

Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

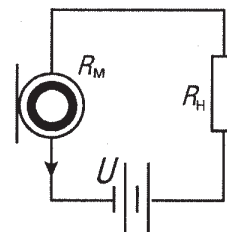
III курс

16 января 2016 года

ВАРИАНТ А

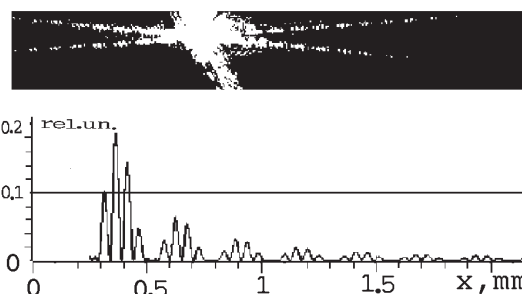
1А. В системе американской противоракетной обороны предполагалось с помощью мощных лазеров сбивать баллистические ракеты сразу после их выхода за пределы атмосферы. Оценить наибольшую температуру корпуса ракеты в атмосфере, считая её равной максимальной температуре обтекающего её со скоростью $v = 1$ км/с потока воздуха, подчиняющегося уравнению Бернулли. Оценить максимальное расстояние, на котором можно поразить в вакууме эту ракету, нагревая лазерным излучением её алюминиевый корпус до температуры плавления (700°C). Считать, что корпус ракеты представляет собой длинный тонкостенный ($h = 5$ мм) цилиндр. Мощность лазера $W = 10$ МВт, длина волны $\lambda = 2,7$ мкм, длительность импульса $\tau = 1$ с. Удельная теплоёмкость алюминия $C = 920$ Дж/(кг · К), плотность $\rho = 2,7$ г/см³. Атмосферу считать изотермической с температурой $T = 300$ К.

2А. При воздействии на микрофон гармонического звукового колебания частоты ω сопротивление угольного порошка изменяется по закону $R_M = R_0 - r_M \sin \omega t$, где R_0 и r_M — постоянные. Найти электроакустический коэффициент микрофона W_e/W_a , где $W_a = 1$ мкВт — мощность звуковых колебаний, а W_e — средняя мощность сигнала, выделяющаяся на нагрузке R_H , если в отсутствии сигнала на нагрузке выделяется мощность $W_0 = 20$ мВт.

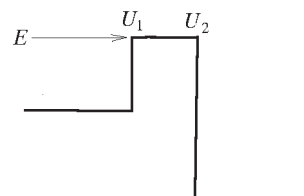


Указание: коэффициент модуляции $m = r_M/(R_0 + R_H) = 0,2$ считать малым.

3А. На рисунке приведена дифракционная картина от цилиндрической спиральной пружины, состоящая из двух скрещенных под углом $2\alpha = 12,5^\circ$ линейных дифракционных полос. Спираль освещается лазером ($\lambda = 650$ нм), и возникающая картина дифракции регистрируется фотоаппаратом, настроенным на бесконечность (см. рисунок). Там же показано распределение интенсивности изображения $I(x)$ вдоль одной из полос картины дифракции. Найдите по рисунку следующие параметры пружины: диаметр d проволоки, из которой она изготовлена, шаг спирали P , а также диаметр спирали D . Луч лазера падает перпендикулярно оси пружины и экрану. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $f = 80$ мм.



4А. Какая доля электронов с энергией $E = 1$ эВ, падающих слева на прямоугольный несимметричный потенциальный барьер с параметрами $U_1 = E$, $U_2 = 4U_1$ и шириной $l = 7,8 \cdot 10^{-8}$ см, сможет его преодолеть?



5А. Наличие быстрых нейтронов в реакторном канале тепловых нейтронов приводит к тому, что из Bi-209 в реакции радиационного захвата (n, γ) с последующим β -распадом образуется Po-210 ($T_{1/2} = 138$ дн). Из образующегося Po-210 в реакции $(n, 2n)$ на быстрых нейтронах образуется изотоп Po-209 ($T_{1/2} = 102$ года). Какое количество Po-209 накопится в образце висмута массой $m = 105$ г при 10-дневном облучении? Плотность потока тепловых нейтронов через образец $\Phi_{th} = 2 \cdot 10^{14}$ см⁻² · с⁻¹, а плотность потока быстрых нейтронов Φ_f в 10 раз меньше, сечение реакции $^{209}\text{Bi}(n, \gamma)^{210}\text{Po}$ равно $\sigma_{th} = 32$ мбн, а сечение реакции $^{210}\text{Po}(n, 2n)^{209}\text{Po}$ равно $\sigma_f = 120$ мбн. Распадом образующихся изотопов пренебречь.

Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

III курс

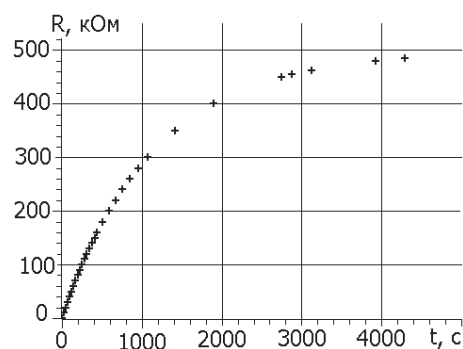
16 января 2016 года

ВАРИАНТ Б

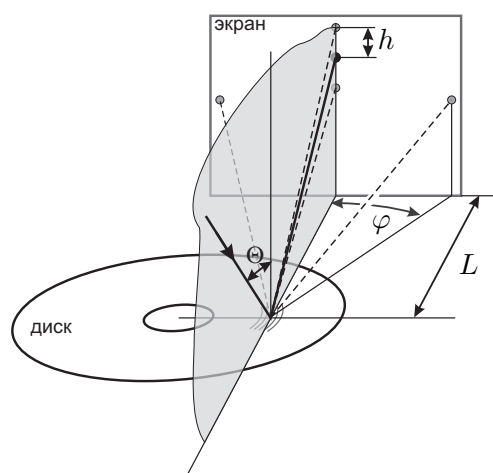
1Б. В системе американской противоракетной обороны предполагалось с помощью мощных лазеров сбивать межконтинентальные баллистические ракеты сразу после их выхода за пределы атмосферы. Корпус ракеты представляет собой длинный цилиндр из алюминиевого сплава радиусом $R = 1$ м и толщиной стенок $h = 5$ мм, наддутый изнутри до давления $P = 2$ атм. Мощность излучения лазера $W = 10$ МВт, длительность импульса $\tau = 1$ с, длина волны $\lambda = 2,7$ мкм. Оценить: 1) на какую температуру нужно локально подогреть лазером корпус ракеты для того, чтобы механическое напряжение в нём превысило предельную прочность на растяжение алюминия ($\sigma_{\text{разр}} = 10^8$ Па), и 2) максимальное расстояние, на котором можно поразить в вакууме ракету за счёт локального разогрева корпуса с его последующим разрушением. Модуль Юнга сплава $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, температурный коэффициент объёмного расширения $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Удельная теплоёмкость сплава $C = 920$ Дж/(кг · К), плотность $\rho = 2,7$ г/см³. Напряжение на разрыв считать термодинамической функцией объёма и температуры. Уходом тепла из области лазерного пятна на корпусе пренебречь.

2Б. Для измерения сопротивления утечки частично пробитого конденсатора студент физтеха подключил его к мультиметру, работающему в режиме омметра, и обнаружил, что показания омметра R при неизменном диапазоне измерений медленно увеличиваются с течением времени (см. рисунок). Найдите из этой зависимости сопротивление утечки r конденсатора и его ёмкость C .

Указание: в режиме омметра измеряется падение напряжения U_x на неизвестном сопротивлении R_x при фиксированном токе I_0 . На дисплей прибора выводится значение $R_x = U_x/I_0$.



3Б. Для контроля скорости вращения компакт-диска (CD-R) при записи и чтении информации спиральные дорожки диска имеют периодическую вдоль дорожек модуляцию с периодом l . Лежащий на столе диск освещается лучом красного лазера ($\lambda = 650$ нм), падающим вдоль дорожек под углом $\Theta = 45^\circ$ к нормали (см. рис.). На вертикальном экране, находящемся на расстоянии $L = 50$ см от точки падения луча на диск наблюдается двумерная дифракционная картина. В плоскости падения ближайшие к зеркально отражённому лучу дифракционные пятна смещены на расстояние $h = 2$ см. В поперечном направлении наблюдаются дифракционные пятна, проекции направлений из точки падения на эти пятна на горизонтальную плоскость составляют угол $\varphi = \pm 29^\circ$ с плоскостью падения. Найти расстояние между дорожками d и период модуляции вдоль дорожек l .



4Б. Какая доля электронов с энергией $E = 1$ эВ пройдёт через прямоугольный симметричный потенциальный барьер высотой $U = E$ и шириной $l = 7,8 \cdot 10^{-8}$ см?

5Б. Полоний легко сорбируется на поверхностях твёрдых тел, и поэтому полностью отмыть их от него обычными методами трудно. Через какое максимальное время ещё можно зарегистрировать альфа-распад Po-210, если первоначально на чашку попал $m = 1$ нг этого изотопа? Считать, что минимально обнаруживаемое количество полония соответствует его активности $A = 1$ Бк. Период полураспада Po-210 равен $T_{1/2} = 138$ дн.

Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

III курс

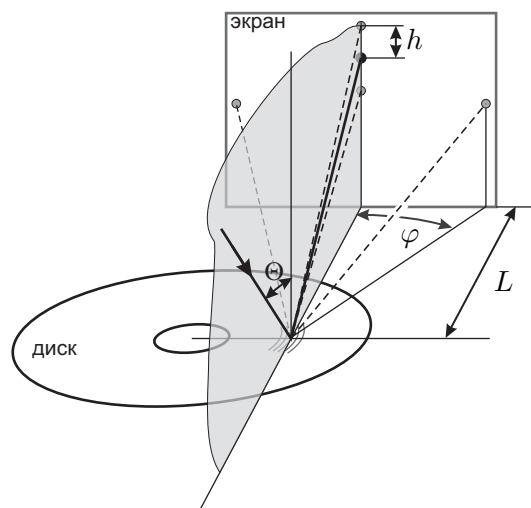
16 января 2016 года

ВАРИАНТ В

1В. В системе американской противоракетной обороны предполагалось с помощью мощных лазеров сбивать межконтинентальные баллистические ракеты сразу после их выхода за пределы атмосферы. Масса ракеты $M = 30$ т, она поднимается с ускорением $a = 9g$, её корпус представляет собой длинный цилиндр из алюминиевого сплава радиусом $R = 1$ м и толщиной стенок $h = 5$ мм. Мощность излучения лазера $W = 10$ МВт, длительность импульса $\tau = 1$ с, длина волны $\lambda = 2,7$ мкм. Оценить: 1) на какую минимальную температуру нужно локально подогреть нижнюю часть корпуса ракеты (вблизи её двигателей) для того, чтобы механическое напряжение в нём превысило предельную прочность на сжатие алюминиевой конструкции ($\sigma_{\text{сжат}} = 2,5 \cdot 10^8$ Па); 2) максимальное расстояние, с которого можно поразить в вакууме ракету по критерию схлопывания тонкостенной конструкции. Модуль Юнга материала корпуса $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, температурный коэффициент объёмного расширения $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, удельная теплоёмкость $C = 920$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 2,7$ г/см³. Механическое напряжение на сжатие считать термодинамической функцией объёма и температуры. Уходом тепла из области лазерного пятна пренебречь.

2В. Студент физтеха на лекции по электричеству в Главной физической аудитории обратил внимание на то, что за время около 20 минут угол отклонения лепестка электроскопа стал таким, как при уменьшении заряда шара электроскопа в два раза. Считая, что уменьшение заряда шара электроскопа происходит по воздуху, оцените удельное сопротивление воздуха.

3В. Для контроля скорости вращения видео-диска (DVD-R) при записи и чтении информации спиральные дорожки диска имеют периодическую вдоль дорожек модуляцию с периодом l . Лежащий на столе диск освещается лучом зелёного лазера ($\lambda = 532$ нм), падающим вдоль дорожек под углом $\Theta = 45^\circ$ к нормали (см. рис.). На вертикальном экране, находящемся на расстоянии $L = 50$ см от точки падения луча на диск наблюдается двумерная дифракционная картина. В плоскости падения ближайшие к зеркально отражённому лучу дифракционные пятна смещены на расстояние $h = 1,8$ см. В поперечном направлении наблюдаются дифракционные пятна, проекции направлений из точки падения на эти пятна на горизонтальную плоскость составляют некоторый угол φ с плоскостью падения. Найти период модуляции вдоль дорожек l и угол φ , если расстояние между дорожками $d = 0,75$ мкм.



4В. Найти ширину прямоугольного симметричного потенциального барьера высотой U , при которой коэффициент пропускания электронов с энергией $E = U = 1$ эВ равен $1/10$.

5В. Период полураспада радиоактивного Po-210 составляет $T_{1/2} = 138$ дн. Начальная активность некоторого препарата, содержащего Po-210, не менее $A_0 = 4 \cdot 10^8$ Бк. Можно ли будет через 10 лет при измерении альфа-радиоактивности этого препарата обнаружить следы полония, если порог регистрации его активности $A_{\text{min}} = 1$ Бк?

ВАРИАНТ А

1А. (Кубышкин) 1) Наибольший прогрев корпуса возможен до температуры воздуха в критической точке наконечника, где скорость потока относительно ракеты падает до нуля. Применяем уравнение Бернулли $\mu v^2/2 = C_p \Delta T$, где, согласно условию, молярная теплоёмкость воздуха $C_p = \frac{7}{2}R$. Поэтому

$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{7R} = \frac{0,029 \cdot 10^6}{7 \cdot 8,31} \simeq 500 \text{ К},$$

что даёт начальную температуру корпуса (в верхней его части) примерно 800 К.

2) Таким образом, нужно попасть лазерным пятном в «горячую» часть ракеты и прогреть её дополнительно на $\Delta T = 170 \text{ К}$. Минимальный радиус лазерного пятна на цели при идеальной оптике определяется дифракционной расходимостью луча и составляет порядка $\sqrt{\lambda L}$. Поэтому площадь пятна оцениваем как $\pi \lambda L$, где L — искомое расстояние от лазера до цели. Тогда из уравнения теплового баланса $W\tau = C\rho h(\pi \lambda L)\Delta T$, и мы находим, что

$$L = \frac{W\tau}{\pi \lambda C\rho h \Delta T} = \frac{10^7}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 920 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 170} \simeq 550 \text{ км}.$$

2А. (Крымский) Ток в цепи микрофона:

$$i = \frac{U}{R_{\text{н}} + R_0 - r_{\text{м}} \sin \omega t} = \frac{U}{R_0 + R_{\text{н}}} (1 + m \sin \omega t + m^2 \sin^2 \omega t).$$

Здесь $i_0 = U/(R_0 + R_{\text{н}})$ и, согласно условию, оставлены только члены до второго порядка включительно. Средняя мощность сигнала, выделяющаяся на нагрузке:

$$W_e = \overline{W} - W_0 = (\overline{i^2} - i_0^2) R_{\text{н}}.$$

Здесь

$$\overline{i^2} \simeq i_0^2 (1 + m \sin \omega t + m^2 \sin^2 \omega t)^2 \simeq i_0^2 (1 + 2m \sin \omega t + 3m^2 \sin^2 \omega t).$$

При усреднении $\sin \omega t$ обращается в ноль, а $\sin^2 \omega t$ даёт $1/2$. Таким образом,

$$\overline{i^2} - i_0^2 = \frac{3}{2} m^2 i_0^2.$$

Подставляя в формулу для средней мощности сигнала, получаем

$$W_e = \frac{3}{2} m^2 i_0^2 R_{\text{н}} = \frac{3}{2} m^2 W_0,$$

и для электроакустического коэффициента находим

$$\frac{W_e}{W_a} = \frac{3}{2} m^2 \frac{W_0}{W_a} = 1,5 \cdot (0,2)^2 \cdot 20 \cdot 10^3 = 1200.$$

3А. (А. Гуденко) При настройке на бесконечность изображение находится в фокальной плоскости объектива, где интерферируют параллельные лучи, и, следовательно, формируется дифракционная картина Фраунгофера. При дифракции Фраунгофера все характерные линейные размеры b пружины преобразуются в соответствующие угловые размеры $\propto \lambda/b$, а на матрице (экране), расположенной в фокальной плоскости, — в линейные размеры $s = (\lambda/b)f$. Пружине соответствуют две наклонённые друг к другу под углом 2α дифракционные решётки (реально, судя по виду $I(x)$, мы видим дифракцию всего лишь от двух параллельных проволок (= щелей) решётки). Этот угол мы и видим на фотографии. Самый большой период дифракционной картины определяется, очевидно, толщиной проволоки: из графика распределения интенсивности $I(x)$ этот период равен $S = 0,26 \text{ мм}$ $\rightarrow S = (\lambda/d)f \rightarrow$ толщина проволоки $d = (\lambda/S)l = 0,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80/0,26 = 0,20 \text{ мм}$. Более мелкий период $s(1/5)S$ соответствует периоду дифракционной решётки (расстоянию между соседними параллельными проволочками) \rightarrow период дифракционной решётки $b = 5d = 1 \text{ мм}$. Шаг спирали P с периодом решётки b связан формулой $P = b/\cos \alpha$. По условию угол между полосками дифракционной картины $2\alpha = 12,5^\circ$, т.е. шаг спирали P практически не отличается от периода b : $P = b/\cos \alpha \simeq b = 1 \text{ мм}$. Диаметр пружины рассчитываем по формуле: $\text{tg } \alpha = P/\pi D$, откуда $D = P/\pi \text{tg } \alpha = 2,9 \text{ мм}$ (для оценки можно считать, что $\text{tg } \alpha = (P/2)/D$, откуда $D = P/2 \text{tg } \alpha = 4,7 \text{ мм}$).

Примечание: Эта картина аналогична дифракционной картине, полученной при прохождении рентгеновских лучей через образец белковой молекулы ДНК, свидетельствующей о её спиральной структуре (знаменитый снимок, известный как «Фото-51», за расшифровку которого Уотсон и Крик были удостоены Нобелевской премии в 1962 г.).

4А. (С. Гуденко, Раевский) Слева от барьера решение уравнения Шредингера имеет вид: $\psi_L = e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x}$, справа — $\psi_R = d e^{ik_2 x}$. Здесь $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2} = \sqrt{2mU_1/\hbar^2}$, $k_2 = \sqrt{2mU_2/\hbar^2}$. В области барьера уравнение Шредингера имеет вид $d^2\psi/dx^2 = 0$, и его решение $\psi_B = ax + b$. Из условий непрерывности волновой функции и её производной на границах барьера при $x = 0$ и $x = l$ находим амплитудные коэффициенты прохождения и отражения

$$r = \frac{k_1 - k_2 - ik_1 k_2 l}{k_1 + k_2 - ik_1 k_2 l} \quad \text{и} \quad d = \frac{2k_1 \exp(-ik_1 l)}{k_1 + k_2 - ik_1 k_2 l}.$$

Из последнего соотношения получаем коэффициент пропускания

$$D = |d|^2 \frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2 + k_1^2 k_2^2 l^2}.$$

В соответствии с условием $k_1 l = 4$, $k_2 = k_1 \sqrt{U_2/U_1} = 2k_1$, и мы окончательно получаем

$$D = \frac{8}{9 + 4k_1^2 l^2} = \frac{8}{9 + 4 \cdot 4^2} = \frac{8}{73}.$$

5А. (Ципенюк) Пусть индекс «1» относится к Po-210, а «2» — к Po-209, начальное количество ядер висмута в мишени (половина моля) $N_0 = 3 \cdot 10^{23}$. Соответствующие уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \sigma_{th} N_0 \Phi_{th} - \lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \sigma_f N_1 \Phi_f - \lambda_2 N_2. \end{aligned}$$

Здесь $N_0 = N_A m/A$, $A = 209$, и поэтому масса исходного висмута равна $1/2$ моля. Пренебрегая распадными членами, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \sigma_{th} N_0 \Phi_{th}, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \sigma_f N_1 \Phi_f. \end{aligned}$$

Из первого уравнения $N_1 = \sigma_{th} N_0 \Phi_{th} t$. Подставляя число образующихся ядер полония во второе уравнение, получим

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma_{th} N_0 \Phi_{th} \sigma_f \Phi_f t.$$

Интегрируя, получаем

$$N_2 = \sigma_{th} \Phi_{th} \sigma_f \Phi_f N_0 t^2 / 2.$$

В числах

$$N_2 = 0,032 \cdot 10^{-24} \cdot 0,12 \cdot 10^{-24} \cdot 2 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot (8,6 \cdot 10^5)^2 / 2 = 1,72 \cdot 10^{12}.$$

ВАРИАНТ Б

1Б. (Кубышкин) 1) Рассматривая малый участок цилиндрической поверхности, можно связать давление наддува с напряжением на разрыв (корпус стремится лопнуть вдоль оси цилиндра) $\sigma = PR/h = 4 \cdot 10^7$ Па $< \sigma_{\text{разр}} = 10^8$ Па. Значит, для локального разрыва нужно обеспечить $\sigma_{\text{разр}} - \sigma = 6 \cdot 10^7$ Па за счёт теплового расширения в жёстких рамках «холодного» материала вокруг лазерного пятна. Из термодинамических тождеств следует, что

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_V = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_\sigma \cdot V \left(\frac{\partial \sigma}{\partial V} \right)_T = \frac{\alpha E}{3(1-2\mu)} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па/К}.$$

Это означает, что участок корпуса ракеты нужно подогреть на

$$\Delta T = \frac{\sigma_{\text{разр}} - \sigma}{(\partial \sigma / \partial T)_V} = 40 \text{ К}.$$

2) Аналогично задаче 1А, получаем

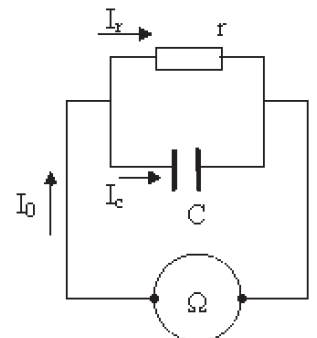
$$L = \frac{W\tau}{\pi \lambda C \rho h \Delta T} = \frac{10^7}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 920 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 40} \simeq 2000 \text{ км}.$$

2Б. (А. Гуденко) Эквивалентная схема конденсатора с утечкой, подключённого к омметру «Ω», показана на рисунке. Скорость изменения напряжения на конденсаторе пропорциональна идущему через него току I_c :

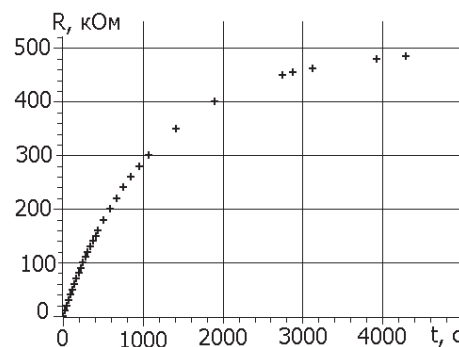
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{I_c}{C} = \frac{I_0 - I_r}{C} = \frac{I_0 - U_c/r}{C},$$

где $I_0 = I_c + I_r$ — полный ток в цепи (ток омметра), а $I_r = U_r/r = U_c/r$ — ток через сопротивление утечки. Учитывая, что в начальный момент времени напряжение на конденсаторе $U_c(0) = 0$, получаем зависимость напряжения на конденсаторе от времени: $U_c = I_0 r (1 - e^{-t/rC})$. Следовательно, зависимость показаний омметра от времени имеет вид:

$$R(t) = \frac{U_c}{I_0} = r(1 - e^{-t/rC}) = r(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где } \tau = rC.$$



Начальный участок этой зависимости ($t \ll \tau$) имеет вид прямой, тангенс угла наклона которой равен C : $R(t) = r(1 - e^{-t/\tau}) \simeq rt/\tau = t/C$. Из графика находим наклон начального участка кривой $R(t)$: $R(\text{Ом}) \simeq 450t(\text{с})$, следовательно, $C = 1/450 \Phi \simeq 2,2 \text{ мФ}$. При больших значениях t показания омметра стремятся к значению сопротивления утечки: $R \rightarrow r$. Из графика видно, что это значение $r \simeq (480 - 490) \text{ кОм}$. В целом, экспериментальный график $R(t)$ во всем диапазоне времени хорошо описывается теоретической зависимостью $R(t) = r(1 - e^{-t/\tau})$ при значениях $r = 485 \text{ кОм}$ и $\tau = rC = 485 \cdot 10^3 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} = 1067 \text{ с}$.



3Б. (Глазков) Считаем диск двумерной дифракционной решёткой. Наблюдаемая «вертикальная» картина на экране связана с дифракцией на продольной модуляции дорожек, отклонившиеся из плоскости падения лучи связаны с дифракцией на параллельных дорожках.

Задача о дифракции на модуляции дорожек стандартная: падение под углом на дифракционную решётку. Для малого угла отклонения δ разность хода волн $\Delta \approx -l\delta \cos \Theta$ (l — период модуляций, Θ — отсчитываемый от нормали угол падения), в первом дифракционном максимуме $|\Delta| = \lambda$, откуда $\delta = \lambda/(l \cos \Theta)$. Смещение на вертикальном экране относительно нулевого (зеркального) максимума: $h \approx L\delta/\sin^2 \Theta$. Отсюда для периода модуляций

$$l = \frac{L\lambda}{h \cos \Theta \sin^2 \Theta} = \frac{2^{3/2} \times 0,5 \times 650 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} \text{ м} = 460 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 46 \text{ мкм}.$$

Для отклонения луча от плоскости падения можно воспользоваться тем, что изменение проекции волнового вектора света на плоскость диска равно соответствующему вектору обратной решётки $2\pi/d$. Это решение, однако, неизвестно большинству студентов (входит в программу 6 семестра).

Для решения без применения понятия обратной решётки отметим, что при падении под углом вдоль дорожек дифракционной решётки проекция волнового вектора на направление дорожек меняться не должна, так как в этом направлении среда однородна. Для определения отклонения рассмотрим вторичные волны, испускаемые в двух точках, лежащих на соседних дорожках (на расстоянии d) на одном радиусе диска. В эти точки падающая волна приходит в фазе и вторичные волны излучаются в фазе. Стандартное построение волнового фронта вторичных волн покажет, что разности хода этих вторичных волн равны λ для целого конуса направлений, получаемого поворотом вокруг прямой, соединяющей точки. Конкретный выбор направления распространения на первый дифракционный максимум задаётся условием сохранения продольной компоненты волнового вектора. Раствор конуса не зависит от угла падения, его можно найти в стандартной задаче нормального падения на дифракционную решётку. Проекция волнового вектора волны, распространяющейся на первый дифракционный максимум на ось конуса равна $2\pi/d$. Это повторяет результат, прямо получаемый с использованием понятия обратной решётки.

В плоскости диска получаем для проекции отклонившегося луча прямоугольный треугольник: продольная проекция волнового вектора $k_{||} = (2\pi/\lambda) \sin \Theta$, поперечная $k_{\perp} = 2\pi/d$, откуда

$$\text{tg } \varphi = \frac{k_{\perp}}{k_{||}} = \frac{\lambda}{d \sin \Theta} \quad \text{и} \quad d = \frac{\lambda}{\text{tg } \varphi \sin \Theta} \approx \sqrt{6}\lambda = 1,59 \text{ мкм}$$

(для вычислений заменяем угол $\varphi = 29^\circ$ на 30°).

Ответ: период модуляций $l = 46 \text{ мкм}$, расстояние между дорожками $d = 1,59 \text{ мкм}$.

4Б. (С. Гуденко) Эта задача является частным случаем задачи 4А ($U_1 = U_2$):

$$l = \frac{4}{k_1} \quad \text{и} \quad D = \frac{1}{1 + \frac{4^2 k_2^2}{4k_1^2}} = \frac{1}{5}.$$

5Б. (Ципенюк) По определению активность $A = |dN/dt| = \lambda N$, значит, минимально регистрируемое количество ядер Po-210

$$N_{\min} = \frac{dN/dt}{\lambda} = \frac{A}{\lambda}.$$

Найдём величину λ :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{138 \cdot 86400} = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}.$$

Поэтому минимально регистрируемое количество ядер полония

$$N_{\min} = \frac{1 \text{ с}^{-1}}{5,8 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}} = 1,7 \cdot 10^7.$$

Образец массой 1 нг содержит $N_0 = 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{23}/210 = 2,87 \cdot 10^{12}$ ядер. Так как $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_{\min}$, то

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_{\min}} = 1,7 \cdot 10^7 \ln 1,76 \cdot 10^5 = 2,07 \cdot 10^8 \text{ с} \simeq 6,6 \text{ лет}.$$

ВАРИАНТ В

1В. (Кубышкин) 1) Механическое напряжение корпуса ракеты при работе двигателей

$$\sigma = \frac{M(g+a)}{2\pi Rh} = 1,0 \cdot 10^8 \text{ Па} < \sigma_{\text{сжат}} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Значит, для схлопывания корпуса нужно обеспечить $\sigma_{\text{сжат}} - \sigma = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ за счёт теплового расширения в жёстких рамках «холодного» материала вокруг лазерного пятна. Из термодинамических тождеств следует, что

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_V = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\sigma \cdot V \left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha E}{3(1-2\mu)} = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{Па}}{\text{К}}.$$

Это означает, что участок корпуса ракеты нужно подогреть на $\Delta T = (\sigma_{\text{сжат}} - \sigma)/(\partial \sigma / \partial T)_V = 100 \text{ К}$.

2) Аналогично задачам 1А и 1Б, получаем

$$L = \frac{W\tau}{\pi \lambda C \rho h \Delta T} = \frac{10^7}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 920 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \simeq 900 \text{ км}.$$

2В. (А. Гуденко) Заряд шара электроскопа уменьшается с течением времени из-за конечной величины удельного сопротивления воздуха ρ . По закону Ома в дифференциальной форме плотность электрического тока пропорциональна напряжённости \vec{E} электрического поля: $\vec{j} = (1/\rho)\vec{E}$. Величину полного тока I , определяющего скорость изменения заряда шара q , находим интегрированием по замкнутой поверхности, охватывающей изолированный электрод электроскопа (кстати, форма электрода — шар, цилиндр и т.п. — значения не имеет). Используя теорему Гаусса для потока вектора \vec{E} через замкнутую поверхность, получаем (относительную диэлектрическую проницаемость воздуха считаем равной единице):

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\rho \varepsilon_0} \quad (\text{система СИ}).$$

Скорость изменения заряда шара: $dq/dt = -I = -q/\rho \varepsilon_0$, т.е. с течением времени заряд электрода уменьшается по экспоненте: $q = q_0 e^{-t/\tau}$, где q_0 — начальный заряд шара; $\tau = \varepsilon_0 \rho$ — характерное время, за которое заряд шара уменьшается в e раз (время релаксации). Время $T_{1/2}$ уменьшения заряда вдвое с временем релаксации τ связано очевидной формулой: $T_{1/2} = \tau \ln q_0/q = \tau \ln 2 = \varepsilon_0 \rho \ln 2$. По оценке студента это время равно 20 минут, т.е. удельное сопротивление воздуха

$$\rho = \frac{T_{1/2}}{\varepsilon_0 \ln 2} = \frac{20 \cdot 60}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,7} \simeq 2 \cdot 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

(Табличное значение удельного сопротивления сухого воздуха $\rho \simeq 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}$).

3В. (Глазков) Решение аналогично задаче 3Б. Единственное отличие: во второй части решения ищется угол отклонения по заданному расстоянию между дорожками.

Для периода модуляций:

$$l = \frac{L\lambda}{h \cos \Theta \sin^2 \Theta} = \frac{2^{3/2} \times 0,5 \times 532 \cdot 10^{-9}}{1,8 \cdot 10^{-2}} \text{ м} = 420 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 42 \text{ мкм}.$$

Для угла отклонения проекции луча на плоскость диска $\tan \varphi = \lambda/(d \sin \Theta) = 1,00$ и $\varphi = 45^\circ$.

Ответ: период модуляций $l = 42 \text{ мкм}$, угол отклонения проекции луча на плоскость диска $\varphi = 45^\circ$

4В. (С. Гуденко) Решение задачи следует из решения задачи 4А при $U_1 = U_2$ (и соответственно при $k_1 = k_2$). Из условия

$$D = \frac{1}{1 + k_1^2 l^2/4} = \frac{1}{10} \quad \text{следует, что} \quad l = \frac{6}{k_1} = \frac{6\hbar}{\sqrt{2mE}} = 11,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

5В. (Ципенюк) Начальное число ядер полония

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^8}{5,8 \cdot 10^{-8}} = 6,9 \cdot 10^{15}.$$

Число ядер через 10 лет ($t = 3650 \text{ дн}$)

$$N_{\text{кон}} = \frac{dN_0/dt}{\lambda} = N_0 e^{-\lambda t} = 6,9 \cdot 10^{15} \exp\left(-\frac{0,693}{138} \cdot 3650\right) = 6,9 \cdot 10^{15} \cdot e^{-18,3} = 7,6 \cdot 10^7,$$

где

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{138}, \text{ дн}^{-1} \simeq 6 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}.$$

Минимальное регистрируемое число ядер полония $N_{\text{min}} = \frac{A_{\text{min}}}{\lambda} = 1,7 \cdot 10^7$, эта величина примерно в 4,5 раз меньше конечного числа ядер, т.е. полоний можно будет обнаружить.

Обсуждение письменной работы 21 января в 8-45 в Главной физической аудитории