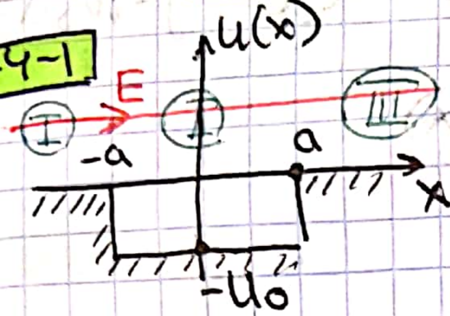
# Неделя 4. Уравнение Шредингера. Пот. барьеры. Туннельный эффект.

**0-4-1**




Дано: $U_0 = 2{,}5$ эВ, $a = r_Б$.

Найти: $E_{min}$: $r = 0$ — коэф-т отраж. от ям.

В I $U = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T = E$.

полная энергия част.

## Решение

① Стац. УШ: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (U(x) - E)\psi = 0$.

$$\psi''(x) + \frac{2m(E - U(x))}{\hbar^2}\psi = 0$$

I: $\psi'' + k_0^2\psi = 0$, $k_0^2 = 2mE/\hbar^2$

II: $\psi'' + k^2\psi = 0$, $k^2 = 2m(E + U_0)/\hbar^2$

III: $\psi'' + k_0^2\psi = 0$.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \underbrace{1 e^{ik_0x}}_{\text{прош.}} + \underbrace{\overset{0}{r} e^{-ik_0x}}_{\text{отраж}} = e^{ik_0x}, & x < a \\ \psi_2(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}, & -a < x < a \\ \psi_3(x) = d e^{ik_0x} \end{cases}$$

② Сшивка:

1). $$\begin{cases} \psi_1(-a) = \psi_2(-a) \\ \psi_1'(-a) = \psi_2'(-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-ik_0a} = c_1 e^{-ika} + c_2 e^{ika} & (1) \\ ik_0 e^{-ik_0a} = ik\left(c_1 e^{-ika} - c_2 e^{ika}\right) & (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)}$: $k_0 = k\,\frac{c_1 e^{-ika} - c_2 e^{ika}}{c_1 e^{-ika} + c_2 e^{ika}} \Rightarrow \boxed{k_0 = k \cdot \frac{c_1 - c_2 z^2}{c_1 + c_2 z^2}}$ (*)

$z = e^{ika}$

2) $\begin{cases} \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 e^{ika} + c_2 e^{-ika} = d e^{ik_0 a} & (3) \\ ik(c_1 e^{ika} - c_2 e^{-ika}) = ik_0 d e^{ik_0 a} & (4) \end{cases}$

$\frac{(4)}{(3)}: \boxed{k_0 = k \cdot \frac{c_1 z^2 - c_2}{c_1 z^2 + c_2}} \quad (**)$

③ (*) и (**)

$$\frac{c_1 - c_2 z^2}{c_1 + c_2 z^2} = \frac{c_1 z^2 - c_2}{c_1 z^2 + c_2}$$

$$\cancel{c_1^2 z^2} + c_1 c_2 - c_1 c_2 z^4 - \cancel{c_2^2 z^2} =$$

$$= \cancel{c_1^2 z^2} - c_1 c_2 + c_1 c_2 z^4 - \cancel{c_2^2 z^2}$$

$$2c_1 c_2 = 2c_1 c_2 z^4$$

$$z^4 = 1$$

$$e^{4ika} = e^{i \cdot 2\pi n} \Rightarrow 4ka = 2\pi n, \; n \in \mathbb{N}$$

$$k^2 = \left(\frac{\pi n}{2a}\right)^2$$

$$\frac{2m(E + U_0)}{\hbar^2} = \frac{\pi^2 n^2}{4a^2}$$

$$E + U_0 = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} n^2 - U_0$$

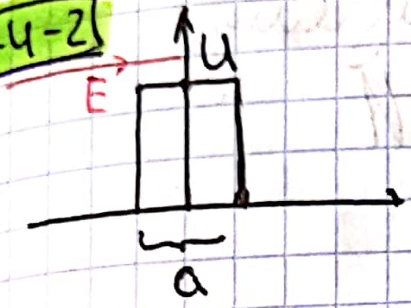
$$E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m_e r_Б^2} - U_0 = \frac{h^2}{32 m_e r_Б^2} - U_0 =$$

Сканировано с CamScanner

$$= \frac{(6{,}6\cdot10^{-34})^2}{32\cdot9\cdot10^{-31}\cdot(0{,}5\cdot10^{-10})^2}\,\text{Дж}\cdot\underbrace{\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}}_{\text{в эВ}} - 2{,}5\ \text{эВ} =$$

$$= 37{,}8 - 2{,}5\ \text{эВ} \sim 35\ \text{эВ} //$$

**0-4-2**




Дано: $E = 3$ эВ, $U_1 = 5$ эВ, $a = 3$ Å

$D_2/D_1 = 0{,}1$.

$U_2$ — ?

Решение

① Коэф-т прозрачности для прямоуг. барьера

$$D = \frac{j_{III}}{j_{I}} = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,a}$$

плотность потока вероятности упавш. частицы

прошедш. частицы

$D$ — вероятность пройти ч/з барьер за 1 удар.

② Чтобы вер-ть прох. ч/з барьер упала в 10 раз

$$\frac{D_2}{D_1} = \cancel{\ \ } = \frac{1}{10} = e^{-\frac{2a}{\hbar}\left(\sqrt{2m(U_2-E)}-\sqrt{2m(U_1-E)}\right)}$$

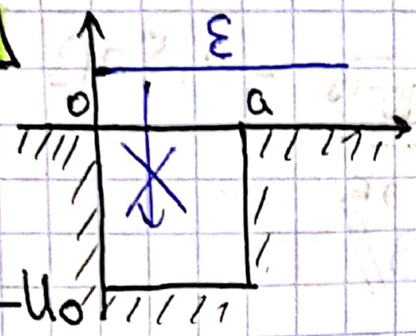
$$\ln 10 = \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m}\left(\sqrt{U_2-E}-\sqrt{U_1-E}\right)$$

$$U_2 = \left(\frac{\hbar\ln 10}{2a\sqrt{2m}} + \sqrt{U_1-E}\right)^2 + E =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1{,}054\cdot10^{-34}\cdot\ln 10}{2\cdot3\cdot10^{-10}\sqrt{2\cdot9\cdot10^{-31}}}}_{\sqrt{\text{Дж}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1{,}6\cdot10^{-19}}}\ \sqrt{\text{эВ}} + \sqrt{5-3}\right)^2 + 3 = 7{,}7\ \text{эВ}$$

$\Rightarrow U_2/U_1 \approx 1{,}5$ //.

**3.27**




Дано: $a = 4\,\text{Å}$, $U_0 = 10$ эВ

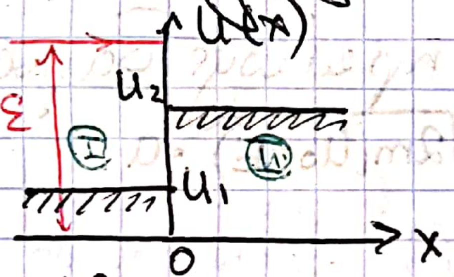
$E = 10^{-2}$ эВ

Найти: $\tau$ – ?

// $\tau$ огранич. вылетом эл-на из ямы, а не переходом в осн. сост //

Решение

① ∀ ситуацию надбарьерного прохождения найдем коэф. прозрачности такого барьера:




УШ $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (U-E)\psi = 0 \Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar}(E-U)\psi = 0$

I: $\psi'' + k_1^2\psi = 0$, $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-U_1)}}{\hbar}$

II: $\psi'' + k_2^2\psi = 0$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_2)}}{\hbar}$

$$\begin{cases} \psi_1 = \underbrace{1\cdot e^{ik_1x}}_{\text{пад.}} + \underbrace{r e^{-ik_1x}}_{\text{отр.}} \\ \psi_2 = \underbrace{d e^{ik_2x}}_{\text{прош.}} \end{cases}$$

Сшивка

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r = d & (1) \\ ik_1(1-r) = ik_2 d & (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow k_2 = \frac{1-r}{1+r} k_1$

$k_2 + k_2 r = k_1 - k_1 r$

$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$

$d = 1 - r = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$.

• коэф. прохождения $D$ (вер-ть пройти н/д барьер/удар)

$D = \frac{j_{прош}}{j_{пад}}$ — плот. потока вер-ти прош волн, — плотность потока вер. пад. волн

по def $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi \vec{\nabla}\psi^* - \psi^* \vec{\nabla}\psi)$

$j_{пад} = \frac{i\hbar}{2m}(e^{ik_1x}\cdot(-ik_1)e^{-ik_1x} - e^{-ik_1x}\cdot ik_1 e^{ik_1x}) =$

пад. волна $1\cdot e^{ik_1x}$

$(e^{ik_1x})^* = e^{-ik_1x}$

ск-ть част.

$= \frac{i\hbar}{2m}\cdot(-2ik_1) = \frac{\hbar k_1}{m} = v$

$j_{прош} = \frac{i\hbar}{2m}(de^{ik_2x}\cdot d(-ik_2)e^{-ik_2x} - de^{-ik_2x}\cdot d(ik_2)e^{+ik_2x}) =$

$= \frac{i\hbar}{2m}\cdot(-2i)d^2k_2 = d^2\,\hbar k_2/m$.

Rem можно было сказать, что для свобод. част.

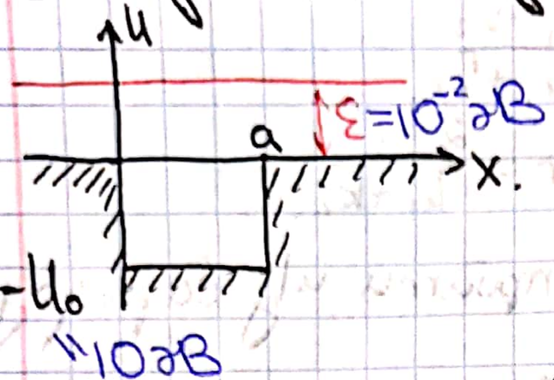
$j = \hbar k/m = v$ (подст. $\psi = Ae^{i/\hbar(\bar{p}\bar{r} - Et)}$ — волна де Бройля)

$D = d^2\frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1^2}{(k_1+k_2)^2}\cdot\frac{k_2}{k_1} = \boxed{\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = D}$

вероятность пройти барьер/удар

Сканировано с CamScanner

② Вернемся к задаче




В данном случае ситуация аналог. ①, т.к. эл-н над барьером с $U_1=-U_0,\ U_2=0$.

Тогда $k_1=\dfrac{\sqrt{2m(\varepsilon+U_0)}}{\hbar}$, $k_2=\dfrac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}$

$$D=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}=\frac{4\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+U_0)}}{\left(\sqrt{\varepsilon+U_0}+\sqrt{\varepsilon}\right)^2}\approx 4\frac{\sqrt{\varepsilon U_0}}{U_0}$$

$U_0 \gg \varepsilon$

$$D\approx 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{U_0}}.$$

③ Время жизни возб. сост.

- $D$ – вер-ть покинуть яму за 1 удар о стенки.
- $1-D$ – вер-ть остаться в яме за 1 удар
- Скорость эл-на в яме:

$$T=\varepsilon+U_0=\frac{mV^2}{2}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{2(\varepsilon+U_0)}{m}}\approx\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

- $\Rightarrow$ Частота ударов о барьер

бегает туда/обратно в [0,a] $\Rightarrow$

$$n=\frac{V}{a}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

• За время $\tau$ произойдет $n\tau$ ударов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ верть остаться в связ. сост. за $\tau$

$(1-D)^{n\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$

• Характ. время жизни: $\tau$, за кот. верть остаться уменьшится в $e$ раз

$$\frac{(1-D)^{n\tau}}{(1-D)^{0\tau}} = \frac{1}{e}$$

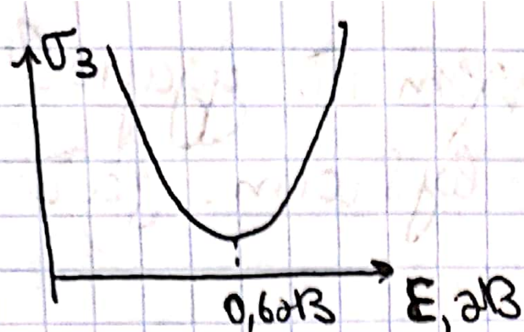
$n\tau \ln(1-D) = -\ln e$, $D \ll 1$

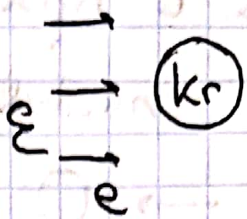
$$\boxed{n\tau D = 1}$$

• $$\tau = \frac{1}{nD} = \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}\cdot 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{U_0}}} = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} =$$

$$= \frac{4\cdot 10^{-10}\,м}{4}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 10^{-31}\,кг}{2\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,Дж}} \sim 10^{-5}\,с$$

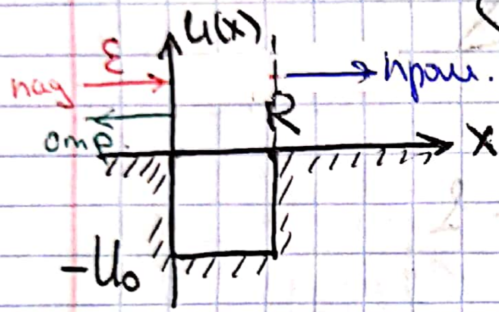
**3.33**




$U_0 = 2,5$ эВ
$\varepsilon = 0,6$ эВ
$R - ?$

• Сечение рассеяния ($\sigma_з$) характ. вер-ть отражения эл-в от одномер. пот. ямы (атома Kr) размера $R$ − радиус атома Kr.




• Из зад. 0-4-1

при $\varepsilon_{min} = \dfrac{h^2}{32 m R^2} - U_0$

амплитуда отраж. волны $r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_з \downarrow\downarrow$.

Отсюда $(\varepsilon + U_0)\cdot\dfrac{32m}{h^2} = \dfrac{1}{R^2}$

$$R = \frac{h}{4\sqrt{2m(\varepsilon + U_0)}} \approx \frac{6,6\cdot10^{-34}\,Дж}{4\sqrt{2\cdot 9\cdot10^{-31}\,кг\cdot 3,1\cdot 1,6\cdot10^{-19}\,Дж}} \approx$$

$\approx 2\,Å$ //.

Сканировано с CamScanner

**3.40** Дано: $^2_1 d$

$R_1 = 2\cdot10^{-13}$ см

$R_2 = 5\cdot10^{-9}$ см

$T = 300$ K

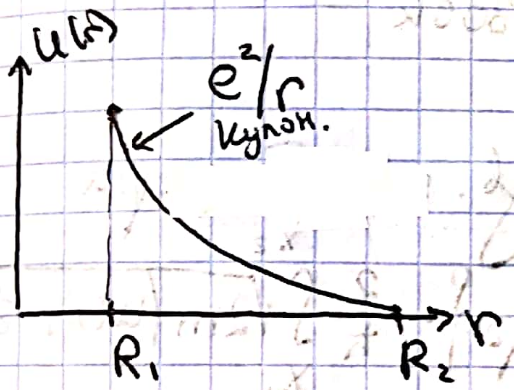
Найти: $D$ - ?

## Решение

① $(d)\rightarrow \ \leftarrow(d)$ перейдем от задачи 2 тел и задаче 1 тела

$\Rightarrow$ движ. частицы с прив. массой $\mu = m_d/2$ в описанном пот. барьере:

②

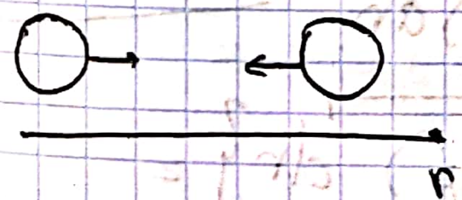



реакция

Т.о. частица масс $\mu$ налетает на пот. барьер с $U(x) = e^2/r$, $r \in [R_1, R_2]$

Надо найти вер-ть прох ч/з барьер (т.к. при прох. ч/з барьер нач. реакция) $\rightarrow D$ - ?

③ Кин энергия частицы (прив)




Важна ск-ть движ. вдоль r

$$\frac{m_d V^2}{\cancel{2}} = \frac{kT}{\cancel{2}} \leftarrow \text{на 1 ст. свободы.}$$

$V_{отн} = 2V$ - относ. ск-ть движ. частиц

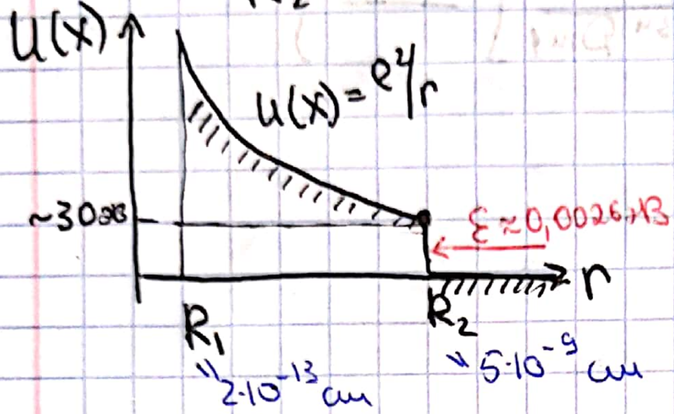
$\Rightarrow$ кин. энергия прив. частицы

$$\varepsilon = \frac{\mu V_{отн}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_d}{2}\cdot 4\cdot\frac{kT}{m_d} = kT = 1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{Дж}{К}\cdot 300\,К\cdot\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}\,\frac{эВ}{Дж} = 0{,}026\ эВ.$$

④ $\dfrac{e^2}{R_2} = \dfrac{(4{,}8\cdot10^{-10})^2}{5\cdot10^{-9}\ \text{см}}\ \text{эрг} \cdot \dfrac{10^{-7}\ \text{Дж}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ \text{эВ} \approx 30\ \text{эВ}$

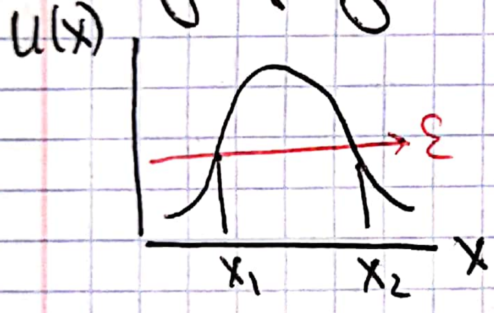
$\Rightarrow \dfrac{e^2}{R_2} \gg \varepsilon.$

// Исп. СГСЭ, чтобы не думать про $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ //




подбарьерное прохождение (тунн. эфф-т)

⑤ Вероятность прохождения частицы ч/з произв. барьер




$$\boxed{D \approx \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-\varepsilon)}\,dx\right\}}$$

Тогда

$$D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{R_1}^{R_2}\sqrt{2\mu\left(\frac{e^2}{r}-\underset{\to 0}{\varepsilon}\right)}\,dr\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\sqrt{2\mu}\cdot e}{\hbar}\int_{R_1}^{R_2} r^{-1/2}\,dr\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2e\sqrt{2\mu}}{\hbar}\cdot 2\left(\sqrt{R_2}-\underset{\to 0}{\sqrt{R_1}}\right)\right\} =$$

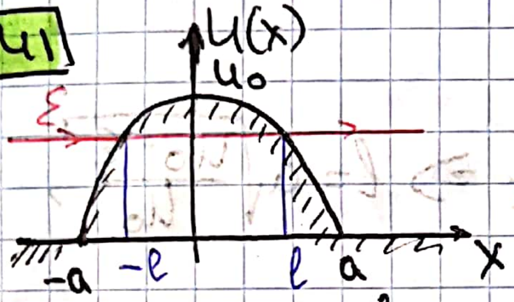
$$= \exp\left\{-\frac{4e}{\hbar}\sqrt{2\mu R_2}\right\} = \exp\left\{-\frac{4\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10}}{1{,}054\cdot 10^{-27}}\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}\cdot 5\cdot 10^{-9}}\right\}$$


$\mu = m_d/2 = m_p = 1{,}67\cdot 10^{-24}$ г

$m_p \approx m_n$

$D \approx e^{-235} \approx 10^{-102}$ //.

**3.41**




$$U(x) = \begin{cases} U_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}, \quad \varepsilon$$

$\varepsilon$ — энергия выб. ядра

$D$ - ?

1) $$D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{-l}^{l}\sqrt{2m\left(U_0 - U_0\frac{x^2}{a^2} - \varepsilon\right)}\,dx\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}}{\hbar}\int_{-l}^{l}\sqrt{1-\frac{U_0}{(U_0-\varepsilon)a^2}x^2}\,dx\right\} =$$

$c>0$.

$$\int\sqrt{1-c^2x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} y=cx \\ dy=c\,dx\end{matrix}\right| = \int\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{dy}{c} =$$

$$= \frac{1}{c}\int\sqrt{1-y^2}\,dy = \left|\begin{matrix} u=\sqrt{1-y^2} & dv=dy \\ du=\frac{-2y\,dy}{2\sqrt{1-y^2}} & v=y\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{c}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{c}\int\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \left|\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2-1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{c}y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{c}\int\sqrt{1-y^2}\,dy + \frac{1}{c}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{1}{c}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{c}\arcsin y - \frac{1}{c}\int\sqrt{1-y^2}\,dy =$$

$$= x\sqrt{1-c^2x^2} + \frac{1}{c}\arcsin cx - \int\sqrt{1-c^2x^2}\,dx$$

$$\int\sqrt{1-c^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-c^2x^2} + \frac{1}{c}\arcsin cx\right) + \tilde{C}.$$

2) $I = \int_{-l}^{l} \sqrt{1-c^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-c^2x^2}+\frac{1}{c}\arcsin(cx)\right)\Big|_{-l}^{l} =$

$= \frac{1}{2}\left(l\sqrt{1-c^2l^2}+\frac{1}{c}\arcsin(cl) - (-l)\sqrt{1-c^2l^2}-\frac{1}{c}\arcsin(-cl)\right) =$

$= l\sqrt{1-c^2l^2} + \frac{1}{c}\arcsin(cl)$

3) $c^2 = \frac{U_0}{(U_0-\varepsilon)a^2}$

Из графика $\varepsilon = U_0\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)$

$$\frac{U_0}{U_0-\varepsilon} = \frac{U_0}{U_0\left(1-1+\frac{l^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{l^2} \Rightarrow l = a\sqrt{\frac{U_0-\varepsilon}{U_0}},$$

$$c^2 = \frac{a^2/l^2}{a^2} = \frac{1}{l^2} \Rightarrow cl = 1$$

4) Тогда

$$I = l\arcsin 1 = a\sqrt{\frac{U_0-\varepsilon}{U_0}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

5) $D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}\cdot a\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{\frac{U_0-\varepsilon}{U_0}}\right\} =$

$= \exp\left\{-\frac{\pi a\sqrt{2m}\,(U_0-\varepsilon)}{\hbar\sqrt{U_0}}\right\}$ //

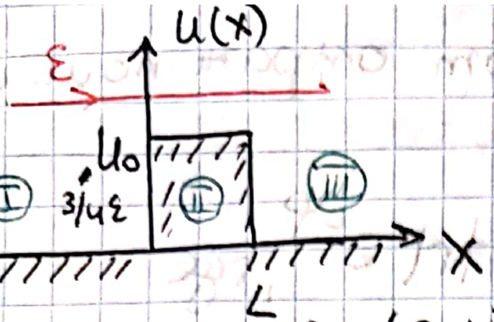
6) Выразим $D$ ч/з „квант" $\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{-U''}{m}}$ – собств. кривизна барьера

$$U' = U_0\left(-\frac{2x}{a^2}\right),\quad U'' = -\frac{2U_0}{a^2} \Rightarrow \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}}$$

$$D = \exp\left\{-\pi(U_0-\varepsilon)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{ma^2}}{\hbar\sqrt{U_0}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-2\pi\,\frac{U_0-\varepsilon}{\hbar\omega}\right\} //$$

**3.45**




$U_0 = 3\varepsilon/4$, $R = 9/25$.

$L_{min}$ – ?

① СУШ $\psi'' + \frac{2m(\varepsilon - U)}{\hbar^2}\psi = 0$.

I. $\psi'' + k_0^2\psi = 0$, $k_0 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}$

II: $\psi'' + k^2\psi = 0$, $k = \frac{\sqrt{2m(\varepsilon - U_0)}}{\hbar}$,

III: $\psi'' + k_0^2\psi = 0$.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = 1 \cdot e^{ik_0x} + re^{-ik_0x}, & x \in \mathrm{I} \\ \psi_2(x) = c_1e^{ikx} + c_2e^{-ikx}, & x \in \mathrm{II} \\ \psi_3(x) = de^{ik_0x}, & x \in \mathrm{III} \end{cases}$$

② Заметим, что всё это время мы опис. поведение частицы волнами де Бройля

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar p\bar r - Et)} = \psi_0 e^{i(\bar k\bar r - \omega t)}$$

(в стац. случае $\psi = \psi_0 e^{i\bar k\bar r}$), т.е. $\bar k$ – волн. вектор.

Как известно, абс. пок-ль преломления

$$n \sim k \Rightarrow \frac{n}{n_0} = \frac{k}{k_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon - U_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{1}} = \frac{1}{2}$$

⇒ II – менее плот. среда (чем I) ⇒

⇒ при отражении от нее фаза не мен.

• Что это даёт?

$$\psi_1 = \underbrace{1e^{ik_0x}}_{\text{пад. волна}} + \overbrace{re^{-ik_0x}}^{\text{отр. волна}}.$$

В общем случае $r = |r|e^{i\varphi}$, где $\varphi$ – разность фаз м/у отраж. и пад. волнами

получим $\varphi = 0 \Rightarrow r = |r|$

• Коэф-т отражения

$$R = \left|\frac{j_{отр}}{j_{пад}}\right| = \left|\frac{re^{-ik_0x}\cdot r(+ik_0)e^{ik_0x} - re^{ik_0x}(-ik_0)re^{-ik_0x}}{e^{ik_0x}(-ik_0)e^{-ik_0x} - e^{-ik_0x}ik_0e^{ik_0x}}\right| =$$

$$j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$= |-r^2| \Rightarrow |r| = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Тогда $r = 3/5$, т.е. $\psi_1 = e^{ik_0x} + 3/5\, e^{-ik_0x}$

③ Сшивка:

1) $\begin{cases}\psi_1(0) = \psi_2(0)\\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 + r = c_1 + c_2\\ (1-r)k_0 = k(c_1 - c_2)\end{cases}$

$$\begin{cases}c_1 + c_2 = 8/5\\ c_1 - c_2 = \dfrac{(1-r)k_0}{k} = \dfrac{2}{5}\cdot 2 = \dfrac{4}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1 = 6/5\\ c_2 = 2/5.\end{cases}$$

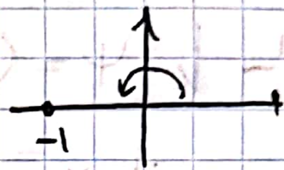
7) $\begin{cases} \Psi_2(L) = \Psi_3(L) \\ \Psi_2'(L) = \Psi_3'(L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 e^{ikL} + c_2 e^{-ikL} = d e^{ik_0 L} & (1) \\ ik(c_1 e^{ikL} - c_2 e^{-ikL}) = d\, ik_0 e^{ik_0 L} & (2) \end{cases}$

$z = e^{ikL}$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad k_0 = k \cdot \frac{c_1 z^2 - c_2}{c_1 z^2 + c_2}$$

$$2 \cdot (6z^2 + 2) = 6z^2 - 2.$$

$$6z^2 = -6$$




$$z^2 = -1$$

$$e^{2ikL} = e^{i(\pi + 2\pi n)}, \; n \in \mathbb{N}$$

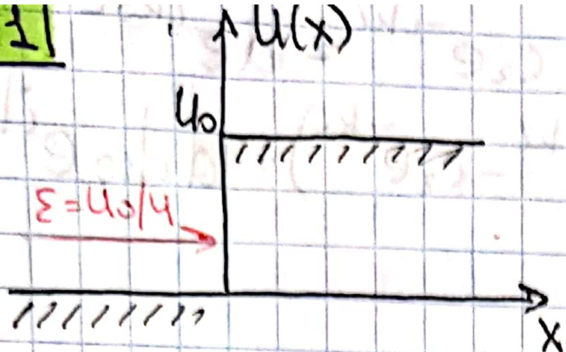
$$kL = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$L_{min} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{4} //.$$

$\lambda$ – длина волны де Бройля внутри барьера

$\lambda = 2\pi / k$

|П1|




Дано: $\varepsilon = U_0/4$.

$x_{min}$: $\rho \to min$

$x_{max}$: $\rho \to max$.

① СУШ $\quad \psi'' + \frac{2m(\varepsilon - U(x))}{\hbar^2}\psi = 0.$

I. $\psi'' + k_1^2\psi = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}$

II $\psi'' - k_2^2\psi = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0-\varepsilon)}{\hbar^2}}$

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = de^{-k_2x} + \underbrace{f}_{=0}e^{k_2x}$$

$f = 0$. ← нет эксп. ↑↑ за барьером.

② Сшивка

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + r = d & (1) \\ ik_1(1-r) = -k_2 d & (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)}$: $k_2 = -ik_1 \cdot \frac{1-r}{1+r}$

$$k_2 + k_2 r = -ik_1 + ik_1 r$$

$$r = \frac{k_2 + ik_1}{ik_1 - k_2} = -\frac{(k_2+ik_1)^2}{(k_2-ik_1)(k_2+ik_1)} =$$

$$= \frac{k_1^2 - k_2^2 - 2k_1k_2 i}{k_1^2 + k_2^2} = |r|e^{i\varphi}$$

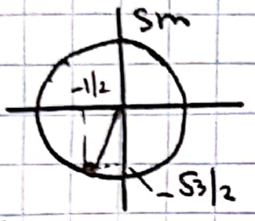
$\varphi$ — сдвиг фаз волн пад. и отр. волн.

$$|r| = \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\sqrt{(k_1^2-k_2^2) + 4k_1^2k_2^2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2} + \left(-\frac{2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2}\right)i$$

$$\cos\varphi = \frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2} = \frac{\varepsilon-(U_0-\varepsilon)}{\varepsilon+U_0-\varepsilon} = \frac{2\overset{U_0/4}{\varepsilon}-U_0}{U_0} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = -2\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon(U_0-\varepsilon)}}{\varepsilon+U_0-\varepsilon} = -2\cdot\frac{\sqrt{\frac{3}{4}\cancel{U_0}\cdot\frac{1}{4}\cancel{U_0}}}{\cancel{U_0}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$




$\boxed{\varphi = \frac{4\pi}{3}}$ – разность фаз м/у прох. и отр. волн.

③ Волны когер. ⇒ м/у ними (пад. и отр.) в $x<0$ наблюдается „интерференция" (черед. max/min $|\psi|^2 \sim E^2$

$\rho(x)$ – плотность распр. вер-ти ← аналог. I для опт.)

$$\rho(x) \overset{def}{=} |\psi|^2 = |e^{ik_1x} + e^{i\varphi}e^{-ik_1x}|^2 =$$

в $x<0$

$$= |\cos k_1x + \cos(\varphi - k_1x) + i(\sin k_1x + \sin(\varphi - k_1x))|^2 =$$

$$= (\cos k_1x + \cos(\varphi - k_1x))^2 + (\sin k_1x + \sin(\varphi - k_1x))^2 =$$

$$= 2 + 2\cos k_1x\cos(\varphi - k_1x) + 2\sin k_1x\cdot\sin(\varphi - k_1x) =$$

$$= 2 + 2\cos(2k_1x - \varphi)$$

④ $g(x) = 2(1+\cos(2kx-\varphi))$. ⊕ cos

$g_{max}$: $\cos(2kx-\varphi) = 1$.

$2kx_{max} - \varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$2kx_{max} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $x_{max} < 0$.

$n = 1$

$2kx_{max} = -\frac{2\pi}{3}$

$x_{max} = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{k} = -\frac{\lambda}{6}$ //.

$k = 2\pi/\lambda$ – длина волны д.б.

$g_{min}$: $\cos(2kx-\varphi) = -1$

$2kx_{min} - \varphi = \pi + 2\pi n$

$2kx_{min} = \frac{7\pi}{3} + 2\pi n < 0$.

$2kx_{min} = -\frac{5\pi}{3}$

$x_{min} = -\frac{5\pi}{6k} = -\frac{5\lambda}{12}$ //.

$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$

Сканировано с CamScanner