МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа биологической и медицинской физики

Лабораторная работа 1.3
Изучение рассеяния медленных электронов на атомах (эффект Рамзауэра)

Авторы:
Ирина Веретененко
Б06-804

Долгопрудный 2020

1 Введение

Цели работы:

- исследовать энергетическую зависимость вероятности рассеяния электронов атомами ксенона;
- определить энергию электронов, при которых наблюдается "просветление"ксенона;
- оценить размер внешней электронной оболочки ксенона.

В работе используются: титратрон ТГЗ-01/1.3Б, заполненный инертным газом, блок источников питания, электронный осциллограф С1-83, вольтметры В7-22А (В7-58)

1.1 Теория

- Вероятность $dw(\vec{r}, t)$ обнаружить частицу в какой-то области пространства dV в момент времени t описывается в квантовой физике квадратом модуля комплекснозначной волновой функции $\Psi(\vec{r}, t)$
$$dw(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$
- Волновая функция частицы в общем случае является решением нестационарного уравнения Шредингера
$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t))}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r}, t), \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}, t)\text{- Гамильтонан}$$
$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\vec{r})$$
где $\psi(\vec{r})$ - не зависящая от времени волновая функция стационарного состояния (состояния с определённой энергией E), описываемого стационарным уравнением Шредингера
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\vec{r})\psi = E\psi$$
Далее рассматриваем стационарные состояния.
- Требования к волновой функции:
  - непрерывность
  - гладкость
  - однозначность
  - конечность
  - нормировка $\int \psi^*\psi dV = 1$
- Введем понятие вектора плотности потока вероятности.
Вероятность, что за секунду частица покинет объем V
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V |\psi|^2 dV = \int_V (\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t})dV =$$
С учетом уравнения Шредингера
$$= \int \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*)dV = \int \frac{i\hbar}{2m} div(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi)dV$$
Тогда $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi)$ - плотность потока вероятности (откуда записывается уравнение непрерывности $\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + div\vec{j} = 0$)
Для свободной частицы, описываемой волной де-Бройля $\psi = Ce^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}|\psi|^2 = \vec{v}$, где $= \frac{dw}{dV}$ - плотность вероятности обнаружить частицу, $\vec{v}$ - ее скорость

- Рассмотрим задачу о частице с энергией E, налетающей из $-\infty$ на одномерную потенциальную яму глубиной U_0 и шириной l (такой моделью описывают, например, электроны, налетающие на атом радиуса l)

$$U(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ -U_{0,}0<x<l \\ 0, x>l \end{cases}$$

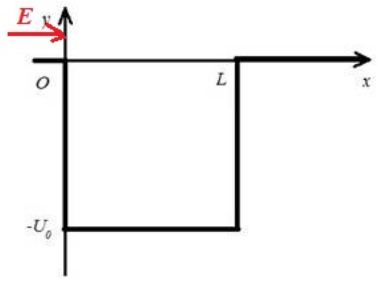

Рис. 1: Вид одномерной потенциальной ямы конечной глубины

Одномерное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+(U-E)\psi=0$$

Пусть $k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$, $k_2^2=\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}$. Тогда

$$\begin{cases} \psi''+k_1^2\psi=0, x<0 \\ \psi''+k_2^2\psi=0, 0<x<l \\ \psi''+k_1^2\psi=0, x>l \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1=e^{ik_1x}+re^{-ik_1x}, x<0 \\ \psi_2=C_1e^{ik_2x}+C_2e^{-ik_2x}, 0<x<l \\ \psi_3=de^{ik_1x}, x>l \end{cases}$$

r играет роль коэффицента отражения по амплитуде, d - коэффициента прохождения волны через барьер по амлитуде (это комлексные числа).
Сшивка: воспользуемся требованиями непрерывности и гладкости при $x=0$ и $x=l$:

$$\begin{cases} 1+r=C_1+C_2 \\ k_1(1-r)=k_2\left(C_1-C_2\right) \\ C_1e^{ik_2l}+C_2e^{-ik_2l}=de^{ik_1l} \\ k_2\left(C_1e^{ik_2l}-C_2e^{-ik_2l}\right)=k_1de^{ik_1l} \end{cases}$$

Из системы путем алгебраических преобразований можно получить:

$$d=\frac{4k_1k_2e^{-ik_1l}}{\left(k_1+k_2\right)^2e^{-ik_2l}-\left(k_1-k_2\right)^2e^{ik_2l}}$$

Коэффициент прозрачности ямы - это отношение потоков вероятности прошедшей и падающей волн (соотв. частицам). Именно его, а не амплитудный коэффициент прохождения, можно измерить в эксперименте. Пользуясь определением плотности потока вероятности получим:

$$D=\frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}}=\frac{\frac{i\hbar}{2m}(\psi_3(\psi_3^*)'-\psi_3^*(\psi_3)')}{\frac{i\hbar}{2m}\psi(\psi_1^*)'-\psi_1^*(\psi_1)')}=|d|^2=dd^*=$$

$$= \frac{16k_1^2k_2^2}{(k_1+k_2)^4 + (k_1-k_2)^4 - (k_1+k_2)^2(k_1-k_2)^2\left(e^{2ik_2l}+e^{-2ik_2l}\right)}$$

После арифметических преобразований и использования формулы косинуса двойного угла получим:

$$\boxed{D = \frac{16k_1^2k_2^2}{16k_1^2k_2^2 + 4\left(k_1^2-k_2^2\right)^2\sin^2(k_2l)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)^2\sin^2(k_2l)}} \qquad (1)$$

- Эффект Рамзауэра - изменение эффективного сечения рассеяния электрона на атомах при различных энергиях электронов. Если рассматривать атом как одномерную потенциальную яму конечной глубины, то данный эффект объясняется изменением коэффициента прозрачности в зависимости от энергии налетающего электрона согласно формуле (1)
  В данной работе будем изучать зависимость D(E) для нахождения радиуса атома и глубины потенциальной ямы согласно (1)

1.2 Экспериментальная установка и методика измерения

- В данной работе для изучения эффекта Рамзауэра используется тиратрон ТГЗ-01/1.3Б, заполненный инертным газом (рис. 2)
  Электроны, эмитируемые катодом тиратрона, ускоряются напряжением V, приложенным между катодом и ближайшей к нему сеткой. Затем электроны рассеиваются на атомах инертного газа. Все сетки 1, 2, 3 соединены между собой и имеют одинаковый потенциал, примерно равный потенциалу анода 6. Поэтому между первой сеткой 1 и анодом практически нет поля. Рассеянные электроны отклоняются в сторону и уходят на сетку, а оставшаяся часть электронов достигает анода и создаёт анодный ток I_a

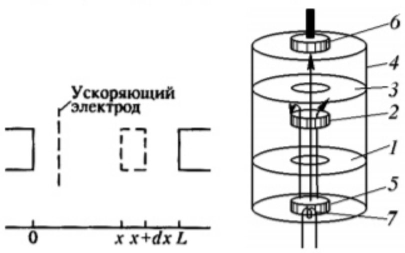

Рис. 6. Схема тиратрона (слева) и его конструкция (справа): 1, 2, 3 — сетки, 4 — внешний металлический цилиндр, 5 — катод, 6 — анод, 7 — накаливаемая спираль

Рис. 2: Тиратрон

Таким образом, поток электронов $N(x)$ на расстоянии x от ускоряющейся сетки (т.е. число электронов, проходящих через поперечное сечение лампы в точке x в единицу времени) уменьшается с ростом x от начального значения N_0 у катода (в точке $x = 0$) до некоторого значения N_a у анода (в точке $x = L$).

- Реальная ВАХ тиратрона.
  Выделим в газе на расстоянии x тонкий слой с площадью поперечного сечения S и толщиной dx. Этот слой содержит $\nu = n_aSdx$ атомов газа (n_a- концентрация атомов газа в лампе). Суммарная рассеивающая поверхность этих атомов $\Delta = \nu\Delta_a$, где Δ_a- площадь поперечного сечения атома.
  Пусть dN убыль потока электронов в результате прохождения слоя dx; тогда $dN/N(x)$ есть доля электронов, которые рассеялись, или вероятность рассеяния в слое.

Для рассеяния электрона в слое необходимо выполнение двух независимых событий - электрон должен 'наткнуться' в слое на атом, и, кроме того, он должен на этом атоме рассеяться. Следовательно, вероятность $dN/N(x)$ рассеяния электрона в слое равна произведению двух вероятностей вероятности для электрона в слое dx встретить атом газа (она равна $\Delta/S-$ доли площади поперечного сечения слоя, перекрываемого атомами) и вероятности рассеяния на атоме $w(V)$:

$$-\frac{dN}{N(x)} = \frac{\Delta}{S} w(V) = n_a \Delta_a w(V) dx$$

Интегрируя это соотношение от 0 до L и заменяя поток электронов на ток $I = Ne$, получаем уравнение ВАХ:

$$I_a = I_0 e^{-Cw(V)}, \quad C = L n_a \Delta_a$$

где $I_0 = eN_0-$ ток катода, $I_a = eN_a-$ анодный ток.

Значит, по измеренной ВАХ тиратрона можно определить зависимость вероятности рассеяния электрона от его энергии из соотношения:

$$\boxed{w(V) = -\frac{1}{C} \ln \frac{I_a(V)}{I_0}} \tag{2}$$

- Схема экспериментальной установки:
  - Лампа - тиратрон ТГЗ-01/1.3Б, на которую подается синусоидальное напряжение частоты 50 Гц от источника питания ИП, заполненная инертным газом, расположена непосредственно на корпусе блока источников питания (БИП).
  - Регулировка напряжения и выбор режима работы установки производятся при помощи ручек управления на лицевой панели БИП.
  - Исследуемый сигнал подаётся на электронный осциллограф (ЭО), на котором реально удаётся надёжно наблюдать лишь один минимум в сечении рассеяния электронов и следующий за ним максимум (при больших n напряжённость достаточно велика для пробоя тиратрона, кроме того, эффект 'просветления' в результате уменьшения глубины минимума резко уменьшается).

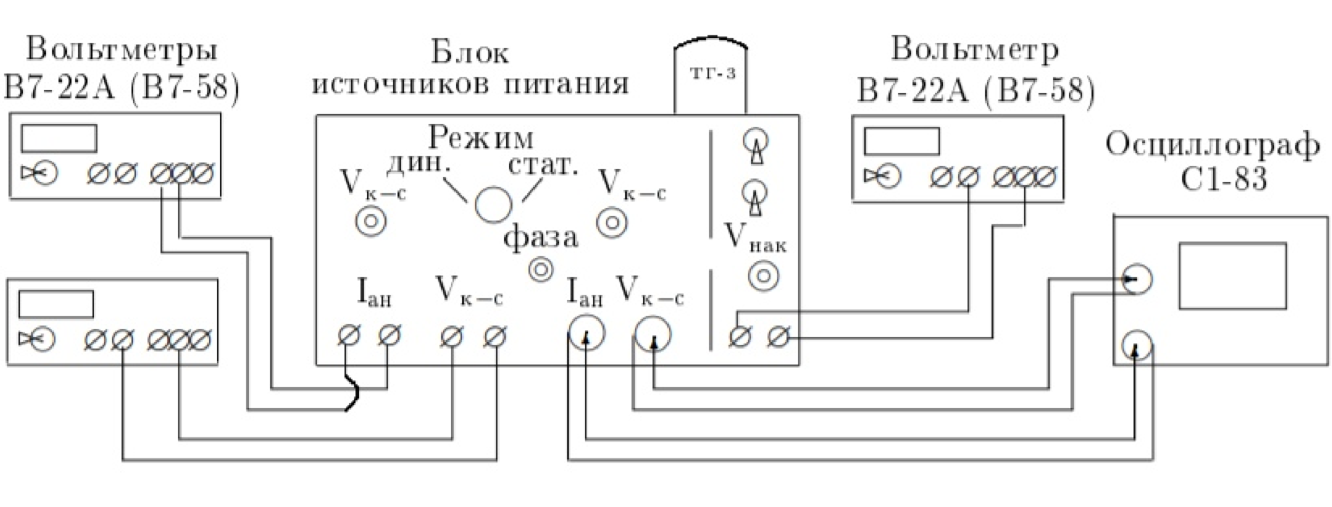

Рис. 3: Экспериментальная установка

2 Результаты эксперимента и обработка данных

2.1 Измерения в динамическом режиме

- Получим на экране осциллографа ВАХ тиратрона при двух различных напряжениях накала на лампе (V = 0 находится в V = +4клетки на осциллограммах). ВАХ тиратрона показывает зависимость Vанода ($\sim I_{\text{анода}} \sim D$) от Vкатод-сетка ($= E/e$), то есть с точностью до констант он показывает зависимость D(E).

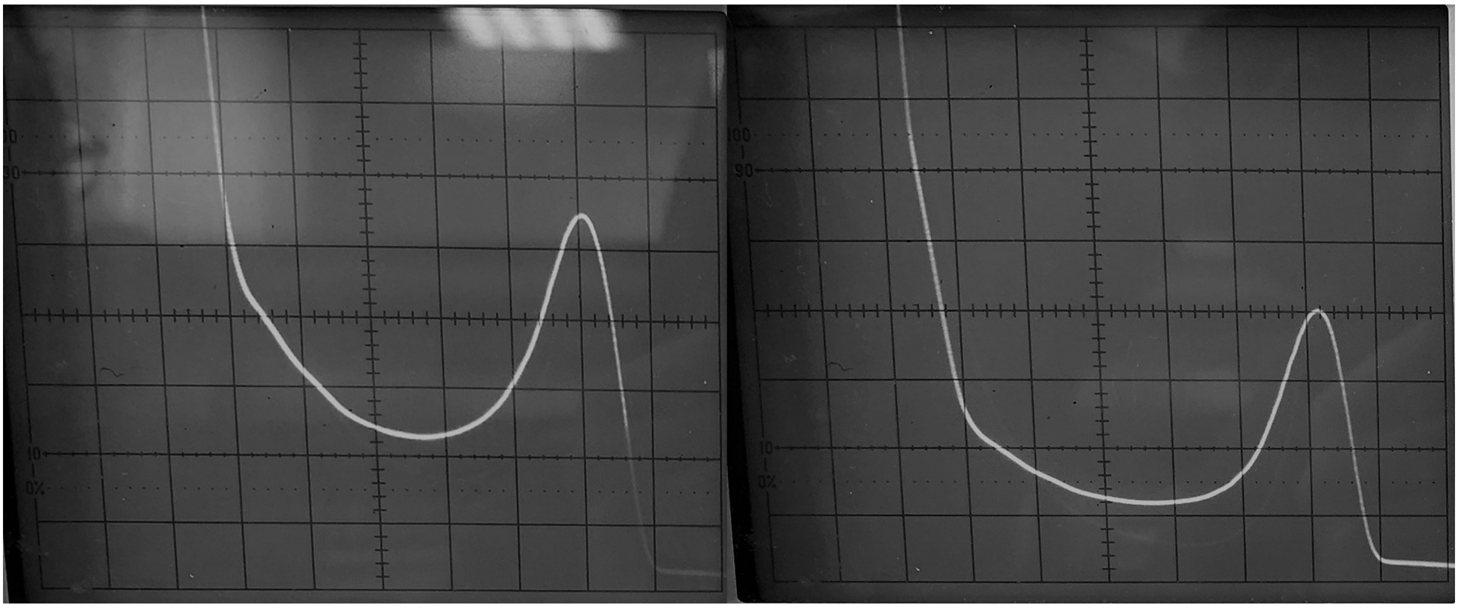

Рис. 4: ВАХ тиратрона при Vнакала = 2.918В (левое фото) и Vнакала = 2.706В (правое фото)
Цена деления по горизонтальной оси 2В/дел, по вертикальной - 50мВ/дел

Видно, что при большем Vнакала график съезжает вверх, а максимумы/минимумы остаются на своем месте. Так происходит потому, что условие на максимумы и минимумы определяются из формулы 1 и не зависит от Vнакала. От Vнакала зависит изначальное число электронов в лампе (чем больше Vнакала, тем больше электронов эмитируется из катода и тем больше будет Iанода). То есть распределение вероятности прохождения не изменяется, а анодный ток увеличивется на некоторую константу.

- По полученным осциллограммам оценим глубину потенциальной ямы. Из формулы 1:

$$D_{max} = 1 : sin(k_2 l) = 0 \Rightarrow k_2 l = \frac{\sqrt{2m(E_{max} + U_0)}}{\hbar} l = \pi n \tag{3}$$

$$D_{min} : sin(k_2 l) = \pm 1 \Rightarrow k_2 l = \frac{\sqrt{2m(E_{min} + U_0)}}{\hbar} l = \frac{\pi}{2} + \pi n \tag{4}$$

Разделив уравнения друг на друга получим:

$$\frac{E_{min} + U_0}{E_{max} + U_0} = (1 + \frac{1}{2n})^2$$

С учетом $n = 1$ ($n = 2$ уже не наблюдается из-за ионизации атомов и пробоя тиратрона - на осциллограммах видим разкое возрастание тока):

$$U_0 = \frac{4}{5} E_{min} - \frac{9}{5} E_{max}$$

$$\sigma U_0 = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 \sigma^2 E_{min} + (\frac{9}{5})^2 \sigma^2 E_{max}}$$

Замечание: кинетическая энергия налетающего на атомы электрона $E = eV$, где V - ускоряющее напряжение катод-сетка. Обозначим $U_0 = eV_0$ и будем искать глубину потенциальной ямы V_0 в Вольтах
Из осцилограммы 1 (погрешность - половина цены деления).

$$V_{max1} = (0.9 \pm 0.1)\text{дел} \cdot 2\text{В}/\text{дел} = (1.8 \pm 0.2)B, V_{min1} = (3.4 \pm 0.1)\text{дел} \cdot 2\text{В}/\text{дел} = (6.8 \pm 0.2)B$$

$$V_{01} = (2.2 \pm 0.4)B$$

Из осцилограммы 2

$$V_{max2} = (0.8 \pm 0.1)\text{дел} \cdot 2\text{В}/\text{дел} = (1.6 \pm 0.2)B, V_{min2} = (3.4 \pm 0.1)\text{дел} \cdot 2\text{В}/\text{дел} = (6.8 \pm 0.2)B$$

$$V_{02} = (2.6 \pm 0.4)$$

$$\bar{V_0} = \frac{V_{01} + V_{02}}{2}, \sigma^2\bar{V_0} = ((V_{01} - \bar{V_0})^2 + (V_{02} - V_0)^2) + \frac{\sigma^2 V_{01}}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{V_0} = (2.4 \pm 0.4)B}$$

Полученное значение согласуется с приведенным в "Лабораторным практикумом по общей физике"значением $V_{0\text{теор}} = 2.5B$

- Из осциллограммы напряжение пробоя $\boxed{V_{\text{пробоя}} = (6.0 \pm 0.1)\text{дел} = (12 \pm 0.2)B}$, откуда можно предположить, что инертный газ в лампе - ксенон (его потенциал ионизации - 12.1 эВ)

- Рассчитаем радиус атома инертного газа (ксенона) R_1 по формуле 3:

$$k_2 \cdot 2R = \frac{\sqrt{2m(E_{max} + U_0)}}{\hbar} = \pi$$

$$R = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2me(V_{max} + V_0)}}, \sigma^2 R = (\frac{dR}{dV_{max}})^2\sigma^2 V_{max} + (\frac{dR}{dV_0})^2\sigma^2 V_0 \Rightarrow \sigma R = R\frac{3\sqrt{\sigma^2 V_{max} + \sigma^2 V_0}}{2(V_{max} + V_0)}$$

$m = 9.1 \cdot 10^{-31}$кг, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$Кл, $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$Дж с

$$\boxed{R_1 = (1.5 \pm 0.3)A}$$

- Оценим радиус атома ксенона R_2 с учетом формул 3 и 4 при $n = 1$: Из 4 выразим U_0 и подставим в 3. Получим:

$$R = \frac{\sqrt{5}h}{2\sqrt{32me(V_{min} - V_{max})}}, \sigma R = R\frac{3\sigma(V_{min} - V_{max})}{4(V_{min} - V_{max})} = R\frac{3\sqrt{2}\sigma V}{4(V_{min} - V_{max})}$$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$Дж с

$$\boxed{R_2 = (1.4 \pm 0.1)A}$$

- Обсудим полученные результаты. Размеры атома ксенона, расчитанные по двум формулам, совпадают в пределах погрешности. R_2 точнее, так как она не учитывает погрешность нахождения потенциальной ямы, а использует погрешности прямых измерений. Теоретическое значение радиуса атома ксенона: 1.1 A, что близко к полученным значениям. Расчетные значения - эффективные размеры потенциальной ямы, с которой взаимодействовали электроны в тиратроне (модельное приближение), и эти размеры могут быть чуть больше радиуса внешней электронной оболочки атома ксенона.

2.2 Измерения в статическом режиме

- Будем снимать ВАХ тиратрона, фиксируя Vанодв зависимости от Vкатод-сетка при двух значениях Vнакала. Анодный ток $Ia = \frac{U_{\text{анода}}}{100\text{кОм}} = U_{\text{анода}} \cdot 10^{-8} A$

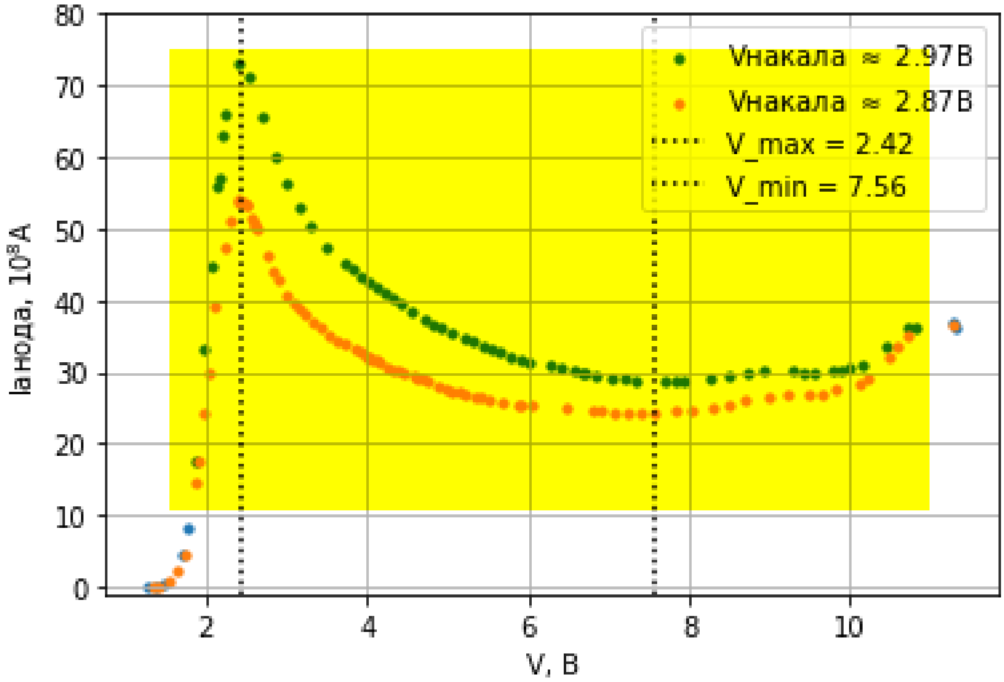

Рис. 5: ВАХ тиратрона в статическом режиме

Аналогично расчетам, проведенным при обработке результатов эксперимента в динамическом режиме получим (все формулы аналогичны динамическому режиму с заменой погрешности, связанной с ценой деления экрана осциллографа на погрешность измерения напряжений вольметром $= 0.01B$, так как последний знак при измерениях "скакал"):

$$V_0 = (1.7 \pm 0.2)$$

$$R = (1.51 \pm 0.06)A$$

Видно, что относительно измерений в динамическом режиме ВАХ сдвинулся по оси V. Но т.к. для нахождения R важна только разность $V_{max} - V_{min}$, то радиус атома ксенона вышел аналогичным предыдущим результатам. Глубина потенциальной ямы в статическом и динамическом режиме различаются. Это произошло потому, что в формуле для расчета глубины ямы присутствует не только разность напряжений, но и их абсолютные значения. С учетом того, что результат в динамическом режиме лучше сходится с теоретическим значением, можно предположить, что в статическом режиме мы измеряли не только ускоряющее напряжение, но и контактную разность потенциалов (то есть в динамическом режиме мы находили V_{max}, V_{min} как расстояние между точкой начала роста (+4 деления от 0) до максимума/минимума, поэтому эта контактная разность потенциалов не учитывалась. А в статическом режиме вольметр выдавал суммарное напряжение, поэтому график сдвинулся вправо по V).

- Оценим, при каких напряжениях появятся максимумы коэффициента прохождения при $n = 2, 3...$. Из формулы 3

$$E_n + U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 = (E_1 + U_0)n^2$$

$$E_n(E_1, n) = E_1 n^2 + U_0(n^2 - 1) \Leftrightarrow V_{max_n} = V_{max_1} n^2 + V_0(n^2 - 1)$$

$$V_{max_2} = 4V_{max_1} + 3V_0 \approx 15B > V_{\text{пробоя}}$$

- Построим график зависимости вероятности рассеяния электронов (с точностью до константы) от энергии электронов из формулы 2: I_0 - начальный катодный ток(Так как при $D(V_{max} = 1$, то $w(V_{max}) = 0$, и из этого условия находится катодный ток)

$$Cw(V) = -ln\frac{I_a(V)}{I_0} = -lnI_a(V) + lnI_0$$

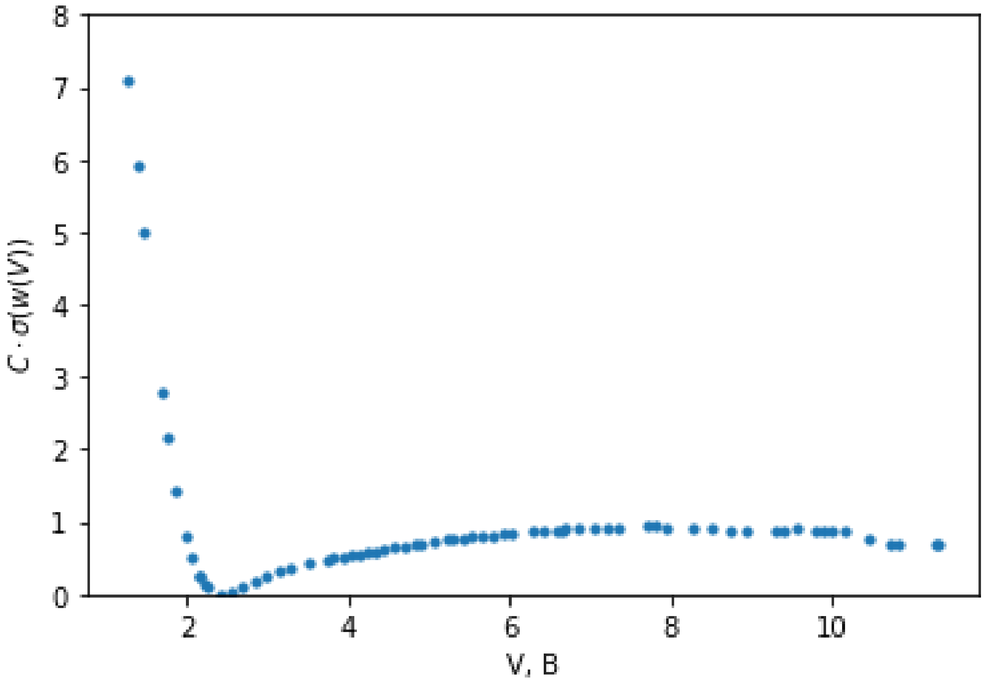

Рис. 6: Вероятность рассеяния электронов от их энергии (с точностью до констант)

3 Выводы

- В ходе работы в динамическом и статическом режимах работы осциллографа был экспериментально получен вид зависимости коэффициента прозрачности атомов инертного газа в зависимости от энергии налетающих электронов. Эта зависимость хорошо согласуется с теоретической в предположении, что атомы инертного газа представляют собой прямоугольные потенциальные ямы конечной глубины.

- Из напряжения пробоя тиратрона $\boxed{V_{\text{пробоя}} = (12 \pm 0.2)B}$ с учетом теоретических значений потенциала ионизации для различных инертных газов можно сделать вывод о том, что газ в установке - ксенон.

- Это предположение подтверждается расчетом радиуса атома газа (в модели прямогульной потенциальной ямы) $\boxed{R = (1.4 \pm 0.1)A}$, согласующегося с теоретическим значением для ксенона $1.1A$. Отклонение в большую сторону вызвано приближением атома моделью прямоугольной потенциальной ямы

- Результаты расчета глубины потенциальной ямы различаются в статическом и динамическом режимах. Это раличие вызвано учетом лишних напряжений при измерении в статическом режиме. Наиболее точная оценка гулбины ямы (в динамическом режиме): $\boxed{V_0 = (2.4 \pm 0.4)B}$ - согласуется с теорией