов, вылетевших из фотокатода в направлении к аноду с различными направлениями начальной скорости, т.е. с величиной продольной составляющей скорости от нуля до максимально возможной. Времена движения до анода t_1 и t_2 определяются из уравнения движения (l – расстояние анод-катод):

$$l = \frac{eEt_1^2}{2m}, \quad l = v_m t_2 + \frac{eEt_2^2}{2m}$$

Поскольку приобретаемая в поле энергия электрона много больше первоначальной, то во втором уравнении $v_m t_2 \ll eEt_2^2/2m$. Приравнивая оба выражения, получаем

$$\frac{eEt_1^2}{2m} = v_m t_2 + \frac{eEt_2^2}{2m}, \quad \text{т.е. } t_1 = t_2 \sqrt{1 + \frac{2mv_m}{eEt_2}} \simeq t_2 + \frac{mv_m}{eE}, \quad \hbar\omega = mv_m^2/2 + \hbar\omega_k,$$

$$v_m^2 = (2\hbar/m)(\omega - \omega_k) = \frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad \Delta t = t_1 - t_2 = \frac{1}{eE} \sqrt{2mh c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k} \right)} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

2Б. (Ципенюк, Струминский) По ур-ю Клайперона-Клаузиуса

$$P = P_k \exp \left[\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_c} \right) \right] = 1 \cdot \exp \left(10 \left(\frac{1}{4,22} - \frac{1}{4,15} \right) \right) = 0,961 \text{ атм}$$

Это соответствует 730 мм рт. ст. При более точном подходе надо учитывать зависимость теплоты парообразования от температуры. В этом случае $P = CT \exp(-q/RT)$, C – некая константа, и поэтому необходимое давление

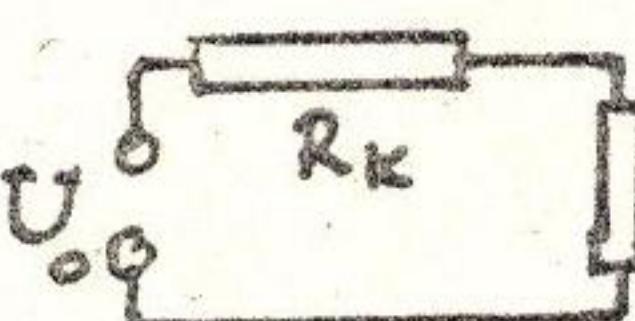
$$P = P_k \frac{T_c}{T_k} \exp \left[\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_c} \right) \right] = 0,945 \text{ атм} (718 \text{ мм рт.ст.}),$$

Экспериментальная величина – 715 мм.рт.ст.

3Б. (Кремлев.) При грамотном включении волновое сопротивление кабеля равно сопротивлению излучения антенны и входному сопротивлению телевизора и отраженного сигнала не возникает. Параллельное подключение к одному кабелю двух телевизоров эквивалентно подключению активного сопротивления, равного половине волнового. Из-за неточного сопряжения сигнал будет частично отражаться от разветвления, однако повторного его отражения от антенны не будет. Пусть амплитуды напряжений и токов в прямой волне равны U_0 и I_0 , а в отраженной U_1 и I_1 . В точке разветвления

$$U = U_0 + U_1 = RI/2 = (I_0 + I_1)R/2 = (U_0/R - U_1/R)R/2$$

Откуда $U_1/U_0 = (1 - 1/2)/(1 + 1/2) = 1/3$. Мощность отраженного сигнала будет равна $1/9$, а рассеивающаяся на половинном сопротивлении – $8/9$ от первоначальной. В каждый телевизор попадает $4/9$ этой мощности при амплитуде в $2/3$ от исходной (или -3,5 дБ).



Можно решать на "детском уровне": при оптимальном согласовании $R_k = R_t$, мощность в нагрузке $W_0 = (U_0/2R)^2 R = U_0^2/4R$; при $R_t = R_k/2$ выделяемая мощность $W_1 = [U_0/(3/2R)]^2 R/2 = 2U_0^2/9R = (8/9)W_0$.

4Б. (Ципенюк) Так как заполнена половина зоны проводимости, то это означает, что каждый атом отдает по одному электрону и среднее расстояние между электронами $r \simeq n^{-1/3}$, потенциальная энергия $V \simeq e^2/r = e^2 n^{1/3}$, энергия Ферми $E_F = \hbar^2(3\pi^2n)^{2/3}/2m$.

$$V/E_F = \frac{2me^2}{\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}n^{1/3}} \simeq 1$$

5Б. (Ципенюк)

$$M = IS/c, \quad v_s = \hbar/2mr, \quad dI = (n_s/2)2e(v_s/2\pi r)2\pi r dr = \frac{n_s e \hbar}{2mr} dr$$

$$M = \frac{1}{c} \int \frac{n_s e \hbar}{mr} \pi r^2 dr = \frac{\pi n_s e \hbar}{mc} \int_r^\lambda r dr \simeq \frac{\pi n_s e \hbar}{4mc} \lambda^2, \quad W_m = -MH = -\frac{\pi n_s e \hbar}{4mc} \lambda^2 H = \pi n_s \mu_B H \lambda^2 / 2$$

По-другому: 1) простая оценка $M \simeq n_s \mu_B H \lambda^2$ дает ответ с точностью до $\pi/2$; 2) магнитный момент пары $e\hbar/(2mc)$, число пар $N = (n_s/2)V \simeq \pi \lambda^2 n_s / 2$, полный магнитный момент $M = Ne\hbar/(2mc) = \pi n_s e \hbar \lambda^2 / (4mc)$.

Вариант В

1В. (Ципенюк) Кулоновская сила, действующая на пластину

$$F = SE^2/8\pi = (SU_0^2/8\pi d^2) \sin^2 \omega t / 2 = (SU_0^2/16\pi d^2)(1 + \cos \omega t)$$

Уравнение движения $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = F/m$. При резонансе $\dot{x} + \omega^2 x = 0$ и поэтому, переменная часть скорости

$$\dot{x} = (F/2\delta m) = (SU_0^2/32\pi d^2 \delta m) \cos \omega t$$

$x = (QF/m\omega^2) \sin \omega t$ - пластина колеблется с частотой ω и амплитудой

$$x_0 = \frac{QF_0}{k} = (QSU_0^2/16\pi d^2 m\omega^2) = \frac{100 \cdot 5 \cdot 10^4 / 300^2}{16 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 \cdot 10} \sim 0,15 \text{ мм}$$

2B. (Ципенюк) Выделевшееся тепло ($\gamma = 1,4$)

$$Q = \int_{P_1}^{P_2} P dV = [PV^\gamma = \text{const}] \rightarrow dV = -(V/\gamma P)dp = -\frac{1}{\gamma} \int V dP =$$

$$= \frac{(\text{const})^{1/\gamma}}{\gamma} \int P^{-1/\gamma} dP = -\frac{P_1 V_1}{1-\gamma} [1 - (P_1/P_2)^{(\gamma-1)/\gamma}] = -\frac{5}{2} P_1 V_1 (1 - 10^{0,29}) = -2,3 P_1 V_1$$

Израсходованное тепло идет на охлаждение всех $\nu = P_1 V_1 / (RT)$ молей исходного газа, и охлаждение $x \text{ см}^3$ жидкости ($C_V = 5R/2$)

$$Q = \nu C_V \Delta T_x \lambda = \frac{5P_1 V_1 \Delta T}{2T_1} + x \lambda, \quad x = \frac{P_1 V_1}{\lambda} \left(2,3 - \frac{5\Delta T}{2T} \right) / \lambda = \frac{10^4 \cdot 10^3 \cdot 1,7}{160 \cdot 10^7} \simeq 10^{-2} \text{ см}^3$$

3B. (Канавин). Обозначим диаметр изображения Солнца в фокусе через $d = F\alpha_c$. Поток энергии через фокус линзы $Q = E_c(D/d)^2$. Напряженность электрического поля определяется через поток энергии $Q = cE^2/4\pi$

$$E \simeq \sqrt{\frac{4\pi E_c}{c} \frac{D}{F\alpha_c}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,13 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}}} \frac{5 \cdot 300}{10 \cdot 10^{-2}} \text{ В/см} \simeq 500 \text{ В/см}$$

4B. (Ципенюк) При 77 К ~~$kT = 0,007 \text{ эВ}$~~ и все электроны с доноров Sb перейдут на уровни Au^+ и Au^{2+} , причем так как $N_{\text{Sb}}/N_{\text{Au}} = 1,5$, то уровни Au^+ будут полностью заняты, а уровни Au^{2+} лишь наполовину. Электроны из валентной зоны могут переходить на уровень Au^{2+} , преодолевая энергию в $0,5 \text{ эВ}$, или с уровней Au^{2+} в зону проводимости, для чего требуется лишь $0,2 \text{ эВ}$. Последний процесс более вероятен, поэтому материал оказывается n-типа и концентрация электронов равна

$$n = N_c \exp\left(\frac{E_2 - E_c}{2kT}\right) = 10^{18} \exp\left(-\frac{0,2}{2 \cdot 0,007}\right) = 10^{18} e^{-14,3} = 6 \cdot 10^{11} 1/\text{см}^3$$

5B. (Раевский, Ципенюк.) Момент инерции $J = M\tau^2/2$, число вихрей $N = SB/\Phi_0 = \pi r^2 B/\Phi_0$, угловой момент одного вихря длиной l

$$L_1 = (ln_s/2) \int_{-l}^l 2mv_s r 2\pi r dr = n_s \pi \lambda^2 h l / 2, \quad J\omega = NL_1, \quad \omega = \frac{\pi^2 n_s \lambda^2 h l B}{\Phi_0 M} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$$

Следует отметить, что с ростом температуры момент не изменяется, так как остается постоянным произведение $n_s \lambda^2$.

Вариант А

1А. (Струминский). Пусть толщина льда равна h . Температура на границе лед-твёрдь не может быть больше температуры плавления льда $T_0 = 273$ К. Уравнение теплопроводности

$$-\kappa 4\pi r^2 (dT/dr) \simeq \varepsilon \sigma T_s^4 4\pi R^2, \quad -\frac{\kappa}{\varepsilon \sigma T_s^4 R^2} \int_{T_0}^{T_s} dT = \int_{R-h}^R \frac{dr}{r^2}.$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon \sigma T_s^4 R^2} (T_0 - T_s) = \frac{1}{R-h} - \frac{1}{R} \simeq \frac{h}{R^2}, \quad h = \frac{\kappa(T_0 - T_s)}{\varepsilon \sigma T_s^4} = 760 \text{ м}$$

Это же можно получить, предполагая линейный градиент температуры, без интегрирования уравнения теплопроводности из уравнения

$$(\Delta T/h)\kappa 4\pi R^2 = \varepsilon \sigma T_s^4 4\pi R^2$$

2А. (Степанов). $C_V = aT + bT^3$. В координатах $C_V/T, T^2$ это прямая линия, которая пересекает ось ординат в точке $a = C_V/T = \pi^2 R/2T_F = 1,5 \cdot 10^{-4}$ кал/моль·град², откуда $T_F = R\pi^2/2a = 6,4 \cdot 10^4$ К R – газовая постоянная.

3А. (Ципенюк). Ток в прямом направлении

$$I = j_s(e^{eV/kT} - 1)S \simeq j_s S eV/kT = U/R,$$

$$j_s = \frac{kT}{eSR} = \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 400} = 1,3 \text{ А/м}^2$$

4А. (Раевский). Плотность электронов $n = 1/a^3$, число рассеивающих центров $n_1 = 0,01n$.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2}{mn_1\sigma v_F}, \quad v_F = (\hbar/m)(3\pi^2 n)^{1/3} \simeq 3\hbar/ma$$

$$\sigma = 100e^2\rho a/3\hbar = 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$$

5А. (Канавин). Энергия электрона, удержанного в слое, складывается из энергии связанного состояния и энергии свободного движения

в направлении, параллельном плоскости структуры. Электроны будут удерживаться в яме, если $-\varepsilon_0 + \hbar^2 k_F^2 / 2m^* \leq 0$. Для двумерного вырожденного газа $k_F^2 = 2\pi n$, и отсюда мы получаем

$$n = \frac{\varepsilon_0 m^*}{\pi \hbar^2} = \frac{0,05 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 0,08 \cdot 10^{-27}}{3,14 \cdot 10^{-54}} \simeq 1,5 \cdot 10^{12} \text{ 1/cm}^2.$$

Вариант Б

1Б. (Кирьянов). Температура наружной поверхности определяется из уравнения теплового баланса на сдиницу длины стержня

$$\sigma T_s^4 = Q = j^2 a \rho, \quad T_s = 76 \text{ K},$$

Из уравнения теплопроводности находим разность температур между внутренней и внешней поверхностями $\Delta T = \sigma T_s^4 b / \kappa = 0,02 \text{ K}$

2Б. (Степанов). Аналогично 2А, из графика находим величину константы $b = 0,265 \text{ мДж/моль}\cdot\text{град}^4$. Решеточная теплоемкость при низких температурах

$$C_V = \frac{12\pi^4 R}{5} (T/\Theta)^3 = 234R(T/\Theta)^3; \quad C_V/T = 234RT^2/\Theta^3 = bT^2$$

$$234R/\Theta^3 = b, \quad \Theta = \sqrt[3]{234R/b} = \sqrt[3]{234.8,34 \cdot 10^3 / 0,265} = 200 \text{ K}$$

3Б. (Канавин). Подзоны легких и тяжелых дырок имеют эффективные числа состояний (статфакторы зон) $N_{v1} \propto m_{p1}^{3/2}$ и $N_{v2} \propto m_{p2}^{3/2}$. Концентрации легких и тяжелых дырок соответственно равны $p_1 = N_{v1} \exp(-\mu/kT)$ и $p_2 = N_{v2} \exp(-\mu/kT)$. Относительная доля легких дырок равна

$$\eta = \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \frac{N_{v1}}{N_{v1} + N_{v2}} = \frac{m_{p1}^{3/2}}{m_{p1}^{3/2} + m_{p2}^{3/2}} = \frac{0,04^{3/2}}{0,04^{3/2} + 0,34^{3/2}} \simeq 0,04.$$

4Б. (Ципенюк).

$$M\omega_D^2 a^2 = kT \rightarrow Ma^2(k\Theta/\hbar)^2 = kT, \quad a^2 = \hbar^2 T / (Mk\Theta^2), \quad \sigma = \frac{e^2 n_e T}{m}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{v_F} = \frac{1}{v_F n \pi a^2}, \quad \sigma = (M/m) \frac{k e^2 \Theta^2}{\hbar^2 v_F \pi T}, \quad \rho \simeq 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$$

$$n_e \simeq n \\ m^* = m_0$$

5Б. (Раевский). Аналогично 5А

$$-\varepsilon_0 + \hbar^2 k_F^2 / 2m^* \leq 0, \quad k_F = n\pi/2, \quad n = 2\sqrt{2m^*\varepsilon_0}/\pi\hbar = 1,5 \cdot 10^6 \text{ 1/cm}$$

Вариант А

1А. (Баканина.) Для круговой околоземной орбиты

$$GM = gR = v^2 R$$

По условию $dE/dt = -Fv = -Cv^4$. Если $E = E_{\text{пот}}/2 = -GmM/2r$ — полная энергия спутника, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dE/dt}{dE/dr} = -\frac{2CGR_3^2}{m}$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{GmM}{2r^2}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{Cv^4 2r^2}{GmM} = -\frac{2CGM}{m} \simeq -1,2 \text{ мм/с}$$

($M = 6 \cdot 10^{27}$ г — масса Земли, $G = 6,7 \cdot 10^{-8}$ дн · см²/г² — гравитационная постоянная)

2А. (Ципенюк.) В единице объема

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int H dB, \quad C = \frac{3R}{A} \rho, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{fQ}{C} = \frac{fA}{4\pi 3R\rho} \int H dB \simeq 10^{-3} \text{ град/сек}$$

Если $2f^*$ то $1,82 \cdot 10^{-3}$

3А. (Ципенюк). По I началу $\delta Q = TdS = dU + \delta A$. Так как внутренняя энергия не меняется, то $TdS \simeq -mgl\varphi^2$. Энтропия убывает и равна $\Delta S = -mgl\varphi^2/T \simeq -k_B$. Этот результат может быть получен и сразу $\delta Q \simeq k_B T = TdS$, либо из соотношения Больцмана $S = k_B \ln W$.

4А. (Петухов). Так как энергия уровней атомов пропорциональна приведенной массе $\mu = m_e M / (m_e + M)$, то изотопический сдвиг, связанный с разностью масс ядер, равен

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = m_e \frac{M_{23} - M_{22}}{M_{22} \cdot M_{23}}$$

Доплеровское уширение

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\langle |v_x| \rangle}{c} \simeq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{kT}{M}}$$

Температура должна не превышать величину

$$T \leq \frac{Mc^2}{k} \left[m_e \frac{M_{23} - M_{22}}{M_{22} \cdot M_{23}} \right]^2 \simeq 280 K$$

Примечание. Получение паров натрия заметной концентрации при такой температуре затруднительно.

5А. (Ципенюк) Конечная проводимость возникает за счет термического возбуждения следующего уровня Ландау. Щель между I и II уровнями, характеризующихся разным направлением спина, равна

$$\Delta E_{12} = g_s M_B B = 1,85 \cdot 10^{-20} B.$$

Концентрация электронов на возбужденном уровне (как в п/п)

$$n_2/n_1 = \exp(-\Delta E_{12}/2kT) = \exp(-18,53) = 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{-9}$$

Так как $\nu = 1$, то $B = n_0 \Phi_0 \simeq 4,14 \cdot 10^5$ Гс. Проводимость (с учетом проводимости дырок на первом уровне Ландау)

$$\sigma = \frac{2n_2 e^2 \tau}{m^*} \simeq 4,3 \cdot 10^3 (CGSE) \simeq 5 \cdot 10^{-9} \Omega^{-1} \text{ м}^{-1}$$

Примечание: сопротивление слоя $\rho_{xx} = \sigma_{xx} \rho_{xy}^2 \sim 3,2 \Omega$

Вариант Б

1Б. (Степанов.) Перейдем в систему отсчета, связанную с кораблем. Передаваемый ему импульс в единицу времени

$$dp/dt = \pi R^2 \rho v^2 \quad (R - \text{радиус сферы}).$$

Полезная мощность двигателя, необходимая для компенсации передаваемой ей импульса равна

$$W = \pi R^2 \rho v^3, \quad \text{полная мощность двигателя равна } W/\eta.$$

В излучение уходит часть энергии двигателя $W/\eta - W$ и энергия прилипаемой пыли $\pi R^2 \rho v^3/2$, т.е. всего

$$I = W(1/\eta - 1) + W/2 = W(2 - \eta)/2\eta = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Окончательно

$$T = \left[\frac{\rho v^3}{4\sigma} \frac{2 - \eta}{2\eta} \right]^{1/4}.$$

Примечание: часть мощности ($W/2$) уносится продуктами сгорания топлива.

2Б. (Чукреев.) По методу зеркальных изображений энергия диполя

$$U = \frac{\mu^2}{(2r)^3}, \quad \text{сила} \quad F = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3\mu^2}{16r^4}. \quad = M \frac{\partial B}{\partial R} \Big|_{R=}$$

Поле у поверхности сверхпроводника

$$B = \frac{2\mu}{r^3}$$

$$= \frac{3\mu^2}{R^4} \Big|_{R=}$$

Если это поле больше критического, то сверхпроводимость разрушится и парение будет невозможно. Максимальный вес диполя

$$P \leq \frac{3\mu^{2/3}}{16} (B_c/2)^{4/3} = 3 \cdot 10^4 \text{ дн} \quad (m = 0,03 \text{ кг})$$

3Б. (Ципенюк) Ограничение возникает из-за броуновского движения молекулы. Минимальное разрешение R соответствует длине волны излучения. За время τ частица сместится по какой-либо координате на расстояние

$$\bar{L}^2 \simeq 2D\tau, \quad D = kTB, \quad R \simeq \bar{L} \simeq \sqrt{2kTB\tau} \simeq \lambda$$

Отсюда

$$\tau \sim \frac{\lambda^2}{2kTB} \simeq \frac{10^{-10}}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \cdot 10^4} = 0,1 \text{ сек}$$

4Б. (Петухов). Аналогично 4А.

Изотоп-сдвиг

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = m_e \frac{M_{41} - M_{39}}{M_{39} \cdot M_{41}} = 0,68 \cdot 10^{-6}$$

Доплеровское уширение

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \simeq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{kT}{M}} = 1,05 \cdot 10^{-6}$$

Резонансное поглощение будет наблюдаться.

5Б. (Ципенюк). При температуре выше T_c разность фаз равна

$$\Delta\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0 = 2,8 \cdot 2\pi = 1,6\pi$$

При понижении температуры после перехода в сверхпроводящее состояние поток может быть только квантован в единицах $\Phi_0^{сп} = hc/2e$. Так как $\Phi = 5,6\Phi_0^{сп}$, а Φ может быть кратен только $\Phi_0^{сп}$, то магнитный поток через поверхность, охватываемую возможными траекториями электрона, будет равен $\tilde{\Phi} = 5\Phi_0^{сп} = 2,5\Phi_0$. Таким образом, фаза изменится на $\delta = 0,3 \cdot 2\pi = 0,6\pi$, т.е. на 0,3 полосы.

Вариант В

1В. (Овчинкин.) Плотность потока солнечной энергии на земной орбите

$$J_3 = \frac{L_c}{4\pi R^2} = 0,134 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$$

Условие теплового баланса

$$J_3 \pi R_3^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_3^2 \rightarrow T = \left(\frac{J_3}{4\sigma} \right)^{1/4} = 278 \text{ K}$$

Из этого соотношения следует, что

$$T^4 R^2 = \text{const} \rightarrow 4T^3 \Delta T R^2 + T^4 2R \Delta R = 0$$

$$\Delta R = -2R \Delta T / T \simeq 1,1 \cdot 10^8 \text{ м} < R_{Лун}^{орб}$$

2В. (Нипенюк.) Как обычно, в резонаторе $\frac{LI^2}{C^2} = CU^2$ (L, C, I, U — индуктивность и емкость резонатора, ток по поверхности тора и напряжение на обкладках конденсатора).

$$C = \frac{S}{4\pi d} = \frac{r_0^2}{4d}, \quad \oint B dl = \frac{4\pi}{c} I \rightarrow B = \frac{2I}{cr}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Максимальное магнитное поле у края емкости, $U = Ed$ и окончательно получаем

$$E = \frac{8B_{kp}c}{\omega_0 r_0} = 2 \cdot 10^6 \text{ В/см.}$$

3В. (Судаков.) Из-за конечного размера источника длина пространственной когерентности на расстоянии L равна $\lambda L/d$. С другой стороны, длина когерентности равна $ct = c/\Delta f = \lambda^2/\Delta\lambda$. Таким образом,

$$L \simeq \frac{cd}{\lambda \Delta f} = 2 \cdot 10^5 \text{ см} = 2 \text{ км.}$$

4B. (Ципенюк) Доплеровское уширение $\Delta\omega/\omega \simeq \sqrt{kT/Mc^2}$, изомерный сдвиг $\Delta\omega/\omega \simeq m_e \Delta M/M^2$. Условие на температуру

$$T \leq \frac{Mc^2}{k} \frac{m_e^2 (\Delta M)^2}{M^4}$$

$$kT \leq \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 Mc^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{E_{\text{яд}}^2}{Mc^2} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ эВ} (3,4 \cdot 10^{-7} \text{ K})$$

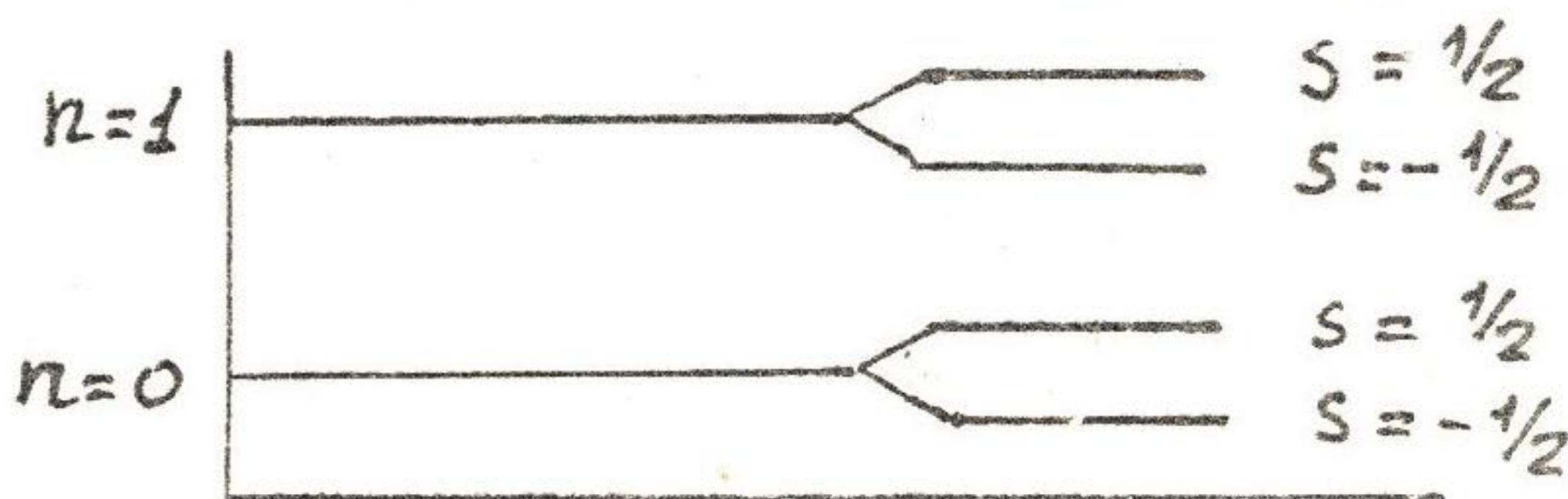
5B. (Раевский.) Энергия "двумерного" электрона в магнитном поле есть

$$\mathcal{E}_n = \frac{e\hbar}{m^* c} B(n + 1/2) + g_s \frac{e\hbar}{2mc} B \quad (s = \pm 1/2). \quad g_s = 2 !$$

Кратность вырождения это число уровней на единицу поверхности, т.е.

$$g = \frac{eB}{hc} = \frac{B}{\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \quad \Phi_0 = 4,14$$

Число заполненных уровней $k = N_s/g = 3$. Т.о. заполнены оба спиновых подуровня с $n = 0$ и нижний спиновый подуровень уровня с $n = 1$ (см. рис.).



Энергия единицы площади

$$E/S = \left(\frac{e\hbar}{m^* c} B/2 - \frac{e\hbar}{2mc} B + \frac{e\hbar}{m^* c} B/2 + \frac{e\hbar}{2mc} B + \frac{e\hbar}{m^* c} 3B/2 - \frac{e\hbar}{2mc} B \right) g = \\ = \frac{e\hbar}{2mc} \left(5 \frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{B^2}{\Phi_0}.$$

$$M/S = -\frac{1}{S} \frac{\partial(E)}{\partial B} = -\frac{e\hbar}{mc \Phi_0} \left(5 \frac{m}{m^*} - 1 \right) = -2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}.$$

Вариант А

1A. (Канавин.) Неоднородность гравитационных сил Юпитера (на единицу объема) $\delta f \simeq \gamma \rho M_{Ю} r_0 / R_0^3$, где R_0 — расстояние до Юпитера, ρ — плотность ядра кометы, $M_{Ю}$ — масса Юпитера. Величина приливного напряжения $\sigma_{пр} \sim (\delta f / r_0^2) r_0^3 \sim \gamma M_{Ю} \rho r_0^2 / R_0^3$. Комета будет разрушена, если $\sigma_{пр}$ превысит предел прочности ядра. Это произойдет на расстоянии от Юпитера

$$R_0 \sim (\gamma \rho M_{Ю} r_0^2 / \sigma_{пр})^{1/3}; \quad \frac{4\pi^2}{T_{Ю}^2} R_{Ю} = \gamma \frac{M_{\odot}}{R_{Ю}^2} \quad R_{Ю} = \left(\frac{\gamma M_{\odot} T_{Ю}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

где M_{\odot} — масса Солнца. Число оборотов кометы вокруг Солнца $N \simeq R_{Ю} / 2R_0$ (коэффициент 2 потому, что комета за один проход пересекает орбиту Юпитера дважды), где $R_{Ю}$ — радиус орбиты Юпитера.

$$N \simeq \left(\frac{\sigma_{пр} (R_{Ю}/2)^3}{\gamma \rho M_{Ю} r_0^2} \right)^{1/3} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{пр} T^2}{4\pi^2 \rho r_0^2 \eta} \right)^{1/3} \simeq 5 \cdot 10^3.$$

2A. (Прут.) $\eta = T_1 / (T_2 - T_1) = 275 / 20 = 13,75$; Если без включенной лампочки потребляемая мощность равна W_0 , а с лампочкой W , то

$$\eta = \frac{Q}{W_0} = \frac{Q + N}{W_1}; \quad W_1 - W_0 = \frac{N}{\eta} = \frac{25}{13,75} = 1,8 \text{ Вт.}$$

3A. (Прут.). Уравнение теплопроводности

$$-\chi \frac{d\Gamma}{dr} 4\pi r^2 = Q\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow -\chi \frac{dT}{dr} = \frac{Q\rho r}{3} \rightarrow T_r - T_R = \frac{Q\rho}{6\chi} (R^2 - r^2).$$

Температура Земли на поверхности ($R=6400$ км) $T_R = 300$ К, давление у поверхности (давление атмосферы) $p_R = 10^6$ дин/см² и им явно можно пренебречь в глубине Земли. Зависимость давления от расстояния r до центра Земли

$$p_r - p_R = \int_r^R \frac{4}{3} \pi \gamma \rho^2 r' dr' = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 (R^2 - r^2); \quad T_{пл} = T_r.$$

$$\frac{T_r - T_R}{p_r} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\chi \gamma \rho} \rightarrow Q = 4\pi \gamma \chi \rho \frac{T_r - T_R}{p_r} = 2,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{эрд}}{\text{Г} \cdot \text{с}}.$$

$$r^2 = R^2 - \frac{3}{2} \frac{p_r}{\pi \gamma \rho^2} = 12,6 \cdot 10^{16}, \quad r = 3550 \text{ км}, \quad h = 2850 \text{ км}.$$

4А. (*Кремлев*). Цепная реакция произойдет, когда длина свободного пробега будет порядка размеров системы. Начальная плотность ядер $n_0 = \rho N_A / A$, изменяется она как $n = n_0(r_0/r)^3$, $r_0^3 = 3m/4\pi\rho$. Таким образом при взрыве

$$(r/r_0)^2 = n_0 r_0 \sigma = \frac{\sigma N_A}{A} \sqrt{\frac{3m\rho^2}{4\pi}} \simeq 0,008.$$

Радиус надо уменьшить в ~ 11 раз.

Давление преимущественно определяется электронным газом, при нормальных условиях в металле $p \simeq (2/5)nE_F = 5 \cdot 10^6$ атм, уравнение адиабаты $PV^{5/3} = const$, поэтому при взрыве $P/P_0 = (V_0/V)^{5/3} = (r_0/r)^5$. Таким образом $P = P_0 11^5 = 8 \cdot 10^{11}$ атм.

5А. (*Ципенюк*) Коэффициент теплопроводности в модели идеального газа $\chi = (1/3)Cv\lambda\rho$. В данном случае скорость фононов постоянна и равна скорости звука, длина свободного пробега постоянна и равна диаметру капилляра, плотность постоянна, а теплоемкость пропорциональна T^3 . Тем самым $\chi(0,3K) = 0,025 \text{ Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$.

Вариант Б

1Б. (*Ципенюк*). Пусть V_0 это скорость налетающего нейтрона, V_n — рассеянного, а V — скорость отдачи протона в парафине либо ядра азота. Задача нерелятивистская. Обозначим массу протона или ядра отдачи через M .

$$M_n V_0 = -M_n V_n + M V; \quad M_n V_0^2 = M_n V_n^2 + M V^2; \quad V_0 + V_n = (M/M_n)V;$$

$$V_0^2 - V_n^2 = (M/M_n)V^2; \quad V_0 - V_n = V, \quad V = \frac{2M_n}{M + M_n} V_0$$

$$\frac{M_n + M_N}{M_n + M_p} = \frac{M_n + 14M_p}{M_n + M_p} = \frac{V_p}{V_N} = \frac{3,3 \cdot 10^9}{4,7 \cdot 10^8} = 7; \quad \rightarrow \quad M_n = 1,15 M_p.$$

2Б. (*Ципенюк*) $\Delta L/L = -\Delta\omega/\omega = 10^{-14}$, $|\Delta\omega/\omega| = \alpha\Delta T$, $\Delta T = 10^{-8}$ К.

3Б. (*Прут*)

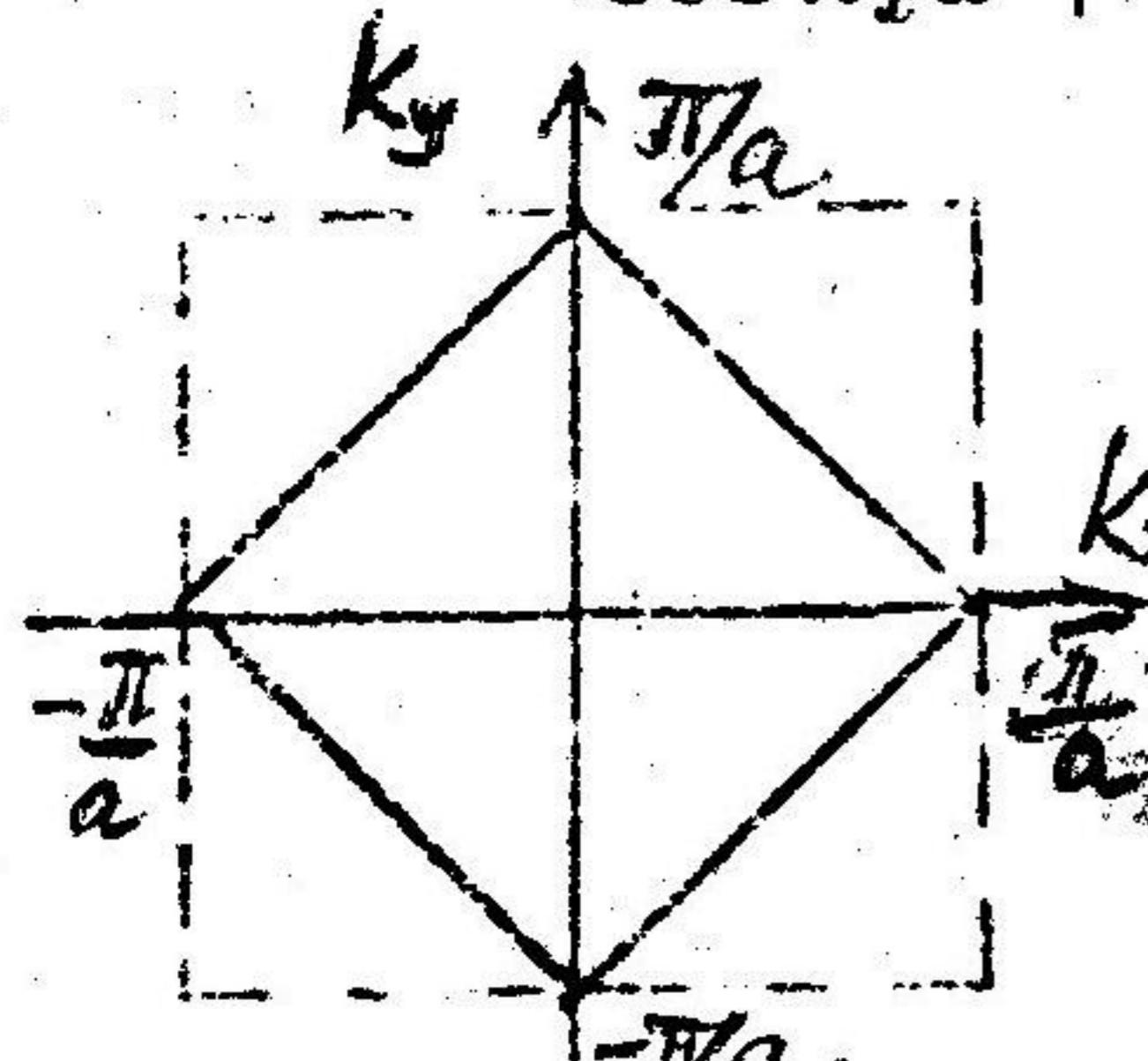
$$Q = -\chi \frac{dT}{dr} 4\pi r^2, \quad \frac{Q}{4\pi\chi} (1/r_0 - 1/R) = T_0 - T_R,$$

при $r_0 \ll R$ $Q \simeq 4\pi\chi r_0(T_0 - T_R)$; $Q_{\text{изл}} = 4\pi r_0^2 \sigma (T_0^4 - T_R^4)$

$$Q = Q_{\text{изл}} \text{ при } r_0 = \frac{\chi(T_0 - T_R)}{\sigma(T_0^4 - T_R^4)} = 0,43 \text{ см.}$$

4Б. (Раевский). Спектр разрешенных значений по энергии простирается от $-2E_0$ до $+2E_0$ и симметричен относительно $E = 0$, при одном электроне на атом заполнена лишь половина разрешенных состояний и поэтому сразу можно сказать, что в k -пространстве занята лишь половина всей возможной площади, т.е. $(1/2)(2\pi/a)^2$. Поверхность Ферми описывается уравнением $E = 0$ в силу приведенных выше соображений, т.е.

$$\cos k_x a + \cos k_y a = 2 \cos \frac{k_x a + k_y a}{2} \cos \frac{k_x a - k_y a}{2} = 0.$$



Решение этого уравнения $k_x + k_y = (\pi/a)(1+2n)$ и $k_x - k_y = (\pi/a)(1+2m)$. В первой зоне Бриллюэна это 4 отрезка прямых, соответствующих $n, m = 0, -1$, как показано на рисунке. Площадь этого квадрата равна $2\pi^2/a^2$.

5Б. (Ципенюк). $\eta = (1/3)\rho v \lambda = (1/3)\rho v_F^2 \tau$. Так как ρ и v_F постоянны, то все определяется временем релаксации. Обмен энергией может происходить лишь у частиц в области kT вблизи E_F . Когда происходит обмен энергией при столкновениях двух атомов гелия, должны быть свободны уровни, на которые перейдут эти частицы. Так как энергетический интервал свободных уровней $\Delta E \simeq kT$, то для двух частиц вероятность найти 2 свободных уровня пропорциональна $(\Delta E)^2 = (kT)^2$, а тем самым время релаксации, которое обратно пропорционально вероятности переходов, обратно пропорционально T^2 . Итак $\eta(2)/\eta(1) = 1/4$.

Вариант В

1В. (Петухов.) Импульс отдачи должен быть направлен навстречу движения спутника. Пусть скорость спутника рана v_0 , и запишем II закон Ньютона, законы сохранения момента импульса и энергии:

$$mv_0^2/(R+h) = \gamma m M / (R+h)^2; \quad (mv_0 - p)(R+h) = mvR;$$

$$\frac{(mv_0 - p)^2}{2m} - \gamma \frac{mM}{R+h} = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R}.$$

Из второго и третьего уравнений получаем

$$\frac{(mv_0 - p)^2}{2m} - \gamma \frac{mM}{R+h} = \frac{(mv_0 - p)^2}{2m} \left(\frac{R+h}{R} \right)^2 - \gamma \frac{mM}{R},$$

$$\left(1 - \frac{p}{mv_0} \right)^2 \frac{mv_0^2}{2} \left[\left(\frac{R+h}{2} \right)^2 - 1 \right] = \gamma \frac{mM}{R} \left(1 - \frac{R}{R+h} \right),$$

$$\left(1 - \frac{p}{mv_0} \right)^2 = \frac{2}{(R+h)/R+1} = \frac{2R}{2R+h} \simeq 1 - h/2R.$$

Откуда $p/mv_0 \simeq h/4R$ или $p = hm v_0 / 4R = (hm/4)(g/R)^{1/2}$.

Энергия лазера $W = p/\alpha \simeq 2 \cdot 10^8 \text{Дж.}$

2В. (Ципенюк.) $\Delta E = C_{\text{эл}} \Delta T \simeq (2kT/E_F)(3kT/2)$, $\bar{E} = 3E_F/5$,
 $\Delta E/E = 5(kT/E_F)^2 \simeq 1,3 \cdot 10^{-4}$.

3В. (Прут.) $Q = -\chi(T)(dT/dr)4\pi r^2$, $\chi(T)/\sqrt{T} = \chi_\infty/\sqrt{T_\infty}$,
 $-Q\sqrt{T_\infty}/(4\pi\chi_\infty)(dr/r^2) = \sqrt{T}dT$;

$$\frac{Q\sqrt{T_\infty}}{4\pi\chi_\infty}(1/r_0 - 1/R) = \frac{2}{3} \left(T_0^{3/2} - T_\infty^{3/2} \right),$$

при $R \gg r_0$ $Q \simeq \frac{8\pi}{3}\chi_\infty r_0 \left(T_0\sqrt{T_0/T_\infty} - T_\infty \right)$; $Q_{\text{изл}} = 4\pi r_0^2 \sigma T_0^4$,

$$Q = Q_{\text{изл}} \quad \text{при} \quad r_0 = \frac{2\chi_0}{3\sigma T_0^{5/2} T_\infty^{1/2}} [1 - (T_\infty/T_0)^{3/2}] = 0,153 \text{ см.}$$

4В. (Раевский.)

$$n^- n^+ = n_i^2 = \frac{(m^- m^+)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} (kT)^3 e^{-\Delta/kT}, \quad \Delta = 2mc^2, \quad m^- = m^+ = m_e$$

$$n^+ = n^- = 2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-mc^2/kT} \simeq 90 \text{ см}^{-3}$$

5В. (Ципенюк) Как и для электронной теплопроводности, для ${}^3\text{He}$ -атомов $\chi \simeq \rho Cv\lambda$. Так как ρ пропорциональна концентрации n в первой степени, атомная теплоемкость $C \simeq k(kT/E_F)$, длина свободного пробега определяется атомами гелия-4 и поэтому является константой, а $v_F^2 \propto E_F \propto n^{2/3}$, то мы имеем $\chi \propto n^{2/3}$ и поэтому
 $\chi(5)/\chi(1,25) = (5/1,25)^{2/3} = 4^{2/3} = \sqrt[3]{16} \simeq 2,5$, что хорошо согласуется с экспериментом.

Так как энергия K -электронов пропорциональна $(Z - 1)^2$, то для ядер с $Z \gg 1$

$$\frac{\Delta E}{E} \propto Z^2 R_{\text{я}}^2.$$

У неона $Z = 10$, $A = 20$, а у свинца $Z = 82$, $A = 208$. Таким образом,

$$\frac{\Delta E_{\text{Pb}}}{E_{\text{Pb}}} = \frac{\Delta E_{\text{Ne}}}{E_{\text{Ne}}} \frac{A_{\text{Pb}}^{2/3}}{A_{\text{Ne}}^{2/3}} \frac{Z_{\text{Pb}}^2}{Z_{\text{Ne}}^2} = 0,6 \cdot 10^{-6} \left(\frac{82}{10}\right)^2 \left(\frac{208}{20}\right)^{2/3} = 2 \cdot 10^{-4}.$$

5Б. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский). $\Delta\mu_{\text{He}} = (\mu_{\text{He}})_{\text{эксп}} - (\mu_{\text{He}})_{\text{теор}} = -0,22\mu_{\text{яБ}}$.

ГОС-2003. Вариант А

1А. (Ю.М. Ципенюк). $T^2 = \frac{4\pi^2 L^3}{\gamma M} \simeq 23 \cdot 10^{10} \text{ с}^2$, $T = 42,5 \text{ ч}$.

2А. (В.И. Плис). С учётом закона Ламберта поток от шара

$$d\Phi(\theta) = B \cos \theta dS \Delta\omega,$$

яркость источника $B = \sigma T^4 / \pi$, $dS = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ — элемент излучающей площадки, $\Delta\omega = A_{\text{апп}} / L^2$ — телесный угол, под которым головка видит аппарат площадью $A_{\text{апп}} = \pi R^2$. Плотность потока излучения на расстоянии L составляет:

$$j = \frac{\int d\Phi}{A_{\text{апп}}} = \frac{\Delta\omega}{A_{\text{апп}}} \int_0^{\pi/2} d\Phi(\theta) = \frac{\Delta\omega}{A_{\text{апп}}} \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 B \cos \theta \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{2\pi R^2 \sigma T_0^4}{\pi L^2} \int_0^{\pi/2} \cos^9 \theta d(-\cos \theta) = \frac{R^2 \sigma T_0^4}{5L^2}. \quad L_{\max} = RT_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{5j_{\min}}} = 150 \text{ км.}$$

3А. (А.П. Кирьянов). $d \geq \frac{\pi \hbar s}{2\mu_B B} = 0,5 \text{ мкм.}$

4А. (Ю.М. Ципенюк). $R_0 = (3,3 \pm 0,3) A^{-1/3} \simeq 1,06 \pm 0,1$.

5А. (Е.З. Мейлихов). При прохождении через трубу из-за разности оптических путей в центре и на оси плоский фронт волны искажается.

Отличие показателя преломления газа от единицы $\delta n = n - 1 = \text{const}/T$. Поэтому при разных температурах $\delta n_1/\delta n_0 = T_0/T_1$. Разность показателей преломления в нашем случае

$$\Delta n = \delta n_0 \frac{\Delta T}{T_0} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10}{300} = 10^{-5}.$$

Разность оптических путей в трубе для света, распространяющегося вдоль оси трубы и около стенок, равна $\Delta l_{\text{опт}} = \Delta n \cdot L_{\text{тр}} = \beta D/4$, где угол схождения периферийного и осевого лучей $\beta = D/2F$, а F – фокусное расстояние, которое тем самым равно

$$F = \frac{D^2}{8\Delta n L} = 12,5 \text{ см.}$$

ГОС-2003. Вариант Б

1Б. (Ю.М. Ципенюк). Так как $g_0 = \gamma M/R^2$, то на высоте h над поверхностью Земли

$$g = \frac{\gamma M}{(R+h)^2} \simeq g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right),$$

т. е. $\frac{dg}{dh} = -2 \frac{g_0}{R}$. Таким образом,

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) = g_0 (1 - 6,2 \cdot 10^{-5}), \quad \frac{\Delta g}{g_0} \simeq 6 \cdot 10^{-8}.$$

Как указано в условии, экспериментальная ошибка $\frac{\Delta g}{g} = 4 \cdot 10^{-9}$! Прибор чувствует эту неоднородность.

2Б. (Ю.М. Ципенюк). Так как $T > \Theta$, и, считая, что $\Delta T \ll T$, получаем

$$\Delta Q_{\text{обол}} = 3nkV_{\text{обол}}\Delta T = 3 \frac{N_A \rho}{A} k 4\pi R^2 d \Delta T = 2,9 \cdot 10^{12} \text{ эрг},$$

$$\Delta Q_{\text{изл}} = \frac{16\sigma T^3}{c} V_{\text{шар}} \Delta T = \frac{16\sigma T^3}{c} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Delta T = 1,3 \cdot 10^3 \text{ эрг},$$

то есть $\frac{\Delta Q_{\text{изл}}}{\Delta Q_{\text{обол}}} = 4,5 \cdot 10^{-10}$. Время остывания

$$\Delta t = \frac{\Delta Q_{\text{обол}}}{(1-r)\sigma T^4 4\pi R^2} = 1,8 \text{ с.}$$

3Б. (А.П. Кирьянов, А.О. Раевский)

$$\frac{\langle x_{0\text{ак}}^2 \rangle}{\langle x_{0\text{опт}}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{m}{M}} = \sqrt{\frac{16}{119}} = 0,37.$$

4Б. (А.О. Раевский). $\tau = b/v_{\text{grp}}$, где $b = L/n$ — геометрическая длина основания призмы, n — показатель преломления стекла.

$$v_{\text{grp}} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right),$$

λ — длина волны в веществе. Разрешающая сила призмы $R = b(dn/d\lambda_0)$, где $\lambda_0 = n\lambda$ — длина волны в вакууме. Логарифмируя и дифференцируя последнее равенство, получаем $\frac{d\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{dn}{n} + \frac{d\lambda}{\lambda}$, откуда

$$\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\lambda}{d\lambda} \frac{dn}{n} = \frac{\frac{dn}{n}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{\frac{dn}{n}}{\frac{d\lambda_0}{\lambda_0} - \frac{dn}{n}} = \frac{\frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0}}{1 - \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0}} = \frac{\frac{\lambda_0}{nb} b \frac{dn}{d\lambda_0}}{1 - \frac{\lambda_0}{nb} b \frac{dn}{d\lambda_0}} = \frac{\frac{\lambda_0 R}{L}}{1 - \frac{\lambda_0 R}{L}}.$$

Итак,

$$\tau = \frac{L}{c} \left(1 - \frac{\lambda_0 R}{L} \right) = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

5Б. (С.Ю. Савинов). Решение аналогично 5В. Так как разность хода между осевыми и периферийными лучами равна $L\chi I_0$, то число колец $N = 1 + L\chi I_0/\lambda = 3$ (центральный максимум учитывается как кольцо нулевого радиуса).

ГОС-2003. Вариант В

1В. (Ю.М. Ципенюк). По теореме Гаусса от слоёв льда ($\Delta\rho = \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}$)

$$\Delta g = 2\pi\gamma\Delta\rho h \simeq 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 10 \text{ мкГал.} \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{10^{-5}}{10^3} = 10^{-8}.$$

2В. (Э.В. Прут). Такой длинный волновод аналогичен одномерной цепочке, так как в закороченном волноводе (резонаторе) размером $a \times b \times l$

$$k_{mnp}^2 = \pi \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{l} \right)^2 \right],$$

где m, n, p — целые числа, то поперечные моды сильно разрежены в диапазоне длин волн 10 см, плотность мод определяется продольными модами. Резонансные частоты продольных мод находятся из условия $L = m\lambda/2$, число мод в интервале $\Delta\nu$ равно $2L/c$. Для 10 см длин волн

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \simeq 10^{-5} \text{ эВ} \ll kT = 0,05 \text{ эВ},$$

поэтому мы находимся в классической области и энергия одной моды будет kT . Плотность энергии (с учётом двух возможных поляризаций)

$$\frac{dW}{d\nu} = kT \cdot 2 \cdot \frac{2L}{c} = 5 \cdot 10^{-22} \frac{\text{эрг}}{\text{Гц}}.$$

3В. (Ю.М. Ципенюк). Из фото следует, что между дефектами имеется 6 интерференционных максимумов, что соответствует 6 полуволнам, и поэтому длина волны де Бройля фермиевских электронов порядка 14 Å, т. е. $k_F = 2\pi/\lambda \simeq 4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$. Так как $k_F = \sqrt{2\pi n}$, то

$$n = \frac{k_F^2}{2\pi} = 3,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}.$$

4В. (Ю.М. Ципенюк). $2d \sin \theta = n\lambda = \frac{nh}{p} = \frac{nht}{mL}$. Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\Delta\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\Delta t}{t} - \frac{\Delta L}{L}.$$

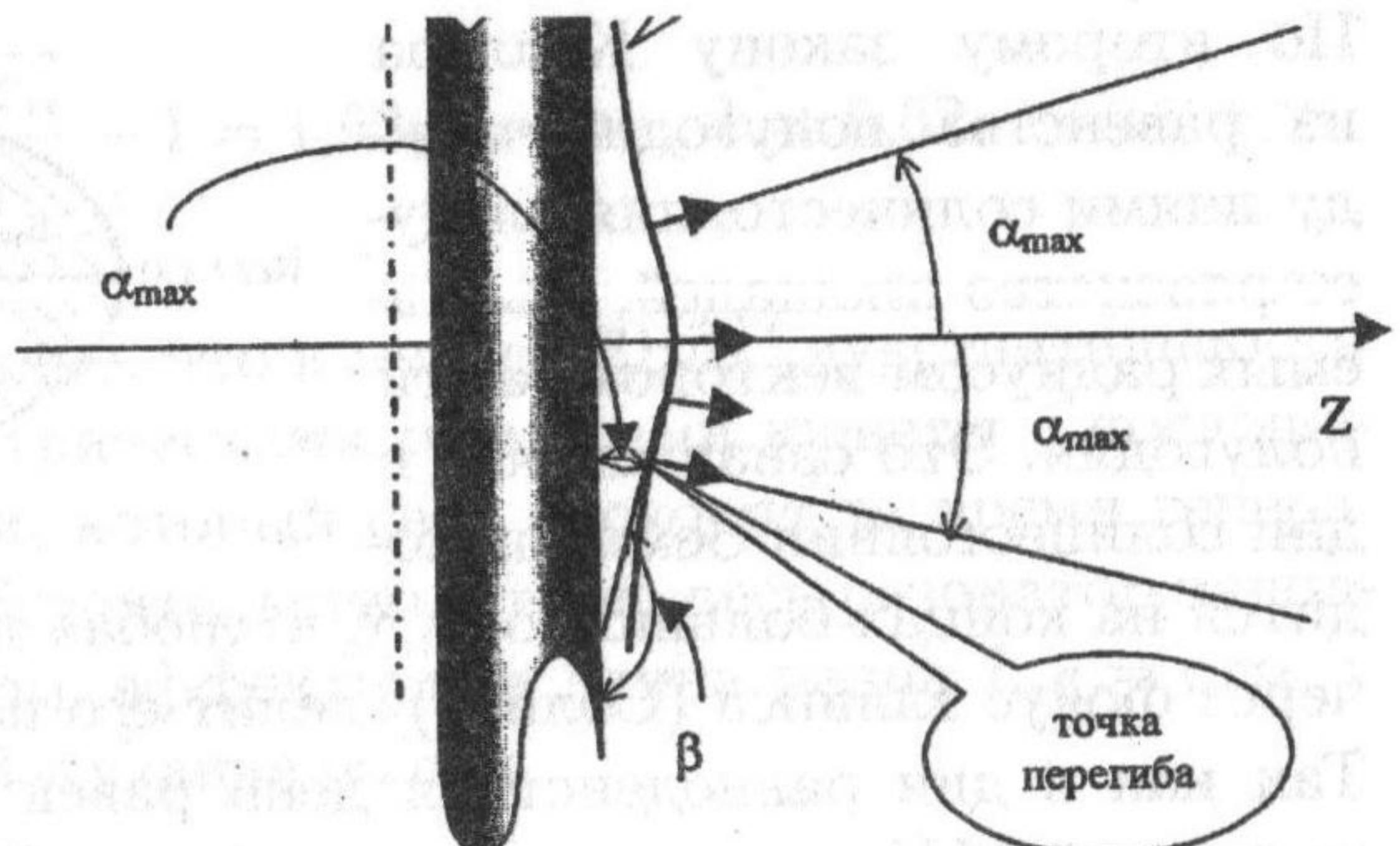
Тем самым относительная ошибка в определении межплоскостного расстояния равна (нужно сложить все дисперсии):

$$\delta \left(\frac{\Delta d}{d} \right) = \sqrt{\Delta\theta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{(\Delta t)^2}{t^2} + \frac{(\Delta L)^2}{L^2}} =$$

$$= \sqrt{0,33 \cdot 10^{-6} + \frac{(\Delta t)^2}{t^2} + 0,25 \cdot 10^{-6}} = 10^{-3}.$$

Отсюда следует, что время должно измеряться с относительной точностью не хуже $6,5 \cdot 10^{-4}$.

5В. (С.Ю. Савинов). Поскольку показатель преломления n зависит от интенсивности света, при чём чем больше интенсивность света, тем меньше n , то свет вблизи оси пучка пройдёт образец за меньшее время, чем свет на периферии пучка. В результате произойдёт искривление волнового фронта, и он из плоского станет выпуклым. Форма волнового фронта сразу за нелинейным образцом (по оси z):



$$z = L[n(\infty) - n(r)] = L\chi I_0 e^{-r^2/w^2}.$$

Угловая расходимость наблюдаемой картины определяется максимальным углом между нормалями к волновому фронту. В силу цилиндрической симметрии картины угол расходимости $\theta = 2\alpha$, где $\alpha = \pi - \beta$ (β — угол между касательной к волновому фронту и r , $\tan \beta = dz/dr$). Максимальный угол α_{\max} соответствует минимуму первой производной, т. е. точке перегиба кривой $z(r)$. Из условия $d^2z/dr^2 = 0$ следует, что $r_{\max} = w/\sqrt{2}$. Тем самым

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \pi - \arctg \left[\frac{dz}{dr} \Big|_{r=r_{\max}} \right] = \\ &= \pi - \arctg \left[-\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot \frac{L\chi I_0}{w} \right] = \arctg \left[\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot \frac{L\chi I_0}{w} \right]. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что угол β лежит во второй четверти, тогда как \arctg определён в диапазоне углов от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. $\theta = 2\alpha_{\max} = 0,2$ рад.

ГОС-2004. Вариант А

1А. (А.В. Гуденко, С.В. Гуденко). В дни солнцестояния проекция земной оси на плоскость орбиты параллельна радиусу-вектору, соединяющему Землю и Солнце, в дни равноденствия — перпендикулярна ему.

По второму закону Кеплера из равенства полугодий между днями солнцестояния следует равенство площадей, заметаемых радиусом-вектором за эти полугодия. Это означает, что в дни солнцестояния Земля находится на концах большой оси, т. к. любая другая прямая, проходящая через фокус эллипса (Солнце), делит его площадь на неравные части. Так как в дни равноденствия день равен ночи, то Земля находится на прямой MN , проходящей через фокус F перпендикулярно большой оси (см. рис.). По второму закону Кеплера прямая MN делит площадь орбиты на части в соотношении $S_s/S_w = T_s/T_w$. При небольшом эксцентриситете ε для расчёта площадей можно воспользоваться приближёнными формулами: $S_s \simeq \pi R^2 / 2 + 2FR$ и $S_w \simeq \pi R^2 / 2 - 2FR$, где R — среднее расстояние от Земли до Солнца, а F — фокусное расстояние эллипса. Подставляя эти выражения в уравнение для отношения площадей, получаем

$$\varepsilon = \frac{F}{R} = \frac{\pi(T_s - T_w)}{4(T_s + T_w)} = \frac{\pi \cdot 7}{4 \cdot 365} = 0,015.$$

Табличное значение $\varepsilon = 0,0167$.

2А. (С.В. Гуденко, Е.З. Мейлихов). Условие левитации:

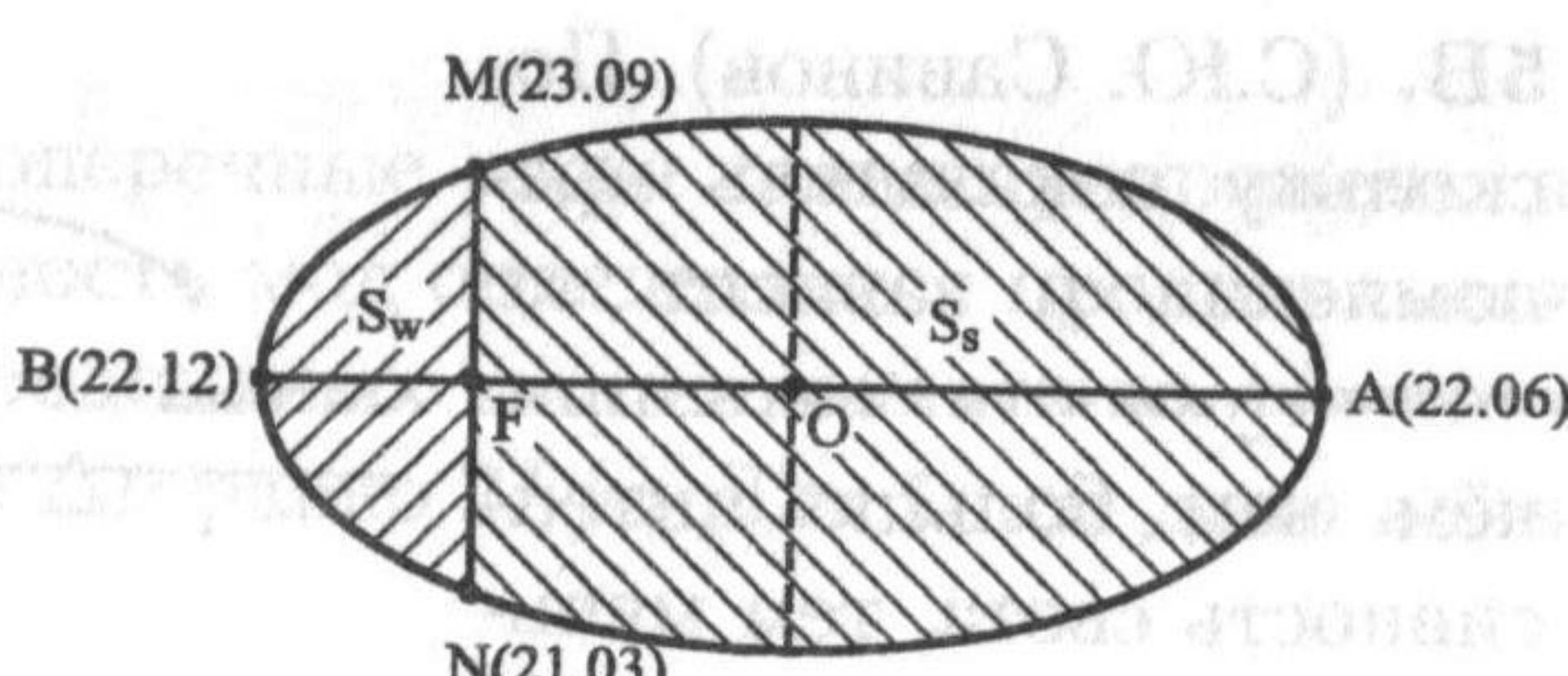
$$(1 + k^{-1})Mg = \langle p_\alpha \rangle \frac{dN}{dt}.$$

Здесь M — масса ториевого слоя, N — число ядер тория, k — искомое отношение, $\langle p_\alpha \rangle$ — средний импульс, получаемый системой в вертикальном направлении при испускании одной α -частицы. Число α -распадов в единицу времени

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{M \ln 2}{AT_{1/2}},$$

где $A = 226$ а.е.м. — масса атома тория. Пусть φ и θ — полярный и азимутальный углы, определяющие направление импульса α -частицы относительно нормали к поверхности слоя, а m_α — масса α -частицы. Тогда

$$\langle p_\alpha \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{p_\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{p_\alpha}{4} = \frac{\sqrt{2m_\alpha \varepsilon_\alpha}}{4}.$$



$$k^{-1} = \frac{\ln 2\sqrt{2m_\alpha \varepsilon_\alpha}}{4gAT_{1/2}} - 1 = 1,93, \quad \Rightarrow \quad k = 0,52.$$

3А. (С.Ю. Савинов). Очевидно, что в методе ВРЛС чувствительность будет определяться не геометрическими размерами кюветы с поглощающим газом, а длиной пути, который свет проходит за время генерации, т.е. ct . Учитывая то обстоятельство, что не весь резонатор заполнен поглощающим веществом, эффективная длина равна $L_{\text{eff}} = ct\alpha = 5,4 \cdot 10^9$ см (54 000 км!!!). Затухание волны

$$I(\omega_0, L) = I_0(\omega_0)e^{-\kappa L_{\text{eff}}} \simeq I_0(1 - \kappa L_{\text{eff}}), \quad \kappa = \frac{1}{L_{\text{eff}}} \frac{\Delta I}{I} \simeq 10^{-11} \text{ см}^{-1}.$$

4А. (Э.В. Прут). Вращению вокруг выделенной оси соответствует одна степень свободы, на которую приходится энергия $kT/2$. Отсюда угловая скорость частички $\omega = \sqrt{kT/I}$, где I — её момент инерции. Для сферической частички $I = \frac{2}{5}mr^2$ и $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \simeq 8 \cdot 10^{-15}$ г — масса пылинки. Момент импульса и магнитный момент равны

$$L = I\omega = \sqrt{IkT} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}\rho r^5 kT} \simeq 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ эрг}\cdot\text{с}.$$

$$\mu = \frac{Ze}{2mc}L = 1,2 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} = 0,24 \text{ яд. магнетона Бора.}$$

5А. (А.О. Раевский). $\frac{m_p^*}{m_0} \simeq 0,44$, $N_v \simeq 1,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

ГОС-2004. Вариант Б

1Б. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский). Если считать Землю шаром, то гравитационный потенциал на поверхности Земли $\varphi_1 = -\gamma M/R_3 = -v_1^2$, где v_1 — первая космическая скорость. На расстоянии r от центра Земли гравитационный потенциал $\varphi_2 = -\gamma M/r$. Поскольку энергия атомных уровней зависит от значения гравитационного потенциала, как $E \simeq E_0(1 + \varphi/c^2)$, то фотон, испущенный на спутнике, имеет частоту $\omega_2 \simeq \omega_0(1 + \varphi_2/c^2)$. Расстояние между энергетическими уровнями приёмника на Земле будет равно $\hbar\omega_1 \simeq \hbar\omega_0(1 + \varphi_1/c^2)$, и поэтому «эффективный» сдвиг частоты, обнаруженный приёмником на Земле (на самом деле частота фотона, распространяющегося в статическом

гравитационном поле, не меняется!), $\Delta\omega_{\text{гр}} = \omega_0(\varphi_2 - \varphi_1)/c^2 > 0$. К этому сдвигу нужно добавить сдвиг частоты из-за поперечного эффекта Доплера ($\omega = \omega_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$) или $\Delta\omega_{\text{д}} = \omega - \omega_0 \simeq -\omega_0 v^2/2c^2$, где $v = \sqrt{\gamma M/r}$ — скорость спутника. Суммарный сдвиг частоты обратиться в 0, если $\Delta\omega_{\text{гр}} + \Delta\omega_{\text{д}} = 0$, или

$$\frac{\omega_0}{c^2} \left(-\gamma \frac{M}{r} + \gamma \frac{M}{R_3} \right) - \frac{\omega_0}{2c^2} \gamma \frac{M}{r} = 0,$$

откуда $r = 1,5R_3 = 9,6 \cdot 10^3$ км, а высота $h = r - R_3 = 0,5R_3 = 3200$ км.

P.S. Скорость спутника на расстоянии r равна $v = \sqrt{2/3}v_1 = 6,5$ км/с и намного превосходит линейную скорость вращения на поверхности Земли $v_{\text{вр}} = 2\pi R_3/T \simeq 0,5$ км/с. Поэтому можно не учитывать относительное движение в эффекте Доплера и неинерциальность системы координат, связанной с Землёй. Действительно $\varphi_{\text{вр}} = v_{\text{вр}}^2/2 \ll v_1^2$.

Примечание. Гравитационное смещение частоты получается также, если формально считать, что у фотона есть гравитационная масса $m_{\Phi} = \hbar\omega/c^2$.

2Б. (А.О. Раевский). Поскольку отражение света от линзы отсутствует (просветление!), то сила возникает из-за преломления света в стекле: импульс фотона $p = \hbar\omega/c$ сохраняет свою величину (линза идеальная!), но меняет направление. Составляющая импульса вдоль оси линзы уменьшается и по закону сохранения импульса линза приобретает импульс

$$\Delta p = p(1 - \cos\theta) = 2p \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

В приближении параксиальной оптики

$$\Delta p \simeq p \frac{\theta^2}{2} = \frac{pr^2}{2F^2}.$$

На кольцо радиуса r и ширины dr в единицу времени падает $\frac{I}{\hbar\omega} 2\pi r dr$ фотонов, передающих импульс Δp . Таким образом, на кольцо действует сила

$$df = \Delta p \frac{I}{\hbar\omega} 2\pi r dr = 2\pi \frac{I}{\hbar\omega} \frac{\hbar\omega}{c} \frac{r^2}{2F^2} r dr = \pi \frac{I}{cF^2} r^3 dr.$$

$$f = \int_0^R df = \frac{\pi I R^4}{4cF^2} = \frac{3,14 \cdot 10^4 \cdot 10^7 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^2} = 0,42 \text{ дин} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

3Б. (В.А. Петухов). Если бы поверхность была зеркальной, то любой излучённый шариком фотон попадал бы обратно на шарик по чисто геометрическим причинам. В случае диффузного отражения от матовой поверхности это уже не так, и внутри полости устанавливается изотропное распределение излучения с некоторой объёмной плотностью энергии $\rho(T)$, которое по предположению однородно.

Рассмотрим энергетический баланс в системе. От Солнца в полость и затем на шарик попадает поток

$$\Phi_c = \frac{\pi d^2}{16} \alpha^2 \sigma T_c^4,$$

где угловой размер Солнца $\alpha = 0,01$, а его температура $T_c = 6000$ К.

При рассмотрении баланса энергии шарика надо учесть поступающий от Солнца поток энергии, излучаемый шариком поток энергии непосредственно в отверстие, и попадающее на шарик излучение, имеющееся в полости:

$$\Phi_c + 4\pi r^2 \frac{\rho c}{4} - 4\pi r^2 \sigma T^4 = 0.$$

Баланс энергии на отверстии записывается аналогично:

$$\Phi_c - \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho c}{4} - 4\pi r^2 \sigma T^4 \frac{\pi d^2 / 4}{4\pi R^2} = 0.$$

Решая эту систему, получим температуру шарика

$$T = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} T_c \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{d^2}{16r^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}}} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{2}} T_c \sqrt[4]{1 + \frac{d^2}{16r^2}} = 430 \text{ К.}$$

4Б. (А.О. Раевский). Согласно формуле Эйнштейна, красная граница фотоэффекта определяет работу выхода $A = hc/\lambda_0 = 4,63$ эВ. Работа выхода из металла — это энергия, которую необходимо сообщить электрону, находящемуся на уровне Ферми (на самом верхнем из заполненных уровней в зоне проводимости), чтобы перевести его из кристалла на бесконечность (уровень вакуума). Расстояние от дна зоны проводимости до уровня Ферми есть

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m_0 a^2} (12\pi^2)^{2/3} = 5,5 \text{ эВ.}$$

Для одновалентного металла с ГЦК решёткой концентрация электронов $n = 4/a^3$, поэтому окончательно $E_c = A + E_F = 10,13$ эВ.

5Б. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский).

$$n_s \simeq \frac{18\sqrt{3}}{2500\pi^2} \frac{1}{a_B^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{m^*}{m_0} \right)^2 \simeq 1,4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}.$$

ГОС-2004. Вариант В

1В. (В.А. Петухов). Если ω_0 — частота лазерного излучения в лабораторной системе отсчёта, то в системе отсчёта, в которой ионы неподвижны, $\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, v — скорость иона.

Энергия перехода из основного в первое возбуждённое состояние иона гелия равна $E_{12} = Z^2 Ry(1 - 1/4) = 3Ry$. Из условия $E_{12} = \hbar\omega'$ получаем

$$\beta = \frac{\left(\frac{E_{12}}{\hbar\omega_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{E_{12}}{\hbar\omega_0}\right)^2 + 1} = 0,97.$$

Частота излучения в лабораторной системе

$$\omega'' = \omega' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \omega_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{E_{12}}{\hbar\omega_0}\right)^2 \omega_0 = 66,6\omega_0,$$

а длина волны $\lambda'' = \lambda_0/66,6 = 3,7$ нм. Кинетическая энергия ионов

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = 4 \cdot 931(4,11 - 1) = 11600 \text{ (МэВ)} = 11,6 \text{ ГэВ.}$$

2В. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский). Поскольку вода практически несжимаема, то её восприимчивость под давлением не изменится, а восприимчивость кислорода станет равной $\chi(O_2) \cdot P_x/P_0$. Воспользуемся принципом суперпозиции: добавим и «вычтем» кислород в объёме капли. Тогда мы имеем однородный фон кислорода, на котором расположена капля с эффективной проницаемостью:

$$\chi_{\text{eff}} = \chi(H_2O) - \chi(O_2) \frac{P_x}{P_0}.$$

В неоднородном магнитном поле на каплю с такой проницаемостью (как на квазиупругий диполь $\mu = \chi_{\text{eff}} V B$) действует сила

$$F = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(-\chi_{\text{eff}} V \frac{B^2}{2} \right) = \left[\chi(\text{H}_2\text{O}) - \chi(\text{O}_2) \frac{P_x}{P_0} \right] V B \frac{dB}{dz}.$$

Баланс сил в поле тяжести в атмосфере кислорода даёт

$$\rho(\text{H}_2\text{O})gV - \rho(\text{O}_2)\frac{P_x}{P_0}gV = \left[\chi(\text{O}_2)\frac{P_x}{P_0} - \chi(\text{H}_2\text{O}) \right] VB \frac{dB}{dz},$$

$$\frac{P_x}{P_0} = \frac{\rho(\text{H}_2\text{O})g + \chi(\text{O}_2)B \frac{dB}{dz}}{\rho(\text{O}_2)g + \chi(\text{O}_2)B \frac{dB}{dz}} = \frac{1 \cdot 981 - 0,72 \cdot 10^{-6} \cdot 4,2 \cdot 10^8}{1,4 \cdot 10^{-3} \cdot 981 + 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 4,2 \cdot 10^8} \approx 10.$$

Давление кислорода должно превышать десять атмосфер.

3В. (А.О. Раевский, С.В. Гуденко, Ю.М. Ципенюк). Если бы в полости был один шарик, то никаких сил бы на него не действовало в силу симметрии задачи. Наличие второго шарика приводит к нарушению симметрии. Он «затеняет» часть падающего излучения и нарушает баланс сил, в результате получается как бы притяжение между шариками.

Задача сводится к вычислению потока излучения, который попадал бы на один шарик от второго, нагретого до температуры стенок полости. Так как $L \gg a$, то можно считать, что на шарик падает почти параллельный пучок равновесного излучения. В силу закона Ламберта излучение полусферы эквивалентно излучению диска того же радиуса по нормали к диску. Поверхностная яркость этого диска равна $\sigma T^4 / \pi$. Телесный угол, под которым виден второй шарик из центра первого, равен $\pi a^2 / L^2$.

Таким образом, сила, действующая на второй шарик, равна

$$F = \frac{\sigma T^4 \pi a^2}{\pi c} \frac{\pi a^2}{L^2} = \frac{\sigma T^4 \pi a^4}{c L^2} = \frac{5,67 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{12} \cdot 3,14}{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^4} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ дин.}$$

Формальное интегрирование потока излучения по сферическим поверхностям обоих шариков приводит к тому же результату.

Собственное излучение шариков в силу низкой температуры шариков не даёт вклада в величину силы. Естественно, если бы не было охлаждения шариков, то никакой силы не возникло бы.

4В. (С.Ю. Савинов). Время распространения импульса до самолёта $t = l/c = 300 \text{ мкс} \gg \tau$, т.е. расстояние определяется с точностью $\tau/t = 0,01$. Точность нахождения высоты полёта самолёта определяется

ширина фронта волны $\Delta x = D + 1,22\lambda L/D$. Для антенны с диаметром 4 м эта ширина $\Delta x = 3$ км, что намного меньше точности определения расстояния, равного 1 км. Минимальный размер ширины фронта равен $\Delta x_{\min} = \sqrt{1,22\lambda L} = 110$ м. Таков должен быть и размер антенны.

5В. (А.П. Канавин). Простая оценка:

$$C_{\text{реш}} \simeq Nk \left(\frac{T}{\Theta} \right), \quad C_{\text{эл}} \simeq Nk \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right) \Rightarrow \frac{C_{\text{реш}}}{C_{\text{эл}}} \simeq \frac{\varepsilon_F}{k\Theta}.$$

Поскольку $k\Theta \simeq \pi\hbar s/a$, а $\varepsilon_F \simeq \pi\hbar v_F/a$, то $\varepsilon_F/\Theta \simeq v_F/s$ и тем самым

$$\frac{C_{\text{реш}}}{C_{\text{эл}}} \simeq \frac{v_F}{s} = 100.$$

Более точный расчёт: Плотность состояний для трубы длиной L

$$g(\varepsilon) = \frac{2L}{\pi\hbar\sqrt{2m^*}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Вклад в теплоёмкость дают лишь электроны в слое шириной порядка kT , их число

$$\delta N = \int_{\varepsilon_F - kT}^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon \simeq g(\varepsilon_F) \cdot kT.$$

Энергия этих электронов и их теплоёмкость

$$E = \delta N \frac{kT}{2}, \quad C_{\text{эл}} = \frac{dE}{dT} = \frac{2Lk^2}{\pi\hbar v_F} T.$$

Решётчная теплоёмкость одномерного газа (только продольные фононы!) при температуре ниже температуры Дебая ($T \ll \Theta$) есть

$$C_{\text{реш}} = \frac{\pi L k^2 T}{3\hbar s}, \quad \frac{C_{\text{реш}}}{C_{\text{эл}}} = \frac{\pi^2 v_F}{6s} \simeq 150.$$

Вообще говоря, точное выражение для теплоёмкости имеет вид

$$C_{\text{эл}} = \frac{\pi^2}{3} g(\varepsilon_F) kT, \quad \Rightarrow \quad \frac{C_{\text{эл}}}{C_{\text{реш}}} = \frac{v_F}{2s} = 50.$$