ГОС-2007. Вариант А

1А. Старые айсберги иногда опрокидываются, поворачиваясь на $90°$. Оценить, через какое время айсберг в форме параллелепипеда с начальными размерами $L \times L \times H = 3 \times 3 \times 2$ км^3, потеряет устойчивость. При таянии размеры айсберга меняются, но он всегда сохраняет форму параллелепипеда. Считать, что айсберг обменивается теплом только с водой океана, а вода, образовавшаяся в результате таяния, быстро удаляется. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг, скорость теплообмена считать пропорциональной разности температур воды и льда $\Delta T = 5$ К с коэффициентом пропорциональности $\alpha = 250$ Вт/(м^2·К).

2А. Над сверхпроводящей плоскостью параллельно ей на расстоянии $h = 40$ см находится сверхпроводящий длинный провод диаметром $d = 2$ см, по которому течёт ток $I = 2$ А. Провод находится под напряжением $V = 1$ кВ относительно плоскости. Вычислить силу взаимодействия единицы длины провода с плоскостью. Силой тяжести пренебречь.

3А. Параллельный монохроматический пучок света проходит через диафрагму, а затем фокусируется линзой. Во сколько раз увеличится напряжённость поля электромагнитной волны в фокальной плоскости линзы, если площадь диафрагмы увеличить вдвое?

4А. Найти максимальную мощность тепловой машины, у которой нагреватель — пластина площадью $S = 1$ м^2, одна из её поверхностей зеркальная, а другая полностью поглощающая. Холодильником служит корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_х = 300$ К. Солнце считать абсолютно чёрным телом с $T_C = 6000$ К и угловым диаметром $\alpha = 0{,}01$ рад. Теплопроводность рабочего тела считать очень большой.
Указание. уравнение для нахождения оптимальной температуры решать методом подбора.

5А. В металлах основной вклад в энергию связи, т.е. в работу, которую надо совершить для превращения кристалла в совокупность невзаимодействующих атомов, даёт понижение средней энергии электронов по сравнению с таковой в свободном атоме. Используя данные по теплотам плавления и парообразования металлической меди $\lambda = 13$ кДж/моль и $r = 302$ кДж/моль, найти положение дна зоны проводимости, если её ширина $\Delta E = 14$ эВ, а энергия ионизации $4s$-электрона меди $W = 7{,}7$ эВ. Электроны в металле считать свободными.

ГОС-2007. Вариант Б

1Б. В течение своей «жизни» айсберг несколько раз опрокидывается, поворачиваясь на $90°$. Для моделирования этого процесса был проделан следующий опыт: тающий брусок льда в форме параллелепипеда размером $a \times b \times h = 10 \times 10 \times 8$ см^3 опускался в ванну с водой при температуре $t_0 = 20$ °C. В процессе таяния такой «айсберг», оставаясь параллелепипедом, изменялся в размерах, и через $\tau_0 = 20$ мин опрокинулся. Оцените на основе этого опыта время опрокидывания реального айсберга с размерами $500 \times 500 \times 300$ м^3 в океане с температурой воды $t = 5$ °C. Считать, что теплоподвод происходит только по воде и скорость таяния пропорциональна разности температур льда и воды.

2Б. Тонкая серебряная трубка с толщиной стенки $h = 0{,}1$ мм помещена в однородное высокочастотное ($f = 1{,}5$ ГГц) поле СВЧ-печки с амплитудой $H_0 = 10$ Э. Ось трубки направлена вдоль линий магнитного поля. Оценить время, через которое температура трубки достигнет температуры плавления серебра $t_{пл} = 961$ °C. Удельное сопротивление серебра $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ом·см и его удельную теплоёмкость $C = 0{,}235$ Дж/(г·К) считать независящими от температуры. Плотность серебра $\rho_{Ag} = 10{,}5$ г/см^3.

3Б. Монохроматический источник света заданной частоты движется равномерно по нормали к дифракционной решётке длиной $L = 5$ см и периодом $a = 10^{-3}$ см. Какую минимальную нерелятивистскую скорость источника можно обнаружить, наблюдая дифракцию первого порядка?

4Б. Найти максимальную мощность тепловой машины, у которой нагревателем является корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_н = 300$ К, а холодильником — полностью поглощающая пластина площадью $S = 1$ м^2. Теплопроводность рабочего тела считать большой.

5Б. В металлах основной вклад в энергию связи, т.е. в работу, которую надо совершить для превращения кристалла в совокупность невзаимодействующих атомов, даёт понижение средней энергии электронов по сравнению с таковой в свободном атоме. Для металлического калия эта величина составляет $E_{св} = 0{,}941$ эВ, а энергия $4s$-электрона в свободном атоме калия $E_{4s} = -4{,}34$ эВ. Найти положение дна зоны проводимости в металлическом калии. Калий кристаллизуется в объёмноцентрированную кубическую решётку с периодом $a = 5{,}22$ Å. Закон дисперсии электронов считать квадратичным с эффективной массой, равной массе свободного электрона.

ГОС-2007. Вариант В

1В. Экспериментально установлено, что период колебаний маятника в шахте глубиной $h = 500$ м на $\delta = 0{,}0025\%$ меньше, чем у поверхности Земли. Оценить на основе этих данных среднюю плотность земной коры в пятисотметровом слое, считая Землю шаром с плотностью, зависящей только от расстояния до центра. Средняя плотность Земли $\rho_0 = 5{,}6$ г/см^3.

2В. Оценить, какой радиус должна иметь звезда с массой, равной массе Солнца $M = 2{\cdot}10^{33}$ г и магнитным полем на поверхности $B = 5$ кТл, чтобы на экваторе звезды могла происходить ионизация атома водорода межзвёздного газа, падающего из бесконечности. Считать, что ионизация атома происходит, когда вершина возникающего для электрона потенциального барьера сравнивается с энергией основного состояния.

3В. На непоглощающий поляризатор падает смесь естественного и линейно-поляризованного света общей интенсивностью I_0. Вектор поляризации света параллелен оси поляризатора. Интенсивность света после поляризатора равна $3I_0/4$. Каково отношение интенсивностей в падающем свете?

4В. Источником питания находящегося на околоземной орбите спутника является ядерный реактор мощностью $P = 3$ кВт. Оценить на каком максимальном расстоянии от спутника можно обнаружить наличие реактора с помощью γ-телескопа. Считать, что сигнал надёжно регистрируется, если он вдвое превышает γ-фон неба $\Phi_0 = 10^{-2}$ см$^{-2}{\cdot}$с$^{-1}$. В каждом акте деления в среднем испускается $k = 7$ γ-квантов, защита реактора поглощает α=95% образующегося излучения. Считать, что угловое разрешение телескопа равно угловому диаметру спутника.

5В. Длина волны характеристического излучения в газообразном натрии (переход $3s - 2p$) составляет $\lambda = 485$ Å. Оценить относительное уширение $\Delta\lambda/\lambda$ этой линии в металлическом натрии. Натрий кристаллизуется в объёмноцентрированную кубическую решётку с постоянной $a = 4{,}23$ Å. Закон дисперсии электронов считать квадратичным с эффективной массой, равной массе свободного электрона. Образованием зоны из $2p$-состояния атома натрия пренебречь.

ГОС-2007. Вариант А

1А. (А.В. Гуденко, А.А. Лукьянов). Айсберг теряет устойчивость, когда один из его поперечных размеров станет меньше высоты. Пусть x — толщина растаявшего льда на каждой грани. Из условия потери устойчивости айсберга $L - 2x = H - x$ следует, что $x = 1$ км.

Для скорости движения плоской границы таяния имеем уравнение

$$\rho_{\text{л}}\lambda S\frac{dx}{dt} = \alpha\Delta T S,$$

откуда получаем

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\Delta T}{\rho_{\text{л}}\lambda} = 4{,}2{\cdot}10^{-6}\ \text{м/с} = 130\ \text{м/год}.$$

Для оценки времени, через которое произойдёт потеря устойчивости, тогда получаем $t = x/v = 7{,}7$ лет.

2А. (Ю.М. Ципенюк). Взаимодействие провода с плоскостью эквивалентно взаимодействию провода со своим изображением — кулоновскому притяжению разноимённых зарядов и магнитному отталкиванию антипараллельных токов. Пусть q — заряд единицы длины провода. Тогда сила Кулона на единицу длины $F_{\text{кул}} = q^2/h$, а магнитная сила Ампера $F_{\text{магн}} = I^2/hc^2$. Заряд единицы длины находим из выражения для разности потенциалов между проводом и плоскостью $V \simeq 2q\ln\frac{4h}{d}$. Суммарная сила взаимодействия равна

$$F_{\text{сум}} = \frac{1}{h}\left[\frac{V^2}{4(\ln\frac{4h}{d})^2} - \frac{I^2}{c^2}\right] \simeq \frac{0{,}14 - 0{,}04}{40} = 2{,}5{\cdot}10^{-3}\ \text{дн/см}.$$

Таким образом, провод притягивается к плоскости.

3А. (Ю.М. Ципенюк). Размер фокального пятна определяется дифракцией света на диафрагме и равен $F\lambda/d$. Пусть вначале поток был равен W_0, а затем при увеличении площади диафрагмы вдвое он также увеличился вдвое и стал $2W_0$. Отношение интенсивностей полей равно

$$\frac{E_2^2}{E_1^2} = \frac{2W_0/(F\lambda/d_2)^2}{W_0/(F\lambda/d_1)^2} = 2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 2\cdot 2 = 4.$$

4А. (С.В. Гуденко). Для получения максимальной мощности, очевидно, что пластину необходимо повернуть поглощающей стороной к Солнцу. Тогда для количества тепла, передаваемого в единицу времени тепловой машине от нагревателя, можно записать:

$$Q_{\text{н}} = W - \sigma S T_{\text{н}}^4, \qquad \text{где} \qquad W = \frac{\sigma S T_C^4 \pi D_C^2}{4\pi R_{\text{орб}}^2} = \sigma S T_{\text{C}}^4\frac{\alpha^2}{4}$$

— количество тепла, приходящее (и полностью поглощаемое пластиной) в единицу времени от Солнца. Максимальную мощность тепловой машины

$$N = Q_{\text{н}}\left(1-\frac{T_x}{T_{\text{н}}}\right) = \sigma S\left[T_C^4\frac{\alpha^2}{4}-T_{\text{н}}^4\right]\left(1-\frac{T_x}{T_{\text{н}}}\right)$$

можно получить, определив температуру $T_{\text{н}}$, соответствующую максимуму N. Уравнение $dN/dT=0$ легко преобразуется к виду:

$$T_{\text{н}}^4\left[T_{\text{н}}-\frac{3}{4}T_x\right] = \frac{1}{16}\alpha^2 T_x T_C^4.$$

После подстановки чисел имеем: $T_{\text{н}}^4(T_{\text{н}}-225) = 300^5$, откуда $T_{\text{н}} \simeq 364$ К и $N_{\max} \simeq 148$ Вт.

5А. (А.О. Раевский). Энергия связи в расчёте на атом

$$E_{\text{св}} = \frac{\lambda + r}{N_{\text{А}}} = \frac{315{\cdot}10^3}{6{\cdot}10^{23}\cdot 1{,}6{\cdot}10^{-19}} = 3{,}26 \text{ эВ}.$$

Считая, что энергия связи обусловлена исключительно изменением энергии электронов, мы получаем, что энергия связи на один электрон составляет 3,26 эВ. Поскольку для элементов первой группы зона проводимости заполнена наполовину, то энергия Ферми, отсчитываемая от дна зоны, составляет в меди $E_{\text{F}} = \Delta E/2 = 7$ эВ. Средняя энергия на один электрон в модели свободных электронов составляет $\frac{3}{5}E_{\text{F}}$. Разница между энергией электрона в атоме и уровнем средней энергии электрона в зоне проводимости как раз и равна энергии связи. Таким образом, дно зоны проводимости расположено на глубине $E_c = W + E_{\text{св}} + \frac{3}{5}E_{\text{F}} = 7{,}7 + 3{,}26 + 4{,}2 = 15{,}16$ эВ от уровня вакуума.

ГОС-2007. Вариант Б

1Б. (А.В. Гуденко). Айсберг теряет устойчивость, превращаясь в кубик за счёт того, что поперечные размеры изменяются примерно в два раза быстрее вертикального. Для оценки толщины слоя растаявшего льда решаем уравнение $a-2x = h-x$, откуда для модельного айсберга $x = 2$ см. Аналогично, для реального айсберга толщина растаявшего льда будет равна $X = 200$ м. Поскольку градиент температур в океане в $t_0/t = 4$ раз меньше, получаем, что реальный айсберг перевернется через время $\tau = \tau_0(4X/x) \simeq 1{,}5$ года.

2Б. (А.В. Гуденко). Из-за скин-эффекта поле и ток затухают вглубь материала с характерной длиной

$$l_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho}{f}} = \frac{3{\cdot}10^{10}}{6{,}28}\sqrt{\frac{1{,}6{\cdot}10^{-6}}{1{,}5{\cdot}10^9\cdot 9{\cdot}10^{11}}} = 0{,}0016 \text{ мм} \ll h.$$

Для оценки будем считать распределения полей и токов на характерной длине (скиновой длине) однородными. Плотность индукционного тока $j(t)$ связана с полем на поверхности цилиндра $H(t) = H_0\sin\omega t$ соотношением $H(t) = 4\pi j(t) l_{\text{ск}}/c$, поскольку индукционные токи экранируют внутренность материала от проникновения внешнего переменного поля. Здесь $j(t)l_{\text{ск}}$ играет роль плотности поверхностного тока на единицу длины соленоида в силу условия $l_{\text{ск}} \ll h$. Мгновенная плотность джоулевых потерь в материале $p = (\vec{j},\vec{E}) = \rho j^2$, а полная мощность

$$P = \rho j^2 2\pi R l_{\text{ск}} L = \frac{2\pi\rho R l_{\text{ск}} L c^2 H_0^2 \sin^2\omega t}{16\pi^2 l_{\text{ск}}^2} = \frac{\rho R L c^2 H_0^2}{8\pi l_{\text{ск}}}\sin^2\omega t.$$

Средняя за период мощность составит

$$\bar{P} = \frac{\rho R L c^2 H_0^2}{16\pi l_{\text{ск}}}.$$

Скорость нагрева находим из уравнения

$$mC\frac{dT}{dt} = \bar{P} \qquad \text{или} \qquad 2\pi R h L \rho_{\text{Ag}} C\frac{dT}{dt} = \frac{\rho R L c^2 H_0^2}{16\pi l_{\text{ск}}},$$

откуда

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\rho c^2 H_0^2}{32\pi^2 h \rho_{\text{Ag}} C l_{\text{ск}}} = 13\ \frac{\text{К}}{\text{с}}.$$

Нагрев от комнатной температуры до температуры плавления займёт $(961-21)/4 = 72$ с.

Строго говоря, надо учитывать, что выделяющаяся мощность соответствует однородному распределению по толщине $l/2$ из-за квадратичной зависимости от экспоненциально затухающего тока. Это приведёт к тому, что скорость нагрева уменьшится в два раза, а время нагрева увеличится в два раза.

3Б. (Ю.М. Ципенюк). Из-за эффекта Доплера частота падающего света $\nu = \nu_0(1+v/c)$, а длина волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{\lambda_0}{1+v/c} \simeq \lambda_0(1-v/c),$$

т.е. $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 v/c$. Разрешение дифракционной решётки в первом порядке

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = N = \frac{L}{a}.$$

Таким образом должно быть $\Delta\lambda \leqslant \delta\lambda$ или

$$\frac{\lambda_0 a}{L} \leqslant \frac{v}{c}, \qquad\qquad v/c \geqslant a/L = 2\cdot 10^{-4}.$$

4Б. (С.В. Гуденко). Для получения максимальной мощности, очевидно, надо расположить пластину-холодильник параллельно солнечным лучам, так чтобы поток солнечной энергии на неё был минимальным (в идеале — отсутствовал). Тогда для количества тепла, передаваемого в единицу времени от рабочего тела тепловой машины пластине-холодильнику, можно записать:

$$Q = 2\sigma S T^4.$$

Максимальную мощность тепловой машины

$$N = Q\left(\frac{T}{T_x} - 1\right) = 2\sigma S T^4 \left(\frac{T}{T} - 1\right)$$

можно получить, вычислив температуру T, соответствующую максимуму N. Уравнение $dN/dT = 0$ даёт $T = 3T/4 = 225$ К и

$$N_{\max} = 2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 225^4 (4/3 - 1) = 97\,.$$

5Б. (А.О. Раевский). Аналогично 5А, можно написать: $\mathrm{E_c} = |E_{4s}| + \mathrm{E} + (3/5)\varepsilon_{\mathrm{F}}$. Для одновалентного металла с ОЦК-решёткой плотность электронов $n = 2/a^3$. В случае калия получаем $n = 1{,}4 \cdot 10^{22}\,\text{см}^{-3}$, а $\varepsilon_{\mathrm{F}} = 2{,}12$ эВ. Поэтому $E_{\mathrm{c}} = 4{,}34 + 0{,}941 + 1{,}27 = 6{,}55$ эВ от уровня вакуума.

ГОС-2007. Вариант В

1В. (А.В. Гуденко). На поверхности Земли ускорение свободного падения $g_0 = \gamma M/R^2 = 4\pi\gamma R\rho_0/3$. В шахте

$$g = \frac{\gamma(M - \Delta M)}{(R-h)^2} = \frac{\gamma(M - 4\pi R^2 h\rho)}{(R-h)^2} = g_0 \frac{1 - 3\frac{\rho}{\rho_0}\frac{h}{R}}{(1 - h/R)^2} \simeq$$

$$\simeq g_0 \left(1 - 3\frac{\rho}{\rho_0}\frac{h}{R}\right)\left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Учитывая, что

$$\delta = -\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2g_0} = \frac{h}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

получаем

$$\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \left(1 - \delta\frac{R}{h}\right) = 0{,}453\rho_0 = 2{,}54\,/^3.$$

2В. (Ю.В. Петров). Падающий из бесконечности на звезду атом водорода имеет у поверхности скорость $v = \sqrt{2\gamma M/R}$, где R — радиус звезды, а γ — гравитационная постоянная. В системе покоя атома возникает электрическое поле $\mathbf{E} = [\mathbf{v},\mathbf{B}]/c$. На экваторе звезды, где $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, $E = vB/c$. Следовательно, электрон атома водорода, как это обычно предполагается, находится в одномерном потенциале $U(x) = -e^2/x - eEx$, который представляет собой потенциальный барьер для электрона. Если вершина потенциального барьера $U_{\max} = -2e\sqrt{eE}$ окажется ниже энергии основного состояния электрона $E = -\mathrm{Ry} = -13{,}6$ эВ, то электрон получает возможность беспрепятственно уйти на бесконечность. Условие ионизации есть

$$E \geqslant \frac{\mathrm{Ry}^2}{4e^3} = \frac{e}{16r^2}\,,$$

где мы учли, что $Ry = e^2/2r$. Таким образом

$$\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}\,\frac{B}{c} \geqslant \frac{e}{16r^2}\,.$$

Окончательно

$$R \leqslant 512\frac{\gamma M}{c^2}\left(\frac{Br^2}{e}\right)^2 \simeq 6500\,.$$

3В. (Ю.М. Ципенюк). Пусть в падающем пучке интенсивность поляризованного света составляет долю α, а тем самым естественного равна $1-\alpha$. Поляризованный свет проходит полностью, а интенсивность естественного света уменьшается в два раза. Таким образом мы приходим к соотношению

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)I_0 + \alpha I_0 = \frac{3}{4}I_0\,,$$

откуда получаем, что $\alpha = 1/2$.

4В. (Ю.М. Ципенюк). Поскольку в одном акте деления выделяется $W \simeq 200$ МэВ, то при работе реактора число вылетающих в одну секунду гамма-квантов равно $N = (1-\alpha)kP/W = 3{,}3 \cdot 10^{13}$. Поток на детекторе, находящемся на расстоянии L, равен $j = N/(4\pi L^2)$ и он должен превышать $2\Phi_0$. Поэтому обнаружить реактор можно с расстояний, меньших

$$L_{\max} = \sqrt{\frac{(1-\alpha)N}{8\pi\Phi_0}} \leqslant 110$$

.

5В. (А.О. Раевский). Характеристическое излучение возникает при выбивании электрона из состояния $2p$ с последующим переходом в это состояние электрона из состояния $3s$. При образовании кристалла уровни $3s$ атомов натрия расщепляется в зону проводимости, заполненную ровно наполовину. При этом максимально заполненный уровень в зоне проводимости (уровень Ферми), практически совпадает с положением уровня $3s$ изолированного атома. Уширение линии характеристического излучения происходит из-за того, что теперь на уровень $2p$ может перейти любой электрон из зоны проводимости. Т.о.

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \varepsilon_{\mathrm{F}}\,,$$

откуда, считая $\Delta\lambda \ll \lambda$ получаем, что $\Delta\lambda/\lambda \simeq \lambda\varepsilon_{\mathrm{F}}/hc$. Так как $\varepsilon_{\mathrm{F}} = \hbar^2(3\pi^2 n)^{2/3}/2m_0$, а в ОЦК-решётке $n = 2/a^3 = 2{\cdot}10^{24}/(4{,}23)^3 = 2{,}65{\cdot}10^{22}$ (см$^{-3}$), то

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-54}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28}}(3 \cdot 9{,}87 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{22})^{2/3} = 5{,}17 \cdot 10^{-12}\,() = 3{,}23\,().$$

Окончательно

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{485 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}17 \cdot 10^{-12}}{6{,}62 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}} = 0{,}126,$$

P.S. Условие $hc/\lambda = E(3s) - E(2p) = 25 \gg \varepsilon_{\mathrm{F}}$ выполняется.