



Издательский Дом
ИНТЕЛЛЕКТ

Ю.М. БЕЛОУСОВ, С.Н. БУРМИСТРОВ, А.И. ТЕРНОВ

**ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ**

Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурнистров, А.И. Тернов

Задачи по теоретической физике: Учебное пособие / Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурнистров, А.И. Тернов — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2013. — 584 с.

ISBN 978-5-91559-134-8

Книга содержит 450 задач различной степени сложности, которые в разное время предлагались студентам МФТИ, и охватывает все основные разделы теоретической физики: Теория поля, Квантовая механика и Статистическая физика. Задачи снабжены подробными решениями и пояснениями. Всем разделам предшествует краткое теоретическое введение, содержащее необходимые сведения для решения и понимания соответствующих задач.

Книга предназначена студентам и аспирантам высших учебных заведений, изучающим теоретическую физику.

ISBN 978-5-91559-134-8

© 2012, Ю.М. Белоусов,

С.Н. Бурнистров, А.И. Тернов

© 2013, ООО Издательский Дом «Интеллект»,
оригинальный макет, оформление

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-------------	---

Часть I. Задачи

Глава 1. Теория поля	10
Введение	10
1.1. Векторы и тензоры в евклидовом пространстве	10
1.2. Векторы и тензоры в пространстве Минковского	42
1.3. Релятивистская кинематика	42
1.4. Уравнение Максвелла	47
1.5. Движение заряженной частицы во внешнем поле	49
1.6. Статическое электромагнитное поле	52
1.7. Свободное электромагнитное поле	53
1.8. Запаздывающие потенциалы, излучение	54
1.9. Электромагнитные поля релятивистских частиц	57
1.10. Рассеяние электромагнитных волн	58
Глава 2. Квантовая механика	60
Введение	60
2.1. Операторы и состояния в квантовой механике	82
2.2. Одномерное движение	84
2.3. Линейный гармонический осциллятор	87
2.4. Угловой момент, спин	88
2.5. Движение в магнитном поле	90
2.6. Движение в центральном поле	91
2.7. Квазиклассическое приближение	93
2.8. Теория возмущений	93



2.9 Релятивистская квантовая механика	96
2.10 Сложение моментов. Тождественность частиц	97
2.11 Теория атомов и молекул	98
2.12 Теория рассеяния	100
2.13 Теория излучения	101

Глава 3. Статистическая физика 103

Введение	103
3.1 Распределение Гиббса. Термодинамические величины и функции	142
3.2 Квантовые идеальные газы	146
3.2.1. Идеальный ферми-газ	146
3.2.2. Идеальный бозе-газ	149
3.2.3. Идеальный газ элементарных бозе-возбуждений	150
3.3. Ненеидеальные квантовые системы (жидкости). Основы теории конденсированных сред	152
3.3.1. Нормальная (несверхтекучая) ферми-жидкость	152
3.3.2. Сверхпроводимость. Теория БКШ	154
3.3.3. Слабоненеидеальный бозе-газ. Уравнение Гросса-Питалевского	156
3.3.4. Теория сверхтекучести	158
3.4. Фазовые переходы и критические явления	159
3.4.1. Приближение самосогласованного поля	159
3.4.2. Функционал Гинзбурга-Ландау	160
3.4.3. Основы теории критических явлений	163

Часть II. Решения задач

Глава 1. Теория поля	165
1.1. Векторы и тензоры в евклидовом пространстве	168
1.2. Векторы и тензоры в пространстве Минковского	171
1.3. Релятивистская кинематика	171
1.4. Уравнения Максвелла	198
1.5. Движение заряженной частицы во внешнем поле	204
1.6. Статическое электромагнитное поле	223
1.7. Свободное электромагнитное поле	233
1.8. Запаздывающие потенциалы, излучение	235
1.9. Электромагнитное поле релятивистских частиц	254
1.10. Рассеяние электромагнитных волн	266

Глава 2. Квантовая механика	278
2.1. Операторы и состояния в квантовой механике	278
2.2. Одномерное движение	283
2.3. Линейный гармонический осциллятор	303
2.4. Угловой момент, спин	306
2.5. Движение в магнитном поле	311
2.6. Движение в центральном поле	321
2.7. Квазиклассическое приближение	332
2.8. Теория возмущений	337
2.9. Релativистская квантовая механика	352
2.10. Сложение моментов. Тождественность частиц	366
2.11. Теория атомов и молекул	373
2.12. Теория рассеяния	392
2.13. Теория излучения	407
Глава 3. Статистическая физика	416
3.1. Распределение Гиббса. Термодинамические величины и функции	416
3.2. Квантовые идеальные газы	447
3.2.1. Идеальный ферми-газ	447
3.2.2. Идеальный бозе-газ	472
3.2.3. Идеальный газ элементарных бозе-возбуждений	485
3.3. Неидеальные квантовые системы (жидкости). Основы теории конденсированных сред	491
3.3.1. Нормальная (несверхтекучая) ферми-жидкость	491
3.3.2. Сверхпроводимость. Теория БКШ	501
3.3.3. Слабонеидеальный бозе-газ. Уравнение Гресса-Питтевского	510
3.3.4. Теория сверхтекучести	520
3.4. Фазовые переходы и критические явления	527
3.4.1. Приближение самосогласованного поля	527
3.4.2. Функционал Гинзбурга-Ландау	532
3.4.3. Основы теории критических явлений	555
Дополнения	573
1. Дельта-функция Дирака и другие обобщенные функции	573
2. Цилиндрические функции полуцелого индекса	575
3. Вырожденная гипергеометрическая функция. Полиномы Лагерра	577
4. Гамма-функция	578
Список литературы	579

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение теоретической физики невозможно представить себе без освоения методов решения задач — это не гуманитарная наука. Именно при решении задач после изучения какого-либо раздела теоретической физики приходит как усвоение, так и понимание пройденного материала. Перед Вами сборник задач по курсу теоретической физики, снабженных подробными решениями и пояснениями, которые в том или ином виде предлагались в различные годы студентам Московского физико-технического института на так называемом базовом уровне сложности. Последний термин появился не так давно, но он вполне адекватно отражает требования, которые предъявляются студентам-физикам, не обязательно специализирующимся как будущие физики-теоретики.

Итак, в данной книге предложены задачи по трем основным курсам теоретической физики: теории поля, квантовой механике и статистической физике в соответствии с теми курсами, которые изучают студенты Физтеха в бакалавриате (это вовсе не означает, что другие разделы теоретической физики менее значимы, просто так сложилось со временем основания МФТИ). Между различными разделами существует неразрывная связь, которую мы постарались проследить, и поэтому все задачи объединены в одном сборнике. В соответствии с этим задачник состоит из трех разделов, каждому из которых предшествует краткое введение, напоминающее читателю основные понятия, которые будут в дальнейшем необходимы при решении предлагаемых задач. Это, если угодно, своего рода теоретический минимум, который должны знать студенты после изучения курса. Поэтому можно считать данную книгу также и учебным пособием. Краткое введение не предполагает последовательного вывода формул. Если вывод какой-либо формулы сам по себе представляет полезную задачу, мы старались сформулировать его именно в виде задачи. Мы полагаем, что такой подход помогает студенту лучше понять и усвоить материал. В то же время мы не стремились составить как можно больше задач, а постарались предложить



и разобрать такое количество задач, которое мы считаем достаточным для усвоения и понимания основных курсов теоретической физики.

Решение задач дает студенту возможность проверить свои реальные знания, которые в идеале не должны быть только набором заученных сведений. Для преподавателя самостоятельно решенная студентом задача — самый эффективный показатель глубины понимания изучаемого предмета. Самостоятельный поиск решения задач развивает и воспитывает аналитическое и творческое научное мышление. Ответы и методы решения задач приведены во второй части книги в той же последовательности, что и условия. В пояснениях к задачам и их решениям мы, по мере возможности, старались избежать использования сложных математических методов или специального аппарата теоретической физики, чтобы изложение было доступно как можно более широкому кругу студентов-физиков, а не только студентам, которые специализируются в области теоретической физики. В качестве справочного материала в конце книги приведены некоторые полезные сведения о специальных функциях математической физики, часто используемых при решении различных задач.

Теперь несколько слов о самих задачах. Специфика формулирования задач часто состоит в том, что трудно найти их истинного автора, поэтому они носят, как правило, «фольклорный» характер. Действительно, часть задач можно найти в замечательных сборниках задач по теории поля [3], по квантовой механике [23–25], а также по статистической физике [31] и, естественно, в соответствующих томах Курса теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, который составляет основу курса теоретической физики МФТИ. Как правило, эти задачи в различные годы включались (и включаются в настоящее время) в домашние задания студентов. Некоторые из этих задач вошли и в наш сборник, поскольку они стали классическими, и без них трудно представить себе курс теоретической физики. Однако, наряду с такими задачами читатель найдет в нашем сборнике и много оригинальных задач, учитывающих особенности курсов, читаемых на разных лекционных потоках. Поэтому нужно понимать, что данный сборник задач — продукт коллективного творчества сотрудников кафедры теоретической физики МФТИ, как работающих в настоящее время, так и тех, к сожалению, нет с ними. Особенно хотелось бы отметить роль В. П. Смилти и В. П. Кузнецова, которые работали на кафедре практически с первых лет ее существования и одними из первых начали заниматься составлением и подбором задач. Часть из этих задач уже вошла в «Катехис» [45] и небольшую книгу «Практическая математика» [46].

Авторы выражают искреннюю благодарность всему коллективу преподавателей кафедры теоретической физики МФТИ, однако все-таки

хотелось бы особо отметить С. П. Аллапуева, С. Т. Белкена, С. С. Герштейна, Р. О. Зайцева, Л. А. Максимова, знесших большой вклад в становление курса теоретической физики и составление заданий, а также ушедших от нас В. Б. Берестецкого, Б. Т. Гейликмана, В. Н. Горелкина и И. А. Малкина. Авторы также выражают благодарность доценту кафедры М. Г. Иванову за помощь в подготовке раздела, посвященного теории поля.

ЧАСТЬ | ЗАДАЧИ



ВВЕДЕНИЕ**1. Понятие тензора**

Все физические явления описываются в теоретической физике с помощью различных математических моделей, в которых физическим объектам ставятся в соответствие математические объекты. Математические объекты описывают физические объекты в пространстве, задавая их в различных системах координат. При этом любой точке пространства ставится в соответствие набор координат, число которых зависит от размерности пространства и которые принято обозначать как x^i , где индекс i принимает все возможные значения в соответствии с нумерацией осей системы координат и называется *свободным индексом*. Совокупность координат называется *радиус-вектором* и обычно, а в трехмерном случае всегда, обозначается как \mathbf{r} .

Свойства физических объектов не могут зависеть от выбора системы координат, и это определяет свойства соответствующих им математических объектов. Например, законы сохранения в физике должны описываться при помощи математических объектов, имеющих одинаковый вид в разных системах координат. Это — *инварианты*. Различные системы координат могут быть связаны между собой с помощью определенного преобразования координат, которое с формально-математической точки зрения представляется некоторой заменой, записываемой обычно в виде $x^i = x^i(\mathbf{r}')$. Штрихом принято обозначать радиус-вектор в преобразованной относительно исходной системе координат. Поскольку при описании физических объектов необходимо использовать преобразования, имеющие обратные, то для замен координат следует применять только непрерывные и невырожденные преобразования, т. е. такие преобразования, для которых $J = \det(\partial x^i / \partial x'^j) \neq 0$, где J — определитель матрицы Якоби, т. е. якобиан данного преобразования.

Инвариантам соответствуют математические объекты, не изменяющиеся при всех заменах (преобразованиях) координат, и эти объекты называются *скалярными*. Скаляр не может иметь свободных индексов, поэтому его можно обозначить как φ . Если задан не просто скаляр, а скалярное поле, т. е. скаляр $\varphi(r)$ как функция точки пространства с координатами r , то при замене координат $r(r')$ эта функция изменяется так, чтобы прежние значения соответствовали новым координатам прежних точек:

$$\varphi(r(r')) = \varphi(r).$$

Если преобразования координат линейны, элементы матрицы Якоби есть просто числа, и выражение для радиус-вектора точки после преобразования системы координат может быть записано в следующем виде:

$$x^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} x'^k \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} x'^k.$$

По дважды повторяющемуся *немому* индексу принято всегда проводить суммирование, поэтому знак суммы обычно опускается (правило суммирования).

Если преобразование координат нелинейно, закон преобразования справедлив не для радиус-вектора, а для его дифференциала:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k.$$

Вектором (из контранарядным вектором) называется совокупность величин A^i , которые при преобразовании системы координат изменяются так же, как и компоненты радиус-вектора:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k.$$

Производная скалярного поля по компонентам радиус-вектора — градиент — также будет многокомпонентной величиной, при этом ее вид будет изменяться при преобразовании системы координат с помощью обратной матрицы преобразования. Такой объект принято называть *контранарядным вектором* (ковектором) и обозначать буквой с индексом снизу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x}, \quad u_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} u'_k.$$

При ортогональных преобразованиях законы преобразования вектора и ковектора совпадают, и в таком случае отпадает необходимость различать эти два объекта и вводить верхние и нижние индексы.

Если скалярное поле предифференцировать дважды по компонентам радиус-вектора, возникнет совокупность величин, характеризующихся уже двумя свободными индексами, которые преобразуются при замене координат как произведение компонент двух ковариантных векторов

$$T_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial x^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial x^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} T_{lm}$$

Такие математические объекты называются *ковариантными тензорами второго ранга*. Соответственно, тензор (контравариантный тензор) второго ранга — это совокупность величин с двумя верхними индексами, которые преобразуются при замене системы координат как произведения соответствующих компонент двух векторов. Ранг тензора определяется числом индексов. В общем случае тензор может быть любого ранга и содержать как верхние, так и нижние индексы. При этом позиция индекса имеет значение:

$$T^{il}_{\quad \quad kl} = T^{pl}_{\quad \quad kl} - \frac{\partial x^l}{\partial x^p} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} - \frac{\partial x^l}{\partial x^p} \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dots$$

В частности: *скаляр* — тензор без индексов, *вектор* — тензор с одним верхним индексом, *ковариантный вектор* — тензор с одним нижним индексом.

Для тензоров определены следующие операции

Свертка — суммирование по паре повторяющихся индексов, причем один из них — верхний, а другой — нижний: $T^{il}_{\quad \quad kl}$. При свертке по одной паре индексов ранг тензора понижается на два. Свертка также определена для двух тензоров, при этом число пар одинаковых индексов может быть любым, например: $T^{il}_{\quad \quad kl} S^{kj}_{\quad \quad jm}$. Заметим, что, вообще говоря,

$$T^{il}_{\quad \quad kl} S^{kj}_{\quad \quad jm} \neq T^{il}_{\quad \quad kl} S^{jk}_{\quad \quad jm}$$

Свертка двух тензоров первого ранга есть не что иное, как их скалярное произведение: $A^i B_i = (\mathbf{AB})$.

Тензорное или кронекеровское произведение — поэлементное произведение компонент тензоров, нумеруемых наборами различных индексов: $T^{il}_{\quad \quad kl} S^{kj}_{\quad \quad jm}$. При этом получается тензор, ранг которого равен сумме рангов тензоров произведения.

Тензорное равенство — два тензора с одинаковым набором верхних и нижних индексов равны

$$T^{il}_{\quad \quad kl} = S^{il}_{\quad \quad kl}$$

если в любой системе координат разность соответствующих компонент этих тензоров равна нулю. Таким образом, равенство двух тензоров

означает в N -мерном пространстве наличие системы N^2 уравнений, где \mathcal{N} — ранг тензора. Отсюда следует, что векторы и тензоры позволяют записывать физические соотношения в форме, которая не зависит от выбора системы координат. Это достигается благодаря тому, что обе части тензорного равенства при замене координат преобразуются по одному правилу.

Правильно построенная комбинация тензоров автоматически дает тензор, но для этого должны выполняться следующие правила баланса индексов:

- Каждое слагаемое и каждая часть равенства должны иметь одинаковые наборы свободных индексов: индексы с одинаковыми именами должны стоять в одинаковых (верхних или нижних) позициях, причем в каждом члене имя каждого свободного индекса встречается ровно один раз.
- В каждом слагаемом и каждой части равенства могут быть (или отсутствовать) также немые индексы: каждый немой индекс в каждом члене либо отсутствует, либо встречается ровно два раза (один раз сверху и один раз снизу).
- Если в одном слагаемом какой-либо индекс встречается три раза или более, то в формуле присутствует ошибка.
- Если в одном слагаемом какой-либо индекс встречается два раза сверху, или два раза снизу, то в формуле присутствует ошибка. (Либо мы работаем с тензорами относительно ортогональных преобразований.)
- Мы можем переименовать какой-либо свободный индекс, если мы одинаково изменяем его имя во всех слагаемых. При этом надо следить, чтобы новое имя индекса не совпадало с именем других индексов, используемых в каждом слагаемом. Аналогично мы можем подставить вместо свободного индекса его численное значение.
- Мы можем переименовать любой немой индекс в каком-либо слагаемом, одновременно заменив имя обоих его вхождений. При этом надо следить, чтобы новое имя индекса не совпадало с именем других индексов, используемых в слагаемом.

Можно получить тензор второго ранга, продифференцировав компоненты радиус-вектора по своим собственным компонентам, и при этом получится симметричный тензор, компоненты которого инвариантны относительно любых преобразований координат:

$$\delta_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Тензор δ_{ik} обычно называют *символом Кронекера*.

Среди различных инвариантов важное место занимает элемент длины, квадрат которого есть $(dl)^2 = dx^i dx_i$. Поскольку это скаляр, его величина должна оставаться неизменной при замене координат:

$$(dl)^2 = dx^i dx_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^k dx'^l.$$

По определению множитель, стоящий перед $dx'^k dx'^l$, есть смешанный тензор второго ранга, который можно обозначить как g_{kl} . Если оба индекса будут внизу, получится ковариантный тензор второго ранга

$$g_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l},$$

с помощью которого элемент длины можно записать, используя только компоненты контравариантного вектора

$$(dl)^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Тензор g_{ij} называется метрическим. Легко видеть, что контравариантный тензор g^{ik} оказывается обратным к нему: $g_{ik} g^{kl} = \delta_l^i$. При замене переменных метрический тензор преобразуется согласно определению:

$$g_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} g_{ij}.$$

Для тензора второго ранга можно вычислить детерминант. Вычисляя детерминант обеих частей, получаем $g = U^{-1} \bar{g} U$, или $\sqrt{g} = |U| \sqrt{\bar{g}}$.

Метрический тензор можно использовать для поднимания и опускания индексов:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad F_j = g^{ik} F_{kj}, \quad \text{а также}$$

$$A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_k B_i.$$

Существует еще один важный инвариантный тензор, ранг которого равен рангу пространства, в котором рассматривается физический объект. Это полностью антисимметричный относительно перестановки любой пары индексов тензор, ранг которого совпадает с рангом пространства. Для определенности рассмотрим трехмерный случай, тогда полностью антисимметричный тензор является тензором третьего ранга: $e^{ijk} = -e^{kji} = e^{mni}$. Благодаря свойству антисимметрии все 6 компонент отличаются друг от друга только знаком. Приведено определять значения компоненты для правильного порядка индексов равны +1, т. е. в декартовых координатах $e^{123} = e^{132} = +1$. Запишем связь компонент тензора, полученных после замены переменных, с исходными:

$$e^{ijk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^q} \frac{\partial x^l}{\partial x'^r} e^{pqr}.$$

Выполняя суммирование по дважды повторяющимся индексам с учетом чередования знаков в сумме, имеем

$$e^{ikl} = I e^{ikl},$$

где I — якобиан преобразования. Если якобиан преобразования равен единице, что, в частности, имеет место при чистых поворотах, компоненты тензора остаются неизменными¹¹. В трехмерном случае тензор e^{im} называют символом Леви-Чивита.

2. Векторы и тензоры в евклидовом пространстве

В евклидовом пространстве существуют выделенные системы координат (декартовы координаты), в которых компоненты метрического тензора g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) задаются единичной матрицей. В этом случае поднимание или опускание индекса не меняет значения компонент тензора. Матрицы Якоби для перехода между различными декартовыми координатами всегда ортогональные ($I^{-1} = I^T$), при этом векторы с верхними и нижними индексами преобразуются одинаково.

Кроме специально оговоренных случаев мы будем использовать для описания евклидова пространства декартовы координаты $r = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, что позволяет не различать верхние и нижние индексы. Мы будем обозначать тензорные индексы для евклидова пространства латинскими буквами и писать их снизу.

В евклидовом пространстве вектор принято обозначать жирной буквой, или буквой со стрелкой.

Преобразование декартовой системы координат, при которых начальный координат остается неизменным, сводится к поворотам вокруг осей, отражениям в плоскостях и инверсии. При поворотах якобиан $I = +1$, при отражении и инверсии $I = -1$. Следовательно, тензор e_{im} ведет себя как тензор при преобразованиях поворота, но его компоненты изменяют знак при преобразовании отражения. Иными словами, он ведет себя не совсем так, как положено тензору, поэтому его часто называют псевдотензором.

Скалярное, векторное и смешанное произведения в тензорных обозначениях принимают вид

$$(ab) = a_i b_i = \delta_{ij} a_j b_i, \quad [a \times b]_i = e_{ijk} a_j b_k, \quad (a | b \times c |) = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Как видим, векторное произведение есть свертка псевдотензора и двух векторов по двум парам индексов, поэтому получающийся вектор

¹¹ Наличие якобиана указывает, что определенный таким образом тензор обладает свойствами плотности.

также не будет истинным и его принято называть псевдовектором или линейным вектором.

Оператор дифференцирования (набла) ∇ в декартовых координатах есть вектор, компоненты которого имеют вид

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В трехмерном евклидовом пространстве часто используемые основные функции и операторы, имеющие инвариантный смысл, в тензорных обозначениях записываются следующим образом:

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi, \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} \varphi_{ij} = \nabla_i \varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

$$(\nabla \mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

$$[\nabla \times \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad \text{или} \quad [\operatorname{rot} \mathbf{a}]_i = e_{ijk} \nabla_j a_k = e_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j},$$

$(\mathbf{a} \nabla) = \nabla_a = a_i \nabla_i$ — оператор дифференцирования вдоль \mathbf{a} ,

$(\nabla \nabla) = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta = \nabla_i \nabla_i$ — лапласиан,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \nabla_i x_i = 3,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{r}_{ij} = [\nabla \times \mathbf{r}]_{ij} = e_{ijk} \nabla_j x_k = 0,$$

$$a_i \nabla_i x_j = (\mathbf{a} \nabla) x_j = a_j, \quad \text{или} \quad (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a},$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}.$$

Интегральная теорема Гаусса в инвариантной форме:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = \oint_S (\mathbf{A} \mathbf{n}) dS.$$

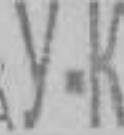
Элемент поверхности (вектор нормали) направлен *наружу*.

Теорема Гаусса в тензорной форме:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iiint_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = \oint_S A_i dS_i = \oint_S A_i n_i dS.$$

Интегральная теорема Стокса в инвариантной форме:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = \iint_S (d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}]) = \oint_L (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}).$$



Теорема Стокса в тензорной форме:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}) = \iint_S e_{\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} dS_i = \oint_L A_i dx_i.$$

3.

Векторы и тензоры в пространстве Минковского

В четырехмерном пространстве Минковского также существуют выделенные системы координат (аренцевы координаты), которые принято называть системами отсчета. В аренцевых координатах компоненты метрического тензора (метрики Минковского) записываются в виде $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). В этом случае поднимание или опускание индексов может изменить знак компоненты тензора, поэтому верхние и нижние индексы необходимо различать.

С помощью метрики $g_{\mu\nu}$ и обратной метрики $g^{\mu\nu}$ производится опускание и поднимание индексов:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$v_\mu = v^\nu g_{\mu\nu}, \quad v^\mu = v_\nu g^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu\lambda} = T^\mu{}_\nu{}^\lambda g^{\nu\mu}, \quad \text{и т. д.}$$

Тензорные индексы для пространства Минковского будут обозначаться греческими буквами.

Кроме специально оговоренных случаев мы будем использовать для описания пространства Минковского аренцевы координаты $x^\mu = x = (ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, где c — скорость света. Точку в пространстве Минковского принято называть событием. Очевидно, что

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{r}).$$

Часто вектор в пространстве Минковского обозначается буквой, подчеркнутой снизу: $\underline{A}^\mu = \underline{A}$.

Расстояние между двумя событиями x (длина 4-радиус-вектора) называется интервалом, квадрат которого равен

$$s^2 = g_{\mu\nu} (x^\mu x^\nu) \equiv x \cdot x = (ct)^2 - \mathbf{r}^2.$$

В общем случае квадрат интервала s^2 может быть положительным, отрицательным, либо равным нулю. Принято называть $s^2 > 0$ временнеподобным (два события могут произойти в одной точке пространства, но в разные моменты времени), $s^2 < 0$ — пространственноподобным. На мировой линии $s = 0$ (световой интервал).

Относительно преобразований с единичным якобианом (т. е. поворотов и других преобразований, сохраняющих объем и ориентацию базиса) является тензором полностью антисимметричный тензор $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. В четырехмерном случае его можно определять так:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = -\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} = -\epsilon^{\nu\lambda\mu\rho}, \quad \epsilon^{0123} = +1.$$

В пространстве Мinkовского с помощью полностью антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ можно ввести объекты, двойные скалиру, вектору и антисимметричным тензорам второго, третьего и четвертого рангов:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{0!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi, \quad \bar{A}^{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{1}{1!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_{\mu\nu}, \quad \bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\lambda}, \\ \bar{G}^\nu &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\rho\sigma}, \quad \bar{H} = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\mu\nu\rho\sigma}.\end{aligned}$$

Оператор дифференцирования в линейных координатах представляет собой ковариантный вектор и записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = \left(1, \frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right).$$

Далее (кроме специально оговоренных случаев) мы будем рассматривать линейные преобразования координат, сохраняющие метрику Minkовского. Совокупность таких преобразований включает сдвиги, пространственные отражения, обращение времени, пространственные повороты, преобразования Лоренца и их всевозможные комбинации.

4. Релятивистская кинематика

Преобразование Лоренца определяет переход из одной инерциальной системы отсчета в другую. Для данного преобразования примут также термин *буст*. Контравариантные векторы и тензоры в четырехмерном пространстве принято также называть просто 4-векторами и 4-тензорами. Стандартное преобразование Лоренца произвольного 4-вектора A^μ , определенное для случая, когда скорость V системы отсчета, движущейся относительно лабораторной, направлена по оси x , имеет вид²¹

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

²¹ Для описания преобразований Лоренца наряду со скоростью используют также быстроту δ — вещественный параметр, связанный со скоростью соотношением $\ln \delta = V/c$.

Ковариантные векторы преобразуются с помощью транспонированной обратной матрицы, которая получается заменой V на $-V$. Бусты вдоль осей y и z получаются соответствующими перестановками строк и столбцов матрицы преобразования.

Контравариантный вектор и его компоненты принято записывать как $A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (A^0, A^i)$, а ковариантный вектор соответственно как $A_\mu = (A_0, \mathbf{A}_i) = (A^0, -\mathbf{A}) = (A^0, -A^i)$.

Скалярное произведение векторов равно

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} = A^0 B^0 - \mathbf{AB} = A^0 B^0 - N B^i.$$

Элемент интервала между событиями, связанными с движением частицы, выражается через ее скорость: $ds = cdt = cd\tau\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}$, где τ — собственное время частицы (*т. е.* время в системе отсчета, где она находится) — является инвариантом. При определении четырехмерных kinематических величин часто используется собственное время τ , совпадающее с точностью до множителя c (скорость света) с интервалом вдоль временнеподобной мировой линии.

4-Скорость и 4-ускорение имеют вид

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\gamma, \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (1.2)$$

Из определения 4-скорости и 4-ускорения получаем

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{ds^2}{ds} = 1, \quad u^\mu w_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} u^\mu u_\mu = 0.$$

4-Импульс частицы массы m записывается как

$$p^\mu = mcu^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) = (mc, m\mathbf{v}), \quad \mathbf{p} = \frac{c\mathbf{v}}{\gamma},$$

где \mathcal{E} — энергия, \mathbf{p} — трехмерный импульс.

Энергия покоя $E_0 = mc^2$ однозначно связана с массой частицы³¹ и представляет собой инвариант.

Общее определение массы может быть получено из инварианта:

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

³¹ Часто в теории относительности и физике элементарных частиц используется система единиц, в которой $c = 1$. При этом для энергии, импульса и массы используется общая единица измерения, в качестве которой обычно выступают электрон-вольт (eВ) и производные единицы ($1 \text{ кэВ} = 10^3 \text{ эВ}$, $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$, $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$, $1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$). Во многих случаях использование таких единиц может специальности не оговариваться.

Для бозмассовой частицы 4-скорость не определена, но 4-импульс все равно определен, в этом случае $p^\mu p_\mu = m^2 c^2 = 0$.

Для системы частиц выполняется закон сохранения 4-импульса:

$$\sum_a p_a^\mu = \sum_b p_b^\mu. \quad (1.3)$$

где суммирование ведется по всем частицам до и после какого-либо взаимодействия между ними (рассеяния, распада, реакции и др.). Суммарные энергия и пространственный импульс сохраняются, однако теперь может не сохраняться как число, так и сорт частиц, а также сумма масс всех частиц. Поэтому в левой и правой частях формулы (1.3) индекс суммирования обозначен разными буквами. Закон сохранения 4-импульса, записанный в форме (1.3), очень удобен для решения различных задач с использованием четырехмерных инвариантов, которые получаются выделением квадрата 4-импульса любой частицы или нескольких частиц, входящих в указанное уравнение. Например, для двух частиц с известными массами можно записать

$$p_2^\mu p_{2\mu} = (m_2 c)^2 = (p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'{}^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu} - p_{1\mu}').$$

Реализация метода 4-инвариантов зависит от рассматриваемого процесса.

Упругий процесс — процесс, в результате которого не изменяется количество частиц и их сорта (в частности, не изменяются массы частиц).

Неупругий процесс — процесс, в котором изменяется число частиц или их сорта (в частности, изменяются массы).

Среди кинематических задач, связанных с неупругими процессами, важное значение имеет задача об определении порогов реакций, в которых происходит рождение частиц, отличных от участвовавших в столкновении. Энергетический порог реакции — это минимальное значение кинетической энергии ($T - \mathcal{E} - mc^2$) налетающей частицы, необходимое для рождения новой частицы. Для системы частиц можно определить эффективную массу, как энергию в системе центра инерции, используя инвариантность квадрата 4-импульса:

$$M_{\text{эфф}}^2 c^2 = p_{\text{инф}}^\mu p_{\text{инф}\mu}. \quad (1.4)$$

Как следует из уравнения (1.4), энергия будет минимальной, если в системе центра инерции частицы покоятся, тогда эффективная масса просто равна сумме масс всех частиц после реакции:

$$M_{\text{эфф}} = \sum_b m_b$$

5. Уравнения Максвелла

1) Уравнения Максвелла в трехмерной форме. Уравнения Максвелла принято записывать в виде двух пар: без источников и с источниками. В трехмерной форме они имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{— первая пара,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{array} \right. \quad \text{— вторая пара.}$$

Здесь \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля. Из второй пары уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности (закон сохранения заряда в дифференциальной форме):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Плотности заряда и тока, создаваемые заряженными точечными частицами, равны

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t .

Первая пара уравнений Максвелла позволяет параметризовать электромагнитное поле с помощью введения скалярного φ и векторного \mathbf{A} потенциалов:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

2) Уравнения Максвелла в четырехмерной форме. Скалярный и векторный потенциал вместе составляют компоненты 4-вектора $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$, при этом электрическое и магнитное поля, будучи производными от компонент 4-потенциала по компонентам 4-радиус-вектора, представляют собой компоненты 4-тензора электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Компоненты электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} поляй следующим образом связаны с компонентами антисимметричного тензора поля:

$$E_k = F_{0k}, \quad H_k = -\frac{1}{2} e_{kl} F^{kl}.$$

и это можно представить наглядно в виде матрицы:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Введение тензора электромагнитного поля позволяет записать уравнения Максвелла в четырехмерной форме, при этом первая пара определяется 4-дивергенцией дуального тензора $\tilde{F}^{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$:

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{— первая пара.} \quad (1.6)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \text{— вторая пара.} \quad (1.7)$$

4-Вектор электрического тока имеет вид $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, а уравнение непрерывности есть 4-дивергенция 4-плотности тока:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Потенциалы для заданного электромагнитного поля определены неоднозначно: благодаря калибровочной симметрии всегда можно совершить калибровочное (градиентное) преобразование:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \text{или} \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f,$$

где $f(t, x, y, z)$ — произвольная функция. Данные преобразования оставляют напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} неизменными.

Для того, чтобы частично ограничить произвол, связанный с калибровочной симметрией, на потенциалы накладывают дополнительные, калибровочные условия, которые часто называют просто калибровкой. Обычно используют следующие калибровочные условия:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{— калибровка Лоренца.}$$

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad \text{— калибровка Кулона.}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{— калибровка Вейля.}$$

При постановке явного выражения для тензора $F^{\mu\nu}$ через компоненты 4-потенциала во вторую пару (1.7) имеем уравнение

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

В этом случае удобно выбрать калибровку Лоренца, чтобы получить волновые уравнения для компонент 4-потенциала:

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \text{где} \quad -\partial_\nu \partial^\nu = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square \quad (1.8)$$

— оператор Даламбера.

После выбора калибровки Лоренца остается возможность подвернуть потенциалы остаточным калибровочным преобразованиям, которые, по-прежнему не изменяя полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , не нарушают калибровку Лоренца:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad \text{причем} \quad \square f = 0.$$

Электрическое и магнитное поля, будучи компонентами 4-тензора, преобразуются при переходе из одной системы отсчета в другую согласно преобразованиям Лоренца для компонент 4-тензора. В случае стандартного преобразования Лоренца имеем

$$\begin{aligned} H_z &= H'_z, \quad H_x = \frac{H'_x - \beta E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H_y = \frac{H'_y + \beta E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_x &= E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \beta H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \beta H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Заметим, что преобразование компонент электрического поля проще получить, преобразуя дуальный тензор $F^{\mu\nu}$:

Тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ вместе с дуальным тензором $\tilde{F}^{\mu\nu}$ позволяет определить два инварианта электромагнитного поля:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) = I_1 = i n \omega, \quad F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = I_2 = i n \omega. \quad (1.9)$$

3) Действие для электромагнитного поля. Уравнения для электромагнитного поля и движения заряженных частиц в общей форме можно получить, исходя из принципа минимума действия. В самом общем виде действие представляется как сумма слагаемых, описывающих отдельные подсистемы и их взаимодействия, поэтому для электрических заряженных частиц и электромагнитного поля, взаимодействующих друг с другом, оно должно состоять из слагаемых трех типов:

$$S = S_{part} + S_{int} + S_{int}. \quad (1.10)$$

t — действие для частиц, действие для поля и действия, описывающего взаимодействие частиц и поля. В силу универсальности принципа минимума действия, оно обязательно должно быть скаляром, т. е. в нашем случае 4-инвариантом. При конструировании конкретных выражений для действий необходимо учитывать дополнительные условия, в частности, полученная теория должна быть калибровочно-инвариантна, и, кроме того, обеспечивать правильный переход в известные выражения в Керелективистском пределе (принцип соответствия).

При получении уравнений для поля, взаимодействующего с заряженными частицами, необходимо использовать второе и третье слагаемые

мые в (I.10). Эти члены удобно выписать в виде действия для электромагнитного поля с источниками:

$$S[A_\mu(x)] = \int \left(-\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{16\pi c} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right) d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x. \quad (I.11)$$

Здесь интегралы над всеми мировыми линиями частиц записаны в виде интеграла по пространству-времени и введен 4-вектор плотности тока

$$j^\mu(x) = \sum_a \int \delta^{(4)}(x - x_a(s_a)) e_a \frac{dx_a^\mu}{ds_a} ds_a, \quad (I.12)$$

где $x_a^\mu(s_a)$ — 4-радиус-вектор a -й частицы, dx_a^μ/ds_a — ее четырехмерная скорость (I.2), $s_a = ct_a$ — интервал, связанный с собственным временем частицы, $\delta^{(4)}(x - x_a(s_a)) = \delta(ct - x_a^0(s_a))\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_a(s_a))$ — четырехмерная δ -функция. Интегрируя в (I.12) по ds_a при помощи (I.7), приходим к известному выражению (I.5). Заметим, что поскольку элемент четырехмерного объема d^4x — скаляр, плотность лагранжиана \mathcal{L} — также скалярная функция.

Компоненты четырехмерного потенциала поля A_μ являются здесь независимыми обобщенными координатами, по которым вычисляется зарядное действие. Из условия минимума зарядного действия по A_μ , т. е. $\delta S[A_\mu(x)] = 0$, получаем уравнение Эйлера для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0,$$

из которого следует вторая пара уравнений Максвелла (I.7) (согласно определению тензора $F_{\mu\nu}$ первая пара (I.6) выполняется тождественно).

4) Тензор энергии-импульса. Взяв за основу действие для электромагнитного поля $S_{\text{общ}}$ (см. (I.10)) или первое слагаемое в (I.11), можно найти так называемый канонический тензор энергии-импульса

$$\bar{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial^\nu A_\mu - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (I.13)$$

Определение тензора энергии-импульса (I.13) вообще говоря неоднозначно, к нему можно добавить любой тензор $\delta T^{\mu\nu}$ с равной нулю 4-дивергенцией:

$$T^{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu (\delta T^{\mu\nu}) = 0,$$

который обычно выбирают так, чтобы в итоге тензор энергии-импульса был симметричным: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha \right)$$

При переходе к трехмерным обозначениям тензор распадается на блоки:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & \boldsymbol{\sigma}_s \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

где плотность энергии w и вектор плотности потока энергии \mathbf{S} (вектор Умова-Пойнтинга) для электромагнитного поля равны

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

Плотность импульса \mathbf{g} и тензор напряжений σ_{ij} электромагнитного поля определяются как

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad \sigma_{ij} = w \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + H_i H_j).$$

Для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля и взаимодействующих с ним частиц, выполняется закон сохранения энергии-импульса:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_{\text{int}} = 0, \quad (1.15)$$

и это является наглядной иллюстрацией теоремы Нетер, которая говорит о том, что инвариантности лагранжиана теории относительно какого-либо однопараметрического преобразования соответствует локальный сохраняющийся ток. В данном случае сохранение энергии-импульса отвечает инвариантности лагранжиана относительно пространственно-временных трансляций $x^i \rightarrow x^i + a^i$.

Если же записать выражение для 4-дивергенции только тензора энергии-импульса поля, то вместо (1.15) мы получим

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -\mathcal{F}^\mu, \quad (1.16)$$

где \mathcal{F}^μ есть плотность силы, действующей на систему зарядов со стороны поля. В трехмерном виде данное уравнение записывается как

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\rho \mathbf{E} - \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_j. \end{cases} \quad (1.17)$$

6. Движение заряженной частицы во внешнем поле

Уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле можно получить из общего принципа минимума действия, причем в данном случае необходимо использовать первое и третье слагаемые в (1.10). Действие для одной частицы, взаимодействующей с полем, удовлетворяющее всем дополнительным условиям, можно записать в виде

$$S[\mathbf{x}(s)] = - \int_a^b \left(mc \sqrt{\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds}} + \frac{e}{c} A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right) ds = \int_a^b L dx, \quad (1.18)$$

где пределы интегрирования указывают начальное и конечное положение частицы на мировой линии, L — соответствующая функция Лагранжа (лагранжиан). Вариация действия (1.18) по координатам частицы $x^\mu(s)$ при фиксированном поле A_μ дает обычное уравнение Лагранжа, из которого следуют уравнения движения частицы в ковариантной форме:

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (1.19)$$

где $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$, $u^\mu = dx^\mu/ds$ — четырехмерная скорость частицы (1.2). В трехмерной форме эти уравнения записываются как

$$\frac{dp}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (1.20)$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{Ev}). \quad (1.21)$$

Правая часть в уравнении (1.20) представляет собой силу Лоренца, а уравнение (1.21) (временная компонента (1.19)) есть не что иное, как закон изменения энергии частицы.

Для системы с распределенными зарядами и токами с плотностями соответственно ρ и j обычно имеют значение плотности силы \mathcal{F} (см. (1.16))

$$\mathcal{F} = \rho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) \text{ так, что } \mathbf{F} = \int \mathcal{F} d^3r.$$

Тогда изменение энергии системы с распределенными зарядами принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = \int d^3r (\mathcal{F} \mathbf{v}) = \int d^3r \rho (\mathbf{v} \mathbf{E}) = \int d^3r (j \mathbf{E}).$$

Закон сохранения энергии в системе заряженных частиц в электромагнитном поле можно записать в интегральной форме (см. (1.17)):

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{dW}{dt} - \int d^3r \operatorname{div} \mathbf{S} = - \frac{dW}{dt} - \oint (\mathbf{S} dr).$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$$

— энергия электромагнитного поля в объеме, через границу которого вытекает энергия поля, уносимая вектором Пойнтинга, E — энергия заряженных частиц, находящихся в рассматриваемом объеме.

Вычисляя по общим правилам на основании (1.18) обобщенный 4-импульс $P_\mu = -\partial L/\partial u^\mu = mcu_\mu + (e/c)A_\mu$, получаем, что обобщенный импульс заряженной частицы в электромагнитном поле отличается от кинематического:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

Функция Гамильтона частицы во внешнем поле равна

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \sqrt{\mathbf{P}^2 c^2 + m^2 c^4 + e\varphi} = \sqrt{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 c^2 + m^2 c^4 + e\varphi(\mathbf{r})}.$$

7. Статическое электромагнитное поле

Волновые уравнения для компонент 4-потенциала (1.8) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений, решение которых может быть записано в виде

$$A^\mu = A_0^\mu + A_s^\mu,$$

где A_0^μ — общее решение однородного уравнения, а A_s^μ — частное решение неоднородного уравнения, которое определяется распределением зарядов. Общее решение однородного уравнения представляет собой свободное электромагнитное поле, а частное решение неоднородного уравнения может быть получено с помощью функции Грина, которая удовлетворяет уравнению с точечным источником:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (1.22)$$

Отсюда следует, что решение для A_s^μ имеет вид

$$A_s^\mu = \frac{1}{c} \int f^\mu(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d^3r' dt'. \quad (1.23)$$

Физическим условиям удовлетворяет решение уравнения (1.22) в форме запаздывающей функции Грина:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (1.24)$$

Частное решение для компонент 4-потенциала (I.23) после интегрирования по времени принимает вид *запаздывающих потенциалов*:

$$A_i^{\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{f^{\mu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (I.25)$$

Самый простой вид частное решение волновых уравнений принимает в случае статического распределения зарядов и стационарных токов, когда подинтегральная функция не зависит от времени. В этом случае решение можно рассмотреть независимо для скалярного и векторного потенциалов, из которых получаются соответственно статическое электрическое и статическое магнитное поля.

Скалярный потенциал, создаваемый в точке \mathbf{R} , равен

$$\varphi(\mathbf{R}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3 r = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_a|},$$

причем здесь приведены выражения для системы распределенных и точечных зарядов. На больших расстояниях от системы зарядов ($|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}_a|$ или $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}|$) справедливо разложение по *мультипольным моментам*:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \varphi^{(0)}(\mathbf{R}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{R}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{R}) + \dots,$$

где

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{R}) = \frac{q}{R}, \quad \varphi^{(1)}(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{R} \mathbf{d})}{R^3}, \quad \varphi^{(2)}(\mathbf{R}) = \frac{X_1 Y_1 Q_1}{2 R^5}. \quad (I.26)$$

В выражениях (I.26) слагаемые разного порядка по малому параметру $r/R \ll 1$ имеют смысл полного заряда (нулевого момента), дипольного (первого) момента и квадрупольного (второго) момента и для системы точечных зарядов равны

$$q = \sum_a e_a, \quad \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a, \quad Q_1 = \sum_a e_a (3x_{ai}x_{aj} - \delta_{ij}r_a^2). \quad (I.27)$$

Заметим, что след тензора квадрупольного момента (инвариант) равен нулю: $Q_1 = 0$.

Для системы распределенных зарядов сумма заменяется интегрированием по плотности распределения зарядов $\rho(\mathbf{r})$.

Аналогичное разложение по мультиполям имеет место и для энергии взаимодействия системы зарядов с неоднородным статическим электрическим полем, если характерный масштаб неоднородности электрического поля много больше характерных размеров системы зарядов:

$$U = \sum_a \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_a) = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots, \quad (I.28)$$

где соответственно

$$U^{(0)} = \sum_a e_a \varphi(\mathbf{R}) = q\varphi(\mathbf{R}),$$

$$U^{(1)} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \sum_a e_a \mathbf{r}_a = -(\mathbf{dE}), \quad U^{(2)} = \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_i \partial X_j} \quad (1.29)$$

Сила, действующая на систему зарядов, определяется как $\mathbf{F} = -\nabla U$, и для системы зарядов, обладающей дипольным электрическим моментом, равна

$$\mathbf{F} = -\nabla(U^{(0)} + U^{(1)}) = -q\nabla\varphi + \nabla(\mathbf{dE}) = q\mathbf{E} + (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}, \quad (1.30)$$

причем здесь мы учли уравнение Максвелла для статического поля: $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

Векторный потенциал, создаваемый в точке \mathbf{R} , равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int \frac{j(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} d^3r = \sum_a \frac{e_a \mathbf{v}_a}{c|\mathbf{R}-\mathbf{r}_a|},$$

где приведены соответственно выражения для системы распределенных, но ограниченных в пространстве токов, и движущихся точечных зарядов, а черта означает усреднение по времени, поскольку ограничение в пространстве распределение токов не может создаваться зарядами, движущимися с постоянной скоростью \mathbf{v} .

При разложении векторного потенциала по мультипольным моментам обычно ограничиваются первым (дипольным) отличным от нуля членом, который имеет вид

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{cR^3} \int (\mathbf{Rr}) j(\mathbf{r}) d^3r$$

и выражается через **магнитный дипольный момент** системы μ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{[\mu \times \mathbf{R}]}{R^3} = -[\mu \times \nabla] \frac{1}{R}, \quad (1.31)$$

где введено обозначение:

$$\mu = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3r = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]. \quad (1.32)$$

В нерелятивистском случае $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$, поэтому магнитный момент связан с моментами импульсов частиц:

$$\mu = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} \mathbf{M}_a. \quad (1.33)$$

где \mathbf{M}_a — момент импульса частицы, не зависящий от времени в нашем случае.

Величина, равная

$$\gamma_a = \frac{e_a}{2m_a c}, \quad (1.34)$$

называется гиromагнитным отношением частицы. Если отношение заряда к массе для всех частиц системы одинаково, можно ввести единичное гиromагнитное отношение для всей системы (правое γ), тогда магнитный момент связан с полным моментом импульса:

$$\mu = \frac{\mu}{2mc} \sum_a \mathbf{M}_a = \gamma \mathbf{M}. \quad (1.35)$$

Во внешнем статическом неоднородном магнитном поле силу, действующую на систему токов, можно разложить по мультипольным моментам. Обычно учитывается только взаимодействие с магнитным моментом:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{r})] d^3r = \text{rot}[\mathbf{H} \times \mu] = (\mu \nabla) \mathbf{H}, \quad (1.36)$$

где мы принесли во внимание, что в статическом случае $\text{div } \mathbf{j} = 0$, а также уравнение Максвелла $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Силу (1.36) можно получить, введя эффективную энергию U_m магнитного момента в магнитном поле:

$$U_m = -(\mu \mathbf{H}), \quad \text{поэтому} \quad \mathbf{F} = -\nabla U_m. \quad (1.37)$$

На систему токов также действует момент силы

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H})] d^3r = -[\mathbf{H} \times \mu].$$

Под действием момента силы изменяется момент импульса системы в соответствии с уравнением Лормара:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} = [\mu \times \mathbf{H}]. \quad (1.38)$$

Если система токов создается зарядами с одинаковыми гиromагнитными отношениями γ , уравнение (1.38) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}] = -[\Omega \times \mathbf{M}], \quad (1.39)$$

где введена лормортова частота $\Omega = \gamma H$, вектор которой направлен вдоль или против магнитного поля, в зависимости от знака γ (т. е. заряда).

8. Свободное электромагнитное поле

Общее решение однородного волнового уравнения может быть представлено в виде плоской волны, т. е. функции, зависящей только от аргумента $t - \pi r/c$, где единичный вектор π определяет направление распространения поля. Общее решение для потенциалов принято рассматривать в кулоновской калибрации, тогда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{A}] = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (1.40)$$

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости, перпендикулярной единичному вектору $\pi \parallel z$, таким образом, три вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} и π взаимно ортогональны и составляют правую тройку векторов, а поле оказывается поперечным. Плотность потока энергии в плоской электромагнитной волне равна

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 \mathbf{n}.$$

Плоская электромагнитная волна может быть разложена в интеграл Фурье:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \int \mathbf{A}_{k\omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{A}_{k\omega} = \int \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{r} dt, \quad (1.41)$$

Действительная часть фурье-образа представляет собой частный случай плоской волны:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_{k\omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \} \quad (1.42)$$

и называется *плоской монохроматической волной*. Аргумент такой волны (фаза волны) есть $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega(t - \pi r/c)$, вектор \mathbf{k} называется *волновым вектором* ($|\mathbf{k}| = k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$). Фазу волны можно представить в лоренц-инвариантном виде: $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = k^\mu x_\mu$, если ввести четырехмерный волновой вектор:

$$\hat{x}^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad k^\mu k_\mu = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \mathbf{k}^2 = 0.$$

Напряженности электрического и магнитного полей в плоской монохроматической волне принято записывать следующим образом:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}, \quad \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}. \quad (1.43)$$

Электрическое поле в плоской монохроматической волне может быть всегда представлено в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \} = \operatorname{Re} \{ (E_{01} \mathbf{e}^{(1)} + i E_{02} \mathbf{e}^{(2)}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \} = \\ = \mathbf{e}^{(1)} |E_{01}| \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha) + \mathbf{e}^{(2)} |E_{02}| \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha), \quad (1.44)$$

где $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ — единичные (в общем случае комплексные) векторы, ортогональные друг другу и волновому вектору \mathbf{k} . Поэтому с плоской монохроматической волной можно связать локальный базис или референс, образованный векторами $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$, которые подчиняются условиям

$$(\mathbf{e}^{(1)*}\mathbf{e}^{(2)}) = (\mathbf{e}^{(1,2)}\mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{e}^{(2)} = [\mathbf{n} \times \mathbf{e}^{(1)}]. \quad (1.45)$$

Направление вектора электрического поля в локальной системе координат называется поляризацией, которую удобно представлять в виде единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0/|\mathbf{E}_0| = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)}$. Плоская монохроматическая волна всегда поляризована. В локальной системе координат вектор поля \mathbf{E} описывает эллипс. Если $E_{02} = \pm E_{01}$ — волна является циркулярно поляризованной. Если $E_{02} = 0$ — волна линейно поляризована (см. (1.44)).

Таким образом, линейную или циркулярную (круговую) поляризацию плоской волны можно задать, выбирай в качестве векторов локального базиса вещественные векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ — для линейной поляризации или $\mathbf{e}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)})$ — для циркулярной поляризации.

9. Запаздывающие потенциалы, излучение

Система зарядов может излучать электромагнитное поле и при этом терять энергию, если поток энергии поля \mathbf{S} через бесконечно удаленную замкнутую поверхность отличен от нуля:

$$I = \oint (\mathbf{S} d\ell) \neq 0. \quad (1.46)$$

Для этого необходимо, чтобы поле излучения убывало на больших расстояниях от системы зарядов как

$$E, H|_{R \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{R}.$$

Величина I , определяющая потерю энергии в единицу времени, называется интенсивностью излучения.

Такая зависимость полей от расстояния может быть получена из выражения для запаздывающих потенциалов (1.25). На больших расстояниях электрическое и магнитное поле излучения представляют собой сферическую расходящуюся волну, но связь между собой та же, как в плоской волне, т. е. в свободном электромагнитном поле, где теперь единичный вектор распространения и направлен от излучающей системы в точку наблюдения поля.

Для нерелятивистских систем зарядов запаздывающие потенциалы могут быть разложены по мультипольям. В этом случае наряду с уже имеющимся малым параметром $a/R \ll 1$, где a — характерный линейный

размер системы, появляется еще один, связанный с нерелятивистским характером движения, $v/c \ll 1$, где v — характерная скорость движения зарядов. Поскольку заряды совершают движение в ограниченном объеме, с ним также связано характеристическое время $T \sim a/v$, что в разложении запаздывающих потенциалов по плоским монохроматическим волнам приводит к появлению характерной частоты поля $\omega = c/a \gg v/a = T^{-1}$. Таким образом, появляется еще один размерный параметр λ — характерная длина волны. В зависимости от соотношения между a , λ и R различают три области пространства, в которых рассматриваются поля, получаемые из запаздывающих потенциалов:

1) **квазистатическая зона**: $a \ll R \ll \lambda$, в которой можно пренебречь эффектами запаздывания;

2) **индукционная (переходная) область**: $a \ll R \sim \lambda$, в которой существенны эффекты запаздывания, но поле излучения еще не сформировано;

3) **волновая зона**: $a \ll \lambda \ll R$, в которой остаются только поля, убывающие с расстоянием как $1/R$.

Поскольку поля в волновой зоне связаны между собой так же, как в плоской волне, удобно выбрать кулоновскую калибровку и рассматривать только векторный потенциал:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|/c) d^3\mathbf{r}' = \\ = \frac{1}{cR} \int \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})^2 + \dots \right) d^3\mathbf{r}', \quad (1.47)$$

где $t' = t - R/c$ — запаздывающий момент времени, единий для всех зарядов нерелятивистской системы.

Первый член разложения в формуле (1.47), т. е.

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int \mathbf{H}(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{d}(t')}{cR} \Big|_{t'=t-R/c} \quad (1.48)$$

определяется электрическим дипольным моментом системы. Поле в волновой зоне, создаваемое потенциалом (1.48), называется **электрическим дипольным излучением** и равно

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{R}, t) = \frac{[\mathbf{d}(t') \times \mathbf{n}]}{c^2 R}, \quad \mathbf{E}_d(\mathbf{R}, t) = \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{d}(t')]]}{c^2 R}. \quad (1.49)$$

причем правые части в (1.49) берутся в запаздывающий момент времени $t' = t - R/c$. Установленное распределение интенсивности электрического дипольного излучения описывается формулой

$$\frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^2} \mathbf{H}^2 = \frac{[\mathbf{d}(t') \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} \Big|_{t'=t-R/c}. \quad (1.50)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, соответствующего направлению \mathbf{n} . Полная интенсивность электрического дипольного излучения равна

$$I_d = \frac{2d^2}{3c^2} \quad (1.51)$$

Второй член разложения (1.47) дает одновременно выражение векторного потенциала, создаваемого магнитным дипольным и электрическим квадрупольным моментами: $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_Q$, где

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \frac{\partial}{\partial t} [\mu \times \mathbf{n}] = \left. \frac{[\hat{\mu}(t') \times \mathbf{n}]}{cR} \right|_{r' = r - R/c} \quad (1.52)$$

определяет магнитное дипольное излучение, а электрическое квадрупольное равно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_Q(\mathbf{R}, t) &= \frac{n_i}{6c^2 R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{ij}(t') \Big|_{r' = r - R/c}, \quad \text{или} \\ \mathbf{A}_Q(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{6c^2 R} \tilde{\mathbf{D}}(t') \Big|_{r' = r - R/c}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Для удобства принято вводить вектор $D_i = Q_{ij}n_j$.

Магнитное поле излучения во втором порядке разложения имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_m + \mathbf{H}_Q = \frac{1}{c^2 R} [(\hat{\mu}(t') \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] + \frac{1}{6c^2 R} [\tilde{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}]$$

Угловое распределение интенсивности излучения с учетом двух порядков разложения содержит интерференционные («перекрестные») члены, которые обращаются в ноль при интегрировании по углам, поэтому полная интенсивность излучения во втором порядке разложения может быть записана в виде суммы

$$I_Q = I_m + I_Q = \frac{2}{3c^2} \hat{\mu}^2 + \frac{1}{180c^2} \tilde{Q}_{ijk}^2$$

Потери энергии системой заряженных частиц на излучение можно описать приближенно с помощью работы эффективной силы радиационного трения. Например, для одной заряженной частицы можно записать: $I = (\mathbf{F}_{rad} \cdot \dot{\mathbf{v}})$. Соответственно, для одной частицы имеем

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c} \ddot{\mathbf{v}} = \frac{2e}{3c} \mathbf{d} \quad (1.54)$$

Для системы зарядов, излучающей в электрическом дипольном приближении, остается справедливым последнее выражение в формуле (1.54).

Наряду с силой радиационного трения можно также ввести момент сил, приводящий к потере момента импульса системы частиц:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} [\mathbf{d} \times \mathbf{d}]$$

10.

Электромагнитное поле релятивистских частиц

Излучение релятивистских движущихся частиц не удается описать на языке мультипольных моментов, поэтому следует сперва рассмотреть излучение одной релятивистской частицы, а для системы частиц результат получается в соответствии с принципом суперпозиции. Для одной частицы частное решение для компонент 4-потенциала (1.23) следует записать с помощью запаздывающей функции Грина (1.24), где плотность заряда и тока (1.5) соответствует одной точечной частице: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$, при этом $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ — скорость частицы. Для векторного потенциала имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) d^3 r' dt'. \quad (1.55)$$

В результате вычислений⁴⁾ находим, что векторный потенциал, создаваемый релятивистским движущимся зарядом, равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{ev}{cR(1 - (\mathbf{v}\mathbf{v})/c)} \right|_{\mathbf{r}'}, \quad (1.56)$$

Аналогичное выражение имеем для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{e}{R(1 - (\mathbf{v}\mathbf{v})/c)} \right|_{\mathbf{r}'}. \quad (1.57)$$

Потенциалы (1.56) и (1.57) называются потенциалами Ленара-Вильсона. В формулах (1.56) и (1.57) введены следующие обозначения: $R(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $R(t') = |\mathbf{R}(t')|$, $\mathbf{n}(t') = \mathbf{R}(t')/R(t')$ — единичный вектор по направлению \mathbf{R} . Правые части в этих выражениях берутся в залазывающий момент времени t' , который представляет собой решение уравнений

$$t' - t + \frac{R(t')}{c} = 0. \quad (1.58)$$

⁴⁾ Детали вычислений см. в решении задачи 1.9.1.

Название «запаздывающее время» объясняется тем, что разность времени $t - t' = R(t')/c$ в точности равна времени распространения электромагнитного поля из точки формирования $r_0(t')$ до точки наблюдения r_0 . Дифференцирование выражения (1.58) по времени t' дает соотношение

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{(nv)}{c}, \quad (1.59)$$

позволяющее установить связь между интервалами времени наблюдения и запаздывающего времени.

Из потенциалов (1.56) и (1.57) можно получить выражения для напряженностей электромагнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e[c(\mathbf{w} \times \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \times \mathbf{n})]}{c^2 R(1 - (nv)/c)^3} + \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{v} \times \mathbf{n})}{cR^2(1 - (nv)/c)^3}, \quad (1.60)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e[\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w})]}{c^2 R(1 - (nv)/c)^3} + \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{R^2(1 - (nv)/c)^3}, \quad (1.61)$$

где $\mathbf{w} = \dot{\psi}(t')$ — ускорение заряда. Электромагнитное поле, описываемое формулами (1.60) и (1.61), всегда удовлетворяет условию $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]$, т. е. вектор \mathbf{H} всегда перпендикулярен вектору \mathbf{E} и единичному вектору, направленному от заряда в запаздывающий момент времени в точку наблюдения.

На больших расстояниях от частицы в волновой зоне поле равно

$$\mathbf{E} = \frac{e[\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w})]}{c^2 R(1 - (nv)/c)^3}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (1.62)$$

Энергия электромагнитного поля $d\varepsilon$, испускаемая зарядом в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ в течение интервала времени $t' \pm t' + dt'$, пройдет через элемент площади $dS = R^2 d\Omega$ в течение времени от t до $t + dt$, причем момент излучения t' и момент наблюдения t связаны соотношением (1.58). На больших расстояниях от излучающего заряда (в волновой зоне, при $|r_0| \ll |r|$) эта энергия равна

$$d\varepsilon = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 R^2 d\Omega dt,$$

где \mathbf{E} определяется формулой (1.62). Поэтому интенсивность излучения, т. е. энергия, регистрируемая наблюдателем в единицу времени, равна

$$\frac{dt}{d\Omega} = \frac{d^2 \varepsilon}{d\Omega dt} = \frac{c^2}{4\pi r^2} \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w})|^2}{(1 - (nv)/c)^3} \Big|_{t'}, \quad (1.63)$$

Уточним, что формула (I.63) описывает угловое распределение интенсивности, полная интенсивность излучения $F = d\epsilon/dt$ получается из (I.63) и результате интегрирования по углам.

Чаще представляет интерес мощность излучения, т.е. энергия, излучаемая частицей в единицу запаздывающего времени t' . Очевидно, мощность равна с точностью до знака скорости потери энергии частицей:

$$W = \frac{d\epsilon}{dt'} = -\frac{d\epsilon}{dt}. \quad (I.64)$$

Мощность отличается от интенсивности излучения. С учетом условия $dt = dt'(1 - (nv)/c)$ (см. формулу (I.59)) оказывается, что угловые распределения мощности и интенсивности связаны следующим соотношением:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{d^2\epsilon}{dt'd\Omega} = \left(1 - \frac{(nv)}{c}\right) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (I.65)$$

Подчеркнем, что, как видно из (I.65), отличие мощности от интенсивности особенно важно именно в релятивистском случае, если же $v/c \ll 1$, то различие между этими величинами исчезает.

Таким образом, скорость полных потерь энергии частицы равна

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -W = - \int \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\mathbf{v} \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w})]^2}{(1 - (nv)/c)^5} d\Omega. \quad (I.66)$$

Непосредственное интегрирование в (I.66) по углам представляет некоторые технические трудности, но для вычисления полной мощности излучения достаточно заметить, что величина $d\epsilon/dt'$ является релятивистским инвариантом, поэтому выражение для нее может быть записано в релятивистской-координантной форме:

$$\frac{d\epsilon}{dt'} = \frac{2}{3} e^2 c w^\mu \omega_\mu, \quad (I.67)$$

где ω^μ — вектор 4-ускорения частицы. В собственной системе отсчета частицы K_0 , где ее мгновенная скорость равна нулю ($v_0 = 0$), выражение для мощности излучения (I.67) принимает вид

$$\left. \frac{d\epsilon}{dt'} \right|_{K_0} \equiv \frac{d\epsilon_0}{dt'_0} = -\frac{2e^2 w_0^2}{3c^2},$$

где w_0 — ускорение частицы в собственной (мгновенно сопутствующей) системе отсчета. Полученная формула называется формулой Лоренца. Поскольку в лабораторной системе отсчета в момент времени t' вектор 4-скорости имеет вид (см. (I.2))

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{cd\tau} = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dx^\mu}{dt'} \equiv \frac{\gamma - d}{c} \frac{d}{dt'} (ct', \mathbf{r}) = \gamma \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right),$$

компоненты 4-вектора ускорения частицы будут равны

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} \left(\gamma \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} \right). \quad (I.68)$$

Подставляя полученный результат в формулу (I.67), получаем обобщение формулы Лармора, называемое *формулой Лиенара*:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2 \gamma^5}{3c^3} \left\{ \mathbf{w}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{c^2} \right\}. \quad (I.69)$$

11. Рассеяние электромагнитных волн

Заряды в некоторой системе под действием поля электромагнитной волны начинают ускорению двигаться, что приводит к излучению электромагнитных волн. С другой стороны, под падающей электромагнитной волны совершает работу над системой зарядов и ее энергия поглощается. Таким образом, поле, излучаемое системой зарядов в результате воздействия поля падающей волны, следует рассматривать как поле *рассеянной волны*. Все процессы рассеяния принято описывать *дифференциальным сечением рассеяния*

$$d\sigma = \frac{dI}{|\mathbf{S}|},$$

где dI — интенсивность излучения, уходящего от системы зарядов в данном направлении в элемент телесного угла $d\Omega$ в единицу времени, $|\mathbf{S}|$ — плотность потока энергии поля, падающего на единицу площади системы зарядов в единицу времени.

Обычно рассматривают рассеяние плоской монохроматической волны, тогда получают *спектральное разложение* дифференциального сечения рассеяния. В плоской монохроматической волне

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} \overline{(\operatorname{Re}\{ E_0 e^{i(kr-\omega t)} \})^2} = \frac{1}{8\pi} (E_{01}^2 + E_{02}^2).$$

Относительно просто рассмотреть рассеяние системами зарядов в нерелятивистском приближении. Для одного заряда следует рассматривать электрическое дипольное излучение, поэтому

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{r} \times \mathbf{n}|^2,$$

где \mathbf{r} определяется из уравнения движения в электрическом поле падающей волны, поскольку в нерелятивистском случае действием магнит-

чего поля можно пренебречь, а электрическое поле плоской монохроматической волны с той же точностью можно считать однородным:

$$m\ddot{r} = e\mathbf{E} + \mathbf{F}_{\text{од}}, \quad \text{или} \quad \ddot{r} - \frac{2e^2}{3mc^2}\dot{r} = \frac{e}{m} \operatorname{Re}\{e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\}. \quad (1.70)$$

Частное решение уравнения движения залишем в виде

$$\ddot{r} = \frac{e^2}{m\omega^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1+i\gamma} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\right\}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{2e^2}{3mc^2} \omega$$

— естественная ширина линии излучения. Выражение для дифференциального сечения рассеяния (при условии $\gamma \ll 1$) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{n}]^2 + (E_0/E_{\text{ок}})^2 [\mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{n}]^2}{1 + (E_0/E_{\text{ок}})^2}. \quad (1.71)$$

Полное сечение рассеяния получается интегрированием дифференциального сечения (1.71) по всем углам и равно

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (1.72)$$

где $r_0 = e^2/(mc^2)$ — классический радиус электрона. Сечение рассеяния (1.72) называется томсоновским.

Рассеяние волн свободной частицей сопровождается действием на частицу силы со стороны падающей волны. Средняя (по времени) действующая на частицу сила определяется средним значением импульса поля, который изглашается частицей в единицу времени. Выражение для силы можно представить в виде

$$\overline{\mathbf{F}} = \sigma_T \overline{\mathbf{w}} \mathbf{n}, \quad (1.73)$$

где σ_T — томсоновское сечение (1.72), $\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{E}^2}/(4\pi)$ — средняя плотность энергии поля (импульс поля равен его энергии, деленной на скорость света), \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения падающей волны.

ЗАДАЧИ

1.1.

ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

- 1.1.1. Показать, что скалярное произведение двух действительных векторов инвариантно относительно преобразований системы координат.
- 1.1.2. Показать, что билинейная комбинация, составленная из произведения компонентов двух векторов $A_i B_j$, есть тензор второго ранга.
- 1.1.3. Показать, что тензор δ_{ij} может быть представлен как

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

- 1.1.4. Убедиться, что тензор δ_{ij} инвариантен относительно ортогональных преобразований системы координат.
- 1.1.5. Вычислить свертку δ_{ii} .
- 1.1.6. Вычислить $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{li}$.
- 1.1.7. Вычислить $e_{ijk}e_{lmn}$.
- 1.1.8. Вычислить $e_{ijk}e_{mnp}$.
- 1.1.9. Вычислить $e_{ijk}e_{jkl}$.
- 1.1.10. Вычислить $e_{ijk}e_{jkl}$.
- 1.1.11. Преобразовать выражение $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{a})$.
- 1.1.12. Преобразовать выражение $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$.
- 1.1.13. Преобразовать выражение $\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$.
- 1.1.14. Преобразовать выражение $\text{grad}(\mathbf{ab})$.
- 1.1.15. Считав вектор μ постоянным, вычислить $\text{div}(\mu \mathbf{r})$.
- 1.1.16. Вычислить $\text{grad}(\mu \mathbf{r})$.

- 1.1.17. Вычислить $\text{rot}[\mu \times \mathbf{r}]$.
- 1.1.18. Вычислить $\text{div}(\mu/\mathbf{r})$.
- 1.1.19. Вычислить $\text{rot}(\mu/\mathbf{r})$.
- 1.1.20. Вычислить градиент экспоненты e^{kr} .
- 1.1.21. Считая вектор \mathbf{A} постоянным, вычислить $\text{div}(\mathbf{A}e^{kr})$.
- 1.1.22. Вычислить $\text{rot}(\mathbf{A}e^{kr})$.
- 1.1.23. Показать, используя свойства тензора ε_{ijk} , что векторное произведение антисимметрично относительно перестановки сомножителей.
- 1.1.24. Используя свойства тензора ε_{ijk} , получить формулу двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

- 1.1.25. Вычислить $(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r}$.
- 1.1.26. Преобразовать интеграл $\int_V f(\mathbf{r}) \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV$. Использовать инвариантную и тензорную формы записи.
- 1.1.27. Используя инвариантную и тензорную формы записи, преобразовать в интеграл по поверхности объемный интеграл от выражения $(\text{grad } f) \text{rot } \mathbf{A}$.
- 1.1.28. В этом и следующих выражениях вычислить поверхностные интегралы, связанные с объемными: $\int_S (\mathbf{r} dS)$.
- 1.1.29. $\int_S z dx dy$.
- 1.1.30. Считая вектор \mathbf{c} постоянным, вычислить $\int_S \mathbf{c} dS$.
- 1.1.31. Считая вектор \mathbf{c} постоянным, вычислить $\int_S (\mathbf{c} \mathbf{r}) dS$.
- 1.1.32. $\int_S [dS \times \mathbf{A}]$.
- 1.1.33. Считая вектор \mathbf{c} постоянным, вычислить $\int_S (\mathbf{c} dS) \mathbf{A}$.
- 1.1.34. Преобразовать интеграл по контуру от скалярной функции к поверхностному

$$\oint_C f d\mathbf{l}.$$

- 1.1.35. Доказать формулу:

$$\frac{1}{2} \oint_C |\mathbf{dr} \times \mathbf{r}| = \int_S dS$$

1.2. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

- 1.2.1. Вычислить $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$.
- 1.2.2. Вычислить $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$.
- 1.2.3. Вычислить $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$.
- 1.2.4. Вычислить дуальный к волности антисимметричному тензору $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ скаляр \bar{e} в 4-мерном пространстве Минковского.
- 1.2.5. Выразить дважды дуальный тензор $\bar{F}_{\mu\nu}$ через исходный антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$.
- 1.2.6. Пусть $G_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu}$. Записать G^λ через $\bar{F}^{\mu\nu}$.
- 1.2.7. Пусть $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Записать $\bar{F}^{\mu\nu}$ через $\bar{A}^{\mu\nu}$.
- 1.2.8. Выразить $\bar{F}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}$ через антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$.

1.3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

- 1.3.1. Записать произведение двух последовательных преобразований Лоренца для скоростей $v_1/c = \operatorname{th} \theta_1$ и $v_2/c = \operatorname{th} \theta_2$, направленных вдоль оси x . Является ли результатирующее преобразование преобразованием Лоренца? Если да, то какой скорости $v/c = \operatorname{th} \theta$ оно соответствует?
- 1.3.2. Показать, что матрица буста (преобразования Лоренца) вдоль оси x может быть представлена в виде матричной экспоненты $A_x(\theta) = \exp(i\alpha_x)$, где θ — быстрота ($v/c = \operatorname{th} \theta$), а α_x — неизвестная пока матрица (генератор буста вдоль оси x). Найти в явном виде матрицу α_x . Записать матрицы бустов и генераторы бустов вдоль осей y и z .
- 1.3.3. Показать, что матрица поворота $R_x(\varphi)$ на угол φ вокруг оси x может быть представлена в виде матричной экспоненты $R_x(\varphi) = \exp(i\varphi b_x)$, где b_x — неизвестная матрица (генератор поворота вокруг оси x). Найти в явном виде матрицу b_x . Записать матрицы поворотов и генераторы поворотов вокруг осей y и z .
- 1.3.4. Показать, что элемент объема $d^4x = c dt dx dy dz$ инвариантен при поворотах, преобразованиях Лоренца и их комбинациях.
- 1.3.5. Начало координат системы K' движется со скоростью \mathbf{v} относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ те же самые углы, что и оси системы K . Записать преобразование Лоренца от системы K к системе K' .

- 1.3.6. Определить положение осей (x' , y') системы K' (см. задачу 1.3.5) в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K .
- 1.3.7. Пусть скорости систем отсчета K_1 , K_2 , и K' лежат в плоскости (x , y) лабораторной системы K . Скорость системы K_1 относительно K равна $\mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0)$, а скорость системы K' относительно K равна $\mathbf{v} = (V_x, V_y, 0)$. С какой скоростью $\mathbf{v}_2 = (V_{2x}, V_{2y}, 0)$ должна двигаться система K_2 относительно системы K_1 , чтобы она была неподвижна относительно системы K' , т. е. чтобы ее скорость относительно лабораторной системы K была равна скорости K' относительно K ?
- 1.3.8. На какой угол будут повернуты оси координат системы отсчета K_3 по отношению к осям системы K' ? (См. задачи 1.3.5, 1.3.7.)
- 1.3.9. На частицу, движущуюся со скоростью \mathbf{v} , действует сила, сообщающая ей ускорение $\ddot{\mathbf{v}}$. Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы (прецессия Томаса) относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на частицу, не действует на ее спин.
- 1.3.10. Два движущихся с одинаковой скоростью v вдоль одной прямой источника одновременно (в системе источников) испускают световые импульсы. Расстояние между источниками (в системе источников) составляет l . С каким временным интервалом световые сигналы будут получены приемником, расположенным на прямой, по которой движутся источники, спереди по ходу движения?
- 1.3.11. Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна с частотой ω_0 под углом θ_0 к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения. Указание: ввести 4-мерные волновые векторы.
- 1.3.12. Перейдите в равномерно вращающуюся систему отсчета (систему отсчета наблюдателя, движущегося равномерно по окружности). Как в этой системе отсчета выглядит метрический тензор? Пусть один из близнецов остается в покое, а другой движется по окружности. Кто из близнецов будет младше, когда они встретятся?
- 1.3.13. Определить разность фаз при распространении света с частотой ω по и против часовой стрелки по вращающемуся колышевому волноводу радиуса R с коэффициентом преломления n .

Данный эффект называется *эффектом Санька* и используется для определения угловой скорости вращения в лазерных гироконах.

- 1.3.14. На плоскости, имеющей щель шириной l , находится наблюдатель и видит, что со скоростью (V_x, V_y) в сторону щели летит стержень, который параллелен плоскости и имеет длину $L > l$ (ось x параллельна плоскости, а ось y перпендикулярна ей). Скорость стержня такова, что в системе отсчета наблюдателя стержень имеет длину чуть меньше l . Пролетит ли стержень сквозь щель, если учесть, что в системе отсчета стержня сокращается как раз ширина щели? Какой конец стержня пролетит через щель первым, с точки зрения наблюдателя и с точки зрения стержня?
- №6
- 1.3.15. Частицы с массами m_1 и m_2 имеют импульсы p_1 и p_2 . Определить:
- скорость системы центра инерции;
 - энергию в системе центра инерции;
 - энергию второй частицы в системе, в которой первая частица поконится;
 - относительную скорость частиц.
- 1.3.16. В ускорителе произоходит столкновение потока частиц массой m и энергией $E \gg mc^2$ с неподвижной мишенью, состоящей из частиц с той же массой. Определить эффективную массу пары частиц из пучка и из мишени и скорость системы центра инерции пары. В качестве примера рассмотреть столкновение ускоренных протонов ($mc^2 = 1 \text{ ГэВ}$) с неподвижными протонами (фиксированная мишень) при энергии протонов:
 - $E = 70 \text{ ГэВ}$ (Серпуховский ускоритель);
 - $E = 1 \text{ ТэВ}$ (Ускоритель лаборатории Ферми, Батавия, США);
 - $E = 7 \text{ ТэВ}$ (Большой адронный коллайдер, ЦЕРН, Женева).
- 1.3.17. В ускорителе на встречных пучках сталкивается поток частиц с массой m_1 и энергией $E_1 \gg m_1c^2$ и встречный поток частиц с массой m_2 и энергией $E_2 \gg m_2c^2$. Определить эффективную массу пары частиц из первого и второго пучка и скорость системы центра инерции пары. Дать численный ответ для встречных пучков протонов с энергией $E_1 = 800 \text{ ГэВ}$ и электронов с энергией $E_2 = 30 \text{ ГэВ}$ (ускоритель «Гера», Германия).
- 1.3.18. Какой энергии E' нужно достичь в ускорителе с неподвижной мишенью, чтобы в системе центра инерции получить такую же энергию, как и в ускорителе на встречных пучках $7 \text{ ТэВ} \times 7 \text{ ТэВ}$, $m_1c^2 = m_2c^2 = 1 \text{ ГэВ}$ (Большой адронный коллайдер)?

- 1.3.19. Показать, что энергию ε и проекцию импульса p_x на ось x для частицы с массой m можно параметризовать, как $\varepsilon = m_1 \cosh \alpha$, $p_x = m_1 \sinh \alpha$, где $m_1^2 = m^2 + p_y^2 + p_z^2$, $\tanh \alpha = v_x$. (В данной задаче мы используем единицы, в которых $c = 1$.)
- 1.3.20. π^0 -Мезон пролетает расстояние L и распадается на два γ -кванта, вылетающих под углами α и β к его скорости. Определить время жизни π^0 -мезона в его системе покоя.
- 1.3.21. Определить массу m частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами m_1 и m_2 , если из опыта известны импульсы p_1 и p_2 этих частиц.
- 1.3.22. Определить массу m , некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой m_1 и импульсом p . Масса m_2 и импульс p_2 второй частицы известны из опыта.
- 1.3.23. π^0 -Мезон, летящий со скоростью v , распадается на два γ -кванта. Определить минимальный угол разлета γ -квантов θ_{\min} .
- 1.3.24. Ультрарелятивистская частица с массой m и энергией ε_0 упруго рассеивается на неподвижном ядре с массой $M \gg m$. Определить зависимость конечной энергии частицы ε от угла рассеяния θ .
- 1.3.25. Частица с массой m_1 и скоростью v сткивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу M и скорость V образованной частицы.
- 1.3.26. Ультрарелятивистская частица с массой m и энергией ε_0 рассеивается на неподвижном ядре с массой $M \gg m$ и возбуждает его. Энергия возбуждения ядра ΔE в системе его покоя удовлетворяет неравенству $mc^2 \ll \Delta E \ll Mc^2$. Определить зависимость конечной энергии частицы ε от угла рассеяния θ .
- 1.3.27. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на движущемся свободном электроне с импульсом p_0 , составляющем угол θ_0 с направлением распространения кванта (эффект Комптона). Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от направления его движения.
- 1.3.28. Фотон с энергией $\varepsilon = 2$ эВ рассеивается на летящем навстречу в противоположном направлении ультрарелятивистском электроне с энергией $E = 200$ ГэВ $\gg \varepsilon$. Найти максимальную энергию рассеянного фотона. При каком соотношении E, ε и массы электрона m это достигается?

- 1.3.29 Для нейтрино, образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона $m_\pi c^2 = 140 \text{ МэВ}$, масса μ -мезона $m_\mu c^2 = 105 \text{ МэВ}$), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергию и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ происходит изотропно. Определить характерный интервал угла вылета нейтрино. Построить графики распределений нейтрино по углу вылета и энергии.
- 1.3.30 π^0 -Мезон, летящий со скоростью v , распадается на две γ -кванты. Найти угловое распределение γ -квантов $d\omega/d\Omega$ в лабораторной системе отсчета, если в системе покоя π^0 -мезона оно сферически симметрично.
- 1.3.31 При распаде K -мезона $K \rightarrow \pi + e + \bar{\nu}$ определить максимальную возможную энергию для каждой из трех возникающих частиц. Считать, что $m_{K^+} = 500 \text{ МэВ}$, $m_e c^2 = 0.5 \text{ МэВ}$, $m_\pi c^2 = 135 \text{ МэВ}$, $m_\nu = 0$.
- 1.3.32 Ускоренный протон сталкивается с покоящимся протоном мишени. В реакции образуются частица a и антчастица \bar{a} : $p + p \rightarrow p + p + a + \bar{a}$. Найти энергетический порог этой реакции, если частица \bar{a} — это а) протон p (масса — 1 ГэВ), б) дейтон d (масса — 2 ГэВ), в) α -частица (ядро гелия ${}^4\text{He}$, масса — 4 ГэВ).
- 1.3.33 В ускорителе со встречными пучками идет реакция $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Зная энергию электронов и позитронов, найти энергию и импульсы мюонов. Каков энергетический порог этой реакции? Сравнить с порогом в случае, когда ускоренные позитроны налетают на неподвижные электроны. Масса электрона — $m_e c^2 = 0.5 \text{ МэВ}$. Масса мюона — $m_\mu c^2 = 100 \text{ МэВ}$.
- 1.3.34 Протон с энергией $E = 3 \text{ ГэВ}$, рассеиваясь на протоне мишени, передает ему энергию $\varepsilon = 1 \text{ МэВ}$. Определить угол рассеяния в системе центра инерции и в лабораторной системе отсчета.
- 1.3.35 Как связаны в ультрарелятивистском пределе углы рассеяния двух одинаковых частиц массы m друг на друге в системе неподвижной мишени и в системе центра инерции? Энергия налетающей частицы в системе мишени равна E .
- 1.3.36 Свободные ядро массой M имеет возбужденное состояние, энергия которого на величину ε превышает энергию основного состояния. 1) Возбужденное ядро испускает γ -квант и переходит в основное состояние. Найти энергию γ -кванта. 2) Определить, какую энергию отдачи получит при этом ядро.

3) Определить, с какой минимальной скоростью должно двигаться заземленное ядро, чтобы испущенный им γ -квант мог возбудить неподвижное ядро, находящееся в основном состоянии.

- 1.3.37. Определить максимальную энергию нейтрин, рождающихся при β^+ -распаде ядер



предполагая, что протоны с равномерной плотностью распределены по объему ядер, размер которых $R_0 = 1.5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см (где A – массовое число), а энергия связи протонов и нейронов одинакова. (Разность масс нейтрона и протона $m_n c^2 - m_p c^2 = 1.29$ МэВ.)

1.4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

- 1.4.1. Выведите из уравнений Максвелла волновые уравнения для электромагнитного поля.
- 1.4.2. Два уравнения Максвелла позволяют вычислить производные по времени от полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , если эти поля заданы в на некоторой гиперплоскости $t = \text{const}$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi j. \quad (1)$$

Другие два уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (2)$$

не содержат производных по времени, поэтому их выполнение может быть проверено на отдельной гиперповерхности $t = t_0$. Пусть уравнения (2) проверены для начальных условий, заданных в некоторый момент времени $t = t_0$. Далее поля \mathbf{E} и \mathbf{H} вычисляются для произвольных моментов времени с помощью уравнений (1). При каком условии уравнения (2) будут справедливы при произвольном t , отличном от t_0 ?

- 1.4.3. Модифицировать первую пару уравнений Максвелла, включив в нее плотность магнитных зарядов (магнитных монополей) ρ_m и плотность тока магнитных монополей j_m таким образом, чтобы для них выполнялось уравнение непрерывности. Решить задачу 1.4.2 для модифицированных уравнений.
- 1.4.4. Переписать уравнения Максвелла в терминах комплексного векторного поля $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Как изменится такая форма уравнений Максвелла в присутствии магнитных монополей (см. задачу 1.4.3)?

- 1.4.5. Подставив в уравнения Максвелла (в трехмерном виде) выражения для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} через потенциалы φ и \mathbf{A} , получить полевые уравнения для потенциалов.
К какому виду при этом сводится первая пара уравнений Максвелла?
- 1.4.6. Подставив в уравнения Максвелла (в четырехмерном виде) выражения для полей E_μ через потенциалы A_μ , получить полевые уравнения для потенциалов.
К какому виду при этом сводится первая пара уравнений Максвелла?
- 1.4.7. Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца) в трехмерных и четырехмерных обозначениях?
- 1.4.8. Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона) в трехмерных обозначениях?
- 1.4.9. Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\varphi = 0$ (калибровка Вейля) в трехмерных обозначениях?
- 1.4.10. В калибровке $\varphi = 0$ параметризовать постоянное однородное электромагнитное поле общего вида (\mathbf{E} и \mathbf{H} — два произвольных постоянных вектора) с помощью векторного потенциала \mathbf{A} .
- 1.4.11. Для потенциалов $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ общего вида найти калибровочные преобразования, после выполнения которых будут выполнены калибровочные условия:
- 1) $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца);
 - 2) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона);
 - 3) $\varphi = 0$ (калибровка Вейля).
- 1.4.12. Найти вид остаточных калибровочных преобразований (условие на функцию f) для каждой из калибровок:
- 1) $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца);
 - 2) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона);
 - 3) $\varphi = 0$ (калибровка Вейля).

- 1.4.13. Показать, что из условия инвариантности действия для электромагнитного поля относительно калибровочных преобразований следует уравнение непрерывности для зарядов и токов.
- 1.4.14. Действие для электромагнитного поля имеет вид (см. (1.11))

$$S_{\text{field}}[\mathbf{A}(\mathbf{x})] = - \int \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{16\pi c} d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x.$$

Получить тензор энергии импульса $\tilde{T}^{\mu\nu}$ согласно формуле (1.13). Является ли данный тензор калибровочно-инвариантным?

- 1.4.15. Подобрать такую добавку $\delta T^{\mu\nu}$ к тензору энергии-импульса из задачи 1.4.14, чтобы новый тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}$ был симметричен, причем $\partial_\mu \delta T^{\mu\nu} = 0$ при условии выполнения уравнений Максвелла без источников. Является ли тензор $T^{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантным?

Проверить, что $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ в отсутствие источников поля.

- 1.4.16. Вычислить $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ для тензора из задачи 1.4.15 при наличии зарядов и токов. Получить уравнение баланса энергии-импульса.
- 1.4.17. Найти след тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, для электромагнитного поля.

- 1.4.18. Найти давление на обкладку плоского тонкого конденсатора без диэлектрика:
- 1) исходя из плотности силы $\rho\mathbf{E}$;
 - 2) исходя из перепада давления электрического поля.

- 1.4.19. Найти давление на стенку соленоида без сердечника:
- 1) исходя из плотности силы $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$;
 - 2) исходя из перепада давления магнитного поля.

1.5. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНEM ПОЛЕ

- 1.5.1 Для релятивистской частицы доказать, что мощность силы ($v\mathbf{F}$) равна скорости изменения энергии.
- 1.5.2 Рассмотреть особенности движения релятивистской частицы с зарядом e , и массой m в скрещенных однородных полях \mathbf{E} и \mathbf{H} . Угол между которыми равен θ .

- 1.5.3. Определить координаты r и время t заряженной частицы в лабораторной системе отсчета как функции собственного времени τ при ее движении в постоянном однородном электрическом поле E . В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела энергию E_0 и импульс p_0 .
- 1.5.4. Определить координаты r и время t заряженной частицы в лабораторной системе отсчета как функции собственного времени τ при ее движении в постоянном однородном магнитном поле H . В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела энергию E_0 и импульс p_0 .
- 1.5.5. Определить координаты r и время t заряженной частицы в лабораторной системе отсчета как функции собственного времени τ при ее движении в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг другу. В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела энергию E_0 и импульс p_0 .
- 1.5.6. Определить траекторию движения заряженной частицы во взаимно перпендикулярных и равных друг другу плоских электрическом и магнитном полях.
- 1.5.7. Найти кинетическую энергию частицы ($T = E - mc^2$) как функцию собственного времени τ при движении ее в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, параллельных друг другу $E \parallel H$. В начальный момент времени частица находилась в начале координат.
- 1.5.8. Определить координаты r и время t заряженной частицы в лабораторной системе отсчета как функции собственного времени τ при ее движении в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, параллельных друг другу. В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела энергию E_0 и импульс p_0 .
- 1.5.9. Найти кинетическую энергию частицы ($T = E - mc^2$) как функцию собственного времени τ при движении ее в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг другу $E \perp H$. В начальный момент времени частица находилась в начале координат.
- 1.5.10. Найти время торможения $t_{\text{торм}}$ и длину пробега l до остановки relativisticheskoy заряженной частицы с зарядом e , массой m и начальной энергией E_0 в термозависящем однородном электрическом поле E , параллельном начальной скорости частицы.

- 1.5.11 Пучок π^+ -мезонов с начальным импульсом $p_0 = 200 \text{ MeV}/c$ входит в линейный ускоритель. Какова должна быть напряженность ускоряющего поля E , чтобы, по крайней мере, половину плюонов удалось ускорить до энергии $E = 200 \text{ GeV}$? Какую длину должен при этом иметь ускоритель?

Масса π^+ -мезона $m c^2 = 140 \text{ MeV}$. Время жизни π^+ -мезона $\tau_{\pi^+} = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, а время полурастека $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$ равно $\tau_{1/2} = \tau_{\pi^+} \ln 2$.

- 1.5.12 Определить частоты колебаний заряженного изотропного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний (при отсутствии поля) равна ω_0 (классический эффект Зеемана).
- 1.5.13 Доказать, что для нерелятивистского электрона (заряд равен $-e$, масса равна m), движущегося в поле ядра (заряд $-Ze$, масса M) сохраняется вектор Рунес-Ленца

$$\vec{A} = Ze \frac{2\pi}{r} - \frac{1}{\mu} [\vec{p} \times \vec{M}], \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}, \quad \vec{M} = |\vec{r} \times \vec{p}|.$$

- 1.5.14 По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса r течет ток I . С поверхности провода срывается электрон, начальная скорость которого v_0 параллельна оси провода. Найти наибольшее расстояние R , на которое электрон может удалиться от оси проводника.
- 1.5.15 Релятивистская частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина p_z^2/H остается постоянной (является аднабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2 .
- 1.5.16 Найти в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы, если магнитное поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.

- 1.5.17 На больших расстояниях магнитное поле Земли представляет собой поле диполя с магнитным моментом $\mu = 8.1 \cdot 10^{20} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$. Захваченные магнитным полем Земли заряженные частицы солнечного ветра дрейфуют от полюса к полюсу вдоль склоновых линий в областях, называемых радиационными поясами.

- в) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (широтный угол), достижимую частицей. Найти угол α , при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли.
- б) Найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от центра Земли.

1.6. СТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

- 1.6.1. Определить квадрупольный момент однородно заряженного альисонда относительно его центра.
- 1.6.2. Найти электрическое поле однородно заряженного по объему альисонда из больших расстояниях с точностью до четвертого порядка по $1/R$.
- 1.6.3. Определить квадрупольный момент равномерно заряженной нити длиной l , если ее заряд равен q . Поместить начало координат в середину нити.
- 1.6.4. Вычислить тензор квадрупольного момента нейтральной системы зарядов, в которой два заряда $+q$ помещены в точках $(+a, +a, 0)$ и $(-a, -a, 0)$, а два заряда $-q$ помещены в точках $(+a, -a, 0)$ и $(-a, +a, 0)$. Найти систему координат, в которой искомый тензор имеет диагональный вид.
- 1.6.5. Определить энергию системы зарядов предыдущей задачи, помещенной во внешнее однородное электрическое поле E .
- 1.6.6. Два разноименных и одинаковых по величине заряда жестко закреплены на расстоянии l друг от друга. Найти силу и момент силы, действующих на данную систему, помещенную в поле точечного заряда на расстоянии $R \gg l$.
- 1.6.7. Записать энергию $E(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{R})$ взаимодействия диполя \mathbf{d}_1 , находящегося в начале координат, и диполя \mathbf{d}_2 , находящегося в точке \mathbf{R} .
- 1.6.8. Пусть диполь \mathbf{d}_1 направлен вдоль оси z . Получить разложение энергии $E(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{R})$ при фиксированных $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, |\mathbf{R}|$ по сферическим гармоникам.

- 1.6.9. Потенциал $V(r)$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z имеет вид

$$V(0, 0, z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right), \quad z > a.$$

Найти два главных члена разложения $V(r, \theta)$ в области $r \gg a$.

- 1.6.10. Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сферонд) с уравнением

$$R(\theta) = R_0[1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной плотностью ($P_2(x)$ — полином Лежандра). Полный заряд равен q . Найти мультипольные моменты сферонда в линейном порядке по β .

- 1.6.11. Показать, что однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A}_1 = (0, Hx, 0)$. Градиентным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$.

- 1.6.12. Магнитное поле, имеющее составляющую вдоль оси z , убывает вдоль этой оси с постоянным градиентом $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$. Может ли такое поле быть параллельным оси z во всем пространстве? Найти радиальные компоненты поля вне оси z . Представить картину силовых линий.

- 1.6.13. Получить формулу $\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле.

- 1.6.14. Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии.

- 1.6.15. Определить энергию взаимодействия магнитного диполя μ , движущегося со скоростью $\mathbf{v} \ll c$ с неподвижным ядром с зарядом Ze .

1.7. СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

- 1.7.1. Каким условиям должны удовлетворять комплексная амплитуда плоской монохроматической волны $A_0^\mu = (A_0^0, \mathbf{A}_0)$ и волновой 4-вектор $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$?

- 1.7.2. Найти тензор энергии-импульса плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны.

- 1.7.3. Найти тензор энергии-импульса плоской линейно-поляризованной монохроматической стоячей волны.
- 1.7.4. Показать, что скалярный потенциал произвольного *свободного* электромагнитного поля можно обратить в куль с помощью остаточного калибровочного преобразования, не нарушая калибровки Лоренца.
- 1.7.5. Записать уравнение Максвелла для амплитуд Фурье, получающихся при разложении произвольной плоской волны по монохроматическим плоским волнам.
- 1.7.6. Получить выражение для амплитуд Фурье плоской монохроматической волны.

1.8. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ИЗЛУЧЕНИЕ

- 1.8.1. Определить электрическое и магнитное поле гармонически колебающегося диполя на расстояниях r , много больших размера диполя a , но не обязательно больших длины волны λ .
- 1.8.2. Доказать, что у замкнутой системы заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе отсутствует дипольное электрическое и дипольное магнитное излучение.
- 1.8.3. Два разноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиуса R (атом Резерфорда). Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой.
- 1.8.4. Рассмотрим классическую модель атома гелия, представляющую собой бесконечно тяжелое ядро с зарядом $+2e$, вокруг которого на противоположных концах диаметра вращаются два электрона с зарядами $-e$. Чему равны интенсивности дипольного и магнитного дипольного излучения системы? Чему равна интенсивность квадрупольного излучения? Как будет меняться со временем радиус орбиты?
- 1.8.5. Два одноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определить полную излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть дипольный ($e_1/m_1 \neq e_2/m_2$) и квадрупольный ($e_1/m_1 = e_2/m_2$) случаи.

- 1.8.6. Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сфериод) с уравнением

$$R(\theta) = R_0[1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной плотностью. Полный заряд равен q . Малый параметр β ($\beta \ll 1$) гармонически меняется во времени с частотой ω . Удерживая низшие члены разложения по β , вычислить в длинноволновом приближении угловое распределение и планую мощность излучения.

- 1.8.7. На невесомой штанге длиной l помещен заряд e с массой m .

1) Найти закон изменения угловой скорости $\omega(t)$, если в начальный момент времени $\omega(0) = \omega_0$.

2) Определить интенсивность излучения $dI/d\Omega$ и I .

- 1.8.8. Электрон вращается по окружности в однородном магнитном поле **H**. Найти зависимость от времени кинетической энергии электрона $E(t)$. Определить траекторию электрона в нерелятивистском пределе $v \ll c$.

- 1.8.9. Определить интенсивность излучения $dI/d\Omega$ и I для двух одинаковых зарядов e , движущихся равномерно нерелятивистски с угловой скоростью ω по окружности радиуса a и находящихся на противоположных концах диаметра.

- 1.8.10. Два одинаковых заряда e движутся равномерно нерелятивистски с угловой скоростью ω по окружности радиуса a . Насколько расположение зарядов должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного, квадрупольного излучений были равны?

- 1.8.11. Точечный диполь **d** вращается по окружности радиуса R с угловой скоростью ω , $\mathbf{d} \parallel \mathbf{R}$. Найти интенсивность электрического дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучения при $R \ll \lambda = 2\pi c/\omega$.

- 1.8.12. Два одинаковых диполя **d** находятся на расстоянии R от центра невесомой штанги и направлены в противоположные стороны вдоль штанги. Определить зависимость угловой скорости от времени $\omega(t)$, если в начальный момент времени $\omega(0) = \omega_0$, масса диполя m , $R \ll c/\omega$.

- 1.8.13. Скорость заряженной частицы убывает от v_0 до 0 за время t . Найти угловое распределение тормозного излучения, считая ускорение постоянным. Какая длительность импульса излучения Δt будет зарегистрирована покоящимся прибором, расположенным под углом θ к направлению движения частицы?

- 1.8.14 Электрон испытывает лобовое столкновение с неподвижным (бесконечно тяжелым) точечным цитоидом d . Определить потерю энергии на излучение в результате столкновения. Движение электрона происходит вдоль прямой.
- 1.8.15 Равномерно заряженная штанга с линейной плотностью заряда ρ длиной l в начальный момент времени вращается с угловой скоростью ω_0 относительно конца штанги. Найти зависимость от времени $\omega(t)$, если масса штанги равна m .
- 1.8.16 Равномерно заряженная штанга с линейной плотностью заряда ρ длиной l в начальный момент времени вращается с угловой скоростью ω_0 относительно оси, проходящей через ее середину. Найти зависимость от времени угловой скорости $\omega(t)$, если масса штанги равна $2m$.
- 1.8.17 Нейтральная система четырех заряженных частиц жестко закрепленных в вершинах квадрата со стороной $2a$ (две частицы с зарядами $+q$ на одной диагонали, и две с зарядами $-q$ на другой). Квадрат лежит в плоскости (x, y) , центр квадрата — на оси z — вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω . Найти зависимость от времени угловой скорости вращения, если массы частиц разны m , а угловая скорость в начальный момент времени равна ω_0 .
- 1.8.18 Магнитный момент μ в начальный момент времени направлен перпендикулярно внешнему однородному магнитному полю $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и пропецирует вокруг него. Найти $\mu_x(t)$, если гиромагнитное отношение равно γ .
- 1.8.19 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний равна ω_0 . Пусть катушка идеальная (без потерь), а конденсатор состоит из двух параллельных пластин площадью a , расстояние между которыми a . Размеры конденсатора малы по сравнению с $\lambda = 2\pi c/\omega$. Определить добротность контура. Добротность контура определяется как отношение заласенной энергии к потерям за период.
- 1.8.20 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний равна ω_0 . Конденсатор идеальный (без потерь), а катушка (без сердечника) состоит из N витков площадью a каждый, длина катушки a . Размеры катушки малы по сравнению с $\lambda = 2\pi c/\omega$. Определить добротность контура.

- 1.8.21. Нерелятивистская заряженная частица с зарядом q и массой m скользит без трения по поверхности вращения (ось вращения вертикальна) в горизонтальной плоскости. На частицу действует сила тяжести mg и сила нормальной реакции опоры. Частица теряет энергию за счет электромагнитного излучения, но потеря за один оборот мала. Определить зависимость $z(t)$
- Для поверхности конуса $z = kr$.
 - Для поверхности параболоида $z = r^2/a$.
- 1.8.22. Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте h над идеально проводящей металлической плоскостью. Для случаев $h \ll \lambda$ и $h \gg \lambda$ найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

- 1.9.1. Определить напряженности электрического и магнитного полей произвольно движущегося заряда.
- 1.9.2. Определить электромагнитное поле, создаваемое электроном, движущимся разномерно со скоростью v .
- 1.9.3. Определить силу взаимодействия F двух электронов, движущихся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями V .
- 1.9.4. Найти мгновенное угловое распределение мощности излучения заряженной релятивистской частицы $dW/d\Omega$ в двух случаях:
- скорость v и ускорение w частицы параллельны в некоторый момент запаздывающего времени t' ;
 - скорость v и ускорение w взаимно перпендикулярны в момент запаздывающего времени t' .
- Проанализировать нерелятивистский $v/c \ll 1$ и ультрарелятивистский $v/c \sim 1$ пределы.
- 1.9.5. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в колесе $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

- 1.9.6. Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор (электрический ондуктор), к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0 . Найти частоту излучения электронов (ондукторного излучения) в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.
- 1.9.7. Определить зависимость от времени энергии релятивистского электрона в однородном магнитном поле (скорость электрона перпендикульна полю). Проверить, что в пределе $v \rightarrow \infty$ зависимость соглашается с результатом для нерелятивистского электрона.
- 1.9.8. Считая, что в линейном ускорителе частица движется вдоль прямой под действием постоянной силы, определить потери энергии на излучение. Определить КПД для ультрарелятивистской частицы.

1.10. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

- 1.10.1. Определить поляризацию рассеянного электромагнитного поля для следующих случаев:
- при рассеянии линейно поляризованной плоской монохроматической волны свободным электроном;
 - при рассеянии циркулярно поляризованной плоской монохроматической волны свободным электроном.
- 1.10.2. 1) Найти дифференциальные и полные сечения рассеяния линейно поляризованного и естественного света осциллятором с затуханием (затухание обусловлено вязким трением).
- 2) Найти полное сечение поглощения.
- 3) Определить поляризацию рассеянной волны.
- 1.10.3. Определить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны электроном, находящимся в сильном однородном магнитном поле H_0 , с учетом радиационного трения. Рассмотреть случаи $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$, где \mathbf{k} — волновой вектор падающей волны.
- 1.10.4. Определить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ плоской монохроматической неподвижной электромагнитной волны заряженным гармоническим осциллятором, находящимся в сильном однородном магнитном поле H_0 , с учетом радиационного трения. Рассмотреть случаи $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$.

- 1.10.5. Найти дифференциальное сечение рассеяния циркулярно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} на системе, обладающей магнитным моментом μ с гиromагнитным отношением γ , в случае если магнитный момент μ совершает под действием падающей волны малые колебания около среднего положения $\mu_0 \perp \mathbf{k}$. Рассмотреть случай малого гиromагнитного отношения. Каков критерий малости в этой задаче?
- 1.10.6. Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω на конденсаторе. Конденсатор — две параллельные пластины площадью a каждая, расположенные на расстоянии a друг от друга, пластины заворочены. Электрическое поле падающей волны перпендикулярно пластинам. Размеры конденсатора малы по сравнению с длиной волны.
- 1.10.7. Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω на катушке. Катушка состоит из N витков площадью a , длина катушки — a , катушка закорочена. Магнитное поле падающей волны направлено параллельно оси катушки. Размеры катушки малы по сравнению с длиной волны.
- 1.10.8. Оценить плотность вещества в солнечной короне, если яркость короны, наблюдаемой во время затмения, в 10^6 раз ниже яркости фотосфера (видимой поверхности) Солнца.
- 1.10.9. У сравнительно молодых звезд (так называемых новиц), светимость (полная энергия, получаемая в единицу времени) резко меняется в течение нескольких суток: вначале очень быстро растет, а затем медленно убывает до начального значения. Механизм этого явления — отрыв газовой оболочки звезды в результате нарушения равновесия: световое давление из газовой (плазменной) оболочки, состоящую на $3/4$ из ионизированных атомов водорода, становится больше, чем гравитационное притяжение. Оценить критическую светимость звезды массы M и радиуса R .
- 1.10.10. Определить дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны на сверхпроводящей сфере радиуса $r \ll \lambda$. Поля зарядов и токов, находящиеся на поверхности сферы внешним электромагнитным полем волны, полностью компенсируют внешние поля внутри сферы.

ГЛАВА | КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

2

ВВЕДЕНИЕ

1. Операторы и состояния в квантовой механике

Состояние физической системы описывается в квантовой механике при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$. Собокупность векторов состояний образует векторное пространство — пространство состояний. Пространство наделено скалярным произведением векторов $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$, которое обозначается $\langle\varphi|\psi\rangle$.

Физическим величинам ставятся в соответствие линейные эрмитовы операторы: $F \rightarrow \hat{F}$, причем оператор \hat{F}^+ , эрмитово сопряженный оператору \hat{F} , определяется согласно соотношению

$$\langle\psi|\hat{F}^+|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{F}|\psi\rangle^*. \quad (II.1)$$

Если $\hat{F}^+ = \hat{F}$, то оператор называется эрмитовым. Решение уравнения

$$\hat{F}|f\rangle = f|f\rangle$$

дает спектр собственных значений f эрмитового оператора \hat{F} , которые являются вещественными и определяют те значения, которые только и может принимать физическая величина F . Собственный вектор $|f\rangle$ описывает состояние, в котором значение физической величины F достоверно равно f . Система векторов $|f\rangle$ обладает свойствами ортонормированности и полноты, т. е. образует базис в пространстве состояний.

Условия ортонормированности и полноты имеют следующий вид для дискретного спектра собственных значений:

$$\langle f_n|f_{n'}\rangle = \delta_{nn'}, \quad \sum_n |f_n\rangle \langle f_n| = 1$$

и для непрерывного спектра:

$$\langle f|f'\rangle = \delta(f-f'), \quad \int df |f\rangle \langle f| = 1.$$

Вектор $|\psi\rangle$, описывающий произвольное состояние, может быть разложен по базису:

$$|\psi\rangle = \sum_n |f_n\rangle \langle f_n| \psi \rangle + \int df |f\rangle \langle f| \psi \rangle, \quad (II.2)$$

причем, если $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, то квадрат модуля коэффициента разложения в (II.2) определяет вероятность того, что значение физической величины F равно f_n , т. е. $w(f_n) = |\langle f_n | \psi \rangle|^2$ (для дискретного спектра), или соответствующую плотность вероятности $d\omega(f)/df = |\langle f | \psi \rangle|^2$ (для непрерывного спектра).

Переход к определенному базису означает выбор конкретного представления. При этом совокупность коэффициентов разложения по базису (см. (II.2)) однозначно характеризует вектор состояния $|\psi\rangle$. Это дает возможность вместо векторов абстрактного пространства рассматривать числовые функции (для непрерывного спектра) или числовые последовательности (для дискретного спектра).

В координатном представлении состояние характеризуется волновой функцией в x -представлении $\psi(x)$, базис образуют собственные векторы оператора координаты $\hat{x}|x'\rangle = x'|x'\rangle$. То есть

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x| \psi \rangle, \quad |\psi\rangle \rightarrow \psi(x) = \langle x | \psi \rangle. \quad (II.3)$$

Скалярное произведение принимает вид: $\langle \varphi | \psi \rangle \rightarrow \int \varphi^*(x) \psi(x) dx$. Операторам отвечают их конкретные реализации:

$$\hat{x} \rightarrow x, \quad \hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (II.4)$$

В импульсном представлении состояние будет характеризоваться волновой функцией в p -представлении $\phi(p)$. При этом

$$|\psi\rangle \rightarrow \phi(p) = \langle p | \psi \rangle, \quad \hat{p} \rightarrow p, \quad \hat{x} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial p}. \quad (II.5)$$

Переход от импульсного представления к координатному

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | \psi \rangle = \int dp \psi_p(x) \phi(p) \quad (II.6)$$

осуществляется при помощи $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} px}$ — собственной функции оператора импульса в координатном представлении.

Среднее значение оператора в состоянии $|\psi\rangle$ можно вычислять по формулам

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) = \int dp \phi^*(p) \hat{A} \phi(p).$$

Обобщение описанного формализма на случай систем с несколькими степенями свободы не составляет труда. Например, для одной материальной точки (три степени свободы) в координатном представлении будем иметь:

$$|\psi\rangle \rightarrow \psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle, \quad \hat{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (\text{II.7})$$

При этом среднее значение оператора будет вычисляться по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int d^3 r \psi^*(\mathbf{r}) \hat{A} \psi(\mathbf{r}).$$

Коммутатор операторов \hat{A} и \hat{B} равен $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. С учетом (II.7) находятся значения так называемых фундаментальных коммутаторов

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}, \quad [\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0,$$

где $j, k = 1, 2, 3$.

Динамика физической системы определяется на основе уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{II.8})$$

где оператор \hat{H} называется гамильтонианом (оператором Гамильтона), при этом считается, что операторы, как правило, не зависят от времени (представление Шредингера). В случае $\partial \hat{H} / \partial t = 0$ уравнение (II.8) имеет следующую систему частных решений, называемых стационарными состояниями:

$$|\Psi_E(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\Psi_E\rangle, \quad \hat{H} |\Psi_E\rangle = E |\Psi_E\rangle, \quad (\text{II.9})$$

последнее уравнение есть стационарное уравнение Шредингера. Другой способ описания временной эволюции системы — представление Гейзенberга, в котором зависимость от времени переложена на операторы:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H = \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right)_H + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H]. \quad (\text{II.10})$$

Оба представления связаны унитарным преобразованием:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi_H\rangle, \quad \hat{A}_H = \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}. \quad (\text{II.11})$$

оператор $\hat{U}(t)$ называется оператором эволюции. В случае, когда $\partial \hat{H} / \partial t = 0$, он имеет вид $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$.

2. Одномерное движение

В основе математического аппарата лежит стационарное уравнение Шредингера (II.9) в координатном представлении:

$$\hat{H} \psi_E(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right\} \psi_E(x) = E \psi_E(x). \quad (\text{II.12})$$

дополненное необходимыми граничными условиями (ограниченность волновой функции при $x \rightarrow \pm\infty$, непрерывность функции вместе с ее производной в точках конечных разрывов потенциала и т. д.). Уравнение (II.12) определяет энергетический спектр и стационарные волновые функции.

В области энергий, в которой аналогичная классическая частица может совершать только финитное движение, спектр энергий является дискретным, и невырожденным (связанные состояния). В области энергий, где аналогичная классическая частица совершает инфинитное движение, спектр является непрерывным. В этом случае задачи обычно ставятся в терминах коэффициентов прохождения и отражения D и R :

$$D = \frac{|j_x^{\text{вход}}|}{|j_x^{\text{вых}}|}, \quad R = \frac{|j_x^{\text{от}}|}{|j_x^{\text{вых}}|}, \quad (\text{II.13})$$

где плотность тока вероятности имеет вид

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} (\psi(x) \psi'(x)^* - \psi^*(x) \psi'(x)).$$

3. Линейный гармонический осциллятор

Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{II.14})$$

причем во втором способе записи использованы *повышающие* и *пониждающие*¹⁰ операторы

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} - i\hat{P}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} + i\hat{P}), \quad (\text{II.15})$$

где $\hat{Q} = \hat{x}/x_0$ и $\hat{P} = \hat{p}/p_0$ — безразмерные операторы координаты и импульса. Осцилляторные единицы длины (x_0), импульса (p_0) и энергии (E_{osc}) даются выражениями

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}, \quad E_{\text{osc}} = \hbar\omega. \quad (\text{II.16})$$

Решение стационарного уравнения Шредингера $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ позволяет найти энергетический спектр осциллятора: $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Операторы \hat{a}^\dagger и \hat{a} действуют на собственные векторы гамильтониана следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \end{cases} \quad |n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = 0, \quad (\text{II.17})$$

причем вектор $|0\rangle$ описывает основное (вакуумное) состояние.

¹⁰ В многочастичной теории эти операторы имеют смысл операторов рожденения и уничтожения.

Волновые функции стационарных состояний в координатном представлении имеют вид

$$\psi_n(x) = \langle x | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right)^2}, \quad (\text{II.18})$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита, которые можно представить в виде $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$. Приведем несколько первых полиномов: $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2(\xi) = (2\xi)^2 - 2$. Для волновой функции основного состояния осциллятора имеем

$$\psi_0(x) = \langle x | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right)^2}.$$

Собственные векторы понижающего оператора $a|x\rangle = z|x\rangle$ образуют систему так называемых *коherentных состояний* гармонического осциллятора, причем z — любое комплексное число. Вектор $|z\rangle$ можно представить в виде разложения по системе собственных векторов гамильтонiana (II.14):

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{II.19})$$

причем состояние (II.19) нормировано на единицу: $\langle z | z \rangle = 1$. Очевидно, что в данном состоянии нет определенного значения энергии. Вероятность обнаружить в состоянии (II.19) значение энергии E_n

$$w_z = |\langle n | z \rangle|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^n}{n!} \quad (\text{II.20})$$

определенается *распределением Пуассона*.

4. Угловой момент, спин

Угловому моменту сопоставляется оператор $\hat{J} = \hbar \hat{j} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$, каждая из компонент которого является эрмитовым оператором, и для них выполняются коммутационные соотношения

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\delta_{ij}\hat{j}_k, \quad [\hat{J}^2, \hat{j}_i] = 0.$$

Общие собственные векторы операторов \hat{j}^2 и \hat{j}_z

$$\begin{cases} \hat{j}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \\ \hat{j}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \end{cases} \quad \begin{cases} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ m = -j, -j+1, \dots \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

при фиксированном j образуют систему $2j+1$ ортонормированных векторов $|j, m\rangle$, $\langle j, m|j, m'\rangle = \delta_{mm'}$. Операторы $[j_\pm]_z = [j_x \pm i j_y]$ действуют на общие собственные векторы (II.21) следующим образом:

$$[j_\pm |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (\text{II.22})$$

Если система координат поворачивается на угол φ , вокруг направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n} , то вектор состояния преобразуется при помощи оператора

$$\hat{R}(\varphi) = \exp[i(\varphi \hat{\mathbf{n}})] = \exp[i\varphi(\mathbf{n}\hat{\mathbf{j}})], \quad \text{т.е. } |\psi'\rangle = \hat{R}(\varphi)|\psi\rangle \quad (\text{II.23})$$

и при этом $\varphi = \varphi \mathbf{n}$.

Наиболее универсальным представлением, в котором можно работать с векторами $|j, m\rangle$, является матричное представление, где $\hat{\mathbf{j}}^2$ и \hat{j}_z диагональны. В этом представлении операторы $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{l}}$, \hat{j}_z изображаются квадратными матрицами размерности $2j+1$, а векторы $|j, m\rangle$ — столбцами той же размерности с одним отличным от нуля (и равным единице) элементом. Частными случаями углового момента являются орбитальный момент и спин.

а) Орбитальный момент. Для операторов компонент орбитального момента количества движения $\hat{\mathbf{M}} = \hbar \hat{\mathbf{l}} = [\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}]^{(2)}$ реализуется цепочеченный вариант квантования, т. е. орбитальное квантовое число $j = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому возможно рассмотрение в координатном представлении.

В сферических координатах операторы $\hat{\mathbf{l}}$, содержат только угловые переменные. Система уравнений (II.21) сводится к следующей:

$$\begin{cases} -\Delta_{\theta\varphi} Y_l^{(m)} = l(l+1)Y_l^{(m)}, & l=0, 1, 2, \dots \\ -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^{(m)} = m Y_l^{(m)}. & m=0, \pm 1, \dots, \pm l. \end{cases}$$

Здесь $\Delta_{\theta\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа, $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | l, m \rangle$ — сферические функции. Приводим их канонический вид.

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{II.24})$$

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

* Данные обозначение для орбитального момента соответствует обозначениям, принятых в [13] и [23]. Заметим, что в ряде учебников (например, [17, 20]) применяется обозначение $\mathbf{L} = \hbar \hat{\mathbf{l}}$. В нашем издании буквой $\hat{\mathbf{L}}$ мы будем обозначать момент системы частиц.

где $P_l^m(x)$ и $P_l^{lm}(x)$ — полиномы Лежандра и присоединенные полиномы Лежандра. Сферические функции имеют определенную четность, равную $(-1)^l$, они образуют ортогональную систему: $\int Y_l^{m_1} Y_l^{m_2} d\Omega = \delta_{m_1 m_2}$.

Приведем вид некоторых сферических функций:

$$Y_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{(\pm 1)} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}.$$

6) Спин 1/2. Операторы компонент спинового, или собственного, момента ($s = 1/2$) $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \hat{\mathbf{s}} = (\hbar/2)\hat{\sigma}$ действуют в особом спиновом пространстве и изображаются (в представлении, где \hat{s}_z диагонален) в виде матриц Паули:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.25})$$

Собственные функции оператора \hat{s}_z в этом представлении:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.26})$$

они отвечают собственным значениям $\pm 1/2$.

В полном пространстве состояний, включающем также и орбитальное движение частицы, волновая функция записывается в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.27})$$

где $|\psi_{1,2}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 r$ — вероятности обнаружить частицу в момент t в объеме $\mathbf{r} + \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ с проекцией спина на ось z , равной $\pm 1/2$.

Используя общие формулы для углового момента (II.21), (II.22), соотношения (II.25)–(II.27) можно легко обобщить на случай спина, отличного от 1/2.

5. Движение в магнитном поле

Гамильтониан заряженной частицы со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ в присутствии магнитного поля имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - \mu(\hat{\sigma} \mathcal{H}), \quad (\text{II.28})$$

где $\mathcal{H} = \gamma t \mathbf{A}$, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$, $\hat{\mu} = \mu \hat{\sigma}$ — оператор спинового магнитного момента частицы. Гамильтониан (II.28) называется гамильтонианом Паули.

Приведем далее три определения оператора магнитного момента, которые используются при решении различных задач:

$$\hat{\mu} = \frac{\mu\hat{s}}{s} = \hbar\gamma\hat{s} = g\mu_0\hat{s}. \quad (\text{II.29})$$

Здесь s — величина спина, $\mu_0 = |e\hbar/mc|$ — магнитон частицы. Для электрона $m = m_e$ — это магнетон Бора, для протона, нейтрона и ядер $m = m_p$ — это ядерный магнетон. Для электрона $g_e \approx -2$, для протона $g_p = +5,585$ и для нейтрона $g_n \approx -3,826$.

6. Движение в центральном поле. Атом водорода.

Решение стационарного уравнения Шредингера для центрально-симметричного потенциала

$$\hat{H}\psi_E(\mathbf{r}) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) \right\} \psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r})$$

с учётом $[\hat{H}, \hat{\mathbf{M}}^2] = [\hat{H}, \hat{M}_z] = 0$ можно записать в виде $\psi_{El}(r) = R_{El}(r) \times Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$, где $Y_l^{(m)}$ — сферическая функция. При этом уравнение для $R_{El}(r)$ приводится к виду

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] \right\} R_{El}(r) = 0 \quad (\text{II.30})$$

(радицальное уравнение Шредингера). При малых значениях r радиальная функция имеет асимптотический вид

$$R_{El}(r)|_{r \rightarrow 0} \sim r^l,$$

что справедливо для любого центрального потенциала, обращающегося при $r \rightarrow 0$ в бесконечность медленнее, чем $1/r^2$. При больших значениях r в случае, если $U(r) \rightarrow 0$, для связанных состояний (при $E < 0$) радиальная функция ведет себя, как

$$R_{El}(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{-\mu r}, \quad \text{где} \quad \mu^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Для частицы в кулоновском потенциале притяжения (атом водорода) $U(r) = -Ze^2/r$ уровни энергии и радиальные функции для состояний дискретного спектра имеют вид $E_l = -\frac{Z^2 e^2}{2n^2 a}$ и

$$R_{nl} = \left(\frac{Z}{na} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{4}{n(n-l-1)(n+l)!}} e^{-\frac{Zr}{na}} \left(\frac{2Zr}{na} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na} \right). \quad (\text{II.31})$$

где $a = \hbar^2/(me^2)$ — боровский радиус, $L_n^k(x) = e^k x^{-k} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x} x^{n+k})$ — присоединенный полином Лагерра, $n = l_r + l + 1 = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяющее степень полинома в (II.31) и, соответственно, число узлов радиальной функции, называется *радиальным квантовым числом*.

Приведем квазий вид радиальных функций водородоподобного атома для нескольких низких состояний:

$$\begin{aligned} R_{10} &= \left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a}, \quad R_{20} = \left(\frac{Z}{2a}\right)^{3/2} \left[2 - \frac{Zr}{a}\right] e^{-Zr/2a}, \\ R_{21} &= \left(\frac{Z}{2a}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a\sqrt{2}} e^{-Zr/2a}. \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Для решения уравнения (II.30) бывает полезно использовать подстановку $\chi_E(r) = rR_E(r)$, тогда уравнение переходит в

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - U(r) \right] \right\} \chi_E(r) = 0 \quad (\text{II.33})$$

с обязательным граничным условием $\chi_E(0) = 0$. Функция $\chi_E(r)$ должна удовлетворять условию нормировки на положительной полуоси $\int_0^\infty |\chi_E(r)|^2 dr = 1$. По форме уравнение (II.33) совпадает с одномерным уравнением Шредингера.

7.

Квазиклассическое приближение

Две линейно независимые волновые функции — решения одномерного уравнения Шредингера (II.12) в квазиклассическом приближении имеют вид

$$\psi_L^\pm = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{\pm i \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx\right\}, \quad p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}. \quad (\text{II.34})$$

Условия применимости данного приближения, или *условия квазиклассичности*, записываются следующим образом:

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right| = \hbar \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{p} \right) \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\hbar m}{p^2} \frac{\partial U}{\partial x} \right| = \left| \frac{\hbar m}{p^2} F \right| \ll 1, \quad (\text{II.35})$$

где $F = -\partial U / \partial x$ — сила, действующая на частицу. Таким образом, требуется большие значения классических импульсов $p(x)$ и плавный ход потенциальной кривой. Условия (II.35) нарушаются вблизи классических точек поворота, и это потребовало разработки методов *сшивания* или *согласования* решений по обе стороны от точки поворота.

Например, при переходе из классически запрещенной области ($U(x) > E$ при $x > x_0$) в классически разрешенную область ($U(x) < E$

при $x < x_0$), где x_0 — точка поворота, условие согласования выглядит так:

$$\psi(x)|_{x>x_0} = \frac{C}{2\sqrt{|\rho(x)|}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |\rho(x)| dx\right\},$$

$$\psi(x)|_{x<x_0} = -\frac{C}{\sqrt{\rho(x)}} \sin\left\{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_0} \rho(x) dx + \frac{\pi}{4}\right\}. \quad (II.36)$$

Важнейшими приложениями квазиклассической теории³¹ являются правила квантования Бора-Заммерфельда:

$$\int_a^b \sqrt{2m(E - U(x))} dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (II.37)$$

(классически разрешенная зона $a < x < b$ находится между двумя классически запрещенными) и формула Гамова для коэффициента прохождения через потенциальный барьер:

$$D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho(x)| dx\right\} \quad (II.38)$$

(классически запрещенная зона $a < x < b$ находится между двумя классически разрешенными).

8. Теория возмущений

Методы теории возмущений основаны на возможности представления гамильтониана системы в виде $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}$, где $\hat{H}^{(0)}$ — гамильтониан невозмущенной задачи (соответствующее уравнение Шредингера имеет точное решение), а \hat{V} — оператор *возмущения*, его вклад в решение мал.

а) Стационарная теория. Решается стационарное уравнение Шредингера (II.9) $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, векторы состояния $|\psi_n\rangle$ и уровни энергии E_n находятся приближенно в виде степенных рядов по малому параметру, входящему в оператор возмущения.

Если в нулевом приближении мы имеем невырожденный уровень энергии $E_n^{(0)}$, которому отвечает вектор $|\psi_n^{(0)}\rangle$, то поправки первого и второго приближения к уровню энергии имеют вид

$$E_n^{(1)} = \langle n | \hat{V} | n \rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | \hat{V} | n \rangle|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}, \quad (II.39)$$

³¹ Теория Вентцеля-Крамерса-Брэдлюэна (ВКБ).

и поправка первого приближения к вектору состояния:

$$|\psi_{\alpha}^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq \alpha} \frac{\langle k | \hat{V} | \alpha \rangle}{E_k^{(0)} - E_{\alpha}^{(0)}} |\psi_k^{(0)}\rangle \quad (II.40)$$

Здесь при вычислении матричных элементов используются собственные векторы невозмущенного гамильтонiana $|\psi_k^{(0)}\rangle$.

Если в нулевом приближении уровень энергии $E_n^{(0)}$ ε -кратно выражен, т. е. $E_n^{(0)} \rightarrow \{|\psi_{n\alpha}\rangle\}$, $\alpha = 1, k$, то линейные векторы нулевого приближения $|\psi_n\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{n\alpha}^{(0)}\rangle$ и соответствующие поправки к энергиям $E_n^{(1)}$ вычисляются, исходя из системы уравнений

$$\sum_{\beta} [(\alpha | \hat{V} | \beta) - E_n^{(0)} \delta_{\alpha\beta}] c_{\beta} = 0. \quad (II.41)$$

Условие совместности системы (II.41) дает так называемое секулярное уравнение для определения поправок $E_n^{(1)}$:

$$|(\alpha | \hat{V} | \beta) - E_n^{(0)} \delta_{\alpha\beta}| = 0. \quad (II.42)$$

6) Нестационарная теория. В этом случае оператор возмущения зависит от времени: $\hat{V} = \hat{V}(t)$. При этом задача становится нестационарной и необходимо рассматривать временную эволюцию состояния. Удобно перейти к представлению взаимодействия:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_0(t)|\Psi_0(t)\rangle,$$

где $\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}^{(0)} t / \hbar}$ — оператор эволюции невозмущенной системы. Вектор состояния в представлении взаимодействия $|\Psi_i(t)\rangle$ подчиняется уравнению Шредингера в представлении взаимодействия:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_i(t)\rangle = \hat{U}_0^{\dagger} \hat{V}(t) \hat{U}_0 |\Psi_i(t)\rangle = \hat{V}_i(t) |\Psi_i(t)\rangle. \quad (II.43)$$

Решение уравнения (II.43) можно записать в общем виде с помощью T -экспоненты или хронологически упорядоченного ряда

$$|\Psi_i(t)\rangle = \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_i(t') dt' \right) |\Psi_i(t_0)\rangle. \quad (II.44)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_i(t') dt' \right) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' \dots \int_{t^{(n-1)}}^t dt^{(n)} \hat{V}_i(t') \hat{V}_i(t'') \dots \hat{V}_i(t^{(n)}), \end{aligned} \quad (II.45)$$



где все операторы, стоящие справа, берутся в более ранние моменты времени, т. е. $t^{(0)} \leq t^{(n-1)} \leq \dots \leq t' \leq t$. Обычно выбирают $t_0 = 0$ или $t_0 = -\infty$.

Если до включения возмущения (при $t < t_0$) система находилась в собственном состоянии невозмущенного гамильтонiana $|\psi_n^{(0)}\rangle$, то при $t > t_0$ вектор состояния $|\Psi_n(t)\rangle$ можно записать в виде

$$|\Psi_n(t)\rangle = U_0(t) \sum_k a_{nk}(t) |\psi_k^{(0)}\rangle = \sum_k a_{nk}(t) e^{-iE_k^{(0)}(t)/\hbar} |\psi_k^{(0)}\rangle.$$

Точное выражение для коэффициентов $a_{nk}(t)$ получается из (II.44):

$$a_{nk}(t) = \langle \psi_k^{(0)} | \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') dt' \right) | \psi_n^{(0)} \rangle,$$

откуда с точностью до поправок первого приближения с учетом малости возмущения (см. (II.45)) получаем

$$a_{nk}(t) \approx a_{nk}^{(0)}(t) + a_{nk}^{(1)}(t) = \delta_{nk} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_{kk} e^{i\omega_{nk} t'}, \quad (\text{II.45})$$

где $V_{kk} = \langle \psi_k^{(0)} | \hat{V} | \psi_k^{(0)} \rangle$, $\omega_{nk} = (E_k^{(0)} - E_n^{(0)})/\hbar$.

Вероятность квантового перехода из состояния n в состояние k в общем случае определяется с помощью формулы (II.44):

$$W_{nk} = \left| \langle \psi_k^{(0)} | \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') dt' \right) | \psi_n^{(0)} \rangle \right|^2.$$

В первом порядке теории возмущений следует оставить только линейный по \hat{V} член в ряде (II.45):

$$W_{nf}^{(1)} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t \langle \psi_k^{(0)} | \hat{V}_I(t') | \psi_n^{(0)} \rangle dt' \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t e^{i\omega_{nk} t'} V_{kk}(t') dt' \right|^2. \quad (\text{II.47})$$

Вероятность переходов в единицу времени из начального состояния i в близкие конечные состояния f , относящиеся к непрерывному спектру, под действием постоянного возмущения \hat{V} имеет вид

$$dw_f = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) dy, \quad (\text{II.48})$$

где dy обозначает число этих состояний. Интегрирование в (II.48) по энергиям конечных состояний дает *изолтое правило Ферми*:

$$\omega_f = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho_f(E_f), \quad (\text{II.49})$$

причем $\rho_f = dy/dE_f$ — энергетическая плотность конечных состояний.

Если возмущение периодически зависит от времени $\hat{V}(t) = \hat{V}^- e^{-i\omega t} + \hat{V}^+ e^{i\omega t}$, то обобщением формулы (II.45) будет

$$d\omega_j^\pm = \frac{2\pi}{\hbar} |\hat{V}_j^\pm|^2 \delta(E_j - E_i \pm \hbar\omega) d\nu_j, \quad (II.50)$$

где верхний знак отвечает поглощению, а нижний — излучению энергии системой.

в) Адиабатическое приближение. В рамках данного приближения гамильтониан системы $\hat{H}(t)$ считается зависящим от времени, но не разделяется на гамильтониан невозмущенной задачи и оператор возмущения, дающий малый вклад в решении. Малым параметром здесь является скорость изменения $\hat{H}(t)$. Предполагается, что гамильтониан изменяется медленно по сравнению со всеми временными масштабами системы, т. е. рассматриваются адиабатические изменения. При этом необходимо иметь в виду, что медленное изменение вектора состояния, рассматриваемое в течение достаточно большого промежутка времени, может привести к весьма существенному итоговому изменению исходного вектора.

Предполагается, что гамильтониан системы зависит от некоторого параметра $\xi(t)$, который является заданной плавной функцией времени: $\hat{H}(t) = \hat{H}(\xi(t))$. Данный параметр может описывать расстояние между взаимодействующими подсистемами, напряженность внешнего поля и т. п. (в общем случае таких параметров может быть несколько).

В каждый момент времени можно определить мгновенные собственные векторы гамильтониана $|\psi_n(\xi(t))\rangle$, отвечающие значениям энергии $E_n(\xi(t))$. Они находятся из уравнения

$$\hat{H}(\xi(t))|\psi_n(\xi(t))\rangle = E_n(\xi(t))|\psi_n(\xi(t))\rangle$$

Данную систему состояний можно использовать в каждый момент времени t в качестве базиса.

При адиабатическом изменении параметров вероятности квантовых переходов системы между мгновенными собственными состояниями гамильтониана $\hat{H}(\xi(t))$ оказываются экспоненциально малыми [17, 19, 22]. Поэтому система, находившаяся первоначально в состоянии $|\psi_n(\xi(0))\rangle$, относящемся к невырожденному мгновенному значению энергии $E_n(\xi(0))$, будет в последующие моменты времени оставаться в подобном мгновенном собственном состоянии (т. е. в состоянии $|\psi_n(\xi(t))\rangle$), отвечающем уровню энергии $E_n(\xi(t))$. Таким образом, вектор состояния успевает «подстраиваться» под изменение гамильтониана, медленно меняясь со временем, и тем точнее, чем меньше величина: $\xi = d\xi/dt$.

Однако вектор $|\psi_n(\xi(t))\rangle$ с течением времени приобретает некоторую фазу. В общем случае эта фаза состоит из двух частей: *динамической* фазы, возникшей вследствие обычной временной эволюции стационарного состояния (с унитарным оператором эволюции $\hat{U}(t)$, см. (III.11)), и *геометрической* (или *топологической*) фазы, которая отражает топологию пространства параметров. Данную фазу принято называть *фазой Берри*.

9. Релятивистская квантовая механика

Релятивистское волновое уравнение для свободной частицы со спином $s = 1/2$ (уравнение Дирака) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}_D \Psi(\mathbf{r}, t) = \left\{ c(\hat{\alpha}\hat{p}) + \beta mc^2 \right\} \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.51})$$

где волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ представляет собой четырехкомпонентный спинор, или *бастинор*, а матрицы Дирака обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = \{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2\delta_{ij}, \\ \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0, \quad \hat{\beta}^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\alpha}_i = \hat{\rho}_i \hat{\Sigma}_i = -\gamma^0 \hat{\Sigma}_i, \\ \hat{\Sigma}_i \hat{\Sigma}_j = i\delta_{ij} + ie_{ijk} \hat{\Sigma}_k. \end{cases}$$

В так называемом стандартном, или дираковском, представлении матрицы $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}$, $\hat{\Sigma}_i$ можно записать в блочном виде, выражив их через матрицы Паули:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.52})$$

Обобщение уравнения (III.51) на случай наличия внешнего электромагнитного поля, описываемого четырехмерным потенциалом $A^\mu = \{\phi, \mathbf{A}\}$, дает

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left\{ c\hat{\alpha}\left(\hat{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 - e\phi \right\} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{III.53})$$

где $-e < 0$ — заряд электрона.

Уравнение (III.53) можно записать в чисто релятивистски ковариантной форме:

$$\left\{ i\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) - mc \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{III.54})$$

где введены γ -матрицы: $\gamma^0 = \sigma_0 = \hat{\beta}$, $\gamma^i = -\gamma_i = \hat{\beta}\sigma_i$, имеющие следующий вид в представлении (II.52):

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Сложение моментов. Тождественность частиц

а) Сложение моментов. Задача сложения моментов подразумевает следующее. Предполагаем, что для двух систем (или частиц), которые характеризуются операторами угловых моментов j_1 и j_2 , известны решения одиночастичных задач (см. (II.21))

$$\begin{cases} \hat{j}_2|j_{1,2}, m_{1,2}\rangle = \hbar_2(j_{1,2} + 1)|j_{1,2}, m_{1,2}\rangle, \\ \hat{j}_{1,2}|j_{1,2}, m_{1,2}\rangle = m_{1,2}|j_{1,2}, m_{1,2}\rangle. \end{cases}$$

На основании этого нужно найти решение задачи

$$\begin{cases} \hat{j}^2|J, M\rangle = J(J+1)|J, M\rangle, \\ \hat{j}_z|J, M\rangle = M|J, M\rangle, \end{cases}$$

где $\hat{j} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2$ — оператор суммарного углового момента. То есть нужно найти общие собственные векторы и спектр операторов \hat{j}^2 и \hat{j}_z . Общее решение данной задачи дает следующую связь между квантовыми числами:

$$M = m_1 + m_2, \quad J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \quad \dots, \quad |j_1 - j_2|. \quad (\text{II.55})$$

Соотношение (II.55) называется *правилом треугольника*.

Векторы нового базиса $|JM\rangle = |j_1 j_2 M\rangle$ (общие собственные векторы операторов $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}^2, \hat{j}_z$) связаны с векторами старого базиса $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ (общими собственными векторами операторов $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2, \hat{j}_z$) линейным преобразованием

$$|JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 |M\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle.$$

Коэффициенты разложения $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ (которые можно выбрать вещественными) называются *коэффициентами Клебша-Гордана*. Практическую важность представляют соотношения ортогональности

$$\sum_{m_1, m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} C_{j_1' m_1' j_2' m_2'}^{J'M'} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (\text{II.56})$$

$$\sum_{J, M} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} C_{j_1 m_1' j_2 m_2'}^{JM'} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (\text{II.57})$$

б) Тождественность частиц. Частицы, обладающие всеми одинаковыми физическими характеристиками, в квантовой механике называются тождественными. Состояние частицы характеризуется как ее координатой в конфигурационном пространстве τ , так и значением внутренней переменной m_s — проекцией спина, т. е. определяется парой переменных:

$$\{\tau, m_s\} = \xi. \quad (\text{II.58})$$

Волновая функция системы двух тождественных частиц, зависящая от двух аргументов (II.58), при перестановке частиц местами будет описывать физически то же самое состояние, поэтому она должна быть собственной функцией оператора перестановки двух частиц \hat{P}_{12} :

$$\hat{P}_{12}\Psi(\xi_1, \xi_2; t) = \Psi(\xi_2, \xi_1; t).$$

Симметрия волновой функции относительно перестановки частиц однозначно связана с их спином.

$\Psi(\xi_1, \xi_2; t) = -\Psi(\xi_2, \xi_1; t)$ при $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ — ферми-частицы;

$\Psi(\xi_1, \xi_2; t) = +\Psi(\xi_2, \xi_1; t)$ при $s = 0, 1, 2, \dots$ — бозе-частицы.

Если система состоит более, чем из двух частиц, то

$$\Psi(\xi_1 \dots \xi_i \dots \xi_k \dots \xi_N; t) = \pm \Psi(\xi_1 \dots \xi_k \dots \xi_i \dots \xi_N; t), \quad (\text{II.59})$$

где верхний знак относится к бозе-частицам (бозонам), а нижний — к ферми-частицам (фермиям).

Для описания состояний системы тождественных частиц, взаимодействием которых друг с другом можно пренебречь, выбирается базис неподвижных частиц — одночастичный базис. При этом каждое возможное состояние N частиц должно удовлетворять перестановочной симметрии в соответствии с формулой (II.59). Для ферми-частиц такие базисные состояния могут быть записаны в виде детерминанта Слэттера:

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots, n_N}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(\xi_1) & \psi_{n_1}(\xi_2) & \dots & \psi_{n_1}(\xi_N) \\ \psi_{n_2}(\xi_1) & \psi_{n_2}(\xi_2) & \dots & \psi_{n_2}(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n_N}(\xi_1) & \psi_{n_N}(\xi_2) & \dots & \psi_{n_N}(\xi_N) \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что если среди индексов, нумерующих одночастичные состояния n_1, n_2, \dots, n_N , есть два одинаковых, то два столбца определителя окажутся одинаковыми, и функция тождественно обратится в ноль. От-

сюда следует *принцип Паули*: в системе тождественных фермионов в каждом однофермионном состоянии может находиться не более одной частицы.

Для системы бозе-частиц базисные состояния определяются полностью симметризованный по всем перестановкам суммой, которая иногда называется *перманентом*:

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots, n_N}^B(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \sqrt{\frac{N_1! N_2!}{N!}} \sum_{\sigma} P \psi_{n_1}(\xi_1) \psi_{n_2}(\xi_2) \dots \psi_{n_N}(\xi_N),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам \mathfrak{S} различных индексов n_1, n_2, \dots, n_N , а числе N_i указывают, сколько частиц находится в состоянии i , т. е. сколько из этих индексов имеют одинаковое значение i (очевидно, что $\sum N_i = N$).

В системе двух независимодействующих нерелятивистских частиц спиновые и координатные переменные частично разделяются, при этом формальное выражение имеет одинаковый вид для ферми- и бозе-частич:

$$\Phi_{n_1, n_2}^F(\xi_1, \xi_2) = \sum_{S, M_S} C_{S, M_S} \Phi_{n_1, n_2}^{(S)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \chi(S, M_S). \quad (II.60)$$

Здесь $n_{1,2}$ — полный набор квантовых чисел *поночественных* состояний (без учета спина), $\chi(S, M_S)$ — спиновая функция, описывающая состояние с определенным значением суммарного спина двух частиц S . Координатная часть волновой функции (II.60) равна

$$\Phi_{n_1, n_2}^{(S)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{n_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2}(\mathbf{r}_2) + (-1)^S \psi_{n_1}(\mathbf{r}_2) \psi_{n_2}(\mathbf{r}_1)).$$

11. Теория атомов и молекул

а) Атомная система единиц. Часто в решениях задач используется *атомная система единиц* (а. е.) $e = h = m_e = 1$. Приведем значения некоторых характерных величин для атомов.

А. е. длины (боровский радиус): $a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529 \cdot 10^{-8}$ см.

А. е. энергии: $E_B = \frac{e^2}{a} = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = 27.21$ эВ.

А. е. скорости: $v_B = \frac{e^2}{\hbar} = 2.2 \cdot 10^8$ см/с.

А. е. времени: $T_B = \frac{\hbar a}{e^2} = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} = 2.42 \cdot 10^{-17}$ с.

А. е. частоты: $\nu_B = \frac{m_e e^4}{\hbar^3} = 4.13 \cdot 10^{16}$ с⁻¹.

А. е. напряженности электрического поля: $E_B = \frac{e}{a} = 5.14 \cdot 10^9$ В/см.

Решения уравнения Шредингера для связанных состояний водородоподобного атома приведены ранее в (II.31) и (II.32).

б) Сложный атом. Большинство атомов периодической системы элементов Менделеева обычно рассматриваются в рамках нерелятивистской теории. При этом описание и классификация состояний и уровней энергии проводится в соответствии со *стационарной теорией возмущений*. В нулевом приближении учитываются только *кулоновские* взаимодействия, а качестве невозмущенного гамильтонiana атома \hat{H}_0 выбирается сумма одночастичных гамильтонианов, в которых взаимодействие электронов с бесконечно тяжелым ядром и парное взаимодействие между собой заменяется центрально-симметричной частью самосогласованного потенциала, вид которого, естественно, неизвестен. Однако это позволяет задать общие свойства одночастичных состояний частиц в центральном поле, которые определяются стандартным полным набором одночастичных квантовых чисел n, l, m и проекций спина m_s , поскольку в нерелятивистском описании спиновые и координатные переменные каждого электрона разделяются.

Из одночастичных состояний частицы в центральном поле строится многочастичный базис невозмущенных состояний атома, содержащего N электронов, в виде слатеровских детерминантов. Выбор такого представления позволяет с хорошей точностью считать каждый детерминант Слатера соответствующим невозмущенным состоянием. Поскольку все магнитные взаимодействия рассматриваются в виде возмущения, в нулевом приближении наряду с энергией всегда существуют интегралы движения, определяющие состояние атома как целого: полный спин атома S и полный орбитальный момент L . Таким образом, состояние атома в нулевом приближении будет полностью определено указанием числа электронов с одинаковой энергией (на одной магнитной оболочке), зависящей только от двух одночастичных квантовых чисел n и l (конфигурации), определенным значением полного орбитального и полного спинового моментов.

$$|\Phi^{(0)}\rangle = \sum_{S,M} \sum_{L,M} A_{SM;LM} |\text{конфиг.}, L, S\rangle |L, M\rangle |S, M_S\rangle.$$

Кратность вырождения уровня энергии в нулевом приближении равна

$$N_0 = \sum_{S,L} (2S+1)(2L+1),$$

где суммирование проводится по всем возможным (разрешенным принципом Паули) значениям полного спина и орбитального момента атома.

Поправка первого порядка определяется нецентральной частью само-согласованного поля и обусловлена по-прежнему только кулоновскими взаимодействиями. В первом приближении состояния с различными L и S при заданной конфигурации имеют различные поправки и вырожденный уровень энергии расщепляется. Правильные состояния нулевого приближения $|\Psi^{(0)}\rangle$ теперь имеют заданное значение полного орбитального и спинового моментов:

$$|\Psi^{(0)}\rangle = |\text{конфиг., } L, S\rangle |L, M\rangle |S, M_S\rangle,$$

а расщепленные уровни энергии имеют кратность вырождения

$$N_1 = (2S + 1)(2L + 1).$$

В следующих порядках теории возмущений учитываются более слабые взаимодействия, в частности, для свободного атома всегда следует учесть спин-орбитальное взаимодействие, а также другие магнитные взаимодействия или редиативистские поправки. В этом случае интегралом движения атома как целого должен быть полный угловой момент

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}},$$

а правильные состояния будут иметь вид

$$|\Psi\rangle = |\text{конфиг., } L, S\rangle |L, S, J, M_J\rangle,$$

где

$$|L, S, J, M_J\rangle = \sum_{M_L, M_S, M_J} C_{LM_S M_J}^{JM} |L, M_L\rangle |S, M_S\rangle.$$

Кратность вырождения уровней понижается до $N_2 = (2J + 1)$.

Уровни энергии атома принято называть *термами*. Для них вводятся спектроскопические символы, указывающие значения основных квантовых чисел, определяющих кратность вырождения:

$$^{2S+1}L_J.$$

При определении основного терма невозбужденного атома (уровня с минимальной энергией) применяются эмпирические правила Хунда. Для первого порядка теории возмущений первое правило Хунда гласит: энергия атома имеет минимальное значение в состояниях с максимально возможным значением полного спина S . Если при этом возможны несколько различных значений полного орбитального момента, минимальную энергию имеют состояния с максимальным значением L .

Для второго порядка теории возмущений формулируется *второе правило Хунда*: минимальную энергию имеет терм с $J = |L - S|$, если

электронная оболочка заполнена меньше, чем наполовину, и.e. $J = L + S$ в противном случае.

Во внешнем магнитном поле гамильтониан атома принято представлять в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_Z + \hat{V}_D,$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан свободного атома.

$$\hat{V}_Z = \mu_0 \mathcal{H} (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \quad (II.61)$$

— оператор так называемого энгмановского взаимодействия, где μ_0 — магнетон Бора электрона.

$$\hat{V}_D = \frac{e^2}{2mc^2} \sum_i \hat{\mathbf{A}}^2(r_i) = \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{8m_e c^2} \sum_i r_i^2 \sin^2 \theta_i \quad (II.62)$$

— оператор диамагнитного взаимодействия, который всегда можно учитывать как малое возмущение к гамильтониану свободного атома.

Учет оператора \hat{V}_Z в качестве малого возмущения возможен только в относительно слабых полях, когда $\mu_0 \mathcal{H}$ много меньше величины спин-орбитального взаимодействия.

12. Теория рассеяния

Постановка задачи на рассеяние частицы с импульсом $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ на потенциале $V(\mathbf{r})$ предполагает исследование решения уравнения Шредингера

$$\hat{H}\psi_k(\mathbf{r}) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right\} \psi_k(\mathbf{r}) = E \psi_k(\mathbf{r}),$$

отвечающего асимптотическому граничному условию на больших расстояниях

$$\psi_k(\mathbf{r}) \text{ при } r \sim e^{ikr} + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{ikr}, \quad (II.63)$$

где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, углы θ и φ характеризуют направление импульса $\mathbf{p}' = \hbar \mathbf{k}'$ рассеянной частицы. Амплитуда рассеяния $f(\theta, \varphi)$ определяет дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$. Полное сечение рассеяния получается в результате интегрирования $d\sigma$ по углам: $\sigma = \int |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$.

Борновское приближение предполагает вычисление амплитуды рассеяния по формуле

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}} d^3 r. \quad (II.64)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ характеризует изменение импульса при рассеянии, причем $q = 2k \sin(\theta/2)$, где θ — угол рассеяния. Условием применимости борновского приближения является выполнение хотя бы одного из соотношений

$$\frac{m V_0 a^2}{\hbar^2} \ll 1, \quad \frac{V_0 a}{\hbar v} \ll 1. \quad (\text{II.65})$$

В формулах (II.65) V_0 и a — характеристики величина потенциала и его радиус действия, $v = \hbar k/m$ — скорость частицы.

При рассеянии центральным потенциалом формула (II.64) упрощается:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty V(r) \sin qr r dr.$$

Метод парциальных волн применяется в случае центрального потенциала и предполагает разложение функции (II.63), которое имеет вид

$$\psi_k(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u_l(r)}{hr} P_l(\cos \theta),$$

где $u_l(r)$ — парциальная волна, представляющая собой решение радиального уравнения Шредингера (II.33) с $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ и граничным условием

$$u_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim C \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \quad (\text{II.66})$$

Слагаемое δ_l в формуле (II.66) называется *фазой рассеяния*.

Знание фаз рассеяния позволяет найти амплитуду рассеяния

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2\hbar k} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (\text{II.67})$$

(формула Факсена—Хольтмарка), а также полное сечение рассеяния

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{4\pi}{\hbar^2} \sin^2 \delta_l. \quad (\text{II.68})$$

Важное значение в теории рассеяния имеет соотношение, называемое *оптической теоремой*:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\hbar} \operatorname{Im} f(0), \quad (\text{II.69})$$

связывающее полное сечение рассеяния (II.68) и амплитуду рассеяния вперед.

13.

Теория излучения

Последовательная теория, рассматривающая процессы излучения и поглощения фотонов, предполагает, что поле излучения, или свободное электромагнитное поле, является квантованным, и поэтому должно описываться при помощи оператора векторного потенциала

$$\hat{A}_{rad}(r, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^3}{\omega V}} \left\{ \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i(\omega t - kr)} + \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}^* \hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i(\omega t - kr)} \right\}, \quad (\text{II.70})$$

где $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}$ — операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором \mathbf{k} и состоянием поляризации $\lambda = 1, 2$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}$ — единичный вектор поляризации фотона, удовлетворяющий условию перенормированности $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda})^2 = 0$. Операторы $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям: $[\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}', \lambda'}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}$. Предполагается, что поле заключено в куб объемом $V = L^3$, и при $L \rightarrow \infty$ величина L не входит в наблюдаемые величины.

Взаимодействие нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$ с полем излучения (II.70) при выборе кулоновской калибровки имеет вид

$$\tilde{V} = -\frac{e}{mc} (\hat{A}_{rad} \tilde{p}) - \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}_{rad}^2 - \mu (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{H}}_{rad}), \quad (\text{II.71})$$

где $\hat{\mathcal{H}}_{rad} = \text{rot } \hat{A}_{rad}$, e , m и μ — электрический заряд, масса и магнитный момент частицы.

Поскольку квантовая система, взаимодействующая с полем излучения, считается нерелятивистской, то взаимодействие (II.71) будет характеризоваться малым параметром $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137 \ll 1$ (постоянная структуры). Поэтому расчеты можно вести по теории возмущений. В этих условиях наиболее существенную роль играют квантовые переходы с излучением или поглощением минимального числа фотонов. Если речь идет об излучении или поглощении одного фотона системой типа атома, то в (II.71), как правило, можно пренебречь квадратичным по \mathbf{A} слагаемым, описывающим двухфотонные переходы, и слагаемым с магнитным моментом, которое содержит лишнюю степень параметра α по сравнению с первым слагаемым.

Приведем выражение для полной вероятности излучения фотона в дипольном приближении, которое сопровождается переходом квантовой системы из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ (см. также задачу 2.13.3):

$$W_{if} = \frac{4}{3} \frac{\omega_i^3}{\hbar c} |\mathbf{d}_i|^2,$$

где $\mathbf{d}_i = \langle f | \hat{d} | i \rangle$ — матричный элемент оператора дипольного момента квантовой системы (системы нерелятивистских частиц), $\omega_i = (E_i - E_f)/\hbar$ — частота перехода.

ЗАДАЧИ

2.1. ОПЕРАТОРЫ И СОСТОЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

- 2.1.1. Для операторов инверсии \hat{I} и трансляции \hat{T}_0 найти обратные и эрмитово сопряженные.
- 2.1.2. Найти собственные значения и собственные функции оператора инверсии \hat{I} .
- 2.1.3. Найти собственные значения и собственные функции оператора трансляции \hat{T}_0 .
- 2.1.4. Найти явный вид операторов $\exp(i\varphi \hat{I})$ и $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{p}_x a\right)$, где φ и a — вещественные числа.
- 2.1.5. Проверить эрмитовость основных операторов (координаты, импульса, момента импульса, оператора Гамильтона). Доказать соотношения (условия полноты).

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I, \quad \int |\lambda\rangle \langle \lambda| d\lambda = I.$$

- 2.1.6. Доказать справедливость равенств

$$(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^*\hat{A}^*, \quad (\hat{A}\hat{B} - \hat{F})^* = \hat{F}^* - \hat{B}^*\hat{A}^*,$$

- 2.1.7. Показать, что $\hat{A}^*\hat{A}$ — эрмитов оператор (при любом \hat{A}) и что $(\hat{A}^*\hat{A}) \geq 0$.
- 2.1.8. Доказать, что $|\psi\rangle$ есть собственный вектор эрмитового оператора A тогда и только тогда, если $\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2$.
- 2.1.9. Коммутатор двух эрмитовых операторов \hat{A} и \hat{B} равен $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$, где \hat{C} — эрмитов. Доказать соотношение неопределеностей:

$$((\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2)((\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)^2) \geq \frac{\hbar^2 \langle\hat{C}\rangle^2}{4}$$

- 2.1.10. Пусть \hat{A} , \hat{B} и \hat{F} — эрмитовы операторы, и для них выполняются следующие соотношения: $[\hat{A}, \hat{F}] = [\hat{B}, \hat{F}] = 0$, но $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Доказать, что спектр оператора \hat{F} вырожден.

- 2.1.11. Доказать справедливость соотношений

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B},$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

- 2.1.12. Проверить справедливость коммутационных соотношений

$$[\hat{x}, F(\hat{p}_x)] = i\hbar \frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x}, \quad [\hat{p}_x, G(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial G(x)}{\partial x}.$$

- 2.1.13. Раскрыть коммутаторы $[\hat{T}_x, \hat{x}]$, $[\hat{T}_x, \hat{p}_x]$.

- 2.1.14. Раскрыть коммутаторы

$$[\hat{p}_x, f(r)], \quad [\hat{p}_x^2, f(r)], \quad \left[\hat{x}, \exp\left(\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x\right) \right], \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- 2.1.15. Получить выражение для оператора скорости частицы массы m .

- 2.1.16. Показать, что $\langle \mathbf{r}|U(\mathbf{r})|\mathbf{r}'\rangle = U(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

- 2.1.17. Доказать справедливость соотношения $([\hat{A}, \hat{B}] \neq 0)$

$$e^{i\hat{A}} \hat{B} e^{-i\hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} \xi^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

- 2.1.18. Чему равен оператор

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} a \hat{p}\right) \hat{U}(r) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}\right),$$

где a — постоянный вектор?

- 2.1.19. Оператор трансляции \hat{T}_a действует на векторы состояний с определенной координатой $|r\rangle$ следующим образом: $\hat{T}_a|r\rangle = |r-a\rangle$. Как действует этот оператор на произвольный вектор состояния $|v\rangle$?

- 2.1.20. Используя переход от x -к p -представлению и наоборот, получить вид оператора координаты в импульсном представлении и оператора импульса в координатном представлении.

- 2.1.21. Записать стационарное уравнение Шредингера в импульсном представлении.

- 2.1.22. Эрмитов оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от вещественного параметра λ . Собственные значения, $f_n(\lambda)$, и собственные векторы, $|n(\lambda)\rangle$, этого оператора также зависят от λ . Докажите следующее соотношение (теорема Фейнмана-Гельмана):

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle n | \frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial \lambda} | n \rangle.$$

- 2.1.23. Используя оператор координаты свободной частицы в представлении Гейзенberга, найти закон движения и «расплывания» волнового пакета.

2.2. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

- 2.2.1. Найти уровни энергии и собственные функции частицы в потенциальном ящике (с бесконечно высокими стенками):

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, x > a. \end{cases}$$

Найти $\langle x \rangle$ и $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ для n -го стационарного состояния. Показать, что при $n \rightarrow \infty$ найденные величины принимают классические значения. Найти фазовый объём, приходящийся на одно квантовое состояние.

- 2.2.2. Найти уровни энергии и собственные функции частицы в потенциальной яме вида

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

используя симметрию потенциала ($U(x) = U(-x)$).

- 2.2.3. Используя формулу (см. задачу 2.1.22)

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \langle n | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} | n \rangle,$$

вычислить силу, с которой частица действует на стенку потенциального ящика.

- 2.2.4. Найти уровни энергии и собственные функции частицы в потенциальной яме вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Указать условие существования по крайней мере одного дискретного уровня энергии в такой яме.

- 2.2.5. Пусть в потенциальной яме задачи 2.2.2 существует единственный уровень энергии с очень маленькой энергией связи: $|E| \ll \hbar^2/(2ma^2)$ ($\tau \in \omega_0 \ll 1$, где $\omega = \sqrt{2m|E|}/\hbar$). Найти вероятность обнаружения частицы вне потенциальной ямы. Можно ли истолковать полученный результат на основе квантовой механики?
- 2.2.6. Найти уровень энергии и собственную функцию связанного состояния частицы в поле δ -ямы:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \omega_0 \delta(x)$$

- 2.2.7. Для связанного состояния частицы в поле δ -ямы найти $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$. Рассмотреть разные способы вычисления $\langle \hat{p}^2 \rangle$. Проверить, выполняется ли соотношение неопределенностей.
- 2.2.8. Решить задачу 2.2.6 в импульсном представлении.

- 2.2.9. Найти уровни энергии и собственные функции связанных состояний частицы в поле двух δ -ям:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \omega_0 (\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

Отдельно рассмотреть случай удаленных δ -ям ($\omega_0 a \gg 1$).

- 2.2.10. Найти разрешенные зоны энергии для частицы, движущейся в одномерном периодическом поле инда:

a) $U(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 k_0}{m} \delta(x - na)$ (модель Кронига-Пенни);

b) $U(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 \omega_0}{m} \delta(x - na)$.

Рассмотреть предельные случаи $\beta_0 a \gg 1$ (или $\omega_0 a \gg 1$, сильная связь) и $\beta_0 a \ll 1$ (или $\omega_0 a \ll 1$, слабая связь).

- 2.2.11. Определить волновые функции частицы в однородном поле

$$V(x) = -Fx$$

- 2.2.12. В условиях действия потенциала задачи 2.2.9 (при $\omega_0 a \gg 1$) частица в начальный момент времени $t=0$ находится в левой яме. Найти вероятность обнаружения частицы в правой яме в момент времени t .

- 2.2.13. Найти коэффициенты прохождения и отражения:
 а) для прямоугольной ямы;
 б) для прямоугольного потенциального барьера (рассмотреть случаи, когда энергия падающей частицы больше и меньше высоты потенциального барьера).
- 2.2.14. Для частицы, находящейся в связанном состоянии в поле 5-ямы (см. задачу 2.2.6) найти вероятность «ионизации» при неизменении параметра ямы от μ_0 до μ_1 .
- 2.2.15. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ -потенциала (см. задачу 2.2.6). Найти коэффициенты прохождения и отражения, нарисовать графики.
- 2.2.16. В условиях задачи 2.2.5 найти фазу отраженной от потенциала задачи 2.2.4 волны $e^{i(kz+q)}$ относительно падающей из бесконечности $-e^{-iz}$. Выразить ее через энергию слабосвязанного уровня ($ka \ll 1$).
- 2.2.17. На плоскость $z = 0$, разделяющую области пространства с потенциалами

$$U = \begin{cases} U_1, & z < 0, \\ U_2, & z > 0, \end{cases}$$

падает снизу волна де-Броиля, направление которой составляет угол θ , с осью z . Найти закон преломления и показатели преломления для обеих сред. Найти коэффициенты отражения и прохождения. При каких условиях будет наблюдаться полное внутреннее отражение? Каково при этом поведение волны во второй среде?

- 2.2.18. Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -A\delta(x-a), & x > 0. \end{cases}$$

Найти зависимость числа связанных состояний от параметров a и A .

- 2.2.19. Найти функцию Грина $G(x, x')$ уравнения Шредингера для свободной частицы при $E < 0$ в одномерном случае. Используя эту функцию, найти энергию связанного состояния частицы в поле

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \omega_0 \delta(x).$$



2.3. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЕТОР

- 2.3.1. Найти распределение по импульсам для основного состояния гармонического осциллятора.
- 2.3.2. Для одномерного гармонического осциллятора вычислить $\langle \hat{p}^2 \rangle / \hbar$, $\langle \hat{p}^4 \rangle / \hbar^3$ и сравнить с классическим результатом для x^2 и p^2 .
- 2.3.3. Воспользовавшись понижающим и повышающим операторами, \hat{a} и \hat{a}^+ , найдите средние значения операторов \hat{x}^3 и \hat{x}^{2n+1} в n -м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора.
- 2.3.4. Вычислить произведение дисперсий $\Delta p \Delta x$ для n -го состояния осциллятора.
- 2.3.5. Найти для гармонического осциллятора \hat{a} и \hat{a}^+ в представлении Гейзенberга.
- 2.3.6. Вычислить $[\hat{a}, i\hat{a}^*]$, если $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$.
- 2.3.7. а) Частица движется в потенциальном поле

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Определить вероятность нахождения частицы вне классических границ для основного состояния.

б) Найти энергетические уровни частицы, движущейся в потенциальном поле вида

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

- 2.3.8. Написать уравнение Шредингера для осциллятора в p -представлении и определить распределение вероятностей различных значений импульса.
- 2.3.9. Для когерентного состояния осциллятора $|z\rangle$ показать, что

$$\frac{\langle z|\hat{H}|z\rangle}{\langle z|z\rangle} = \hbar\omega(|z|^2 + 1/2),$$

где \hat{H} — гамильтониан гармонического осциллятора с частотой ω .

- 2.3.10. Для когерентного состояния осциллятора $|z(t)\rangle$ вычислить среднее значение операторов \hat{x} и \hat{p} и сравнить результат с классической траекторией в фазовом пространстве осциллятора.

- 2.3.11 Найти волновую функцию для когерентного состояния осциллятора $|z\rangle$ в координатном и импульсном представлениях.
- 2.3.12 Зарженный гармонический осциллятор находится в основном состоянии в однородном электрическом поле $\vec{E} \parallel \hat{x}$, которое внезапно выключается в момент времени $t = 0$. Определить вероятность обнаружить осциллятор на n -м возбужденном уровне энергии при $t > 0$.
- 2.3.13 В когерентном состоянии гармонического осциллятора найти $\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle$.

2.4. УГОЛОВОЙ МОМЕНТ, СПИН

2.4.1. Раскрыть коммутаторы

- а) $[\hat{l}_z, \hat{r}^2]$; б) $[\hat{l}_z, \hat{p}^2]$; в) $[\hat{l}_z, (\hat{r}\hat{p})]$; г) $[\hat{l}_z, (\hat{p}\hat{r})\hat{p}_z]$;
 д) $[\hat{l}_z, \hat{p}_x\hat{p}_y]$; е) $[\hat{l}_z, \hat{l}_x]$; ж) $[\hat{l}_+, \hat{l}_-]$; з) $[\hat{l}_z, \hat{p}_x]$;
 и) $[\hat{l}_z, \hat{x}_x]$; к) $[\hat{l}_z, f(r)]$.

2.4.2 Найти $\text{Tr} \hat{l}_z$, используя коммутационные соотношения и свойство следа $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ или $\text{Tr}[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

2.4.3 Доказать, что собственные значения оператора \hat{l}^2 разны $i(i+1)$, исходя из того, что все координатные оси равноправны и возможные значения проекции m на данную ось равновероятны.

2.4.4 Используя соотношение неопределенности для \hat{M}_x и \hat{M}_y , определить минимальное значение выражения

$$\langle l, l | \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 | l, l \rangle.$$

2.4.5 Преобразовать оператор $e^{i\omega t} \hat{l}_{\pm} e^{-i\omega t}$.

2.4.6 Показать, что в состоянии $|l, m\rangle$ (определенна проекция на ось z) выполняются соотношения:

- а) $\langle \hat{l}_z \rangle = \langle \hat{l}_x \rangle = 0$;
- б) $\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle = -\langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle = \frac{im}{2}$;
- в) $\langle \hat{l}_z^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle = \langle \Delta l_z^2 \rangle = \frac{1}{2}[i(i+1) - m^2]$.

2.4.7 Для системы с $I = 1$ найти матрицы операторов \hat{P} , \hat{l}_z , \hat{l}_+ , \hat{l}_- и общие собственные векторы операторов \hat{l}^2 и \hat{l}_z .



- 2.4.8. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $j_n = \langle \hat{j} \cdot \mathbf{n} \rangle$ для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$, где \mathbf{n} — единичный вектор с составляющими $n = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$.

- 2.4.9. Исходя из свойств оператора момента \hat{j} и векторного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ при преобразованиях поворота, получить коммутационные соотношения

$$[\hat{j}_i, \hat{A}_k] = i\epsilon_{ijk}\hat{A}_j.$$

- 2.4.10. Доказать тождество

$$\begin{aligned} [\hat{j}^2, \hat{\mathbf{A}}] &= i([\hat{\mathbf{A}} \times \hat{j}] - [\hat{j} \times \hat{\mathbf{A}}]); \\ [\hat{j}^2, [\hat{j}^2, \hat{\mathbf{A}}]] &= 2(\hat{j}^2 \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}} \hat{j}^2) - 4\hat{j}(\hat{j} \hat{\mathbf{A}}), \end{aligned}$$

где \hat{j} — оператор момента, а $\hat{\mathbf{A}}$ — произвольный векторный оператор, т. е. $[\hat{j}_i, \hat{A}_k] = i\epsilon_{ijk}\hat{A}_j$.

- 2.4.11. Найти собственные функции и собственные значения матриц Паули.

- 2.4.12. Вектор поляризации спина \mathbf{P} определяется как вектор с компонентами $P_i = \langle \hat{\sigma}_i \rangle = \langle \chi | \hat{\sigma}_i | \chi \rangle = \chi^\dagger \hat{\sigma}_i \chi$, где χ — спиновая функция данного состояния. В состояниях

$$a) \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b) \chi = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

найти P_i и $|\mathbf{P}|$.

- 2.4.13. Получить соотношение $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_l$.

- 2.4.14. Доказать, что $(\hat{\sigma} \mathbf{A})(\hat{\sigma} \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \mathbf{B}) + i(\hat{\sigma} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}])$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} — обычные (не спиновые) векторные операторы.

- 2.4.15. Вычислить $\hat{\sigma}_z^2$ и антикоммутаторы $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\}, \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z\}, \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\}$.

- 2.4.16. Вычислить $\text{Tr } \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z, \text{Tr } \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$.

- 2.4.17. Вычислить $(\hat{\sigma} \mathbf{a})^k$, где \mathbf{a} — обычный вектор.

- 2.4.18. Найти явный вид оператора $\exp[i\alpha(\hat{\sigma} \mathbf{a})]$.

- 2.4.19. Найти собственные значения и собственные функции спинового оператора $\hat{\sigma}_n = \langle \hat{\sigma} \mathbf{n}_0 \rangle$, где \mathbf{n}_0 — единичный вектор с составляющими $n_0 = \{\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0\}$.

- 2.4.20. Записать оператор, преобразующий спинор (спиновую волновую функцию ψ) при повороте системы координат на угол α вокруг оси с направлением, заданным единичным вектором \mathbf{n} . Найти явный вид оператора преобразования спинора при повороте системы координат, при котором ось z совмещается с направлением $\mathbf{n}_0 = [\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0]$.
- 2.4.21. Используя результат предыдущей задачи, найти волновые функции частицы со спином $1/2$ в случае, когда проекция ее спина на направление $\mathbf{n}_0 = [\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0]$ равна соответственно $\pm 1/2$. Сравнить с результатом задачи 2.4.19.
- 2.4.22. Электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z , разной $1/2$. Какова вероятность различных значений, которые может принимать проекция спина на направление, задаваемое вектором \mathbf{n}_0 ? (См. задачи 2.4.19 и 2.4.21).
- 2.4.23. Используя результат задачи 2.4.20, решить следующую геометрическую задачу: система координат поворачивается на угол φ_1 вокруг оси \mathbf{n}_1 и затем на угол φ_2 вокруг оси \mathbf{n}_2 . Найти угол и направление оси вращения для результирующего поворота.
- 2.4.24. Записать спиновые матрицы $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ для частицы со спином 1 (взяв в качестве базиса состояния с определенной проекцией спина на ось z).
- 2.4.25. Используя представление матриц предыдущей задачи, найти для частицы со спином 1 спиновую функцию состояния, отвечающую проекции спина $+1$ на направление $\mathbf{n}_0 = [\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \dots]$. Найти вероятности различных проекций на ось Oz в этом состоянии. Исследовать специально случай θ_0 , близких к нулю и к π , а также к $\pi/2$. Чем отличаются при $\theta_0 = \pi/2$ состояния со спином вдоль оси x ($\varphi_0 = 0$) и со спином по оси y ($\varphi_0 = \pi/2$)?

2.5. ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

- 2.5.1. Найти волновые функции и спектр энергии для зарженной частицы во внешнем однородном и постоянном магнитном поле, направленном по оси z . (Указание: использовать в качестве векторного потенциала \mathbf{A} вектор с компонентами $A_x = A_z = 0$, $A_y = \mathcal{H}x$.) Определить число состояний, приходящихся на интервал $(p_z + p_z + \Delta p_z)$ и один дискретный уровень, предполагая, что система заключена в ящик объема V (линейные размеры которого значительно больше дармировского радиуса).

- 2.5.2 Найти уровни энергии и волновые функции заряженной бесспиновой частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z , используя цилиндрическую систему координат.
- 2.5.3 Показать, что в однородном магнитном поле, переменном во времени, волновая функция частицы со спином распадается на произведение координатной и спиновой функций.
- 2.5.4 Найти зависимость от времени спиновой функции покоящегося мюона, если в начальный момент

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и включается магнитное поле \mathcal{H} , направленное вдоль оси x . Найти $(\hat{\sigma}_x)$, $(\hat{\sigma}_y)$, $(\hat{\sigma}_z)$ и убедиться, что магнитный момент мюона совершают пререссию вокруг магнитного поля. Получить вид спиновых операторов в представлении Гейзенберга.

- 2.5.5 Найти оператор спина электрона в однородном магнитном поле \mathcal{H} в представлении Гейзенberга. Считать, что других взаимодействий, изменяющих спиновое состояние электрона, нет.
- 2.5.6 Частица со спином $1/2$ находится в однородном магнитном поле $\mathcal{H}(t)$ вида

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_1 \cos \omega t, \mathcal{H}_2 \sin \omega t, \mathcal{H}_0\},$$

где \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_0 , ω — постоянные величины. При $t = 0$ частица находится в состоянии с проекцией спина на ось z , равной $s_z = 1/2$. Найти вероятность перехода частицы к моменту времени T в состояние, в котором проекция спина на ось z будет равной $s_z = -1/2$.

- 2.5.7 Можно ли определить магнитный момент μ свободного электрона на основании измерения напряженности создаваемого им поля? (Использовать соотношение неопределенностей)
- 2.5.8 В сверхпроводнике проделано цилиндрическое отверстие, в котором существует магнитное поле, параллельное оси цилиндра. (В толщу сверхпроводника магнитное поле не проникает). Показать, что поток магнитного поля внутри отверстия должен принимать дискретные значения. Найти квант магнитного потока.

2.6. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

- 2.6.1 Записать уравнение Шредингера для двух частиц с массами m_1 и m_2 , взаимодействующих по закону $U(r_1 - r_2)$ в системе центра масс. Какой вид имеет волновая функция $\Phi(t_1, r_2)^2$

- 2.6.2. Определить интегралы движения для частицы, движущейся в произвольном центральном поле.
- 2.6.3. Найти волновую функцию основного состояния атома водорода в импульсном представлении.
- 2.6.4. Найти среднее значение операторов r^2 , $1/r$, \hat{p}^2 для основного состояния атома водорода. Убедиться в том, что выполняется теорема кирнала.
- 2.6.5. С помощью теоремы Фейнмана-Гельмана (см. задачу 2.1.22) получить $\langle 1/r \rangle$ и $\langle 1/r^2 \rangle$ в произвольном состоянии атома водорода. Используя теорему Эренфеста для радиального движения $d(\hat{p}_r)/dt = \langle \hat{F}_r \rangle$, получить $\langle 1/r^3 \rangle$ для состояний атома водорода с $l > 0$.
- 2.6.6. Записать стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении.
- 2.6.7. Найти уровни энергии трехмерного изотропного осциллятора и кратности их вырождения, разделяя переменные:
 а) в декартовых координатах;
 б) в сферических координатах.
 Определить четность состояний. Обсудить связь задачи с моделью ядерных оболочек и получить первые три магические числа: 2, 8, 20.
- 2.6.8. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в трехмерном потенциальном ящике:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r \geq a. \end{cases}$$

Сравнить порядок следования уровней энергии в этой задаче и в предыдущей, имея в виду, что задача о потенциальном ящике также обсуждалась в связи с моделью ядерных оболочек.

- 2.6.9. Найти уровни энергии состояния частицы в трехмерной потенциальной яме вида

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a, \\ 0, & r \geq a. \end{cases}$$

- 2.6.10. Найти энергию связанного состояния частицы в мелкой двухмерной потенциальной яме. Сравнить с результатом для трехмерной потенциальной ямы.

2.7. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

- 2.7.1. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции:

- для линейного гармонического осциллятора;
- частицы, движущейся в поле

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

- 2.7.2. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы в поле

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$$

- 2.7.3. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения через потенциальный барьер

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & x \leq r_0, \\ \frac{2Ze^2}{x}, & x > r_0. \end{cases}$$

Получить приближенное выражение для коэффициента прохождения, считая, что $r_0 \ll 2Ze^2/E$. Обсудить связь этой задачи с элементарной теорией альфа-распада и получить закон Гейгера-Неттоля.

- 2.7.4. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения через потенциальный барьер

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > x_0, \\ U_0 - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & |x| \leq x_0, \end{cases}$$

при условии $0 < E < U_0$.

- 2.7.5. Исходя из правила квантования Бора-Зоммерфельда, получить выражение для смещения энергетических уровней частицы при изменении потенциальной энергии на малую величину $\delta U(x)$.

2.8. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

- 2.8.1. Найти с помощью теории возмущений поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора, возмущенного полем вида: а) $\hat{V} = \alpha x$; б) $\hat{V} = Ax^3 + Bx^4$

- 2.8.2. Найти поправки к уровням энергии и векторам состояний одномерного гармонического осциллятора, помещенного в однородное поле.
- 2.8.3. Определить расщепление первого возбужденного уровня энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора и найти правильные векторы нулевого приближения при воздействии на него возмущения вида $\hat{V} = \alpha xy$.
- 2.8.4. Предположим, что в случае вырожденного энергетического спектра все матричные элементы оператора возмущения для состояний, относящихся к данному уровню энергии $E_n^{(0)}$, равны нулю. Показать, что при этом поправки к уровню энергии и правильные векторы нулевого приближения можно найти из уравнения (II.41) для эффективного оператора возмущения

$$\hat{V}^{\text{eff}} = \hat{V} \sum_{k\mu} \frac{|\psi_{k\mu}^{(0)}\rangle \langle \psi_{k\mu}^{(0)}|}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} \hat{V},$$

которым можно пользоваться только при действии на состояния, относящиеся к уровню энергии $E_n^{(0)}$.

- 2.8.5. Определить поправки ко второму возбужденному уровню энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора и правильные векторы нулевого приближения при воздействии на него возмущения вида $\hat{V} = \beta xyz$.
- 2.8.6. Уровни энергии невозмущенной системы зависят от параметра λ , и при некотором значении λ_0 два уровня энергии совпадают: $E_1^{(0)}(\lambda_0) = E_2^{(0)}(\lambda_0)$. В начальный момент времени система находится на первом уровне в состоянии $\psi_1^{(0)}$. Найти вероятность того, что система будет находиться в момент времени t в состоянии $\psi_2^{(0)}$, если на нее накладывается малое постоянное возмущение \hat{V} . Считать, что матричные элементы $V_{11} = V_{22} = 0$, но $V_{12} = V_{21}^* \neq 0$.
- 2.8.7. Найти вероятность того, что при β -распаде тритий ион ${}^3\text{He}^+$ окажется: а) в 1s-состоянии; б) в 2s-состоянии; в) в 2p-состоянии, если атом трития находился в 1s-состоянии.
- 2.8.8. Определить вероятность процесса, при котором ядро, связанное гармоническим потенциалом, останется в основном состоянии после испускания γ -кванта (эффект Мессбауэра).



- 2.8.9. Найти вероятность перехода частицы, находящейся в связанном состоянии в поле δ -ямы, в непрерывный спектр под влиянием внешнего поля вида $V(t) = Fx \cos \omega t$ в случае, когда $\hbar\omega > \hbar^2 k_0^2 / (2m)$.

- 2.8.10. Найти вероятность перехода между состояниями дискретного спектра под действием возмущения

$$V(t) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right).$$

- 2.8.11. Для заряженного линейного гармонического осциллятора, находящегося первоначально в основном состоянии, определить вероятности переходов в различные возбужденные состояния под влиянием однородного электрического поля вида

$$E = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ E_0, & t > \tau. \end{cases}$$

Рассмотреть пределы мгновенного и адабатически медленного включения поля.

- 2.8.12. На мюон, покоящийся в сильном однородном магнитном поле $\mathcal{H}_0 \parallel z$, падает слабое циркулярно поляризованное радиочастотное поле $\mathbf{h}(t) \perp \mathcal{H}_0$. Найти зависимость от времени спиновой функции $\chi(t)$ и поляризации мюона $P(t) = \langle \chi(t) | \hat{\sigma} | \chi(t) \rangle$, если в начальный момент $\chi(0) = \chi_{1/2}$.

- 2.8.13. Квантовая система описывается гамильтонианом $\hat{H}(\xi(t))$, зависящим от некоторого параметра $\xi(t)$, медленно (адабатически) меняющегося во времени, так что в каждый момент времени имеет решение задача на собственные значения $\hat{H}(\xi(t))|\psi_n(\xi(t))\rangle = -E_n(\xi(t))|\psi_n(\xi(t))\rangle$. Показать, что для невырожденного уровня энергии $E_n(\xi(t))$ эволюция состояния во времени может быть представлена в виде

$$|\Psi_n(\xi(t))\rangle = e^{i\gamma(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(C) dC} |\psi_n(\xi(t))\rangle.$$

Получить уравнение для определения фазы γ и найти эту фазу (фаза Берри).

- 2.8.14. Рассмотреть задачу о покоящемся положительном мюоне, находящемся в однородном магнитном поле. Напряженность поля \mathcal{H} составляет постоянный угол θ с осью z и медленно вращается вокруг нее. Предполагая, что вектор \mathcal{H} совершает полный оборот вокруг оси z , определить фазу Берри.

2.9. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

2.9.1. Выяснить, какие из указанных ниже операторов коммутируют с гамильтонианом свободной релятивистской частицы со спином $s = 1/2$ (и являются интегралами движения):

a) $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$; d) $\hat{\mathbf{S}}^z$.

b) $\hat{\mathbf{l}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}] = -i[\mathbf{r} \times \nabla]$; e) $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}$.

c) $\hat{\mathbf{l}}^2$; g) $\hat{\mathbf{j}}^2$.

f) $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{\hbar} \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \hat{\Sigma}$; i) $(\hat{\Sigma} \hat{\mathbf{p}})/\rho$.

h) $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$.

2.9.2. Показать, что уравнение Дирака инвариантно относительно калибровочного преобразования. Как при этом преобразуется волновая функция?

2.9.3. Найти решения уравнения Дирака, описывающие свободную частицу, имеющую определенный импульс и энергию. Для конкретизации спинового состояния частицы использовать оператор $(\hat{\Sigma} \hat{\mathbf{p}})/\rho$ (продольной поляризации).

2.9.4. а) Найти оператор скорости \hat{v}_x в теории Дирака в случае свободного движения.

б) Показать, что четная часть этого оператора $[\hat{v}_x]$ допускает простую классическую интерпретацию.

в) Показать, что его нечетная часть $\{\hat{v}_x\}$ осциллирует с частотой $\omega = 2E/\hbar$ (*Zitterbewegung*).

Указанный оператор, описывающий физическую величину \hat{F} , можно записать в виде $\hat{F} = \{\hat{F}\} + \{\hat{F}\}$, где

$$|\hat{F}| = \frac{1}{2}(\hat{F} + \tilde{\Lambda} \hat{F} \tilde{\Lambda}), \quad \{\hat{F}\} = \frac{1}{2}(\hat{F} - \tilde{\Lambda} \hat{F} \tilde{\Lambda}), \quad \tilde{\Lambda} = \frac{\hat{p}}{E}$$

2.9.5. Оценить вероятность рождения пары e^+e^- -пары в однородном постоянном электрическом поле в квазиклассическом приближении (парадокс Клейна).

2.9.6. Показать, что в нерелятивистском пределе уравнение Дирака переходит в уравнение Паули.

2.9.7. Найти релятивистские поправки порядка $(v/c)^2$ к нерелятивистскому гамильтониану атома водорода с помощью разложения гамильтониана Дирака, описывавшего состояние в кулоновском

поле ядра, по степеням v/c . Провести классификацию полученных поправок.

- 2.9.8 Найти энергетический спектр заряженной дираковской частицы в однородном магнитном поле.
- 2.9.9 Найти в нерелятивистском пределе выражение для плотности заряда и тока заряженной дираковской частицы, находящейся во внешнем электромагнитном поле.
- 2.9.10 Показать, что преобразование зарядового сопряжения позволяет интерпретировать решения уравнения Дирака с отрицательными значениями энергии как волновые функции античастиц.
- 2.9.11 Предполагая, что состояния электронного и мюонного нейтрино представляют собой суперпозиции состояний нейтрино $|\nu_1\rangle$ и $|\nu_2\rangle$ с определенными массами m_1 и m_2 :

$$\begin{cases} |\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta, \\ |\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta, \end{cases}$$

найти вероятность перехода нейтрино в состояние $|\nu_\mu\rangle$ к моменту времени t , если при $t=0$ оно было электронным (oscillations нейтрино).

2.10. СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТИЦ

- 2.10.1 Найти собственные значения и собственные функции операторов \hat{S}^2 и \hat{S}_z системы двух электронов ($\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$). Установить связь перестановочной симметрии спиновой функции с суммарным спином S .
- 2.10.2 Найти собственные значения и собственные функции операторов $\hat{\mathbf{L}}^2$ и \hat{l}_z системы двух частиц с орбитальными моментами $\hat{l}_1 = \hat{l}_2 = \hat{l}$ ($\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{l}}_1 + \hat{\mathbf{l}}_2$). Воспользоваться соотношениями ортогональности для коэффициентов Клебша–Гордана. Определить связь между квантовым числом суммарного момента L и перестановочной симметрией координатной волновой функции.
- 2.10.3 Найти собственные значения и собственные функции операторов \hat{j}^2 и \hat{j}_z частицы со спином $1/2$ в случае, когда орбитальное квантовое число равно \hat{l} ($\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}$).

2.10.4 Вычислить средние значения операторов (\hat{I}_3) , (\hat{I}_1) и (\hat{I}_2) в состоянии $|l, s, j, m_l\rangle$.

2.10.5 Показать, что оператор $\tilde{P}_{12} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)$ является оператором обмена спинами, т. е. $\tilde{P}_{12} \hat{\sigma}_1 \tilde{P}_{12}^{-1} = \hat{\sigma}_2$.

2.10.6 Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний двух независимо действующих тождественных частиц в потенциальном ящике

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, x > a, \end{cases}$$

если этими частицами являются:

- а) ферми-частицы со спинами $s = 1/2$,
- б) бозе-частицы со спинами $s = 0$,
- в) бозе-частицы со спинами $s = 1$.

Чему равна в каждом из этих случаев энергия основного состояния N частиц?

2.10.7 Может ли распасться на две альфа-частицы нестабильное ядро ^{10}Be , находящееся в состоянии с $J = 1$?

2.11. ТЕОРИЯ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

2.11.1 Найти смещение уровня энергии основного состояния атома водорода под влиянием конечных размеров ядра. Ядро считать равномерно заряженным по объему шаром радиуса r_0 .

2.11.2 Вычислить электрическую поляризуемость атома водорода, находящегося в основном состоянии. Показать, что для нахождения поляризуемости атома, находящегося в основном состоянии, достаточно знать лишь $E^{(2)}$.

2.11.3 Найти расщепление в однородном электрическом поле уровня энергии атома водорода с $l = 2$ (эффект Штарка). Найти правильные волновые функции кулевого приближения.

2.11.4 Найти величину сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода.

2.11.5 Найти уровни энергии атома водорода в основном ($1s$) состоянии в однородном магнитном поле.

2.11.6 Для свободного атома водорода написать правильные функции возбужденных состояний с $l = 2$ с учетом спин-орбитального взаимодействия (спин ядра считать равным нулю).

- 2.11.7. Найти величину тонкого расщепления состояния атома водорода с главным квантовым числом l и орбитальным квантовым числом l . Выразить величину этого расщепления в атомных единицах энергии. Нарисовать схему расщепленных уровней с $l = 3$.
- 2.11.8. Пользуясь правилами Хунда, определить значения квантовых чисел L , S и J в основных состояниях следующих атомов: а) кремния, б) фосфора, в) серы, г) ванадия, д) хобальта, е) церия. Для случаев а), б) и в) найти все термы. Записать спектроскопические символы полученных состояний.
- 2.11.9. С помощью второго приближения теории возмущений определить зависимость от расстояния R энергии взаимодействия а) атом + ион; б) атом + атом. Оба атома находятся в S -состоянии.
- 2.11.10. Желтый дублет атома натрия соответствует оптическим переходам ${}^3P_{3/2} \rightarrow {}^3S_{1/2}$; ${}^3P_{1/2} \rightarrow {}^3S_{1/2}$. Определить расщепление этого дублета в слабом и сильном магнитном полях. Сравнить полученные картины расщепления линий натрия с расщеплением синглетной линии кадмия, отвечающей переходу ${}^1D - {}^1P$.
- 2.11.11. Вычислить энергию основного состояния атома водорода из вариационного принципа. В качестве пробных функций взять:
 а) $\psi(r) = (\pi a^3)^{-1/2} \exp(-r/a)$.
 б) $\psi(r) = (\pi b^2)^{-3/4} \exp(-r^2/2b^2)$.
 Определить параметры a и b .
- 2.11.12. Найти динамагнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии, исходя из волновой функции вида

$$\psi \sim \exp[-Z'(r_1 + r_2)],$$
 где Z' находится из условия минимума энергии.
- 2.11.13. Показать, что газ атомов, обладающих в основном состоянии полным моментом $J = 0$, но при этом $L = S \neq 0$, парамагнетен (парамагнетизм Ван Флека).
- 2.11.14. Определить зависимость врацательного квантового числа молекулы водорода H_2 от суммарного спина S протонов.
- 2.11.15. Найти энергетический спектр двухатомной молекулы, считая, что энергия взаимодействия ядер описывается модельным потенциалом Кратчера:

$$U(r) = -2D \left(\frac{b}{r} - \frac{b^2}{2r^2} \right)$$

- 2.11.16. Отрицательный мюон захватывается протоном, образуя μ -атом, «боровский радиус» которого в 207 раз меньше соответствующего радиуса атома водорода. На таких расстояниях уже оказываются существенными ядерные силы, и мюон может захватиться протоном. Однако скорость захвата существенно зависит от величины суммарного спина μ -атома $S = s_\mu + s_p$. Таким образом, время жизни отрицательного мюона в среде сильно зависит от величины суммарного спина S . Образовавшийся медленный μ -атом, как и нейтрон, взаимодействует с ядрами среды контактным образом, однако при этом взаимодействии следует учитывать также магнитное сверхтонкое взаимодействие, которое, как и для атома водорода в z -состоянии имеет изотропный контактный характер. Построить контактный оператор сверхтонкого взаимодействия μ -атома с ядром, обладающим спином I , при котором изменяется суммарный спин S μ -атома.

2.12. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

- 2.12.1. Найти в борновском приближении эффективные сечения рассеяния частицы в полях:

$$\text{а) } V = \frac{\alpha}{r} e^{-\alpha r}; \quad \text{б) } V = \frac{\alpha}{r}; \quad \text{в) } V = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Записать критерии применимости борновского приближения для рассматриваемых случаев.

- 2.12.2. С помощью «золотого правила» Ферми получить формулу для дифференциального сечения рассеяния в борновском приближении.
 2.12.3. Определить фазы рассеяния δ_i в борновском приближении.
 2.12.4. Для модельного потенциала отталкивания

$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}, \quad \beta > 0$$

найти фазы рассеяния δ_i . В предельном случае $2\pi\beta/\hbar^2 \ll 1$ найти приближенное выражение для фаз $\delta_i \ll 1$, и, выполнив суммирование ряда разложения амплитуды рассеяния по гармоническим волнам, получить замкнутое выражение для амплитуды $f(\theta)$. Сравнить полученное выражение с борновским приближением.

- 2.12.5. Показать, что при рассеянии медленных частиц на потенциале с малым радиусом действия a наиболее существенную роль играет рассеяние z -волны ($I = 0$).



- 2.12.6. Показать, что при рассеянии медленной частицы массы m , рассеивающий потенциал может быть заменен контактным псевдопотенциалом

$$V_{\text{eff}} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} a \delta(\mathbf{r}),$$

где a — длина рассеяния (см. задачу 2.12.5). Данное выражение часто используется для описания рассеяния медленных нейтронов ядрами.

- 2.12.7. Записать выражение для эффективного псевдопотенциала, описывающего рассеяние медленного нейтрана на молекуле водорода H_2 .
- 2.12.8. Найти сечение рассеяния медленных частиц на сферически-симметричной прямоугольной потенциальной яме. Определить, при каких соотношениях между глубиной V_0 и радиусом ямы a полное сечение намного превышает геометрическое значение πa^2 (резонансное рассеяние) и, наоборот, обращается в ноль (эффект Рамзазера).
- 2.12.9. Найти сечение рассеяния медленных частиц на сферически-симметричном прямоугольном потенциальном барьере.
- 2.12.10. Найти сечение рассеяния частиц из непроницаемой сфере радиуса a . Отдельно рассмотреть предельные случаи:
а) медленных частиц ($ka \ll 1$);
б) быстрых частиц ($ka \gg 1$).
Обсудить характер зависимости от угла θ дифференциальных сечений упругого рассеяния.
- 2.12.11. Найти полное сечение рассеяния быстрых частиц ($ka \gg 1$) на черном шаре радиуса a .
- 2.12.12. Найти дифференциальное сечение рассеяния:
а) α -частиц на α -частицах;
б) протонов на протонах.
- 2.12.13. Вычислить сечение упругого рассеяния быстрых электронов атомом водорода в основном состоянии.

2.13. ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

- 2.13.1. Вычислить матричные элементы $\langle 2p|\hat{x}|1s\rangle$, $\langle 2p|\hat{y}|1s\rangle$ и $\langle 2p|\hat{z}|1s\rangle$ для атома водорода. Какие правила отбора они определяют?
- 2.13.2. То же, что и в задаче 2.13.1, но для матричных элементов $\langle 2p|\hat{p}_x|1s\rangle$, $\langle 2p|\hat{p}_y|1s\rangle$ и $\langle 2p|\hat{p}_z|1s\rangle$.

- 2.13.3. Найти угловое распределение фотонов, излучающихся в переходе $|2p\rangle \rightarrow |1s\rangle$ атома водорода, и время жизни $|2p\rangle$ состояния. Выразить это время в атомных единицах времени.
- 2.13.4. Нейтрон находится в однородном магнитном поле $\mathcal{H}_0 \parallel z$. Определить время жизни состояния с проекцией спина на направление поля $m_s = +1/2$. Получить численное значение времени жизни для $\mathcal{H}_0 = 1 \text{ кГс}$.
- 2.13.5. Найти сечение фотозахвата атома водорода под действием плоской монохроматической волны с частотой ω для случая $\hbar\omega \gg I$, где I — потенциал ионизации атома. Сравнить результаты вычислений при классическом и квантовом описаниях падающей электромагнитной волны.

3

ВВЕДЕНИЕ

1. Основные принципы статистической физики

1.1. Распределение Гиббса. Термодинамические величины и функции. Из квантовой механики известно, что физическая система, характеризуемая гамильтонианом \hat{H} , имеет набор собственных состояний, обозначаемых вектором $|n\rangle$. Вектор $|n\rangle$ является собственной функцией гамильтониана:

$$\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle,$$

где ε_n — соответствующее собственное значение энергии или, другими словами, соответствующий уровень энергии системы.

Статистическое описание физической системы означает ее вероятностное описание с введением некоторой функции распределения $w_n = w(|n\rangle)$, которая задает вероятность найти систему в состоянии $|n\rangle$. Вообще говоря, функций распределения может быть много. Статистическая физика изучает физические системы, которые подчиняются каноническому распределению Гиббса, и такие системы называются термодинамически равновесными. При термодинамическом равновесии вероятность w_n найти систему в состоянии $|n\rangle$ зависит, прежде всего, от энергии этого состояния ε_n и дается распределением Гиббса

$$w_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right)$$

Нормировочный множитель Z называется статистической суммой, определяется из условия $\sum_n w_n = 1$, и равен сумме по всем возможным состояниям системы, извещенным с гиббсовской экспонентой:

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right).$$

Внешний неотрицательный параметр $T \geq 0$ — называется температурой. Условие $T \geq 0$ просто означает, что состояния системы с ростом их энергии становятся менее вероятными. Также видно, что вырожденные состояния с одинаковой энергией, хотя и с разными квантовыми числами, имеют одинаковую вероятность, при нулевой температуре $T = 0$ система может находиться только в состоянии с минимальной энергией.

Если же физическая система состоит из двух независимых и невзаимодействующих друг с другом подсистем, так что полный гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ есть сумма двух гамильтонианов подсистем \hat{H}_1 и \hat{H}_2 , соответственно,

$$|\eta\rangle = |\pi_1\rangle \otimes |\pi_2\rangle,$$

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_{1\eta} + \varepsilon_{2\eta},$$

то распределение Гиббса есть простейшее распределение, удовлетворяющее условию произведения вероятностей для статистически независимых случайных величин: $w(\varepsilon_{1\eta} + \varepsilon_{2\eta}) = w(\varepsilon_{1\eta})w(\varepsilon_{2\eta})$.

Статистическую сумму можно записать и в операторном виде, который не зависит от выбранного нами энергетического представления:

$$Z = \sum_n e^{-\varepsilon_n/T} = \sum_n \langle n | e^{-\varepsilon_n/T} | n \rangle = \sum_n \langle n | e^{-\hat{H}/T} | n \rangle = \text{Tr} e^{-\hat{H}/T}.$$

Соответственно, статистический оператор или матрица плотности дается соотношением

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{1}{Z} e^{-\hat{H}/T}.$$

Числом состояний $\Gamma(\varepsilon)$ называется число состояний с энергией, не превышающей заданную:

$$\Gamma(\varepsilon) = \sum_n \Theta(\varepsilon - \varepsilon_n).$$

Плотность состояний $g(\varepsilon)$ определяется как производная

$$g(\varepsilon) = \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n)$$

Знание плотности состояний бывает удобным, так как статистическая сумма может быть записана в виде однократного интеграла по энергии:

$$Z = \int g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon.$$

Чтобы увидеть связь статистической физики с традиционной термодинамикой, определяем энергию системы как обычное среднее значе-



ные статистической величины, подчиняющейся распределению вероятности w_n :

$$E = \langle e \rangle = \sum_n \varepsilon_n w_n = \text{Tr}(\hat{H}\hat{w}).$$

Нетрудно увидеть следующие соотношения для энергии:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta},$$

и для среднего квадрата флуктуаций энергии или дисперсии:

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle (e - \langle e \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2},$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура.

Свободной энергией F называют следующую величину:

$$F = -T \ln Z,$$

и тем самым распределение Гиббса принимает следующий вид:

$$w_n = \exp\left(\frac{F - \varepsilon_n}{T}\right).$$

Чтобы получить традиционные термодинамические соотношения, установленные в термодинамике между энергией E , свободной энергией F и энтропией S ,

$$F = E - TS,$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

нужно определить энтропию как среднее значение логарифма функции распределения с обратным знаком.

$$S = -\langle \ln w \rangle = -\sum_n w_n \ln w_n \equiv -\text{Tr} \hat{w} \ln \hat{w}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -\frac{F - E}{T} &= \left(\ln \sum_n e^{-\varepsilon_n/T} + \frac{1}{T} \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/T}}{\sum_n e^{-\varepsilon_n/T}} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left(T \ln \sum_n e^{-\varepsilon_n/T} \right) = -\frac{\partial}{\partial T} (-T \ln Z) = -\frac{\partial F}{\partial T} \end{aligned}$$

С другой стороны, используя условие $\sum_n w_n = 1$, получим

$$\begin{aligned} -\frac{F - E}{T} &= -\left(\sum_n w_n \ln \frac{1}{Z} + \sum_n w_n \ln e^{-\varepsilon_n/T} \right) = \\ &= \sum_n w_n \ln \frac{e^{-\varepsilon_n/T}}{Z} = -\sum_n w_n \ln w_n \end{aligned}$$

Сравнивая два равенства, видим, что термодинамическое и статистическое бозе-бозе-бозе-бозе определения энтропии полностью эквивалентны.

Если система обладает N состояниями с одинаковыми энергиями $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_N$ и, следовательно, равными вероятностями заполнения состояний $w_1 = \dots = w_N = 1/N$, то ее энтропия будет $S = \ln N$. С помощью плотности состояний $g(\varepsilon)$ энтропия представима в виде следующего интеграла по энергии:

$$S = \int d\varepsilon g(\varepsilon) w(\varepsilon) \ln \frac{1}{w(\varepsilon)}$$

В зависимости от экспериментальных условий и типов изучаемых процессов удобно вводить разные термодинамические потенциалы и переменные. Свободная энергия $F = F(T, V)$ — термодинамический потенциал, зависящий от температуры T и объема V , и ее дифференциал, равный

$$dF(T, V) = -SdT - PdV,$$

служит для определения энтропии S и давления P .

Энергия $E = E(S, V)$ — термодинамический потенциал, выраженный в переменных: энтропия, объем:

$$E(S, V) = F + TS,$$

$$dE(S, V) = TdS - PdV.$$

Переменное давление P и температура T соответствует термодинамический потенциал $\Phi = \Phi(T, P)$ (потенциал Гиббса).

$$\Phi(T, P) = F + PV = E - TS + PV,$$

$$d\Phi(T, P) = -SdT + VdP.$$

И наконец, энталпия (тепловая функция) $W = W(S, P)$:

$$W(S, P) = \Phi + TS = E + PV,$$

$$dW(S, P) = TdS + VdP.$$

Пары (T, S) и (V, P) называются сопряженными переменными. Переход от одной сопряженной переменной к другой сопряженной переменной осуществляется с помощью преобразования Лежандра, основанном на дополнении дифференциала до полного дифференциала, например, для $T \rightarrow S$:

$$dF = -SdT = (-SdT - TdS) + TdS, \quad \text{или} \quad d(F + TS) = TdS.$$

1.2. Идеальный бозе-и-фотоновский газ. Идеальным газом называется газ, в котором пренебрегается взаимодействием между частицами. В отсутствие взаимодействия между частицами задача о нахождении статистической суммы существенно упрощается и в силу идентичности частиц сводится в целом к задаче об определении статистической суммы одной частицы. Действительно, если гамильтониан системы $H = H_1 + \dots + H_N$ есть сумма N одинаковых независимых гамильтонианов, то энергия состояния, характеризуемого набором $\{n_1, \dots, n_N\}$ квантовых чисел каждого отдельного гамильтониана H_i , равна сумме энергий отдельных частиц:

$$\varepsilon_{n_1, \dots, n_N} = \varepsilon_{n_1} + \dots + \varepsilon_{n_N}$$

Отсюда полная статистическая сумма разбивается на произведение N одиночных статистических сумм, взятых по состояниям каждой отдельной частицы, т. е.

$$\sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} e^{-(\varepsilon_{n_1} + \dots + \varepsilon_{n_N})/T} = \sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} e^{-\varepsilon_{n_1}/T} \times \dots \times e^{-\varepsilon_{n_N}/T} = \\ = \prod_{i=1}^N \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_{n_i}/T} = \left(\sum_n e^{-\varepsilon_n/T} \right)^N.$$

Таким образом, полная статистическая сумма Z сводится к произведению всех одиночных статистических сумм z_0 :

$$Z = z_0^N; \quad z_0 = \sum_n e^{-\varepsilon_n/T} = \int g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon,$$

которую также можно выразить через $g(\varepsilon) = \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n)$ — одномерную плотность состояний.

При использовании в вычислении статистической суммы квазичастичных формул для энергии системы необходимо учесть следующие обстоятельства. Во-первых, состояния системы N частиц классифицируются набором импульсов и координат

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; \dots; \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N),$$

представляющих точку в фазовом пространстве, а энергия системы является одновременно функцией координат и импульса $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; \dots; \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N)$. Здесь подразумевается, что вектора $\mathbf{p}_i = \{p_{i\alpha}\}$ и $\mathbf{q}_i = \{q_{i\alpha}\}$ включают в себя и пространственные компоненты $\alpha = 1, 2, \dots, d$, где d — размерность геометрического пространства, в котором находятся частицы газа. Поэтому сумма по состояниям, т. е. сумма по всем возможным \mathbf{p} и \mathbf{q} , превращается в интеграл по всей области доступных

импульсов \mathbf{p} и координат \mathbf{q} . Число возможных состояний $d\tau$ в элементе фазового пространства $d\mathbf{p} d\mathbf{q}$ равно

$$d\tau = \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha=\pm 1}^2 \frac{dp_\alpha dq_\alpha}{2\pi\hbar} = \prod_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Во-вторых, следует обратить внимание на тождественность одинаковых частиц. Если поменять местами две одинаковые частицы i и j , то состояние системы будет характеризоваться другой точкой в фазовом пространстве, которая получается заменой координаты и импульса i -й частицы координатой и импульсом j -й частицы или $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) \rightarrow (\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j)$. При такой перестановке не изменяется не только энергия, но и состояние системы, т. е. обе такие точки фазового пространства, хотя и разные, на самом деле представляют для одинаковых частиц одно и то же состояния системы. Другими словами, полное число различных состояний меньше, чем $\int d\tau$ в число раз, равное числу всевозможных перестановок одинаковых частиц. Если система состоит из N одинаковых частиц, то полное число всевозможных таких перестановок будет $N!$, а число состояний будет равно

$$\frac{1}{N!} \int d\tau.$$

Таким образом, при использовании классических выражений для энергии идеального газа из N одинаковых частиц полная статистическая сумма дается соотношением

$$Z_{\text{кл}} = \frac{z_0^N}{N!},$$

где одиночечная статистическая сумма z_0 равна

$$z_0 = \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2} e^{-e(\mathbf{p}, \mathbf{q})/T} = \int g(e) e^{-e/T} de.$$

Соответственно, одиночечная плотность состояний $g(e)$ будет равна

$$g(e) = \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2} \delta(e - e(\mathbf{p}, \mathbf{q})).$$

Достаточное приближение, которое используется для $N!$ в макроскопическом пределе $N \rightarrow \infty$, дается формулой Стирлинга: $N! \approx (N/e)^N$. Тогда

$$Z_{\text{кл}} = \left(\frac{ez_0}{N} \right)^N.$$

В вычислении за можно продвинуться дальше, если из полной энергии частицы или молекулы газа выделить кинетическую энергию, связанную с поступательным движением центра массы частицы, и внутреннюю энергию, связанную с внутренними степенями свободы, которые в зависимости от типа частиц или молекул могут представлять вращательные, колебательные, электронные типы движений и возбуждений:

$$\varepsilon_n(p) = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon_n^{(int)}.$$

В простейшем приближении для описания внутренних типов движения предполагается их независимость друг от друга, что позволяет представить внутреннюю энергию как сумму вращательной, колебательной энергий и учесть по отдельности вклады электронных и ядерных степеней свободы. В целом, имеем

$$z_0 = z_0^{(ext)} z_0^{(int)} = z_0^{(ext)} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2mT} = V \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} z_0^{(ext)},$$

где V — объем, занимаемый газом, и статистическая сумма по внутренним состояниям

$$z_0^{(int)} = \sum_i e^{-\varepsilon_i^{(int)}/T} = e^{-RT}/f$$

есть некоторая функция, зависящая только от температуры. Отсюда свободная энергия идеального газа дается соотношением

$$F(T, V) = -NT \ln \frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + Nf(T).$$

Движение идеального газа не зависит от внутренних степеней свободы частиц и равно

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NT}{V},$$

а термодинамический потенциал $\Phi = F + PV$ пропорционален числу частиц и равен

$$\Phi(P, T) = NT \ln \frac{P}{T} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} + Nf(T) = N\mu(P, T).$$

Здесь $\mu(P, T)$ — химический потенциал частицы или термодинамический потенциал, приходящийся на одну частицу. Энтропия $S = -\partial F / \partial T$ и энергия $E = F + TS$ даются соотношениями

$$S = N \ln \frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{3}{2}N - Nf'(T); \quad E = \frac{3}{2}NT - NTf'(T).$$

Из формул, приведенных выше, можно вывести распределение Больцмана для среднего числа частиц $\langle N \rangle$, которые имеют энергию ε . Вероятность того, что частица находится в состоянии с энергией ε , пропорциональна $\exp(-\varepsilon/T)$, а поэтому и среднее число частиц в этом состоянии пропорционально той же экспоненте, т.е. $f(\varepsilon) \propto \exp(-\varepsilon/T)$. С учетом того, что $f(\varepsilon)$ нормируется на полное число частиц:

$$\int d\varepsilon f(\varepsilon) = N,$$

имеем:

$$f(\varepsilon) = \frac{N}{z_0} e^{-\varepsilon/T},$$

С другой стороны, $ez_0/N = e^{-F/NT}$ или

$$\frac{z_0}{N} = e^{-(F+PV)/NT} = e^{-(F+\mu V)/NT} = e^{-\Phi/NT} = e^{-\mu/T},$$

где μ — химический потенциал, введенный выше. Окончательно для распределения Больцмана будет

$$f(\varepsilon) = e^{\mu - \varepsilon/T}.$$

Энтропия газа, выраженная через больцмансовскую функцию распределения числа частиц, дается выражением

$$S = \int d\varepsilon f \ln \frac{e}{f}.$$

2. Квантовые идеальные газы

2.1. Термодинамический потенциал Ω . Распределение Гиббса для систем с переменным числом частиц.

При рассмотрении термодинамической системы с макроскопически большим числом частиц $N \rightarrow \infty$, взаимодействующих между собой, часто удобно полагать, что число частиц N в системе не фиксировано и, соответственно, рассматривать термодинамические потенциалы в зависимости от химического потенциала μ — переменной, сопряженной к числу частиц. Переход к термодинамическим потенциалам, зависящим от химического потенциала как от независимой переменной, выполняется с помощью преобразования Лежандра. Для дифференциала свободной энергии имеем

$$dF(T, V, N) = -SdT - PdV + \mu dN.$$

Используя соотношение $\mu dN = d(\mu N) - N d\mu$, найдем

$$d(F - \mu N) = -SdT - PdV - Nd\mu.$$

Далее, введем термодинамический потенциал $\Omega = \Omega(T, V, \mu) = F - \mu N$, и тогда число частиц определяется производной:

$$N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T, V}.$$

Если учесть соотношение для потенциала Гиббса $\Phi = N\mu$, то потенциал Ω можно записать в следующем формально простом виде: $\Omega = -PV$.

Аналогичное преобразование можно выполнить и для другого термодинамического потенциала — энергии. Обозначая $\tilde{E} = E - \mu N$ и с учетом $E = E(S, V, \mu)$, имеем для дифференциала:

$$d\tilde{E} = T dS - P dV - N d\mu.$$

При обобщении распределения Гиббса на систему с переменным числом частиц мы должны учесть, что состояние системы уже характеризуется кроме набора квантовых состояний $|n\rangle$ с соответствующими им энергиями E_n еще и дополнительным параметром N_n — числом частиц в этом состоянии. Таким образом, состояние системы характеризуется вектором $|N\rangle = |n, N_n\rangle$, и в роли внешнего параметра выступает химический потенциал μ , а не полное число частиц. В этой ситуации вместо свободной энергии F и энергии E , когда фиксируется число частиц в системе, мы должны использовать в распределении Гиббса термодинамические величины \tilde{F} и \tilde{E} , т. е. вероятность найти систему в состоянии $|N\rangle$ дается выражением

$$\omega_N = \exp\left(\frac{\tilde{F} - \tilde{E}_N}{T}\right).$$

Окончательная формула распределения Гиббса с переменным числом частиц записывается следующим образом:

$$\omega_{nN_n} = \exp\left(\frac{\Omega + \mu N_n - E_{nN_n}}{T}\right).$$

Обычно это выражение для вероятности называют также большим каноническим распределением.

Условие нормировки $\sum_N \omega_N = 1$ дает выражение для определения термодинамического потенциала $\Omega(\mu)$:

$$\Omega(\mu) = -T \ln \sum_{nN_n} e^{\mu N_n - E_{nN_n}/T}.$$

Отсюда легко проверяется соответствие между термодинамическим и статистическим определениями среднего числа частиц в системе:

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = T \frac{\sum_n N_n e^{\mu N_n - E_{nN_n}/T}}{\sum_n e^{\mu N_n - E_{nN_n}/T}} \frac{1}{T} = \sum_{nN_n} N_n \omega_{nN_n}.$$

2.2. Идеальный ферми-газ. Переходим к рассмотрению свойств ферми-систем. В этом случае возможные числа заполнения квантового состояния $|n\rangle$ равны либо $N_n = 0$, либо $N_n = 1$, а возможные энергии состояний N_{μ, ε_n} — либо 0, либо ε_n . Распределением Ферми называют среднее число частиц в квантовом состоянии $|n\rangle$ с энергией ε_n .

$$f(\varepsilon_n) = \sum_{N_n=0}^1 N_n w_{\mu, N_n} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}}{1 + e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}} = \frac{1}{e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} + 1}.$$

Полное число частиц в системе N можно найти суммированием по всем возможным состояниям системы $|n\rangle$:

$$N = \sum_n f(\varepsilon_n) = \sum_n \frac{1}{e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} + 1}.$$

Это равенство определяет связь между химическим потенциалом μ и числом частиц N в ферми-системе.

Потенциал Ω найдем из соотношения

$$\begin{aligned} e^{-\Omega/T} &= \sum_{\mu, N_n} e^{i\mu N_n - i\varepsilon_n N_n / T} = \sum_{N_n=0}^1 \sum_n (e^{i(\mu - \varepsilon_n)/T})^{N_n} = \\ &= \prod_n \sum_{N_n=0}^1 (e^{i(\mu - \varepsilon_n)/T})^{N_n} = \prod_n (1 + e^{i(\mu - \varepsilon_n)/T}). \end{aligned}$$

Отсюда полный потенциал Ω равен следующей сумме по состояниям системы $|n\rangle$:

$$\Omega = -T \sum_n \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}).$$

Рассмотрим низкотемпературные свойства ферми-газа. Высокотемпературные свойства могут быть приближенно описаны распределением Больцмана и совпадают со свойствами классического газа. Ниже мы имеем виду ферми-газ частиц или газ электронов со спином $1/2$ и энергетическим спектром частиц $\varepsilon_p = p^2/(2m)$.

При нулевой температуре распределение Ферми принимает вид ступеньки $f(\varepsilon_p) = \theta(\mu - \varepsilon_p)$. Физически это означает, что ферми-частицы последовательно по энергии занимают все состояния до химического потенциала, тем самым реализуя минимальное значение полной энергии — основное состояние ферми-газа. Границную энергию, представляющую химический потенциал μ при $T = 0$, называют энергией Ферми $\varepsilon_F = \mu(T = 0)$, а соответствующий ей пограничный импульс p_F — импульсом Ферми. Соответственно, в импульсном пространстве частицы



полностью заполняют все состояния внутри сферы радиусом $r = p_F$, которая называется ферми-сферой или ферми-поверхностью. Импульс Ферми зависит только от плотности ферми-газа $n = N/V$:

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3},$$

и вычисляется из равенства

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3.$$

Соответственно, энергия Ферми равна:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}.$$

Полная энергия газа дается выражением

$$E(T=0) = 2 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon_F f(\varepsilon_F) = \frac{3}{5} \varepsilon_F N,$$

а соответствующее давление или уравнение состояния при $T=0$ выражением

$$P(T=0) = \frac{13\pi^2 \hbar^{2/3}}{5} \frac{n^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \sim V^{-5/3}.$$

Отсюда можно найти скорость звука с в идеальном ферми-газе при нулевой температуре согласно

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \frac{v_F}{\sqrt{3}}$$

Здесь $\rho = mN/V$ — плотность газа, а скорость Ферми определена как скорость частиц на поверхности Ферми $v_F = p_F/m$.

Ферми-газ при $T \ll \varepsilon_F$ называют вырожденным, а при $T \gg \varepsilon_F$ — невырожденным. В температуре $T_F \sim \varepsilon_F$ говорят как о температуре вырождения.

Термодинамические функции ферми-газа удобно вычислять, используя понятие одиночественной плотности состояний $g(\varepsilon)$. Тогда, например, энергия и число частиц ферми-газа даются выражениями

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1},$$

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1}.$$

Важной характеристикой ферми-газа, как газа частиц, имеющих спин и несущих магнитный момент, являются его парамагнитные свойства и, в частности, спиновая парамагнитная восприимчивость. В невырожденном ферми-газе, когда $T \gg \varepsilon_F$, парамагнитная восприимчивость, согласно свойствам классического парамагнитного газа, подчиняется закону Кюри $\chi_F \sim 1/T$. В вырожденном ферми-газе закон Кюри нарушается и парамагнитная восприимчивость газа остается конечной при нулевой температуре.

2.3. Идеальный бозе-газ. Для бозевской статистики заполнение квантового состояния $|n\rangle$ частицами ничем не ограничено. Число частиц в одном и том же состоянии может быть равно любому целому неотрицательному числу $N_n = 0, 1, 2, \dots$, а возможные энергии для разных заполнений равны $N_n \varepsilon_n = 0, \varepsilon_n, 2\varepsilon_n, 3\varepsilon_n, \dots$. Распределением Бозе называют среднее число частиц в квантовом состоянии $|n\rangle$ с энергией ε_n :

$$f(\varepsilon_n) = \sum_{N_n=0}^{\infty} N_n w_{\pi N_n} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} + 2 \cdot e^{2(\mu - \varepsilon_n)/T} + \dots}{1 + e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} + e^{2(\mu - \varepsilon_n)/T} + \dots} = \frac{1}{e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} - 1}.$$

Полное число частиц в системе N можно найти суммированием по всем возможным состояниям системы $|n\rangle$:

$$N = \sum_n f(\varepsilon_n) = \sum_n \frac{1}{e^{(\mu - \varepsilon_n)/T} - 1}.$$

Это равенство определяет связь между химическим потенциалом и числом частиц в бозе-системе. Для сходимости и положительной определенности функции распределения необходимо, чтобы химический потенциал в бозе-системе не превышал бы минимально возможного значения энергий для состояний системы $\mu \leq \varepsilon_{min}$.

Потенциал Ω найдем из соотношения

$$\begin{aligned} e^{-\Omega/T} &= \sum_{n, N_n} e^{(\mu N_n - \varepsilon_n N_n)/T} = \sum_{N_n=0}^{\infty} \sum_n (e^{(\mu - \varepsilon_n)/T})^{N_n} = \\ &= \prod_n \sum_{N_n=0}^{\infty} (e^{(\mu - \varepsilon_n)/T})^{N_n} = \prod_n (1 - e^{(\mu - \varepsilon_n)/T})^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда полный потенциал Ω равен следующей сумме по состояниям системы $|n\rangle$:

$$\Omega = T \sum_n \ln(1 - e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}).$$

Равенство $N = -\partial \Omega / \partial \mu$ выполняется.



Для реализации при $T = 0$ основного состояния газа со спектром частиц $\varepsilon_p = p^2/(2m)$ все бозе-частицы следует поместить в одно и то же состояние с минимальной возможной энергией, т. е. в состояние с $p = 0$. В одном квантовом состоянии будет находиться макроскопически большое число частиц. Волновая функция основного состояния будет произведением одиноческих волновых функций всех частиц. Явление макроскопически большого заселения квантового состояния получило название конденсации Бозе-Эйнштейна. О накоплении частиц в одном и том же квантовом состоянии говорят, как о конденсации частиц в это состояние. Частицы, находящиеся в макроскопически заселенном состоянии, называют конденсатными частицами или конденсатом. Частицы, которые находятся вне конденсата и заполняют возбужденные состояния, называют надконденсатными частицами или надконденсатом. С повышением температуры число частиц в возбужденных $p > 0$ состояниях растет, а число конденсатных частиц уменьшается. Температуру перехода T_c , при которой исчезает макроскопически большая заселенность квантового состояния или плотность конденсата обращается в нуль, называют температурой бозе-эйнштейновской конденсации. Переход в бозе-газе из конденсированного состояния в неконденсированное состояние и, наоборот, представляет собой пример фазового перехода конденсированной среды из одного термодинамического состояния в другое.

Максимальное возможное число частиц, которое может находиться во всех возбужденных состояниях, достигается при максимально возможном значении химического потенциала. В идеальном газе бозонов — это $\mu = 0$, и для газа объемом V имеем

$$\begin{aligned} \max[N_{\text{ex}}(T)] &= \int_{p>0} \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{E_p/T} - 1} = V \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_{x=1/0}^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{x/T} - 1} = \\ &= V \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = V \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2). \end{aligned}$$

Значение дзета-функции Римана равно $\zeta(3/2) \approx 2,612$.

При достаточно низких температурах, по крайней мере, не меньше, чем $N - \max[N_{\text{ex}}(T)]$ частиц с необходимостью должно находиться в основном состоянии с $p = 0$, т. е. в конденсате. Температура бозе-конденсации T_c определяется из условия $N = \max[N_{\text{ex}}(T)]$ и зависит от плотности бозе-газа $\kappa = N/V$:

$$T_c = \frac{2\pi}{\zeta^{2/3}(3/2)} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} = 3,31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m}.$$

Само существование перехода бозе-Эйнштейновской конденсации, а также вид особенности в поведении теплоемкости в точке перехода зависит от размерности пространства и вида ограничивающего внешнего потенциала ловушки, в которую заключен бозе-газ.

2.4. Идеальный газ элементарных бозе-воздушений. Бозевскую статистику можно применять к изучению теплового равновесия электромагнитного излучения и к элементарным бозевским возбуждениям в конденсированных средах. Излучение или электромагнитные волны можно описывать как набор квантов электромагнитного поля — фотонов, энергия которых определяется импульсом и поляризацией фотона.

Возбуждениям упругой конденсированной среды, представляющим колебания атомов около положений равновесия, соответствуют звуковые волны, которые описывают как набор квантов поля упругой деформации — фононов, энергия которых также определяется импульсом и типом или ветвью волны. Звуковые волны просто выглядят в жидкости, где имеется одна продольная акустическая ветвь. В кристаллической среде ветвей звуковых волн больше: всегда имеется одна продольная и две поперечные акустические ветви. В средах со сложными кристаллическими решетками, содержащих $\nu > 1$ атомов в элементарной ячейке, существует еще $3(\nu - 1)$ ветвей, которые называют оптическими. В акустических ветвях частота звуковой волны обращается в нуль при нулевом волновом векторе, а в оптических ветвях частота при нулевом волновом векторе остается конечной.

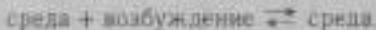
Примером конденсированных сред, в которых существуют элементарные возбуждения бозевского типа, являются магнитоупорядоченные среды. Волны, сопровождающиеся переворотом спина и распространяющиеся по магнитной системе, получили название сонниковых волн, а соответствующие им кванты названы магнонами.

Механизм, обеспечивающий тепловое равновесие возбуждений, заключается в рождении и поглощении элементарных возбуждений конденсированной средой. Это обстоятельство ведет к следующей особенности элементарных возбуждений. Полное число элементарных возбуждений N не фиксировано, а целиком определяется условием теплового равновесия, т. е. температурой, $N = N(T)$. Отсюда, полное число элементарных возбуждений не может служить независимой переменной, которую можно задавать по своему усмотрению, а должно определяться из условий термодинамического равновесия — минимальности термодинамических потенциалов: свободной энергии F или потенциала Гиббса Φ . Поскольку производная потенциалов по числу частиц есть химический потенциал:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{P, T}$$



то условие минимальности совпадает с условием $\mu = 0$. Равенство нулю химического потенциала есть общее свойство для элементарных возбуждений, когда их полное число не сохраняется. На что условие можно посмотреть и с точки зрения условий химического равновесия для реакции рождения и поглощения элементарного возбуждения:



Отсюда для термодинамического равновесия $\mu_{\text{ср}} + \mu_{\text{воз}} = \mu_{\text{ср}}$, поэтому $\mu_{\text{воз}} = 0$.

В первом приближении, если пренебречь взаимодействием между элементарными возбуждениями, возбуждения можно рассмотреть как идеальный газ частиц с $\mu = 0$. Энергия такой частицы $e_i = \hbar\omega_i(\mathbf{k})$, где $\omega_i(\mathbf{k})$ — частота i -й ветви или типа возбуждений, \mathbf{k} — волновой вектор и $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ — импульс возбуждения. Распределение возбуждений или их среднее число в различных квантовых состояниях с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω_i дается формулой

$$f(\omega_i(\mathbf{k})) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_i(\mathbf{k})/T} - 1}.$$

Это распределение называется распределением Планка.

Применим распределение Планка для описания так называемого черного излучения, т. е. термодинамически равновесного электромагнитного излучения или газа фотонов. Учитывая две возможные поляризации фотона и дисперсию $\omega(\mathbf{k}) = ck$, где c скорость света, для плотности фотонного газа найдем

$$n(T) = \frac{N(T)}{V} = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega(\mathbf{k})/T} - 1} = \frac{T^3}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^3} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3.$$

Свободную энергию F можно вычислить с помощью Π -потенциала. Так как $\mu = 0$,

$$F = \Omega = 2TV \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\hbar\omega(\mathbf{k})/T}) = \frac{TV}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln(1 - e^{-\hbar\omega(\mathbf{k})/T}) dk.$$

Введя переменную $x = \hbar\omega(\mathbf{k})/T$ и интегрируя по частям, получим

$$F = -V \frac{T^4}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = -\frac{\pi^2 V T^4}{45 (\hbar c)^3}.$$

Нетрудно получить выражение для энтропии:

$$S = -T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4\pi^2}{45} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 V$$

и теплоемкости

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{4\pi^2}{15} \left(\frac{T}{\hbar c} \right)^3 V.$$

Энергия равновесного газа фотонов будет равна

$$E(T) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/T} - 1} = \frac{\pi^2}{15} \frac{V T^3}{(\hbar c)^3} \sim TN(T).$$

Представления о газе фононов используются и для описания тепловых свойств твердых тел, обусловленных тепловыми колебаниями атомов около некоторых положений равновесия — узлов решетки атомов. Если имеется 3N типов нормальных колебаний кристаллической решетки с дисперсией $\omega = \omega_i(\mathbf{k})$, то фоновая часть свободной энергии твердого тела дается выражением

$$F_{ph} = VT \sum_{i=1}^{3N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\hbar \omega_i(\mathbf{k})/T}) = VT \int d\omega g(\omega) \ln(1 - e^{-\hbar \omega/T}).$$

Здесь $g(\omega)$ — спектральная плотность фоновых колебаний, т. е. плотность фоновых состояний, отнесенная к единице объема тела:

$$g(\omega) = \sum_{i=1}^{3N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \omega_i(\mathbf{k})).$$

Общее число различных звуковых волн в твердом теле или полное число состояний фононов определяется числом колебательных степеней свободы твердого тела, которое за вычетом трех степеней свободы поступательного и трех степеней вращательного движений тела как целого равно $3N - 6$. В пренебрежении числом 6 по сравнению с числом атомов $N \gg 1$ это дает условие

$$V \int g(\omega) d\omega = 3N.$$

Спектр фононов ограничен по частоте. Из-за дискретности решетки атомов длина волны звука не может быть меньше минимального расстояния a между атомами. В низкочастотном пределе $\omega \rightarrow 0$ звуковые возбуждения представляют собой длинноволновые акустические фононы с частотами $\omega \sim k$, и спектральная плотность $g(\omega \rightarrow 0) \sim \omega^2$.

Подыскивая соотношением $E = F - T(\partial F / \partial T)$, найдем фоновый вклад в энергию твердого тела:

$$E_{ph} = V \int d\omega g(\omega) \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/T} - 1}.$$

а затем и в теплоемкость согласно, $C = (\partial E / \partial T)_V$:

$$C_{ph} = V \int d\omega g(\omega) \frac{(\hbar\omega/2T)^2}{\sin^2 \hbar\omega/2T}.$$

В пределе высоких температур $T \gg \hbar\omega_{max}$, пользуясь для малых значений $x \ll 1$ приближением $e^x - 1 = x$ и $x/\sin x = 1$, обнаруживаем классическое поведение энергии и теплоемкости:

$$E_{ph} = V \int d\omega g(\omega) T = 3NT, \quad C_{ph} = V \int d\omega g(\omega) = 3N.$$

Для интерполяции между областями низких и высоких температур часто используется модель Дебая, в которой низкочастотная спектральная плотность $g(\omega) = \omega^{-2}$ распространяется на область всех частот вплоть до максимальной частоты ω_D , которая называется дебаевской частотой. Ей соответствует температура Дебая $\Theta_D = \hbar\omega_D$, порядок величины которой $\hbar\omega/a$. Коэффициент α и дебаевская частота ω_D должны быть согласованы между собой условием нормировки. Отсюда найдем выражение для интерполяционной спектральной плотности в модели Дебая:

$$g(\omega) = \frac{9N\omega^2}{V\omega_D^3} \theta(\omega_D - \omega).$$

В результате для энергии и теплоемкости в модели Дебая получим:

$$E_{ph} = \frac{9N}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} = 9N \frac{T^4}{\Theta_D^3} \int_0^{\Theta_D/T} dx \frac{x^2}{e^x - 1},$$

$$C_{ph} = \frac{9N}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \frac{(\hbar\omega/2T)^2}{\sin^2 \hbar\omega/2T} = \frac{9N}{4} \frac{T^4}{\Theta_D^3} \int_0^{\Theta_D/T} dx \frac{x^4}{\sin^2 x/2}.$$

При низких температурах $T \ll \Theta_D$ верхний предел интегрирования можно заменить на бесконечность. Поэтому

$$E_{ph} = \frac{3\pi^4}{5} N \frac{T^4}{\Theta_D^3} \quad \text{и} \quad C_{ph} = \frac{12\pi^4}{5} N \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3.$$

При высоких температурах $T \gg \Theta_D$ воспроизводится классический результат.

Оптические ветви часто бывают малодисперсионными $\omega_{opt}(k) \approx \text{const} = \omega_0$. В рамках приближения Эйнштейна, полностью пренебрегающим зависимостью от волнового вектора, оптическая ветвь в спектральной плотности $g(\omega)$ аппроксимируется б-образным пиком вблизи

ω_0 , т. е. $g(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_0)$. При комбинировании дебаевских и эйнштейновских членов температура Дебая будет понижена, так чтобы суммирование по всем фокальным состояниям давало бы тоже число колебательных степеней свободы.

3. Неидеальные квантовые системы (жидкости). Основы теории конденсированных сред

В отличие от идеальных газов, где энергия газа складывается из энергий отдельных частиц, в системе взаимодействующих частиц определение уровней энергии в общем случае представляет собой сложную и часто невыполнимую задачу. Поэтому, хотя и основные идеи и методы описания конденсированных сред могут быть одинаковыми и теми же, тем не менее конкретная реализация этих идей и методов различна в различных случаях и типах конденсированных сред.

3.1. Нормальная (несверхтекучая) ферми-жидкость. Систему взаимодействующих ферми-частиц принято называть ферми-жидкостью. В ферми-жидкости спектр элементарных возбуждений или квазичастиц, обладающих импульсом p и энергией $\epsilon(p)$, имеет структуру, которая полностью подобна спектру частиц идеального ферми-газа. При нулевой температуре, отвечающей основному состоянию ферми-жидкости, все квазичастицы в импульсном пространстве полностью заполняют область $|p| < p_F$, которая ограничена импульсом Ферми p_F . Величина импульса Ферми не зависит от взаимодействия и определяется только плотностью частиц ферми-жидкости n . Величина импульса Ферми совпадает с его значением для идеального ферми-газа той же плотности n .

Число квазичастиц равно числу частиц жидкости. Следует отличать импульсное распределение $N(p)$ истинных частиц жидкости от импульсного распределения квазичастиц $n(p) = \theta(p_F - p)$. Функция $N(p)$ при $p = 0$ несколько меньше единицы и убывает при увеличении p от нуля к $p = p_F$. При $p = p_F$ функция $N(p)$ испытывает скачок конечной величины, после чего в области $p > p_F$ продолжает убывать до нуля с увеличением импульса p . Величина скачка при $p = p_F$ зависит от взаимодействия частиц в жидкости.

Энергия основного состояния жидкости при $T = 0$ не сводится к сумме энергий квазичастиц $\epsilon(p)$. Имеется только общее утверждение, что энергия жидкости E представляет собой некоторый функционал плотности, зависящий только от функции распределения $n(r, p)$:

$$E = E[n(r, p)] = \int E[n(r, p)](2\pi)^3 \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} d^3 r.$$

Для спина $s = 1/2$ множитель $2s + 1 = 2$. Когда нужно учитывать спиновые эффекты и магнитное поле, предполагается, что функция распределения $n_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_{\sigma 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ зависит от спина и представляет собой матрицу 2×2 .

Равновесное состояние при $T \neq 0$ и, вообще, любое возбужденное состояние ферми-жидкости может быть получено путем последовательного перемещения одной или нескольких квазичастиц из области внутри ферми-сферы наружу. О каждом таком перемещении говорят, что рождается квазичастица вне ферми-сферы и дырка внутри ферми-сферы. Таким образом, под дыркой подразумевается незаполненное состояние. Энергию отдельной квазичастицы $\varepsilon[n(\mathbf{r}, \mathbf{p})]$ определяют как вариационную производную полной энергии по функции распределения согласно:

$$\delta E = E[n + \delta n] - E[n] = \int \delta E[n(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} d^3 r = \\ = \int \varepsilon[n(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} d^3 r.$$

Соответственно, при возникновении одной квазичастицы в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ с импульсом $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ и изменении функции распределения на $2\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, энергия ферми-жидкости увеличивается на ε . В однородной ферми-жидкости при $T = 0$ равновесная функция распределения квазичастиц просто равна ступенчатой $n_0(\mathbf{p}) = \theta(p_F - p)$, а энергия квазичастицы ε зависит только от ее импульса $\varepsilon(n_0(\mathbf{p})) = \varepsilon_0(\mathbf{p})$. Вблизи ферми-поверхности функцию $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ можно разложить по степеням разности $p - p_F$, и тогда

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0(p) - c_F(p_F) \approx c_F(p - p_F), \quad |p - p_F| \ll p_F.$$

Коэффициент c_F называется скоростью Ферми и часто его выражают через другой коэффициент, называемый эффективной массой m^* согласно

$$c_F = \frac{p_F}{m^*}.$$

Величина m^* зависит от взаимодействия частиц в ферми-жидкости и отличается от массы истинных частиц жидкостей.

Энергия квазичастиц меняется при изменении функции распределения. Разложим полную энергию ферми-жидкости по малым отклонениям функции распределения от равновесной $\delta n = n - n_0$:

$$E = E[n_0(\mathbf{p})] + \int \varepsilon_0(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) V d\tau_p + \frac{1}{2} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') V d\tau_p d\tau_{p'} + \dots$$

где $V = \int d^3r$ — объем жидкости, и $d\tau_p = 2d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Отсюда энергия квазичастична равна

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') d\tau_{\mathbf{p}'} + \dots = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \hbar c |n(\mathbf{p})|,$$

где функция Ландау $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ — симметрична и определена второй производной

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \delta^2 \mathcal{E} / \delta n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') \Big|_{n=n^*=\eta_0(\mathbf{p})}$$

Функция Ландау $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ обусловлена взаимодействием между квазичастичами и определяет физические характеристики жидкости, в частности, эффективную массу m^* .

3.2. Сверхпроводимость. Теория БКШ. Согласно теории БКШ (Бардина—Купера—Шриффера) в сверхпроводнике с синглетным δ -спариванием электроны с противоположными спинами связаны в куперовские пары. Количественной мерой связи является сверхпроводящий параметр порядка $\Delta_{\mathbf{p}}$, зависящий от температуры и определяющий спектр одиночных возбуждений, энергия которых равна

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta_{\mathbf{p}}|^2},$$

где $\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/(2m) - \varepsilon_F$ — энергия электрона с импульсом \mathbf{p} , отсчитанная от поверхности Ферми. Поскольку энергия элементарных возбуждений (квазичастич) не может быть меньше $|\Delta_{\mathbf{p}}|$, то возбужденное состояние сверхпроводника отделено от основного энергетической щелью. Элементарные возбуждения обладают спином 1/2 и являются парами.

Величина параметра порядка определяется из самосогласованного уравнения для величины сверхпроводящего параметра порядка:

$$\Delta_{\mathbf{p}} = - \sum_{\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \frac{1 - 2f(\varepsilon_{\mathbf{p}'})}{2\varepsilon_{\mathbf{p}'}} \Delta_{\mathbf{p}'},$$

где $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ — потенциал взаимодействия между электронами с импульсами \mathbf{p} и \mathbf{p}' , и $f(\varepsilon_{\mathbf{p}})$ — равновесная фермиевская функция распределения квазичастич, равна

$$f(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\mathbf{p}}/\hbar\omega_F} + 1}.$$

В простейшем приближении $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ изотропно и постоянно в узком энергетическом слое близко к поверхности Ферми $\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$:

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \begin{cases} g, & |\xi_{\mathbf{p}'}| \quad \text{и} \quad |\xi_{\mathbf{p}'}| \leq \hbar\omega_D, \\ 0, & |\xi_{\mathbf{p}'}|, \quad \text{или} \quad |\xi_{\mathbf{p}'}| > \hbar\omega_D. \end{cases}$$

В случае притяжения $g < 0$ уравнение имеет нетривиальное решение со щелью при $T = 0$, равной

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_0 \exp(-1/\lambda), \quad \lambda = |g|N(0),$$

где $N(0) = mp_F/(2\pi^2\hbar^3)$ — плотность состояний с фиксированной проекцией спина на поверхности Ферми, λ — безразмерная константа связи.

Критическая температура T_c определяется как температура, при которой впервые появляется нетривиальное $\Delta \neq 0$ решение уравнения для щели:

$$T_c = \frac{2\gamma}{e} \hbar\omega_0 \exp(-1/\lambda).$$

Здесь $2\gamma/\pi \approx 1.14$, где $\ln \gamma = C \approx 0.577$ — постоянная Эйлера. Величины Δ_0 и T_c в модели БКШ связаны универсальным соотношением

$$\frac{2\Delta_0}{T_c} = \frac{2\pi}{\gamma} \approx 3.52.$$

Предельное температурное поведение щели вблизи нуля температуры и T_c даются формулами

$$\Delta(T) = \begin{cases} \Delta_0(1 - \sqrt{2\pi T/\Delta_0} e^{-\Delta_0/T}), & T \rightarrow 0, \\ T_c \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, & T \rightarrow T_c. \end{cases}$$

Приведем предельные формулы электронного вклада в теплоемкость сверхпроводника. В пределе низких температур $T \rightarrow 0$ электронная теплоемкость в сверхпроводящем состоянии экспоненциально вымрывает по отношению к теплоемкости в нормальном состоянии:

$$\frac{C_e(T)}{C_n(T)} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\Delta_0}{T}\right)^{1/2} e^{-\Delta_0/T}.$$

В окрестности сверхпроводящего перехода при $T < T_c$ теплоемкость $C_e(T)$ превышает теплоемкость $C_n(T)$ и нарастает прямо пропорционально близости $|T - T_c|$ к точке перехода. В самой точке перехода T_c теплоемкость испытывает скачок по отношению к значению в нормальном состоянии $C_n(T_c)$. В модели БКШ относительная величина скачка теплоемкости в точке сверхпроводящего перехода является универсальной величиной

$$\frac{C_e(T_c) - C_n(T_c)}{C_n(T_c)} = \frac{12}{7\zeta(3)} \approx 1.43.$$

Знание разности плотностей термодинамических потенциалов для нормального $F_n(T)$ и сверхпроводящего $F_e(T)$ состояний дает возмож-

нность определить величину термодинамического критического магнитного поля H_c согласно

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = F_s(T) - F_i(T).$$

Приведем формулы для температурного поведения термодинамического критического магнитного поля в двух предельных случаях:

$$H_c(T) = H_c(0) \begin{cases} \sqrt{8\gamma^2/7\zeta(3)}(1 - T/T_c), & T \rightarrow T_c, \\ 1 - \gamma^2 T^2/3T_c^2, & T \rightarrow 0. \end{cases}$$

Здесь $H_c(0) = \sqrt{4\pi N(0)} \Delta_0$ — термодинамическое критическое магнитное поле при нулевой температуре.

3.3. Слабонеидеальный бозе-газ. Уравнение Гросса–Питаевского. Конденсированный слабонеидеальный газ частиц с нулевым спином — газ, в котором характеристика энергии межчастичного взаимодействия мала по сравнению с температурой бозе-Уянштейновской конденсации. В основе теории лежит утверждение о том, что почти все частицы газа находятся в конденсированном состоянии: $N_{p=0} = N - N_{p \neq 0} \ll N$. В этих условиях основную роль в столкновениях между частицами играют парные столкновения частиц с малыми импульсами. В силу малых скоростей рассеиваемых частиц учитывают лишь вклад от δ -рассеяния. Матричный элемент двухчастичного взаимодействия g_{pp} заменяется на его значение при нулевых импульсах: $g_{p,p} = g = \text{const}$. В координатном представлении это соответствует контактному взаимодействию между частицами $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Эффективный гамильтониан для N бозонов:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} g \sum_{i \neq j}^N \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где \mathbf{p}_i — импульс i -й частицы и $V(\mathbf{r})$ — внешний потенциал. Константа взаимодействия g связана с длиной a рассеяния a соотношением $g = -4\pi\hbar^2 a/m$, где m — масса частицы. Взаимодействие между частицами предполагается отталкивающим, т. е. $g > 0$. При притяжении между частицами $a < 0$ однородное состояние бозе-газа термодинамически неустойчиво.

В первом приближении волновая функция системы бозонов $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ есть симметризованное произведение одночастичных волновых функций. В конденсированном состоянии все бозоны находятся в одном и том же состоянии с одночастичной функцией $\psi(\mathbf{r})$ и, следовательно,

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i).$$

Одночастичную функцию $\psi(\mathbf{r}_i)$ нормируют на полное число частиц:

$$\int d^3r_i |\psi(\mathbf{r}_i)|^2 = N.$$

Плотность частиц $n(\mathbf{r})$ дается выражением $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$, а энергия системы

$$E[\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r})] = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right)$$

представляет собой функционал от одночастичной комплексной функции $\psi(\mathbf{r})$, называемой волновой функцией конденсата.

Оптимальное значение энергии достигается минимизацией функционала энергии $E[\psi, \psi^*]$ при условии сохранения полного числа частиц

$$N = \int d^3r |\psi(\mathbf{r})|^2 = \text{const}.$$

С введением множителя Лагранжа μ в качестве химического потенциала газа необходимо минимизировать выражение $E - \mu N$. Уравнение, которому подчиняется волновая функция конденсата

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}),$$

называется уравнением Гросса–Питтаевского и имеет вид нелинейного уравнения Шредингера.

В отсутствие внешнего поля $V(\mathbf{r}) = 0$ для однородного состояния конденсированного бозе-газа уравнение Гросса–Питтаевского дает значение химического потенциала

$$\mu = g |\psi(\mathbf{r})|^2 = gn,$$

что согласуется с соотношением $\mu = \partial E / \partial N$, где

$$E = \frac{N(N-1)}{2} \frac{g}{V} \approx g \frac{N^2}{2V}$$

и V — объем газа. Давление конденсированного газа равно

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{gn^2}{2} = \frac{gp^2}{2m},$$

где $p = m\bar{v}$ — массовая плотность газа. Скорость звука, определяемая как $\bar{v} = (\partial P / \partial p)^{1/2}$, при $T = 0$ равна

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{2p}}{m} = \sqrt{\frac{gn}{m}}$$

Корреляционная длина ξ характеризует пространственный масштаб, на котором меняется волновая функция конденсата:

$$\xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{m\mu}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{m\rho}}$$

Приближение, в котором можно пренебречь кинетическим членом в уравнении Тросса–Питаевского, называется приближением Томаса–Ферми. В нем распределение плотности имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{\varepsilon},$$

а пространственные границы конденсата определяются из условия $V(\mathbf{r}) = \mu$.

Условие малости характерной энергии взаимодействия gn по сравнению с температурой бозе-энштейновской конденсации $T_c \sim \hbar^2 n^{2/3}/m$ интерпретируют в терминах разреженности или малой плотности газа, вводя газовый параметр $n^{1/3}a$. Разреженность $n^{1/3}a \ll 1$ означает, что длина рассеяния частиц друг на друга a много меньше среднего расстояния между частицами $n^{-1/3}$. Корреляционная длина ξ охватывает большое число частиц газа: $\xi \gg n^{-1/3}$.

Нестационарное обобщение уравнения Тросса–Питаевского для описания эволюции волновой функции конденсата $\psi(\mathbf{r}, t)$ во времени имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}) \psi + g|\psi|^2 \psi.$$

Энергия элементарного возбуждения с импульсом p в слабоненадальной конденсированном газе дается богоюловским соотношением:

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + gn\right)^2 - (gn)^2} = \begin{cases} p\sqrt{\frac{gn}{m}}, & p \ll \frac{\hbar}{\xi} \sim \sqrt{gnm}, \\ \frac{p^2}{2m}, & p \gg \frac{\hbar}{\xi} \sim \sqrt{gnm}. \end{cases}$$

Равновесное распределение возбуждений по импульсам имеет вид обычного бозеевского соотношения:

$$f(p) = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/T} - 1}.$$

Следствие неидеальности бозе-газа — это появление надконденсатных частиц при абсолютном нуле температуры. Плотность конденсата $n_0(0)$ при $T = 0$ меньше полной плотности газа n , при этом отношение $n_0(0)/n$ зависит от величины газового параметра:

$$\frac{n_0(0)}{n} = 1 - \frac{(mg)^{1/2} n^{1/2}}{3\pi^2 \hbar^3} = 1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{na^3}{\pi}} = 1 - \frac{1}{24\pi^2 n \xi^3} < 1.$$



Об этом свойстве говорят как о явлении обеднения конденсата. Последнее равенство означает, что из конденсата объемом порядка куба корреляционной длины ξ^3 взаимодействие вытесняет примерно одну частицу в надконденсатное состояние.

Повышение температуры ведет к тепловому обеднению конденсата

$$n_0(T) - n_0(0) = -\frac{mT^2}{12\pi\hbar} \sim -T^2, \quad T \ll \mu = gn,$$

где a — скорость звука в газе.

3.4. Теория сверхтекучести. В жидком ${}^4\text{He}$ при температуре 2,17 К, которая называется λ -точкой, происходит фазовый переход второго рода из нормального состояния He I в сверхтекучее состояние He II . Сверхтекучее состояние характеризуется способностью жидкого ${}^4\text{He}$ протекать через капилляры без трения, не обнаруживая вязкости.

При абсолютном нуле температур жидкость находится в энергетически наименшем или в основном состоянии. При отличной от нуля температуре жидкость переходит в возбужденное состояние. При достаточно низких температурах это будет слабовоизбужденное состояние, которое можно описать как совокупность элементарных возбуждений или квазичастич, обладающих определенным импульсом p и соответствующей энергией $\epsilon(p)$.

В жидком ${}^4\text{He}$ закон дисперсии элементарных возбуждений $\epsilon(p)$ имеет немонотонную зависимость. После начального линейного возрастания при достаточно малых импульсах энергия $\epsilon(p)$ достигает максимума и далее убывает, проходя через минимум $\Delta = \epsilon(p_0)$ при определенном значении импульса p_0 , после которого энергия возбуждений опять растет с увеличением импульса. Начальный линейный участок $\epsilon(p) = cp$ называется фононным, а элементарные возбуждения представляют фононы или звуковые колебания, распространяющиеся со скоростью $c = 240$ м/с. Элементарные возбуждения с энергией вблизи минимума и законом дисперсии, который аппроксимируется параболической функцией

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m},$$

называются ротонами. Ротонная щель Δ , импульс p_0 и эффективная масса ротонов m зависят от давления и при нулевом давлении равны

$$\frac{\Delta}{k_B} = 8,7 \text{ К}, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 1,9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1} \quad \text{и} \quad m = 0,16 M_{\text{He}} \quad \left(\frac{p_0}{2\pi} \gg \Delta \right).$$

Термодинамически равновесное распределение элементарных возбуждений в He II имеет вид распределения Бозе с равным нулю химическим потенциалом:

$$\pi(p) = \frac{1}{e^{(E_p/T)} - 1}.$$

С хорошей точностью термодинамические величины сверхтекучего гелия представляют собой сумму фонового и ротонного вкладов.

В рамках двухжидкостной модели сверхтекучести при малых докритических скоростях $v < v_c$, течение жидкого гелия II представляется в виде суммы двух независимых друг от друга течений: нормального течения с нормальной скоростью v_n и сверхтекучего течения со сверхтекучей скоростью v_s . Каждому из течений соответствует своя компонента, нормальная или сверхтекучая, и каждая со своей эффективной плотностью: ρ_n и ρ_s , в сумме составляющие полную плотность жидкости ρ . Импульс единицы объема или поток массы жидкости слагается из потоков нормальной и сверхтекучей компонент:

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s.$$

При $T \neq 0$ из всей жидкости только ее часть, которой отвечает плотность, равная $\rho_s = \rho - \rho_n$, может обладать сверхтекучими свойствами и протекает без трения сквозь самые узкие капилляры. Отношение ρ_s/ρ , равное нулю при $T = 0$, с повышением температуры увеличивается и достигает в λ -точке значения, равного единице.

Кроме отсутствия вязкости, течение сверхтекучей компоненты обладает еще двумя важными свойствами: оно всегда потенциально, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0,$$

и не сопровождается переносом тепла или энтропии. Энтропия, которая в He II определяется статистическим распределением элементарных возбуждений, переносится только течением нормальной компоненты с нормальной скоростью \mathbf{v}_n .

4. Фазовые переходы и критические явления

4.1. Фазовое равновесие и фазовые переходы. Разные состояния вещества, которые могут быть одновременно в термодинамическом равновесии друг с другом, представляют собой различные фазы одного и того же вещества. Условия термодинамического равновесия двух фаз друг с другом — следующие.

Равенство температур фаз 1 и 2 отвечает их тепловому равновесию:

$$T_1 = T_2.$$

Равенство давлений выражает условие механического равновесия межфазной границы:

$$P_1 = P_2.$$

Равенство химических потенциалов обеих фаз означает равновесие по отношению к переносу частиц из одной фазы в другую:

$$\mu_1(P_1, T_1) = \mu_2(P_2, T_2).$$

Уравнение

$$\mu_1(P(T), T) = \mu_2(P(T), T)$$

иначе определяет кривую фазового равновесия или бинодаль $P = P(T)$. Дифференцирование по температуре дает формулу Клапейрона—Клаузинуса:

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)}.$$

Величина $L = T(s_2 - s_1)$ называется скрытой теплотой фазового перехода, а $s_{1,2}$ и $v_{1,2}$ — удельные энтропии и удельные объемы, т. е. приходящиеся на одну частицу.

Если уравнение $\mu_1 = \mu_2$ имеет решения не при всех температурах, то кривая равновесия фаз $P = P(T)$ имеет точку окончания, которая называется критической точкой. За критической точкой не существует двух различных фаз. Критическая точка — это особая точка хотя бы одной из функций μ_1 или μ_2 . Температура и давление в критической точке называются критической температурой T_c и критическим давлением $P_c = P(T_c)$.

Точка, в которой в термодинамическом равновесии могут одновременно находиться три фазы, называется тройной точкой. Равновесие более, чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

Если в точке фазового перехода производная первого порядка $(\partial\mu/\partial T)_P = -s$ или $(\partial\mu/\partial P)_T = v$ при фазовом переходе испытывает скачок, т. е. $s_1 \neq s_2$ или $v_1 \neq v_2$, то о переходе говорят как о фазовом переходе первого рода. Когда первые производные совпадают, то переход обычно относят к фазовым переходам второго рода.

Вне кривой фазового равновесия (бинодали) $P = P(T)$ выбор той или иной фазы вещества определяется энергетическими соображениями. Полнотью устойчивой (стабильной) фазой является фаза с наименьшим значением μ . Фаза с большим μ становится неустойчивой (不稳定ной). Для характеристики неустойчивости фазы и рода фазового перехода важную роль играет область возможного существования фазы за кривой фазового равновесия $P = P(T)$ и положение границы ее термодинамической устойчивости (спинодали) $P = P_s(T)$, которая определяется нарушением одного из термодинамических неравенств $(\partial P / \partial v)_T < 0$.

$C_P = T(\partial s / \partial T)_F > 0$. В области обратных значений этих неравенств фаза становится абсолютно неустойчивой.

Есть две возможности. Первая — когда граница спинодали отстоит от бинодали — характерна для фазовых переходов I рода. Тогда в области между бинодалью и спинодалью фаза с большим μ может существовать в метастабильном состоянии. Метастабильная фаза представляет собой неполное термодинамическое равновесие и, обладая конечным временем жизни, в конце концов переходит в стабильную фазу. Хотя и метастабильная фаза в целом неустойчива, тем не менее она устойчива по отношению к достаточно малым гетерогенным флуктуациям. С наличием области метастабильности связаны явления перегрева или переохлаждения фаз, когда фаза с большим μ может существовать в гомогенном (однородном) состоянии достаточно длительное время. Предельно возможные границы перегрева или переохлаждения ограничены спинодалью.

Вторая возможность реализуется, когда граница спинодали совпадает с бинодалью, и нет области существования фазы по другую сторону фазового перехода. Это характерно для фазовых переходов II рода. Явления перегрева или переохлаждения при фазовом переходе II рода отсутствуют.

Если кривая фазового перехода первого рода $P = P(T)$ заканчивается критической точкой, то в этой же точке заканчивается также и спинодаль.

4.2. Приближение самосогласованного поля. В настоящее время фазовый переход второго рода рассматривается как спонтанное нарушение симметрии. Количественная характеристика степени нарушения симметрии называется параметром порядка φ , который может быть много компонентной величиной. Параметр порядка всегда равен нулю по одну сторону фазового перехода и плавно возрастает при удалении от точки перехода по другую сторону перехода. Смысл и число компонент параметра порядка φ определяется физикой конкретного фазового перехода. Например, при ферромагнитном переходе параметр порядка — намагниченность или магнитный момент единицы объема, для антиферромагнитного упорядочения — это вектор антиферромагнетизма, представляющий собой разность намагниченностей двух магнитных подрешеток; для критической точки перехода пар-жидкость — это отклонение плотности жидкости от ее критического значения. При переходе в сверхпроводящее или сверхтекучее состояние параметр порядка уже комплексная волновая функция. Для сверхтекущей ферми-жидкости типа "He с p -спариванием" параметр порядка становится еще сложнее и представляет собой комплексную 3×3 матрицу.

Для более детального описания фазового перехода второго рода вводится понятие локального значения параметра порядка $\varphi(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , определяемое как среднее по объему, содержащему большое число частиц, но малому по сравнению с полным объемом всей системы V . В этом случае говорят о $\varphi(\mathbf{x})$, как о поле параметра порядка, и поле $\varphi(\mathbf{x})$ представляет собой микроскопическую или классическую переменную. Характерный пространственный масштаб, на котором параметр порядка $\varphi(\mathbf{x})$ меняется существенно, должен быть велик по сравнению с расстоянием между частицами или постоянной решетки. Параметр порядка $\varphi(\mathbf{x})$ может изменяться или флукутировать от одной точки к другой точке.

Одной из основных характеристик параметра порядка, наряду с его средним значением $\langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle$, является корреляционная функция или коррелатор

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}') \rangle.$$

Символ $\langle A \rangle$ означает термодинамическое среднее величины A . При $T > T_c$ в неупорядоченной фазе $\langle \varphi \rangle = 0$, а коррелатор экспоненциально затухает при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sim \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\xi).$$

Корреляционная длина $\xi = \xi(T)$ неограниченно возрастает при приближении к точке перехода. В упорядоченной фазе ниже температуры перехода коррелатор не спадает за больших расстояниях и стремится к квадрату среднего значения параметра порядка $\langle \varphi \rangle^2$.

Если задать $\varphi(\mathbf{x})$ в каждой точке системы, то можно представить свободную энергию F (при заданном объеме) или термодинамический потенциал Φ (при заданном давлении) как функционал от $\varphi(\mathbf{x})$. Обычно в общей теории фазовых переходов не конкретизируют вид внешних условий и тип термодинамического потенциала и, также, для всех термодинамических потенциалов используют одно и тоже обобщенное название — эффективный гамильтониан.

Эффективный гамильтониан может разложен в бесконечный интегро-дифференциальный ряд по степеням параметра порядка $\varphi(\mathbf{x})$ и его производным. Учет в разложении наименьших степеней $\varphi(\mathbf{x})$ и $\nabla \varphi(\mathbf{x})$ называется разложением Ландау и приводят к гамильтониану Ландау:

$$\mathcal{H}_L = \int \left[\frac{c}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{4} \varphi^4 - h(\mathbf{x}) \varphi \right] d\mathbf{x}.$$

Чтобы упорядочение $\varphi \neq 0$ возникало ниже T_c и отсутствовало (т. е. $\varphi = 0$) выше T_c , достаточно предположить, что a меняет знак, обращаясь в нуль в точке перехода:

$$a = \alpha \tau, \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \alpha > 0.$$

Величина τ называется близостью к точке перехода или безразмерной температурой. Коэффициенты c и b , соответственно, жесткость и константа взаимодействия, меняются не столь сильно и считаются постоянными. О члене с φ^4 говорят как о взаимодействии флюктуаций. Параметр $h(x)$ представляет собой обобщенное внешнее поле. Наличие кубического члена с φ^3 в гамильтониане приводит к фазовому переходу первого рода, когда в точке перехода нарушается непрерывность и возникает скачок параметра порядка при переходе из одной фазы в другую.

Вероятность $W[\varphi(x)]$ заданной конфигурации поля упорядочения $\varphi(x)$ равна

$$W[\varphi(x)] = Z^{-1} \exp(-\mathcal{H}_L[\varphi(x)]/T), \quad Z = \sum_{\varphi(x)} \exp(-\mathcal{H}_L[\varphi(x)]/T).$$

где Z — статистическая сумма. Наибольшей вероятностью обладает конфигурация, для которой $\mathcal{H}_L[\varphi(x)]$ минимальна. Необходимое условие следующее:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_L[\varphi(x)]}{\delta \varphi(x)} = 0.$$

В приближении самосогласованного (среднего) поля флюктуации параметра порядка φ считаются пренебрежимо малыми, а равновесные свойства системы определяются условием экстремальности $\mathcal{H}_L[\varphi(x)]$ по $\varphi(x)$. Приближение самосогласованного поля дает следующие характеристики фазового перехода второго рода.

Для среднего равновесного значения параметра порядка $\langle \varphi \rangle = \varphi_0$ имеем

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau > 0, \\ (\alpha|\tau|/b)^{1/2} \sim |\tau|^{1/2} & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Теплоемкость в точке перехода испытывает конечный скачок:

$$\Delta C = C(\tau = +0) - C(\tau = -0) = -\frac{\omega^2}{25T_c}$$

Обобщенная восприимчивость, определяемая как $\chi = \partial(\varphi)/\partial h$, ведет себя в слабом внешнем поле $h \ll h_c$ по закону Кюри:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{\alpha|\tau|} \sim |\tau|^{-1} & \text{при } \tau > 0, \\ \frac{1}{2\alpha|\tau|} \sim |\tau|^{-1} & \text{при } \tau < 0, \end{cases} \quad h \ll h_c = \frac{(\alpha|\tau|)^{3/2}}{b^{1/2}}.$$

а в сильном магнитном поле $h \gg h_c$ согласно соотношению

$$\chi = \frac{1}{3g^{1/2}K^{2/3}} \sim h^{-2/3}, \quad h \gg h_c = \frac{6|\alpha\tau|^{1/2}}{g^{1/3}}$$

По мере приближения к T_c корреляционный радиус ξ , т. е. размер об области, в которой значения φ скоррелированы, неограниченно возрастает, предшествуя появлению дальнего порядка в точке перехода:

$$\xi = (c/\alpha\tau)^{-1/2} \sim \tau^{-1/2}, \quad \tau > 0.$$

В самой точке перехода $T = T_c$ отсутствует характерный и естественный масштаб длины в силу $\xi = \infty$, и коррелатор $K(x, x')$ ведет себя степенным образом:

$$K(x, x') \sim |x - x'|^{-(d-2)},$$

где d — размерность пространства.

Теория самосогласованного (среднего) поля справедлива, пока флуктуации параметра порядка в объеме $V_c \sim \xi^d$ с линейным размером $\sim \xi$ малы по сравнению с равновесным значением φ_0 . В противном случае необходимо учитывать флуктуации параметра порядка. Для обычного пространства $d = 3$ из условия

$$\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle = \langle (\varphi - \varphi_0)^2 \rangle = \frac{T_c \chi}{V_c} \sim \frac{T_c}{\xi^2 \alpha |\tau|} \ll \varphi_0^2 \sim \frac{\alpha |\tau|}{\delta}$$

получаем критерий применимости разложения Ландау или теории самосогласованного поля:

$$G_i \ll |\tau| \ll 1, \quad G_i = \frac{\delta^2 T_c^2}{\alpha c} \sim \left(\frac{T_c}{\epsilon_0 a^3} \right)^2 \left(\frac{a}{\delta_0} \right)^6.$$

Первое неравенство выражает близость к точке перехода, необходимую для возможности разложения Ландау. Второе неравенство обеспечивает малость флуктуаций. Непосредственно окрестность точки перехода $|\tau| \leq G_i$, в которой развиваются сильные флуктуации параметра порядка, называется флуктуационной или критической областью фазового перехода. При $G_i \gtrsim 1$ области применимости теории самосогласованного поля (разложение Ландау) нет.

Безразмерный параметр G_i , независящий от температуры, называется числом Гинзбурга—Левинсона. Поясним его смысл из вида последней формулы. Здесь $\xi_0 = (c/\alpha)^{1/2}$ совпадает по порядку величины с корреляционным радиусом (длиной когерентности) вдали от точки перехода, грубо говоря, при $T = 0$, когда $|\tau| \sim 1$. Величина $\epsilon_0 = \alpha^2/\delta$ по порядку

величины представляет собой плотность энергии конденсации упорядоченной фазы также вдали от точки перехода. С учетом того, что параметр a играет роль межчастичного расстояния или периода решетки, $\epsilon_0 a^3$ есть характерная энергия конденсации или выигрыш в энергии при полном упорядочении низкотемпературной фазы на одну частицу. Основное условие для малости числа G_1 — это $\xi_0 \gg a$. К веществам с $G_1 \ll 1$, прежде всего, относятся сверхпроводники и сверхтекущий ^3He , в которых $G_1 \sim (a/\xi_0)^4$ или $\sim (T_c/\epsilon_F)^4$. К веществам с относительно небольшими числами $G_1 \sim 0,1$ относятся некоторые ферромагнетики и сегнетоэлектрики с температурами Кюри порядка сотен кельвинов. Примером, где совсем нет области применимости разложения Ландау в силу $G_1 \sim 1$ и флуктуационная область занимает всю область фазового перехода, служит сверхтекущий ^4He . Здесь длина когерентности ξ_0 составляет несколько межатомных расстояний, а энергия конденсации порядка нескольких кельвинов сравнима с температурой перехода около 2 К.

4.3. Функционал Гинзбурга—Ландау. Использование микроскопической теории БКШ для описания поведения сверхпроводника в магнитном поле представляет собой математически сложную задачу. Вблизи точки сверхпроводящего перехода из уравнений микроскопической теории может быть получено упрощенное описание поведения сверхпроводника в магнитном поле, получившее название теории функционала Гинзбурга—Ландау.

Функционал Гинзбурга—Ландау есть разность свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний вблизи критической температуры T_c :

$$\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_n = \Delta F[\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \int d^3r \Delta F(\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})),$$

где плотность разности свободных энергий ΔF равна

$$\Delta F = \frac{1}{2} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi}$$

Первые три слагаемые обусловлены проживанием сверхпроводящего состояния. Последнее слагаемое — энергия магнитного поля величиной $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$. Функционал Гинзбурга—Ландау представляет собой первые члены разложения свободной энергии в ряд по малости и медленности пространственного изменения сверхпроводящего параметра порядка. Коэффициент $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ обращается в ноль при $T = T_c$ и положителен при $T > T_c$ в силу $\alpha_0 > 0$. Два остальных коэффициента — β и γ — положительны и не зависят от температуры.

Функционал Гинзбурга–Ландau обладает свойством калибровочной инвариантности. При калибровочном преобразовании вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})$$

волновая функция приобретает дополнительную фазу

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{2e}{\hbar} \chi(\mathbf{r})\right).$$

так что значение свободной энергии не меняется.

В теории функционала Гинзбурга–Ландau сверхпроводящий параметр порядка, который является комплексной величиной, также принято называть волновой функцией конденсата куперовских пар. Нормировка или единицы измерения волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ в рамках теории Гинзбурга–Ландau содержит элемент производа и могут быть выбраны из соображений удобства. Величину коэффициента пропорциональности в соотношении $\psi(\mathbf{r}) \sim \Delta(\mathbf{r})$ можно изменить переопределением или выбором единиц измерения для коэффициентов α, β, γ в разложении свободной энергии.

Кроме естественного для теории БКШ выбора $\psi(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})$, где $\Delta(\mathbf{r})$ – сверхпроводящий параметр порядка (сверхпроводящая шель), часто используется представление в котором

$$\gamma = 1/2m,$$

где m – масса электрона. Такой выбор γ позволяет использовать аналогию с квантовомеханическим движением частицы массой $2m$ и электрическим зарядом $2e$. В этом случае

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)\pi}{8}} \frac{\Delta(\mathbf{r})}{\pi T},$$

где n – плотность электронов.

Уравнения, которые отвечают требованию минимальности функционала Гинзбурга–Ландau, называются уравнениями Гинзбурга–Ландau и находятся на приравнивание к нулю вариационных производных. Из условия $\delta(\Delta F)/\delta\psi^*(\mathbf{r}) = 0$ находим

$$\frac{\gamma}{2} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha\phi(\mathbf{r}) + \beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Варьирование по $\psi(\mathbf{r})$ дает комплексно сопряженное уравнение.

Варьирование по вектор-потенциалу и условие $\delta(\Delta\mathcal{F})/\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ приводят к уравнению Максвелла

$$\text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s(\mathbf{r}),$$

где выражение

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \gamma \left[-ieh(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{c} |\psi|^2 \mathbf{A} \right]$$

представляет собой плотность сверхпроводящего тока.

Для границы сверхпроводник-изолятатор или сверхпроводник-вакуум используется естественное граничное условие, которое зануляет поверхностный интеграл, возникающий при варьировании функционала по ψ^* или ψ :

$$\mathbf{n} \cdot \left[\left(-ieh \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right]_S = 0.$$

Здесь \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности сверхпроводника S . Это граничное условие означает отсутствие сверхпроводящего тока через границу сверхпроводника:

$$(\mathbf{j}_s)_S = (\mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n})|_S = 0.$$

Граничное условие для магнитного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — это непрерывность поля на границе. Уравнения Гинзбурга-Ландау вместе с уравнением Максвелла и граничными условиями представляет собой замкнутую систему уравнений, описывающую поведение сверхпроводника в магнитном поле вблизи критической температуры.

В однородном состоянии $\nabla \psi = 0$, и в отсутствии магнитного поля возможны два состояния: нормальное с $\psi = 0$ при всех температурах и сверхпроводящее с $\psi = \psi_0 = (-\alpha/\beta)^{1/2}$ только при $T < T_c$. Плотность энергии сверхпроводящего состояния меньше энергии нормального состояния при всех $T < T_c$ на величину

$$\Delta F = F_1 - F_0 = -\frac{\omega^2(T)}{2\beta} = -\frac{H_c^2(T)}{8\pi},$$

где $H_c(T) \sim (T_c - T)$ — термодинамическое критическое поле.

Если волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ — действительная величина ($\psi = \psi^*$), то плотность сверхпроводящего тока прямо пропорциональна вектор-потенциалу и описывается соотношением Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = -\gamma \frac{4e^2}{c} |\psi|^2 \mathbf{A} = -\frac{\pi_e e^2}{mc} \mathbf{A} = -\frac{c}{4\pi \beta^2} \mathbf{A}.$$

Здесь величина $n_s = 4\pi\gamma|\psi|^2$ — называется плотностью сверхпроводящих электронов, а

$$\delta^{-2} = 4\pi \gamma \frac{4e^2}{c^2} |\psi|^2 = \frac{4\pi e^2}{mc^2} n_s$$

представляет собой квадрат обратной глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник δ . Это видно из уравнения Лондонов, к которому сводится уравнение Максвелла в кулоновской калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{A}/\delta^2.$$

Уравнение описывает эффект Мейсснера — выталкивание магнитного поля из объема сверхпроводника. Сверхпроводящие незатухающие точки, которые экранируют внешнее магнитное поле, текут в приповерхностном слое сверхпроводника толщиной порядка δ . Магнитная индукция, определяемая как среднее поле по объему сверхпроводника V , равна нулю:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int \mathbf{h}(\mathbf{r}) d^3 r = \langle \mathbf{h} \rangle_V = 0.$$

В магнитном поле при $H < H_c(T)$ энергетически выгодно сверхпроводящее состояние и $\psi = \psi_0$. Для $H > H_c(T)$ уже выгоднее нормальное состояние с $\psi = 0$. Такой переход с разрушением сверхпроводимости магнитным полем — фазовый переход первого рода, так как волновая функция (сверхпроводящий параметр порядка) меняется скачком с $\psi = \psi_0$ на $\psi = 0$.

Внешнее магнитное поле, при котором в нормальном состоянии становится выгодным спонтанное образование зародышей сверхпроводящей фазы, называется верхним или вторым критическим магнитным полем $H_{c2}(T)$. Это критическое поле находится из линеаризованного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\gamma}{2} \left(-iK\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha(T) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}].$$

Как магнитное поле H , при котором впервые появляется нетривиальное решение с $\psi(\mathbf{r}) \neq 0$, и равно

$$H_{c2}(T) = |\alpha(T)| \frac{c}{4\pi\gamma} \sim (T_c - T).$$

Отношение верхнего критического поля H_{c2} к термодинамическому полю H_c не зависит от температуры:

$$\frac{H_{c2}(T)}{H_c(T)} = \frac{e\sqrt{\beta}}{\sqrt{8\pi\hbar\gamma}} \sqrt{2} = \kappa\sqrt{2}.$$

Безразмерный параметр χ называется параметром Гинзбурга–Ландау и является важнейшей характеристикой сверхпроводника. Этот параметр можно представить и как отношение двух длин:

$$\chi = \frac{\delta(T)}{\xi(T)}.$$

Первая представляет собой глубину проникновения магнитного поля $\delta(T)$, а вторая — сверхпроводящая корреляционная длина $\xi(T)$ — характеризует пространственный масштаб, на котором меняется сверхпроводящий параметр порядка или волновая функция

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{N^2}{2|\alpha(T)|}} \sim \frac{1}{(T_c - T)^{1/2}},$$

Последнее очевидно из линеаризованного уравнения в нулевом магнитном поле:

$$\frac{\gamma}{2}(-i\hbar\nabla)^2\psi(r) + \alpha\psi(r) = 0, \quad \text{или} \quad \xi^2\nabla^2\psi(r) + \psi(r) = 0.$$

С введением элементарного кванта потока магнитного поля $\phi_0 = hc\hbar/e = 2 \cdot 10^{-7}$ Гс · см² выражение для верхнего критического поля приобретает наглядный вид:

$$H_{c1}(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)}.$$

В зависимости от величины параметра Гинзбурга–Ландау χ возникает два разных типа поведения сверхпроводника в магнитном поле, и, соответственно, различают два рода сверхпроводников. К сверхпроводникам первого рода относят сверхпроводники с $\chi < 1/\sqrt{2}$ или $H_c > H_{c2}$. Ко второму роду относятся сверхпроводники с $\chi > 1/\sqrt{2}$ или $H_c < H_{c2}$.

При уменьшении внешнего магнитного поля в сверхпроводнике I рода сверхпроводящее состояние выгодно уже при достижении полем значения $H = H_c > H_{c2}$ и, следовательно, будет выгоднее образовать скачком мейсснеровское состояние с конечным значением сверхпроводящего параметра порядка. Это приводит к фазовому переходу I рода. Наоборот, к сверхпроводнику II рода уже в поле $H = H_{c2} > H_c$ начнется образование зародышей сверхпроводящей фазы со сколь угодно малым значением параметра порядка. Переход к сверхпроводящему состоянию будет фазовым переходом II рода в силу плавного нарастания величины сверхпроводящего параметра порядка при переходе через критическую точку.

4.3. Основы теории критических явлений. При подходе к точке перехода корреляционный радиус ξ , неограниченно возрастая, становится единственной самой большой длиной в системе, которая превышает все остальные возможные длины, например, межчастичное расстояние (постоянную решетки), радиус межчастичного взаимодействия. В каждой области (ячейки) размером ξ и объемом V_ξ суммарный параметр

$$\Phi_\xi = \sum_{x \in V_\xi} \varphi(x)$$

растет с увеличением ξ . Систему в целом вблизи перехода можно представить как совокупность макроскопических областей (ячеек) взаимодействующих друг с другом. Если все линейные размеры измерять в единицах ξ , а суммарный параметр порядка в единицах Φ_ξ , то изменение близости x к переходу τ не приводит к изменению термодинамических величин и корреляционных функций. В рамках такой гипотезы подобия, или масштабной инвариантности, поведение всех термодинамических величин в зависимости от τ и коррелаторов, как функций расстояний, выражаются степенными законами.

В теории критических явлений особое поведение физических величин в окрестности точки фазового перехода характеризуют критическими индексами, описывающими степенную зависимость физических величин от их близости τ к точке перехода. Критические индексы α , β , γ и δ вводятся, соответственно, для теплоемкости C , параметра порядка φ при $\tau < 0$, восприимчивости χ в слабом и сильном внешнем поле h :

$$C \sim |\tau|^{-\alpha}, \quad \varphi \sim (-\tau)^\beta \quad (\tau \leq 0), \quad \chi \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad \chi \sim h^{1/\delta-1}.$$

Для характеристики корреляций поля параметра порядка φ в неупорядоченной фазе при $\tau > 0$ и в самой точке перехода $\tau = 0$ вводят два индекса: индекс корреляционной длины ζ согласно

$$\langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle_{|x-x'| \rightarrow \infty} \sim \exp(-|x-x'|/\zeta), \quad \zeta \sim \tau^{-\nu} \quad (\tau > 0);$$

и индекс аномальной размерности (индекс Фишера) ζ согласно

$$\langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle_{|x-x'| \rightarrow \infty} \sim |x-x'|^{-(d-2+\zeta)} \quad (\tau = 0),$$

где d — размерность пространства. Критические индексы универсальны, т. е. зависят только от числа компонент параметра порядка. Степень точности описания не позволяет различать логарифмическое поведение $\ln |\tau|$ на фоне степенного. Нулевому значению индекса соответствует как стремление к постоянному пределу, так и логарифмическое поведение.

Масштабная инвариантность или скейлинг становится возможным в силу того, что в критической точке корреляционный радиус обращается в бесконечность и тем самым исчезает естественная единица длины или масштаб. Подобное изменение расстояний (скейлинг) в отсутствие характерного размера или масштаба

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$$

не может изменить состояния системы, так как это преобразование сводится к изменению единицы длины. При масштабном преобразовании (скейлинге) физический параметр $A(\mathbf{x})$, характеризующий систему, например, параметр порядка φ , плотность энергии ε , температура t , внешнее поле A , умножаются на некоторую степень λ согласно закону

$$A(\mathbf{x}) \rightarrow A'(\mathbf{x}') = \lambda^{-\Delta_A} A(\mathbf{x}).$$

Показатель степени Δ_A называется масштабной (скейлинговой) размерностью величины A .

Исходя из требования масштабной инвариантности можно связать скейлинговые размерности с критическими индексами и получить ряд скейлинговых соотношений между индексами. Очевидно, что $\Delta_\varphi = -1$ и $\Delta_\xi = -1$. Из условия $\xi \sim r^\nu$ следует $\Delta_\tau = 1/\nu$, а с учетом $\varphi \sim r^\beta$ имеем $\Delta_\varepsilon = \beta/\nu$. Размерности термодинамически сопряженных величин в сумме равны d , например, $\Delta_\varphi + \Delta_h = d$. Скейлинговые соотношения

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \beta\delta = \beta + \gamma,$$

$$\delta = \frac{d+2-\zeta}{d-2+\zeta}, \quad d\nu = 2 - \alpha$$

позволяют выразить через два индекса, например, ν и ζ , все остальные индексы.

Эксперимент и численный расчет в трехмерном случае демонстрируют для индексов теплоемкости и Фишера относительно малые значения: $\alpha \lesssim 0.1$ и $\zeta \lesssim 0.05$. Если положить $\alpha = 0$ и $\zeta = 0$, то оценка остальных индексов дает $\beta = 1/3 \sim 0.3$, $\gamma = 4/3 \sim 1.3$, $\nu = 2/3 \sim 0.7$ и $\delta = 3$ вместо значений в теории самосогласованного поля $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\nu = 1/2$ и $\delta = 3$.

Критические индексы зависят от размерности пространства d . В пространстве $d \geq 4$ критические индексы самосогласованного поля удовлетворяют всем скейлинговым соотношениям, что неверно при $d < 4$. Размерность пространства $d = 4$ называется верхней критической размерностью и может быть взята в качестве исходного нулевого приближения для развития теории возмущения (ϵ -разложение) с математи-

ически непрерывным переходом к пространству меньшей размерности $d = 4 - \epsilon$. Физический смысл в подобных разложениях имеют лишь целые значения $\epsilon = 1, 2, 3$.

Приведем первые члены ϵ -разложения критических индексов для n -компонентного параметра порядка:

$$\alpha = \frac{4-\pi}{2(n+8)}\epsilon + \dots \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)}\epsilon + \dots$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + \dots \quad \delta = 3 + \epsilon + \dots$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\epsilon + \dots \quad \zeta = \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon^2 + \dots$$

ЗАДАЧИ

- 3.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА.
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ**
- 3.1.1. а) Проверить, что уравнение состояния идеального газа $PV = NT$ не зависит от энергетического спектра его частиц $\epsilon = \epsilon_p$ и размерности пространства d . Найти энергию и теплоемкость газа частиц со спектром $\epsilon_p = cp^k$ ($k > 0$).
- б) Рассмотреть температурное поведение теплоемкости $C(T)$ для газа частиц со спектром $\epsilon_p = cp + p^2/(2m)$ в $d = 3$.
- 3.1.2. Идеальный газ объемом V находится во внешнем поле $U(r)$. Найти поправку к теплоемкости газа от внешнего поля в пределе высоких температур $T \rightarrow \infty$.
- 3.1.3. Найти, как изменится свободная энергия и теплоемкость идеального газа, заключенного в цилиндрический сосуд высотой H , если поместить сосуд с газом в однородное поле тяжести $U(z) = mgz$.
- 3.1.4. Цилиндрический сосуд радиуса R с идеальным газом внутри поместили во внешнее поле с потенциалом $U(r) = U_0(r/R)^2$ ($U_0 > 0$), где r — расстояние от оси цилиндра. Найти, как при этом изменится свободная энергия и теплоемкость газа.
- 3.1.5. Идеальный одномерный газ из $N \gg 1$ частиц массой m находится в двухъярусной ловушке с потенциалом
- $$U(x) = \frac{m\omega^2(x^2 - x_0^2)}{2}.$$
- Найти свободную энергию газа и оценить его теплоемкость в низко и высокотемпературном пределах.
- 3.1.6. Идеальный газ N частиц находится в ловушке с гармоническим потенциалом
- $$U(x, y, z) = \frac{m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)}{2}.$$



Найти одночастичную плотность состояний, химический потенциал и теплоемкость газа.

- 3.1.7. Идеальный двумерный газ помещен в осесимметричную ловушку с потенциалом

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ U_0 \ln r/R, & r > R (U_0 > 0). \end{cases}$$

Показать, что одночастичная плотность состояний растет экспоненциально с энергией. Найти теплоемкость газа и обосновать, что система обладает предельной температурой $T_{10} = U_0/2$, выше которой газ невозможно нагреть.

- 3.1.8. Идеальный трехмерный газ помещен в центрально-симметричную ловушку с непроницаемой сердцевиной радиуса R и внешним потенциалом

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r = R, \\ U_0 \ln r/R, & r > R (U_0 > 0). \end{cases}$$

Найти теплоемкость газа и предельную температуру, выше которой газ невозможно нагреть.

- 3.1.9. Идеальный двумерный газ находится в ловушке с непроницаемой стальной радиуса R в центральном поле с притяжением к центру ловушки

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r = R, \\ -U_0 \ln R/r, & r < R (U_0 > 0). \end{cases}$$

Вычислить энергию газа, теплоемкость и показать, что существует предельная температура T_{10} , выше которой газ не может быть охлажден.

- 3.1.10. Термодинамическая система представляет собой ансамбль из $N \gg 1$ незаимодействующих двухуровневых систем с одинаковой энергией возбуждения, равной ε . Кратность основного уровня энергии равна g_1 , а возбужденного уровня — g_2 . Найти энтропию системы: а) с помощью статистического определения энтропии; б) через распределение Гиббса. Определить теплоемкость системы и показать, что область отрицательных температур отвечает термодинамически неустойчивым состояниям системы с инверсной заселенностью.

Состояние аморфных веществ (стекол) при низких температурах описывают, как состояние с макроскопически большим избором различных двухуровневых систем, у которых энергия возбуждения ε представляет случайную величину с плотностью распределения $\rho(\varepsilon)$, нормированной на число двухуровневых систем в единице объема $\int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) d\varepsilon = N$. Предполагая, что плотность распределения двухуровневых систем $\rho(\varepsilon)$ остается конечной и непрерывной при $\varepsilon = 0$, найти поведение теплоемкости аморфных веществ в пределе низких температур.

- 3.1.11. Найти намагниченность, магнитную восприимчивость, энтропию и магнитную теплоемкость N классических магнитных моментов величиной μ во внешнем магнитном поле H .
- 3.1.12. Найти намагниченность, магнитную восприимчивость, энтропию и магнитную теплоемкость N частиц, обладающих спином S и эффективным магнетоном Бора μ_B , во внешнем магнитном поле H . Рассмотреть переход к классическому пределу большого спина $S \rightarrow \infty$.
- 3.1.13. Квадрупольный момент молекул с аксиально-симметричным распределением электрического заряда можно представить в виде $Q_a = Q(3\sigma_a \sigma_a - \delta_{ab})$, где a — единичный вектор, направленный вдоль оси молекулы. Энергия E квадрупольного момента во внешнем электрическом поле, потенциал которого равен φ , выражается через вторые производные по координатам:

$$E = Q_a \sigma_a, \quad \text{где} \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_b}.$$

Найти средний квадрупольный момент газа в пределе высоких температур или слабого поля.

- 3.1.14. Изменение температуры магнетика при его адабатическом намагничивании или размагничивании во внешнем магнитном поле называется магнитокалорическим эффектом. Найти величину эффекта, т. е. отношение изменения температуры к изменению величины магнитного поля, предполагая известными намагниченность и теплоемкость магнетика.
- 3.1.15. В ферромагнетике при быстром адабатическом изменении направления вектора намагниченности относительно кристаллографических осей, которое может быть достигнуто поворотом ферромагнитного монокристалла в сильном постоянном магнитном поле, также возникает магнитокалорический эффект, приводящий к изменению температуры магнетика (Л. В. Киренский).

(1939). Найти изменение температуры при адиабатическом повороте одноосного ферромагнетика в сильном магнитном поле на 90° . Константа магнитной кристаллографической анизотропии $K(T)$ зависит от температуры, а свободная энергия, связанная с магнитной анизотропией, равна $F_{\text{an}} = K(T) \sin^2 \theta$, где θ — угол между направлением вектора намагниченности и кристаллографической осью кристалла.

- 3.1.16 На примере орто- и параводорода рассмотреть влияние ядерного спина на вращательный вклад в теплоемкость газа молекул, образованных двумя одинаковыми атомами. Найти теплоемкость смеси орто- и параводорода: а) при заданной концентрации и б) термодинамически равновесной.
- 3.1.17 Определить степень однократной тепловой ионизации $\alpha(T)$ однотомного идеального газа плотностью ρ , если энергия однократной ионизации равна I_1 , а масса электрона m много меньше массы атома M_a .
- 3.1.18 Найти степень диссоциации α , энтропию S и теплоемкость C_p диссоциирующего идеального газа двухатомных молекул AB , образованных разными атомами A и B . Энергия диссоциации молекулы равна I . Теплоемкости каждого из газов AB , A и B считать постоянными.
- 3.1.19 Найти средние квадраты термодинамических флуктуаций основных термодинамических величин: давления, объема, температуры, энтропии и корреляции между ними.
- 3.1.20 Найти средний квадрат термодинамических флуктуаций числа частиц и корреляцию между флуктуациями химического потенциала и числа частиц.
- 3.1.21 Линейный отклик системы на внешнее малое воздействие $V = -qf$, где q — обобщенная координата, а f — возмущающая сила, можно описать с помощью восприимчивости χ , которая определяется как производная среднего значения координаты $\langle q \rangle$ по возмущающей силе согласно

$$\chi = \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial f}.$$

В термодинамически равновесных системах средний квадрат флуктуации координаты $(\Delta q)^2$ и восприимчивость χ взаимосвязаны друг с другом. При достаточно высоких температурах $T \gg \hbar\omega$, где ω — характерные частоты возбуждений в системе,

термодинамические флуктуации можно считать классическими, и соотношение между $(\Delta q)^2$ и χ существенно упрощается. Найти соотношение между $(\Delta q)^2$ и χ , предполагая термодинамические флуктуации в системе классическими.

3.2. КВАНТОВЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

3.2.1. Идеальный ферми-газ

- 3.2.1. Найти поведение теплоемкости и химического потенциала вырожденного ферми-газа в области низких температур T , много меньших энергии Ферми ε_F .
- 3.2.2. Вычислить химический потенциал двумерного идеального ферми-газа с поверхностной плотностью n_s при произвольной температуре. Масса фермиона m и спин равен $1/2$.
- 3.2.3. Найти поведение параметрической восприимчивости вырожденного ферми-газа в слабом магнитном поле H в области низких температур T , много меньших энергии Ферми ε_F . Масса Фермиона m , спин равен $1/2$ и магнетон Бора $\beta = e\hbar/(2mc)$.
- 3.2.4. Найти изменение импульса Ферми и энергии Ферми при полной поляризации магнитным полем идеального газа атомов ^3He . Определить зависимость скорости звука от магнитного поля при нулевой температуре.
- 3.2.5. Свойства примесных атомов ^3He , растворенных в сверхтекучем гелии ^4He , в первом приближении можно описать как идеальный газ фермиевских возбуждений (примесонов) с импульсом p и энергией $\varepsilon_p = -\Delta + p^2/(2M)$, где $\Delta/k_B \sim 2.8$ К — энергия растворения атома ^3He в ^4He и $M \sim 2.3M_{\text{He}}$ — его эффективная масса. Эти параметры, хотя и незначительно, зависят от давления P и концентрации ^3He . «Сверхтеч» из тонких капилляров пропускает только сверхтекучую компоненту ^4He и не пропускает нормальную компоненту. Определить возникающее осмотическое давление Π между чистым ^3He и раствором $^3\text{He}-^4\text{He}$ при нулевой температуре и малых концентрациях ^3He , считая Δ и M постоянными. Осмотическое давление определяется равенством химических потенциалов ^3He :

$$\mu_3(P, n_3) = \mu_3(P - \Pi, 0),$$

где n_3 — плотность атомов ^3He . Как изменится осмотическое давление при полной поляризации ядерных спинов ^3He в магнитном поле?

3.2.6. При сжатии металла размер и форма ферми-поверхности изменяются. Пусть при сжатии $P = P_0$ происходит так называемый топологический электронный переход, в результате которого электроны могут заполнять новый участок электронного спектра с законом дисперсии $\varepsilon_p = \Delta + p^2/(2m)$ ($\Delta > 0$). Найти изменение термодинамического потенциала Ω , теплоемкости и сжимаемости металла при таком переходе.

3.2.7. Идеальный газ $N \gg 1$ фермионов массой m и спином $1/2$ находится в гармонической ловушке с потенциалом

$$U(x, y, z) = \frac{m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}{2}.$$

Найти в квазиклассическом приближении энергию Ферми, кинетические поправки к термодинамическим величинам, распределение плотности частиц и распределение частиц по импульсу.

3.2.8. Идеальный газ нейтронов находится в однородном поле тяжести $U = mgz$ над идеально отражающей горизонтальной поверхностью. Число нейтронов, приходящихся на 1 см^2 поверхности, $N \gg 1$. Найти распределение плотности нейтронов по высоте при нулевой температуре. Какой высоты имеет смысл делать ямы, чтобы нейтроны не рассеивались в пространстве?

3.2.9. Для накопления электронов в центр ловушки поместили большой положительный заряд $+Q$. Пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найти энергию Ферми при числе частиц $N \gg 1$. Показать, что система из одних связанных уровней термодинамически неустойчива при конечных температурах.

3.2.10. Для малых металлических частиц, имеющих небольшое число электронов N , дискретность спектра энергетических уровней начинает играть существенную роль при низких температурах $T \lesssim \delta$, где δ — характерное расстояние между уровнями. Величина энергетического интервала δ приблизительно равна ε_F/N , где ε_F — энергия Ферми. Предполагая для простоты эквидистантность энергетического спектра, оценить теплоемкость и спиновую восприимчивость металлической частицы в зависимости от четности числа электронов N в металлической частице при $T < \delta$.

3.2.11. В графене (монослои графита) зависимость энергии от импульса $p = (p_x, p_y)$ описывается бедмассовым дираковским спектром $\varepsilon_p = \sigma v |p|$, где v — скорость электрона и $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ — мат-

рицы Паули, и соответственно $\epsilon_p = \pm v|\mathbf{p}|$. Найти одиночественную плотность состояний $d(\epsilon)$, а также теплоемкость $C(T)$, в условиях когда химический потенциал μ фиксирован внешними условиями. (В плотности состояний учсть двукратное вырождение по спину электрона и наличие двух одинаковых конических зон.)

- 3.2.12. В условиях предыдущей задачи оценить парамагнитную восприимчивость графена.
- 3.2.13. Идеальный газ из $N \gg 1$ электронов находится в тонком кольце радиуса R . В направлении, перпендикулярном к плоскости кольца, приложено магнитное поле величиной H . Найти ток намагничения, который протекает по кольцу в зависимости от потока через кольцо $\Phi = \pi R^2 H$ и химического потенциала.
- 3.2.14. Найти осцилляционное поведение намагниченности двумерного слоя электронного газа в перпендикулярном к слою магнитном поле (эффект де Гааза-ван Альфена).
- 3.2.15. Идеальный газ $N \gg 1$ электронов массы m находится в осесимметричной ловушке, ограниченной по вертикальным размером L и в горизонтальном направлении гармоническим потенциалом $U(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. Вдоль вертикальной оси z приложено магнитное поле напряженностью H . Оценить динамагнитную восприимчивость электронного газа, предполагая малость частоты ловушки ω и циклотронной частоты $\omega_c = eH/(mc)$ по сравнению с температурой T .
- 3.2.16. Идеальный газ $N \gg 1$ двумерных электронов массы m находится в гармонической ловушке с потенциалом $U(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. Перпендикулярно плоскости ловушки приложено магнитное поле напряженностью H . Оценить динамагнитную восприимчивость электронного газа, предполагая электронный газ вырожденным, а циклотронную частоту $\omega_c = eH/(mc)$ и частоту ловушки ω малыми по сравнению с температурой T .
- 3.2.17. В графене (монослой графита) зависимость энергии от импульса $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ описывается безмассовым дираковским спектром $\epsilon_{\mathbf{p}} = v\sigma_z \mathbf{p}$, где v — скорость электрона и $\sigma_z = (\sigma_x, \sigma_y)$ — матрицы Паули. В перпендикулярном к слою магнитном поле H спектр становится дискретным:

$$\epsilon_n = \epsilon_0 \sqrt{|n|} \operatorname{sign}(n), \quad \epsilon_0 = \hbar v \sqrt{\frac{2eH}{\hbar c}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Вырождение каждого магнитного уровня по центру орбиты электрона точно такое же, как и для обычного спектра $\varepsilon_p = p^2/(2m)$, и равно $eH/(2\pi\hbar c)$. Плотность состояний в магнитном поле дается обычным соотношением:

$$g(\varepsilon) = \nu \frac{eH}{2\pi\hbar c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n).$$

(Множитель $\nu = 2 \times 2 = 4$ включает в себя звукратное вырождение по спину и наличие в графене двух одинаковых подзон.) Оценить намагниченность и диамагнитную восприимчивость в графене при нулевой температуре.

- 3.2.18. Определить корреляционную функцию для флуктуаций плотности в идеальном ферми-газе. В низкотемпературном пределе вырожденного газа найти корреляционный радиус и период Фриделевских осцилляций.

3.2.2. Идеальный бозе-газ

- 3.2.19. В идеальном бозе-газе бесспиновых частиц массой m и плотностью n найти плотность конденсата $n_0(T)$.
- 3.2.20. Найти энергию, давление и теплоемкость идеального конденсированного бозе-газа бесспиновых частиц массой m . Температура газа равна T .
- 3.2.21. Для идеального бозе-газа частиц со спектром $\varepsilon_p = p^2/(2m)$ определить размерности пространства d , в которых невозможно явление бозе-Эйнштейновской конденсации.
- 3.2.22. Найти адабатическую сжимаемость и адабатическую скорость звука в идеальном конденсированном бозе-газе.
- 3.2.23. Определить поведение теплоемкости $C_v(T)$ идеального бозе-газа при постоянном давлении вблизи точки бозе-Эйнштейновской конденсации.
- 3.2.24. Рассмотреть бозе-Эйнштейновскую конденсацию идеального газа бозонов со спином единица в магнитном поле. Определить температуру перехода в конденсированное состояние в зависимости от величины магнитного поля. Рассмотреть температурное поведение парамагнитной восприимчивости.
- 3.2.25. Идеальный газ $N \gg 1$ бозонов массой m находится в симметричной гармонической ловушке с удерживающим потенциалом $U(r) = m\omega^2 r^2/2$. Найти температуру бозе-Эйнштейновской кон-



денсации, проведение химического потенциала и теплоемкости вблизи перехода. Определить плотность конденсата и теплоемкость газа во всей области бозе-конденсации.

- 3.2.26. Для газа бозонов в симметричной гармонической ловушке найти термодинамические флуктуации температуры, а также влияние термодинамических флуктуаций частоты ловушки ω на размытие температуры бозе-Эйнштейновской конденсации.
- 3.2.27. Рассмотреть идеальный газ $N \gg 1$ бозонов с обычной дисперсией $\varepsilon_p = p^2/(2m)$ в шестимерном пространстве.
а) Показать, что в макроскопическом пределе бозе-газ в гармонической ловушке с частотой ω изоморчен газу в однородном шестимерном пространстве, заключенном в ящике объемом $V_0 = l^6$, где $l = \sqrt{2\pi\hbar/m\omega}$ — осцилляторная длина.
б) Найти корреляционный радиус пространственных корреляций вблизи точки бозе-Эйнштейновской конденсации.
- 3.2.28. Какой следует выбрать удерживающий потенциал ловушки, чтобы наблюдать бозе-Эйнштейновскую конденсацию в одномерном пространстве³?
- 3.2.29. Идеальный газ $N \gg 1$ бозонов массой m заключен в ящике, который находится в однородном поле тяжести. Оценить как зависит температура бозе-Эйнштейновской конденсации от высоты ящика H . Найти распределение числа частиц по высоте при температурах ниже температуры конденсации.

3.2.3. Идеальный газ элементарных бозе-возбуждений

- 3.2.30. Показать, что теплоемкость $C_v(T)$ одномерных фоников с дисперсией $\varepsilon_p = cp$ и теплоемкость $C_i(T)$ одномерных фермионов с фиксированной проекцией спина и дисперсией $\varepsilon_p = p^2/(2m)$ совпадают в низкотемпературной области при условии равенства скорости звука с скоростью Ферми v_F .
- 3.2.31. Размерное квантование фонового спектра в малых частицах влияет на их удельную теплоемкость. Оценить величину эффекта на примере изотропного упругого тела в форме куба размером $L \times L \times L$ с закрепленными границами. Возможным изменением упругих констант в малых частицах пренебречь.
- 3.2.32. В сверхтекучем гелии при больших импульсах энергетический спектр элементарных возбуждений существенно отклоняется от линейного звукового поведения и имеет минимум величиной $\Delta/k_B = 8.7$ К вблизи волнового вектора $p_0/h = 1.9 \cdot 10^8$ см⁻¹.



Поведение неподалеку от минимума спектра аппроксимируется параболой с эффективной массой $m = 0,16M_{\text{пл}}$:

$$\varepsilon_p = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m}.$$

Возбуждения с таким спектром называют ротонами. Найти вклад ротонного участка энергетического спектра возбуждений в свободную энергию, энтропию, теплоемкость сверхтекучего гелия, воспользовавшись неравенствами $\Delta \gg T$ и $p_0^2 \gg 2mT$.

- 3.2.33. Не очень близко к температуре Кюри плотность магнитных возбуждений в ферромагнетике кристалла и газа магнонов можно рассматривать как идеальный. Длинноволновый спектр магнонов в изотропном ферромагнетике во внешнем магнитном поле H дается соотношением

$$\hbar\omega(\vec{h}) = \beta H + \alpha M_0 k^2,$$

где β — эффективный магнетон Бора, т. е. отношение магнитного момента иона к его спину, M — намагниченность ферромагнетика и α — его магнитная жесткость. Найти влияние магнитных возбуждений на намагниченность и теплоемкость ферромагнетика при температурах, малых по сравнению с температурой Кюри

- 3.2.34. Полное описание вещества при ультравысоких температурах $T \gtrsim mc^2$ должно учитывать рождение пар: частица — античастица. Рассмотреть влияние рождения пар: бозон — антибозон на температуру бозе-эйнштейновской конденсации в ультрарелятивистском пределе, считая, что разница числа бозонов и числа антибозонов $N = N_b - N_{\bar{b}}$ остается постоянной и задается начальными условиями.

- 3.2.35. При учете квантовых эффектов черная дыра может не только поглощать, но и рождать частицы. Состав излучения зависит от массы черной дыры: для тяжелых черных дыр это в основном безмассовые частицы (фотоны, нейтрино, гравитоны), а в спектре легких черных дыр начинают присутствовать и частицы с ненулевой массой (электроны, позитроны и другие). Термодинамическое равновесие черной дыры может быть описано как состояние абсолютно черного тела, нагретого до температуры

$$T = \frac{\hbar c}{2\pi k} \quad \text{и} \quad x = \frac{GM}{R^2},$$

Здесь ω — ускорение свободного падения на поверхности черной дыры, G — постоянная тяготения Ньютона, M — масса черной дыры и $R_b = 2GM/c^2$ — ее размер или гравитационный радиус. Предполагая, что излучение черной дыры в основном связано с испусканием Фоннов, оценить время жизни черной дыры массой M .

3.3. НЕИДЕАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ (ЖИДКОСТИ). ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

3.3.1. Нормальная (несверхтекучая) ферми-жидкость

- 3.3.1. Определить эффективную массу квазичастиц m^* в ферми-жидкости, зная функцию Ландау $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ и массу m истинных частиц, образующих ферми-жидкость.
- 3.3.2. В пределе низких температур, малых по сравнению с энергией Ферми, теплоемкость ферми-жидкости пропорциональна температуре: $C(T) = \gamma T$. Постоянная γ называется постоянной Зоммерфельда. Выразить постоянную Зоммерфельда через эффективную массу квазичастиц m^* и импульс Ферми p_F .
- 3.3.3. Ферми-жидкость обладает магнитными свойствами, поскольку наличие спина у частиц означает наличие у них магнитного момента. Определить спиновую восприимчивость ферми-жидкости при нулевой температуре, предполагая, что спиновая часть взаимодействия между квазичастичами в функции Ландау

$$f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\sigma \cdot \sigma'$$

имеет чисто обменное взаимодействие.

- 3.3.4. Неравновесные состояния ферми-жидкости описываются функцией распределения квазичастиц, зависящей от координат, импульсов и времени $n = n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. При нулевой температуре или при достаточно низких температурах столкновения между квазичастичами становятся настолько редкими, что их можно полностью пренебречь. В отсутствие столкновений между частичками справедлива теорема Лиувилля о тождественном обращении в нуль полной производной по времени от функции распределения:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \{H, n\} = 0,$$

где $\{H, n\}$ — скобки Пуассона для гамильтониана H и функции распределения n . Используя следующее кинетическое уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial p} = 0,$$

рассмотреть малые колебания функции распределения при $T = 0$. Найти условия, когда возможно распространение незатухающих волн, получивших название нули-звук. Считать, что функция взаимодействия квазичастич не зависит от импульсов $(p, p') = f_0$.

- 3.3.5. Энергия основного состояния взаимодействующего неоднородного электронного газа во внешнем электрическом поле $V(r)$ может быть записана в виде функционала плотности $E = E[n(r)]$:

$$E[n(r)] = - \int eV(r)n(r)dr + \frac{1}{2} \int \frac{e^2 n(r)n(r')}{|r - r'|} dr dr' + \\ + E_{\text{одн}}[n(r)] + E_{\text{меж}}[n(r)],$$

где $n(r)$ — плотность электронов. Однородная часть

$$E_{\text{одн}}[n(r)] = \frac{3}{5} \int \frac{(3\pi^2)^{2/3} h^2 n^{5/3}}{2m} dr - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \int e^2 n^{4/3} dr + \dots$$

представляет собой сумму кинетической энергии Томаса-Ферми, обменной энергии и корреляционной энергии, которой мы здесь пренебрегаем. Неоднородная часть представляет собой разложение по градиентам плотности:

$$E_{\text{меж}}[n(r)] = \frac{h^2}{72m} \int \frac{(\nabla n)^2}{n} dr + \dots$$

В простейшей модели металла (модели «желе») положительные ионы заменяются однородным положительным фоном с плотностью n_+ , равной электронной плотности, чтобы обеспечить условие электронейтральности. Оценить поверхностное напряжение металла в модели «желе», используя простейшую вариационную функцию

$$n(x) = n \begin{cases} 1 - (1/2)e^{x/b}, & x < 0, \\ (1/2)e^{-x/b}, & x > 0 \end{cases}$$

с вариационным параметром b для аппроксимации профиля электронной плотности вблизи плоской границы $x = 0$.

- 3.3.6. В условиях предыдущей задачи определить работу выхода электрона из металла в модели «желе».

3.3.2. Сверхпроводимость. Теория БКШ

- 3.3.7. Определить плотности состояний элементарных возбуждений $\nu_s(\varepsilon)$ в сверхпроводнике с синглетным s -спариванием вблизи поверхности Ферми.
- 3.3.8. В сверхтекучей А-фазе ${}^3\text{He}$ спектр элементарных возбуждений имеет вид

$$\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta},$$

(де $\xi_p = \mathbf{p}^2/(2m) - \varepsilon_F$ — энергия, отсчитанная от уровня Ферми, и θ — полярный угол вектора \mathbf{p} . Соответственно, энергетическая шель в спектре возбуждений обращается в нуль на северном $\theta = 0$ и южном $\theta = \pi$ полюсах ферми-сферы. Оценить поведение плотности состояний элементарных возбуждений $\nu_s(\varepsilon)$ в области энергий $\varepsilon \leq \Delta$.

- 3.3.9. Взаимодействие между электронами можно представить как сумму двух вкладов. Первый вклад описывает притяжение, обусловленное фононами, и существенен в узкой области энергий $\sim \hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$ вблизи ферми-поверхности. Второй вклад — это прямое кулоновское отталкивание, действующее в широкой области энергий $\hbar\omega_C \sim \varepsilon_F$ вокруг ферми-поверхности. Апроксимируя электров-электронное взаимодействие кусочно-гладкой функцией

$$V_{pe} = \begin{cases} -g + V, & |\xi_p| \quad \text{и} \quad |\xi_p| \leq \hbar\omega_D, \\ V, & \hbar\omega_D < |\xi_p| \quad \text{и} \quad |\xi_p| \leq \hbar\omega_C, \\ 0, & |\xi_p|, \quad \text{и} \quad \text{и} \quad |\xi_p| > \hbar\omega_C, \end{cases}$$

где $g > 0$ — величина притяжения, а $V > 0$ — отталкивания. найти критическую температуру сверхпроводящего перехода T_c . Оценить величину изотопического эффекта $\alpha = -d \ln T_c / d \ln M$, предполагая, что дебаевская частота $\omega_0 \sim M^{-1/2}$, где M — масса иона.

- 3.3.10. Для описания сверхпроводимости в ряде металлов, например, MgB_2 с $T_c = 39$ К используется представление о наличии двух перекрывающихся незаполненных электронных зон. Найти температуру сверхпроводящего перехода в модели БКШ для двухзонного сверхпроводника, предполагая, что спаривание между электронами возможно только внутри одной и той же зоны, а матричные элементы, отвечающие внутрizonному и межзонному электрон-электронному взаимодействию, равны g_{ij} ($i, j = 1, 2$).

- 3.3.11. Электрон-электронное взаимодействие в кристаллах может зависеть от ориентации импульсов электронов относительно кристаллографических осей. Для примера рассмотрим слоистый металл, в котором каждый слой представляет собой квадратную решетку, в узлах которой находятся ионы. Пусть ось z перпендикулярна слоям, оси x и y направлены вдоль сторон квадратной решетки ионов, а потенциал притяжения между электронами с импульсами $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, p_z)$ и $\mathbf{p}' = (\mathbf{x}', p'_z)$ анниндропен и равен

$$V_{\mathbf{pp}'} = \begin{cases} g \cos 2\theta_x \cos 2\theta_{x'}, & |\xi_p| \quad \text{и} \quad |\xi_{p'}| \leq \hbar \omega_D \ll \epsilon_F, \\ 0, & |\xi_p| \quad \text{или} \quad |\xi_{p'}| > \hbar \omega_D. \end{cases}$$

Здесь θ_x — угол между проекцией \mathbf{z} импульса \mathbf{p} на плоскость слоя и направлением кристаллографической оси x , $\xi(\mathbf{p})$ — энергия электрона, отсчитанная от уровня Ферми ϵ_F . Такое взаимодействие означает, что электроны с импульсами, параллельными осям x и y , притягиваются сильнее, чем для направлений, повернутых на угол 45° относительно осей x и y . Найти зависимость сверхпроводящей щели Δ_p от импульса и ее величину при нулевой температуре.

- 3.3.12. В сверхтекучей А-фазе ^3He спектр элементарных возбуждений имеет вид

$$\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta},$$

где $\xi_p = \mathbf{p}^2/(2m) - \epsilon_F$ — энергия, отсчитанная от уровня Ферми, и θ — полярный угол вектора \mathbf{p} . Оценить низкотемпературное при $T \ll \Delta$ поведение теплоемкости $C_v(T)$ в А-фазе гелия.

- 3.3.13. Спиновая парамагнитная восприимчивость — важнейшая характеристика сверхпроводящего (сверхтекущего) состояния. Определить температурное поведение спиновой восприимчивости $\chi_s(T)$ для ферми-системы с синглетным π -спариванием куперовских пар в модели БКШ. Спектр возбуждений в магнитном поле равен $\varepsilon_{\text{per}} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} - \mu \sigma \mathbf{H}$, где μ — эффективный магнетон Бора фермиона и $\xi_p = \mathbf{p}^2/(2m) - \epsilon_F$ — энергия, отсчитанная от уровня Ферми.

- 3.3.14. В нормальном состоянии ферми-система обладает большей спиновой восприимчивостью χ_n по сравнению с восприимчивостью χ_s в сверхпроводящем (сверхтекущем) состоянии. В достаточно сильном магнитном поле может оказаться, что спин-поларизованное состояние в нормальной фазе обладает меньшим значением

свободной энергии, чем в сверхпроводящей (сверхтекущей) фазе. Оценить предельное магнитное поле H_F , называемое параметром Клэгстона–Чандрасекара, выше которого сверхпроводящее (сверхтекущее) состояние не может существовать. Для нулевой температуры выразить поле H_F через величину энергетической щели Δ_0 . Эффективный магнетон Фермиона равен μ .

- 3.3.15. Согласно теории БКШ возбужденные неспаренные состояния в сверхпроводнике отделены от основного состояния энергетической щелью $\Delta(T)$. При изменении числа электронов на единицу: $N \rightarrow N \pm 1$ энергия сверхпроводника должна изменяться на $\pm \Delta$. Знак плюс или минус зависит от того, четное или нечетное было исходное число электронов N . Найти разность $\delta \Pi(T) = \Omega_{\text{ин}} - \Omega_{\text{нет}}$ термодинамических потенциалов Ω для сверхпроводящих состояний с нечетным и четным числом электронов. Оценить температуру T^* , выше которой такой эффект четности числа электронов становится существенно подавленным.

3.3.3. Слабонеидеальный бозе-газ.

Уравнение Гросса–Питаевского

- 3.3.16. Пользуясь уравнением Гросса–Питаевского, найти пространственное поведение плотности бозе-конденсата вблизи бесконечной непроницаемой стенки.
- 3.3.17. В симметричной гармонической ловушке с частотой ω , создающей удерживающий потенциал $V(r) = m\omega^2 r^2/2$, находится слабонеидеальный конденсированный газ $N \gg 1$ бозонов. В приближении Томаса–Ферми для уравнения Гросса–Питаевского оценить размер конденсатного облака, химический потенциал и энергию газа.
- 3.3.18. Бозе-конденсат с притяжением между частицами может быть в метастабильном, относительно долго живущем состоянии, если он ограничен в пространстве и число частиц меньше критического значения N_c . Оценить критическое число частиц N_c , выше которого метастабильное состояние конденсата становится абсолютно неустойчивым и происходит коллапс газа в случае симметричной гармонической ловушки с частотой ω . Использовать гауссову функцию:

$$\psi(r) \sim \exp\left(-\lambda^2 \frac{r^2}{2l^2}\right)$$

с вариационным параметром λ , который задает характерный размер газового облака. Длина рассеяния частиц друг на друге равна $a < 0$ и осцилляторная длина ловушки $l = (\hbar/m\omega)^{1/2}$.

- 3.3.19. Пользуясь нестационарным уравнением Гросса–Питтаевского для волновой функции конденсата

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi + g|\psi|^2\psi,$$

вывести уравнение непрерывности для плотности газа $\rho = m|\psi|^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

и определить плотность потока массы \mathbf{j} .

- 3.3.20. Вывести боголюбовский спектр элементарных возбуждений однородного слабонеидеального конденсированного бозе-газа, пользуясь нестационарным уравнением Гросса–Питтаевского и рассматривая в линейном приближении малые отклонения волновой функции конденсата от его однородного равновесного состояния.

- 3.3.21. Найти линейное натяжение прямолинейного квантованного вихря или энергию, отнесенную к единице его длины, в слабонеидеальном конденсированном бозе-газе, используя для аппроксимации плотности конденсата на расстоянии r от оси вихря функцию

$$n(r) = \frac{n_0 r^2}{r^2 + a^2}$$

с вариационным параметром a .

- 3.3.22. Солитоном называют уединенную волну, представляющую собой локальный колоколообразный волновой импульс, который сохраняет свою форму в процессе его распространения с некоторой постоянной скоростью в одном направлении в пространстве. Показать, что одномерное нестационарное уравнение Гросса–Питтаевского допускает существование солитонных решений для плотности бозе-конденсата $n(x, t)$ со следующими свойствами: $n(x, t) = n(x - ct)$ и $n(x, t) \rightarrow n_0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, где n_0 – равновесная плотность и c – скорость, с которой движется солитон.

- 3.3.23. Бинарная смесь двух бозе-конденсатов образована бозе-частичами с массами m_1 , m_2 и плотностями n_1 , n_2 , соответственно. Определить две ветви боголюбовского спектра возбуждений, и из требования положительности квадрата скоростей зву-

ка найти условие для устойчивости однородного состояния смеси двух бозе-конденсаторов. Константы взаимодействия между бозонами равны g_i ($i, j = 1, 2$), причем $g_{11}, g_{22} > 0$.

3.3.4. Теория сверхтекучести

- 3.3.24. Пользуясь представлениями об элементарных возбуждениях в сверхтекучей жидкости и преобразованием Галлия, найти условие на максимально допустимую или критическую скорость v_c бездиссилиптического течения жидкости (критерий Ландау). Энергия элементарного возбуждения с импульсом p равна $\varepsilon(p)$.
- 3.3.25. Поток элементарных возбуждений, обладающих импульсом, в сверхтекучей жидкости сопровождается переносом части массы жидкости и вкладом в полный импульс жидкости. При малых скоростях импульс единицы объема P , вносимый элементарными возбуждениями, пропорционален скорости течения жидкости v , т.е. $P = \rho_n v$. Определить коэффициент пропорциональности или плотность нормальной компоненты ρ_n .
- 3.3.26. Показать, что критическая скорость течения жидкости, необходимая для одновременного рождения двух элементарных возбуждений, не превышает критическую скорость, которая необходима для рождения одного элементарного возбуждения.
- 3.3.27. В цилиндрическом сосуде радиуса R находится сверхтекучий Не II. Определить критическую угловую скорость вращения сосуда Ω_c , при которой становится энергетически выгодным рождение первого квантованного вихря. Радиус кора вихря равен $\xi \ll R$, плотность сверхтекучей компоненты равна ρ_s .
- 3.3.28. Определить фоновый вклад в плотность нормальной компоненты $\rho_{n,0}$, предполагая разность нормальной и сверхтекучей скоростей $w = v_n - v_s$ не малой по сравнению со скоростью звука c .
- 3.3.29. Найти плотность нормальной компоненты в идеальном конденсированном бозе-газе.
- 3.3.30. Атомы ${}^3\text{He}$, растворенные в малой концентрации в сверхтекучем ${}^4\text{He}$, представляют в первом приближении идеальный газ Фермиевских возбуждений (примесей) с импульсом p и энергией $\varepsilon_p = -\varepsilon_0 + p^2/(2M)$, где ε_0 — энергия растворения атома ${}^3\text{He}$ и M — его эффективная масса. При малых скоростях примесные частицы не взаимодействуют со сверхтекучей компонентой раствора и полностью увлекаются нормальным движением.

- ионем. Найти примесный вклад $\rho_{\text{н}}$ в плотность нормальной компоненты слабого раствора $^{3}\text{He}-^{4}\text{He}$ с массовой концентрацией c .
- 3.3.31. Найти температуру, при которой становится выгодным спонтанное рождение квантованных вихрей в тонкой (квазидвумерной) сверхтекучей плёнке толщиной d . Плотность сверхтекучей компоненты равна ρ_0 , радиус вороха вихря равен ξ .

3.4. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

3.4.1. Приближение самосогласованного поля

- 3.4.1. Замкнутая (изолированная) система состоит из двух термодинамических полисистем, представляющих собой две разные фазы вещества. Из требования максимальности энтропии для равновесия замкнутой системы вывести условия равновесия фаз.
- 3.4.2. Термодинамическая система, например, жидкость-пар, описывается термодинамическим потенциалом Φ , в котором разложение по действительному параметру порядку φ , содержит кубический член:

$$\Phi = \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{a}{3} \varphi^3 + \frac{b}{4} \varphi^4 \quad (b > 0).$$

Определить температуру перехода τ_c в упорядоченную фазу $\varphi \neq 0$ и род фазового перехода. Найти зависимость параметра порядка φ от температуры τ , определить границы устойчивости (точки спинодали) упорядоченной и неупорядоченной фаз. Проверить, что точка $a = 0$ и $\tau = 0$ представляет собой критическую точку системы.

- 3.4.3. Для описания фазовых переходов в сегнетоэлектриках часто используют разложение термодинамического потенциала вплоть до членов шестого порядка:

$$\Phi = \frac{\tau}{2} \mathbf{p}^2 + \frac{a}{4} \mathbf{p}^4 + \frac{b}{6} \mathbf{p}^6 \quad (b > 0),$$

где \mathbf{p} — вектор спонтанной поляризации, а τ — приведенная температура. Определить значения параметров τ и a , при которых возникает трикритическая точка с изменением в ней рода фазового перехода из неупорядоченной фазы в упорядоченную. Найти линию фазовых переходов, значение параметра порядка, и теплоемкость вблизи трикритической точки. Показать, что в трикритической области $a^2 \ll |\tau|$ верхняя критическая размерность пространства d вместо четырех становится равной трем. (Принять во внимание энергию неоднородности $\sim (\nabla \mathbf{p})^2$).

- 3.4.4. Переходы с нарушением трансляционной симметрии и возникновением длинико-периодических структур, например, волны зарядовой плотности в сегнетоэлектриках, волны спиновой плотности или геликоидальных структур в антиферромагнетиках, пространственно-неоднородной фазы FFLO в сверхпроводниках, можно описать добавлением в разложение термодинамического потенциала членов с пространственными производными более высокими, чем второго порядка:

$$\Phi = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{a}{4} \varphi^4 + \frac{\delta}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{d}{4} (\nabla^2 \varphi)^2 \right], \quad (a, d > 0).$$

Найти условие на коэффициент жесткости δ (точку Лифшица) для возникновения пространственно неоднородной структуры, ее период, а также линии и род фазовых переходов в зависимости от приведенной температуры τ и коэффициента жесткости δ . Найти индекс корреляционной длины ν в точке Лифшица.

3.4.2. Функционал Гinzбурга-Ландау

- 3.4.5. Комплексность сверхпроводящего параметра порядка $\psi = |\psi| \times \exp(i\theta)$ приводит к эффекту квантования магнитного потока в сверхпроводнике. Наряду с вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ градиент фазы $\nabla \theta$ также дает вклад в плотность сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s = \frac{e}{4\pi\delta^2} \left(\frac{\hbar c}{2e} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

Доказать, что поток магнитного поля Φ через замкнутый контур C , на котором сверхпроводящий ток тождественно равен нулю $j_s = 0$ и параметр порядка отличен от нуля $\psi \neq 0$, всегда кратен целому числу l квантов магнитного потока $\phi_0 = \pi\hbar c/e$. Найти пример простейшего вихревого состояния, несущего несколько квантов магнитного потока.

- 3.4.6. Для предельного сверхпроводника второго рода с параметром Гинзбурга-Ландау $\kappa \gg 1$ найти а) энергию на единицу длины прямодлинного квантового вихря; б) нижнее или первое критическое магнитное поле H_c .
- 3.4.7. Коэффициент γ перед градиентным членом в разложении Гинзбурга-Ландау для свободной энергии сверхпроводящего кристалла должен отражать анизотропию направлений в кристалле и представляет собой тензор второго ранга γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).



В одноосном кристалле с тетрагональной или с гексагональной симметрией:

$$\gamma_H = (b_0 - n_0 n_1) \gamma_{\perp} + n_0 n_1 \gamma_{\parallel},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении оси симметрии кристалла. (В кристаллах с кубической симметрией $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$). Рассмотреть анизотропию верхнего критического поля, т. е. зависимость поля H_C от угла θ между осью симметрии кристалла \mathbf{n} и направлением внешнего магнитного поля.

- 3.4.8. Параллельно плоской поверхности сверхпроводника приложено внешнее магнитное поле. Показать, что образование сверхпроводящей фазы начинается в приповерхностном слое сверхпроводника, и оценить соответствующее поверхностное критическое поле H_{C0} . Найти диапазон магнитных полей, в котором возможно явление поверхностной сверхпроводимости, заключающееся в налажии сверхпроводящей фазы в приповерхностном слое и ее отсутствии в объеме сверхпроводника.
- 3.4.9. Имеется тонкая пластина сверхпроводника первого рода с параметром Гинзбурга–Ландау $\chi \ll 1$ и толщиной D . Пластина находится во внешнем магнитном поле H_0 , параллельном плоскостям пластины. Найти распределение сверхпроводящего тока и магнитного поля в пластине и определить критическое значение толщины пластины, при которой изменяется род фазового перехода в магнитном поле.
- 3.4.10. Определить критическую плотность сверхпроводящего тока j_c , который может протекать по тонкой пленке сверхпроводника толщиной d , много меньшей корреляционной длины ξ и глубины проникновения магнитного поля δ . Считать плотность сверхпроводящего тока однородной по сечению пленки.
- 3.4.11. Определить период осцилляций температуры сверхпроводящего перехода тонкого полого цилиндра радиуса R и толщиной $d \ll \xi, \delta, R$ в зависимости от величины потока магнитного поля $\Phi = \pi R^2 H$, направленного вдоль оси цилиндра (эффект Литтла–Париса).
- 3.4.12. Определить коэффициент поверхностного натяжения для границы между сверхпроводящей и нормальной фазами в сверхпроводнике первого рода с предельно малым параметром Гинзбурга–Ландау $\chi \ll 1$, когда можно пренебречь глубиной проникновения магнитного поля и считать, что магнитное поле не проникает в сверхпроводящую область.

- 3.4.13. Найти в сверхпроводнике второго рода с $\kappa \gg 1$ энергию и силу взаимодействия двух параллельных вихревых линий, расположенных на расстоянии $r \gg \xi$ друг от друга. Показать, что квантованные вихри с одинаковым направлением тиркуляции сверхпроводящего тока отталкиваются, а с противоположным направлением — притягиваются.
- 3.4.14. Показать, что вихревая линия, параллельная поверхности сверхпроводника, притягивается к его поверхности. Определить силу притяжения.
- 3.4.15. Металл с магнитными атомами, в котором могут существовать и конкурировать два явления: сверхпроводимость и ферромагнетизм, можно назвать ферромагнитным сверхпроводником. Например, халькогениды NoMo_6S_8 , NoMo_6Se_8 и борид ErRh_4B_3 . Считая температуры сверхпроводящего перехода T_c и Кюри θ близкими, ферромагнитный сверхпроводник можно описать в рамках теории функционала Гinzбурга–Ландау с двумя взаимодействующими параметрами порядка: сверхпроводящим $\psi(\mathbf{r})$ и намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, используя следующее разложение для плотности свободной энергии, отсчитанной от нормального состояния:

$$\Delta F = \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{A(T)}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{B}{4}\mathbf{M}^4 + GM^2|\psi|^2.$$

Константа взаимодействия $G > 0$, что соответствует подавлению сверхпроводимости при появлении ферромагнитного упорядочения. Коэффициенты разложения $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ и $A(T) = A_0(T - \theta)$, остальные не зависят от температуры. Для случая $T_c > \theta$ определить возможные фазы, найти род фазовых переходов и построить фазовую диаграмму состояний в зависимости от константы взаимодействия. Считать, что ферромагнитные состояния энергетически гораздо выгоднее, чем сверхпроводящее.

- 3.4.16. Пусть в изотропном ферромагнитном сверхпроводнике одновременно реализуются ферромагнитное и сверхпроводящее состояния. С учетом энергии магнитного поля величиной $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и энергий неоднородности функционал Гinzбурга–Ландау имеет вид

$$\Delta \mathcal{F} = \int d^3r \Delta F(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})),$$

$$\begin{aligned} \Delta F = & \frac{C_0}{2}(\nabla \mathbf{M})^2 + \frac{A(T)}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{B}{4}\mathbf{M}^4 + \frac{(h - 4\pi M)^2}{8\pi} + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + GM^2|\psi|^2. \end{aligned}$$



При температурах заметно ниже точки Кюри θ и сверхпроводящего перехода T_c , абсолютные величины вектора намагниченности \mathbf{M} и сверхпроводящего параметра ψ можно считать фиксированными. Найти условие на коэффициент магнитной жесткости C_m , при котором однородное ферромагнитное упорядочение становится неустойчивым и возникает спиральная фаза, в которой вектор намагниченности \mathbf{M} равномерно поворачивается в плоскости, перпендикулярной выделенной оси при движении вздоль этой оси. Такая магнитная структура называется антиферромагнитным геликоидом. Определить период геликоида (шаг спирали) в зависимости от глубины проникновения магнитного поля b . Возможность состояний с квантованными вихрями не рассматривать.

- 3.4.17. В нормальной фазе при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода возможны флуктуации сверхпроводящего параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$. Определить пространственную корреляционную функцию $\langle \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') \rangle$, пренебрегая членом четвертого порядка в функционале Гинзбурга-Ландау.
- 3.4.18. Возможность флуктуационного рождения сверхпроводящих куперовских пар в нормальной фазе при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода T_c создает дополнительный вклад в динамагнитную восприимчивость металла. Вычислить флуктуационную поправку к динамагнитной восприимчивости во внешнем магнитном поле H при $T > T_c$ для нульмерного сверхпроводника — сферической гранулы малого радиуса такой, что $R \ll \xi$ и $R \ll b$.
- 3.4.19. В нульмерном сверхпроводнике — мазей грануле с характерным размером $R \ll \xi(T)$ — найти поведение квадрата модуля сверхпроводящего параметра порядка $|\psi_0(T)|^2$ в области температур, близких к критической точке перехода T_c , в объемном сверхпроводнике. Найти условие малости размытия фазового перехода, если объем гранулы V , а среднее расстояние между уровнями энергии вследствие размерного квантования равно $b\varepsilon$.

3.4.3. Основы теории критических явлений

- 3.4.20. Одномерная модель Изинга представляет собой одномерную цепочку из N полуцелых спинов $s = 1/2$, для которых возможно всего два состояния: вверх и вниз. Каждый спин в цепочке взаимодействует только с ближайшим соседним спином. Свой-

тва такой системы, находящейся в однородном магнитном поле, могут быть описаны гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu \sum_i \sigma_i H,$$

где J — обменная константа, σ_i на узле i принимает значения ± 1 , а μ — эффективный магнетон Бора и H — магнитное поле. Найти теплоемкость $C(T)$ в нулевом поле, намагниченность $M(T, H)$ и магнитную восприимчивость $\chi(T, H)$ цепочки. Для простоты использовать циклическое граничное условие $\sigma_{N+1} = \sigma_1$.

- 3.4.21. Для одномерной цепочки спинов в модели Изинга с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

найти корреляционную функцию или термодинамическое среднее $\langle \sigma_k \sigma_m \rangle$. Здесь k, m номерует номер узла цепочки. Рассмотреть случаи ферромагнитной $J > 0$ и антиферромагнитной $J < 0$ цепочек и определить корреляционный радиус ξ — характерное расстояние, на котором исчезает корреляция между ориентациями двух выделенных спинов.

- 3.4.22. В одномерной цепочке Изинга обменная константа взаимодействия J принимает случайные значения J_1 и J_2 с вероятностью p_1 и $p_2 = 1 - p_1$, соответственно. Найти теплоемкость цепочки $C(T)$.

- 3.4.23. В ферромагнитной системе изнинговских спинов $\sigma_i = \pm 1$ обменная константа имеет дальнодействующий характер и одинакова для всех пар спинов независимо от расстояния между ними. Гамильтониан такой системы из N частиц во внешнем магнитном поле H можно представить в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - \mu \sum_{i=1}^N \sigma_i H \quad (J > 0).$$

Найти статистическую сумму Z . В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ определить свободную энергию, отнесенную к одному спину, и найти уравнение для среднего значения спина или намагниченности. Сравнить полученное уравнение с приближенным описанием намагниченности в теории самосогласованного (среднего) поля.



- 3.4.24. В пренебрежении пространственными флуктуациями параметра порядка теплоемкость в точке сверхпроводящего перехода испытывает скачок. В приближении разложения Гинзбурга–Ландау рассмотреть влияние флуктуаций параметра порядка на поведение теплоемкости в нормальной фазе вблизи точки перехода T_c . Оценить величину близости к точке фазового перехода $\tau = |T - T_c|/T_c$, или число Гинзбурга–Леванюка G_L , когда флуктуационная поправка к теплоемкости становится сопоставимой с величиной скачка. Проанализировать случай производной размерности пространства d .
- 3.4.25. Классическая XY-модель представляет собой двумерную квадратную решетку, в узлах которой находятся двухкомпонентные спины S_i , единичной длины $|S_i| = 1$. Период решетки равен a . Гамильтониан такой системы, в которой каждый спин взаимодействует обменным образом только с ближайшими соседями с ферромагнитной константой взаимодействия $J > 0$, определяется выражением

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y.$$

Найти корреляционную функцию спинов $K_{rr'} = \langle S_r S_{r'} \rangle$, расположенных в узлах r и r' , и оценить корреляционный радиус $\xi = \xi(T)$ при высоких $T \gg J$ и низких $T \ll J$ температурах. При низких температурах воспользоваться континуальным приближением, когда направление спинов меняется незначительно от узла к узлу, и система может быть описана эквивалентным гамильтонианом типа

$$H = \frac{J}{2} \int (\nabla n)^2 dx dy$$

с киральным полем $n(r) = n(x, y)$, в котором n — двухкомпонентный вектор с наложенным ограничением $n^2 = 1$.

- 3.4.26. Сверхтекучесть в ${}^4\text{He}$ вблизи λ -точки описывается с помощью параметра порядка $\psi(r)$ — комплексной волновой функции бозеконденсата. Плотность сверхтекучей компоненты: $\rho_s = m_4 |\psi|^2$. Плотность потока сверхтекучей компоненты:

$$j_s = -\frac{i\hbar}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \rho_s \mathbf{v}_s.$$

Свободная энергия единицы объема ${}^4\text{He}$ при наличии сверхтекущего движения дается соотношением

$$F(\phi, \mathbf{v}_s) = F_0(\psi) + \mu_s \mathbf{v}_s^2 / 2.$$

Предполагая справедливость гипотезы масштабной инвариантности (скейлинга) для сверхтекучего перехода в λ -точке, определить критический индекс для плотности сверхтекущей компоненты ρ_s , зная индекс теплоемкости α .

- 3.4.27. Вычислить критический индекс хордационной длины ν для однокомпонентного параметра порядка φ и эффективного ($H = \mathcal{K}_L/T$) гамильтонiana

$$H = \int \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\tau}{2} \varphi^2 + g \varphi^4 \right] dx \quad (g > 0)$$

с точностью до первого порядка в ϵ -разложении, предполагая справедливость гипотезы масштабной инвариантности (скейлинга). Зная индекс ν , найти индекс теплоемкости α , параметра порядка β и восприимчивости γ .

ЧАСТЬ | РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

||

1.1.

ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ
В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1.1. По определению скалярного произведения в старой системе координат

$$(\mathbf{ab}) = a_i b_j g_{ij}.$$

В новой системе координат (J — матрица Якоби)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}'\mathbf{b}') &= a'_k b'_l g'_{kl} = (J_{ik} a_k)(J_{jl} b_l) (J_{ml} J_{nl} g_{ml}) = \\ &= a_k b_m (J_{ik} J_{ml}) (J_{ml} J_{nl}) g_{nl} = a_k b_m \delta_{km} \delta_{nl} = a_k b_n g_{kn}. \end{aligned}$$

1.1.2. $A_i B_i = J_{ik} A'_k J_{il} B'_l = J_{ik} J_{il} (A'_k B'_l).$

$$1.1.3. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}.$$

$$1.1.4. \delta_{r'k'} = \delta_{ik} J_{ir} J_{kr} = \delta_{ik} \frac{\partial x_r}{\partial x_{r'}} \frac{\partial x_s}{\partial x_{s'}} = (J^T E J)_{rk'} = (J^T J)_{rk'}.$$

Здесь E — единичная матрица, J — матрица Якоби, δ_{ik} — инвариант относительно преобразований системы координат, для которых $J^T J = E$, т. е. для ортогональных преобразований.

1.1.5. 3

1.1.6. 3

1.1.7. $\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$

1.1.8. $2\delta_{im}$

1.1.9. 6

1.1.10. -6



1.1.11. Запишем выражение с помощью оператора ∇ и воспользуемся формулой двойного векторного произведения, помня о том, что векторная функция a должна стоять справа от ∇ :

$$[\nabla \times (\nabla \times a)] = \nabla(\nabla a) - (\nabla \nabla)a = \text{grad div } a - \Delta a.$$

1.1.12. В этом примере мы воспользуемся как правилом дифференцирования произведения двух функций, так и свойством смешанного произведения относительно перестановки сомножителей. Индекс c у векторной функции означает, что в данном выражении она не дифференцируется (это не тензорный индекс):

$$(\nabla[a \times b]) = (\nabla[a \times b_c]) + (\nabla[a_c \times b]) = (b, |\nabla \times a|) - (a, |\nabla \times b|).$$

1.1.13. Воспользовавшись правилами дифференцирования произведения функций и свойствами двойного векторного произведения относительно перестановки векторных сомножителей, получим

$$\begin{aligned} [\nabla \times (a \times b)] &= [\nabla \times (a_c \times b)] + [\nabla \times (a \times b_c)] = \\ &= a(\nabla b) - (\nabla a_c)b - b(\nabla a) + (\nabla b_c)a = a \text{div } b - (a \nabla)b - b \text{div } a + (b \nabla)a. \end{aligned}$$

1.1.14. Переставлять местами векторы в формуле $\nabla(ab)$ можно, исходя из формулы двойного векторного произведения: $a(bc) = |b \times [a \times c]| + |ba|c$. Поскольку скалярное произведение симметрично относительно перестановки сомножителей, получаем

$$\text{grad}(ab) = [a \times \text{rot } b] + [b \times \text{rot } a] + (a \nabla)b + (b \nabla)a.$$

1.1.15. $\nabla(\mu r) = (\mu \nabla r) = (\mu \text{grad } r) = (\mu n)$.

1.1.16. Воспользуемся формулой для градиента скалярного произведения и формулами действия оператора ∇ на радиус-вектор: $\nabla(\mu r) = \mu$.

1.1.17. $[\nabla \times (\mu \times r)] = 2\mu$.

1.1.18. $\nabla(\mu f(r)) = (\mu \text{grad } f(r)) = f'(\mu n)$.

1.1.19. $[\nabla \times \mu f(r)] = -[\mu \times \nabla f(r)] = -f'[\mu \times n] = f'[n \times \mu]$.

1.1.20. Воспользуемся формулой градиента скалярного произведения и правилом дифференцирования сложной функции:

$$\nabla e^{ikr} = e^{ikr}(\nabla(ikr)) = ike^{ikr}.$$

1.1.21. $(\nabla A e^{ikr}) = (A \nabla e^{ikr}) = i(Ak)e^{ikr}$.

1.1.22. $[\nabla \times Ae^{ikr}] = [\nabla e^{ikr} \times A] = i[k \times A]e^{ikr}$.

1.1.23. $[a \times b]_i = e_{ijk}a_j b_k = e_{ijk}a_k b_j = -e_{ijk}b_j a_k = -[b \times a]_i$.

1.1.24. i -я компонента двойного векторного произведения равна

$$e_{ijk}e_{ilmn}b_m c_n = e_{ilm}e_{mnk}a_i b_m c_n = (\delta_{im}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{lm})a_i b_m c_n = a_i b_i c_i - a_i b_i c_i = 0.$$

1.1.25. В тензорных обозначениях:

$$a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = a_i \delta_{ij} = a_i.$$

1.1.26. Запишем подынтегральное выражение с помощью оператора набла и применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_V f(\nabla \mathbf{A}) dV = \oint_S f(\mathbf{A} d\mathbf{S}) - \int_V (\mathbf{A} \nabla) f dV = \oint_S f(\mathbf{A} d\mathbf{S}) - \int_V (\mathbf{A} \operatorname{grad} f) dV.$$

Тот же самый результат легко получить, используя тензорные обозначения:

$$\int_V f \frac{\partial A_k}{\partial x_k} dV = \oint_S f A_k dS_k - \int_V dV A_k \frac{\partial}{\partial x_k} f$$

1.1.27. Представим выражение в форме дивергенции с помощью оператора набла:

$$(\nabla f)(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(f(\nabla \times \mathbf{A})) - f(\nabla(\nabla \times \mathbf{A})) = \operatorname{div}(f(\nabla \times \mathbf{A})),$$

поскольку для любого вектора $(\nabla(\nabla \times \mathbf{A})) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.

Таким образом, имеем

$$\int_V (\operatorname{grad} f \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \int_V \operatorname{div}(f(\nabla \times \mathbf{A})) dV = \oint_S f(\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S}$$

В тензорных обозначениях этот же результат можно получить, используя интегрирование по частям:

$$\int_V (\operatorname{grad} f \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} dV = \oint_S f e_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} dS_i - \int_V f e_{ijk} \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_k} dV.$$

В силу того, что

$$e_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

получаем искомый результат.

1.1.28. $3V$.

1.1.29. V .

1.1.30. $\int_V (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{r} dV = \mathbf{c} V$

1.1.31. $\int_V \nabla(\mathbf{c} \mathbf{r}) dV = \mathbf{c} V$.



$$1.1.32. \int_V [\nabla \times \mathbf{A}] dV = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dV.$$

$$1.1.33. \int_V (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{A} dV.$$

$$1.1.34. \int_S [d\mathbf{S} \times \nabla] f = \int_S [\operatorname{grad} f] \times d\mathbf{S}.$$

1.1.35. Умножим подынтегральное выражение на произвольный постоянный вектор \mathbf{c} :

$$(\mathbf{c} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}]) = ([\mathbf{c} \times \mathbf{r}] d\mathbf{r}).$$

Поскольку $\operatorname{rot}[\mathbf{c} \times \mathbf{r}] = 2\mathbf{c}$, получаем

$$\int_S \operatorname{rot}[\mathbf{c} \times \mathbf{r}] d\mathbf{S} = 2\mathbf{c} \int_S d\mathbf{S} = \mathbf{c} \oint_L [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}].$$

1.2. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

$$1.2.1. e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} = -4!.$$

$$1.2.2. e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} = -3! \delta_\rho^\mu.$$

$$1.2.3. e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} = -2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu).$$

$$1.2.4. \tilde{e} = \frac{1}{4!} e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} = -1.$$

$$1.2.5. \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}.$$

$$1.2.6. \tilde{G}^\lambda = -\partial_\mu \tilde{F}^{\lambda\mu}.$$

$$1.2.7. \tilde{F}^{\nu\lambda} = -\partial_\mu \tilde{A}^{\nu\lambda\mu}.$$

$$1.2.8. \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

1.3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

$$1.3.1. \text{Является } v/c = \operatorname{th}(\theta_1 + \theta_2).$$

1.3.2. Предположим, в соответствии с условиями задачи, что матрицу буста для преобразования $\underline{x} = \Lambda_x \underline{x}'$ действительно можно записать в виде матричной экспоненты

$$\Lambda_x(\beta(\theta)) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\theta a_x), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \operatorname{th} \theta.$$

где $\beta = v/c$. Продифференцируем это выражение по θ и положим $\theta = 0$:

$$\frac{d\Lambda_x(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{d\beta}{d\theta} \frac{d}{d\beta} \Lambda_x(\beta) \Big|_{\beta=0} = \frac{d}{d\beta} \Lambda_x(\beta) \Big|_{\beta=0} = a_x,$$

где мы учли, что $d\beta/d\theta|_{\theta=0} = 1$. Поскольку $d\gamma/d\beta|_{\beta=0} = 0$, мы находим генератор буста вдоль оси x :

$$\frac{d\Lambda_x(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = a_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для проверки необходимо вычислить экспоненту в явном виде:

$$\exp(\theta a_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} a_x^k$$

Учитывая, что все нечетные степени a_x совпадают между собой, а также совпадают между собой все четные степени, кроме нулевой, т.е. $a_x^0 = E$, $a_x^{2k} = a_x^2$, $a_x^{2k-1} = a_x$ для всех $k = 1, 2, \dots$, получаем, что

$$\exp(\theta a_x) = E + a_x \sinh \theta + a_x^2 (\cosh \theta - 1) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица. Ясно, что $\gamma = \cosh \theta$, $\beta \gamma = \sinh \theta$, в поэтому условие $\beta = v/c = \tanh \theta$ действительно позволяет параметризовать все относительные скорости систем отсчета, допустимые в специальной теории относительности, вещественными числами.

Переставив столбцы и строки в матрицах, находим генераторы бустов для осей y и z :

$$a_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.3. Предположим, что матрицу поворота на угол φ вокруг оси x , т.е. матрицу преобразования $\underline{x}' = R_x(\varphi)\underline{x}$, действительно можно записать в

виде матричной экспоненты

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \exp(\varphi b_z). \quad (1)$$

Мы используем матрицы 4×4 , поскольку рассматриваем повороты, как преобразование четырехмерного пространства Минковского. Дифференцируя по углу φ , находим

$$\frac{dR_z(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = b_z, \exp(\varphi b_z)|_{\varphi=0} = b_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для проверки вычислим экспоненту в явном виде, учитывая, что $b_z^0 = E$, $b_z^{2k} = (-1)^{k+1} b_z^2$, $b_z^{2k-1} = (-1)^{k+1} b_z$ для всех $k = 1, 2, \dots$. В результате имеем

$$\exp(\varphi b_z) = E + b_z \sin \varphi + b_z^2 (1 - \cos \varphi),$$

что и приводят к матрице (1). Циклически переставляя пространственные столбцы и строки в матрице b_z , можно найти генераторы поворотов вокруг осей y и z .

1.3.4. При замене координат элемент объема умножается на модуль якоря: $d^4x = d^4x' |Dx/Dx'|$. Для поворотов и бустов $|Dx/Dx'| = 1$ (см. явный вид соответствующих матриц в решениях задач 1.3.2 и 1.3.3).

1.3.5. Введем единичный вектор $n = v/c$ и будем работать в системе единиц, в которой $c = 1$. Разложим радиус-вектор r на продольную и поперечную компоненты по отношению к скорости:

$$r_{3i} = n_i n_j r_j, \quad r_{4i} = r_i - r_{0i} = (\delta_{ij} - n_i n_j) r_j$$

и, аналогично,

$$r'_{0i} = n_i n_j r'_j, \quad r'_{\perp i} = r'_i - r'_{0i} = (\delta_{ij} - n_i n_j) r'_j$$

в системах отсчета K и K' соответственно.

В этих обозначениях преобразование Лоренца имеет вид

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - v_i r_i), \\ r'_{0i} = \gamma(r_{3i} - v_i t), \\ r'_{\perp i} = r_{\perp i}, \quad \text{где} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - v_i r_i), \\ r'_i = -\gamma v_i t + (\delta_{ij} + (\gamma - 1)n_i n_j)r_j. \end{cases}$$

В четырехмерных обозначениях $x^\mu = (t, \mathbf{r}_i)$ получаем: $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$, где матрица преобразования Лоренца (т.е. буста) имеет вид

$$\Lambda_\nu^\mu(-\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma v_1 \\ -\gamma v_2 & \delta_0 + (\gamma - 1)n_1 n_1 \end{pmatrix},$$

В нашей задаче $n_1 = (n_1, n_2, 0) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, где φ — угол между скоростью \mathbf{v} и осями координат x и x' .

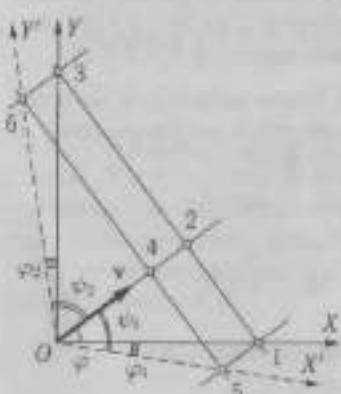
1.3.6. Уравнения, определяющие положение осей x' и y' в системе отсчета K в момент времени $t = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} y' = 0 &= y + (\gamma - 1)n_2(n_1 x + n_2 y) \quad (\text{ось } x'), \\ x' = 0 &= x + (\gamma - 1)n_1(n_1 x + n_2 y) \quad (\text{ось } y'). \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} y &= -\frac{(\gamma - 1)n_1 n_2}{1 + (\gamma - 1)n_2^2} x = -\frac{(\gamma - 1)\tan \varphi}{1 + \gamma \tan^2 \varphi} x \quad (\text{ось } x'), \\ y &= -\frac{1 + (\gamma - 1)n_1^2}{(\gamma - 1)n_1 n_2} x = -\frac{1 + \gamma \cot^2 \varphi}{(\gamma - 1) \cot \varphi} x \quad (\text{ось } y'). \end{aligned}$$

Возможен геометрический способ решения этой задачи, использующий эффект лоренцева сокращения длины (рис. 1.1).



Проведем две прямые, перпендикулярные скорости \mathbf{v} , на расстояниях l_{02} и $l_{04} = l_{02}\sqrt{1 - v^2/c^2}$ от общего в момент времени $t = t' = 0$ начала координат O и O' систем отсчета K и K' . Первая из этих прямых будет пересекать оси x и y в точках 1 и 3. Затем через эти точки мы проведем прямые, параллельные скорости \mathbf{v} , до пересечения со второй прямой в точках 5 и 6. Тогда прокладывание через точки O и 5 и точки O и 6 прямые и будут исходными положениями осей x' и y' с точки зрения системы отсчета K в момент времени $t = 0$ по часам системы K . Обозначая $\angle 102 = \varphi$, $\angle 205 = \psi_1$, $\angle 206 = \psi_2$, $\angle 105 = \varphi_1 = \psi_1 - \varphi$, $\angle 503 = \varphi_2 = \psi_2 - (\pi/2 - \varphi)$, получим

$$\tan \psi = \frac{l_{02}}{l_{04}} = \gamma \tan \varphi, \quad \tan \psi_2 = \frac{l_{01}}{l_{04}} = \gamma \sin \varphi,$$

Рис. 1.1. Геометрический способ решения задачи 1.3.6



$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg}(\psi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \pi/2 + \varphi) = \frac{(\gamma - 1) \operatorname{ctg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{ctg}^2 \varphi}.$$

Последние две формулы и определяют положение осей системы отсчета K' .

1.3.7. Из релятивистского закона сложения скоростей:

$$v'_1 = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_\perp = \frac{v_\perp \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},$$

где в нашем случае $v_x = V_x$, $v_\perp = V_y$, $V = V_z$, $v'_1 = V_{2x}$, $v'_\perp = V_{2y}$, следует, что

$$V_{2x} = \frac{V_x - V_z}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} = 0, \quad V_{2y} = \frac{V_y \sqrt{1 - \frac{V_z^2}{c^2}}}{1 - \frac{V_x V_z}{c^2}} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - \frac{V_z^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, система K_2 будет двигаться относительно системы K_1 со скоростью $V_y(1 - V_z^2/c^2)^{-1/2} = \gamma_y V_z$, направленной вдоль оси y .

1.3.8. Хотя системы K' и K_2 движутся относительно лабораторной системы координат K с одинаковыми скоростями, но их оси оказываются по разному ориентированными по отношению к направлению скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$. Это связано с тем, что два последовательных преобразования Лоренца $K \rightarrow K_1 \rightarrow K_2$ с относительными скоростями, не параллельными друг другу, т. е. $\mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0)$ и $\mathbf{v}_2 = (0, \gamma_y V_z, 0)$ не эквивалентны одному преобразованию Лоренца, а требуют еще и поворота осей системы отсчета K_2 .

При переходе от системы K' к системе отсчета K имеем соотношение

$$\underline{x} = \Lambda(\mathbf{V}) \underline{x}', \quad \text{где } \mathbf{V} = (V_x, V_y, 0),$$

где $\Lambda(\mathbf{V})$ — матрица преобразования Лоренца (см. задачу 1.3.5). Далее, при переходе от системы K_2 к системе K_1 будет

$$\underline{x}_1 = \Lambda(\mathbf{v}_2) \underline{x}_2, \quad \text{где } \mathbf{v}_2 = (0, \gamma_y V_z, 0).$$

И, наконец, для перехода от системы K_1 к K получим

$$\underline{x} = \Lambda(\mathbf{v}_1) \underline{x}_1, \quad \text{где } \mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0).$$

Таким образом,

$$\underline{z} = \Lambda(\mathbf{v}_1) \underline{z}_1 = \Lambda(\mathbf{v}_1) \Lambda(\mathbf{v}_2) \underline{z}_2 = \Lambda(\mathbf{V}) \underline{z}'.$$

Отсюда мы имеем следующее условие связей:

$$\underline{z}' = \Lambda(-\mathbf{V}) \Lambda(\mathbf{v}_1) \Lambda(\mathbf{v}_2) \underline{z}_2.$$

Используя результаты задач 1.3.5 и 1.3.7, получаем, приравнивая результат матрице поворота в плоскости (x, y) :

$$\underline{z}' = \Lambda(-\mathbf{V}) \Lambda(\mathbf{v}_1) \Lambda(\mathbf{v}_2) \underline{z}_2 = R(\theta) \underline{z}_2,$$

где θ — угол поворота вокруг оси z . В явном виде будем иметь

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_x & -\gamma \beta_y & 0 \\ -\gamma \beta_x & \gamma n_x^2 + n_y^2 & (\gamma - 1)n_x n_y & 0 \\ -\gamma \beta_y & (\gamma - 1)n_x n_y & n_x^2 + \gamma n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x \beta_x & 0 & 0 \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \gamma/\gamma_x & 0 & \gamma \beta_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma \beta_x & 0 & \gamma/\gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma_x}(n_x^2 + \gamma n_y^2) & \frac{\gamma}{\gamma_x}(\gamma - 1)n_x n_y & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\gamma_x}(\gamma - 1)n_x n_y & \frac{\gamma}{\gamma_x}(n_x^2 + \gamma n_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{V}/V$ — единичный вектор в направлении скорости \mathbf{V} с компонентами $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, а также

$$\gamma_x = \frac{1}{(1 - \beta_x^2)^{1/2}} = \frac{\gamma}{\cos \varphi (1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2))^{1/2}}.$$

Угол поворота осей системы отсчета K_3 по отношению к осям системы K' определяется формулами

$$\sin \theta = \frac{(\gamma - 1) \sin \varphi}{(1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi (1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}}.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}; \quad \begin{cases} x' = \cos \theta x_2 + \sin \theta y_2, \\ y' = -\sin \theta x_2 + \cos \theta y_2. \end{cases}$$

1.3.9. Пусть частица движется со скоростью \mathbf{v} вдоль положительного направления оси x лабораторной системы отсчета K (см. задачу 1.3.8). Пусть за малый промежуток времени δt скорость частицы изменилась на величину $\delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \delta t$. Если считать, что частица покончилась в системе K_2 , а сказа, действующая на нее (например, на ее заряд, если это электрическое поле), вызывает только изменение скорости, не затрагивающая ее спин¹¹, то изменение направления спина при этом носит кинематический характер, связанный с релятивистским эффектом, описанным в задаче 1.3.8.

Направление спина остается неизменным в системе K_2 (инерциальная мгновенно сопутствующая система отсчета), но оси системы K_2 поворачиваются относительно системы K' (при $\delta \mathbf{v} = 0$ или $\delta t = 0$ направления осей в системах K_2 , K' и в лабораторной системе K совпадают). Таким образом, имеет место прецессия мгновенно сопутствующей системы отсчета и, соответственно, прецессия спина (прецессия Томаса). Для вычисления скорости томасовской прецессии воспользуемся результатами задачи 1.3.8.

В рамках нашей задачи будем считать, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = (\mathbf{v} + \delta v_x, \delta v_y, 0), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v} + \delta v_z, 0, 0).$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{\delta v_x}{\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_z)^2}{c^2}}}, 0 \right).$$

Формула, связывающая угол поворота координатных осей θ с углом φ , определяющим направление скорости \mathbf{V} ($\lg \varphi = V_x/V_z$)

$$\lg \theta = \frac{(\gamma - 1) \lg \varphi}{1 + \gamma \lg \varphi},$$

при малых углах θ и φ (нас интересуют малые промежутки времени δt) дает

$$\theta \approx (\gamma - 1)\varphi.$$

Учитывая, что $\theta = \omega \delta t$ (ω — угловая скорость прецессии Томаса), а также

$$\varphi \approx \frac{\delta v_z}{v + \delta v_z} \approx \frac{\delta v_y}{v} = \frac{\omega \delta t}{\pi},$$

где $\omega = |\dot{\mathbf{v}}|$ — абсолютная величина ускорения частицы, получим

$$\omega = (\gamma - 1) \frac{\omega v}{v^2} = \frac{\gamma^2 \omega v}{(1 + \gamma)v^2}.$$

¹¹ Спин частицы мы моделируем некоторым вектором, связанным с частицей.

В векторной форме данное выражение имеет вид

$$\omega = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{v}].$$

Мы учили, что θ — угол поворота системы K_2 относительно K' по часовой стрелке, т. е. $\omega = -\omega e_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}e_2$, $\mathbf{v} = \omega \mathbf{e}_g$, где $\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$ — орты системы отсчета K .

1.3.10. По существу исследуемый в задаче эффект — это эффект Доплера. В системе отсчета наблюдателя K испускание световых сигналов происходит не одновременно (относительность одновременности), а в моменты

$$ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x'_1), \quad \text{and} \quad ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2),$$

где $S = v/c$ и $x'_0 = x'_1 - t$. В системе движущихся источников K' испускание сигналов осуществляется одновременно, $t'_1 = t'_0$, т. е.

$$ct_2 - ct_1 = \gamma \beta (x_2' - x_1') = -\gamma \beta L$$

Здесь, как и обычно, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Прием наблюдателем световых сигналов произойдет при пересечении мировых линий сигналов

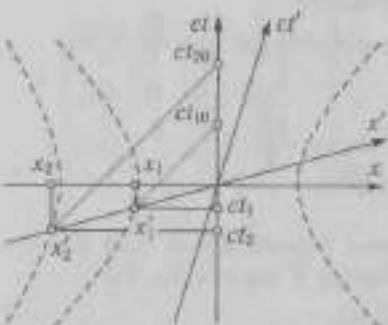


Рис. 1.2. Прием световых сигналов, испущенных движущимися источниками. Пунктирной линией обозначены мирные линии сигналов, штриховой линией обозначены гиперболы, захватывающие масштаб длины на плоскости Минковского

рениева сокращения есть $t\sqrt{1 - \beta^2}$, но x_1 и x_2 взяты в разные моменты времени, и источники успевают сместиться на $(t_1 - t_2)\beta$:

$$ct_{20} - ct_{10} = \gamma\beta l(-1 + \beta) + l\sqrt{1 - \beta^2} =$$

$$= l \left(\frac{-\beta + \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \sqrt{1 - \beta^2} \right) = l \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Задачу можно решить проще, если ввести 4-мерный волновой вектор \underline{k}' . Представим себе, что два световых импульса распространяются вместе с двумя последовательными максимумами радиоволны. Для этой волны в системе источников длина волны и период задаются расстоянием между источниками $\lambda' = cT' = l$, $\omega' = 2\pi c/l$, поэтому

$$\underline{k}' = (2\pi/l, 2\pi/l, 0, 0)$$

В системе отсчета наблюдателя получаем

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi/l \\ 2\pi/l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{l}\gamma(1+\beta) \\ \frac{2\pi}{l}\gamma(1+\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В этой системе будет выполняться

$$\omega = \frac{2\pi c}{l}\gamma(1+\beta) = \frac{2\pi c(1+\beta)}{l\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi}{T},$$

и мы приходим к тому же самому результату:

$$cT = l\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Данная формула описывает так называемый *продольный эффект Доплера*: частота волны $\nu = 1/T$, принимаемая приемником в системе K , больше частоты, испускаемой движущимся источником ($\nu > \nu'$). В случае же, если источник не приближается, а удаляется от приемника, в окончательном результате необходимо заменить β на $-\beta$, поэтому получится, что $\nu < \nu'$.

1.3.11. В этой задаче используется основной принцип специальной теории относительности — ковариантность (форминвариантность) законов физики. В задачах на столкновения используется частный случай инвариантности — инвариантны столкновений. В нашем случае — это ковариантность 4-векторных законов отражения.

Пусть направление вектора нормали к зеркалу совпадает с направлением скорости ($\mathbf{n}' = \mathbf{V}/V$) движения зеркала (рис. 1.3). Существование компоненты скорости, параллельной зеркалу, не влияет на характер отражения плоской волны, поэтому наше условие не является ограничением общности решения.

В системе покоя зеркала K' угол падения равен углу отражения, частота волны при отражении не меняется:

$$\begin{cases} \omega'_1 = \omega'_2, \\ (\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n}) = -(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{n}), \\ \mathbf{k}'_2 - (\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{k}'_1 - (\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \end{cases}$$

Изъявив из последней формулы $(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{n})$, получаем

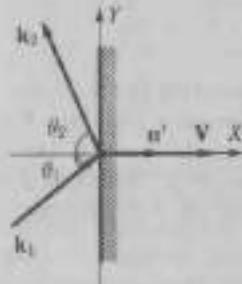
$$\begin{cases} \omega'_2 = \omega'_1, \\ \mathbf{k}'_2 = \mathbf{k}'_1 - 2(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \end{cases}$$

Для записи этих формул в 4-векторной форме введем в системе отсчета K' 4-вектор нормали к зеркалу $\mathbf{n}' = (0, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. В лабораторной системе K будем иметь

$$\begin{cases} n^0 = \gamma(n'^0 + \beta) = \gamma\beta, \\ n^1 = \gamma(1 + \beta n'^0) = \gamma, \\ n^2 = n^3 = 0, \\ n^0 = n'^0 = 0. \end{cases}$$

То есть $\underline{n} = (\gamma\beta, \gamma\mathbf{n})$, где $\beta = V/c$. Так как $\mathbf{n}^2 = 1$, то, как и должно быть,

$$\underline{n}^2 = -\mathbf{n}^2 = -1 = \underline{n}'^2 = \gamma^2(\beta^2 - 1).$$



В системе K' , принимая во внимание, что

$$\underline{k} = (\omega/c, \mathbf{k}) = \omega/c(1, \mathbf{k}/k)$$

изделяется 4-вектором, имеем

$$\underline{k}'_2 = \underline{k}'_1 + 2(\mathbf{k}'_1 \underline{n}') \underline{n}',$$

и, в силу ковариантности последнего соотношения, оно должно иметь эту же форму (быть форминвариантным) и в лабораторной системе отсчета K , т. е.

$$\underline{k}_2 = \underline{k}_1 + 2(\mathbf{k}_1 \underline{n}) \underline{n}.$$

В компонентах эта формула имеет вид

$$\omega_2(1, \mathbf{n}_2) = \omega_1(1, \mathbf{n}_1) + 2\omega_1\gamma^2(\beta - (\mathbf{n}\mathbf{n}_1))(\beta, \mathbf{n}),$$

где $\mathbf{n}_1 = c\mathbf{k}_1/\omega_1$, $\mathbf{n}_2 = c\mathbf{k}_2/\omega_2$.

Для частот мы получаем следующее условие связи:

$$\omega_2 = (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1) \gamma^2 \omega_1.$$

Умножив пространственные компоненты на вектор \hat{n} , учитывая, что $(\hat{n} n_2) = -\cos \theta_2$, находим

$$\cos \theta_2 = \frac{\omega_1 \cos \theta_1 - 2\beta}{\omega_2} = \frac{(1 + \beta^2) \cos \theta_1 - 2\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1}.$$

Более прозрачная формула для углов может быть получена с помощью преобразований

$$1 - \cos \theta_2 = 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{(1 + \beta^2)(1 - \cos \theta_1)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1},$$

$$1 + \cos \theta_2 = 2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{(1 - \beta^2)(1 + \cos \theta_1)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1}.$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}, \quad \text{и поэтому } \theta_2 > \theta_1.$$

Интересно, что при

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} > \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

имеем $\theta_1 > \pi/2$, а при $\cos \theta_1 < \beta$, т. е. при

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} > \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

зеркало «убегает» от волны, и отражение не происходит: $\theta_2 = \pi - \theta_1$.

1.3.12. В «системе карусели» (системе наблюдателя, движущегося по окружности) $\varphi' = \varphi + \Omega t$. Чтобы не загромождать записи, переобозначим $x^0 = ct$, как t (т. е. положим $c = 1$). Тогда

$$\begin{aligned} dx^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi'^2 - dz^2 = \\ &= dt^2 - dr^2 - r^2 (d\varphi'^2 - \Omega dt)^2 - dz^2 = \\ &= (1 - r^2 \Omega^2) dt^2 + 2r^2 \Omega d\varphi' dt - dr^2 - r^2 d\varphi'^2 - dz^2 = \\ &= [1 - (x'^2 + y'^2) \Omega^2] dt^2 + \Omega (x' dy' - y' dx') dt - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \end{aligned}$$

Соответствующий метрический тензор задается матрицей

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - (x'^2 + y'^2) \Omega^2 & -\Omega y' & \Omega x' & 0 \\ -\Omega y' & -1 & 0 & 0 \\ \Omega x' & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Старше будет неподвижный близнец (интервал между двумя точками, разделенными временноподобным интервалом, максимальен вдоль прямой).

1.3.13. Будем решать задачу в инерциальной (не врачающейся) системе, связанной с центром колышевого волновода.

Волновой 4-вектор для света с частотой ω , распространяющегося вдоль оси x в неподвижной среде с коэффициентом преломления n , имеет вид

$$k'_\pm = \frac{1}{c}(\omega, \pm n\omega, 0, 0).$$

Это соответствует волновому вектору в сопутствующей системе отсчета для света, распространяющегося по направлению вращения (+) и против направления вращения (-).

$$ck_\pm = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 \pm \beta) \\ \pm\omega\gamma(\gamma \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, волновое число для света, распространяющегося по и против вращения, составляет по абсолютной величине

$$ck_\pm = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Будем считать, что датчик расположен в диаметрально-противоположной точке по отношению к источнику. Чтобы достичь датчика, свет должен пройти половину окружности πR в ту или другую сторону. Небольшая фаза составляет

$$\varphi_\pm = k_\pm \pi R = \frac{\omega\gamma(n \pm \beta)\pi R}{c}.$$

Разность фаз будет равна

$$\delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\omega\gamma 2\beta\pi R}{c}.$$

Если волновод вращается с угловой скоростью $\Omega = v/R$, то

$$\delta\varphi = \frac{2\gamma}{c}\omega\Omega\pi R^2 = \frac{2\gamma}{c^2}\omega\Omega S.$$

В нашем порядке по $\beta = v/c$ будет $\gamma \approx 1$, и мы получаем

$$\delta\varphi = \frac{2\omega\Omega S}{c^2}.$$

Учет отличия γ от 1 был бы в данном случае превышением точности: в специальной теории относительности вращающееся тело не может иметь ту же геометрию, что и поступательно движущееся. Учет $\gamma \neq 1$ потребовал бы расчета релятивистских упругих деформаций во вращающемся интерферометре. Такой расчет существенно более сложен, и кроме того он зависит от конструкции интерферометра.

1.3.14. Пролетит ли стержень через щель, или столкнется с плоскостью не зависит от того, из какой системы отсчета наблюдается этот процесс.

С точки зрения неподвижного наблюдателя очевидно, что стержень, длина которого меньше, чем ширина щели l , свободно пролетит через нее. Поскольку по условию задачи стержень параллелен плоскости, то оба конца пролетят через щель одновременно.

С точки зрения наблюдателя, связанного со стержнем, длина стержня L больше, чем ширина щели l , но в системе стержня иначе определяется одновременность событий, одновременные для системы неподвижного наблюдателя, в системе стержня происходят тем раньше, чем дальше они смещены вперед:

$$t' = \frac{t - Vr_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Таким образом, прохождение стержнем щели в системе самого стержня совершается не одновременно, как в системе неподвижного наблюдателя, а в разные моменты времени: для переднего конца раньше. То есть стержень в своей системе отсчета наклонен по отношению к плоскости, за счет чего плоскость пролетает мимо него, не задевая стержень краями щели.

1.3.15. Положим $c = 1$. В ответах скорость света будет вновь восстановлена из соображений размерности. Энергия частиц имеет вид

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + \mathbf{p}_1^2 c^2} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2}, \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + \mathbf{p}_2^2 c^2} = \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}$$

Скорость системы центра инерции (СЦИ) \mathbf{V} определим с помощью преобразования Лоренца для суммарного вектора 4-импульса, описывающего переход от лабораторной системы к СЦИ, учитывая, что в этой системе

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 = \gamma(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{V}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)),$$

т. е.

$$\mathbf{V} = c^2 \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

Энергию в СЦИ (т.е. M — эффективную массу) найдем из условия инвариантности четырехмерного скалярного произведения:

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 p_2) = (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')^2 - (\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2')^2 = (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')^2 - M^2,$$

так как в СЦИ $\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0$. В итоге

$$M = [m_1^2 + m_2^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)]^{1/2},$$

$$\mathcal{E} = Mc^2 = [m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 c + \mathbf{p}_2 c)]^{1/2}.$$

В системе отсчета, в которой поконится первая частица ($\mathbf{p}_1' = 0$, $\mathcal{E}_1' = m_1$), имеем

$$(p_1 p_2) = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = \mathcal{E}_2' m_1,$$

т.е. в этой системе отсчета энергия второй частицы равна

$$\mathcal{E}_2' = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - (p_1 p_2)}{m_1} = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - (p_1 p_2) c^2}{m_1 c^2}.$$

По определению относительной скоростью двух частиц называется скорость второй (или первой) частицы в системе отсчета, где первая (или вторая) поконится. Тогда из условия

$$\mathcal{E}_2' = \frac{m_2}{\sqrt{1 - V_{cm}^2}}$$

получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - V_{cm}^2}} = \frac{(p_1 p_2)}{m_1 m_2} = (\gamma_1 \gamma_2),$$

где $\gamma = \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — четырехмерная скорость частицы. Как и должно быть, относительная скорость не зависит от масс частиц, а зависит только от их скоростей. Таким образом,

$$V_{cm} = c \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma_1 \gamma_2)^2}}$$

и является релятивистским инвариантом.

1.3.16. Мы будем считать $c = 1$ и измерять энергию, импульс и массу в одинаковых единицах ГэВ = 10^9 эВ. В ответе скорость света будет восстановлена из соображений размерности.

Хотя набор статистических событий при неподвижной мишени (в силу ее плотности) происходит быстрее, чем при работе ускорителей на встречных пучках, но достижение большой энергии (эффективной



массы) в ускорителе на встречных пучках выгоднее, так как в этом случае энергия не тратится на бесполезное движение центра инерции сталкивающихся частиц, что и показывает сравнение результатов решения задач 1.3.16, 1.3.17 и 1.3.18.

Пусть неподвижная мишень состоит из частиц массы m , как и ускоряемые частицы. Тогда эффективная масса будет равна

$$M = [2m(m + \mathcal{E})]^{1/2} \approx (2m\mathcal{E})^{1/2} \quad (\text{при } \mathcal{E} \gg m),$$

а скорость системы центра инерции

$$V = \frac{p}{m + \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} - m}{\mathcal{E} + m}} \approx 1 - \frac{m}{\mathcal{E}} \quad \text{при } \mathcal{E} \gg m.$$

Если восстановить в последней формуле скорость света, то получим

$$\frac{V}{c} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} - mc^2}{\mathcal{E} + mc^2}} \approx \left(1 - \frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right) \quad \text{при } \mathcal{E} \gg mc^2,$$

- $m = 1 \text{ ГэВ}, \mathcal{E} = 70 \text{ ГэВ}, Mc^2 = 12 \text{ ГэВ}, V/c = 1 - 0.014;$
- $m = 1 \text{ ГэВ}, \mathcal{E} = 1000 \text{ ГэВ}, Mc^2 = 45 \text{ ГэВ}, V/c = 1 - 0.001;$
- $m = 1 \text{ ГэВ}, \mathcal{E} = 7000 \text{ ГэВ}, Mc^2 = 118 \text{ ГэВ}, V/c = 1 - 0.000143.$

1.3.17. Положим $c = 1$. В случае встречных пучков

$$M = [m_1^2 + m_2^2 + 2(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + p_1P_2)]^{1/2} \approx 2(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2)^{1/2} \quad \text{при } \mathcal{E}_1 \gg m_1, \mathcal{E}_2 \gg m_2,$$

$$V = \frac{p_1 - p_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \approx \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \quad \text{при } \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \gg m_1m_2,$$

и конкретно, $M = 2\sqrt{800 \cdot 30} \approx 310 \text{ ГэВ}, \frac{V}{c} = \frac{800 - 30}{800 + 30} = 0.92$.

1.3.18. Положим $c = 1$. Из условия $(p_1p_2) = \mathcal{E}^2 + p^2 = m\mathcal{E}'$ получаем

$$\mathcal{E}' = \frac{(\mathcal{E}^2 + p^2)}{m} \approx \frac{2\mathcal{E}^2}{m} = 98 \cdot 10^3 \text{ ТэВ}.$$

1.3.19. Проверим выполнение обязательной связи энергии, импульса и массы $\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, т.е.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 &= m_{\perp}^2 \operatorname{ch}^2 \alpha - m_{\perp}^2 \operatorname{sh}^2 \alpha - p_y^2 - p_z^2 = \\ &= m_{\perp}^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2. \end{aligned}$$

$$v_x = \frac{p_x}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} = \operatorname{th} \alpha.$$

1.3.20. Закон сохранения четырехмерного импульса дает соотношение: $\rho = k_1 + k_2$, где ρ , k_1 , k_2 — 4-импульсы π -мезона и двух γ -квантов. Так как $((k_1 - k_2)\rho) = k_1^2 - k_2^2 = 0$, то $(k_3\rho) = (k_2\rho)$. Кроме того, из закона сохранения проекции импульса на ось y , перпендикулярную импульсу π -мезона, следует, что $|k_{1y}| = |k_{2y}|$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1(1 - v/c \cos \alpha) = \varepsilon_2(1 - v/c \cos \beta), \\ \varepsilon_1 \sin \alpha = \varepsilon_2 \sin \beta, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$v = c \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Время жизни π -мезона есть время жизни в его системе покоя, т. е.

$$\tau = \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{c} \frac{\sqrt{\sin \alpha \sin \beta}}{\cos \frac{(\alpha + \beta)}{2}}$$

1.3.21. Имеем соотношение $\rho = p_1 + p_2$. Возведя в квадрат и полагая $c = 1$, получим

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \left(\sqrt{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)} - (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \right).$$

В обычных единицах трехмерные импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 надо разделить на c , чтобы получить размерность массы.

1.3.22. Имеем соотношение $\rho = p_1 + p_2$. Отсюда $p_1 = \rho - p_2$ и, возводя в квадрат ($c = 1$), получим

$$m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2 \left(\sqrt{(\mathbf{p}^2 + m^2)(\mathbf{p}_2^2 + m_2^2)} - (\mathbf{p} \mathbf{p}_2) \right).$$

В обычных единицах трехмерные импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 надо разделить на c , чтобы получить размерность массы.

1.3.23. Закон сохранения 4-импульса дает $\rho = p_1 + p_2$. Возведем это равенство в квадрат ($c = 1$) и получим уравнение

$$m^2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \cos \theta),$$

которое необходимо решить совместно с законом сохранения энергии $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \xi$, что приводит к следующему результату:

$$\frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{m^2}{4\varepsilon_1(\xi - \varepsilon_1)} = \frac{m^2}{4\xi^2 \varepsilon_1(1 - x)}.$$



где $x = \varepsilon_1/E$. Максимум функции $x(1-x)$ будет достигаться при $x=1/2$, т.е. при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = E/2$. Отсюда

$$\sin^2 \frac{\theta_{\text{max}}}{2} = \frac{m^2}{E^2} = 1 - V^2, \quad \text{т.е.} \quad \cos \frac{\theta_{\text{max}}}{2} = \frac{V}{c}$$

1.3.24. Положим $c = 1$. Поскольку $\varepsilon_0 \gg m$ и $M \gg m$, то $\varepsilon_0 \approx |\mathbf{p}_0|$, и задача фактически сводится к задаче о комптон-эффекте на неподвижной частице массы M .

Введя обозначения для 4-импульсов частиц: \mathbf{k}_0 , \mathbf{k} — импульсы рассеиваемой частицы до и после рассеяния, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы ядра до и после столкновения, получаем закон сохранения 4-импульса системы:

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{p}'$$

Перенося \mathbf{k} в левую часть равенства и возводя в квадрат, получим

$$(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 = \mathbf{p}'^2,$$

откуда следует, что

$$M^2 + 2(k_0 p) - 2(k p) - 2(k_0 k) = M^2,$$

и потому $(k p) + (k k_0) = (k_0 p)$, т.е. $eM + e\varepsilon_0(1 - \cos \theta) = \varepsilon_0 M$. В итоге получаем

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 M}{M + \varepsilon_0(1 - \cos \theta)} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{M c^2}(1 - \cos \theta)}$$

1.3.25. Закон сохранения 4-импульса дает равенство $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Возводя данное соотношение в квадрат, найдем массу образовавшейся частицы:

$$M = \left[m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^{1/2}$$

Скорость этой частицы есть скорость центра инерции сталкивающихся частиц:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{E_1/c + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

1.3.26. Введем обозначения для 4-импульсов частиц: \mathbf{k}_0 , \mathbf{k} — импульсы рассеиваемой частицы до и после рассеяния, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы ядра до и после возбуждения. Получаем закон сохранения 4-импульса системы: $\mathbf{k}_0 + \mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{p}'$, откуда (предполагая, что $c = 1$) имеем

$$(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 = M^2 + 2Me - 2Me' - 2e\varepsilon'(1 - \cos \theta) = \mathbf{p}'^2 = (M + \Delta E)^2$$

Так как частица ультрарелятивистская, то для нее можно считать, что $\underline{k}_0^2 = \underline{k}^2 \approx 0$, т. е. $\epsilon_0 \approx |\underline{p}_0|$, $\epsilon \approx |\underline{p}|$. Таким образом, находим

$$\epsilon' = \frac{2Mc + M^2 - (M + \Delta E)^2}{2(M + \epsilon(1 - \cos\theta))} \approx \frac{\epsilon - \Delta E}{1 + \frac{\epsilon}{Mc^2}(1 - \cos\theta)}.$$

1.3.27. Обозначим 4-импульсы частиц следующим образом: $\underline{k}_0, \underline{k}$ — импульсы фотона до и после рассеяния, \underline{p}_0 и \underline{p} — импульсы электрона до и после столкновения и получим закон сохранения 4-импульса системы: $\underline{k}_0 + \underline{p}_0 = \underline{k} + \underline{p}$. Перенося \underline{k} в левую часть и возводя в квадрат, находим

$$(\underline{k}_0 + \underline{p}_0 - \underline{k})^2 = \underline{p}^2,$$

откуда

$$(\underline{k}\underline{p}_0) + (\underline{k}\underline{k}_0) = (\underline{k}_0\underline{p}_0), \quad \text{или}$$

$$\epsilon(E_0 - cp_0 \cos\theta_0) + \epsilon(\epsilon_0 - \epsilon_0 \cos\theta) = \epsilon(E_0 - cp_0 \cos\theta_0).$$

Здесь θ — угол между импульсами падающего и рассеянного фотона, а θ_0 — угол между импульсом рассеянного фотона и импульсом первоначального электрона. Тогда имеем

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0(E_0 - cp_0 \cos\theta_0)}{E_0 - \cos\theta_0 cp_0 + \epsilon_0(1 - \cos\theta)}.$$

При $p_0 = 0$, $E_0 = mc^2$ получаем формулу для энергии рассеянного фотона на покоящемся электроне (см. также задачу 1.3.24).

1.3.28. Обозначим 4-импульсы частиц: $\underline{k}, \underline{k}'$ — импульсы фотона до и после рассеяния, \underline{p} и \underline{p}' — импульсы электрона до и после столкновения. Запишем закон сохранения 4-импульса: $\underline{p} + \underline{k} = \underline{p}' + \underline{k}'$ и, возводя в квадрат, найдем, что

$$(\underline{p} + \underline{k} - \underline{k}')^2 = \underline{p}^2, \quad \text{или} \quad (\underline{p}\underline{k}') + (\underline{k}\underline{k}') = (\underline{p}\underline{k}).$$

Обозначив через θ угол рассеяния фотона, получим (полагая $c = 1$)

$$\epsilon' = \frac{\epsilon(E + p)}{E + \epsilon + (p - \epsilon)\cos\theta} \approx \frac{2Ep}{\epsilon + \epsilon - \left(\epsilon - \frac{m^2}{2E} - \epsilon\right)\cos\Delta} \approx \frac{\epsilon}{1 + \frac{m^2}{4E\epsilon} + \frac{E}{4\epsilon}\Delta^2}.$$

Мы использовали здесь условие $E \gg m$ и малость угла $\Delta = \pi - \theta$ (условие $\Delta \ll 1$ означает, что рассеянные фотонны летят в основном вдоль начального импульса электрона).

Энергия рассеянного кванта будет максимальна при $\Delta = 0$, т. е. при головом столкновении и рассеянии кванта «назад» (строго по пучку электронов). Энергия фотона при этом равна

$$\varepsilon' = \frac{E}{1 + \frac{m_e^2 c^2}{4 E^2}} \approx 172 \text{ ГэВ} \gg \varepsilon.$$

Отсюда видно, что в случае ультрарелятивистских электронов происходит существенное «ужесточение» квантования света.

1.3.29. Положим $c = 1$. Энергия нейтрино ε_0 в системе центра инерции определяется из уравнения $p_{0\pi} = p_{0\nu} + p_{0\mu}$, из которого следует условие

$$(p_{0\pi} - p_{0\mu})^2 = E_{0\mu}^2.$$

т. е. $m_\pi^2 - 2m_\pi\varepsilon = m_\mu^2$. Окончательно находим

$$\varepsilon_0 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 31 \text{ МэВ.}$$

Таким образом, в системе центра инерции энергия нейтрино фиксируется и связана с массами остальных частиц (для любых углов вылета нейтрино).

В лабораторной системе отсчета энергию нейтрино можно найти при помощи преобразования Лоренца:

$$\varepsilon = \gamma \varepsilon_0 (1 + v \cos \theta_0), \quad \text{где} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Здесь $v = p_\pi/\varepsilon_\pi$ — начальная скорость π -мезона. Мы видим, что в лабораторной системе энергия нейтрино зависит от θ_0 — угла между импульсами нейтрино и начального π -мезона. Энергия может изменяться в пределах

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 (1 - v) \gamma < \varepsilon < \varepsilon_0 (1 + v) \gamma = \varepsilon_{\max},$$

причем в условиях нашей задачи

$$\varepsilon_{\min} = 0.40 \text{ МэВ}, \quad \varepsilon_{\max} = 2666 \text{ МэВ} \quad (\gamma_\pi = 43).$$

В системе покоя π -мезона условие распределение нейтрино изотропно, т. е.

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2} |d \cos \theta_0| \frac{d\varphi_0}{2\pi},$$

где N_0 — полное число нейтрино, $dN = dN(\theta_0, \varphi_0)$ — число нейтрино, импульсы которых лежат в телесном угле $d\Omega_0$.

Из соотношения $\varepsilon = \gamma \varepsilon_0 (1 + v \cos \theta_0)$ следует, что $d\varepsilon = \gamma \varepsilon_0 d\cos \theta_0$. Учитывая, что $d\varphi_0 = d\varphi$, так как при лоренци-преобразовании компонента импульса нейтрино, поперечная по отношению к направлению скорости π -мезона, не изменяется, и, интегрируя по $d\varphi$, получаем распределение нейтрино по энергиям в лабораторной системе отсчета.

$$\frac{dN_\nu}{N_0} = \frac{1}{2\pi \gamma \varepsilon_0} d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}.$$

Поскольку правая часть данного выражения не зависит от энергии нейтрино, то равновероятны любые значения ε на интервале $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$.

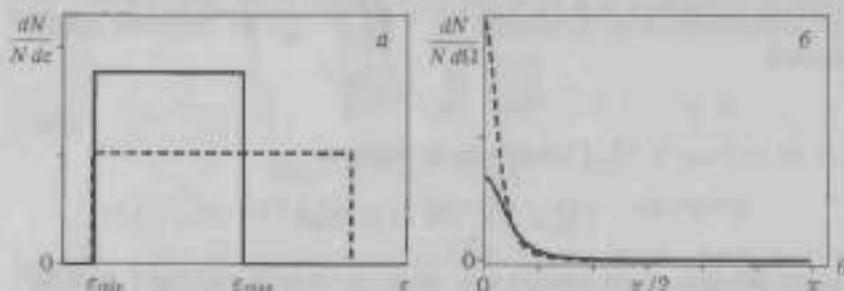


Рис. 1.4. Энергетическое (а) и угловое (б) распределение нейтрино, вылетающих при распаде π -мезона. Солидная линия отвечает $\gamma_\mu = 3$, штрихованная линия соответствует $\gamma_\mu = 5$

Поэтому распределение по энергиям в лабораторной системе имеет ступенчатый характер (рис. 1.4, а). Ступенчатость энергетического спектра продуктов двухчастичного распада движущейся нестабильной частицы — это характерное свойство двухчастичного распада. Среднее значение энергии легко находится:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\min} + \varepsilon_{\max}}{2} = 1333 \text{ МэВ.}$$

Нетрудно убедиться в том, что полное число нейтрино действительно равно N_0 :

$$\int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \frac{dN_\nu}{N_0} = \frac{1}{2\pi \gamma \varepsilon_0} \int_{\varepsilon_0(1-v)}^{\varepsilon_0(1+v)} d\varepsilon = 1.$$

Направляя ось x лабораторной системы отсчета вдоль скорости π -мезона и совершая обратное преобразование Лоренца, получаем

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon(1 - v \cos \theta)\gamma, \\ p_{0x} = \varepsilon_0 \cos \theta = \varepsilon(\cos \theta - v)\gamma, \end{cases}$$

откуда следует связь между углами:

$$\frac{d\Omega}{\Omega_0} = \cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - v}{1 - v\cos\theta}, \quad d\cos\theta_0 = \frac{d\cos\theta}{(1 - v\cos\theta)^2}.$$

Учитывая эту связь и исходя из (изотропного) распределения по углам в системе пиона, получаем распределение нейтрино по углам уже в лабораторной системе:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v/c\cos\theta)^2} \frac{d\Omega}{4\pi},$$

причем здесь мы восстановили скорость света c . Нетрудно проверить очевидное условие

$$\int \frac{dN}{N_0} = \int \frac{1 - v^2}{(1 - v\cos\theta)^2} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1 - v^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - vx)^2} = 1,$$

где $x = \cos\theta$.

Заметим, что угловое распределение нейтрино в лабораторной системе имеет резко анизотропный характер: наблюдается так называемый проекционный эффект (рис. 1.4, б). Вследствие закона сохранения импульса основная часть вылетающих нейтрино сосредоточена в узком конусе, ось которого направлена вдоль начального импульса пиона. Данный конус имеет раствор $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - v^2} \sim m_\tau/\varepsilon_\tau$. Полученное нами анизотропное угловое распределение, сильно вытянутое вдоль скорости распадающейся частицы, характерно именно для безмассовых вторичных частиц, к которым относится и нейтрино.

1.3.30. Поскольку γ -квант, как и нейтрино, является безмассовой частицей, угловое распределение γ -квантов находится способом, полностью аналогичным рассмотренному в задаче 1.3.29.

1.3.31. Из закона сохранения 4-импульса $\underline{p}_K = \underline{p}_\pi + \underline{p}_\nu + \underline{p}_\rho$ следует (при $c = 1$):

$$(\underline{p}_K - \underline{p}_\rho)^2 = m_K^2 + m_\rho^2 - 2\varepsilon_\rho m_K = (\underline{p}_\pi + \underline{p}_\nu)^2.$$

Заметим, что 4-вектор $(\underline{p}_\pi + \underline{p}_\nu)$ времениподобен. Действительно, в системе центра инерции пиона и нейтрино

$$(\underline{p}_\pi + \underline{p}_\nu)^2 = (\underline{p}'_\pi + \underline{p}'_\nu)^2 = (\varepsilon'_\pi + \varepsilon'_\nu)^2 > 0.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{\max} = \frac{m_K^2 + m_\rho^2 - (\underline{p}'_\pi + \underline{p}'_\nu)^2}{2M_K}.$$

но, поскольку $m_\nu = 0$, то $(\underline{p}_\pi + \underline{p}_\nu)^2_{min} = (\mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_\nu)_{min}^2 = m_\pi^2$, т.е.

$$\mathcal{E}_{\nu, \text{min}} = \frac{m_K^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - m_\nu^2 c^2}{2m_\pi}.$$

Аналогично получаем:

$$\mathcal{E}_{\pi, \text{max}} = \frac{m_K^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - m_\nu^2 c^2}{2m_K}, \quad \mathcal{E}_{\nu, \text{max}} = \frac{m_K^2 c^2 - (M_\pi + m_\nu)^2 c^2}{2m_K},$$

причем в окончательных формулах мы везде восстановили множитель c^2 .

1.3.32. В системе единиц, в которой $c = 1$, эффективная масса системы — это энергия в системе центра инерции. Минимальная энергия в системе центра инерции — суммарная энергия покоя всех частиц. Таким образом мы считаем, что конечные частицы покоятся в системе центра инерции.

Поэтому, если обозначить массу протона как m_p , а массу частицы π как m_π , то минимальная энергия в системе центра инерции, при которой может родиться пара $\pi\bar{\pi}$, — это $2(m_\pi + m_p)$. С другой стороны энергия в системе центра инерции выражается через квадрат суммарного 4-импульса $\underline{p}_1 + \underline{p}_2$, где \underline{p}_1 и \underline{p}_2 — четырехмерные импульсы начальных частиц. Таким образом,

$$4(m_\pi + m_p)^2 \leq (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 p_2) = 2m_p^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2).$$

$$2(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2 \leq \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2.$$

Поскольку перед столкновением вторая частица покончилась, то $\mathcal{E}_2 = m_p$, $\mathbf{p}_2 = 0$. В этом случае получаем минимальное значение энергии налетающей частицы, а также соответствующий порог реакции:

$$\mathcal{E}_1 \geq \frac{2(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2}{m_p}, \quad T = \mathcal{E}_1 - m_p c^2 = \frac{2m_\pi c^2 (m_\pi + 2m_p)}{m_p},$$

причем в последнем равенстве мы восстановили множитель c :

- a) $m_p = m_\pi = 1 \text{ ГэВ}$, $T = 6 \text{ ГэВ}$
- б) $m_p = 1 \text{ ГэВ}$, $m_\pi = 2 \text{ ГэВ}$, $T = 16 \text{ ГэВ}$
- в) $m_p = 1 \text{ ГэВ}$, $m_\pi = 4 \text{ ГэВ}$, $T = 48 \text{ ГэВ}$.

1.3.33. Положим $c = 1$. Пренебрегая потенциальной энергией взаимодействующих частиц, находим, что минимальная энергия мюона и антимюона в системе центра инерции на большом расстоянии друг от друга равна $2m_\mu$. Энергия в системе центра инерции выражается через квадрат суммарного 4-импульса $\underline{p}_1 + \underline{p}_2$ начальных частиц:

$$4m_\mu^2 \leq (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 p_2) = 2m_\mu^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2).$$

$$2m_\mu^2 - m_\mu^2 \leq \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2.$$



В случае встречных пучков $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = E_{\text{центр}}$, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1^2 = \mathcal{E}_{\text{центр}}^2 - m^2$. Минимальная энергия начальной частицы и порог реакции равны

$$2m_\mu^2 - m_e^2 \leq \mathcal{E}_{\text{центр}}^2 + \mathbf{p}_1^2 = 2\mathcal{E}_{\text{центр}}^2 - m_e^2,$$

$$\mathcal{E}_{\text{центр}} \geq m_e, \quad T_{\text{центр}} = (m_\mu - m_e)c^2.$$

В случае неподвижной мишени вторая частица вначале покончится, поэтому $\mathcal{E}_2 = m_e$, $\mathbf{p}_2 = 0$, следовательно

$$2m_\mu^2 - m_e^2 \leq \mathcal{E}_1 m_e, \quad \mathcal{E}_1 \geq 2\frac{m_e^2}{m_\mu} - m_e, \quad T_{\text{центр}} = \frac{2(m_\mu - m_e)c^2}{m_e} = 40 \text{ ГэВ}.$$

1.3.34. Пусть $c = 1$. Записываем закон сохранения 4-импульса:

$$\underline{\mathbf{p}}_1 + \underline{\mathbf{p}}_2 = \underline{\mathbf{p}}'_1 + \underline{\mathbf{p}}'_2$$

т.е. в системе покоя мишени (2-й частицы) начальные и конечные 4-импульсы первой и второй частиц имеют вид

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{p}}_1 = (\mathcal{E}, \mathbf{p}), \\ \underline{\mathbf{p}}_2 = (m, 0), \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{p}}'_1 = (\mathcal{E} - \varepsilon, \mathbf{p}'_1), \\ \underline{\mathbf{p}}'_2 = (m + \varepsilon, \mathbf{p}'_2). \end{cases}$$

Из условия $(\underline{\mathbf{p}}_1 - \underline{\mathbf{p}}'_1)^2 = (\underline{\mathbf{p}}_2 - \underline{\mathbf{p}}'_2)^2$ следует, что $(\underline{\mathbf{p}}_1 \underline{\mathbf{p}}'_1) = (\underline{\mathbf{p}}_2 \underline{\mathbf{p}}'_2)$ или

$$\mathcal{E}(\mathcal{E} - \varepsilon) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'_1 \cos \theta = m(m + \varepsilon).$$

Поскольку $\mathbf{p} = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$, $\mathbf{p}'_1 = \sqrt{(\mathcal{E} - \varepsilon)^2 - m^2}$, то получаем

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{(\mathcal{E} + m)(\mathcal{E} - \varepsilon - m)}{(\mathcal{E} - m)(\mathcal{E} - \varepsilon + m)}} = \sqrt{\frac{(\mathcal{E} + mc^2)(\mathcal{E} - \varepsilon - mc^2)}{(\mathcal{E} - mc^2)(\mathcal{E} - \varepsilon + mc^2)}}$$

причем в последней формуле мы восстановили скорость света c . Определим, что $\theta \sim 1^\circ$.

В системе центра инерции первой и второй частиц имеем

$$(\underline{\mathbf{p}}_1 \underline{\mathbf{p}}'_1) = (\underline{\mathbf{p}}_{10} \underline{\mathbf{p}}'_{10}),$$

и это означает, что $m(\mathcal{E} - \varepsilon) = \mathcal{E}_0^2 + \mathbf{p}_{10}^2 \cos \theta_0$, следовательно,

$$\cos \theta_0 = \frac{m(\mathcal{E} - \varepsilon) - \mathcal{E}_0^2}{\mathbf{p}_{10}^2}$$

Определим \mathcal{E}_0 из условия $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$ в системе центра инерции, а также учитывая $(\underline{\mathbf{p}}_1 + \underline{\mathbf{p}}_2)^2 = (\underline{\mathbf{p}}_{10} + \underline{\mathbf{p}}_{20})^2$, т. е. $2m^2 + 2m\mathcal{E} = (2\mathcal{E}_0)^2$, откуда имеем

$$\mathcal{E}_0^2 = \frac{m(\mathcal{E} + m)}{2}, \quad \mathbf{p}_{10}^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2 = \frac{m(\mathcal{E} - m)}{2}.$$



И в итоге получаем

$$\cos \theta_0 = 1 - 2 \frac{v}{E-m} = 1 - 2 \frac{v}{E-mc^2}.$$

В последней формуле восстановлена скорость света c . Согласно оценкам $\theta_0 \sim 2^\circ$

1.3.35. Скорость ультрарелятивистской частицы v в лабораторной системе выражается через скорость системы центра инерции (СЦИ) V и скорость частицы в СЦИ v_0 по формулам сложения скоростей (мы полагаем, что $c = 1$, θ_0 — угол рассеяния частицы в СЦИ):

$$v \cos \theta = \frac{v_0 \cos \theta_0 + V}{1 + v_0 V \cos \theta_0}, \quad v \sin \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0 \sqrt{1 - V^2}}{1 + v_0 V \cos \theta_0},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0 \sqrt{1 - V^2}}{v_0 \cos \theta_0 + V}$$

Заметим, что в частном случае, когда $v_0 = 1$ (или $v_0 = c$ — в обычной системе единиц), данная формула описывает явление aberrации, т. е. изменения угла наклона световых лучей при переходе между инерциальными системами отсчета.

Скорость СЦИ будет равна (с учетом $E \gg m$)

$$V = \frac{E}{E+m} = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \approx 1 - \frac{m}{E}, \quad \sqrt{1-V^2} \approx \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

Считая далее, что $v_0 = 1$, $V \approx 1$ (нас интересуют ультрарелятивистские частицы), находим

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{2m}{E}} \frac{\sin \theta_0}{1 + \cos \theta_0} = \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2},$$

где мы восстановили скорость света c . Последняя формула будет несправедлива в узком интервале углов

$$\pi - \delta \leq \theta_0 < \pi, \quad \text{где} \quad \delta \leq \sqrt{\frac{mc^2}{E}},$$

т. е. угол θ_0 не должен быть близок к π .

1.3.36. Положим $c = 1$. Обозначим массу возбужденного ядра $M^* = M + \epsilon$, где M — масса невозбужденного ядра. Закон сохранения 4-импульса дает соотношение $p^* = p + k$, где p^* , p , k — 4-импульсы возбужденного ядра, невозбужденного ядра и γ -кванта.

1) Энергия испущенного γ -кванта. Переносим \underline{k} в левую часть равенства и возводим в квадрат, получаем

$$M^{*2} - 2M^* \varepsilon_\gamma = M^2,$$

где ε_γ — энергия испущенного γ -кванта. Поэтому получаем

$$\varepsilon_\gamma = \frac{M^{*2} - M^2}{2M^*} = \frac{(M^* - M)(M^* + M)}{2M^*} = \frac{\varepsilon(2M + \varepsilon)}{2M + \varepsilon} \approx \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2Mc^2}\right).$$

Таким образом, энергия излученного γ -кванта ε_γ меньше величины энергии возбуждения, так как часть энергии тратится на отдачу ядра массы M .

2) Энергия отдачи ядра. В выражении для закона сохранения 4-импульса перенесем \underline{p} в левую часть равенства и возведем в квадрат,

$$(\underline{p}^* - \underline{p})^2 = M^{*2} + M^2 - 2\underline{e}'_M M^* = \underline{k}^2 = 0,$$

т. е. кинетическая энергия, сообщенная ядру, равна

$$\underline{e}'_M = \frac{(M^* - M)^2}{2M^*} = \frac{\varepsilon^2}{2M} \approx \frac{\varepsilon^2}{2Mc^2}.$$

3) Скорость возбужденного ядра. Вначале рассмотрим процесс возбуждения налетающим γ -квантом покоящегося ядра, находящегося в основном состоянии. Чтобы возбудить такое ядро, необходима энергия γ -кванта, большая, чем энергия возбуждения ε , так как часть ε будет потрачена на энергию движения образовавшегося возбужденного ядра. Таким образом, закон сохранения 4-импульса теперь будет иметь вид $\underline{k}' + \underline{p} = \underline{p}^*$, где \underline{k}' — 4-импульс налетающего γ -кванта. Отсюда следует, что $(\underline{k}' + \underline{p})^2 = \underline{p}^{*2}$, т. е.

$$2\underline{e}'_M M + M^2 = M^{*2}, \quad \text{откуда} \quad \underline{e}'_M = \frac{M^{*2} - M^2}{2M} = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2Mc^2}\right).$$

Далее мы будем считать, что исходное возбужденное ядро движется, и его 4-импульс $\underline{p}^{**} = (\underline{E}^{**}, \underline{p}^{**})$. Начальная скорость возбужденного ядра должна быть такой, чтобы γ -квант, испущенный им, имел энергию ε'_γ . Из закона сохранения 4-импульса $\underline{p}^{**} = \underline{p} + \underline{k}'$ следует, что $(\underline{p}^{**} - \underline{k}')^2 = \underline{p}^{*2}$, т. е.

$$M^{*2} - 2\underline{e}'_M (\underline{E}^{**} - (\underline{p}^{**} \cdot \underline{n}')) = M^2, \quad \text{где} \quad \underline{n}' = \underline{k}' / |\underline{k}'|.$$

Очевидно, что наиболее выгодным является излучение γ -кванта в направлении движения возбужденного ядра, т. е.

$$M^{*2} - 2\underline{e}'_M (\underline{E}^{**} - |\underline{p}^{**}|) = M^2.$$

Отсюда получаем

$$\gamma^*(1 - V^*) = \frac{1 - V^*}{1 + V^*} = \frac{M^{*2} - M^2}{2e^* M^*}, \quad V^* = \frac{M^{*2} - M^2}{M^{*2} + M^2} > \frac{\varepsilon}{M\varepsilon}.$$

Легко видеть, что минимальная скорость возбужденного ядра должна быть в точности такой, чтобы после испускания γ -кванта в направлении вперед ядро остановилось.

Выше во всех окончательных формулах восстановлена скорость света c .

1.3.37. Положим $\varepsilon = 1$. При β^+ -распаде ядра происходит реакция



где N — число нейтронов в ядре, Z — число протонов, e^+ — позитрон, ν_e — электронное нейтрино, A — число нуклонов в ядре. Закон сохранения 4-импульса для этой реакции записывается в виде

$$\underline{p}_Z = \underline{p}_{Z-1} + \underline{p} + \underline{k}, \quad \text{где } \underline{p}_Z, \underline{p}_{Z-1}, \underline{p}, \underline{k}$$

— 4-импульсы ядер, позитрона и нейтрино соответственно. Отсюда имеем $(\underline{p}_Z - \underline{k})^2 = (\underline{p}_{Z-1} + \underline{p})^2$, т. е.

$$M_Z^2 - 2M_Z\varepsilon = (\underline{p}_{Z-1} + \underline{p})^2.$$

Таким образом, максимальная энергия нейтрино оказывается равной

$$\varepsilon_{\max} = \frac{M_Z^2 - (\underline{p}_{Z-1} + \underline{p})_{\max}^2}{2M_Z} = \frac{M_Z^2 - (M_{Z-1} + m)^2}{2M_Z}$$

(см. задачу 1.3.31), где M_T , M_{Z-1} , m — массы первоначального и дочернего ядер, а также позитрона.

Масса ядер определяется числом протонов и нейтронов и их энергией связи по формуле Вайзенберга:

$$M_Z = m_p Z + m_n (A - Z) - \alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z^2}{A^{5/3}} + \varepsilon \frac{(A/2 - Z)}{A}.$$

Энергия связи в нулевом приближении пропорциональна числу нуклонов в ядре A и не зависит от их заряда (член $\sim -\alpha A$). Энергия связи уменьшается на величину энергии поверхностного напряжения ($\delta A^{2/3}$) и энергии кулоновского растягивания протонов (каждый из Z протонов взаимодействует с остальными $Z-1$, т. е. кулоновские силы не насыщаются, в отличие от ядерных (см. первое слагаемое), в пропорциональны $Z(Z-1) \sim Z^2$ и обратно пропорциональны радиусу ядра $R \sim A^{1/3}$. Имеется также тенденция к симметрии: ядра с $Z = A/2$ наиболее устойчивы (большая энергия связи). Этот эффект учитывается наличием в форму-

и Вайцзеккера члена $\gamma(A/2 - Z)^2/A$. Из-за принципа Паули взаимодействие нейтронов с протонами больше, чем нейтронов с нейтронами и протонов с протонами, т.е. при данном A образование системы из $Z = A - N$ выгоднее, чем при $Z \neq N$.

Используя формулу Вайцзеккера, получаем

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{(M_Z - M_{Z-1} - m)(M_Z + M_{Z-1} + m)}{2M_Z} \approx M_Z - M_{Z-1} - m = \\ = -(m_n - m_p) - m_e + \gamma \frac{2Z-1}{A^{1/3}} + \gamma \frac{2Z-1-A}{A}.$$

В данной задаче первоначальное и дочернее ядра являются зеркальными, т.е. у них число $|A - 2Z|$ одинаково. Например, у ядра $^{13}\text{N}^7$ — 7 протонов, 6 нейронов, поэтому $A - 2Z = -1$; у дочернего ядра $^{13}\text{C}^6$ — 6 протонов, 7 нейронов, и, следовательно, $A - 2Z = 1$. Аналогично, для ядра $^{15}\text{O}^8$ величина $A - 2Z = -1$, а для $^{15}\text{N}^7$ $A - 2Z = 1$.

Поэтому для ядер $^{13}\text{N}^7$ и $^{15}\text{O}^8$ значение величины $2Z - A - 1 = 0$, и симметричный член не вносит вклада в общий результат. Чтобы найти коэффициент γ в кулоновском члене, будем считать заряд ядра Ze равномерно распределенным по шару радиуса $R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см). Плотность заряда в ядре:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4/3\pi R^3}, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Электростатический потенциал ядра имеет вид

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], & r < R, \\ Ze/r, & r > R. \end{cases}$$

Кулоновская энергия взаимодействия протонов в ядре:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3e^2 Z^2}{5r_0 A^{1/3}} = \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}},$$

т.е. $\gamma = \frac{3e^2}{5r_0} = 0,577$ МэВ. Таким образом,

$$\varepsilon_{\text{max}} = \gamma A^{2/3} - (m_n - m_p) - m_e = \gamma A^{2/3} - 1,8 \text{ МэВ},$$

т.е. $\varepsilon_{\text{max}}^{(N)} = 1,4 \text{ МэВ}$; $\varepsilon_{\text{max}}^{(O)} = 1,7 \text{ МэВ}$. Сравнение с экспериментом дает следующие относительные ошибки:

$$\Delta^{(N)} = \frac{1,7 - 1,4}{1,7} = 0,18; \quad \Delta^{(O)} = \frac{1,9 - 1,7}{1,9} = 0,11.$$

1.4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1.4.1. Выпишем уравнения Максвелла, содержащие временные производные:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}$$

Продифференцируем их по времени:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -c \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Подставим выраженные через исходные уравнения Максвелла производные $\partial \mathbf{H}/\partial t$ и $\partial \mathbf{E}/\partial t$ в правые части уравнений, воспользуемся тождеством $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$ и выразим дивергенции полей через два оставшихся уравнения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \mathbf{H} = 4\pi c \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \mathbf{E} = -4\pi \left(\operatorname{grad} \rho + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

1.4.2. Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ будет выполняться при всех t всегда. Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$ будет выполняться тогда и только тогда, когда исходу выполнено уравнение непрерывности $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Уравнения, включающие дивергенции полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , можно рассматривать не как динамические уравнения, а как уравнения, определяющие начальные условия.

1.4.3. Первая пара в присутствии магнитных монополей:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$$

В задаче 1.4.2 условием выполнения уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$ станет уравнение непрерывности для монополей: $\partial \rho_m / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0$.

1.4.4. Комплексная запись уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 4\pi \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}$$

В присутствии магнитных монополей величины ρ_m и \mathbf{j}_m входят в уравнения как мнимые части ρ и \mathbf{j} , т. е. $\rho = \rho_e + i\rho_m$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_m$. Здесь ρ_e и \mathbf{j}_e — плотности электрических зарядов и токов.

Заметим, что комплексные уравнения Максвелла симметричны (в силу их линейности) относительно одновременного умножения \mathbf{F} , ρ и \mathbf{j} на произвольный ненулевой комплексный множитель. В частности умножение на $-i$ соответствует переходу от тензора $F_{\mu\nu}$ к дуальному тензору $\tilde{F}_{\mu\nu}$:



1.4.5. Первая пара уравнений Максвелла дает тождество. Из второй пары получаем

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta + c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \mathbf{A} + c \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi c \mathbf{j}.$$

1.4.6. Первая пара уравнений Максвелла дает тождество. Из второй пары получаем

$$-\partial_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \text{или} \quad \square A^\mu + \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

1.4.7. В трехмерной записи:

$$\square\varphi = -4\pi\rho, \quad \square\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{где} \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

В четырехмерной записи: $\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, где $\square = -\partial_\nu \partial^\nu$.

$$1.4.8. \Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

$$1.4.9. \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho, \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$1.4.10. \mathbf{A} = -\omega \mathbf{E} + \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}].$$

$$1.4.11. \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} f \quad \text{или} \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f.$$

$$1) \square f = \partial_\mu A^\mu; \quad 2) \Delta f = \operatorname{div} \mathbf{A}; \quad 3) \frac{\partial f}{\partial t} = -c\varphi.$$

$$1.4.12. 1) \square f = 0, \quad 2) \Delta f = 0, \quad 3) \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

1.4.13. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ инвариантен относительно гауссовых преобразований, поэтому единственный член, инвариантность которого надо проверить, — действие взаимодействия:

$$S_{int} = -\frac{1}{c} \int_U A_\mu j^\mu d^4x,$$

где U — четырехмерная область интегрирования в пространстве-времени.

При калибровочных преобразованиях изменяется четырехмерный потенциал: $\delta A_\mu = \partial_\mu f$, вследствие этого происходит изменение действия:

$$\delta S_{int} = -\frac{1}{c} \int_U (\partial_\mu f) j^\mu d^4x = \frac{1}{c} \int_U (-\partial_\mu (f j^\mu) + f \partial_\mu j^\mu) d^4x.$$

Первый член в полученным равенстве является полной 4-дивергенцией, его можно переписать как интеграл по границе области U — трехмерной поверхности ∂U , поэтому

$$\delta S_{int} = -\frac{1}{c} \oint_{\partial U} f j^\mu dV_\mu + \frac{1}{c} \int_U f (\partial_\mu j^\mu) d^4x.$$

Выберем функцию f так, чтобы она обращалась в нуль на границе U . Теперь условие инвариантности действия при калибровочном преобразовании сводится к равенству

$$\delta S_{int} = \frac{1}{c} \int_U f (\partial_\mu j^\mu) d^4x = 0.$$

Это условие должно выполняться для произвольной функции f , обращающейся в нуль на границе области интегрирования. Таким образом, всегда в области интегрирования должно выполняться уравнение непрерывности для зарядов и токов:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

и это является еще одной иллюстрацией теоремы Нетер: инвариантность теории относительно калибровочных преобразований отвечает закон сохранения электрического тока.

1.4.14. В соответствии с формулой (1.13) имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\delta \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{16\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}}{8\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} (\partial_\nu \delta A_\mu - \partial_\mu \delta A_\nu)}{8\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu}{4\pi}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \delta A_\lambda)} &= -\frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi}. \end{aligned}$$

откуда получаем выражение для канонического тензора энергии-импульса:

$$\bar{T}^\mu{}_\nu = -\frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\nu A_\lambda + \delta_\nu^\mu \frac{F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\lambda}}{16\pi}.$$

Тензор $\bar{T}^\mu{}_\nu$ не является калибровочно-инвариантным, поскольку выражение $\partial_\nu A_\lambda$ не является калибровочно-инвариантным.



1.4.15. Естественно попробовать модифицировать тензор $\tilde{T}^{\mu\nu}$ из предыдущей задачи так, чтобы он полностью выражался через тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Для этого надо дополнить выражение $\partial_\nu A_\lambda$ до $\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu$. То есть мы предполагаем, что новый тензор имеет вид

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}}{4\pi} + \delta^\mu_\nu \frac{F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}}{16\pi}, \quad \delta \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\lambda A_\nu.$$

Поднимая второй индекс, получим

$$T^{\mu\nu} = -\frac{F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}}{4\pi} + g^{\mu\nu} \frac{F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}}{16\pi}, \quad \delta T^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\lambda A^\nu.$$

Используя четырехмерную запись уравнений Максвелла и полагая $J^\nu = 0$, провернем, что $\partial_\mu \delta T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}$. (См. также решение задачи 1.4.16). Тензор $T^{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантен в силу того, что выражается через калибровочно-инвариантный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

1.4.16. Дифференцируя тензор энергии-импульса, имеем

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= -\partial_\mu \frac{F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}}{4\pi} + \partial_\nu \frac{F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda}}{16\pi} = \\ &= -\frac{(\partial_\mu F^{\mu\lambda})}{4\pi} F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{\partial_\mu F_{\nu\lambda}}{4\pi} + F^{\mu\lambda} \frac{\partial_\nu F_{\mu\lambda}}{8\pi} = \\ &= -\frac{1}{c} f^\lambda F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{1}{8\pi} (2\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\mu\lambda}) = \\ &= -\frac{1}{c} f^\lambda F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) = -\frac{1}{c} f^\lambda F_{\nu\lambda}, \end{aligned}$$

и это полностью соответствует (1.16). Здесь были использованы уравнения Максвелла. При $\nu = 0$ отсюда можно получить уравнение баланса зарядов, а при $\nu = \mu = 1, 2, 3$ — уравнение баланса импульса (см. (1.17)).

1.4.17. $T^{\mu\nu} = 0$.

1.4.18. Вне тонкого плоского конденсатора электрическое поле $E = 0$. Внутри $E = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда на пластине. Таким образом, если пластины лежат в плоскостях $z = 0$ (положительно заряженная) и $z = a$ (отрицательно заряженная), то электрическое поле и плотность заряда имеют вид

$$\mathbf{E} = 4\pi c e_i \theta(z) \theta(a-z), \quad \rho = \sigma (\delta(z) - \delta(z-a))$$

Здесь $\theta(z)$ — θ -функция Хевисайда (Д.13).

1) На поверхности пластины электрическое поле испытывает скачок, поэтому мы не можем непосредственно воспользоваться формулой для плотности силы $\rho\mathbf{E}$, поскольку произведение данных обобщенных

функций не определено (разрывы δ -функций приходятся как раз на поверхности, на которых локализован заряд). Чтобы доопределить произведение $\rho \mathbf{E}$, можно рассуждать двумя способами.

а) Поле \mathbf{E} представляет собой суперпозицию полей, создаваемых отдельными пластинами, причем силу взаимодействия пластины с собственным полем следует считать равной нулю. Таким образом,

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \sigma \delta(z), \quad \rho_2 = -\sigma \delta(z - a),$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1 = 2\pi\sigma \mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(z), \quad \mathbf{E}_2 = 2\pi\sigma \mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(a - z).$$

Произведения $\mathbf{E}_1 \rho_2$ и $\mathbf{E}_2 \rho_1$ хорошо определены. Давление, действующее на первую пластину, равно

$$P_1 = \int \rho_1 E_{2x} dz = 2\pi\sigma^2.$$

б) Мы можем рассмотреть бесконечно тонкую пластину, как предельный случай пластины конечной толщины d , равномерно заряженной по объему. В этом случае внутри пластины поле будет изменяться линейно от нуля до максимального значения. Регуляризованные таким образом величины имеют вид

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma \mathbf{e}_z \begin{cases} 0, & z < -d, \\ (z + d)/d, & -d \leq z \leq 0, \\ 1, & 0 < z < a, \\ (z - a)/d, & a \leq z \leq a + d, \\ 0, & z > a + d, \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\sigma}{d} (\theta(z + d)\theta(-z) - \theta(z - a)\theta(a + d - z)).$$

Давление, действующее на первую пластину, равно

$$P_1 = \int_{-d}^0 \rho E_z dz = 2\pi\sigma^2.$$

2) Компонента σ_{zz} тензора напряжений Максвелла соответствует давлению (отрицательное давление — это напряжение) вдоль оси z и имеет вид

$$\sigma_{zz} = -\frac{E^2}{8\pi} = -2\pi\sigma^2 \theta(z) \theta(a - z)$$

Перепад давления на поверхности равен давлению, действующему на данную поверхность:

$$P_1 = \sigma_{zz}(0 - \varepsilon) - \sigma_{zz}(0 + \varepsilon) = 2\pi\sigma^2.$$

1.4.19. Ход решения практически полностью совпадает с ходом решения задачи 1.4.18.

Вне длинного соленоида магнитное поле $H = 0$. Внутри $H = (4\pi/c)J$, где J — поверхностная плотность тока в обмотке соленоида. Таким образом, если обмотка лежит на поверхности цилиндра $r = a$ ($r^2 = x^2 + y^2$) и образует правый винт с осью z , то

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} J \mathbf{e}_z \theta(a - r), \quad \mathbf{j} = J \mathbf{e}_z \delta(a - r), \quad \mathbf{E} = (-y/r, x/r, 0).$$

1) На поверхности обмотки магнитное поле испытывает скачок, поэтому мы не можем просто воспользоваться формулой для плотности силы $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$, так как произведение данных обобщенных функций не определено (разрывы δ -функций приходится как раз на поверхности, на которых локализован ток). Чтобы определить произведение $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$, можно рассуждать двумя способами.

а) Поле \mathbf{H} представляет собой суперпозицию полей, создаваемых отдельными участками обмотки, причем сразу взаимодействия участков обмотки с собственным полем следует считать равной нулю. В отличие от задачи 1.4.18 обмотка связана и не может быть естественным образом разбита на два участка. Выделим маленький участок обмотки с размерами много меньше a .

Поле, создаваемое всеми остальными участками на поверхности рассматриваемого участка, будет непрерывным. Сам участок в малой окрестности (много меньше его размеров) создает поле, аналогичное полю бесконечной плоскости, по которой течет однородный поверхностный ток J . Так, если мы выделили участок обмотки вокруг точки $(a, 0, 0)$, то ток на этом участке (в малой окрестности) равен

$$\mathbf{j}_1 = J \mathbf{e}_y \delta(x - a).$$

А создаваемое этим участком поле (в малой окрестности) равно

$$\mathbf{H}_1 = 2\pi J \mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(a - x).$$

Вычитая $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_1$, получаем, что магнитное поле, создаваемое остальными участками шмотки, есть среднее арифметическое между полями внутри и снаружи соленоида.

Произведение $\frac{1}{c} [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}_2]$ хорошо определено. Давление, действующее на обмотку, направлено наружу и равно

$$P_1 = \int_{a-t}^{a+t} j_y H_{2x} dx = \frac{2\pi}{c} J t^2.$$

б) Мы можем рассмотреть бесконечно тонкую обмотку, как предельный случай обмотки конечной толщины d с постоянной плотностью тока. Аналогично заданию 1.4.18, в этом случае внутри обмотки ток меняется линейно от нуля до максимального значения, и мы легко получаем тот же ответ.

2) Компоненты $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ тензора напряжений Максвелла соответствуют давлению вдоль осей x и y :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\mu^2}{8\pi} \Theta(a - r) = \frac{2\pi}{r^2} I^2 \Theta(a - r).$$

Поскольку $\sigma_{xy} = 0$, а $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, в плоскости (x, y) давление изотропно. Переход давления на поверхности задает давление, действующее на данную поверхность:

$$P = \sigma_{yy}(a - \varepsilon) - \sigma_{yy}(a + \varepsilon) = \frac{2\pi}{r^2} I^2.$$

1.5. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНEM ПОЛЕ

1.5.1. Сила, действующая на частицу, есть производная ее импульса по времени:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mv(\mathbf{vv})}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}},$$

а ее мощность соответственно равна

$$(\mathbf{v}\mathbf{F}) = \frac{m(\mathbf{vv})}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}},$$

что совпадает с производной энергии по времени dE/dt . См. также формулы (L19), (L21).

1.5.2. Направим ось z по магнитному полю, а ось y так, чтобы вектор электрического поля лежал в плоскости (y, z) , как показано на рис. 1.5. Тензор электромагнитного поля в нашем случае может быть записан в виде матрицы

$$\rho^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E \sin \theta & -E \cos \theta \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E \sin \theta & H & 0 & 0 \\ E \cos \theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Систему уравнений движения частицы представим в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda \sin \theta & \Lambda \cos \theta \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ \Lambda \sin \theta & -\omega & 0 & 0 \\ \Lambda \cos \theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\Lambda = \frac{eE}{mc}, \quad \omega = \frac{eH}{mc}$$

Поскольку коэффициенты полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений постоянны, решение ищется в виде экспонент, показатели которых находятся из характеристического уравнения

$$\lambda^4 + \lambda^2(\omega^2 - \Lambda^2) - \Lambda^2\omega^2 \cos^2 \theta = 0$$

и равням

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 [I_1 \mp \sqrt{I_1^2 + I_2^2}], \quad (3)$$

где I_1 и I_2 — соответствующие инварианты электромагнитного поля. В общем случае существуют два действительных и два минимых решения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \infty, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\Omega, \quad (4)$$

коный вид которых легко получается из (3). Таким образом, мировая линия частицы зависит только от 4-инвариантов: ее собственного времени и двух инвариантов электромагнитного поля.

Имеется два простейших случая, когда $I_2 = 0$, но $I_1 \neq 0$. В этом случае поды ортогональны, но не равны друг другу. Следовательно, может быть выбрана система отсчета, в которой либо $E \neq 0$, но $H = 0$, либо $E = 0$, но $H \neq 0$. Пусть $E > H$, тогда $\Omega = 0$ и имеются только действительные корни $\lambda_{1,2} = \pm e\sqrt{E^2 - H^2}/(mc)$. Видно, что координаты и время частицы экспоненциально растут с ростом собственного времени частицы. Пусть $H > E$, тогда отличны от нуля только минимые решения $\lambda_{3,4} = \pm i\Omega$. При этом происходит ограниченное движение в плоскости, параллельной плоскости (y, z) , смещающейся в направлении оси x с постоянной скоростью $V = c[E \times H]/H^2$, которая описывает дрейф *ведущего центра орбиты* частицы, представляющей собой окружность с центром на оси x . Угловая скорость частицы равна $\Omega = e\sqrt{H^2 - E^2}/(mc)$.

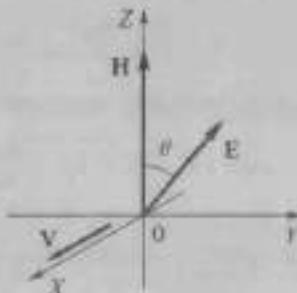


Рис. 1.5. Ориентация магнитного \mathbf{H} и электрического \mathbf{E} полей в декартовой системе координат. Скорость дрейфа \mathbf{V} направлена вдоль оси X

1.5.3. В этом случае $I_2 = 0$ и $I_1 < 0$, поэтому мнимые корни (4) общего решения задачи 1.5.2 $\lambda_{3,4} = 0$, а действительные $\lambda_{1,2} = \pm\Lambda$. Из системы уравнений (1) задачи 1.5.2 следует, что $u_x = u_y = 0$, и, согласно начальным условиям,

$$x(\tau) = \frac{p_{0x}}{m}\tau, \quad y(\tau) = \frac{p_{0y}}{m}\tau. \quad (1)$$

Решение для системы, определяющей две другие компоненты, представим в виде

$$\begin{pmatrix} u_0(\tau) \\ u_1(\tau) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\Lambda\tau} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\Lambda\tau}.$$

Из начальных условий определяем

$$a = \frac{\mathcal{E}_0 + p_{0x}c}{2mc^2}, \quad b = \frac{\mathcal{E}_0 - p_{0y}c}{2mc^2}, \quad \text{где} \quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{e^2 p_0^2 + m^2 c^4}.$$

и получаем для компонент 4-скорости равенство

$$u_0(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \operatorname{ch} \Lambda\tau + \frac{p_{0x}}{mc} \operatorname{sh} \Lambda\tau, \quad u_1(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \operatorname{sh} \Lambda\tau + \frac{p_{0y}}{mc} \operatorname{ch} \Lambda\tau. \quad (2)$$

Выполнив еще раз интегрирование в (2) с учетом начальных условий, находим уравнения траектории в параметрическом виде:

$$t(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \Lambda\tau + \frac{p_{0x}}{eE} (\operatorname{ch} \Lambda\tau - 1), \quad (3)$$

$$x(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} (\operatorname{ch} \Lambda\tau - 1) + \frac{e p_{0x}}{eE} \operatorname{sh} \Lambda\tau. \quad (4)$$

Из уравнения (3) выражаем τ через t :

$$\tau = \frac{mc}{eE} \ln \left\{ \frac{eEt + p_{0x} + \sqrt{(eEt + p_{0x})^2 + m^2 c^2 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{\mathcal{E}_0/c + p_{0x}} \right\}.$$

Подставляя это соотношение в (4) и (1), находим законы движения в трехмерной форме:

$$x(t) = \frac{e}{eE} \left\{ \sqrt{(eEt + p_{0x})^2 + m^2 c^2 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{E} \right\}, \quad (5)$$

$$y(t) = \frac{e p_{0x}}{eE} \ln \left\{ \frac{eEt + p_{0x} + \sqrt{(eEt + p_{0x})^2 + m^2 c^2 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{\mathcal{E}_0/c + p_{0x}} \right\}, \quad (6)$$

закон движения по оси y , т. е. $y(t)$ получается аналогично закону $x(t)$ заменой $p_{0x} \rightarrow p_{0y}$ в множителе перед логарифмом.

При малых значениях p_0 и t , т.е. при $p_0 \ll mc$ и $eE t \ll mc$ оказывается, что $t = \tau$, и выражения (5) и (6) переходят в законы нерелятивистского движения в однородном электрическом поле:

$$z(t) = \frac{p_{0z}}{m} t + \frac{eE}{2m} t^2, \quad x(t) = \frac{p_{0x}}{m} t.$$

Если с момента начала движения прошло достаточно большое время, т.е. $t \gg mc/(eE)$, то скорость частицы становится близкой к скорости света c , даже если начальная скорость была мала. Законы движения в этом пределе:

$$z(t) = ct - \frac{mc^2}{eE},$$

$$x(t) = \frac{cp_0}{eE} \ln \frac{2eEt}{mc}$$

Движение вдоль оси z под действием однородного электрического поля при $p_{0z} = p_{0y} = 0$ (см. формулу (5) и рис. 1.6) называется *гиперболическим движением*.

1.5.4. В отличие от предыдущей задачи здесь $I_1 > 0$, поэтому $\omega = 0$, а мнимые корни (4) общего решения задачи 1.5.2 определяются частотой $\Omega = \omega$. Теперь сохраняются компоненты 4-скорости u_0 и u_3 , и при этом зависимости $I(\tau)$ и $z(\tau)$ имеют вид

$$I(\tau) = \frac{E_0}{mc^2} \tau, \quad z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m} \tau = \frac{p_{0z}^2}{\epsilon_0} I. \quad (1)$$

Как видим, собственное время частицы и время в лабораторной системе отсчета имеют разный масштаб, но связаны между собой линейно: время в лабораторной системе отсчета течет быстрее.

Для компонент 4-скорости, лежащих в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (поперечные компоненты), имеем

$$\begin{pmatrix} u_x(\tau) \\ u_y(\tau) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\omega \tau} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\omega \tau}.$$

С учетом начальных условий находим

$$u_x(\tau) = \frac{p_{0x}}{mc} \cos \omega \tau + \frac{p_{0y}}{mc} \sin \omega \tau, \quad u_y(\tau) = \frac{p_{0y}}{mc} \cos \omega \tau - \frac{p_{0x}}{mc} \sin \omega \tau.$$

Траектория движения в параметрической форме имеет вид

$$x(\tau) = \frac{cp_{0x}}{eH} \sin \omega \tau + \frac{cp_{0y}}{eH} (1 - \cos \omega \tau),$$

$$y(\tau) = \frac{cp_{0y}}{eH} \sin \omega \tau + \frac{cp_{0x}}{eH} (\cos \omega \tau - 1).$$

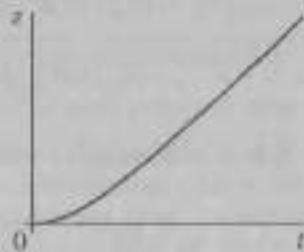


Рис. 1.6. Гиперболическое движение

Решение можно представить в лабораторной системе отсчета, осуществив замену

$$\omega T = \frac{eHc}{\epsilon_0}$$

Траектория частички представляет собой винтовую линию, ось которой параллельна оси z и проходит через точку плоскости (x, y) с координатами $x_0 = c\rho_{0x}/(eH)$, $y_0 = -c\rho_{0y}/(eH)$. Шаг винтовой линии в лабораторной системе отсчета равен $h = 2\pi\rho_{0x}c/(eH)$, и разные вращения: $\rho_0 = c\sqrt{\rho_{0x}^2 + \rho_{0y}^2}/(eH)$. Частота вращения частицы в лабораторной системе отсчета равна $\omega_0 = (eHc)/E_0$.

1.5.5. В этой задаче снова $I_2 = 0$, поэтому, в зависимости от соотношения между величинами полей, можно перейти в систему отсчета, где останется либо электрическое, либо магнитное поле, и свести задачу к одной из двух предыдущих. Однако такой подход требует приведения двукратного преобразования Лоренца, поэтому кажущаяся простота превращается в весьма трудоемкий процесс. Гораздо эффективнее решить задачу сразу в лабораторной системе отсчета.

Положим для определенности $H > E$, тогда $\omega = 0$, а частота равна

$$\Omega = \frac{e}{mc} \sqrt{H^2 - E^2} \equiv \frac{eH'}{mc},$$

где H' — магнитное поле в системе отсчета, движущейся вдоль оси x со скоростью

$$\mathbf{V} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{H^2}. \quad (1)$$

Из системы уравнений (2) задачи 1.5.2 следует, что $\dot{a}_x = 0$, и согласно начальным условиям имеем

$$a_x(\tau) = \frac{\rho_{0x}}{mc}, \quad z(\tau) = \frac{\rho_{0x}}{m}\tau.$$

Для системы уравнений, определяющих оставшиеся три компоненты, остается одно действительное собственное значение ($\omega = 0$) и два комплексных ($\pm i\Omega$). Определив соответствующие собственные векторы, запишем решение для компонент 4-скорости в виде

$$\begin{pmatrix} u_0(\tau) \\ u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \Lambda/\omega \\ 0 \end{pmatrix} + a_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega/\Lambda \\ i\Omega/\Lambda \end{pmatrix} e^{i\Omega\tau} + a_- \begin{pmatrix} 1 \\ \omega/\Lambda \\ -i\Omega/\Lambda \end{pmatrix} e^{-i\Omega\tau}.$$

Учитывая начальные условия, получим

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\omega^2(E_0 - p_{0x}V)}{mc^2\Omega^2} - \frac{\Lambda\omega(E_0V - c^2p_{0x})}{mc^2\Omega^2} \cos\Omega\tau - \frac{\Lambda p_{0y}}{mc\Omega} \sin\Omega\tau, \\ u_y(\tau) &= \frac{\omega}{mc^2\Omega} \left(E_0 \frac{V}{c} - cp_{0x} \right) \sin\Omega\tau + \frac{p_{0y}}{mc} \cos\Omega\tau, \\ u_z(\tau) &= \frac{\Lambda\omega(E_0 - p_{0x}V)}{mc^2\Omega^2} - \frac{\omega^2}{mc^2\Omega^2} \left[\left(E_0 \frac{V}{c} - cp_{0x} \right) \cos\Omega\tau + \frac{\Lambda cp_{0y}}{\omega} \sin\Omega\tau \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Проводя дальнейшее интегрирование, получаем выражения, определяющие траекторию частицы в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \left(\frac{H}{H'} \right)^2 \left\{ \frac{(E_0 - p_{0x}V)}{mc^2} \tau - \frac{V}{c} \left[\frac{E_0V - c^2p_{0x}}{ec^2H'} \sin\Omega\tau + \frac{p_{0y}}{eH} (\cos\Omega\tau - 1) \right] \right\}, \\ y(\tau) &= \left(\frac{H}{H'} \right)^2 \left\{ \frac{V}{c} \frac{E_0 - p_{0x}V}{mc^2} \tau - \left[\frac{E_0V - c^2p_{0x}}{ec^2H'} \sin\Omega\tau + \frac{p_{0y}}{eH} (\cos\Omega\tau - 1) \right] \right\}, \\ z(\tau) &= \frac{H}{H'} \left[\frac{E_0V - c^2p_{0x}}{ec^2H'} (1 - \cos\Omega\tau) + \frac{p_{0y}}{eH} \sin\Omega\tau \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для проекции Φ -скорости на ось x мы получили слагаемое, не зависящее от времени, которое определяет скорость дрейфа *ведущего центра* орбиты частицы. Заметим также, что отношение H/H' есть лоренцевский фактор, определяющий преобразование координат при переходе из лабораторной системы в систему отсчета, движущуюся относительно нее со скоростью (1) , в которой отлично от нуля только магнитное поле, равное по величине H .

Переход к случаю $E > H$ осуществляется простой заменой $\Omega \rightarrow i\omega$, $\cos\Omega\tau \rightarrow \sin\Omega\tau$ и $\sin\Omega\tau \rightarrow i\sin\Omega\tau$.

1.5.6. В этом случае оба инварианта электромагнитного поля равны нулю и соответствующая система уравнений движения оказывается вырожденной. Поэтому решение удобно получить предельным переходом $E \rightarrow H$, исходя из результатов, полученных в задаче 1.5.5.

Положим $H = E\sqrt{1 + \delta^2}$, $H^2 = E^2 - E^2\delta^2$, $\Omega = \Lambda\delta$. Выполним предельный переход $\delta \rightarrow 0$ в выражениях (3) задачи 1.5.5, получаем

$$\begin{aligned} ct &= \frac{E_0}{mc} \tau + \frac{eEp_{0y}}{2mc} \tau^2 + \frac{(eE)^2}{6(mc)} (E_0 - p_{0x}c) \tau^3, \\ x &= \frac{p_{0x}}{m} \tau + \frac{eEp_{0y}}{2mc} \tau^2 + \frac{(eE)^2}{6(mc)} (E_0 - p_{0x}c) \tau^3, \\ y &= \frac{p_{0y}}{m} \tau + \frac{eE}{2(mc)^2} (E_0 - p_{0x}c) \tau^2, \quad z = \frac{p_{0z}}{m} \tau \end{aligned}$$

1.5.7. Поскольку оба инварианта электромагнитного поля отличны от нуля, получаем два действительных и два чисто минимых собственных значений, при этом структура системы уравнений такова, что она распадается на две независимых подсистемы:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_r \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\rho \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\rho \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1)$$

Первая подсистема в точности совпадает с подсистемой системы уравнений, определяющей движение частицы в электрическом поле. Таким образом, для кинетической энергии частицы получаем

$$T(r) = mc^2(u_0(r) - 1) = mc^2(\cosh \Lambda r - 1).$$

1.5.8. Как видно из системы уравнений (1) предыдущей задачи, наша задача сводится к задаче о движении частицы в однородном постоянном электрическом поле для определения $U(r)$ и $z(r)$ и к задаче о движении частицы в однородном постоянном магнитном поле для определения $x(r)$ и $y(r)$. Однако, в отличие от задачи 1.5.4 теперь простого соотношения между собственным временем частицы и временем в лабораторной системе отсчета нет, и оно определяется из первой подсистемы, как в задаче 1.5.3.

1.5.9. Согласно соотношениям (2) задачи 1.5.5 с учетом начальных условий нашей задачи имеем

$$T(r) = \begin{cases} mc^2 \frac{E^2}{H^2 - E^2} (1 - \cos \Omega t) & \text{при } E < H, \\ mc^2 \frac{E^2}{E^2 - H^2} (\cosh \Lambda r - 1) & \text{при } E > H. \end{cases}$$

1.5.10. Запишем уравнение, определяющее изменение энергии частицы в трехмерной форме:

$$\frac{dE}{dt} = -|e|(Ev) = -|e|Ec \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2},$$

или, что то же самое:

$$\frac{E \, dE}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}} = -|e|cE \, dt.$$

Поскольку $mc^2 \leq E \leq E_0$, то для полного времени торможения получаем

$$t_{\text{тре}} = \frac{1}{|e|cE} \sqrt{E_0^2 - (mc^2)^2} \approx \frac{T_0}{|e|cE},$$

где $T_0 = E_0 - mc^2$ — начальная кинетическая энергия частицы. В однородном поле сила, действующая на частицу, постоянна, поэтому ее работа по торможению частицы до полной остановки, равная кинетической энергии частицы, есть

$$|e|Et = T_0, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{T_0}{|e|E}.$$

Этот очевидный результат также полезно получить из уравнений движения. Поскольку $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$, а импульс имеет отличную от нуля только z -компоненту, имеем

$$\frac{dp}{dt} = -|e|E, \quad p(t) = p_0 - |e|Et,$$

откуда получаем уравнение

$$v = \frac{dz}{dt} = c \frac{p_0 - |e|Et}{\sqrt{(mc)^2 + (p_0 - |e|Et)^2}},$$

Пронтегрировав данное уравнение в пределах $0 \leq t \leq t_{\text{тре}}$, находим необходимое выражение для $t = z(t_{\text{тре}}) - z(0)$.

1.5.11. Время жизни частицы определяется в системе отсчета, в которой она покойится. Число пионов, не успевших распасться к моменту собственного времени τ , определяется экспоненциальным законом радиоактивного распада:

$$N(\tau) = N(0)e^{-\tau/\tau_0}, \quad N(\tau_{1/2}) = \frac{1}{2}N(0),$$

где τ_0 — время жизни пионов, а $\tau_{1/2} = \tau_0 \ln 2$ — период полураспада.

Промежутки собственного времени и времени в лабораторной системе отсчета связаны соотношением $d\tau = dt \sqrt{1 - (v/c)^2}$ (см. (1.2)), поэтому необходимо найти временную зависимость скорости частицы в лабораторной системе. Движение пиона в линейном ускорителе определяется уравнением движения в постоянном однородном электрическом поле, поэтому, аналогично предыдущей задаче имеем

$$\begin{aligned} z = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt &= \int_0^t \frac{mc^2}{E(t)} dt = \int_0^t \frac{mc^2 dt}{\sqrt{(p_0 + |e|Et)^2 + (mc)^2}} = \\ &= \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{cp(t) + E(t)}{cp_0 + E_0}. \end{aligned}$$

где p_0 и E_0 — соответственно импульс и энергия пиона в начальный момент времени, $p(t) = p_0 + |e|Et$.

Из результатов предыдущей задачи видно, что длина пробега частицы определяется изменением ее энергии:

$$l = x(t) - x(0) = \frac{1}{|e|E} (\mathcal{E}(t) - E_0),$$

поэтому время полураспада и длина ускорителя L (длина пробега пиона), связаны соотношением:

$$\tau_{1/2} = \tau_0 \ln 2 = \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{cp(T) + E(T)}{cp_0 + E_0},$$

где $\mathcal{E}(T) = L|e|E + E_0$.

Согласно начальным условиям, пion, являющийся в ускоритель, значительнее нерелятивистским: $cp_0 \sim E_0 \approx mc^2$, соответственно, $\mathcal{E}(T) \gg E_0$, поэтому в формулах можно считать $cp(T) \approx \mathcal{E}(T) \approx |e|L\bar{E}$. Получаем

$$\tau_0 \ln 2 \approx \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{\mathcal{E}(T)}{mc^2},$$

откуда находится необходимая величина ускоряющего электрического поля E :

$$E \approx \frac{mc}{|e|\tau_0 \ln 2} \ln \frac{\mathcal{E}(T)}{mc^2} \approx 0.6 \cdot 10^4 \text{ CGSE} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ В/см.}$$

Длина ускорителя при этом должна быть равна

$$L \approx \frac{\mathcal{E}(T)}{|e|E} \approx 1.1 \cdot 10^3 \text{ см} = 1.1 \text{ км.}$$

1.5.12. Колебания происходят с тремя частотами:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{eH}{2mc}\right)^2 \pm \frac{eH}{2mc}}, \quad \omega_3 = \omega_0.$$

Частота $\omega_3 = \omega_0$ соответствует колебаниям взадоль поля. Частоты $\omega_{1,2}$ соответствуют вращениям по окружности в плоскости, перпендикулярной полю в одну и в другую сторону. Большая из частот соответствует направлению вращения, соответствующему правилу Ленца (направление тока связано с направлением поля левым винтом).

1.5.13. Продифференцируем вектор \vec{A} по времени и примем во внимание, что в центральном поле момент импульса сохраняется ($\mathbf{M} = 0$)

$$\dot{\vec{A}} = Ze^2 \left(\frac{\vec{q}}{r} - \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times \vec{p}) \right) - \frac{1}{\mu} [\vec{p} \times \mathbf{M}].$$



Учитывая, что $\dot{\rho} = -Ze^2r/r^3$ и подставляя определение момента импульса, получаем, что правая часть равенства обращается в ноль.

1.5.14. Введем цилиндрическую систему координат, ось z , которой совпадает с осью провода, причем направление оси z задается направлением тока. Запишем второй закон Ньютона для частицы в магнитном поле:

$$\ddot{v} = \frac{eC}{\epsilon_0} [v \times H], \quad H = \frac{2f}{\epsilon_0 r} n_r, \quad |n_r| = 1.$$

Здесь энергия частички $E = \text{const}$, поскольку магнитное поле не совершает работы.

Прочитав это уравнение на направление n_r , получаем

$$\ddot{z} = \frac{eCH}{\epsilon_0} \dot{\rho} = \frac{2ef}{\epsilon_0} \dot{\rho}.$$

Интегрируя данное равенство, получаем закон сохранения:

$$z - \frac{2ef}{\epsilon_0} \ln \rho = \text{const}.$$

В начальный момент времени скорость частиц параллельна проводу (знак скорости в начальный момент может быть определен из условия, что частица удалается от провода под действием магнитного поля), т. е. частица со скоростью, параллельной n_r , находится на расстоянии r от оси провода. В момент наибольшего удаления от провода скорость частицы остается прежней по абсолютной величине, она снова параллельна проводу, но направлена в обратную сторону.

$$-v_0 - \frac{2ef}{\epsilon_0} \ln r = v_0 - \frac{2ef}{\epsilon_0} \ln R$$

Знаки, с которыми входит скорость v_0 в линейное тождество, можно проверить, исходя из того, что $r < R$. Отсюда

$$\frac{R}{r} = \exp\left(\frac{v_0 \epsilon_0}{ef}\right) = \exp\left(\frac{p_0 C}{ef}\right).$$

1.5.15. Будем подавать, что магнитное поле мало изменяется за время оборота частицы τ , движущейся по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению однородного магнитного поля H , т. е. выполняется условие $\tau |dH/dt| \ll H$. Это означает, что $\tau \ll T$, где T — время, за которое поле H изменяется существенно (на величину порядка H).

В основу наших расчетов положим уравнения движения частицы и электромагнитного поля (без учета излучения частицы). В уравнениях

поле мы положим $\rho = 0$ и $j = 0$, считая, что в области движения частицы внешние заряды и токи отсутствуют:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = eE + \frac{c}{\epsilon} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \\ \frac{dE}{dt} = \sigma(\mathbf{v}E), \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1)$$

Данные уравнения мы будем решать методом последовательных приближений с учетом малости изменения поля \mathbf{H} .

В нулевом приближении мы пренебрегаем индукционным электрическим полем, считая, что магнитное поле однородное и постоянное, т. е.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \\ \partial \mathbf{H} / \partial t = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \text{const}, \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \\ \frac{dE}{dt} = 0; \text{ т. е. } E = \text{const}. \end{cases} \quad (2)$$

Из формул (2) с учетом $p = E\mathbf{v}/c^2$ получаем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{ev}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

Решая данное уравнение с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, находим

$$\mathbf{v} = \frac{ev}{c} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}] + \mathbf{v}_0 = \frac{ev}{c} [\mathbf{r} \times \mathbf{H}]. \quad (3)$$

В последнем равенстве мы положили $\mathbf{v}_0 = \frac{ev}{c} [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{H}]$, и это означает, что мы поместили начало координат в центр круговой траектории. Из соотношения (3) легко получаем

$$\mathbf{r} = \frac{c}{ecl} [\mathbf{H} \times \mathbf{v}], \quad \text{откуда} \quad R = \frac{cv}{eclH} = \frac{cp_L}{eH} \quad (4)$$

— радиус круговой траектории частицы.

В первом приближении мы учитываем индуцированное внешнее электрическое поле, но не учитываем производимое им индукционное магнитное поле. Тогда в системе (2) произойдут изменения:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \end{cases} \quad \frac{dE}{dt} = e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \quad (5)$$

Уравнение для $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ решаем по аналогии с уравнением $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ при $\mathbf{H} = \text{const}$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right] + \nabla f = \frac{H}{2c} [\mathbf{r} \times \mathbf{h}], \quad (6)$$

так $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$. Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ следует, что $\Delta f = 0$. Поэтому скалярная функция f — решение уравнения Лапласа — может быть только функцией времени $f = f(t)$, и это значит, что $\nabla f = 0$.

Оценки порядков величин. Убедимся в том, что напряженность электрического поля \mathbf{E} , полученная нами в (6), — действительно величина первого порядка малости по параметру v/T .

$$E \sim \frac{Hv}{Tc} \sim \frac{v\tau}{cT} H \ll H,$$

так мы учли, что $v \sim \omega r$. Индукционное магнитное поле H_i имеет порядок величины

$$H_i \sim \frac{1}{cT} v \sim \frac{v\tau}{cT} E \ll E \ll H,$$

что и оправливает наше приближение.

Адиабатический инвариант. Итак, из уравнения (5) имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{eH}{2c} (\mathbf{v}(\mathbf{r} \times \mathbf{h})) = \frac{H}{2c} \frac{e}{m} v^2, \quad (7)$$

где мы учли соотношение (3). В итоге, поскольку $\mathbf{p} = \mathbf{E}\mathbf{v}/c^2$, из выражения (7) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dt},$$

откуда следует, что

$$\frac{p^2}{H} - \frac{p_{\perp}^2}{H} = J = \text{const}.$$

Мы получили **адиабатический инвариант** — величину, сохраняющуюся приблизительно при медленном изменении магнитного поля.

Применение полученных формул. 1) Изменение энергии частицы за период вращения находится по формуле:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \tau = \frac{e\tau}{eH} J \frac{dH}{dt}.$$

2) Приращение энергии и радиуса вращения частицы при изменении магнитного поля от H_1 до H_2 :

$$E_2 - E_1 = \sqrt{c^2 J H_2 + m^2 c^4} - \sqrt{c^2 J H_1 + m^2 c^4} = \frac{J}{2m} (H_2 - H_1),$$

если $v/c \ll 1$. И, наконец, для радиуса вращения (4) с учетом $R = \frac{c}{e} \sqrt{\frac{T}{H}}$ находим

$$R_2 - R_1 = \frac{e\sqrt{T}}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{H_2}} - \frac{1}{\sqrt{H_1}} \right), \quad \text{или} \quad \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$$

1.5.16. Для заряженной нерелятивистской частицы в магнитном поле уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\mathbf{r} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})], \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор частицы, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — ее скорость. Будем считать, как и в задаче 1.5.15, что в области движения частицы отсутствуют внешние источники (заряды и токи), отсутствует электрическое поле ($\mathbf{E} = 0$), и для напряженности магнитного поля выполняются соотношения (следующие из уравнений Максвелла)

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, поле предполагается постоянным, но неоднородным; напряженность поля зависит от пространственных координат. Движение заряженной частицы в таком поле складывается из трех видов движения: быстрого вращения вокруг магнитной силовой линии (ларморова прессии), движения вдоль силовой линии и медленного дрейфа в направлениях, перпендикулярных к силовым линиям. Переход к *приближению ведущего центра* (*дрейфовому приближению*) означает выделение среди всех видов движения ларморова вращения и усреднение уравнений движения по периоду вращения частицы. В результате такого усреднения получается простое уравнение, описывающее движение некоторой эффективной частицы (фактически, ларморова кругового тока), координата которой в каждый момент времени совпадает с положением центра ларморовской круговой траектории (*ведущий центр*).

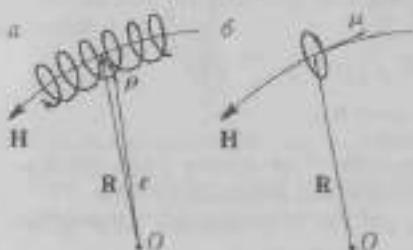


Рис. 1.7. Приближение ведущего центра для движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

Такая частица осуществляет быстрое движение вдоль силовых линий и медленный дрейф — в перпендикулярном направлении (рис. 1.7).

Введем очевидные обозначения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho, \quad \text{причем } (\rho \mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}$$

Здесь вектор \mathbf{R} называется радиус-вектором ведущего центра орбиты, $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ — скорость ведущего центра, ρ — радиус ларморовской окружности, который, вообще говоря, может меняться в неоднородном поле (рис. 1.7, а). Для выполнения усреднения уравнения (1) необходима



слабая неоднородность поля, поле должно мало изменяться на расстояниях, сравнимых с радиусом круговой орбиты, и скорость движения частицы по круговой орбите v_\perp также должна мало изменяться за время $\sim \tau$, где $\tau = 2\pi/\omega$ — период вращения. (Для движения по окружности $\omega = eH/(mc)$, $v_\perp = v_\parallel/\omega$.) Таким образом, должны выполняться условия

$$\frac{\rho}{L} = \varepsilon \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{\tau}{T} \ll 1,$$

где L — характерное расстояние, на котором существенно (на величину $\sim H$) меняется поле, а T — характерное время, за которое ведущий центр смешается на L .

Производим разложение $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ по степеням ρ с линейной точностью по ε :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\rho \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R}), \quad (2)$$

далее нигде будем опускать аргумент \mathbf{R} и считать, что $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}$. Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\rho} &= \frac{e}{mc} \{ [\dot{\rho} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] + [\ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \} \approx \\ &\approx \frac{e}{mc} \{ [\dot{\rho} \times \mathbf{H}] + [\ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}] + [\dot{\rho} \times (\rho \nabla) \mathbf{H}] + [\ddot{\mathbf{R}} \times (\rho \nabla) \mathbf{H}] \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Второе слагаемое в правой части (3) содержит $(\ddot{\mathbf{R}})_\perp = \mathbf{V}_\perp$ — скорость дрейфа частицы, которая перпендикулярна полю \mathbf{H} . Предварительно будем считать, что $V_\perp/v \sim \varepsilon$, т. е. полагаем, что данное отношение мало. Это подтверждается в дальнейшем. Оценка порядков величин слагаемых в уравнении (3) дает

$$\frac{\dot{\rho}}{\tau^2} + \frac{L}{T^2} \sim \frac{\omega\rho}{\tau} + \frac{\omega L}{T} \varepsilon + \frac{\omega L \rho}{TL} + \frac{\omega \rho^2}{\tau L}.$$

Элементарный анализ показывает, что нулевое приближение по ε обеспечивают первые слагаемые в левой и в правой частях уравнения, а остальные представляют собой поправки, линейные по ε .

Главный член дает просто движение частицы в однородном магнитном поле по круговой траектории: $\ddot{\rho} = -\omega[\rho \times \mathbf{h}]$. Интегрируя это уравнение, находим

$$\dot{\rho} = \omega[\rho \times \mathbf{h}]$$

При усреднении по периоду зарядовой пропессии члены, линейные по ρ , уходят: $\ddot{\rho} \approx \ddot{\bar{\rho}} \approx \ddot{\bar{\rho}} = 0$, а также $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$. В итоге имеем

$$\ddot{\mathbf{R}} \approx \frac{e}{mc} \{ [\dot{\rho} \times \mathbf{H}] + [\rho \times (\rho \nabla) \mathbf{H}] \}.$$

Последнее слагаемое в точности соответствует средней силе, действующей на магнитный диполь в слабонеоднородном магнитном поле, которая была получена в задаче 1.6.13. Используя результат этой задачи, находим

$$\bar{\mathbf{R}} \approx \frac{e}{mc} [\bar{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{m} (\mu \nabla) \mathbf{H}. \quad (4)$$

$$\mu = \frac{1}{2c} [\rho \times \bar{\rho}] = \frac{e\omega}{2c} [\rho \times [\rho \times \mathbf{h}]] = -\frac{e\omega}{2c} \rho^2 \mathbf{h}.$$

Средний магнитный момент ларморова тока частицы вне зависимости от знака заряда (шапомним, что $\omega \sim e$) направлен против поля: ларморов ток — элементарный диполемагнетик. Введя обозначение $\hat{\mathbf{P}} = m\bar{\mathbf{R}}$, приводим (4) к виду

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{H}] + (\mu \nabla) \mathbf{H},$$

Данное уравнение по смыслу существенно отличается от уравнения (1), либо оно описывает движение ведущего центра, т.е. эффективной частицы (с радиус-вектором $\bar{\mathbf{R}}$), причем второе слагаемое в правой части уравнения представляет собой силу, действующую на магнитный момент в неоднородном магнитном поле (рис. 1.7, б).

Далее, с требуемой нам точностью мы должны считать²⁵, что $\mathbf{V} = -\mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_\perp \approx \hat{\mathbf{V}}_0 \approx \mathbf{v}_0$, так как $|\mathbf{V}_\perp| / |\mathbf{V}_\parallel| \sim |V_\perp / T| \cdot |T / v| \sim V_\perp / v \sim \epsilon \ll 1$. Поэтому, преобразуя левую часть уравнения (4), получаем

$$\hat{\mathbf{V}} \approx \mathbf{v}_0 = \frac{d(\mathbf{h}v_0)}{dt} \approx v_0 \mathbf{h} + v_0 \mathbf{h} \approx v_0 \mathbf{h} + v_0^2 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}, \quad \frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0.$$

Подставив в правую часть уравнения (4) $\mathbf{H} = \mathbf{h}H$, будем иметь

$$v_0 \mathbf{h} + v_0^2 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} \approx \omega |\mathbf{V}_\perp \times \mathbf{h}| - \frac{\omega^2 \rho^2}{2} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{e\omega \rho^2}{2mc} \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla) H. \quad (5)$$

Векторно умножая левую и правую части уравнения (5) на \mathbf{h} и учитывая, что $v_\perp = \omega \rho$, находим

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{v_0^2 + v_0^2/2}{\omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}].$$

Дифференциальный оператор $(\mathbf{h} \nabla) = \partial / \partial \mathbf{h}$ представляет собой производную по естественному параметру (длине) вдоль силовой линии

²⁵ Необходимо заметить, что $\hat{\mathbf{V}}_\perp = d\mathbf{V}_\perp / dt \neq (\hat{\mathbf{V}})_\perp = \mathbf{R}_\perp \times \hat{\mathbf{V}}_0 \approx \mathbf{v}_0 \neq (\hat{\mathbf{V}})_\parallel = \bar{\mathbf{R}}_0$, т.е. $\hat{\mathbf{V}}_\perp$ и $\hat{\mathbf{V}}_0$ являются продольной и поперечной составляющими вектора ускорения.

магнитного поля, вектор \mathbf{h} — единичная касательная к этой линии. Из элементарной геометрии известно, что

$$(\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{r}, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор главной нормали к силовой линии, а r — радиус кривизны силовой линии. Введем единичный вектор бинормали к силовой линии $\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]$ (рис. 1.8) и запишем окончательную формулу для скорости поперечного дрейфа в виде

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{v_\perp^2 + v_z^2/2}{\omega r} \mathbf{b} \quad (7)$$

Скорость поперечного дрейфа, как и предполагалось ранее, мала, поскольку (как следует из (7)) $V_\perp \sim v^2 r/L \sim v \rho/L \sim v \epsilon$. Поперечный (или «разворотный») дрейф возникает вследствие неоднородности магнитного поля, направлен перпендикулярно полю и меняет знак в зависимости от знака заряда.

Скалярно умножая уравнение (5) на \mathbf{h} с учетом $(\mathbf{h}(\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}) = 0$, получаем

$$v_\parallel = -\frac{v_\perp^2}{2H} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{v_\perp^2}{2H v_\perp} \frac{dH}{dt}.$$

В силу того, что $v_\perp^2 + v_z^2 = v^2 = \text{const}$ (энергия частицы строго сохраняется ввиду отсутствия электрического поля), имеем

$$\frac{dv_\perp^2}{dt} = -\frac{dv_\perp^2}{ds} = -\frac{v_\perp^2}{H} \frac{dH}{ds}, \quad \text{откуда} \quad \frac{v_\perp^2}{H} = \text{const}. \quad (8)$$

Последнее равенство в (8) получается в результате решения дифференциального уравнения. Таким образом, показано, что в магнитном поле, медленно меняющемся вдоль траектории частицы, приближенно (по крайней мере с точностью до ϵ^2) сохраняется величина v_\perp^2/H . Мы получили тот же самый адабатический инвариант, что и в магнитном поле, медленно меняющемся во времени (задача 1.5.15).

1.5.17. В первом приближении магнитное поле Земли является полем точечного магнитного диполя \mathfrak{M} , расположенного в ее центре и из правленного примерно взад оси вращения. Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы направление магнитного момента

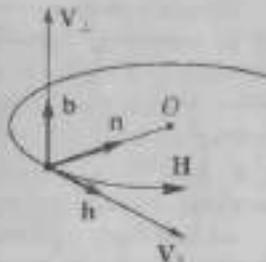


Рис. 1.8. Естественный базис: \mathbf{b} — единичный вектор, касательный к силовой линии, \mathbf{n} — главная нормаль, \mathbf{V}_\perp — бинормаль; точка O — центр кривизны

Земли совпадало с направлением оси z , т. е. $\mathfrak{M} = (0, 0, \mathfrak{M})$ (рис. 1.9)¹⁰. Величину \mathfrak{M} оценим из экспериментально известного значения напряженности магнитного поля Земли на ее поверхности в экваториальной области ~ 0.34 Гс.

Поле магнитного диполя, как известно, описывается формулой

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathfrak{m}(2\mathfrak{M}n) - \mathfrak{M}}{r^3}$$

и имеет в сферической системе координат компоненты (см. решение задачи 1.6.14)

$$H_r = \mathfrak{M} \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad H_\theta = \mathfrak{M} \frac{\sin \theta}{r^3}. \quad (1)$$

На экваторе Земли ($r = R_\oplus \approx 6400$ км при $\theta = \pi/2$, где R_\oplus — радиус Земли) напряженность поля будет равна $H = H_\theta(R_\oplus, \pi/2) = \mathfrak{M}R_\oplus^2$. Отсюда величина магнитного момента $\mathfrak{M} = HR_\oplus^2 \approx 8 \cdot 10^{25}$ Гс · см³.

Элементарная оценка показывает, что влиянием гравитационного поля на движение заряженной частицы в магнитном поле Земли можно пренебречь при кинетической энергии частицы $T = mv^2/2$, большей, чем ~ 1 эВ для протонов и $\sim 10^{-3}$ эВ для электронов ($T > GmM_\oplus/R_\oplus$). Здесь $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см³/(г · с²) — гравитационная постоянная, $M_\oplus = 6 \cdot 10^{27}$ г — масса Земли, $R_\oplus = 6400$ км — ее радиус, m — масса частицы, v — ее скорость.

Дальнейшее рассмотрение задачи будет существенно опираться на дрейфовое приближение, разработанное в задаче 1.5.16. Заметим, что малая абсолютная величина напряженности магнитного поля в околосземном пространстве с существенным запасом компенсируется большой протяженностью поля, поэтому критерии применимости дрейфового приближения оказываются выполненным (в этом можно убедиться далее).

1) Дрейф частицы в экваториальной плоскости. На рис. 1.9 схематически изображена одна из силовых линий магнитного поля Земли (см. решение задачи 1.6.14).

Пусть заряженная частица движется в экваториальной плоскости, т. е. с нулевой проекцией скорости на силовую линию магнитного поля ($\theta = \pi/2$, $v_r = 0$, $v_\perp = v$). Тогда ее движение будет складываться из быстрого вращения вокруг «местной» силовой линии со скоростью

¹⁰ В действительности поверхность магнитного поля Земли противоположна географической, поэтому на рис. 1.9 верхняя точка земного шара отвечает южному географическому полюсу, а нижняя точка — северному.

$v_{\perp} = v = \sqrt{2T/m}$ (T – кинетическая энергия частицы в нерелятивистском случае при $v/c \ll 1$), радиусом орбиты $r = v/\omega$ и периодом $\tau = 2\pi/\omega$ ($\omega = eH/(mc)$) и медленного дрейфа в экваториальной плоскости, перпендикулярно силовым линиям, со скоростью

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{e^2}{2m\eta} [\mathbf{h} \times \mathbf{n}] = \frac{T}{m\omega} [\mathbf{h} \times \mathbf{n}], \quad (2)$$

При $e > 0$ частица (например, протон) дрейфует с востока на запад.

Приведем в качестве примера численные оценки для протона ($m_p c^2 = 940 \text{ МэВ}, e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}$) с энергией $T = 10 \text{ МэВ}$, дрейфующего в экваториальной плоскости на расстоянии $r_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ км}$ от центра Земли. В этом случае напряженность поля Земли $H = 2\Omega/r_0^2 = 3.0 \cdot 10^{-9} \text{ Тс}$, скорость частицы $v = v_{\perp} = e\sqrt{2T/(m_pc^2)} = 0.15c = 4.4 \cdot 10^6 \text{ км/с}$, гармоническая частота $\omega = eH/(m_pc) = 30 \text{ с}^{-1}$, период вращения $\tau = 2\pi/\omega = 0.21 \text{ с}$, радиус гармонической круговой траектории $r = v_{\perp}/\omega = 1500 \text{ км}$.

Для расчета скорости дрейфа (2) необходимо найти радиус кривизны r магнитной силовой линии на экваторе. Воспользуемся для этого формулой (6) задачи 1.5.16 и запишем:

$$\frac{1}{r} = |(\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}| = \left| \frac{d\mathbf{h}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{h}}{d\theta} / \frac{ds}{d\theta} \right|,$$

где изменение угла θ происходит при смещении вдоль силовой линии вблизи экватора, т. е.

$\theta = \pi/2 + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Элемент длины силовой линии (уравнение силовой линии: $r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta$) равен

$$ds = |d\mathbf{l}| = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} \approx r_0 d\theta.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $ds/d\theta|_{\theta=\pi/2} = r_0$. Используем далее формулу (2) задачи 1.6.14 и получим, что единичный вектор вдоль силовой линии $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ при $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ с линейной точностью по ε равен

$$\mathbf{h} \approx -2\varepsilon \mathbf{n}_\theta + \mathbf{n}_\theta \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Из простых геометрических соображений следует, что $d\mathbf{n}_\theta/d\theta = -\mathbf{n}_\phi$. Тот же результат можно получить и прямым расчетом, используя явный вид для компонент вектора \mathbf{n}_θ (см. задачу 1.6.14). Поэтому в целом

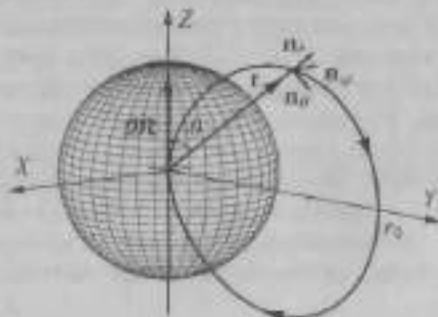


Рис. 1.9. К вопросу о движении заряженных частиц в магнитном поле Земли

из (3) следует, что $d\mathbf{h}/d\theta|_{\theta=\pi/2} = -3\mathbf{n}_z$. В итоге получаем, что радиус кривизны равен $\eta = r_0/3 = 10^4$ км и, следовательно, скорость поперечного дрейфа

$$V_{\perp} = \frac{\Gamma}{m\eta} = 0,009 \text{ с} = 3,3 \cdot 10^3 \text{ км/с},$$

т.е. эта скорость действительно намного меньше скорости ларморовского вращения. При такой скорости частица, дрейфуя, совершил полный оборот вокруг Земли за время $\tau_{\perp} = 2\pi r_0/V_{\perp} = 57$ с, двигаясь с угловой скоростью $\Omega = V_{\perp}/r_0 = 0,11 \text{ с}^{-1}$. Для сравнений, угловая скорость суточного вращения Земли равна $\Omega_0 = 2\pi/\tau_0 \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ($\tau_0 = 24 \text{ ч} = 86400 \text{ с}$), т.е. отношение угловых скоростей $\Omega/\Omega_0 = 1500$.

2) Отражение от зеркальных точек. Из рассмотрения общей задачи о движении заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле (задача 1.5.16) следует, что в рамках нашей задачи существует два интеграла движения. Во-первых, сохраняется энергия частицы E (вследствие отсутствия электрического поля), и это — точный интеграл движения. В первоначальном приближении сохранение энергии сводится к сохранению величины v^2 , т.е. модуля полной скорости частицы. Во-вторых, имеется аддабатический инвариант $I = v_{\perp}^2/H$, наличие которого характерно именно для движения в слабонеоднородном поле, которое рассматривается в дрейфовом приближении. Таким образом, это — приближенный интеграл движения.

На основании этого можно записать для продольной (по отношению к полю) скорости движения частицы следующее соотношение:

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{v^2 - IH}.$$

Это значит, что частица, двигаясь по анитовой траектории вдоль силовой линии, возрастающей по модулю магнитного поля, отражается от области, где $H > v^2/I$. При $v_{\parallel} = 0$ скорость частицы имеет только поперечную компоненту $v_{\perp} = v$, и частица, вращаясь, изменяет знак продольной скорости v_{\parallel} . Это происходит независимо от знака заряда и является следствием сущности силовых линий и, тем самым, появления перпендикулярной к скорости составляющей магнитного поля \mathbf{H}_{\perp} и соответствующей составляющей силы Лоренца

$$\mathbf{F}_A = \frac{e}{c} [\rho \times \mathbf{H}_{\perp}] = \frac{ev_{\perp}}{c} [(\rho \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_{\perp}],$$

В этом и проявляется так называемый эффект «магнитного зеркала», заключающийся в отражении частиц от областей с увеличивающимся значением напряженности магнитного поля. Принцип магнитного зеркала используется для создания магнитных линз для плазмы, фоку-

сировки частиц в ускорителях, электронной оптике и т. д. Для космических частиц магнитной ловушкой является само магнитное поле Земли.

Дело здесь в том, что магнитное поле Земли — неоднородное, причем напряженность поля повышается (снаружи линии сгущаются) по мере приближения к магнитным полюсам (см. рис. 1.11). Частицы, захваченные в такую магнитную ловушку, могут удерживаться в ней довольно долго — они оказываются «запертыми», потому что они совершают физическое движение в некоторой ограниченной области вокруг Земного шара. Так образуются радиационные пояса вокруг Земли, представляющие собой скопления заряженных частиц высокой энергии.

Пусть скорость заряженной частицы в экваториальной плоскости Земли составляет угол α с этой плоскостью. Тогда из сохранения величины v_\perp^2/H , в и формулы (1) получим величину минимального полярного угла θ , достижимого частицей:

$$\frac{v^2 \cos^2 \alpha}{H(\pi/2)} = \frac{v^2}{H(\theta)}, \quad \text{откуда} \quad \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}.$$

При этом частица столкнется с земной поверхностью, если $\theta(\alpha) < \theta_5$, где θ_5 — полярный угол, при котором силовая линия $r = r_0 \sin^2 \theta$ пересекает поверхность Земли, т. е. $R_\Delta/r_0 = \sin^2 \theta_5$, где $R_\Delta = 6400$ км — радиус Земли. Это происходит, если $\alpha > \alpha_5$, где

$$\cos^2 \alpha_5 = \frac{\sin^2 \theta_5}{\sqrt{3 \cos^2 \theta_5 + 1}} = \frac{(R_\Delta/r_0)^2}{\sqrt{4 - 3(R_\Delta/r_0)^2}}.$$

При $r_0 = 3 \cdot 10^4$ км, получаем $\theta_5 = 27^\circ$ при $\alpha_5 = 86^\circ$, соответствующая географическая широта равна $90^\circ - \theta_5 = 63^\circ$.

Таким образом, движение заряженной частицы в магнитном поле Земли (магнитного диполя) можно представить как результат трех движений:

- 1) ларморова вращения вокруг силовой линии;
- 2) осцилляций между северной и южной зеркальными точками;
- 3) дрейфа поперек силовой линии магнитного поля.

1.6. СТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1.6.1. Исходим из известного выражения для гензора квадрупольного момента (1.27)

$$Q_k = \int_V \rho(\mathbf{R})(3\lambda_i\lambda_j - \delta_{ij}\mathbf{R}^2) d^3\mathbf{R}.$$

Введем вспомогательный тензор

$$\tilde{Q}_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{R}) 3X_i X_j d^3\mathbf{R}, \quad \text{т.е.} \quad Q_{ij} = \tilde{Q}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{Q}_{kk}.$$

Заметим, что \tilde{Q}_{ij} ведет себя, как тензор относительно более широкого класса преобразований координат, чем Q_{ij} : помимо поворотов он допускает произвольные линейные преобразования координат, в частности, растяжения.

Расположим оси x, y, z вдоль полуосей эллипсоида a, b, c . Переходим к координатам

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}$$

и получим $\rho' = \rho abc$, причем в новой системе координат эллипсoid выглядит, как шар единичного радиуса. В штрихованных координатах компоненты тензора \tilde{Q}'_{ij} равны

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_{ij} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{Q}'_{kk} = \delta_{ij} \int_{R' < 1} \rho'(\mathbf{R}') \mathbf{R}'^2 d^3\mathbf{R}' = \\ &= \delta_{ij} \rho abc \int_{R' < 1} R'^2 4\pi R'^2 dR' = \delta_{ij} \rho abc \int_{R' < 1} R'^6 d^3\mathbf{R}'. \end{aligned}$$

После вычисления интеграла мы получим

$$\tilde{Q}'_{ij} = \delta_{ij} \rho abc \frac{4\pi}{5} = \frac{3}{5} q \delta_{ij}.$$

В исходных (не штрихованных) координатах для компонент тензора \tilde{Q}_{ij} находим

$$\tilde{Q}_{ij} = \frac{1}{5} q \begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3c^2 \end{pmatrix}.$$

Окончательный результат для тензора Q_{ij} имеет вид

$$Q_{xx} = \frac{2}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad Q_{yy} = \frac{2}{5}(2b^2 - a^2 - c^2), \quad Q_{zz} = \frac{2}{5}(2c^2 - a^2 - b^2),$$

где $q = (4\pi/3)abc\rho$.

1.6.2. Определение поля \mathbf{E} с точностью до четвертого порядка по $1/R$ соответствует определению потенциала с точностью до третьего порядка по $1/R$, т.е. с точностью до квадрупольных членов. Поскольку диф-

полярный момент здлионда относительно центра равен нулю (в силу центральной симметрии распределения зарядов), получаем

$$\varphi(\mathbf{R}) \approx \frac{q}{R} + \frac{Q_0 \lambda_i X_i}{2R^3},$$

$$E_r = -\nabla_r \varphi \approx \frac{q}{R^3} \nabla_r R + 5 \frac{Q_0 \lambda_i X_i}{2R^3} \nabla_r R - \frac{Q_0 \delta_{ii} \lambda_i}{2R^3} - \frac{Q_0 \lambda_i \delta_{ii}}{2R^3} = \\ = \frac{q \lambda_i}{R^3} + 5 \frac{Q_0 \lambda_i X_i}{2R^3} X_i - \frac{Q_0 \lambda_i}{R^3}.$$

Если считать вектор \mathbf{R} столбцом, то на матрично-векторном языке напряженность поля \mathbf{E} будет иметь вид

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{R}}{R^3} + 5 \frac{\mathbf{R}^T Q \mathbf{R}}{2R^3} \mathbf{R} - \frac{Q \mathbf{R}}{R^3}.$$

Мы можем переписать выражение без помощи матриц, если введем единичные собственные векторы \mathbf{e}_i тензора Q и собственные числа λ_i (из задачи 1.6.1 следует, что $\lambda_1 = q/(5(2a^2 - b^2 - c^2))$ и т. д.).

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{R}}{R^3} + 5 \frac{\sum \lambda_i (\mathbf{e}_i \mathbf{R})^2}{2R^3} \mathbf{R} - \frac{\sum \lambda_i (\mathbf{e}_i \mathbf{R}) \mathbf{e}_i}{R^3}.$$

С учетом выбора осей координат вдоль осей здлионда (см. задачу 1.6.1) собственные векторы \mathbf{e}_i — это базисные векторы используемой системы координат. Окончательно получаем

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{R}}{R^3} + 5 \frac{\sum_i \lambda_i X_i^2}{2R^3} \mathbf{R} - \frac{\sum_i \lambda_i X_i \mathbf{e}_i}{R^3}.$$

1.6.3. Выберем ось x вдоль нити. Тогда, учитывая, что $dq = \frac{q}{l} dx$, получаем

$$Q_{yy} = Q_{zz} = \int_{l/2}^{l/2} (3yy - x^2) \frac{q}{l} dx = -\frac{q}{l} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} = -\frac{ql^2}{12},$$

$$Q_{xx} = -Q_{yy} - Q_{zz} = \frac{ql^2}{6}.$$

Недиагональные элементы тензора Q_{ij} равны нулю.

1.6.4. Единственные ненулевые компоненты квадрупольного момента — $Q_{xy} = Q_{yx} = 12qa^2$. Чтобы диагонализовать матрицу, необходимо повернуть систему координат в плоскости (x, y) на угол $\pi/4$. Пусть ось x' проходит через положительные заряды, а ось y' — через отрицательные. Тогда $Q_{x'x'} = -Q_{y'y'} = 12qa^2$, $Q_{x'y'} = Q_{y'x'} = 0$.

1.6.5. Для однородного поля \mathbf{E} могут отличаться от нуля только потенциал φ и его первые производные $\nabla \varphi = -\mathbf{E}$. В мультипольном разложении для энергии (1.29) они взаимодействуют с суммарным зарядом и дипольным моментом, которые для рассматриваемой системы равны нулю. Ответ: 0.

1.6.6. Потенциальная энергия диполя в поле заряда q имеет вид

$$U = -(\mathbf{d}\mathbf{E}) = \frac{q(\mathbf{dR})}{R^3}.$$

Дифференцируя данное выражение, находим силу:

$$\begin{aligned} F_i &= -\nabla_i U = -\nabla_i \frac{qd_i X_3}{R^3} = 3 \frac{qd_i X_3 \lambda}{R^5} - \frac{qd_i}{R^3}, \\ \mathbf{F} &= q \frac{3(\mathbf{dR})\mathbf{R} - \mathbf{dR}^2}{R^5}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{d} = e\mathbf{l}$, где вектор \mathbf{l} направлен от заряда $-e$ к заряду e .

$$1.6.7. \quad \mathcal{E} = \frac{(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) R^3 - 3(\mathbf{d}_1 \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \mathbf{R})}{R^5}$$

1.6.8. Энергия взаимодействия диполей имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{d_{1x} d_{2x} - 3d_{1z} \cos \theta (d_{2x} \sin \theta \cos \varphi + d_{2y} \sin \theta \sin \varphi + d_{2z} \cos \theta)}{R^3}$$

Учитывая явный вид сферических функций:

$$Y_2^{(0)} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad Y_2^{(\pm 1)} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}$$

и имея обозначение $d_{2\pm} = d_{2x} \pm id_{2y}$, получим

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \left\{ \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{d_{1x} d_{2x}}{R^3} Y_2^{(0)} - \frac{d_{1z} d_{2z}}{R^3} Y_2^{(+1)} - \frac{d_{1z} d_{2z}}{R^3} Y_2^{(-1)} \right\}.$$

1.6.9. Представим потенциал взаимодействия в виде

$$V(0, 0, z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z \sqrt{z^2 + a^2}} \right) = V_0 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right].$$

Учитывая условие $r \gg a$, находим приближенное выражение:

$$V(0, 0, z) \approx V_0 \left[\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{7a^4}{8z^4} \right]. \quad (1)$$

Общее выражение для энергии взаимодействия системы зарядов с потенциалом внешнего поля (O_{ijk} — ортогональный момент)

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{R} + \frac{(\mathbf{dr})}{r^2} + \frac{Q_{ijk} X_3}{2r^3} + \frac{O_{ijk; r, r_k}}{6r}$$

при $\theta = 0$, т.е. на оси z , принимает вид

$$V(r, 0) \approx \frac{q}{R} + \frac{d_z}{r^2} + \frac{Q_{zz}}{2r^3} + \frac{O_{zzz}}{6r^4}$$

Сравнивая данное выражение с (1), находим

$$q = 0, \quad d_z = \frac{3}{2}V_0a^3, \quad Q_{zz} = 0, \quad O_{zzz} = -\frac{21}{4}V_0a^4$$

Исходя из аксиальной симметрии и свойства $Q_{zz} = 0$, получаем

$$d_x = d_y = 0, \quad Q_{ij} = 0.$$

Из аксиальной симметрии, полной симметрии октупольного момента относительно перестановок индексов ($O_{iis} = O_{iis} = O_{ijk} = O_{ijk}$) и свойства $O_{ii} = 0$ следует, что у октупольного момента отличны от нуля компоненты O_{zzz} и компоненты

$$O_{zzz} = O_{zzx} = O_{zxx} = O_{yyz} = O_{yzy} = O_{zyz} = -\frac{O_{zz}}{2}.$$

Подставляя $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $y = 0$ (по причине аксиальной симметрии мы можем положить угол $\varphi = 0$) получаем

$$V(r, \theta) \approx \frac{d_z}{r^2} \cos\theta + \frac{O_{zz}}{6r^4} \cos\theta \left(\cos^2\theta - \frac{3}{2}\sin^2\theta \right).$$

1.6.10. При $\beta = 0$ (для равномерно заряженного шара) все мультипольные моменты кроме суммарного заряда обращаются в нуль (это соответствует нулевому порядку по β). Остальные мультипольные моменты создаются распределением зарядов, которое является разностью плотности зарядов сферонда и шара, такое распределение отлично от нуля в тонком слое у поверхности сферы. Объем этой области линеен по β , отсюда следует, что при вычислении интегралов по этой области достаточно определить подынтегральное выражение в нулевом порядке по β , т.е. можно пренебречь отличием координат точки в слое от координат точки на поверхности сферы. Таким образом, мы можем заменить интегрирование по объему интегрированием по поверхности сферы, считая, что на ней имеется поверхностный заряд с плотностью

$$\sigma = \rho R_0 \beta P_2(\cos\theta) = \rho R_0 \beta \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \quad \text{где } \rho = \frac{q}{4\pi R_0^3/3}.$$

$$Q_{zz} = \int \sigma(3x^2 - R_0^2) ds = \int_{-1}^{+1} \rho R_0^2 \beta \frac{1}{2}(3x^2 - 1)^2 2\pi dx = \frac{8}{5}\pi\rho R_0^3 \beta,$$

$$Q_{zx} = \frac{6}{5}qR_0^3\beta, \quad Q_{xy} = Q_{yz} = -\frac{1}{2}Q_{zx}.$$

Заметим, что поверхностная плотность заряда $\sigma(\theta)$ пропорциональна сферической гармонике $Y_1^{(0)}$. Все остальные мультипольные моменты равны нулю (в линейном порядке по β) в силу ортогональности сферических гармоник.

1.6.11. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_2 = \mathbf{H}$, где

$$\mathbf{A}_1 = (0, Hx, 0), \quad \mathbf{A}_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] = \left(-\frac{1}{2} Hy, \frac{1}{2} Hx, 0 \right), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H).$$

Градиентное преобразование не должно изменять наблюдаемых величин — напряженностей электромагнитного поля, поэтому полагаем $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \text{grad } f$ и имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} Hy + \frac{\partial}{\partial x} f, \\ Hx = \frac{1}{2} Hx + \frac{\partial}{\partial y} f, \quad \text{откуда } f = f(x, y) = \frac{1}{2} Hxy + c, \\ 0 = 0 + \frac{\partial}{\partial z} f, \end{cases}$$

1.6.12. Нам надо найти свободное (без источников) магнитное поле, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = -h, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Такое поле определяется неоднозначно. Для уменьшения этой неоднозначности введем дополнительное условие — аксиальную симметрию (симметрию относительно поворотов вокруг оси z на произвольный угол).

Аксиально-симметричное поле удобно описывать в цилиндрической системе координат. При этом компоненты поля не зависят от угла φ :

$$H_r = u(r, z), \quad H_\varphi = v(r, z), \quad H_z = w(r, z).$$

Интеграл по окружности $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ пропорционален $H_z(r, z)$, однако, поскольку $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, этот интеграл должен равняться нулю, таким образом, $H_z \equiv 0$.

Поскольку $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, мы можем искать поле \mathbf{H} , как градиент некоторого скаляра:

$$\mathbf{H} = \text{grad } \psi(r, z)$$

Уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ требует, чтобы скаляр ψ удовлетворял уравнению Лапласа:

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div grad } \psi = \Delta \psi(r, z) = 0.$$

В цилиндрических координатах получаем

$$\Delta\psi(\rho, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -h.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \psi = -h \quad \text{и} \quad H_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{1}{2} h \rho + \frac{f(z)}{\rho}.$$

Поскольку поле должно быть конечным во всех точках, получаем $f(z) = 0$, т. е.

$$H_\rho = \frac{1}{2} h \rho, \quad \psi = \frac{h}{4} \rho^2 + \varphi(z), \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varphi''(z) = -h.$$

Отсюда находим

$$H_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -hz + c = -h(z - z_0),$$

где мы положили $c = hz_0$. На силовой линии должно выполняться условия $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$, т. е. касательная к силовой линии должна быть направлена вдоль магнитного поля. Поэтому

$$\frac{d\rho}{H_\rho} = \frac{dx}{H_z}, \quad \text{или} \quad \frac{2d\rho}{\rho} + \frac{dz}{z - z_0} = 0,$$

откуда находим уравнение силовой линии:

$$\rho^2(z - z_0) = c.$$

Схема силовых линий приведена на рис. 1.10. Поскольку $H_\rho = (1/2)h\rho$, то при $\rho = 0$ радиальная компонента поля H_ρ не может обратиться в нуль, т. е. поле не может во всем пространстве оставаться параллельным оси z . Заметим также, что при $z = z_0$ составляющая поля H_z обращается в нуль, и поле целиком определяется радиальной составляющей.

1.6.13. Пусть система заряженных частиц совершает финитное движение в магнитном поле в ограниченной области пространства. Определим усредненную по времени силу, действующую на один из частиц (для нескольких частиц нужно будет лишь просуммировать выражение по номеру частицы):

$$\bar{\mathbf{F}} = \overline{\frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(r(t))]}.$$

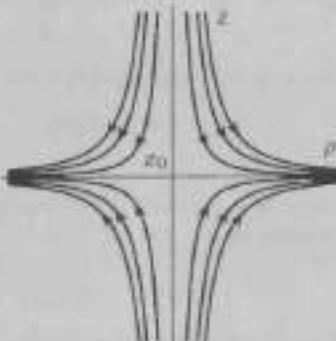


Рис. 1.10. Схема силовых линий.

Введем обозначение $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, где \mathbf{R} — радиус-вектор фиксированной внутренней точки рассматриваемой области пространства. Считаем поле слабонеоднородным, т. е. расстояние, из которого такое поле существенно (на величину $\sim H$) меняется по модулю и направлению, гораздо больше размеров области, занятой частицами. Для напряженности поля используем разложение по \mathbf{r} до первой производной. $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R})$, где оператор ∇ действует на координаты фиксированной точки с радиус-вектором \mathbf{R} . Тогда будем иметь:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\mu}{c} [\mathbf{r}' \times \mathbf{H}] + [\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}$. При усреднении по бесконечному (на практике — большому) временному интервалу полной производной по времени от любой финитной функции $f(t)$ получаем ноль:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} f \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0.$$

Таким образом, для средней силы имеем выражение

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\mu}{c} [\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}],$$

или, в записи по компонентам:

$$\bar{F}_i = \frac{\mu}{c} \overline{e_{ijk} \mathbf{x}'_j \mathbf{x}'_k \nabla_m H_i} = \frac{\mu}{c} e_{ijk} \overline{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}'_k} \nabla_m H_i.$$

Поскольку выполняется равенство $\overline{\frac{d}{dt} x'_j x'_k} = 0$, мы можем представить интересующее нас среднее в виде

$$\overline{x'_j x'_k} = \frac{1}{2} (\overline{x'_j x'_m - x'_j x'_n}) = \frac{1}{2} \overline{x'_j x'_n} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{mk}) = \frac{1}{2} \overline{x'_j x'_n} e_{imn} e_{jkm}.$$

Подставляя это соотношение в выражение для средней силы, получим

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -\frac{\mu}{2c} e_{imn} e_{jkm} \overline{x'_j x'_n} e_{im} \nabla_m H_k = -\frac{\mu}{2c} (\delta_{im} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{km}) \overline{x'_j x'_n} e_{im} \nabla_m H_k = \\ &= -\frac{\mu}{2c} e_{imn} \overline{x'_j x'_n} \nabla_i H_k + \frac{\mu}{2c} \overline{x'_j x'_n} e_{im} \nabla_m H_k. \end{aligned}$$

В данном выражении второе слагаемое обращается в нуль, поскольку $\nabla_i H_k = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, а первое описывает вклад магнитного момента $\mu = \frac{1}{2c} [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}']$ в среднюю силу. Таким образом, имеем

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla(\mu \mathbf{H}),$$

где мы считаем $\mu = \text{const}$.

Полученное нами выражение $\nabla(\mu\mathbf{H})$ отличается от выражения $(\mu\nabla)\mathbf{H}$, которое фигурирует в условии задачи. В силу очевидного соотношения $\nabla(\mu\mathbf{H}) - (\mu\nabla)\mathbf{H} = [\mu \times (\nabla \times \mathbf{H})]$ два выражения будут совпадать, когда $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, т. е. когда внешние токи (создающие магнитное поле) отсутствуют в области движения частиц.

1.6.14. Поле магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mu n)\mathbf{n} - \mu}{r^3}, \quad n = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Пусть диполь направлен вдоль оси z декартовой системы координат: $\mu = (0, 0, \mu)$. Будем вести рассмотрение в сферической системе координат, считая, что длина определяется выражением

$$dl^2 = dr^2 + dl_\theta^2 + dl_\varphi^2, \quad \text{где } dr = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi. \quad (1)$$

В таком случае метрический тензор является единичной матрицей, и мы можем не различать верхние и нижние индексы в таких сферических координатах. Получим в явном виде компоненты ортонормированных базисных векторов сферической системы координат:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{n}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{cases}$$

Напряженность магнитного поля диполя имеет в такой системе координат следующие компоненты:

$$H_r = (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{H}) = \mu \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad H_\theta = (\mathbf{n}_\theta \cdot \mathbf{H}) = -\mu \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad H_\varphi = (\mathbf{n}_\varphi \cdot \mathbf{H}) = 0.$$

Абсолютная величина напряженности поля равна

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_\theta^2 + H_\varphi^2} = \frac{\mu \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}{r}.$$

На силовой линии магнитного поля должно выполняться условие $d\mathbf{l} \parallel d\mathbf{H}$, т. е. касательная к силовой линии должна быть направлена вдоль магнитного поля. Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$d\mathbf{l} = \lambda \mathbf{H}$$

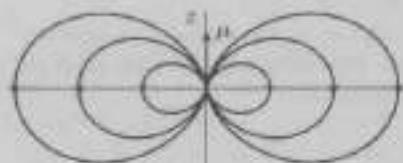
Отсюда с учетом (1) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{H_\theta} = \frac{r d\theta}{H_\theta}, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r d\theta} = \frac{H_\theta}{H_\phi} = 2 \operatorname{ctg} \theta.$$

Интегрируя данное уравнение при условии $r(\pi/2) = r_0$, находим уравнение силовой линии магнитного диполя:

$$r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta.$$

На этой силовой линии (рис. I.11) компоненты магнитного поля и его модуль ведут себя следующим образом:



$$H_\theta = \frac{\mu}{r_0^2} \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad H_\phi = \frac{\mu}{r_0^2 \sin^2 \theta},$$

$$H = \frac{\mu}{r_0^2} \frac{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}{\sin^2 \theta}. \quad (2)$$

Рис. I.11. Схема силовых линий магнитного диполя

1.6.15. В системе отсчета, связанной с ядром, имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{Ze}{r} = \frac{Ze}{r^2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

В движущейся системе отсчета, в которой в данный момент времени диполь поконится, определим компоненты магнитного поля при помощи преобразования Лоренца с линейной точностью по v/c (т. е. пренебрегая членами $\sim (v/c)^2$):

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \frac{Ze}{c} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}{r^2} = \frac{Ze}{mc^2 r^2} \mathbf{r}.$$

Поэтому энергия взаимодействия магнитного диполя с внешним полем, вычисленная в движущейся системе, есть

$$\mathcal{E}' = -(\mu \mathbf{H}') = \frac{1}{c} (\mu [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]).$$

Нетрудно показать, что в том же приближении можно получить $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Следовательно, окончательно находим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} (\mu [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]) = \frac{1}{c} ([\mu \times \mathbf{v}] \mathbf{E}) = -\frac{Ze}{mc^2} (\mu \mathbf{d}).$$

Видим, что движущийся магнитный момент по отношению к внешнему полю \mathbf{E} эквивалентен электрическому дипольному моменту:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mu].$$

1.7. СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1.7.1. Амплитуда волны и волновой 4-вектор должны удовлетворять условиям: $A_0^\mu k_\mu = 0$ и $k^\mu k_\mu = 0$, или в трехмерных обозначениях: $A_0^0 - (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k}) = 0$ и $(1/c^2)k^2 - \mathbf{k}^2 = 0$.

1.7.2. Для плоской волны, бегущей вдоль оси x , отличны от нуля следующие компоненты тензора энергии-импульса:

- $T^{00} = w = (E^2 + H^2)/(8\pi) = E^2/(4\pi)$ — плотность энергии;
- $T^{0z} = T^{z0} = S_z/c = w$ — плотность потока энергии (S_z) и объемная плотность импульса (S_z/c^2) вдоль оси z ;
- $T^{zz} = \sigma_{zz} = w$ — давление вдоль оси z .

1.7.3. Зададим стоящую волну потенциалом

$$\mathbf{A} = A_0 \cos(\omega t) \cos(kr).$$

Если $\omega = ck$ и $(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k}) = 0$, то потенциал удовлетворяет волновому уравнению и калибровке Лоренца (или Кулона, поскольку при $\varphi = 0$ они не различаются). В этом случае напряженности полей равны

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t) \cos(kr), \quad E_0 = \frac{\omega A_0}{c},$$

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(\omega t) \sin(kr), \quad H_0 = |\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0|,$$

выполняется условие $|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{H}_0|$, и векторы \mathbf{E}_0 , $-\mathbf{H}_0$ и \mathbf{k} образуют прямую тройку. Выберем направление осей x , y и z вдоль этих векторов. В результате будем иметь (см. (1.14))

$$\begin{aligned} w &= \sigma_{zz} = \frac{E_0^2}{8\pi} \left\{ \sin^2(\omega t) \cos^2(kr) + \cos^2(\omega t) \sin^2(kr) \right\} = \\ &= \frac{E_0^2}{16\pi} \left[1 - \cos(2\omega t) \cos(2kr) \right], \\ S_z &= -\frac{cE_0^2}{16\pi} \sin(2\omega t) \sin(2kr), \\ \sigma_{zz} &= -\sigma_{yy} = \frac{E_0^2}{8\pi} \left\{ -\sin^2(\omega t) \cos^2(kr) + \cos^2(\omega t) \sin^2(kr) \right\} = \\ &= \frac{E_0^2}{16\pi} \left[\cos(2\omega t) - \cos(2kr) \right]. \end{aligned}$$

Остальные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю.

1.7.4. Искомая калибровочная функция находится стандартным образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} f, \quad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(\mathbf{r}, t) = c \int_{-\infty}^t \varphi'(\mathbf{r}, t') dt'.$$

1.7.5. Для случая, когда заряды и токи равны нулю, проделаем преобразование Фурье уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$:

$$\begin{aligned} \iint \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r dt &= \\ &= \int dt \oint e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) - \iint (\mathbf{E} \nabla) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r dt = i(\mathbf{k} \mathbf{E}_{k,\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы считаем, что интеграл по бесконечно удаленной замкнутой поверхности равен нулю.

Рассмотрим преобразование Фурье второго уравнения этой же пары. Для левой части соответствующего уравнения Максвелла получаем

$$\begin{aligned} \iint \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r dt &= \int dt \int [\nabla \times \mathbf{H}] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r = \\ &= - \int dt \oint e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} [\mathbf{H} \times d\mathbf{S}] + \iint [\mathbf{H} \times \nabla] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r dt = -i[\mathbf{H}_{k,\omega} \times \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Правая часть этого же уравнения дает

$$\frac{1}{c} \int d^3 r \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} dt = -i \frac{\omega}{c} \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t} d^3 r dt = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{k,\omega}.$$

Таким образом, имеем

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{k,\omega}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{k,\omega}.$$

Совершенно аналогично проводится преобразование Фурье для других двух уравнений Максвелла:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_{k,\omega}) = 0, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{k,\omega}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{k,\omega}.$$

1.7.6. Запишем для определенности электрическое поле плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}\} = \mathbf{e}_1 |E_1| \cos(kr - \omega t - \alpha) + \mathbf{e}_2 |E_2| \sin(kr - \omega t - \alpha). \quad (1)$$

Необходимо проделать преобразование Фурье для косинуса и синуса:

$$\begin{aligned} \iint \cos(kr - \omega t - \alpha) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t-\alpha)} d^3 r dt &= \\ &= \frac{1}{2} \iint e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(\mathbf{r}-(\omega+\omega')t)-\alpha]} d^3 r dt + \frac{1}{2} \iint e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}-(\omega-\omega')t)+\alpha]} d^3 r dt = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^3 [\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \delta(\omega+\omega') e^{-i\alpha} + \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \delta(\omega-\omega') e^{i\alpha}], \quad (2) \end{aligned}$$

Выражение для Фурье-образа синуса очевидно. Подставляя полученные выражения (2) в формулу преобразования Фурье поля (1), получаем

$$\begin{aligned} E_{k,\omega} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 & [(\mathbf{e}_1|E_1| \mp i\mathbf{e}_2|E_2|)e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\delta(\omega + \omega') + \\ & + (\mathbf{e}_1|E_1| \pm i\mathbf{e}_2|E_2|)e^{i\omega t}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta(\omega - \omega')] \quad (3) \end{aligned}$$

Выражение (3) можно переписать в виде

$$E_{k,\omega} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 [E_0^+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\delta(\omega + \omega') + E_0^- \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta(\omega - \omega')].$$

1.8. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ИЗЛУЧЕНИЕ

1.8.1. В соответствии с условием задачи полагаем, что дипольный момент \mathbf{d} зависит от времени гармонически, т.е.

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}, \text{ поэтому } \mathbf{d}(t') = \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \mathbf{d}_0 e^{-i(\omega t - kr)}, \quad (1)$$

где $t' = t - r/c$ — запаздывающее время, r — расстояние от диполя до точки наблюдения поля, $k = \omega/c$. Будем считать, что расстояние до точки наблюдения много больше линейных размеров диполя ($r \gg a$). Кроме того предполагается, что $a \ll \lambda$, где λ — характеристическая длина волны излучаемых электромагнитных волн. Эти два условия обеспечивают возможность применения дипольного приближения. В формуле (1) величина \mathbf{d}_0 , вообще говоря, комплексная, т.е. на окончательном этапе от выражения необходимо брать действительную часть.

Векторный потенциал диполя на больших расстояниях имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \mathbf{d}(t') = -\frac{ik}{r} \mathbf{d}(t').$$

Подставляем и условие калибровки Лоренца данный вектор-потенциал, получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{cr} \mathbf{d}(t') \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi + \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}(t')}{r} \right) = 0.$$

Это значит, что $\varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{d}(t')/r)$ с точностью до константы интегрирования, не зависящей от времени, которая здесь нас не интересует. В итоге имеем для скалярного потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{d}(t')}{r} \right) = \frac{(\mathbf{n} \mathbf{d}(t'))}{r^2} (1 - i(kr)),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Переходим к вычислению напряженностей полей:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{r^3} \{ (3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}) - \mathbf{d})(1 - i(kr)) + (kr)^2 (\mathbf{n} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{n}]) \},$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = -ik \left[\nabla \times \frac{\mathbf{d}}{r} \right] = \frac{1}{r^3} [\mathbf{n} \times \mathbf{d}] (i(kr) + (kr)^2), \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(r).$$

Как видно, в окончательном результате существенную роль играет параметр $kr \sim r/\lambda$. В зависимости от значения данного параметра электромагнитное поле может иметь различный вид на разных расстояниях при $r \gg a$ (рис. 1.12).

а) Квазистатическая зона: $a \ll r \ll \lambda$ ($kr \ll 1$). В этой области можно пренебречь эффектами запаздывания, тогда напряженности полей

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = 0$$

отвечают полю квазистатического электрического диполя. В пределе $kr \rightarrow 0$ мы получаем просто статический диполь.



Рис. 1.12. Условное обозначение трех характерных зон для поля, созданного системой движущихся зарядов

б) Волновая зона: $a \ll \lambda \ll r$ ($kr \gg 1$). В этой области напряженности полей имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{r^2}{r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{n}]] = [\mathbf{H} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{H} = \frac{r^2}{r} [\mathbf{n} \times \mathbf{d}].$$

Напряженности полей убывают с расстоянием, как $1/r$, а кроме того они они связаны между собой так же, как они связаны в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль единичного вектора \mathbf{n} .

в) Промежуточная (индукционная) зона: $a \ll r \sim \lambda$ ($kr \sim 1$). В этой области важны все члены в исходных выражениях для полей: эффекты запаздывания существенны, но поле излучения еще не сформировано.

1.8.2. Пусть в системе для всех частиц выполняется: $v_i/m_i = n = \text{const}$. Тогда для полного дипольного электрического момента получим

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i = \alpha \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \alpha R \sum_i m_i, \quad \text{где} \quad R = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

— координата центра инерции. В замкнутой системе, где отсутствуют внешние силы, полный импульс сохраняется: $\dot{\mathbf{R}} = \text{const}$, $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, поэтому $\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, следовательно, $I_d = \mathbf{0}$.

Полный магнитный момент можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{\alpha}{2c} \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \frac{\alpha}{2c} \mathbf{M},$$

где $\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$ — полный момент количества движения системы. Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то в изолированной системе $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$, следовательно, $I_M = \mathbf{0}$.

1.8.3. Вначале мы имеем задачу двух тел. Переход в систему центра инерции и вводя обозначения

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор центра инерции системы, \mathbf{r} — радиус-вектор относительного движения зарядов, μ — приведенная масса, получаем $\mathbf{r}_1 = (\mu/m_1)\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = (\mu/m_2)\mathbf{r}$, и, следовательно, дипольный электрический момент системы равен

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}.$$

Уравнение движения эффективной частицы с приведенной массой в поле неподвижного кулоновского центра имеет вид

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{|e_1 e_2| \mathbf{r}}{r^3}.$$

Вычислим интенсивность дипольного излучения (энергию, теряемую системой в единицу времени), предполагая, что потери энергии за один оборот малы по сравнению с полной энергией⁴⁾:

$$I = -\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2\dot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} = \frac{2|e_1 e_2|^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^5}.$$

⁴⁾ При решении данной задачи (и некоторых задач, следующих ниже) предполагается, что потери энергии системой $\partial E / \partial t$ за период движения малы по сравнению с полной энергией E . Или движение частицы, например, в атоме идет по очень пологой спирали, так что заряд в любой момент времени излучает, как заряд на круговой орбите. Математически это означает, что при расчете интенсивности излучения мы считаем, что $E = \text{const}$, а затем вычисляем потери энергии $\partial E / \partial t$ по невозмущенному движению. Как правило, для этого необходимо выполнение условия $a/c \ll 1$.

Энергия, излучаемая системой за один оборот, будет равна

$$\delta E = I \cdot \frac{2\pi r}{v} = I \cdot \frac{2\pi \mu^{1/2}}{|e_1 e_2|^{1/2}} r^{1/2} = \frac{4\pi \mu^{1/2} |e_1 e_2|^{1/2}}{3c} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^{1/2}},$$

поскольку из условия $mv^2/r = |e_1 e_2|/r^2$ (ускорение — центростремительное, движение плоское) следует, что скорость частицы на орбите равна

$$v = \frac{|e_1 e_2|^{1/2}}{\mu^{1/2} r^{1/2}}. \quad (1)$$

Анализ двух последних формул показывает, что энергия, излучаемая системой за оборот, действительно мала, как и предполагалось!

$$\delta E \sim \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{|e_1 e_2|}{r} \ll E \quad \text{при} \quad \frac{v}{c} \ll 1.$$

Найдем далее изменение расстояния между частицами в время падения одной частицы на другую (фактически, время жизни атома в классической электродинамике). Поскольку кинетическая энергия системы теряется на излучение, то

$$\frac{dE}{dt} = -I = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{dt}, \quad \text{где} \quad E = \frac{pv^2}{r} - \frac{|e_1 e_2|}{r} = -\frac{|e_1 e_2|}{2r}.$$

В результате мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{|e_1 e_2|}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2(e_1 e_2)^2}{3c^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^3}.$$

Интегрируя это уравнение (с начальным условием $r(0) = r_0$), находим закон изменения радиуса орбиты:

$$r(t) = \left(r_0^3 - \frac{4|e_1 e_2|^2}{c^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 t \right)^{1/3}.$$

В момент падения частиц друг на друга $r(t_{\max}) = 0$, т.е. время падения равно

$$t_{\max} = \frac{r_0^3 c^2}{4|e_1 e_2|} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^{-2}.$$

Наиболее наглядный вид полученные результаты приобретают, если их выразить через приведенные величины: $\rho = r/r_0$, $\tau = t/t_{\max}$, $u = v/v_0$, $I = I/I_0$ (рис. 1.13), т.е.

$$\rho = (1-\tau)^{1/3}, \quad u = \frac{1}{(1-\tau)^{1/2}}, \quad I = \frac{1}{(1-\tau)^{2/3}}.$$

В заключение приведем некоторые численные оценки для атома водорода; полагая, что $e_1 = e_2 = e$ — заряд электрона, $m_1 = m$ — масса электрона ($m_1 \ll m_2$) и $r_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — размер ятма. В этом случае время жизни такого атома будет равно

$$t_{\text{жиз}} \approx \frac{\pi^2 e^3 r_0^3}{4e^4} \approx 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ с.}$$

Предположения, в рамках которых рассматривалась задача (малость энергетических потерь за период вращения), нарушаются при условии, что электрон в атome перестает быть нерелятивистским, т. е. $v \rightarrow c$. Это может произойти в случае (см. (1)), если

$$r_0 \lesssim r_{\text{кр}} = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см,}$$

т. е. на очень малых расстояниях ($r_{\text{кр}}$ — классический радиус электрона). На расстояниях $\sim 10^{-13}$ см, строго говоря, уже становится неприменимой сама классическая электродинамика, ибо она становится внутренне противоречивой. В частности, на рисунках 1.13, б и в видно, что附近и момента падения (при $t \rightarrow t_{\text{жиз}}$ или $\tau \rightarrow 1$) скорость частицы, как и излучаемая ею энергия, бесконечно растут.

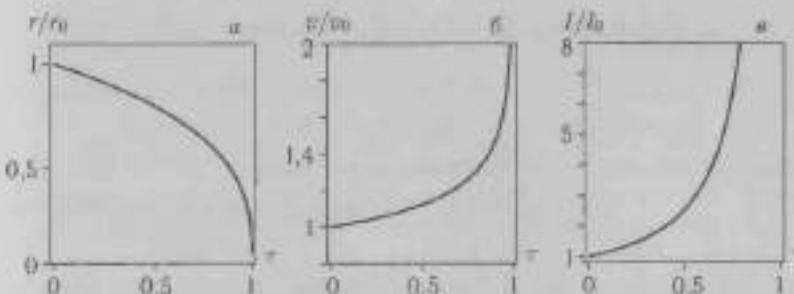


Рис. 1.13. Падение одной частицы на другую при динамическом излучении: а — зависимость расстояния между частицами от времени; б — зависимость скорости частицы от времени; в — зависимость интенсивности излучения от времени (τ — отношение времени к времени падения)

В этой связи заметим, что результат, полученный нами в данной задаче (очень маленькое время жизни атома), указывает на неправильность классических представлений (в данном случае, о движении электрона в ятме). Эта и другие трудности, возникшие в классической теории, как раз и стимулировали создание и развитие квантовой механики.

1.8.4. Как и в предыдущей задаче, вычислим интенсивность для невозмущенного движения (без учета потерь на излучение). Если электроны вращаются вокруг ядра гелия, все время находясь на противоположных концах диаметра, то электрический дипольный момент тождественно равен нулю и электрическое дипольное излучение отсутствует. Магнитный дипольный момент для невозмущенного движения постоянен, поэтому магнитное дипольное излучение также отсутствует. Найдем вклад квадрупольного излучения.

Пусть \mathbf{n} — единичный вектор, направленный от ядра к первому электрону, а \mathbf{N} — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения.

В силу симметрии собственные направления квадрупольного момента задаются единичными векторами \mathbf{n} , \mathbf{N} , $\mathbf{l} = [\mathbf{N} \times \mathbf{n}]$. Соответствующие собственные числа равны $-2Q_0$, Q_0 , Q_0 , где $Q_0 = 2\mu R^2$. Тензор квадрупольного момента можно выразить через компоненты собственных единичных векторов:

$$Q_{ij} = Q_0(-2n_i n_j + N_i N_j + l_i l_j)$$

Для вычисления интенсивности квадрупольного излучения нам нужно вычислить \dot{Q}_{ij} для невозмущенной траектории (считая, что R постоянно). При этом $\mathbf{N} = 0$, а векторы \mathbf{n} и \mathbf{l} вращаются вокруг \mathbf{N} с постоянной угловой скоростью ω . Это означает, что

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{n} = \omega[\mathbf{N} \times \mathbf{n}] = \omega\mathbf{l}, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{l} = \omega[\mathbf{N} \times \mathbf{l}] = -\omega\mathbf{n}.$$

$$Q_{ij} = Q_0\omega(-2n_i l_j - 2l_i n_j - n_i l_j + l_i n_j) = -3Q_0\omega(n_i l_j + l_i n_j).$$

$$Q_{ij} = 6Q_0\omega^2(n_i l_j - l_i n_j), \quad \dot{Q}_{ij} = 12Q_0\omega^2(l_i n_j + n_i l_j).$$

Полная интенсивность квадрупольного излучения:

$$I_Q = \frac{\dot{Q}_{ij}Q_{ij}}{180c^3} = \frac{(12)^2 \cdot 2Q_0^2\omega^5}{6^2 \cdot 5c^3} = \frac{32e^2R^4\omega^5}{5c^3} = \frac{32e^2R(R\omega^2)^3}{5c^3}.$$

Ускорение электрона при круговом движении $R\omega^2$ вычислим из закона Кулона и второго закона Ньютона:

$$R\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{2e^2}{R^2} - \frac{r^2}{(2R)^2} \right) = \frac{7e^2}{4mR^2}. \quad (1)$$

Полная интенсивность излучения дает нам скорость потери энергии:

$$I_Q = -\frac{dE}{dt} = \frac{7^2 e^2}{10c^3 m^2 R^5}.$$

Полная энергия системы будет равна

$$E = 2\frac{mc^2}{2} - 2\frac{2e^2}{R} + \frac{r^2}{2R} = m(R\omega)^2 - \frac{7e^2}{2R} = mR\frac{7e^2}{4mR^2} - \frac{7e^2}{2R} = -\frac{7e^2}{4R}.$$

где мы учли соотношение (1). Получаем дифференциальное уравнение относительно $R = R(t)$:

$$\frac{T^2 e^2}{10c^4 m^2 R^2} = -\frac{7e^2}{4R^2} \dot{R}, \quad \text{откуда} \quad 4R^2 \ddot{R} = -\frac{8 \cdot 7^2 e^2}{5c^4 m^2}.$$

Интегрируя данное уравнение (при условии $R(0) = R_0$), окончательно находим

$$R^4(t) = R_0^4 - \frac{392e^6}{5c^4 m^4} t.$$

1.8.5. Предположим, что суммарные потери энергии малы по сравнению с начальной кинетической энергией системы. Поэтому определим интенсивность электромагнитного излучения исходя из того, что движение частиц происходит под действием электростатических сил (без учета потерь энергии на излучение)²¹.

Движение двух взаимодействующих частиц сводится к равномерному движению их центра масс и движению частиц с приведенной массой m в поле силы взаимодействия двух частиц. Пусть частицы движутся по оси x , причем начало координат совпадает с положением центра масс системы. Если R — расстояние между частицами, то в системе центра масс:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0; \quad x_1 = -R \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = +R \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Компоненты дипольного момента имеют вид

$$d_z = x_1 e_1 + x_2 e_2 = R \frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{m_1 + m_2} = R q, \quad d_y = d_x = 0.$$

Интенсивность дипольного излучения равна

$$I_d = \frac{2}{3c} (\mathbf{d})^2 = \frac{2q^2}{3c^3} R^2.$$

Полные потери энергии за счет электрического дипольного излучения удобно вычисляются, если перейти от интегрирования по времени к интегрированию по скорости $v = R$. В этом случае (с учетом того, что $dt = dv/R$) имеем

$$\delta \mathcal{E}_d = \int_{-\infty}^{+\infty} I_d dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q^2}{3c^3} R^2 \frac{dv}{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q^2}{3c^3} R dv = \frac{2q^2 e_1 v_2}{3\mu c^3} \int_{-V_\infty}^{+V_\infty} \frac{dv}{R^2}.$$

²¹ См. также сноску на с. 237.

Здесь R находится из уравнения движения в системе центра масс (также μ — приведенная масса).

$$R = \frac{e_1 e_2}{\mu R^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Из закона сохранения энергии (опять не учитывая потери на излучение) получаем

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu \sigma^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{R}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{R} = \frac{\mu}{2e_1 e_2} (\sigma_{\infty}^2 - v^2).$$

Для полной излученной энергии находим

$$\delta E_d = \frac{q^2 \mu}{6c^2 e_1 e_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_{\infty}^2 - u^2)^2 du = \frac{q^2 \mu \sigma_{\infty}^2}{6c^2 e_1 e_2} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^2 du = \frac{q^2 \mu \sigma_{\infty}^2}{6c^2 e_1 e_2} \frac{16}{15},$$

где $u = v/v_{\infty}$ — нормированная скорость.

Взяв определенный интеграл, получаем полную энергию, излученную в дипольной моде:

$$\delta E_d = \frac{16}{45} \frac{q^2}{e_1 e_2} \frac{\mu \sigma_{\infty}^2}{2} \left(\frac{v_{\infty}}{c} \right)^3 \sim \frac{\mu \sigma_{\infty}^2}{2} \left(\frac{v_{\infty}}{c} \right)^3 \ll \frac{\mu \sigma_{\infty}^2}{2}.$$

Дипольный момент обращается в ноль, если удельные заряды равны, т.е. если $e_1/m_1 = e_2/m_2$. В этом случае нам нужно рассмотреть следующий член мультипольного разложения, который учитывает электрическую квадрупольную и магнитную дипольную моды.

Для разных удельных зарядов магнитный момент пропорционален моменту импульса и сохраняется вместе с ним (см. решение задачи 1.8.2). Квадрупольный момент, из соображений симметрии, диагонален:

$$Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{Q_{xx}}{2} = -e_1 x_1^2 - e_2 x_2^2 = -R^2 \frac{m_1^2 e_1 + m_2^2 e_2}{(m_1 + m_2)^2} = -R^2 q'.$$

Вычислим интенсивность квадрупольного излучения:

$$I_Q = \frac{\partial Q_x}{\partial t} \frac{\partial Q_y}{\partial t} = \frac{6Q_{zz}^2}{180c^5} = \frac{q'^2}{30c^5} \left(\frac{d^3 R^2}{dt^3} \right)^2.$$

Находим третью производную по времени, учитывая (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 R^2}{dt^3} &= 2RR + 6\dot{R}\dot{R} = 2 \frac{d}{dt} \dot{R}R + 6\dot{R}\dot{R} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{e_1 e_2}{\mu R^2} \right) R + 6\dot{R}\dot{R} = \\ &= 2(-2) \frac{e_1 e_2}{\mu R^3} R R + 6\dot{R}\dot{R} = (6 - 4) \dot{R}\dot{R} = 2\dot{R}\dot{R}. \end{aligned}$$

Далее вычисления проводим аналогично дипольному случаю:

$$\begin{aligned}\delta E_Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} I_Q dt = \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{4q^2 v^2 R^3}{30c^4} \frac{dv}{R} = \frac{2q^2 v_1 c_1}{15\mu c^3} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{v^2 dv}{R^3} = \\ &= \frac{q^2 \mu}{30e_1 e_2 c^3} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} v^2 (v_\infty^2 - v^2)^2 dv = \frac{q^2 \mu v_\infty^7}{30e_1 e_2 c^3} \int_{-1}^1 u^2 (1-u^2)^2 du.\end{aligned}$$

Полная энергия квадрупольного излучения равна

$$\delta E_Q = \frac{16}{1575} \frac{q^2}{e_1 e_2} \frac{\mu v_\infty^7}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^5 \sim \frac{\mu v_\infty^7}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^5 \ll \delta E_d \ll \frac{\mu v_\infty^3}{2},$$

и вновь оказывается много меньше исходной энергии частицы.

1.8.6. Электрический дипольный момент сфероида равен нулю. Магнитный дипольный момент также равен нулю в силу центральной симметрии зарядов и токов. Электрический квадрупольный момент имеет следующие ненулевые компоненты (см. задачу 1.6.10):

$$Q_{zz} = \frac{6}{5} q R_0^3 \beta = \frac{6}{5} q R_0^3 \beta_0 \cos(\omega t), \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}.$$

Магнитное поле квадрупольной волны имеет вид (\mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_Q &= \frac{[\mathbf{Q} \times \mathbf{n}]}{6c^2 r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_\alpha Q_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \\ dI_Q &= \frac{\mathbf{Q}^2 - (\mathbf{Q}\mathbf{n})^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{n_x Q_{zz} Q_{\alpha\beta} n_\beta - (n_z Q_{zz} n_x)^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi}.\end{aligned}$$

В рассматриваемом здесь аксиально-симметричном случае:

$$dI_Q = \frac{Q_{zz}^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) - Q_{zz}^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \right)^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

И угловое распределение интенсивности имеет вид

$$\frac{dI_Q}{d\Omega} = \frac{Q_{zz}^2}{64\pi c^5} \cos^2 \theta \sin^3 \theta.$$

Полная интенсивность равна

$$I_Q = \frac{Q_{zz}^2 Q_{\alpha\beta}}{180c^5} = \frac{Q_{zz}^2}{120c^5}, \quad \text{где} \quad Q_{zz} = \frac{6}{5} q R_0^3 \beta = \frac{6}{5} q R_0^3 \beta_0 \omega^3 \sin(\omega t).$$

1.8.7. Запишем баланс энергии с учетом потерь на излучение в дипольном приближении:

$$\frac{dE}{dt} = -I_d, \quad E = \frac{m l^2}{2} \omega^2, \quad I_d = \frac{2}{3c} \mathbf{d}^2 = \frac{2e^2 l^2}{3c} \omega^4.$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$ml^2 \omega \dot{\omega} = -\frac{2e^2 l^2}{3c} \omega^4, \quad \text{откуда} \quad -2 \frac{\dot{\omega}}{\omega^3} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega^2} = \frac{4e^2}{3c^2 m}.$$

Интегрируя данное уравнение с начальным условием $\omega(0) = \omega_0$, находим

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + t \frac{4e^2}{3c^2 m} \right)^{-1/2}.$$

Полная интенсивность излучения изменяется только за счет уменьшения частоты $\omega(t)$. Распределение интенсивности по углам меняется с частотой ω , поскольку вектор \mathbf{d} вращается. Поэтому

$$\frac{dI_d}{dt} = \frac{1}{4\pi c^2} (\mathbf{d}^2 - (\mathbf{d}\mathbf{n})^2),$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, задающий направление излученной волны.

Пусть штанга вращается вокруг оси z . Поскольку после усреднения по времени должно получиться аксиально симметричное распределение, вектор \mathbf{n} можно взять в плоскости (x, z) , т. е. $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, тогда, очевидно, $\mathbf{d} = -\omega^2 e l (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$. Следовательно, для углового распределения имеем

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{e^2 l^2 \omega^4}{4\pi c^2} (1 - \cos^2(\omega t) \sin^2 \theta).$$

При усреднении по периоду $\overline{\cos^2(\omega t)} = 1/2$, и поэтому

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{e^2 l^2 \omega^4}{4\pi c^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

1.8.8. Запишем баланс энергии с учетом потерь на излучение в дипольном приближении (\mathbf{w} — ускорение электрона):

$$\frac{dE}{dt} = -I_d = -\frac{2}{3c} \mathbf{d}^2 = -\frac{2e^2 \mathbf{w}^2}{3c}, \quad \mathbf{w} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}],$$

поскольку электрон вращается по окружности со скоростью $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$. Дадее имеем

$$\mathbf{w}^2 = \frac{e^2 H^2}{m^2 c^2} v^2 = \frac{2e^2 H^2}{m^2 c^2} E.$$

Получаем дифференциальное уравнение для кинетической энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4e^3 H^2}{3m^2 c^5} E, \quad \text{откуда} \quad E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{4e^3 H^2}{3m^2 c^5} t\right).$$

1.8.9. Электрический дипольный момент равен нулю, магнитный дипольный момент постоянен, лидирующий член — квадрупольный. Мгновенное распределение зарядов аксиально симметрично (ось симметрии соединяет заряды). В базисе, образованном собственными осями, квадрупольный момент имеет вид

$$Q_0 = Q_{11} \operatorname{diag}(1, -1/2, -1/2), \quad Q_{11} = 4ea^3.$$

В лабораторной системе выражим квадрупольный момент через собственные векторы \mathbf{e}_i :

$$Q_0 = 4ea^3 \left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{11} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_{31} \right).$$

Собственные векторы вращаются с угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна \mathbf{e}_1 , будем считать, что она параллельна \mathbf{e}_3 . В этом случае $\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega \mathbf{e}_2$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega \mathbf{e}_1$, $\dot{\mathbf{e}}_3 = 0$. Находим производные:

$$Q_{11} = 6ea^3 \omega (\mathbf{e}_{11} \mathbf{e}_{21} + \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{31}), \quad \dot{Q}_{11} = 12ea^3 \omega^2 (-\mathbf{e}_{11} \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{31}),$$

$$\ddot{Q}_{11} = -24ea^3 \omega^3 (\mathbf{e}_{11} \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{31}).$$

Поляя интенсивность не зависит от времени:

$$I_Q = \frac{Q_0 \dot{Q}_{11}}{180c^5} = \frac{2(24)^2 e^3 a^4 \omega^5}{180c^5} = \frac{32e^3 a^4 \omega^5}{5c^5} = \frac{2Q_{11}\omega^5}{5c^5}.$$

Для углового распределения интенсивности имеем

$$dI_Q = \frac{n_i Q_{11} Q_{11} n_i - (n_i Q_{11} n_i)^2 d\Omega}{36c^5}.$$

$$Q_{11} \ddot{Q}_{11} = (24ea^3 \omega^3)^2 (\mathbf{e}_{11} \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{31}).$$

$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ — единичный вектор в направлении точки наблюдения.

Удобно проводить вычисления, предполагая, что в данный момент времени векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ направлены вдоль осей x, y . При этом вместо усреднения по времени можно усреднить по углу φ :

$$dI_Q = \frac{24^2 e^3 a^4 \omega^5}{36c^5} \sin^2 \theta \left[1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 (2\varphi) \right] \frac{d\Omega}{4\pi},$$

$$\frac{dI_Q}{d\Omega} = \frac{4e^3 a^4 \omega^5}{\pi c^5} \sin^2 \theta \left[1 - \frac{1}{8} \sin^2 \theta \right].$$

1.8.10. Пусть 2α — угол между направлениями на заряды. Чтобы вычислить дипольный и квадрупольный моменты, выберем начало координат в центре окружности, ось z направим по оси вращения, ось x — по биссектрисе угла между зарядами. Тогда имеем

$$d_x = 2ea \cos \alpha, \quad Q_{zz} = 4ea^2 \cos^2 \alpha,$$

$$Q_{xx} = -2ea^2, \quad Q_{yy} = -Q_{zz} - Q_{xx} = 2ea^2(1 - 2 \cos^2 \alpha).$$

Остальные компоненты \mathbf{d} и Q_{ij} обращаются в нуль.

Для решения задачи необходимо вычислить интенсивность дипольного I_d и квадрупольного I_Q излучения. С этой целью в лабораторной (не вращающейся) системе выражим мультипольные моменты через собственные векторы \mathbf{e} , тензора Q_{ij} . Поскольку (см. задачу 1.8.9) $\mathbf{e}_1 = \omega \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 = -\omega \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 = 0$, получим для дипольного излучения:

$$\mathbf{d} = 2ea \cos \alpha \mathbf{e}_1, \quad \text{откуда} \quad I_d = \frac{2}{3c} \mathbf{d}^2 = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \alpha,$$

и для квадрупольного излучения

$$Q_{ij} = 2ea^2 [2 \cos^2 \alpha e_{ii} e_{jj} - e_{ij} e_{jj} + (1 - 2 \cos^2 \alpha) e_{ii} e_{jj}],$$

$$Q_{ij} = -8ea^2 \omega^3 (1 + 2 \cos^2 \alpha) [e_{ii} e_{jj} + e_{ij} e_{ji}],$$

$$I_Q = \frac{Q_{ii} Q_{jj}}{180c^3} = \frac{32e^2 a^4 \omega^6}{45c^5} (1 + 2 \cos^2 \alpha)^2.$$

Приравняем интенсивности.

$$\frac{128e^2 a^4 \omega^6}{45c^5} (1/2 + \cos^2 \alpha)^2 = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \alpha.$$

Введем обозначение

$$K = \frac{15}{64} \left(\frac{c}{a\omega} \right)^2 \gg 1, \quad 0 \leq \mu = \cos^2 \alpha \leq 1$$

и получим квадратное уравнение $\mu^2 - (K - 1)\mu + 1/4 = 0$ для определения $\cos^2 \alpha$. В интервале $[0, 1]$ попадает один корень:

$$\mu = \frac{1}{2} [K - 1 - \sqrt{K^2 - 2K}] = \frac{1}{2} [K(1 - \sqrt{1 - 2/K}) - 1].$$

С учетом малости величины $1/K$ разложим корень в ряд:

$$\mu \approx \frac{1}{2} \left[K \left(1 - 1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{2K^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{4K} = \frac{16}{15} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2.$$

Окончательно находим

$$\cos \alpha = \frac{4a\omega}{\sqrt{15}c} \ll 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{4a\omega}{\sqrt{15}c}.$$

1.8.11. При вращении выполняется соотношение $\dot{\mathbf{d}} = -\omega^2 \mathbf{d}$, поэтому

$$I_d = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2\omega^2}{3c^2} \mathbf{d}^2.$$

Пусть начало координат совпадает с центром окружности, а вращение происходит вокруг оси z . В момент времени, когда $\mathbf{d} \parallel \mathbf{x}$, выполним квадрупольный и магнитный дипольные моменты. Для этого представим диполь как пару зарядов величины $\pm d/e$, находящихся на расстоянии ε друг от друга и перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Для магнитного момента будем иметь

$$\mu = \frac{1}{2c} \frac{d}{\varepsilon} \omega [(R + \varepsilon)^2 - R^2] \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{dR\omega}{c} \mathbf{e}_z.$$

Магнитный дипольный момент μ от времени не зависит, поэтому магнитное дипольное излучение отсутствует: $I_\mu = 0$. Далее

$$Q_{xx} = 2 \frac{d}{\varepsilon} [(R + \varepsilon)^2 - R^2] \rightarrow 4dR, \quad Q_{yy} = Q_{zz} = -\frac{Q_{xx}}{2} \rightarrow -2dR.$$

Окончательно получим (по аналогии с задачей 1.8.9)

$$I_Q = \frac{32d^2 R^2 \omega^6}{5c^5}.$$

1.8.12. Суммарный дипольный момент системы $\mathbf{d} = 0$. Квадрупольный момент в два раза больше, чем в задаче 1.8.11, соответственно интенсивность квадрупольного излучения больше в четыре раза. Запишем уравнение баланса энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -I_Q, \quad E = mR^2 \omega^2, \quad I_Q = \frac{128d^2 R^2 \omega^6}{5c^5}.$$

Получаем дифференциальное уравнение для $\omega(t)$:

$$2mR^2 \omega \dot{\omega} = -\frac{128d^2 R^2 \omega^6}{5c^5}, \quad -4 \frac{\dot{\omega}}{\omega^5} = \frac{d}{mR^2} \frac{1}{\omega^4} = \frac{256d^2}{5mc^5}, \quad \text{откуда}$$

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^4} + \frac{256d^2}{5mc^5} t \right)^{-1/4}.$$

$$1.8.13. \quad dI_d = \left(\frac{e\omega_0}{\tau} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi c^2}, \quad \Delta t = \tau \left(1 - \frac{m}{2d} \cos \theta \right).$$

1.8.14. Решение задачи во многом похоже на решение задачи 1.8.5. Интенсивность излучения и полная излучаемая энергия даются формулами

$$I_d = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2\omega^2}{3c^2} R^2, \quad \Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} I_d dt = \int_{-\infty}^{\infty} I_d \frac{dv}{R} = \frac{2\omega^2}{3c^2} \int_{-\infty}^{\infty} R dv.$$

Электрон будет лететь по прямой только, если он летит вдоль вектора d . Электрон отразится только в том случае, если он подлетит к диполю со стороны «минуса» и оттолкнется от него. Учитываем уравнение движения электрона и закон сохранения энергии:

$$\tilde{R} = \frac{E|e|}{m} = \frac{2d|e|}{R^2 m} > 0, \quad \text{откуда} \quad \Delta E = -\frac{4|e|^2 d}{3mc^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R^2} dv,$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{|e|d}{R^2} = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{R^2} = \frac{m(v_\infty^2 - v^2)}{2|e|d},$$

и для полной потери энергии на излучение получаем окончательно

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2|e|^2 m}{d}} \int_{-\infty}^{\infty} (v_\infty^2 - v^2)^{1/2} dv = \frac{v_\infty}{c} \sqrt{\frac{2|e|^2 m}{d}} \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^{1/2} du,$$

$$\Delta E = \frac{3\pi v_\infty^4}{8 c^2} \sqrt{\frac{2|e|^2 mc^2}{d}}.$$

1.8.15. Дипольный момент относительно неподвижного конца штанги равен $d = \rho l^2/2$. Кинетическая энергия — $\mathcal{E} = mv^2 l^2/6$. Решение полностью аналогично решению задачи 1.8.7 (с заменой $m \rightarrow m/3$, $e \rightarrow \rho l/2$). Поэтому приводим результат:

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + t^2 \frac{\rho^2 l^4}{c^2 m} \right)^{-1/2}.$$

1.8.16. Квадрупольный момент вдоль оси штанги относительно ее неподвижного центра равен $Q_{11} = 4\rho l^3/3$. Кинетическая энергия равна $\mathcal{E} = mv^2 l^2/3$. Решение полностью аналогично решению задачи 1.8.12 (с заменой $d \rightarrow \rho l^2/6$, $m \rightarrow \rho m/3$). В результате:

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{64\rho^2 l^4}{15mc^2} t^2 \right)^{-1/4}.$$

1.8.17. Собственные оси квадруполя направлены по диагоналям квадрата и по оси z . Соответствующие собственные числа равны $Q_{11} = -Q_{22} = 12qa^2$, $Q_{33} = 0$ (см. задачу 1.6.5). Обозначим единичные собственные векторы \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда для них выполняется: $\mathbf{e}_1 = \omega \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 = -\omega \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 = 0$. Далее:

$$Q_{ij} = 12qa^2(e_{1i}e_{1j} - e_{2i}e_{2j}), \quad Q_{ii} = 96qa^2\omega^2(-e_{1i}e_{2j} - e_{2i}e_{1j}).$$

Интенсивность излучения и уравнение баланса энергии:

$$I_d = \frac{Q_0 Q_0}{180 c^3} = \frac{1024 q^2 a^4 \omega^6}{15 c^3} = -\frac{dE}{dt}, \quad E = 4\pi a^2 \omega^2.$$

Окончательно имеем

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{512 q^2 a^2}{15 m t^3} t \right)^{-1/4}.$$

1.8.18. Уравнение движения (без учета радиационного трения) описывает прецессию магнитного момента вокруг поля \mathbf{H} (здесь \mathbf{M} обозначает механический момент):

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{M}}{dt} = [-\gamma \mathbf{H} \times \mu] = [\omega \times \mu].$$

Находим интенсивность излучения дипольного магнитного момента:

$$I_\mu = \frac{2}{3c^3} \dot{\mu}^2 = \frac{2\omega^4}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2) = \frac{2\gamma^4 H^4}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2) = -\frac{dE}{dt},$$

$$E = -(\mu \mathbf{H}) = -H \mu_z.$$

Получаем дифференциальное уравнение относительно μ_z :

$$\frac{d\mu_z}{dt} = \frac{2\gamma^4 H^4}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2).$$

Интегрируя данное уравнение с начальным условием $\mu_z(0) = 0$, окончательно находим

$$\mu_z(t) = \mu \operatorname{th} \left(\frac{\gamma^4 H^4 t}{6\mu^3} \right),$$

1.8.19. Электрический дипольный момент конденсатора равен $d = qa$. Вычислим интенсивность дипольного излучения (при гармонических колебаниях) и усредняем ее по периоду колебаний:

$$I_d = \frac{2}{3c^3} d^2 = \frac{2a^2 \omega^4}{3c^3} q^2, \quad \text{поэтому} \quad \bar{I}_d = \frac{a^2 \omega^4}{3c^3} q_0^2,$$

где q_0 — амплитуда колебаний заряда на конденсаторе. Энергия конденсатора равна $E_C = 2\pi q^2 a / \kappa$. Полная энергия колебательного контура есть $E = 2\pi q_0^2 a / \kappa$. Уравнение, описывающее баланс энергии, имеет вид

$$\frac{dE}{dt} \approx -\bar{I}_d, \quad \text{или} \quad \ddot{q}_0 = \frac{a \omega^4}{12\pi c^3} q_0.$$

Находим решение уравнения:

$$q_0 = q_0(0) \exp\left(-\frac{az\omega^2}{12\pi c^2}t\right), \quad E = E_0 \exp\left(-\frac{az\omega^2}{6\pi c^2}t\right)$$

Добротность будет равна

$$Q = \frac{6\pi c^2}{az\omega^2} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{az} \gg 1.$$

Добротность велика, поскольку размеры конденсатора много меньше длины волны. Это позволяет считать, что заряд на конденсаторе колебается почти гармонически (затухая за $Q/(2\pi)$ периодов) с частотой $\omega \approx \omega_0$.

1.8.20. Ход решения аналогичен ходу решения задачи 1.8.19. Магнитный момент катушки равен $\mu = NsI/c$. Получаем интенсивность магнитного дипольного излучения (при гармонических колебаниях) и усредняем ее по периоду:

$$I_\mu = \frac{2}{3c} \dot{I}^2 = \frac{2N^2 s^2 \omega^4}{3c^2} I^2, \quad \text{поэтому} \quad \overline{I_\mu} = \frac{N^2 s^2 \omega^4}{3c^2} I_0^2,$$

где I_0 — амплитуда колебаний тока в катушке. Энергия катушки равна $E_L = 2\pi N^2 s I^2 / (ac^2)$. Полная энергия колебательного контура равна $\mathcal{E} = 2\pi N^2 s I_0^2 / (ac^2)$. Записываем дифференциальное уравнение баланса энергии и решаем его:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx -\overline{I_\mu}, \quad \text{откуда} \quad \dot{I}_0 = -\frac{az\omega^2}{12\pi c} I_0, \quad I_0 = I_0(0) \exp\left(-\frac{az\omega^2}{12\pi c^2}t\right).$$

Находим закон изменения энергии и добротность:

$$\mathcal{E} = E_0 \exp\left(-\frac{az\omega^2}{6\pi c^2}t\right), \quad Q = \frac{6\pi c^2}{az\omega^2} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{az} \gg 1.$$

Заметим, что формула для добротности оказывается такой же, как и в задаче 1.8.19.

1.8.21. Частица будет скользить в горизонтальной плоскости при условии взаимной компенсации силы тяжести mg и вертикальной составляющей \mathbf{N}_\perp силы реакции опоры \mathbf{N} . Центростремительное ускорение создается горизонтальной составляющей \mathbf{N}_\parallel .

1) Коническая поверхность: $h = N_1/N_2 = mw/(mg) = w/g$, где w — ускорение частицы. Находим далее ускорение и кинетическую энергию:

$$w = kg = \frac{v^2 h}{r} = v^2 \frac{h}{z}, \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgz.$$

Интенсивность излучения и полная энергия равны

$$I_d = \frac{2}{3c} \dot{d}^2 = \frac{2q^2}{3c} w^2 = \frac{2k^2 q^2 g^2}{3c} = -\frac{dE}{dt}, \quad E = T + U = \frac{1}{2} m g r.$$

Записываем дифференциальное уравнение и решаем его:

$$\ddot{z} = -\frac{4k^2 q^2 g}{9mc^2}, \quad \text{откуда} \quad z(t) = z_0 - \frac{4k^2 q^2 g t}{9mc^2}.$$

2) Параболонд вращения: Общий ход решения аналогичен, поэтому приведем только основные формулы. Находим ускорение, полную механическую энергию и интенсивность излучения:

$$\frac{dz}{dt} = 2 \frac{r}{z} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{m w}{mg} = \frac{w}{g},$$

$$w = 2g \frac{r}{a} = 2g \sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{v^2}{r}, \quad T = \frac{1}{2} mv^2 = mgz,$$

$$I_d = \frac{2q^2}{3c} w^2 = \frac{8q^2 g^2}{3c^2 a} z = -\frac{dE}{dt}, \quad E = T + U = 2mgz.$$

Записываем дифференциальное уравнение и решаем его:

$$\ddot{z} = -\frac{4q^2 g}{3mc^2 a} z, \quad \text{откуда} \quad z(t) = z_0 \exp\left(-\frac{4q^2 g}{3mc^2 a} t\right).$$

1.8.22. Пусть в соответствии с условием задачи диполь Φ_1 расположен в плоскости (x, z) на расстоянии h от идеально проводящей плоскости (т. е. плоскости (x, y) , рис. 1.14).

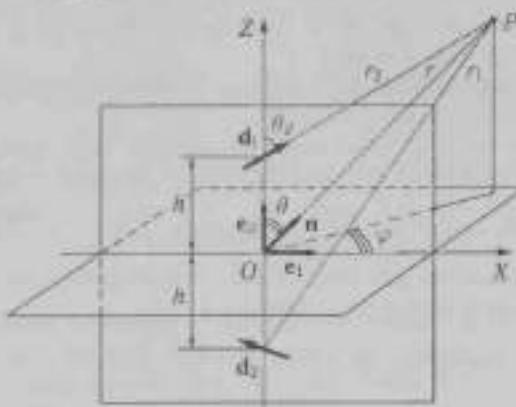


Рис. 1.14. Излучение диполя вблизи проводящей плоскости

При решении задачи используется так называемый *метод изображений*, в соответствии с которым исходная задача с граничными условиями (в нашем случае граничные условия нужно ставить на плоскости (x, y)) заменяется на эквивалентную задачу определения поля в расширенной области без граничных условий, но с учетом зарядов-изображений — фиктивных зарядов, расположенных таким образом, чтобы обеспечить выполнение необходимых граничных условий.

В данной задаче система зарядов вблизи проводящей плоскости обладает зеркальной симметрией, поэтому можно заменить проводящую плоскость «отражением» в ней исходного диполя, т. е. диполем \mathbf{d}_2 , расположенным, как и диполь \mathbf{d}_1 , в плоскости (x, z) , но в полупространстве $x < 0$ (рис. 1.14). При этом мы учитывали, что зеркальным изображением положительного заряда является отрицательный и наоборот.

В итоге мы имеем конфигурацию двух гармонически колеблющихся диполей, изображенную на рис. 1.14. Пусть расстояние от средней точки между диполями (она находится в начале координат) до точки наблюдения в волновой зоне равно r . Расстояния от диполей до точки наблюдения можно записать в виде

$$r_{1,2} = r \pm h(\mathbf{n}\mathbf{e}_z), \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный от центра системы в точку наблюдения. При этом считается, что $h \ll r$.

Далее мы рассмотрим общий случай, когда длина волны поля излучения может быть сравнима по величине с расстоянием между диполями: $\lambda \sim h$ (при условии, что $\lambda \ll r$). С учетом введенных обозначений (рис. 1.14) выражение для диполей \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 можно записать в виде

$$\mathbf{d}_1 = d \cos \theta_d \mathbf{e}_3 + d \sin \theta_d \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}_2 = d \cos \theta_d \mathbf{e}_3 - d \sin \theta_d \mathbf{e}_1, \quad (2)$$

где d — величина диполя, θ_d — угол между диполем и нормалью к проводящей плоскости, т. е. \mathbf{e}_3 .

Временную зависимость диполей при гармонических колебаниях задаем следующим образом:

$$\mathbf{d}_1(t) = \mathbf{d}_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right) \right] = \mathbf{d}_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_z)}{c} \right],$$

$$\mathbf{d}_2(t) = \mathbf{d}_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) \right] = \mathbf{d}_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_z)}{c} \right].$$

Полная напряженность магнитного поля в волновой зоне равна сумме вкладов от каждого диполя в отдельности:

$$\mathbf{H} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left\{ [\mathbf{d}_{01} \times \mathbf{n}] \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_z)}{c} \right] + \right. \\ \left. + [\mathbf{d}_{02} \times \mathbf{n}] \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_z)}{c} \right] \right\}.$$



Здесь мы пренебрели слагаемыми $\pm h(\mathbf{n}\mathbf{e}_3)$ (см. (1)) в знаменателе, ибо не можем отбросить их в запаздывающем времени, потому что именно благодаря этим слагаемым проявляется интерференция между полями излучения истинного и фиктивного диполей. Учитывая (2), приводим выражение для магнитного поля в виде

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 d_0}{c^2 r} \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3] \cos \theta_d \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left[\frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_3)}{c} \right] + \right.$$

$$\left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3] \sin \theta_d \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[\frac{\omega h(\mathbf{n}\mathbf{e}_3)}{c} \right] \right\},$$

где d_0 — амплитуда колебаний диполя. Для углового распределения интенсивности излучения, усредненного за период колебаний, имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4 d_0^2}{2\pi c^2} \{ [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3]^2 \cos^2 \theta_d \cos^2(\alpha(\mathbf{n}\mathbf{e}_3)) + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3]^2 \sin^2 \theta_d \sin^2(\alpha(\mathbf{n}\mathbf{e}_3)) \}.$$

Здесь мы ввели обозначение $\alpha = \omega h/c = h/\lambda$, где $\lambda = \lambda/(2\pi)$. Вводя далее сферические углы вектора \mathbf{n} (рис. 1.14) и интегрируя по углу φ , получаем для полной интенсивности

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{c^3} \int_0^\pi \left[\cos^2 \theta_d (1 - x^2) \cos^2(\alpha x) + \frac{\sin^2 \theta_d}{2} (1 + x^2) \sin^2(\alpha x) \right] dx,$$

причем интегрирование по углу θ производится только по верхнему полупространству. Отсюда находим общий результат:

$$I = \frac{\omega^4 d_0^2}{c^3} \left\{ \left(\cos^2 \theta_d - \frac{\sin^2 \theta_d}{2} \right) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\cos^2 \theta_d + \frac{\sin^2 \theta_d}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^3} \right) \sin 2\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} \cos 2\alpha \right] \right\}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим некоторые предельные случаи выражения (3). Во-первых, исследуем случай $h \ll \lambda$, что соответствует $\alpha \rightarrow 0$. В этом пределе находим:

$$I = \frac{4\omega^4 d_0^2}{3c^3} \cos^2 \theta_d. \quad (4)$$

В данном случае истинный и фиктивный диполи представляют собой единую систему, размеры которой малы по сравнению с длиной волны. Поэтому запаздывание полей излучения между диполями не играет никакой роли. Это означает, что вместо того, чтобы складывать магнитные поля, можно просто вычислить вначале полный дипольный момент

системы, а затем найти интенсивность излучения. Этую программу действительно несложно реализовать. Учитывая (2), легко находим, что суммарный дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = 2d \cos \theta_d \mathbf{e}_z.$$

Вычисление полной интенсивности с таким значением \mathbf{d} действительно приводит к результату (4). Из выражения (4) также видно, что эта интенсивность обращается в ноль, если диполь расположен параллельно плоскости $\cos \theta_d = 0$. Это значит, что в данном случае необходимо найти вклад квадрупольного излучения. Здесь мы этого делать не будем, ибо ограничиваемся исследованием только дипольного излучения.

Второй предельный случай: $k \gg \lambda$, и это соответствует условию $a \rightarrow \infty$. В таком пределе из (3) получается следующий результат:

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{3c^2}.$$

То есть, система диполей в таком приближении излучает в точности так же, как один диполь, причем излучение не зависит от ориентации диполя (нет зависимости от угла θ_d). Это происходит потому, что условие $k \gg \lambda$ фактически означает, что зеркальная поверхность удалена от излучающего диполя на столь большое расстояние, что уже не оказывает на него излучение никакого влияния.

1.9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

1.9.1. Основываясь на выражении для запаздывающих потенциалов

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^4x' \frac{\delta^\mu(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1)$$

вычислим поле, создаваемое точечной заряженной частицей, движение которой задано функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, при этом $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ — скорость частицы. Вначале перепишем (1) в следующем эквивалентном виде:

$$A^\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^4x' \frac{\delta^\mu(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (2)$$

Учитывая далее, что 4-плотность тока заряженной частицы имеет вид

$$j^\mu(\mathbf{r}) = e \frac{dx^\mu}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(0)),$$

вычисляя интеграл по d^3x' в (2), получим

$$A^\mu(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \int \frac{dx'}{dt'} \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|} dt' = \frac{e}{c} \int \frac{dx'}{dt'} \frac{\delta(t-t')}{|f(t')|} \frac{dt'}{R(t')}.$$

Здесь мы применили формулу (Д.7) для δ -функции от сложного аргумента, и под величиной t' мы понимаем решение уравнения

$$f(t') = 0, \quad \text{или} \quad t' + \frac{R(t')}{c} - t = 0, \quad (3)$$

где $R(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $R(t') = |\mathbf{R}(t')|$. И, наконец, учитывая, что

$$f(t') = \frac{df(t')}{dt'} = \left(1 - \frac{(nv)}{c}\right)|_{t'},$$

где $n = \mathbf{R}/R$, получаем

$$A^0(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(1-(nv)/c)}|_{t'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{ev}{cR(1-(nv)/c)}|_{t'}, \quad (4)$$

Потенциалы (4) называются потенциалами Лангара-Вильерта. Время t' есть запаздывающее время, поскольку разность времен $t - t' = R(t')/c$ в точности равна времени распространения электромагнитного поля из точки формирования (местоположение частицы $\mathbf{r}_0(t')$) до точки наблюдения поля. Заметим, что все величины в правых частях (4) берутся в запаздывающий момент t' .

Напряженности полей в точке наблюдения можно вычислить по известным формулам:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В целом данное вычисление не составляет проблема, но является несколько громоздким. Поэтому ограничимся некоторыми указанными. Прежде всего необходимо представить напряженности полей в виде

$$\mathbf{H} = \frac{e[\nabla t' \times \mathbf{w}]}{cR\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)} + \left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \times \frac{ev}{c\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)} \right] + \frac{e[\nabla(nv) \times \mathbf{v}]}{c^2R\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{e}{\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)} \nabla\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{e\nabla(nv)}{cR\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)^2} - \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \left\{ \frac{ew}{cR\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)} + \frac{ev}{c\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{ew}{c^2R\left(1-\frac{(nv)}{c}\right)^2} \frac{\partial(nv)}{\partial t'} \right\}. \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы. Затем можно воспользоваться некоторыми вспомогательными формулами:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)}, \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{n}}{(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R^2},$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{n}}{R^2 (1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)}, \quad \frac{\partial (\mathbf{n}\mathbf{v})}{\partial t'} = (\mathbf{n}\mathbf{w}) + \frac{\mathbf{v}[\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \mathbf{v}\}]}{R},$$

$$\nabla (\mathbf{n}\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{w}) - \mathbf{v}^2/R/c + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})/R}{(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)} + \frac{\mathbf{v}}{R}.$$

Здесь две первые формулы получаются путем почленного дифференцирования соотношения (3). Остальные результаты следуют из первых двух формул.

После проведения вычислений получаем следующие выражения:

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right)}{R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3} + \frac{e [\mathbf{n} \times \left(\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w} \right)]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(r, t) = \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) [\mathbf{v} \times \mathbf{n}]}{c R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3} + \frac{e [c \mathbf{w} \times \mathbf{n} + \{\mathbf{n} \times \{[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \times \mathbf{n}\}\}]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3}. \quad (6)$$

Заметим, что в этих формулах все величины в правых частях берутся в запаздывающий момент времени t' . Нетрудно проверить, что всегда выполняется $\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$.

Каждое из выражений (5) и (6) для напряженностей полей содержит два слагаемых: первые слагаемые зависят только от скорости частицы и не зависят от ускорения, а вторые слагаемые пропорциональны ускорению \mathbf{w} частицы. Первые слагаемые имеют квазистатический характер, убывая с расстоянием, как R^{-2} , в то время, как члены, зависящие от ускорения, описывают поперечное поле излучения, для которого поля \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны друг другу и радиус-вектору \mathbf{R} , и изменяются, как R^{-1} с ростом R .

1.9.2. Если ускорение частицы равно нулю, то в формулах (5) и (6) задачи 1.9.1 остаются только первые слагаемые. Именно они и описывают статические поля, создаваемые равномерно движущимся зарядом. Запишем эти поля в виде

$$\mathbf{E}(r, t) = \left. \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right)}{\left(R - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{v})}{c} \right)^3} \right|_v, \quad \mathbf{H}(r, t) = \frac{[\mathbf{R} \times \mathbf{E}]}{R}. \quad (1)$$

Заметим, что в формулах (1) поля выражены в терминах запаздывающего времени t' . Установим, как они будут выглядеть в момент времени наблюдения t . Воспользуемся следующими геометрическими соображениями.

На рис. 1.15: O — точка наблюдения, S — точка, в которой заряд находится в момент времени t , S' — точка, в которой он находился в соответствующий запаздывающий момент t' , θ' — угол между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}(t')$ положения частицы в момент t' . Начало отсчета времени выбрано так, что в момент $t = 0$ заряд находится на кратчайшем расстоянии (равном ρ) от точки наблюдения.

Расстояние $S'M$ равно $(vR(t')/c)\cos\theta' = (\mathbf{R}(t')\mathbf{v})/c$, поэтому отрезок OM равен $R(t') - (\mathbf{R}(t')\mathbf{v})/c$. Эта величина входит в знаменатель формулы (1). Из треугольников OMS и $S'SM$ следует, что

$$\left(R(t') - \frac{(\mathbf{R}(t')\mathbf{v})}{c} \right)^2 = OM^2 = R^2(t) - MS^2 = R^2(t) - \left(\frac{vR(t')}{c} \right)^2 \sin^2\theta'.$$

Из рисунка видно, что $R(t')\sin\theta' = \rho = R(t)\sin\theta$, а также

$$\mathbf{R}(t') - \frac{\mathbf{v}}{c}R(t') = \mathbf{R}(t).$$

Объединяя все эти результаты и подставляя их в (1), окончательно находим выражение для напряженности полей в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}],$$

где все величины в правой части взяты в момент времени t . Данный результат можно получить также и из статического кулоновского поля заряда, используя преобразование Лоренца.

1.9.3. Указания: использовать результат предыдущей задачи. Приводим ответ:

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cos\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \sin\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}},$$

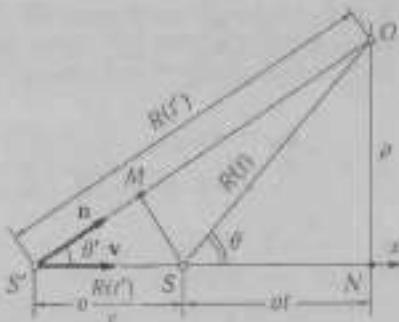


Рис. 1.15. К вопросу о выводе связи между напряженностью полей в запаздывающий момент времени t' и в момент времени наблюдения t .

где \mathbf{R} — радиуп-вектор от v_2 к v_1 , θ — угол между векторами \mathbf{R} и \mathbf{V} , заряды движутся вдоль оси x .

1.9.4. Как следует из формул (5), (6) задачи 1.9.1 (см. также (1.62)), на больших расстояниях от частицы выражения для напряженностей полей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{e \left[\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w} \right] \right]}{c^2 R (1 - (\mathbf{n} \mathbf{v})/c)^2}, \quad \mathbf{H} = |\mathbf{n} \times \mathbf{E}|, \quad (1)$$

т.е. содержат только волновые поля (волны, спадающие, как $1/R$ и создающие конечный поток энергии на бесконечности).

Общее выражение для углового распределения мощности излучения имеет вид (в соответствии с (1.66))

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{||\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w}]||^2}{(1 - (\mathbf{n} \mathbf{v})/c)^2} \Big|_{r'},$$

где все величины в правой части взяты в запаздывающий момент времени t' . Здесь \mathbf{v} и \mathbf{w} — скорость и ускорение частицы, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор в направлении наблюдения.

Далее мы будем считать, что заряд ускоряется в течение короткого интервала времени, при этом скорость и ускорение не успевают существенно измениться, тем самым мы будем рассматривать мгновенное угловое распределение мощности.

1) Скорость \mathbf{v} параллельна ускорению \mathbf{w} (в момент времени t'). При этом угловое распределение мощности излучения имеет вид

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{||\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{w}]||^2}{(1 - (\mathbf{n} \mathbf{v})/c)^2} = \frac{e^2 \mathbf{w}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2},$$

причем угол θ отсчитывается от направления \mathbf{w} или \mathbf{v} .

2) Скорость \mathbf{v} перпендикулярна ускорению \mathbf{w} (в момент времени t'). Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль скорости, угол θ будет отсчитываться от направления скорости, азимутальный угол φ отсчитывается от направления ускорения. Угловое распределение мощности будет иметь вид

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 \mathbf{w}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3} \left\{ 1 - \frac{(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} \right\}.$$



3) Выводы (рис. 1.16). При $v/c \ll 1$ оба распределения переходят в нерелятивистскую формулу для интенсивности дипольного излучения. На рис. 1.16 соответствующие диаграммы изображены штриховой линией.



Рис. 1.16. Угловое распределение мощности излучения релятивистской заряженной частицы: а — скорость параллельна ускорению ($\gamma = 2$), б — скорость перпендикулярна ускорению ($\gamma = 1.2$), штриховая линия относится случаю $v/c \ll 1$.

При $v/c \rightarrow 1$ (ультрарелятивистский предел) диаграмма излучения «вытягивается» в направление движения частицы. Наблюдается «проекционный эффект», сопровождающий излучение релятивистских частиц: основная часть излучения происходит в конус очень узкого раствора $\delta\theta \lesssim 1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2/E$, ось которого направлена вдоль скорости. В этом можно убедиться, анализируя знаменатели в угловых распределениях. В самом деле, раствор конуса по порядку величины можно определить из следующего приближенного соотношения:

$$1 - \frac{(nv)}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos \delta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \theta^2),$$

откуда и следует приведенная выше оценка¹⁰. Вне этого конуса мощность излучения очень быстро спадает.

1.9.5. Как следует из формулы (1.66) (см. также (1.63) и (1.65)), скорость полных потерь энергии заряженной релятивистской частицы за счет излучения получается в результате интегрирования по углам соответствующего углового распределения мощности:

$$-\frac{dE}{dt} = W = \int \frac{dW}{dt} d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c^5} \int \frac{[(n \times (n - v/c) \times w)]^2}{(1 - (nv)/c)^3} d\Omega, \quad (1)$$

где v — скорость, w — ускорение частицы, n — единичный вектор в направлении наблюдения.

¹⁰ Здесь использовано приближение $1 - (v/c)^2 \approx (1 - v/c)(1 + v/c) \approx 2(1 - v/c)$.

Далее прежде всего заметим, что мощность излучения или потеря энергии частицей в единицу запасы времени (1) является relativistским инвариантом. Для того, чтобы убедиться в этом, вначале перейдем в собственную (мгновенно сопутствующую) инерциальную систему отсчета K_0 , где мгновенная скорость частицы равна нулю ($v_0 = 0$). Выполнив интегрирование по углам в выражении (1) в этой системе, получим

$$-\frac{dE}{dt} \Big|_{K_0} = -\frac{dE_0}{dt'_0} = \int_0^{\pi} \frac{e^2 w_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3}, \quad (2)$$

где w_0 — ускорение частицы в мгновенно сопутствующей системе отсчета, $dt'_0 = d\tau$ — интервал собственного времени частицы, θ — угол между ускорением w_0 и направлением наблюдения излучения \vec{p} в момент времени t'_0 . Отсюда видно, что излучение в мгновенно сопутствующей системе отсчета фактически имеет дипольный характер, ибо подинтегральное выражение в (2) переходит в известное угловое распределение интенсивности излучения дипольного момента при замене $\vec{d} = ew_0$. Полная скорость потерь энергии в системе K_0 описывается передаточной формулой для полной интенсивности дипольного излучения.

Далее вспомним, что наряду с энергией излучение уносит также и импульс, причем в волновой зоне импульс золя, излучаемый в промежуток времени dt' в телесный угол $d\Omega$, направлен по вектору \vec{p} (по радиус-вектору точки наблюдения). В этой связи рассмотрим четырехмерный вектор потерь энергии-импульса частицы за время dt' :

$$dP^\mu = (-dE/c, -dp).$$

В силу симметрии углового распределения дипольного излучения относительно замены $\theta \rightarrow \pi - \theta$ полная потеря импульса частицей в системе K_0 равна нулю: $d\vec{p} = 0$. Поэтому в мгновенно сопутствующей системе отсчета

$$dP_0^\mu = (-dE_0/c, 0).$$

Перейдем далее в лабораторную систему отсчета (в которой скорость частицы равна v), используя преобразование Лоренца. Учитывая, что $-dE = -dE_0 \gamma$, и, соответственно, $dt'_0 = d\tau = dt'/\gamma$, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, получим, что скорость потерь энергии является лоренци-инвариантом:

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{dE_0}{dt'_0} = -\frac{dE_0}{dt'} = \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3}. \quad (3)$$



(формула Лармора). Формулу (3) можно записать в релятивистской инвариантном виде, заменив w_0^2 релятивистским инвариантом, переходящим в w_0^2 в системе отсчета K_0 . Таким инвариантом является четырехмерный квадрат 4-ускорения частицы $w^\mu = dw^\mu/ds$ (см. (1.68)), где $w^\mu = dx^\mu/ds = 4$ -скорость частицы. В мгновенно сопутствующей системе отсчета $w^\mu = (0, \mathbf{w}_0/c^2)$, поэтому $w^\mu w_\mu = -w_0^2/c^4$. Таким образом, в лабораторной системе скорость потерь энергии имеет вид

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2 c}{3} w^\mu w_\mu \quad (4)$$

Заметим, что тот же самый результат можно было бы получить, непосредственно проводя интегрирование в (1), однако это потребовало бы существенно больших технических усилий.

В рамках нашей задачи ускорение частицы создается внешним электромагнитным полем — на частицу действует сила Лоренца:

$$\mathbf{w}^\mu = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{ev}{mc^2} \left(\frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}), \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right).$$

В случае синхротронного излучения, т. е., когда частица движется в однородном магнитном поле по круговой траектории, выполняется $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$, и поэтому (4) приводится к виду

$$-\frac{dE}{dt} = W = \frac{2e^4 \gamma^2}{3m^2 c^5} v^2 H^2. \quad (5)$$

Для электрона, движущегося в ускорителе в однородном магнитном поле с постоянной по модулю скоростью, имеют место следующие соотношения:

$$\omega = \frac{eH}{mc}, \quad R = \frac{v}{\omega} = \frac{mc^2 \alpha \gamma}{eH}, \quad \text{т. е.} \quad eH = \frac{mc^2 \alpha \gamma}{R}, \quad L = 2\pi R,$$

где ω — частота вращения, R — радиус круговой траектории, L — длина окружности ускорителя. Движение электрона мы считаем релятивистским, т. е. $\rho \sim c$ или $\gamma = E/(mc^2) \gg 1$. При выполнении всех этих условий формула (5) принимает вид

$$W \approx \frac{8\pi^2 e^2 c}{3 L^2} \gamma^4 = \frac{8\pi^2 e^2 c}{3 L^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4.$$

Форма частотного спектра существенно зависит от соотношения между характерным углом раствора конуса $\delta\theta$, в котором находится основная часть излучения релятивистской частицы (см. задачу 1.9.4), и полным углом $\Delta\theta$, на который отклоняется вектор скорости за все время движения частицы (или за период движения, например, в ускорителе)

Для синхротронного излучения, испускаемого электроном, движущимся по круговой траектории в магнитном поле, выполняется условие $\Delta\theta \gg \gamma^{-1}$. При этом излучение в заданном направлении и (в конус с раствором $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$ и осью ядоль направления наблюдения n) определяется участком траектории, на котором вектор скорости поворачиваеться на угол $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$. Длина этого участка, очевидно, равна $\sim l = R/\gamma$ и называется *длиной формирования излучения* или *длиной когерентности*.

Итак, при наблюдении синхротронного излучения в заданном направлении n будет регистрироваться последовательность коротких импульсов. Оценим их длительность. В конус с углом раствора γ^{-1} частица излучает в течение промежутка времени

$$\Delta t' = \frac{l}{v} \approx \frac{R}{\gamma v} \approx \frac{R}{\gamma c},$$

так как $v \sim c$. Наблюдатель регистрирует это излучение в течение интервала времени (см. (1.59))

$$\Delta t = (1 - (nv)/c) \Delta t' \approx \gamma^{-2} \Delta t'.$$

Или, окончательно, с учетом того, что частота обращения по окружности равна $\omega_0 = eBc/E = v/R = c/R$, имеем

$$\Delta t = \frac{\gamma^{-3} R}{c} \approx \frac{\gamma^{-3}}{4\pi},$$

Это и есть длительность импульса излучения, фиксируемая наблюдателем.

Между длительностью импульса и шириной его спектра имеется известное из теории интеграла Фурье соотношение $\Delta\omega \Delta t \sim 1$ (аналогичное по происхождению соотношению неопределенности в квантовой механике $\Delta E \Delta t \sim \hbar$). Это значит, что импульс длительностью Δt можно разложить в спектр частот шириной вплоть до частот порядка

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \gamma^3 \omega_0 = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \omega_0. \quad (6)$$

При малых частотах мощность излучения растет с ростом частоты ω , поэтому (6) есть оценка положения максимума в спектре излучения. Наблюдатель регистрирует не только излучение на основной частоте обращения электрона, но также и высшие ее гармоники, которые в зависимости от энергии частицы могут попадать в область видимого света (+«светящийся электрон») или лежать выше — вплоть до рентгеновской области.

Итак, характерная длина волны синхротронного излучения (соответствующая частоте ω_c)

$$\lambda_c \approx \frac{c}{\omega_c} \approx R \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \approx 0.006 \text{ \AA}.$$

Среднее расстояние между частицами по окружности ускорителя $L/N \sim -60 \text{ \AA}$. При случайному, но равномерном распределении частиц по траектории излучение некогерентно ($L/N \gg \lambda$), поэтому полная мощность излучения

$$P^{\text{изл}} = NW = \frac{8\pi^2 e^2 c}{3} \left(\frac{L}{mc^2} \right)^3 N \approx 15 \text{ МВт}.$$

1.9.6. Ондуктор представляет собой устройство, обеспечивающее периодическое движение заряда по траектории, близкой к прямой (рис. 1.17). Будем считать, что движение электрона по оси ондулятора (вдоль оси x) происходит с большой (вообще говоря, релятивистской) скоростью. Однородное периодически изменяющееся во времени электрическое поле, приложенное в первом диполиарном к движению электрона направлении (вдоль оси y), вызывает малые колебания частицы в поперечном направлении. Используемое приближение предполагает, что эти колебания практически не влияют на движение электрона со скоростью $v \sim c$ вдоль оси x много меньше скорости вдоль оси y).

Рассмотрим данную задачу в системе отсчета K' , которая движется относительно лабораторной системы вдоль оси x со скоростью v_z , где v_z — продольная скорость частицы, усредненная по периоду поперечных колебаний (условно можно назвать эту систему «системой пучка»). В системе K' электрическое поле на разных участках конденсатора колебается уже не синхронно. Чтобы определить частоту поля в системе пучка, введем четырехмерный волновой вектор стоячей волны в конденсаторе, который в лабораторной системе имеет компоненты

$$k_{\alpha}^e = (\omega_0/c, 0, 0, 0).$$

С помощью преобразования Лоренца получаем тот же вектор в движущейся системе K' :

$$k_{\beta}^e = \frac{1}{c} (\gamma \omega_0, -\beta \gamma \omega_0, 0, 0).$$

где $\beta = v/c$. Для достаточно слабого поля (если в движущейся системе K' электроны остаются нерелятивистскими) частота ондуляторного излучения в системе пучка не зависит от направления и совпадает с частотой вынуждающей силы $k_{ct}^0 = \gamma \omega_0/c$.

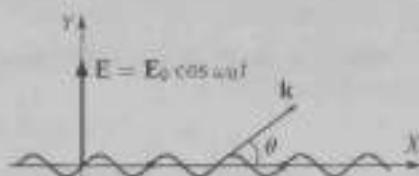


Рис. 1.17. Излучение электрона в периодическом электрическом поле

Далее рассмотрим волновой 4-вектор индуляторного излучения в системе K' . В предположении о том, что излучение испускается в плоскости $\{x, y\}$, он имеет следующие компоненты:

$$k^{\mu} = \frac{1}{c} (\gamma_{\infty}, \gamma_{\infty} \cos \theta', \gamma_{\infty} \sin \theta', 0),$$

где θ' — угол между волновым вектором K' и осью x . При помощи обратного преобразования Лоренца переходим в лабораторную систему:

$$k^{\mu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') \\ \gamma^2 \omega_0 (\beta + \cos \theta') \\ \gamma \omega_0 \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем связь между углами в лабораторной и в движущейся системах отсчета:

$$\cos \theta = \frac{k^1}{k^0} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad \cos \theta' = \frac{-\beta + \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta},$$

а также искомую частоту индуляторного излучения:

$$\omega = ck^0 = \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') = \frac{\omega_0}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (1)$$

Как следует из формулы (1), для индуляторного излучения характерна пространственная дисперсия: под фиксированным углом к оси индулятора испускается определенная частота. Кроме того, как видно из (1), с точки зрения спектрального состава индуляторное излучение существенно отличается от синхротронного. В самом деле, в случае релятивистского движения фактор $(1 - (nv)/c) \sim (1 - \beta \cos \theta) \sim \gamma^{-2}$ (см. задачу 1.9.5), следовательно максимум мощности излучения должен приходиться на частоты порядка

$$\omega \sim \omega_0 \gamma^2 \approx \omega_0 \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2 \quad (2)$$

(ср. с формулой (6) задачи 1.9.5). Указанное отличие двух видов излучения связано с разными условиями формирования синхротронного и индуляторного излучения. Для индуляторного излучения полный угол $\Delta\theta$, на который отклоняется вектор скорости за все время движения частицы, не велик и удовлетворяет условию $\Delta\theta < \gamma^{-1} \ll 1$. Это означает, что длина формирования индуляторного излучения, вообще говоря, больше, чем для синхротронного: излучение собирается не с малого участка траектории, а фактически со всей траектории движения. Общий характер излучения остается синхротронным: все излучение направлено в



узкий конус вперед по движению, однако максимум мощности лежит на несколько другую величину⁷⁾.

1.9.7. Мощность синхротронного излучения (или полное количество потери энергии на излучение заряженной частицей в единицу запаздывающего времени) имеет вид (см. формулу (5) задачи 1.9.5)

$$W_{\text{синт}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^2}\gamma^4 w^2 = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^2 \gamma^2 v^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^2} (\gamma^2 - 1).$$

Полагая, что потери энергии за период движения в магнитном поле малы, приходим к дифференциальному уравнению

$$E = mc^2\gamma, \quad \frac{dE}{dt} = mc^2\dot{\gamma} = -W_{\text{синт}}, \quad \text{или} \quad \frac{\dot{\gamma}}{1-\gamma^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^2}.$$

Решая данное уравнение, находим зависимость энергии от времени:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{t - t_0}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{3m^2 c^2}{2e^4 H^2}.$$

В пределе больших $t - t_0$ находим для кинетической энергии

$$T = E - mc^2 = mc^2 \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{t - t_0}{\tau} \right) - 1 \right\} \approx E_0 \exp \left(-2 \frac{t}{\tau} \right).$$

Это соответствует формуле для энергии нерелятивистского электрона в магнитном поле, полученной в задаче 1.8.8.

1.9.8. Полагая, что векторы скорости и ускорения сонаправлены, т. е. $w \parallel v$, имеем

$$w = \frac{eE}{mc^2}.$$

Мощность электромагнитного излучения, определяющая энергетические потери для частицы в единицу времени, постоянна и может быть представлена в виде

$$W_{\text{синт}} = \frac{2e^2}{3c^2} \left\{ \gamma^4 w^2 + \gamma^2 \frac{1}{c^2} (vw)^2 \right\} = \frac{2e^2}{3c^2} \gamma^6 w^2 = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^2}.$$

Мощность силы, действующей на ультрарелятивистскую частицу в электрическом поле, т. е. работа, совершаемая электрическим полем в единицу времени, равна

$$(eE v) \approx |e|Ec, \quad \text{КПД} \approx 1 - \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^2}.$$

⁷⁾ Оценку для характеристической частоты излучения (2) можно получить методом, использованным в задаче 1.9.5, см. формулу (6).

1.10. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1.10.1. Поле падающей волны имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}r)) \}, \quad \mathbf{H}_0 = [\mathbf{k}^0 \times \mathbf{E}_0],$$

где $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}/|k|$, \mathbf{k} — волновой вектор падающей волны. Уравнение движения нерелятивистского электрона в поле падающей волны:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \approx e\mathbf{E}_0 \approx e \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \}.$$

В данном случае силой $\frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0]$, действующей со стороны магнитного поля можно пренебречь, так как $|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{H}_0|$, а $v/c \ll 1$. Электрическое поле можно считать однородным (пренебрегая слагаемым $i\mathbf{k}r$ в показателе экспоненты), поскольку $kr \sim a/c \ll 1$. Заряд движется с ускорением, поэтому

$$\ddot{\mathbf{r}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \}.$$

Поле дипольного излучения:

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{R}, t) = \frac{\mathbf{d}_\perp (t - R/c)}{c^2 R} = \frac{|\mathbf{d}(t - R/c) \times \mathbf{n}| \times \mathbf{n}}{c^2 R},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ — единичный вектор в направлении наблюдения. Символ \perp обозначает проекцию на плоскость, перпендикулярную направлению рассеяния.

Вектор амплитуды колебаний поля \mathbf{E}_d с точностью до нормировочного множителя задает вектор поляризации.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{E}_{d\perp}}{|\mathbf{E}_{d\perp}|} = \frac{\mathbf{E}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{E}_0)}{|\mathbf{E}_{d\perp}|}.$$

1) Для падающей волны, линейно поляризованной по оси x , очевидно, $\mathbf{E}_0 \sim (1, 0, 0) = \mathbf{e}_x$, и мы получаем вещественный вектор поляризации, т. е. поляризация линейная: $\mathbf{a} \sim \mathbf{e}_x - \mathbf{n}\mathbf{a}$. Для $\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_z$ вектор поляризации рассеянной волны не определен, поскольку в этих направлениях волна не рассеивается.

2) Для циркулярно поляризованной в плоскости (x, y) волны $\mathbf{E}_0 \sim -\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$, и мы получаем

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{e}_{\pm} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \mathbf{n}.$$



В этом случае для рассеяния строго вперед или строго назад вектор поляризации рассеянной волны совпадает с вектором поляризации падающей. Однако, поскольку для рассеяния назад направление распространения волны меняется на противоположное, рассеянная назад волна имеет направление вращения электрического поля относительно волнового вектора противоположное направлению вращения в падающей волне. Для рассеяния на угол $\pi/2$ рассеянная волна поляризована линейно. При рассеянии на промежуточные углы мы получаем промежуточные (эллиптические) поляризации, причем в случае рассеяния в переднюю полусферу направление вращения поля совпадает с направлением вращения в падающей волне, а для рассеяния в заднюю полусферу направление вращения меняется.

Если в малой окрестности положения электрона изобразить ориентированную кривую, которую описывает конец вектора E_0 в данной точке пространства (отрезок для линейной поляризации, или окружность для круговой), то поляризация излучения, рассеянного в направлении n , соответствует тому, как проецируется эта кривая на плоскость зрения наблюдателя, который смотрит на электрон со стороны вектора n .

1.10.2. Пусть электромагнитное поле падающей волны имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}r))\},$$

тогда вектор Умова-Пойнтинга, описывающий плотность падающего потока излучения, т. е. $\mathbf{S}_0 = (c/4\pi)\mathbf{E}_0 \mathbf{k}^0$, где $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ — единичный вектор вдоль волнового вектора падающей волны, после усреднения по периоду будет равен

$$\overline{|\mathbf{S}_0|} = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*).$$

Как и в предыдущей задаче, вначале необходимо записать уравнение движения осциллятора в поле падающей волны:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] + \mathbf{F}_{\text{рад}}, \quad (1)$$

где первое слагаемое в правой части обусловлено квазиупругой силой, следующие два слагаемых — силой Лоренца, и последнее слагаемое есть сила радиационного трения (см. (1.70)).

$$\mathbf{F}_{\text{рад}} = \frac{2e^2}{3c^2} \dot{\mathbf{r}} = -\frac{2e^2 \omega_0^2}{3c^2} \mathbf{r}. \quad (2)$$

Основное условие применимости выражения (2) состоит в том, что сила $|\mathbf{F}_{\text{рад}}|$ должна быть мала по сравнению с другими членами уравнения. Поэтому, поскольку в нулевом приближении (в пренебрежении всеми

малыми добавками) уравнение (1) имеет вид $i\dot{r} = -m\omega_0^2 r$, то отсюда находим $r = -\omega_0^2 t$, и это учитывается во втором приближенном равенстве формулы (2). Далее мы обозначим

$$\gamma_r = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^2},$$

это есть **постоянная затухания**, связанная с радиационным трением. Если существенную роль играют также и другие факторы, вызывающие диссиацию энергии (например, столкновения атомов, их тепловое движение), то в левую часть уравнения (1) необходимо внести слагаемые вида $-m\gamma' r$, где γ' — постоянная затухания, характеризующая величину диссиативных эффектов незлектромагнитного происхождения. Тогда величина $\gamma = \gamma_r + \gamma'$ есть **полная постоянная затухания** (полная ширинка линии). В итоге мы получаем следующее уравнение:

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

В (3) нами сделано следующее стандартные приближение: мы пренебрели в правой части $i\dot{r}$ в показателе экспоненты (поскольку $\dot{r} \sim -v/c \ll 1$), а также опустили магнитную часть силы Лоренца (рассматривая предельно нерелятивистский случай $v/c \rightarrow 0$). Амплитуда волны E_0 — величина комплексная, на операцию выделения действительной части можно отнести на один из последних этапов в вычислениях, поскольку мы используем пока только линейные операции. Решая уравнение, находим

$$r(t) = \frac{e}{m \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

— устоявшийся режим для вынужденных колебаний (собственные колебания осциллятора затухают за время $\sim \gamma^{-1}$ и здесь нас не интересуют). Учитываем дальше, что электрический дипольный момент колеблющейся частицы равен $d = er$, поэтому $\dot{d} = -\omega^2 er$, выделяем вещественную часть и, усредняя по периоду движения, получаем среднее значение интенсивности вторичного излучения в телесный угол $d\Omega$ (см. (1.50)):

$$\overline{dI} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |[d \times n]|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3 m^2 (\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2} |[E_0 \times n]|^2 d\Omega,$$

где $n = R/R$ — единичный вектор в направлении точки наблюдения. Множитель $|[E_0 \times n]|^2$ зависит от поляризации падающей волны. Заметим, что

$$|[E_0 \times n]|^2 = |E_0 \times n| |E_0^* \times n| = |E_0|^2 - (E_0 n)(E_0^* n) = (\delta_{ii} - n_i n_j) E_{ik} E_{0k}^*,$$

следовательно, дифференциальное сечение рассеяния можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \frac{1}{|\mathbf{S}|} \frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2} (\delta_{ij} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j) \frac{E_0 E_0^*}{|\mathbf{E}_0|^2}. \quad (4)$$

Здесь $e^2/(mc^2) = r_{pl}$ — классический радиус заряженной частицы. Напомним далее, что вектор \mathbf{E}_0 — комплексный, но он поперечен: $(\mathbf{E}_0 \mathbf{k}) = 0$. В плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k} , можно разложить амплитуду \mathbf{E}_0 по взаимно перпендикулярным (вообще говоря, комплексным) ортам $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$, которые вместе с исходным вектором \mathbf{k} (в дальнейшем будем использовать также $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$) образуют приведенную тройку векторов: $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) = (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{k}) = 0$, $\mathbf{e}^{(2)} = [\mathbf{k}^2 \times \mathbf{e}^{(1)}]$ (см. также (1.45)). При помощи этого локальносного базиса описывается поляризация исходной волны. Как видно из (4), непосредственно с поляризацией падающей волны связана функция

$$\rho_i = \frac{E_0 E_0^*}{|\mathbf{E}_0|^2},$$

называемая тензором поляризации.

Если поляризация падающей волны линейная, то для ее описания достаточно одного вещественного вектора поляризации, например, $\mathbf{e}^{(1)}$, и поэтому $\rho_i = e_i^{(1)} e_j^{(1)*}$, а дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega} \right)_{lin} = r_{pl}^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2} (1 - (\mathbf{n} \mathbf{e}^{(1)})^2). \quad (5)$$

Данную формулу можно записать в несколько ином, эквивалентном, виде, если заметить, что $(1 - (\mathbf{n} \mathbf{e}^{(1)})^2) = \sin^2 \theta$, где θ — угол между векторами \mathbf{n} и $\mathbf{e}^{(1)}$.

Если поляризация падающей волны правая или левая циркулярная, то вместо вещественных векторов $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ рассматривают орты $\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})$, где $i = \pm 1$, причем $i = +1$ отвечает правой, а $i = -1$ — левой циркулярной поляризации. При этом тензор поляризации принимает вид

$$\rho_i = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - k_i^2 k_j^2) - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} k_k^2,$$

где мы учли, что

$$\sum_{a=1,2} e_i^{(a)} e_j^{(a)*} = \delta_{ij} - k_i^2 k_j^2.$$

Дифференциальное сечение рассеяния в этом случае:

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega} \right)_{circ} = \frac{r_{pl}^2}{2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2} (1 + (\mathbf{n} \mathbf{k}^{(1)})^2). \quad (6)$$

Данную формулу можно записать по-иному, если заметить, что $(1 + (\mathbf{n}\mathbf{k}^0)^2)/2 = (1 + \cos^2 \theta)/2$, где θ — угол между направлением распространения падающей волны \mathbf{k} и направлением рассеяния \mathbf{n} .

Для естественного света усредним вектор $e^{(1)}$ в формуле (5) по всем направлениям, перпендикулярным вектору \mathbf{k} , используя соотношение

$$\langle e_i^{(1)} e_j^{(1)} \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - k_i^0 k_j^0).$$

В результате мы получим дифференциальное сечение рассеяния естественного света, которое в точности совпадает с (6).

Полное сечение рассеяния получается в результате интегрирования по углам любого из выражений (4), (5) или (6), не зависит от поляризации падающей волны и имеет вид

$$\sigma_p = \frac{8\pi}{3} F_{\text{вн}}^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Полученное нами полное сечение рассеяния характеризуется следующими отличительными чертами.

Для частот, много меньших частоты связи ($\omega \ll \omega_0$) сечение рассеяния $\sigma_p \sim (\omega/\omega_0)^4$, т. е. интенсивность рассеяния длинноволнового излучения обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (закон рассеяния Рэлея). В области частот, близких к ω_0 , сечение рассеяния демонстрирует резонансное поведение, т. е. сильно возрастает. Ширина максимума характеризуется постоянной затуханием γ . На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) сечение приближается к томсоновскому сечению для свободной частицы (1.71). Следует однако иметь в виду, что применимость данной формулы в области высоких частот ограничена: квантовые эффекты начинают играть существенную роль, когда энергия кванта излучения $\hbar\omega \sim mc^2$. Резко выраженное резонансное рассеяние при $\omega \approx \omega_0$ называется резонансной флуоресценцией.

Поляризация рассеянной волны исследуется теми же методами, что были применены в задаче 1.10.1, общие выводы — такие же.

Сечение поглощения можно определить, как отношение энергии, поглощенной в единицу времени в единичном интервале частот к величине падающего потока энергии в этом же частотном интервале. Энергия, поглощаемая в единицу времени, есть не что иное, как мощность силы трения:

$$W_{\text{пог}} = \langle \mathbf{F}_{\text{тр}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rangle = m \gamma(\mathbf{r})^2,$$

откуда после выделения вещественной части и усреднения по времени следует

$$\overline{W}_{\text{пог}} = \frac{e^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2 |\mathbf{E}_0|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

При этом сечение поглощения оказывается равным

$$\sigma_{\text{погл}} = \frac{\overline{W}_{\text{погл}}}{|\mathbf{S}_0|} = \frac{e^2}{mc^2} \frac{4\pi c \gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Видно, что вблизи резонансной частоты $\omega \sim \omega_0$ сечение поглощения также имеет резонансный характер. Сечение поглощения можно назвать полным сечением, так как оно учитывает влияние всех диссипативных процессов как электромагнитного, так и неэлектромагнитного происхождения, ибо при расчете мы не интересовались будущим поглощенной энергией в дальнейшем излучена в виде рассеянной электромагнитной волны или рассеяется другим способом.

1.10.3. См. задачу 1.10.4 в случае $\omega_0 = 0$.

1.10.4. Запишем уравнения движения осциллятора в поле \mathbf{H}_0 и поле волны:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^2} \mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0)],$$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \operatorname{Re}\{ee^{i(kr-\omega t)}\}, \quad (ee^*) = 1, \quad (ek) = 0,$$

где \mathbf{e} — вектор поляризации падающей волны (по условию задачи поляризация должна быть циркулярной). Далее мы делаем стандартные приближения (см. задачу 1.10.2) пренебрегая магнитной составляющей силы Лоренца, а также отпускаем $k\mathbf{r} \ll 1$ в показателе экспонента. Для режима установившихся колебаний $\mathbf{r} \sim e^{-\omega t}$, поэтому $\dot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$. Считаем, что внешнее поле \mathbf{H}_0 направлено по оси z . В итоге уравнение приводится к виду

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + i\omega_0 (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = \frac{eE_0}{m} \operatorname{Re}\{ee^{-\omega t}\},$$

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^2}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc},$$

где \mathbf{e}_z — вещественный единичный вектор вдоль оси z . Будем искать решение для установившихся колебаний в виде $\mathbf{r}(t) = \rho_0 e^{-i\omega t}$. Усредненная по периоду плотность потока энергии в падающей волне и усредненная интенсивность рассеянной дипольной волны в направлении $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ имеют вид

$$|\mathbf{S}_0| = \frac{eE_0^2}{8\pi}, \quad \overline{dI_d} = \frac{e^2 \omega^4}{8\pi c} ((\rho_0)^2 - (\rho_0 \mathbf{n})(\rho_0^* \mathbf{n})) d\Omega,$$

поэтому дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\overline{dI_d}}{|\mathbf{S}_0|} = \frac{e^2 \omega^4}{c^4 E_0^2} (\delta_H - n_i n_j) \rho_0 \rho_0^* d\Omega.$$

Уравнение движения для комплексной амплитуды ρ_0 приводится к виду

$$-\omega_0^2 \rho_0 + \omega_0^2 \rho_0 - i\omega\gamma\rho_0 - i\omega\omega_H [\mathbf{e}_z \times \rho_0] = \frac{eE_c}{m} \mathbf{e}. \quad (1)$$

Для компоненты ρ_{0x} вклад векторного произведения обнуляется, и мы получаем

$$\rho_{0x} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \frac{eE_c}{m} e_z,$$

где e_z есть проекция вектора \mathbf{e} на ось z . Проекция уравнения (1) на плоскость (x, y) дает

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma & -i\omega\omega_H \\ i\omega\omega_H & \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{0x} \\ \rho_{0y} \end{pmatrix} = \frac{eE_c}{m} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix},$$

где e_x, e_y — проекции вектора поляризации \mathbf{e} . Обращая матрицу, получаем решение для амплитуды:

$$\begin{pmatrix} \rho_{0x} \\ \rho_{0y} \end{pmatrix} = \frac{eE_c \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma & i\omega\omega_H \\ -i\omega\omega_H & \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \end{pmatrix}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^2 - \omega^2 \omega_H^2} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}.$$

а) Случай $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$. При этом вектор поляризации ортогонален направлению поля: $(\mathbf{e}\mathbf{H}_0) = 0$. Выберем для циркулярной поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z^{(\pm)} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$. Получаем

$$\rho_0 = \frac{eE_c(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \mp i\omega\omega_H)\mathbf{e}_z^{(\pm)}}{m[(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^2 - \omega^2 \omega_H^2]} = \frac{eE_c \mathbf{e}_z^{(\pm)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \pm i\omega\omega_H)}.$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния для правой (левой) циркулярной поляризации будет иметь вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\pm)} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2 \pm i\omega\omega_H)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Заметим, что полученные дифференциальные сечения содержат знаменатели, обладающие характерным резонансным поведением. Так в случае слабого поля ($\omega_H \ll \omega_0$) для падающей волны правой (левой) циркулярной поляризации резонансное условие выполняется для частот $\omega \approx \omega_0 \pm \omega_H/2$, и это полностью соответствует расщеплению частот во внешнем магнитном поле, имеющему место в *эффекте Зеемана*.

В пределе сильного поля нужно считать, что $\omega_H \gg \omega$, $\omega_H \gg \omega_0$, $\omega_H \gg \gamma$. В этом приближении находим следующее выражение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\pm)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\pm)} \approx r_{\text{ex}}^2 \frac{\omega^2}{\omega_H^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$



которое является справедливым как для циркулярно поляризованного, так и для естественного света.

б) Случай $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$. Тогда для циркулярной поляризации выберем вектор поляризации в виде $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z^{(1)} = (0, 1, \pm i)/\sqrt{2}$. Считая, что ω_0 много больше чем ω , ω_0 , γ , находим

$$\rho_0 = \frac{eE_0}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega_0\gamma}{|\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma|^2 + \omega^2\omega_0^2} \\ \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{|\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma|^2 + \omega^2\omega_0^2} \\ \pm i \\ \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \end{pmatrix} \approx \frac{\pm eE_0/\omega_0}{\sqrt{2m}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По существу мы получили, что сильное магнитное поле «замораживает» движение осциллятора в перпендикулярном к полю направлении и при этом не влияет на его продольное движение. Для обеих циркулярных поляризаций получается одинаковое сечение рассеяния, которое также совпадает с сечением для естественного (неполяризованного) света:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{2} r_{\text{as}}^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} (1 - \cos^2 \theta).$$

1.10.5. Для магнитного дипольного рассеяния

$$\overline{|\mathbf{S}_1|} = \frac{cH^2}{4\pi}, \quad dI_p = \frac{d\Omega}{4\pi c^2} (\mu^2 - (\bar{\mu}\bar{n})^2), \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{dI_p}}{c^3 H^2}.$$

Здесь μ — магнитный дипольный момент, \bar{n} — единичный вектор в направлении наблюдения. Уравнение эволюции во времени магнитного дипольного момента имеет вид

$$\dot{\mu} = \gamma_p \tilde{\mathbf{M}} = \gamma_p [\mu \times \mathbf{H}].$$

Магнитное поле циркулярно поляризованной волны вращается вокруг волнового вектора: $d\mathbf{H}/dt = [\omega \times \mathbf{H}]$, где $\omega = \pm \omega \mathbf{k}/k = \pm \omega \mathbf{k}^0$, $\mathbf{k}^0 = (-0, 0, 1)$. (Волновой вектор направлен по оси z .) Поэтому

$$\ddot{\mu} = \gamma_p ([\mu \times \mathbf{H}] + [\mu \times \dot{\mathbf{H}}]) = \gamma_p^2 [[\mu \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}] + \gamma_p [\mu \times [\omega \times \mathbf{H}]].$$

Критерий малости гиromагнитного отношения в данной задаче: $\gamma_p H \ll \omega$. Он означает, что угловая скорость пресессии магнитного момента в поле \mathbf{H} мала по сравнению с частотой падающей волны. Для малого гиromагнитного отношения имеем

$$\ddot{\mu} \approx \gamma_p [\mu \times [\omega \times \mathbf{H}]] = \gamma_p [\omega (\mu \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mu \omega)] = \gamma_p \omega (\mu \mathbf{H}) \approx \gamma_p \omega (\mu_0 \mathbf{H}).$$

Таким образом, магнитный дипольный момент совершает малые колебания в плоскости, натянутой на векторы $\omega \parallel k^0 \times \mu_0$. Поскольку магнитный момент совершает малые колебания около среднего положения, при усреднении по времени μ заменяем на μ_0 :

$$\overline{(\mu_0 \mathbf{H})^2} = \rho_0 \mu_0 \overline{\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i}$$

Усредним теперь произведение $\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i$ по времени:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i} &= \overline{\begin{pmatrix} H \cos \omega t \\ H \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \cos \omega t \\ H \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}} = \\ &= \mathbf{H}^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \cos \omega t \sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t \cos \omega t & \sin^2 \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{H}^2 \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1, 0).\end{aligned}$$

Учитывая что $\mu_2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\overline{(\mu_0 \mathbf{H})^2} &= \rho_0 \mu_0 \mathbf{H}^2 \frac{1}{2} [\text{diag}(1, 1, 0)]_{ii} = \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \mu_0^2 = \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \mu^2, \\ d\sigma &= \frac{\gamma_0^2 \omega^2 \mu^2}{2c^3} (1 - (\mathbf{n} \mathbf{k}^0)^2) d\Omega = \frac{\gamma_0^2 \omega^2 \mu^2}{2c^3} \sin^2 \theta d\Omega.\end{aligned}$$

В силу того, что вектор $\bar{\mu}$ совершает гармонические колебания, оставаясь параллельным оси z , диаграмма направленности рассеянной волны отвечает магнитному дипольному излучению с осью симметрии z .

1.10.6. Поле падающей волны внутри конденсатора компонсируется полем зарядов, наведенных на обкладках конденсатора. Плотность наведенных зарядов и их дипольный момент имеют вид

$$\frac{q}{s} = \frac{E}{4\pi}, \quad \mathbf{d} = \frac{as\mathbf{E}_0}{4\pi} = \left(\frac{as\mathbf{E}_0}{4\pi} \right) \cos(\omega t).$$

Находим далее угловое распределение интенсивности дипольного излучения (ниже θ — угол между радиус-вектором точки наблюдения \mathbf{R} и вектором \mathbf{E}_0 падающей волны) и сечение рассеяния:

$$\begin{aligned}\frac{dI_d}{d\Omega} &= \frac{\overline{\mathbf{d}^2}}{4\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{1}{8\pi c^3} \left(\frac{as\omega^2}{4\pi} E_0 \right)^2 \sin^2 \theta, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{|S_0|} \frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3} \sin^2 \theta, \quad \sigma = \int d\sigma = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{64\pi c^3}.\end{aligned}$$

1.10.7. Поле падающей волны внутри катушки компенсируется полем токов, наведенных в обмотке. Наведенный ток и соответствующий магнитный дипольный момент:

$$I = \frac{caH}{4\pi N}, \quad \mu = -\frac{a^2 H}{4\pi} = -\left(\frac{a^2 H_0}{4\pi}\right) \cos(\omega t).$$

Угловое распределение интенсивности магнитного дипольного излучения (ниже θ — угол между радиус-вектором точки наблюдения \mathbf{R} и вектором \mathbf{H}_0 падающей волны) и сечение рассеяния:

$$\frac{dI_p}{d\Omega} = \frac{\bar{\mu}^2}{4\pi c^2} \sin^2 \theta = \frac{1}{8\pi c^3} \left(\frac{a^2 \omega^2}{4\pi} H_0 \right)^2 \sin^2 \theta,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|S_p|} \frac{dI_p}{d\Omega} = \frac{a^2 \omega^2}{16\pi^2 c^4} \sin^2 \theta, \quad \sigma = \int d\sigma = \frac{a^2 \Gamma^2 \omega^4}{6\pi c^4}.$$

1.10.8. Для грубой оценки можно считать угловое распределение рассеянного света по направлениям близким к изотропному. Это должно быть справедливо для близких к Солнцу участков короны, которые освещаются фотосферой практически изотропно из нижней (со стороны Солнца) полусфера. Толщину ближайших к Солнцу слоев короны D оценим как диаметр Солнца. Корону считаем практически прозрачной.

Яркость соответствует энергии, излучаемой в единицу времени с единицы наблюдаемой площади. Полная интенсивность света, рассеянного участком короны вдоль луча зрения, равна интенсивности на один электрон I_e , умноженной на число электронов.

$$I_{\text{поп. расс.}} = I_e \pi s D.$$

Здесь s — плотность электронов в короне, π — площадь малого участка короны, перпендикулярного лучу зрения. Отношение яркостей равно

$$10^{-6} = \varepsilon = \frac{I_{\text{поп. расс.}}/\pi}{I_0/(4\pi R_\odot^2)} = \frac{I_e \pi D}{I_0/(4\pi R_\odot^2)} = \sigma \pi n D,$$

где σ — томсоновское сечение рассеяния для свободной частицы (1.72), R_\odot — радиус Солнца, I_0 — полная интенсивность излучения (светимость) Солнца. В итоге

$$n = \frac{\varepsilon}{\sigma \pi D} = \frac{\varepsilon \cdot 3}{D 8\pi} \left(\frac{mc^2}{e^2} \right)^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}.$$

1.10.9. Для оценки критической светимости звезды приравняем силу, действующую на систему электронов и протонов, связанных кулоновскими силами, со стороны излучения фотосферы (видимой поверхно-

сти) звезды, т. е. световое давление — силе гравитационного притяжения звездой.

Сила светового давления на систему зарядов есть средняя по времени сила радиационного трения, и ее можно представить в виде (см. (1.73))

$$\bar{F} = \sigma_T \bar{\omega} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения волны, падающей на систему зарядов, $\bar{\omega} = \bar{E}^2/(4\pi)$ — средняя плотность энергии в этой волне, $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ — сечение томсоновского рассеяния волны на заряде, $r_0 = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона.

Так как $\sigma_T \sim 1/m^2$, и массы протона много больше массы электрона ($m_p \gg m_e$), а сила гравитационного притяжения $GmM/R^2 \sim m$, где G — гравитационная постоянная, M — масса звезды, R — радиус ее фотосферы, то выражая среднюю плотность энергии поля $\bar{\omega}$ через светимость звезды согласно $\bar{\omega} = 4\pi R^2 \bar{\omega}_c$, получаем

$$\sigma_T^{(el)} \bar{\omega} = \sigma_T^{(el)} \frac{I_{cr}}{4\pi R^2 c} = \frac{Gm_p M}{R^3}$$

где $\sigma_T^{(el)}$ — сечение томсоновского рассеяния на электронах оболочки (атмосферы) звезды. Поэтому критическая светимость будет равна

$$I_{cr} = \frac{4\pi G m_p}{\sigma_T^{(el)}} M \simeq 0.6 \cdot 10^5 M.$$

Отметим, что в формулу не входит R — радиус фотосферы звезды. Это связано с тем, что световое давление, как и гравитационное притяжение, пропорциональны R^{-2} .

Для Солнца получаем отношение светимости I_\odot к критической $I_{cr,\odot}$:

$$\frac{I_\odot}{I_{cr,\odot}} = \frac{4 \cdot 10^{33}}{0.6 \cdot 10^5 M_\odot} = \frac{4 \cdot 10^{28}}{1.3 \cdot 10^{30}} \sim 0.3 \cdot 10^{-4},$$

т. е. человечество в этом плане может не беспокоиться.

1.10.10. В силу условия $r \ll \lambda$ внешнее поле вблизи сферы считаем практически однородным, и предполагаем, что рассеянная волна создается дипольными электрическим и магнитным моментами, которые индуцируются падающей волной.

Подное электрическое поле в центре сферы должно быть равно нулю, из этого условия получаем дипольный электрический момент

$$E_0 \cos(\omega t) + \int \frac{-\mathbf{r} d\rho}{\rho^3} = 0, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} d\rho = r^3 E_0 \cos(\omega t).$$



Магнитное поле в центре сферы должно быть равно нулю, поэтому

$$H_0 \cos(\omega t) + \int \frac{[\mathbf{v} \times (-\mathbf{r})] d\rho}{c r^3} = 0, \quad \mu = \int \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] d\rho}{2c} = -\frac{r^3}{2} \Pi_0 \cos(\omega t).$$

Электрический и магнитный дипольные моменты оказались одного порядка, поэтому необходимо учесть как электрическое, так и магнитное дипольные излучения. При этом угловое распределение интенсивности и дифференциальное сечение рассеяния будут содержать интерференционный член.

Запишем магнитное поле в волновой зоне:

$$\mathbf{H}_{\text{волн}} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \hat{\boldsymbol{\mu}})}{c^2 R} + \frac{[\mathbf{d} \times \mathbf{n}]}{c^2 R},$$

и найдем интенсивность излучения магнитного и электрического моментов в телесный угол $d\Omega$:

$$dI = (\mathbf{S}_{\text{излуч}}(\mathbf{n}R^3) d\Omega) = \frac{c d\Omega}{4\pi} R^2 \mathbf{H}_{\text{волн}}^2 = \frac{d\Omega}{4\pi c} [\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \hat{\boldsymbol{\mu}}) + [\mathbf{d} \times \mathbf{n}]]^2,$$

$$dI = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} [\hat{\boldsymbol{\mu}}^2 - (\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n})^2 + \mathbf{d}^2 - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})^2 + 2(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})]. \quad (1)$$

Последнее слагаемое в (1) — интерференционный член. Пусть амплитуда поля \mathbf{E}_0 направлена вдоль оси x , а амплитуда H_0 — вдоль оси y , тогда, поскольку $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{d}}/2$ (см. формулы выше), имеем

$$dI = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \mathbf{d}^2 \left[\frac{4}{5} - (\mathbf{n}e_x)^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{n}e_y)^2 + (\mathbf{n}e_z) \right],$$

$$dI = \frac{d\Omega}{8\pi c^3} r^6 \omega^4 \mathbf{E}_0^2 \left[\frac{4}{5} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right],$$

$$d\sigma = \frac{r^6 \omega^4}{c^5} \left[\frac{4}{5} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right] d\Omega.$$

При интегрировании по телесному углу оказывается, что вклад интерференционного члена равен нулю, поэтому

$$\sigma = \frac{32\pi}{15} \frac{r^6 \omega^4}{c^5}$$

2.1. ОПЕРАТОРЫ И СОСТОЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

2.1.1. $\hat{T}^{-1} = \hat{T}^+ = \hat{T}$, $\hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a} = \hat{T}_a^+$

2.1.2. Собственные значения $\lambda = \pm 1$, собственные функции: $\psi(-x) = \pm \psi(x)$ — четные и нечетные.

2.1.3. Пусть $\hat{T}_a\psi(x) = \lambda(a)\psi(x)$. Собственные значения можно определить из следующих предположений:

- $|\lambda(a)| = 1$ — условие отсутствия неограниченного роста функции при $x \rightarrow \pm\infty$.
- $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a+b)$ — следствие группового свойства операторов трансляции $\hat{T}_a\hat{T}_b = \hat{T}_{a+b}$.

Исходя из этого, имеем $\lambda(a) = e^{iKa}$, где $\text{Im } K = 0$. Собственные функции — функции Блоха $\psi_K(x) = e^{iKx}\psi_K(x)$, $\psi_K(x+a) = \psi_K(x)$.

2.1.4. Для решения задачи необходимо использовать разложение экспоненты в ряд Тейлора.

- Для оператора $\exp(i\varphi \hat{I})$ после разложения сгруппируем слагаемые, содержащие четные и нечетные степени оператора \hat{I} (четные степени \hat{I} дают единичный оператор, а нечетные — снова оператор \hat{I}). В итоге

$$\exp(i\varphi \hat{I}) = \hat{I} \cos \varphi + i\hat{I} \sin \varphi.$$

- Для оператора $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x a\right)$ переходим в координатное представление и раскладываем экспоненту

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x a\right)\psi(x) &= \exp\left(a \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \simeq \psi(x) + ax'\psi'(x) + \frac{a^2}{2!}\psi''(x) + \dots = \\ &= \psi(x+a) \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем дело с оператором трансляции.

2.1.7. Для доказательства эрмитовости $\hat{A}^+ \hat{A}$ необходимо использовать свойство $(\hat{A}^+)^* = \hat{A}$ и результат задачи 2.1.6. Далее

$$(\hat{A}^+ \hat{A}) = \langle \psi | \hat{A}^+ \hat{A} | \psi \rangle = (\langle \psi | \hat{A}^+) (\hat{A} | \psi \rangle) = \| \hat{A} | \psi \rangle \|^2 \geq 0$$

панду неотрицательности квадрата нормы вектора.

2.1.8. Если $|\psi\rangle$ — собственный вектор оператора \hat{A} , то сразу получаем утверждение задачи. Обратно: если верно утверждение, указанное в условии, а именно $\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$, то ясно, что $\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle = 0$, откуда следует, что $\hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A} | \psi \rangle$.

2.1.9. Пусть

$$\begin{cases} \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \\ \langle \hat{B} \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle \end{cases} \quad \text{и тогда} \quad \begin{cases} \Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle I, \\ \Delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle I. \end{cases}$$

при этом, очевидно $[\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}] = i\hbar \tilde{C}$. Введем в рассмотрение вектор $|\varphi\rangle$ такой, что

$$|\varphi\rangle = (\Delta \hat{A} - i\gamma \Delta \hat{B}) |\psi\rangle, \quad \text{тогда} \quad \langle \varphi | = \langle \psi | (\Delta \hat{A} + i\gamma \Delta \hat{B}).$$

Здесь мы用了 эрмитовость операторов, действительность средних значений, а также $\gamma^* = \gamma$ по определению. Построим следующую конструкцию:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \| |\varphi\rangle \|^2 = \langle \psi | (\Delta \hat{A} + i\gamma \Delta \hat{B})(\Delta \hat{A} - i\gamma \Delta \hat{B}) | \psi \rangle = \\ = \langle \Delta \hat{A}^2 \rangle + \gamma^2 \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle + \gamma \hbar \langle \tilde{C} \rangle \geq 0,$$

ибо квадрат нормы вектора положительно определен. Мы получили квадратный трехчлен относительно γ . Для того, чтобы это выражение было положительным, нужно, чтобы его дискриминант $D \leq 0$, т. е.

$$\gamma^2 \langle \tilde{C} \rangle^2 - 4 \langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \leq 0.$$

Отсюда и следует утверждение, которое следовало доказать.

2.1.10. Предположим, что спектр оператора \hat{F} невырожден. Оператор \hat{F} должен обладать полной системой собственных векторов $\hat{F} |F_i\rangle = F_i |F_i\rangle$. Поскольку $[\hat{A}, \hat{F}] = 0$, то

$$\hat{A} \hat{F} |F_i\rangle = \hat{F} \hat{A} |F_i\rangle = F_i \hat{A} |F_i\rangle,$$

т. е. вектор $\hat{A} |F_i\rangle$ — также собственный вектор оператора \hat{F} и отвечает тому же собственному значению F_i . Мы считаем, что спектр \hat{E} невырожден, поэтому каждому F_i должен отвечать в точности один собственный вектор, т. е. $\hat{A} |F_i\rangle = A_i |F_i\rangle$. Аналогичное рассмотрение для опе-

ратора \hat{B} приводит к соотношению $\hat{B}|\psi_i\rangle = B_i|\psi_i\rangle$. Отсюда следует, что для любого собственного вектора $|\psi_i\rangle$

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi_i\rangle = (A_i B_i - B_i A_i)|\psi_i\rangle = 0.$$

Система векторов $|\psi_i\rangle$ полна, поэтому получаем противоречие.

2.1.12. Указание: вычислить коммутаторы

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad [\hat{p}_x, \hat{x}^i] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$$

и воспользоваться определением функций от оператора.

$$2.1.13. \quad [\hat{T}_a, \hat{x}] = a \hat{T}_a, \quad [\hat{T}_a, \hat{p}_x] = 0.$$

2.1.14. Приводим ответы, штрихом обозначается производная функции по ее аргументу, т. е. по r :

$$\begin{aligned} [\hat{p}_x, f(r)] &= -i\hbar f'(r) \frac{\varepsilon}{r}, \\ [\hat{p}_x^2, f(r)] &= -\hbar^2 \left\{ \frac{2\varepsilon}{r} f'(r) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r^2 - x^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2}{r^3} f'''(r) \right\}, \\ \left[\hat{x}, \exp\left(\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x\right) \right] &= -a \exp\left(\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x\right). \end{aligned}$$

2.1.15. Оператор скорости по определению есть производная по времени от оператора координаты. Поскольку последний явно от времени не зависит, имеем

$$\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{r}] = \frac{i}{\hbar} [\hat{T}, \hat{r}] + \frac{i}{\hbar} [U(\hat{r}), \hat{r}],$$

где \hat{T} — оператор кинетической энергии. Далее

$$[U(\hat{r}), \hat{r}] = 0, \quad [\hat{T}, \hat{r}] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{r} \right] = -i\hbar \frac{\hat{p}}{m}.$$

Таким образом, $\hat{v} = \hat{p}/m$.

2.1.16. Указание: воспользоваться свойством функции от оператора $F(\hat{f})|f_n\rangle = F(f_n)|f_n\rangle$, если $\hat{f}|f_n\rangle = f_n|\hat{f}\rangle$.

2.1.17. Обозначим $e^{i\hat{A}} \hat{B} e^{-i\hat{A}} = \tilde{Q}(\xi)$. Легко получить, что

$$\frac{d\tilde{Q}(\xi)}{d\xi} = [\hat{A}, \tilde{Q}(\xi)], \quad \frac{d^2\tilde{Q}(\xi)}{d\xi^2} = [\hat{A}, [\hat{A}, \tilde{Q}(\xi)]], \quad \text{и т. д.},$$

откуда имеем разложение в ряд Тейлора:

$$\tilde{Q}(\xi) = e^{i\hat{A}} \hat{B} e^{-i\hat{A}} = \hat{B} + \frac{\xi}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

2.1.18. $\hat{U}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$. Использовать результат задачи 2.1.17.

2.1.19. Пусть $\hat{T}_a|\psi\rangle = |\phi\rangle$. Найдем связь двух векторов состояний $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$ в координатном представлении, т. е. связь волновых функций. Спроектируем полученные состояния на состояние $|\mathbf{r}\rangle$:

$$\langle \mathbf{r} | \hat{T}_a | \psi \rangle = \langle \mathbf{r} | \phi \rangle = \psi(\mathbf{r}).$$

Выражение слова «расщепим» при помощи единичного оператора $\hat{I}_x = \int d^3\mathbf{r}' |\mathbf{r}'\rangle \langle \mathbf{r}'| d^3\mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \hat{T}_a \hat{I}_x | \psi \rangle &= \int d^3\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | \hat{T}_a | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle = \int d^3\mathbf{r}' (\mathbf{r} | \mathbf{r}' - \mathbf{a} \rangle) \psi(\mathbf{r}') = \\ &= \int d^3\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{a}) \psi(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Окончательно в координатном представлении $\hat{T}_a \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$.

2.1.20. Оператор координаты в координатном представлении есть оператор умножения на (действительное) число x (см. (11.4), для простоты ограничиваемся одномерным случаем). Пусть оператор координаты действует по схеме $\varphi(x) = x\tilde{\varphi}(x)$. Перейдем к импульсному представлению. С этой целью anzade запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\hbar k x}{\hbar}} \tilde{\varphi}(p') dp' = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{i\hbar k x}{\hbar}} \tilde{\varphi}(p') dp', \quad (1)$$

где $\tilde{\varphi}(p)$ и $\tilde{\varphi}(p')$ — функции в импульсном представлении. Воспользуемся условиями ортонормированности и полноты и умножим (1) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i\hbar k x}{\hbar}}$, а затем проинтегрируем по x . В результате в левой части получим

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\hbar k x - i\hbar p}{\hbar}} \tilde{\varphi}(p') dx dp' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - p') \tilde{\varphi}(p') dp' = \tilde{\varphi}(p)$$

В правой части (1) будет

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} x e^{\frac{i\hbar k x - i\hbar p}{\hbar}} \tilde{\varphi}(p') dx dp' &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \tilde{\varphi}(p') \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right) e^{\frac{i\hbar k x - i\hbar p}{\hbar}} dx dp' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hbar(p - p') \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right) \tilde{\varphi}(p') dp' = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\varphi}(p). \end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям по p' , имея в виду убывание функций на $\pm\infty$. Таким образом, мы получили, что в импульсном представлении

$$\tilde{\varphi}(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p).$$

Аналогично можно получить и выражение для оператора импульса в координатном представлении (см. (II.5))

2.1.21. Действуя по той же схеме, что и в предыдущей задаче, получим

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p) + \int_{-\infty}^{\infty} dp' \varphi(p') \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx U(x) e^{\frac{i(p'-px)}{\hbar}} \right] = E\varphi(p).$$

2.1.22. Будем считать, что собственные векторы оператора $\tilde{f}(\lambda)$ нормированы на единицу: $\langle n|n\rangle = 1$. Прошиффицируем по λ левую и правую части уравнения

$$\tilde{f}(\lambda)|n(\lambda)\rangle = f_n(\lambda)|n(\lambda)\rangle \quad (1)$$

и получим

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}|n\rangle + \tilde{f}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}|n\rangle = \frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda}|n\rangle + f_n(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}|n\rangle. \quad (2)$$

Умножим все слагаемые в (2) слева на бра-вектор $\langle n|$, учтем соотношение (1) и эрмитовость оператора $\tilde{f}(\lambda)$. В результате получаем утверждение теоремы.

2.1.23. Вначале, используя результат задачи 2.1.17, найдем явный вид операторов координат и импульса в представлении Гейзенберга для свободной одномерной частицы (см. (II.11)), т. е. для $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$.

$$\begin{cases} \hat{x}_H = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p} t} \hat{x} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p} t} = \hat{x} + t \frac{\hat{p}}{m}, \\ \hat{p}_H = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p} t} \hat{p} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p} t} = \hat{p}, \end{cases}$$

где \hat{x} и \hat{p} — операторы в представлении Шредингера. Среднее значение координаты $\langle \hat{x}_H \rangle_t = \langle \psi_H | \hat{x}_H(t) | \psi_H \rangle$ имеет вид

$$\langle \hat{x}_H \rangle_t = \langle \hat{x} \rangle_0 + \frac{t}{m} \langle \hat{p} \rangle_0 = x_0 + v_0 t,$$

т. е. эволюционирует во времени, как координата свободной классической частицы массы m .



Для того, чтобы определить закон расплывания волнового пакета, найдем зависимость от времени дисперсии координаты $(\Delta \hat{x}^2)_t = (\hat{x}_H^2) - (\hat{x}_0)^2$, которая характеризует эффективную ширину пакета. Учитывая, что

$$(\hat{x}_H^2)_t = \langle \hat{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{m} \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle_0 + \frac{\hbar^2}{m^2} \langle \hat{p}^2 \rangle_0,$$

$$\langle \hat{x}_H \rangle_t^2 = \langle \hat{x} \rangle_0^2 + 2 \frac{\hbar}{m} \langle \hat{x} \rangle_0 \langle \hat{p} \rangle_0 + \frac{\hbar^2}{m^2} \langle \hat{p} \rangle_0^2.$$

получаем

$$(\Delta \hat{x}^2)_t = (\Delta \hat{x}^2)_0 + \frac{\hbar^2}{m} (\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} + \Delta \hat{p} \Delta \hat{x})_0 + \frac{\hbar^2}{m^2} (\Delta \hat{p}^2)_0.$$

2.2. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.2.1. В данной потенциальной яме возможен только незырошенный спектр энергий частицы. Волновая функция частицы удовлетворяет уравнению

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi(x) = 0.$$

должна быть непрерывна в точках 0 и a и нормирована на единицу.

При $x < 0$ и $x \geq a$ должно выполняться $\psi(x) = 0$, а при $0 < x < a$ справедливо уравнение

$$\psi'' + k^2 \psi(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

т.е.

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}.$$

Из условий непрерывности $\psi(x)$ получаем $\psi(0) = c_1 + c_2 = 0$, т.е. $\psi(x) = c \sin kx$, а также $\psi(a) = c \sin ka = 0$, поэтому

$$ka = n\pi, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2,$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{n\pi}{a} x, & 0 < x < a, \\ 0, & x \leq 0, x \geq a, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, состояние определяется одним квантовым числом. (Подумайте о том, может ли n быть равным 0, -1, -2, ...? Нет ли вырождения по энергии?)

Дальнейший расчёт удобно вести в естественной (для данной задачи) системе единиц: $\hbar = 1$, $m = 1$, $a = 1$, тогда

$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2}, \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin \pi n x, & 0 < x < a, \\ 0, & x \leq 0, \quad x \geq a. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\langle n|\bar{x}|n\rangle = \int_0^1 x \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \sin \pi n x dx|_{x=2\pi n} = \frac{1}{2},$$

т. е. в обычных единицах $\langle n|\bar{x}|n\rangle = a/2$, а также

$$\begin{aligned} \langle n|(\Delta \bar{x})^2|n\rangle &= \langle n|\bar{x}^2|n\rangle - \langle n|\bar{x}|n\rangle^2 = \int_0^1 x^2 \psi_n^2(x) dx - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{B^2}{\partial x^2} \int_0^1 \cos \pi n x dx|_{x=2\pi n} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{2(\pi n)^2}. \end{aligned}$$

и в обычных единицах $\langle n|(\Delta \bar{x})^2|n\rangle = \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2(\pi n)^2} \right] a^2$.

Классическая плотность вероятности найти частицу в интервале $(x, x+dx)$ есть: $\rho(x) = 1/a$ (скорость частицы в ящике постоянна). То есть в классическом пределе

$$\bar{x} = \int_0^a x \rho(x) dx = \frac{a}{2}, \quad (\Delta \bar{x})^2 = \frac{a^2}{12},$$

что совпадает с квантовым результатом при $n \gg 1$.

Волновая функция частицы в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} \psi_n(p) \equiv \langle p|n\rangle &= \int_0^1 \langle p|x\rangle \langle x|n\rangle dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \sqrt{2} \sin \pi n x dx = \\ &= -i 2 \sqrt{\pi} e^{-ipx} \frac{\sin \left(\frac{p - \pi n}{2} \right)}{p^2 - (\pi n)^2}. \end{aligned}$$

В квазиклассическом приближении ($n \gg 1$) распределение по импульсам вблизи $p = \pm \pi n$ имеет вид

$$|\psi_n(p)|^2 \simeq \frac{4(n^2/\pi^2)}{\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x/2)}{x^2} dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

где $\varepsilon = p \pm \pi$, что соответствует классической плотности вероятности распределения по импульсам:

$$\rho(p) = \frac{1}{2}\delta(p - p_0) + \frac{1}{2}\delta(p + p_0), \quad p_0 = \sqrt{2E_n} = \pi n.$$

Фазовая плоскость, как и траектория частицы на ней, — понятие классическое, поэтому рассмотрим эту часть задачи в квазиклассическом приближении: $\hbar = 0$, $n \rightarrow \infty$ при конечном $h\ell$. Фазовые объемы для состояний с энергией $E \leq E_n$ и $E \leq E_{n+1}$ имеют вид

$$\Gamma_n = 2p_n a = 2\pi h n \quad \left(p_n = \sqrt{2mE_n} = \frac{\pi\hbar}{a} n \right).$$

$$\Gamma_{n+1} = 2p_{n+1} a = 2\pi h(n+1).$$

Следовательно, объем, приходящийся на одно квантовое состояние,

$$\Delta\Gamma_n = \Gamma_{n+1} - \Gamma_n = 2\pi\hbar.$$

2.2.2. Используем оператор инверсии \hat{I} . Поскольку в координатном представлении

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad \text{а также} \quad U(x) = U(-x),$$

получаем $[\hat{I}, \hat{H}] = 0$.

Таким образом, волновые функции невырожденного дискретного спектра данной задачи ($E < 0$) обладают определенной четностью

$$\begin{cases} \hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x), \\ \hat{I}\psi_E(x) = \pm\psi_E(x), \end{cases}$$

и данная система уравнений будет заранее совместна. Обозначив

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E|, \quad k^2 = k_0^2 - \omega^2, \quad k_0^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2},$$

получим уравнения для определения $\psi_E(x)$ при $|x| < a$:

$$\psi''_E(x) + k^2\psi_E(x) = 0$$

и при $|x| > a$:

$$\psi''_E(x) - \omega^2\psi_E(x) = 0$$

Таким образом, для четных состояний получаем $\psi_E^{(+)}(x) = A \cos kx$ при $|x| < a$ и $\psi_E^{(+)(+)} = Be^{-\omega|x|}$ при $|x| > a$. Вследствие явного учета четности функции граничное условие достаточно поставить в одной из

точек $x = \pm a$. Из условия непрерывности логарифмической производной для функции $\psi_L(x)$ при $x = a$ получим

$$\frac{\psi'_L(a+0)}{\psi_L(a+a)} = \frac{\psi'_L(a-0)}{\psi_L(a-0)},$$

т.е.

$$k \lg k a = \pi, \quad k^2 = k_0^2 - \pi^2, \quad \text{или} \quad \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = 1 + \lg^2 k a. \quad (1)$$

На основании этого имеем

$$|\cos ka| = \frac{ka}{k_0 a}$$

при обязательном дополнительном условии $\lg k a > 0$, которое следует из (1). Уравнения энергии определяются формулой $E_n = -\hbar^2 k_x^2 / (2m)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 2.1).

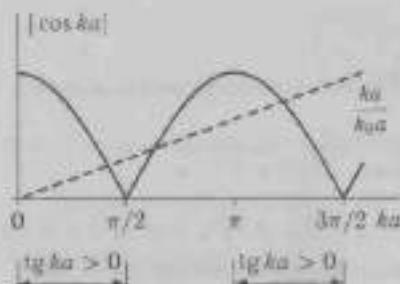


Рис. 2.1. Определение уровней энергии для четных состояний

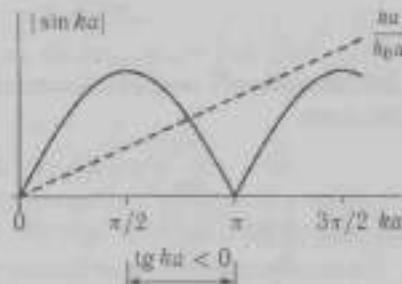


Рис. 2.2. Определение уровней энергии для нечетных состояний

Четное состояние существует при малой глубине U_0 ямы ($k_0 a > 0$). N четных состояний существует при $k_0 a \geq (N-1)\pi$. Из условия непрерывности функции

$$\psi(a-0) = \psi(a+0)$$

получаем

$$B = A e^{i \pi a} \cos ka.$$

Условие нормировки дает

$$1 = 2|A|^2 \left(\int_0^a \cos^2 kx dx + \int_a^\infty \cos^2 kax e^{-2\pi i(x-a)} dx \right),$$

откуда в результате несложных вычислений имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{\sin 2ka}{2ka} + \frac{\cos^2 ka}{ka} \right)^{-1/2}, \quad B = A e^{i \pi a} \cos ka.$$

Для нечетных состояний волновая функция должна иметь вид

$$\psi_E^{(-)}(x) = \begin{cases} A \sin kx, & |x| < a, \\ B \operatorname{sign}(x) e^{-\kappa|x|}, & |x| > a, \end{cases}$$

где

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Уровни энергии для нечетных состояний определяются из уравнения

$$k c \operatorname{ctg} k a = -\kappa, \quad \kappa^2 = k_0^2 - \varepsilon^2, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 k a$$

или

$$|\sin k a| = \frac{k a}{k_0 a} \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} k a < 0.$$

Как видно из рис. 2.2, нечетные дискретные состояния существуют при условии $k_0 a \geq \pi/2$, ($k a / (k_0 a) = 1$, когда $k_0 a = \pi/2$), т.е.

$$U_0 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a^2}$$

Это и есть условие существования хотя бы одного нечетного состояния в такой яме. N нечетных состояний существует при $k_0 a \geq \pi N/2$.

Из непрерывности функции $\psi(a+0) = \psi(a-0)$ следует

$$B = A e^{\kappa a} \sin k a.$$

Учитываем условие нормировки нашей функции

$$1 = 2|A|^2 \left(\int_0^a \sin^2 kx dx + \sin^2 k a \int_a^\infty e^{-2\kappa x} e^{-\kappa x} dx \right)$$

и получаем итоговый результат

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{\sin 2ka}{2ka} + \frac{\sin^2 ka}{ka} \right)^{-1/2}, \quad B = A e^{\kappa a} \sin k a.$$

2.2.3. Сила, действующая на частицу со стороны потенциальной ямы, представляет собой оператор $\tilde{F} = -d\tilde{U}/dx = -d\tilde{H}/dx$. Рассмотрим вначале яму конечной глубины U_0 , имея в виду дальнейший предельный переход $U_0 \rightarrow \infty$. При этом

$$U(x) = U_0 (\Theta(x-a) + 1 - \Theta(x))$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда (Д.13):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{F} = -\frac{d\hat{U}}{dx} = U_0(\delta(x) - \delta(x - a)).$$

Второе слагаемое данного выражения представляет собой оператор силы, действующей на частицу со стороны правой стенки потенциального ящика. Нетрудно получить, что $\hat{F}_{\text{пр}} = -U_0\delta(x - a) = d\hat{U}/da = d\hat{H}/da$. Используя теорему Фейнмана–Гельмана (задача 2.1.22), для среднего значения этой силы находим

$$\langle n | \hat{F}_{\text{пр}} | n \rangle = \left\langle n \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial a} \right| n \right\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial a} = -\frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^3} a^2 = -\frac{2E_z}{a}.$$

Заметим, что мы находим среднее значение силы, действующей на частицу со стороны правой стенки потенциального ящика. Сила, которая действует на стенку ящика со стороны частицы, имеет, очевидно, противоположный знак.

2.2.4. Получим решение задачи о состояниях дискретного спектра в данной потенциальной яме на основании анализа нечетных решений $\psi_{\varepsilon}^{(-)}(x)$ задачи 2.2.2.

Границные условия, накладываемые на волновую функцию в точке $x = 0$ и на ψ и ψ' в точке $x = a$, совпадают с соответствующими граничными условиями для $\psi_{\varepsilon}^{(-)}(x)$. Однако область, где волновая функция отлична от нуля, уменьшается вдвое. Поэтому $\psi_{\varepsilon}^{(-)}(x)$ нужно умножить на $\sqrt{2}$. В итоге получим волновые функции в виде

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi_{\varepsilon}^{(-)}(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

2.2.5. При исследовании данной задачи используем следующие предположения

- Считаем, что яма мелкая, и тогда, как это следует из анализа задачи 2.2.2, в ней присутствует единственный дискретный уровень энергии, отвечающий четной волновой функции. Таким образом,

$$k_0 a \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{2mU_0}{\hbar^2} a^2 \ll 1.$$

Мы используем здесь обозначения задачи 2.2.2, т.е.

$$U_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}, \quad |\varepsilon| = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad k^2 = k_0^2 - \kappa^2.$$

• Полагаем, что энергия связи мала по сравнению с глубиной ямы:

$$|\varepsilon| \ll U_0, \quad \text{или} \quad \kappa \ll k_0.$$

Оказывается, что при этих предположениях также и $ka \ll 1$, и мы решаем приближенно (с учетом малости ka) трансцендентное уравнение для определения значений энергии:

$$(k_0 a)^2 \cos^2 ka = (ka)^2.$$

В результате имеем

$$\kappa^2 \approx k_0^2 a^2 \equiv \kappa_0^2$$

Получается, что значение энергии связи $|\varepsilon| = |\varepsilon_0|$ гораздо меньше глубины ямы (как и ожидалось):

$$|\varepsilon_0| = \frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m} = U_0 (k_0 a)^2 \ll U_0$$

Волновая функция в этом приближении имеет вид

$$\psi_0(x) \simeq \begin{cases} B_0 e^{-\kappa_0 |x|}, & |x| > a, \\ A_0 \cos kx, & |x| \leq a, \end{cases}$$

причем $A_0 \simeq B_0 = A|_{kx=0} = \sqrt{\kappa_0}$.

Вероятность нахождения частицы в пределах ямы при этом

$$W \simeq \kappa_0 \int_a^\infty \cos^2 kx \, dx \simeq 2\kappa_0 a \ll 1,$$

и, как мы убеждаемся, с подавляющей вероятностью ($\simeq 1$) частица будет находиться вне пределов ямы, т.е. в классически недоступной области. Очевидно, что это существенно квантовое явление, и классическая интерпретация для него невозможна.

Необходимо заметить, что при $a \rightarrow 0$, $U_0 \rightarrow \infty$, но при условии $U_0 a = \text{const}$, пределом данного потенциала является δ -яма (см. детали в задаче 2.2.6), в которой (как и в мелкой яме конечной глубины) имеется всего одно (четное) состояние дискретного спектра:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \kappa_0 \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{\hbar^2 \kappa_0}{2ma} \theta(a - |x|) \right] = \lim_{a \rightarrow 0} [-U_0 \theta(a - |x|)].$$

2.2.6. Полагая $E < 0$ и введя обозначение

$$\kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2},$$

получаем уравнение, которому удовлетворяет волновая функция дискретного невырожденного спектра частицы в виде

$$\psi''(x) - (\kappa^2 - 2\kappa_0\delta(x))\psi(x) = 0. \quad (1)$$

В точке разрыва потенциала $x = 0$ потребуем непрерывности $\psi(x)$:

$$\psi(+0) = \psi(-0).$$

При этом производная $\psi'(x)$ терпит разрыв, величину которого находим из уравнения (1), интегрируя его в пределах от $-\varepsilon$ до ε при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\kappa_0\psi(0). \quad (2)$$

При этом, как и должно быть, выполняется условие непрерывности плотности потока вероятности: $\mu(-0) = \mu(+0)$, где

$$\mu(x) = \frac{i\hbar}{2m}(\psi(x)\psi'(x)^* - \psi^*(x)\psi'(x)).$$

Нормированное решение ищем в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\kappa x}, & x > 0, \\ C_2 e^{\kappa x}, & x < 0. \end{cases}$$

Из непрерывности ψ при $x = 0$, получаем $C_1 = C_2 = C$. Тогда условие (2) дает $\kappa = \kappa_0$, т. е. при $E < 0$ имеем всего один дискретный уровень с энергией

$$E_0 = -\frac{\hbar^2\kappa_0^2}{2m}$$

и волновой функцией

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa_0} e^{-\kappa_0|x|} \equiv \langle x|0\rangle,$$

нормированной на единицу.

2.2.7. В импульсном представлении волновая функция дискретного уровня задачи 2.2.6 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi_0(p) \equiv \langle p|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle \langle x|0\rangle = \\ &= \frac{\sqrt{\kappa_0}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa_0|x| - \frac{p^2}{2m}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\kappa_0\hbar)^{1/2}}{(\kappa_0\hbar)^2 + p^2}. \quad (1) \end{aligned}$$



Легко найти $\langle 0 | \hat{x} | 0 \rangle = 0$, $\langle 0 | \hat{p} | 0 \rangle = 0$, а также

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \hat{x}^2 dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^2 dx = \\ &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2} \Big|_{x=2\mu_0} = \frac{1}{\kappa_0^2},\end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{p}^2 | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp p^2 \frac{2}{\pi} \frac{(\mu_0 h)^2}{((\mu_0 h)^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\pi} (\mu_0 h)^2 \left(-\frac{d}{dp^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2 dp}{\alpha^2 + p^2} = \\ &= \frac{2}{\pi} (\mu_0 h)^2 \left(-\frac{d}{dp^2} \right) \frac{2\pi i (\alpha p)^2}{2i\alpha} \Big|_{p=\mu_0} = (\mu_0 h)^2.\end{aligned}$$

Соотношение неопределенности для данного состояния имеет вид

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2\kappa_0^2} \kappa_0^2 h^2 = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}$$

— абсолютный минимум для когерентного состояния гармонического осциллятора.

2.2.8. Фурье-образ потенциала равен константе, и уравнение Шредингера в импульсном представлении (см. решение задачи 2.1.21) принимает простой вид:

$$\frac{p^2}{2m} \varphi(p) + \frac{\hbar \omega_0}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \varphi(p') = E \varphi(p). \quad (1)$$

Полагаем $E = -\hbar^2 \kappa^2 / (2m) < 0$, и, считая, что интеграл в (1) сходится, обозначим его C

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \varphi(p').$$

Таким образом, уравнение (1) свелось к алгебраическому. Его решение имеет выражение для функции

$$\varphi(p) = \frac{\hbar \omega_0}{\pi} \frac{C}{p^2 + \hbar^2 \kappa^2}. \quad (2)$$

Согласно определению константы C получаем уравнение, из которого находится уровень энергии

$$C = \frac{\hbar \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{(p^2 + \hbar^2 \kappa^2)} dp = C \frac{\omega_0}{\hbar},$$

откуда имеем (ср. с задачей 2.2.6)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m}.$$

Неизвестная константа C в (2) определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(p)|^2 dp = 1, \quad \text{откуда} \quad |C|^{-2} = \left(\frac{\hbar \kappa_0}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(p^2 + \hbar^2 \kappa_0^2)^2}.$$

Интеграл легко вычисляется с помощью методов теории функций комплексного переменного; следует взять вычет в полюсе второго порядка, например в верхней полуплоскости в точке $p = i\hbar \kappa_0$, после чего получаем $C = \sqrt{2\pi \hbar \kappa_0}$. В итоге нормированная волновая функция в p -представлении имеет вид

$$\psi_p = \sqrt{\frac{2}{\pi \hbar \kappa_0}} \frac{1}{p^2 / \hbar^2 \kappa_0^2 + 1}.$$

в полном соответствии с формулой (1) решения задачи 2.2.7.

2.2.9. Очевидно, что данный потенциал представляет собой четную функцию $U(-x) = U(x)$, поэтому гамильтониан коммутирует с оператором языка:

$$[\hat{H}, \hat{x}] = 0,$$

и можно искать решение уравнения Шредингера, как общие собственные функции операторов \hat{H} и \hat{x} , т. е. в виде четных и нечетных функций. Запишем общий вид четного и нечетного решения на всей числовой прямой, исключая сами δ -функции ($E < 0$, $\varepsilon^2 = 2m|E|/\hbar^2$):

$$\psi^{(+)}(x) = \begin{cases} Be^{i\kappa x}, & x < -a, \\ A \sin \kappa x, & -a < x < a, \\ Be^{-i\kappa x}, & x > a, \end{cases}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \begin{cases} Be^{i\kappa x}, & x < -a, \\ A \sinh \kappa x, & -a < x < a, \\ -Be^{-i\kappa x}, & x > a. \end{cases}$$

Учитывая условие «стыкования» решений: непрерывность функции при $x = a$

$$\psi(a+0) = \psi(a-0) \tag{1}$$

и конечный разрыв производной (см. решение задачи 2.2.6)

$$\psi'(x=0) - \psi'(x=0) = -2\kappa_0\psi(x). \quad (2)$$

Условие совместности уравнений (1) и (2) с учетом явного вида $\psi^{(+)}(x)$ и $\psi^{(-)}(x)$ дает трансцендентное уравнение для нахождения уровней энергии:

$$\frac{\kappa_0^2}{\kappa_{00}^2} = 1 \pm e^{-2\kappa_0 a}. \quad (3)$$

где верхний знак отвечает четному, а нижний — нечетному уровню энергии.

Анализ уравнения (3) показывает (рис. 2.3), что в данном потенциале в общем случае существуют два дискретных уровня энергии — четный и нечетный. Четный уровень лежит ниже и присутствует всегда, нечетный лежит выше и существует только при $\kappa_0 a \geq 1/2$. Таким образом, при малых расстояниях между ямами остается только четный уровень.

Если $\kappa_0 \ll 1$, то $\kappa > 2\kappa_0$ и энергия четного состояния

$$E^{(+)} = -4 \frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m},$$

т. е. при малом расстоянии две б-ямы действуют, как одна, но с удвоенным значением κ_0 . Если же ямы далеки друг от друга (при $\kappa_0 a \gg 1$), то уровни энергии экспоненциально мало отличаются друг от друга и в конце концов сливаются. В результате мы получаем задачу о двух б-ямах, независимых друг от друга.

Находим нормированные коэффициенты для четной и нечетной волновых функций.

$$A^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{\sin 2\kappa_0 a}{2\kappa_0 a} + \frac{\sin^2 \kappa_0 a}{\kappa_0 a} \right)^{-1/2}, \quad B^{(+)} = A^{(+)} e^{\kappa_0 a} \sin \kappa_0 a,$$

$$A^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(-1 + \frac{\sin 2\kappa_0 a}{2\kappa_0 a} + \frac{\sin^2 \kappa_0 a}{\kappa_0 a} \right)^{-1/2}, \quad B^{(-)} = A^{(-)} e^{\kappa_0 a} \sinh \kappa_0 a.$$

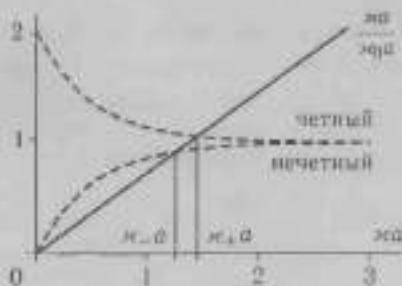


Рис. 2.3. Графический анализ уравнения (3)

2.2.10. Рассмотрим пункт а) данной задачи. Прежде необходимо заметить, что вследствие инвариантности потенциала относительно трансляций на величину a (период одномерной кристаллической решетки),

т. е. $U(x+a) = U(x)$, гамильтониан нашей задачи будет коммутировать с оператором трансляции \hat{T}_a (см. задачу 2.1.1):

$$[\hat{H}, \hat{T}_a] = 0.$$

Поэтому мы можем искать решение в виде общих собственных функций операторов \hat{H} и \hat{T}_a :

$$\begin{cases} \hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \\ \hat{T}_a\psi(x) = \lambda(a)\psi(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda(a)$ (собственное значение оператора трансляции) имеет вид $\lambda(a) = e^{\pm ika}$, а $\text{Im } K = 0$ (квазимпульс). Собственные функции оператора трансляции согласно теореме Блоха должны удовлетворять условию, которое следует из (1):

$$\psi(x+a) = e^{ika}\psi(x). \quad (2)$$

Запишем общий вид решения уравнения Шредингера (1) в двух смежных областях:

$$0 < x < a \quad (\text{область 1}): \quad \psi(x) = c_1 e^{ikx} + d_1 e^{-ikx},$$

$$a < x < 2a \quad (\text{область 2}): \quad \psi(x) = c_2 e^{ik(x-a)} + d_2 e^{-ik(x-a)},$$

причем $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$. Условия сплавления в точке $x = a$

$$\psi(a+0) = \psi(a-0),$$

$$\psi'(a+0) - \psi'(a-0) = 2\beta_0\psi(0)$$

после элементарных вычислений дают связь между коэффициентами c_1 , d_1 , c_2 , d_2 , которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} e^{ika} \left(1 + \frac{\beta_0}{ik}\right) & e^{-ika} \frac{\beta_0}{ik} \\ -e^{ika} \frac{\beta_0}{ik} & e^{-ika} \left(1 - \frac{\beta_0}{ik}\right) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что $\det A = 1$.

Далее мы применим формулу (2) и получим

$$\psi(x+a) = c_2 e^{ik(x+a-a)} + d_2 e^{-ik(x+a-a)} = c_2 e^{ikx} + d_2 e^{-ikx} = e^{ika}\psi(x).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{iKa} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

и, сравнив (3) и (4), видим, что задача свелась к проблеме диагонализации матрицы A (матрица сдвига), а $e^{iKa} = \lambda(a)$ — играет роль собственного значения этой матрицы. В результате получаем уравнение на собственные значения

$$\lambda^2(a) - 2\rho\lambda(a) + 1 = 0,$$

где $2\rho = \text{Sp } A$ — след матрицы A . Решение уравнения дает

$$\lambda_{1,2}(a) = e^{\pm iKa} = \rho \pm i\sqrt{1 - \rho^2},$$

откуда следует, что $\cos Ka = \rho$ или, конкретнее:

$$\cos Ka = \cos ka + \frac{\beta_0 u}{k} \sin ka. \quad (5)$$

Это и есть так называемое дисперсионное соотношение.

Анализ соотношения (5) показывает, что энергетический спектр частицы в таком поле имеет *зонную структуру*. В самом деле, задавшись некоторым значением энергии E , мы находим $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ и затем из уравнения (5) можем найти значение Ka (рис. 2.4).

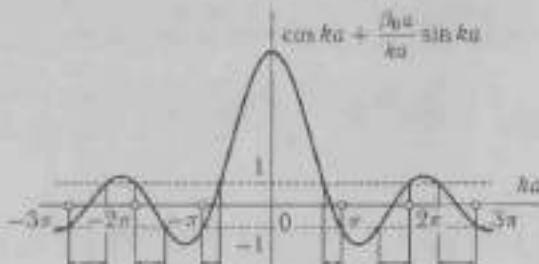


Рис. 2.4. Разрешенные зоны энергии

Случай 1. Энергия E такова, что $|\rho| = |\cos Ka| \leq 1$. При этом K является вещественным числом, что и требуется для функции Блоха, а сама функция — распространяющаяся модулированная волна. Эти области значений E называются *разрешенными зонами* энергии.

Случай 2. Энергия E такова, что $|\rho| = |\cos Ka| > 1$. При этом величина K — комплексная, и частицы с такими K не могут распространяться внутри большого кристалла. Эти области значений энергии — *запрещенные зоны*.

Разрешенные зоны чередуются с запрещенными, не перекрываясь между собой. Ширина разрешенных зон увеличивается с ростом $|ka|$. Условие $ka \ll 1$ (слабая связь) описывает случай, близкий к свободному. Это значит, что $K = k + 2\pi/a$, и поэтому зависимость $E(K)$ параболическая. В противоположном предельном случае $ka \gg 1$ (сильная связь) интервалы разрешенных значений энергии фактически превращаются в отдельные дискретные уровни $ka \approx \pi n$.

2.2.11. Наиболее просто эта задача решается в импульсном представлении, когда уравнение Шредингера сводится к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar F \frac{d}{dp} - E \right) \phi_E(p) = 0.$$

В результате решения этого уравнения получаются функции

$$\phi_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}} \exp\left[\frac{i}{F\hbar} \left(E_F p - \frac{p^2}{6m}\right)\right],$$

нормированные условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_E^*(p) \phi_E(p) dp = \hbar(E - E_F).$$

Переходя к координатному представлению, получаем

$$\psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_E(p) e^{ipx/\hbar} dp = \frac{(2m)^{1/3}}{\sqrt{\pi F^{1/3} \hbar^{1/3}}} \Phi\left[-\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3} \left(\frac{E}{F} + x\right)\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt$ — функция Эйре.

2.2.12. При исследовании данной задачи используем следующие предположения.

а) δ -Ямы находятся достаточно далеко друг от друга, т. е. в системе ям имеется два дискретных уровня энергии, отвечающих связанным состояниям. Однако ямы не бесконечно далеки, следовательно, $E^{(+)} \neq E^{(-)}$ (см. решение задачи 2.2.9).

б) Система, рассматриваемая нами, — приближенно двухуровневая, т. е. отброшен весь непрерывный спектр — считается, что частица не выходит из ям.

Как это следует из рис. 2.5, в любом из стационарных состояний $\psi^{(+)}(x)$ или $\psi^{(-)}(x)$ выполняется

$$|\psi^{(\pm)}(-x)|^2 = |\psi^{(\mp)}(x)|^2,$$

поэтому вероятность обнаружения частицы вблизи левой и правой ямы одинакова — частица не локализована вблизи ни одной из ям.

С целью построить состояние, в котором частица (хотя бы в начальный момент времени) была бы локализована в окрестности одной из ям, воспользуемся линейной комбинацией функций

$$\Psi(x, t) = C_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi^{(+)}(x) + C_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi^{(-)}(x). \quad (1)$$

Очевидно, что в начальный момент времени

$$\Psi(x, 0) = C_1 \psi^{(+)}(x) + C_2 \psi^{(-)}(x).$$

Если положить $C_1 = C_2$, то мы получим состояние (рис. 2.5), в котором частица локализована вблизи правой δ -ямы. Обозначим это состояние $\Psi(x, 0) = \psi_a(x)$. По аналогии можно построить состояние $\psi_{-a}(x)$ с локализацией частицы вблизи левой δ -ямы. Окончательно

$$\begin{cases} \psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)), \\ \psi_{-a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{(+)}(x) - \psi^{(-)}(x)). \end{cases}$$

и обратно

$$\begin{cases} \psi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(x) + \psi_{-a}(x)), \\ \psi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(x) - \psi_{-a}(x)). \end{cases}$$

Итак, волновая функция состояния (1), в котором частица в начальный момент времени локализована вблизи правой δ -ямы, имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_a(x) + e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_{-a}(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \psi_a(x) \left[e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right] + \psi_{-a}(x) \left[e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

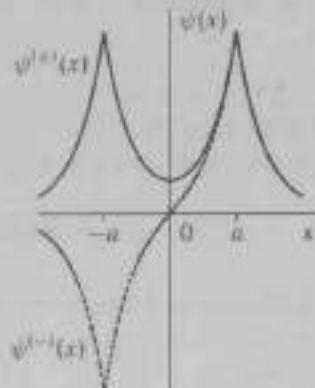


Рис. 2.5. Стационарные состояния для системы двух ям

В соответствии со статистической интерпретацией, вероятность обнаружить частицу локализованной вблизи левой ямы, если в начальный момент она была локализована в правой, равна

$$W_{-x} = \frac{1}{4} \left| e^{-\frac{iE^{(+)}t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE^{(-)}t}{\hbar}} \right|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{E^{(+)} - E^{(-)}}{\hbar} t \right) \right] = \\ = \sin^2 \left[\frac{E^{(+)} - E^{(-)}}{2\hbar} t \right].$$

2.2.13. При рассмотрении задачи о нахождении коэффициентов отражения и прохождения (П.13) мы будем исходить из потенциала

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a/2, \\ 0, & |x| > a/2. \end{cases}$$

Волновая функция частицы будет иметь вид

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1 x} + Ae^{-ik_1 x}, & x < -a/2, \\ Ce^{ik_1 x} + De^{-ik_1 x}, & |x| < a/2, \\ Be^{ik_1 x}, & x > a/2, \end{cases}$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0, \quad k_1^2 = \frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}.$$

Учет условий непрерывности волновой функции ψ и ее производной ψ' в точках $x = \pm a/2$ дает систему из четырех уравнений. В результате решения этой системы имеем

$$A = \frac{ie^{-ik_1 a}(k_1^2 - k^2) \sin k_1 a}{2kk_1 \cos k_1 a - i(k_1^2 + k^2) \sin k_1 a}, \\ B = \frac{2kk_1 e^{-ik_1 a}}{2kk_1 \cos k_1 a - i(k_1^2 + k^2) \sin k_1 a}.$$

Таким образом, для коэффициента отражения получаем

$$R = \frac{|f_s^{(np)}|}{|f_s^{(ns)}|} = |A|^2 = \frac{(k_1^2 - k^2) \sin^2 k_1 a}{4k_1^2 k^2 \cos^2 k_1 a + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 a} = \\ = \frac{(k_1^2 - k^2) \sin^2 k_1 a}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}.$$

Величина R обращается в ноль при $k_1 a = \frac{n}{\hbar} \sqrt{2m(E+U_0)} = n\pi$, $n=1, 2, \dots$, а также, естественно, при $k = k_1$, ($U_0 = 0$)

Коэффициент прохождения имеет вид

$$D = \frac{|I_{\text{вн}}^{(0)}|}{|I_{\text{вн}}^{(0)}|} = |B|^2 = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 \cos^2 k_1 a + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 a} = \\ = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}$$

Очевидно, что выполняется равенство $D + R = 1$.

Полученные результаты для коэффициентов прохождения и отражения будут справедливы и в случае потенциального барьера (рис. 2.6)

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a/2, \\ U_0, & |x| < a/2, \end{cases}$$

если в формуле $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0)$ осуществить замену $U_0 \rightarrow -U_0$.

При $0 < E < U_0$ нужно дополнительно положить $k_1 = ik_1$, где $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)$. В результате получаем

$$R = \frac{(k^2 + k_1^2) \sin^2 k_1 a}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 a},$$

$$D = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 a}.$$

Из рис. 2.6 видно, что коэффициент прохождения D в квантовом случае достигает максимального значения $D = 1$ (классический предел) лишь при $k_1 a = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Между этими максимумами находятся минимумы, причем значение D в этих точках растет с ростом величины E/U_0 . Данные отличия в поведении квантового коэффициента прохождения от классического связаны с проявлением волновых свойств частиц.

$$2.2.14. W_1 = 1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

$$2.2.15. R = \frac{m_0^2}{m_0^2 + k^2}, \quad D = \frac{k^2}{m_0^2 + k^2}, \quad \text{где } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0.$$

2.2.16. В соответствии с условием (см. также задачу 2.2.4) выбираем решение в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin k_1 x, & 0 < x < a, \\ -e^{-ik_1 x} + e^{ik_1 x} = e^{i\pi/2} 2i \sin(k_1 x + \varphi/2), & x \geq a. \end{cases}$$

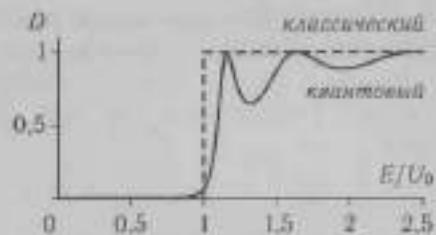


Рис. 2.6. Коэффициент прохождения для потенциального барьера.

Здесь введены стандартные обозначения:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad U_0 = \frac{\pi^2 k_0^2}{2m}, \quad k^2 + k_0^2 = k_1^2. \quad (1)$$

Решение в области $0 < x < a$ следует из граничного условия $\psi(0) = 0$, φ — дополнительная фаза, приобретенная отраженной волной.

Условие непрерывности логарифмической производной при $x = a$ дает, что

$$ka \operatorname{ctg}(ka + \varphi/2) = k_1 a \operatorname{ctg} k_1 a. \quad (2)$$

По условию задачи в яме должен быть один слабосвязанный уровень. При глубине ямы

$$U_{0\text{ши}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

в ней появляется первый дискретный уровень энергии (см. задачу 2.2.4), но его энергия $|E| = 0$. Поэтому предположим, что глубина ямы $U_0 = -U_{0\text{ши}}(1 + \Delta)$, где $\Delta \ll 1$. Раскладывая (2) в предложении $\Delta \ll 1$ и $ka \ll 1$ («медленные» частоты), получаем условие для определения фазы:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \approx -\frac{\pi^2 \Delta}{8ka}$$

Величину Δ можно связать с энергией ε слабосвязанного уровня. Для этого в уравнении, определяющем связанные уровни энергии,

$$\operatorname{ctg} K a = -\frac{\kappa}{K}, \quad \text{где} \quad |\varepsilon| = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad K^2 = k_0^2 - \kappa^2$$

проведем разложение, считая, что $\kappa a \ll 1$, $\Delta \ll 1$ (k_0 связано с U_0 обычным соотношением (1)). В результате найдем

$$\kappa \approx \frac{\pi^2 \Delta}{8a},$$

поэтому окончательно

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \approx -\frac{\kappa}{K} = -\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}$$

2.2.17. Вначале введем обозначения

$$E - U_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0, \quad E - U_2 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} > 0$$

Таким образом, мы считаем величины k и q действительными.

В полупространстве $z < 0$ (область I) волновая функция — решение уравнения Шредингера будет иметь вид

$$\psi_1(r) = e^{ikr} + Ae^{ik'r},$$

где A — амплитуда отраженной волны, \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы падающей и отраженной волн. В полупространстве $z > 0$ (область II) волновая функция описывает только прошедшую волну:

$$\psi_2(r) = Be^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

Здесь \mathbf{q} — волновой вектор прошедшей волны.

На плоскости $z = 0$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} \psi_1(x, y) = \psi_2(x, y), \\ \psi'_1(x, y) = \psi'_2(x, y), \end{cases}$$

откуда следует равенство фаз и амплитуд этих функций. Если направить ось y перпендикулярно плоскости падения, то условие равенства фаз записывается совсем просто (рис. 2.7):

$$\mathbf{k}_x x = \mathbf{k}'_x x = q_x x, \quad \text{или} \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' = q \sin \theta'', \quad (1)$$

откуда немедленно следует $\theta = \theta'$ (закон отражения) и закон преломления:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{q}{k}.$$

По аналогии с оптикой определим показатель преломления:

$$n = \frac{q}{k} = \sqrt{\frac{E - U_2}{E - U_1}}.$$

Это показатель преломления второй «среды» относительно первой. Если же принять $n = 1$ для $U = 0$, то получим показатели преломления обеих «сред» относительно вакуума:

$$n_1 = \sqrt{1 - \frac{U_1}{E}}, \quad n_2 = \sqrt{1 - \frac{U_2}{E}}.$$

Теперь используем условия равенства амплитуд

$$\begin{cases} 1 + A = B, \\ 1 - A = \frac{q_x}{k_x} B, \end{cases}$$

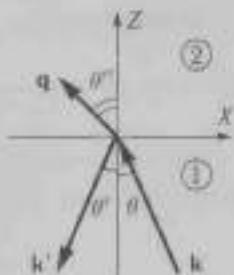


Рис. 2.7. Наклонное падение волны де Броиля на потенциальную ступеньку

Решаем эту систему и находим коэффициенты прохождения и отражения:

$$D = \frac{|J_x^{(out)}|}{|J_x^{(in)}|} = \frac{q_x}{k_x} |B|^2 = \frac{4q_x k_x}{(k_x + q_x)^2}$$

$$R = \frac{|J_x^{(out)}|}{|J_x^{(in)}|} = |A|^2 = \frac{(k_x - q_x)^2}{(k_x + q_x)^2}.$$

Полное отражение возникает, когда $E < U_0$, и тогда $q = ik$ — чисто минная величина. При этом из равенства (1) следует

$$q_x^2 = q^2 - q_y^2 = -\omega^2 - k^2 \sin^2 \theta < 0,$$

поэтому и $q_x = ik$ — чисто минное. При таких условиях $R = 1$, а плотность потока прошедшей волны равна нулю. Волновая функция в области 2 пропорциональна e^{-kx} , т. е. экспоненциально убывает.

2.2.18. Единственное связное состояние в яме существует при $\frac{\pi \hbar a}{\hbar^2} > \frac{1}{2}$

2.2.19. Функция Грина свободного уравнения Шредингера должна удовлетворять уравнению с δ -функцией в правой части:

$$(\hat{H} - E) G(x, x') = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - E \right\} G(x, x') = \delta(x - x') \quad (1)$$

Используем разложение в интеграл Фурье:

$$\delta(x - x') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}, \quad G(x, x') = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{G}(k) e^{ik(x-x')}.$$

Подставляя эти разложения в (1), находим ($p = \hbar k$, $E = -|E| < 0$)

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + |E|} = \frac{2m}{\hbar^2 k^2 + |E|}.$$

При переходе к функции $G(x, x')$ необходимо вычислить интеграл ($\omega^2 = -2m|E|/\hbar^2$)

$$G(x, x') = \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i k (x-x')}}{k^2 + \omega^2} = \frac{m}{\hbar^2 \omega} e^{-\omega|x-x'|}.$$

Интеграл вычисляется методом теории вычетов, но нужно иметь в виду, что при $x - x' > 0$ контур интегрирования следует замыкать в верхней, а при $x - x' < 0$ — в нижней полуплоскости.

Общее решение уравнения Шредингера при $U(x) \neq 0$, $E < 0$ с учетом граничных условий при $x \rightarrow \pm\infty$ будет выглядеть так:

$$\psi(x) = -\frac{m}{\hbar^2 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|x-x'|} U(x') \psi(x') dx',$$

выбор $U(x) = -\hbar^2 \omega_0 \delta(x)/m$ приводит к результату задачи 2.2.6.



2.3. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЕТОР

2.3.1. $|\phi_0(p)|^2 dp = \frac{1}{\sqrt{\pi p_0}} \exp\left(-\frac{p^2}{p_0^2}\right) dp, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m \omega}.$

2.3.2. Для расчетов используем выражение операторов \hat{x} и \hat{p} для гармонического осциллятора через операторы \hat{a}^\pm и \hat{a} (см. (II.15))

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}), \quad \hat{p} = i \frac{p_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m \omega}.$$

Тогда получим, что

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{E_n}{m\omega^2},$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle n | \hat{p}^2 | n \rangle = \frac{p_0^2}{2} \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = p_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) = m E_n,$$

где $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ — энергия квантового осциллятора.

Для классического осциллятора общее решение уравнений движения имеет вид

$$x_{\text{cl}} = A \sin(\omega t + \varphi), \quad p_{\text{cl}} = m\omega A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебаний, а φ — начальная фаза. Нетрудно найти

$$\overline{x_{\text{cl}}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2} = \frac{E_{\text{cl}}}{m\omega^2},$$

$$\overline{p_{\text{cl}}^2} = (m\omega)^2 \overline{x_{\text{cl}}^2} = m E_{\text{cl}}.$$

Известно, что согласно принципу соответствия в пределе $n \rightarrow \infty$ выражения для квантовых средних должны переходить в соответствующие выражения для классических средних для одного и того же значения энергии ($E_n = E_{\text{cl}}$). Заметим, что для гармонического осциллятора данное равенство выполняется не только при $n \rightarrow \infty$, но и для любых n .

2.3.3. $\langle \hat{x}^k \rangle = \langle n | \hat{x}^k | n \rangle = \frac{x_0^k}{4} (6n^2 + 6n + 3).$

$$\langle \hat{x}^{2k+1} \rangle = \langle n | \hat{x}^{2k+1} | n \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

2.3.4. $\Delta p \Delta x = \sqrt{(\Delta p)^2} \sqrt{(\Delta x)^2} = E_n / \omega = \hbar(n + 1/2)$, см. задачу 2.3.2.

2.3.5. $\hat{a}_n = \hat{a} \exp(-i\omega t)$, $\hat{a}_n^\dagger = \hat{a}^\dagger \exp(i\omega t)$. Использовать результат задачи 2.1.17.

2.3.6. Полагая, что функция $f(\hat{a}^+)$ допускает разложение в ряд Тейлора:

$$f(\hat{a}^+) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (\hat{a}^+)^k,$$

получаем $[\hat{x}, f(\hat{a}^+)] = f'(\hat{a}^+)$.

$$\text{2.3.7. a) } \omega = \frac{\int_1^\infty e^{-\rho^2} d\rho}{\int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho} \approx 0,16$$

$$\text{б) } E_n = E_{2n+1} = \hbar\omega(2n + 1 + 1/2) = 2\hbar\omega(n + 3/4).$$

$$\text{2.3.8. } \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dp^2} \right) \phi_n(p) = E_n \phi_n(p).$$

$$|\phi_n(p)|^2 dp = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi p_0}} \exp\left[-\left(\frac{p}{p_0}\right)^2\right] H_n^2\left(\frac{p}{p_0}\right) dp.$$

2.3.9. Когерентное состояние $|z\rangle$ является собственным вектором оператора \hat{a} , отвечающим собственному значению z (комплексному). На основании этого имеем

$$\frac{\langle z | \hat{H} | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\hbar\omega(z|\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}|z)}{\langle z | z \rangle} = \frac{\hbar\omega(z|z^*z + \frac{1}{2}|z)}{\langle z | z \rangle} = \hbar\omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right)$$

2.3.10. Эволюция во времени когерентного состояния определяется гамильтонианом гармонического осциллятора $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$, т. е.

$$|z(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|z(0)\rangle. \quad \text{Это означает, что}$$

$$\langle \hat{x} \rangle_t = \langle z(t) | \hat{x} | z(t) \rangle = \langle z(0) | e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{x}_0 e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} | z(0) \rangle = \langle z(0) | \hat{x}_H | z(0) \rangle,$$

$$\langle \hat{p} \rangle_t = \langle z(t) | \hat{p} | z(t) \rangle = \langle z(0) | \hat{p}_H | z(0) \rangle.$$

где \hat{x}_H , \hat{p}_H — операторы координаты и импульса в гейзенберговском представлении (см. задачи 2.1.17 и 2.1.23). Несложный расчет приводит к результату

$$\begin{cases} \langle \hat{x} \rangle_t = \langle \hat{x} \rangle_0 \cos \omega t + \frac{\langle \hat{p} \rangle_0}{m\omega} \sin \omega t, \\ \langle \hat{p} \rangle_t = \langle \hat{p} \rangle_0 \cos \omega t - m\omega \langle \hat{x} \rangle_0 \sin \omega t, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} \langle \hat{x} \rangle_0 = \langle z(0) | \hat{x} | z(0) \rangle, \\ \langle \hat{p} \rangle_0 = \langle z(0) | \hat{p} | z(0) \rangle. \end{cases}$$

Таким образом, эволюция во времени средних значений координаты и импульса в когерентном состоянии квантового осциллятора в точности соответствует закону изменения координаты и импульса классического осциллятора при движении по классической траектории.



2.3.11. Основное состояние гармонического осциллятора $|0\rangle$ представляет собой когерентное состояние с $z = 0$. Вектор состояния $|0\rangle$ определяется из уравнения $\hat{a}|0\rangle = 0$ (см. (II.17)). После перехода к координатному представлению это уравнение принимает вид

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0(\xi) = 0 \quad \text{с решением} \quad \psi_0(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(Использованы обозначения: $\xi = x/x_0$, $\psi_0(\xi) = \langle \xi | 0 \rangle$ — волновая функция основного состояния в координатном представлении.)

Уравнение для $\langle \xi | z \rangle$ — волновой функции когерентного состояния

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\langle \xi | z \rangle = z\langle \xi | z \rangle$$

является модификацией предыдущего уравнения с заменой $\xi \rightarrow \xi - \sqrt{2}z$. Поэтому искомая функция имеет вид

$$\langle \xi | z \rangle = C \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}z)^2\right].$$

В импульсном представлении по аналогии получаем

$$\langle p | z \rangle = C \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0} + \sqrt{2}z\right)^2\right].$$

Фактически обе функции являются собственными функциями основного состояния, «сдвинутыми» в комплексной плоскости на число z .

2.3.12. Гамильтониан заряженного осциллятора в однородном электрическом поле (в системе единиц $m = 1$, $\hbar = 1$) имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2} + \frac{\omega_x^2 x^2}{2} - eEx. \quad (1)$$

Волновая функция основного состояния осциллятора с гамильтонианом (1) при $t < 0$ в осцилляторных единицах имеет вид

$$\psi(Q, t)|_{t<0} = e^{-iE t} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(Q-eE)^2}.$$

Сравнивая с когерентным состоянием (см. задачу 2.3.11), видим что в нашем случае параметр $z = eE/\sqrt{2}$. Таким образом, вероятность обнаружить осциллятор в момент времени $t > 0$ на n -м возбужденном уровне энергии равна

$$w_{E_n} = \frac{(eE)^n}{n!} e^{-iE t} e^{-\frac{1}{2}(Q-eE)^2}$$

в соответствии с (II.20).

2.3.13. $\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle / \langle \Delta \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 / 4$, причем это соотношение остается постоянным во времени. Таким образом, когерентное состояние минимизирует соотношение неопределенностей для координаты и импульса. Поэтому когерентные состояния в наибольшей степени соответствуют классическому представлению о движении частицы по траектории.

2.4. УГОЛОВОЙ МОМЕНТ, СПИН

- 2.4.1.** а) 0; б) 0; в) 0; г) $i(\hat{p}_x \hat{r}) e_{\hat{x}} / \hat{p}_x$; д) $i(e_{\hat{y}} \hat{p}_x \hat{p}_y + e_{\hat{z}} \hat{p}_y \hat{p}_z)$; е) $\pm \hat{l}_z$; ж) $2\hat{l}_z$; з) $i e_{\hat{y}} \hat{p}_x$; и) $i e_{\hat{y}} \hat{x}$; к) 0.

Равенство вилюю результатов в п.п. а), б), в), ж) и к) связано с тем, что они отвечают коммутаторам \hat{l}_i со скалярными операторами. Такие операторы не преобразуются при поворотах системы координат, а оператор \hat{l}_i описывает преобразование векторов состояний именно при таких поворотах.

Одноковая структура результатов в п.п. д) и и) есть следствие того, что \hat{x}_y и \hat{p}_z являются компонентами векторных операторов, т.е. преобразуются при поворотах, как компоненты векторов (см. также задачу 2.4.9).

$$\text{2.4.2. } \operatorname{Tr} \hat{l}_i = 0.$$

2.4.3. Поскольку все оси координат равноправны, то

$$\langle \hat{l}^2 \rangle = \langle \hat{l}_x^2 \rangle + \langle \hat{l}_y^2 \rangle + \langle \hat{l}_z^2 \rangle = 3\langle \hat{l}_z^2 \rangle.$$

Исходя из равновероятности различных значений \hat{l}_z имеем

$$\langle \hat{l}_z^2 \rangle = \frac{1}{2I+1} \sum_{m=-I}^I m^2 = \frac{2}{2I+1} \sum_{m=0}^I m^2 = \frac{I(I+1)}{3}.$$

Окончательно получаем, что $\hat{l}^2 = \langle \hat{l}^2 \rangle = I(I+1)$.

2.4.4. Исходя из коммутационного соотношения $[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = i\hbar \hat{M}_z$ получаем (в соответствии с решением задачи 2.1.9)

$$\langle \Delta \hat{M}_x^2 \rangle_{\min} \langle \Delta \hat{M}_y^2 \rangle_{\min} = \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{M}_z \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} \hbar^2 I^2,$$

ибо усреднение проводится по состоянию $|I, I\rangle$. В силу симметрии задачи относительно осей x и y можно считать $\langle \Delta \hat{M}_x^2 \rangle_{\min} = \langle \Delta \hat{M}_y^2 \rangle_{\min}$.

Учитывая также, что $\langle \hat{M}_x \rangle = \langle \hat{M}_y \rangle = 0$ (см. решение задачи 2.4.6), окончательно получаем

$$\langle l, l | \hat{M}_z^2 + \hat{M}_y^2 | l, l \rangle_{\text{спирь}} = \hbar^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) = \hbar^2 L.$$

2.4.5. $e^{i\omega t} |l, m\rangle$. Использовать результаты задач 2.1.17 и 2.4.1.

2.4.6. Поскольку (см. (II.22)),

$$\hat{l}_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle, \quad (1)$$

то $\langle \hat{l}_x \rangle \sim \langle l, m | \hat{l}_x | l, m \pm 1 \rangle = 0$. Отсюда получаем $\langle \hat{l}_x \rangle \pm i \langle \hat{l}_y \rangle = 0$, поэтому $\langle \hat{l}_x \rangle = \langle \hat{l}_y \rangle = 0$.

Далее, из соотношения (1) имеем $\langle \hat{l}_{\pm}^2 \rangle = 0$, откуда

$$\langle \hat{l}_x^2 - \hat{l}_y^2 \rangle \pm i \langle \hat{l}_x \hat{l}_y + \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle = 0,$$

и поэтому $\langle \hat{l}_x^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle$, $\langle \hat{l}_x \hat{l}_y + \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle = 0$. Исходя из этого и учитывая также, что $\langle \hat{l}_x \hat{l}_y - \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle = i \langle \hat{l}_z \rangle$, получаем $\langle \hat{l}_x \hat{l}_z \rangle = -i \langle \hat{l}_y \hat{l}_z \rangle = im/2$.

Наконец, имея в виду, что $\langle \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 \rangle = \langle \hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 \rangle$, нетрудно получить утверждение в) данной задачи.

2.4.7. Из формулы (1) задачи 2.4.6 следует, что

$$\langle l, m' | \hat{l}_{\pm} | l, m \rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \delta_{m', m \pm 1}.$$

Очевидно также, что $\langle l, m' | \hat{l}_x | l, m \rangle = m \delta_{m', m}$, $\langle l, m' | \hat{l}^2 | l, m \rangle = l(l+1) \delta_{m', m}$. Полагая $l=1$, получаем в представлении, где \hat{l}^2 и \hat{l}_x диагональны,

$$\hat{l}_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{l}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{l}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4.8. Используя результат задачи 2.4.7 и решив уравнение на собственные векторы и собственные значения $\hat{j}_z \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$, получаем, что собственные значения равны $\lambda = 0, \pm 1$, а собственные векторы в представлении, где \hat{j}^2 и j_z диагональны, имеют вид

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ (1 - \cos \theta) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(1 - \cos \theta) e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ -(1 + \cos \theta) e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

2.4.9. При повороте системы координат новые координаты r' физического объекта выражаются через старые следующим образом: $r' = R_\varphi r$, где $R_\varphi = R_{\text{тун}}$ — матрица поворота (оператор преобразования координат). Поворот осуществляется на угол φ вокруг оси, направление которой задано единичным вектором n .

Компоненты векторного оператора при этом должны преобразовываться по обычному векторному закону (так же, как и компоненты вектора \mathbf{r}), т. е.¹⁰

$$\hat{\mathbf{A}}' = e^{-i\varphi(n)} \hat{\mathbf{A}} e^{i\varphi(n)} = R_{\text{тун}} \hat{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

Отсюда для поворота на бесконечно малый угол $d\varphi$ имеем (с линейной точностью по $d\varphi$)

$$\hat{\mathbf{A}}' = (1 - id\varphi(n)) \hat{\mathbf{A}} (1 + id\varphi(n)) \simeq \hat{\mathbf{A}} - id\varphi[(n)] \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - d\varphi[n \times \hat{\mathbf{A}}], \quad (2)$$

последнее равенство в (2) следует из формулы Эйлера для поворота вектора на малый угол. Переписывая (2) в тензорных обозначениях, получим

$$n_i [\hat{j}_k, \hat{\mathbf{A}}_l] = -ie_{ijk} n_l \hat{\mathbf{A}}_i = ie_{ikl} n_i \hat{\mathbf{A}}_l,$$

откуда и следует утверждение задачи.

2.4.10. Докажем первое соотношение. Переходим к тензорным обозначениям и получим

$$[\hat{j}^2, \hat{\mathbf{A}}_l] = [\hat{j}_k \hat{j}_k, \hat{\mathbf{A}}_l] = j_k [\hat{j}_k, \hat{\mathbf{A}}_l] + [\hat{j}_k, \hat{\mathbf{A}}_l] j_k =$$

$$= ie_{klj} \hat{j}_k \hat{\mathbf{A}}_l + ie_{kjl} \hat{\mathbf{A}}_l \hat{j}_k = ie_{klj} \hat{\mathbf{A}}_l j_k - ie_{kjl} \hat{j}_k \hat{\mathbf{A}}_l,$$

¹⁰ Закон преобразования оператора в (1) выбирается обратным по отношению к закону преобразования вектора состояния (II.23) с тем, чтобы согласовать изменения средних значений: $\langle \psi' | \hat{\mathbf{A}} | \psi' \rangle - \langle \psi | \hat{\mathbf{A}}' | \psi \rangle$.

что и доказывает утверждение задачи. Данный результат необходимо использовать при доказательстве второго соотношения.

2.4.11. Собственные функции и собственные значения матриц Паули находятся из решения уравнений $\hat{\sigma}_{i\lambda\lambda} = \lambda_i \chi_{\lambda}$, где $i = x, y, z$. Поскольку для любой матрицы Паули $\hat{\sigma}_i^2 = 1$, то собственные значения $\lambda_i = \pm 1$. Нормированные на единицу собственные функции матриц $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ имеют вид

$$\chi_{\lambda_i=\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\lambda_i=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}.$$

$$\chi_{\lambda_i=\pm 1} = \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\lambda_i=-i} = \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Последние две функции описывают состояния $\chi_{\pm 1/2}$ (II.26), в которых проекция спина на ось z равна $\pm 1/2$.

2.4.12. а) $P_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, б) $P_z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \delta \\ \sin \theta \sin \delta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, $|P| = 1$ в обоих случаях.

2.4.13. При получении соотношения необходимо учесть основные свойства матриц Паули: $\hat{\sigma}_i^2 = 1$, $\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 0$ ($i \neq j$), $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_i] = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_i = 2ie_{ijk}\hat{\sigma}_k$ (последнее есть следствие основного коммутационного соотношения для компонент спинового момента).

2.4.14. При доказательстве использовать результат задачи 2.4.13.

2.4.15. $\hat{\sigma}_z^2 = 0$, $\{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} = 2i\hat{I}$, $\{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_y\} = \pm 2i\hat{I}$, $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} = 0$

2.4.16. $\text{Tr } \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = 2\delta_{ij}$, $\text{Tr } \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_l = 2ie_{ijk}$.

2.4.17. $(\hat{\sigma} \mathbf{a})^k = \begin{cases} |\mathbf{a}|^k \cdot \hat{I}, & k \text{ — четное,} \\ |\mathbf{a}|^{k-1} (\hat{\sigma} \mathbf{a}), & k \text{ — нечетное.} \end{cases}$

2.4.18. $\exp[i\alpha(\hat{\sigma} \mathbf{n})] = \cos \alpha + i(\hat{\sigma} \mathbf{n}) \sin \alpha$.

2.4.19. С учетом язного вида матриц Паули имеем

$$\hat{\sigma}_a = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & e^{-i\phi_0} \sin \theta_0 \\ e^{i\phi_0} \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Решая далее уравнение на собственные функции и собственные значения $\hat{\sigma}_a \Psi_c = c \Psi_c$, получим, что $c^2 = 1$, откуда $c = \pm 1$, а собственные

функции (нормированные на единицу) имеют вид

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ e^{i\varphi_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-1} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta_0}{2} \\ e^{i\varphi_0} \cos \frac{\theta_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти функции, как и обычно, определены с точностью до общего фазового множителя $e^{i\gamma}$.

2.4.20. Искомый оператор преобразования спинора имеет вид $\tilde{R}(\theta_0 \mathbf{n}) = \exp \left[i \frac{\theta_0}{2} (\hat{\sigma} \mathbf{n}) \right]$ (см. (II.23)).

Для того, чтобы ось z оказалась соосицей с направлением вектора \mathbf{n}_0 , необходимо осуществить поворот системы координат на угол θ_0 вокруг оси с направлением, заданным единичным вектором \mathbf{n} , лежащим в плоскости xOy , а также перпендикулярным оси z и вектору \mathbf{n}_0 . Несложный расчет показывает, что $\mathbf{n} = [-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0, 0]$. Поэтому матрица оператора преобразования спинора будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\theta_0 \mathbf{n}) &= \exp \left[i \frac{\theta_0}{2} (\hat{\sigma} \mathbf{n}) \right] = \cos \frac{\theta_0}{2} - i \sin \frac{\theta_0}{2} (\sin \varphi_0 \hat{\sigma}_x - \cos \varphi_0 \hat{\sigma}_y) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} & \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\varphi_0} \\ -\sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\varphi_0} & \cos \frac{\theta_0}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Действуя оператором \tilde{R} на функции $\Psi_{\pm 1}$ предыдущей задачи, получим с точностью до общего фазового множителя $\chi_{\pm 1/2}$ (см. (II.26))

2.4.21. Действуя оператором \tilde{R}^{-1} на собственные функции оператора $\hat{\sigma}_z$, т. е. на $\chi_{\pm 1/2}$ (см. (II.26) и задачу 2.4.20), очевидно получим $\Psi_{\pm 1}$ (см. задачу 2.4.19). Это и есть состояния, в которых проекция спина на ось \mathbf{n}_0 равна $\pm 1/2$. Для того, чтобы получить явный вид матрицы \tilde{R}^{-1} , достаточно в выражении для \tilde{R} произвести замену $\theta_0 \rightarrow -\theta_0$.

2.4.22. По условию задачи электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z , равной $1/2$, т. е. $\chi_{1/2}$ (см. (II.26)). Представим это состояние в виде суперпозиции состояний $\Psi_{\text{сп}}^{\pm}$ с определенным значением проекции спина на ось \mathbf{n}_0 (см. задачу 2.4.19), образующих ортонормированный базис в спиновом пространстве электрона.

$$\begin{aligned} \chi_{1/2} &= \sum_{s=\pm 1} |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s| \chi_{1/2} = (\Psi_1^\dagger \chi_{1/2}) \Psi_1 + (\Psi_{-1}^\dagger \chi_{1/2}) \Psi_{-1} = \\ &= \cos \frac{\theta_0}{2} \Psi_1 - \sin \frac{\theta_0}{2} \Psi_{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому $w(z=1) = \cos^2(\theta_0/2)$, $w(z=-1) = \sin^2(\theta_0/2)$ — вероятности найти частицу в состояниях с проекцией спина на ось \mathbf{n}_0 , равной $\pm 1/2$.

2.4.23. Угол поворота и направление оси вращения:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \mathbf{n}_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + \mathbf{n}_2 \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} - [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \right\}.$$

2.4.24. См. решение задачи 2.4.7.

2.4.25. Спиновая функция состояния, отвечающая проекции спина $+1$ на ось \mathbf{n}_0 , совпадает с функцией ψ_1 , найденной в решении задачи 2.4.8 для орбитального момента $l=1$. Вероятности различных проекций спина на ось z в этом состоянии:

$$w(\pm 1) = \frac{1}{4}(1 \pm \cos \theta_0)^2, \quad w(0) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0.$$

При $\theta_0 \rightarrow 0$ и $\theta_0 \rightarrow \pi$ функция переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — функции,

описывающие состояния с проекцией спина на ось z , равной ± 1 . При

$\theta_0 \rightarrow \pi/2$, $\varphi_0 \rightarrow 0$ и $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ решение переходит в $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ —

функции, описывающие состояния, в которых проекция спина на оси x и y равна $+1$.

2.5. ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.5.1. Гамильтониан системы

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{e}{c} \mathcal{H}_x \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right]$$

коммутирует с операторами \hat{p}_y и \hat{p}_x . Поэтому собственные функции \hat{H} можно искать в виде

$$\psi_{T(p_x)} = C \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_y y + p_z z) \right] f(x),$$

где $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\left(E - \frac{p_x^2}{2m} \right) - \frac{\pi}{2} \omega_H^2 (x - x_0)^2 \right] f(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\omega_H = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ ($e > 0$) и $x_0 = \frac{ep_x}{e\mathcal{H}}$. Решение уравнения (1) выражается через решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора с частотой ω_H (см. (II.18)). В итоге

$$\Psi_{n,p_x}(x, y, z) = C \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_y y + p_z z) \right] u_n^{nm}(x - x_0),$$

$$E_{np_x} = \hbar \omega_H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_x^2}{2m}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Первое слагаемое в (2) описывает энергетические уровни поперечного движения (уровни Ландау). Они являются дискретными иenumerируются квантовым числом n . Движение вдоль поля не квантуется, квантовое число p_x может принимать значения $-\infty < p_x < \infty$. Уровни энергии (2) вырождены, ибо они не зависят от квантового числа p_y , которое также может изменяться от $-\infty$ до ∞ .

Если ограничить область движения частицы ящиком в виде куба с ребром L , то p_x и p_y становятся дискретными:

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i, \quad n_i = 0, \pm 1, \dots,$$

потому что предполагается граничное условие $\psi(x_i + L) = \psi(x_i)$. Исходя из того, что в классическом пределе на одно квантовое состояние (в одном измерении) приходится фазовый объем $2\pi\hbar$ (см. задачу 2.2.1) получим, что число квантовых состояний в объеме V в расчете на интервал Δp_x и на один дискретный уровень равно

$$\Delta N = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^2 \Delta p_x \Delta p_y.$$

Из условия $0 < x_0 < L$ (центр классической орбиты внутри объема V , и радиус орбиты пренебрежимо мал по сравнению с L) имеем $\Delta p_y = e\mathcal{H}L/c$. Поэтому окончательно

$$\Delta N = \frac{e\mathcal{H}}{c} \frac{V}{(2\pi\hbar)^2} \Delta p_x.$$

2.5.2. С педагогической точки зрения полезно найти уровни энергии в данной задаче путем выделения асимптотик без привлечения специальных функций.



Векторный потенциал однородного поля записывается в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathcal{H} \times \mathbf{r}]$$

Направим, как обычно, ось x вдоль магнитного поля, тогда компоненты векторного потенциала в цилиндрической системе координат будут равны

$$A_x = 0, \quad A_\rho = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{2} \mathcal{H} \rho.$$

Гамильтониана частицы массы M с зарядом e ($e > 0$) имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left(\hat{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2M} \hat{\mathcal{P}}^2 - \frac{e \hbar \Omega}{2Mc} \hat{p}_z + \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{8Mc^2} \rho^2. \quad (1)$$

Введем ларморову частоту $\omega_H = e\mathcal{H}/(Mc)$ и учтем, что оператор проекции момента импульса на ось z равен $\hat{l}_z = -i\partial/\partial\varphi$, тогда гамильтониан (1) в цилиндрических координатах примет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{i}{2} \hbar \omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{8} M \omega_H^2 \rho^2. \quad (2)$$

Гамильтониан (1)–(2) коммутирует с операторами \hat{l}_z и \hat{p}_z , поэтому решение стационарного уравнения Шредингера в цилиндрических координатах

$$\hat{H}\psi(z, \rho, \varphi) = E\psi(z, \rho, \varphi)$$

следует искать в виде общей собственной функции трех операторов: \hat{H} , \hat{l}_z и \hat{p}_z , т. е. $\psi(z, \rho, \varphi) = \psi_z(z) \Phi(\varphi) R(\rho)$, где

$$\psi_z(z) \equiv \psi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p z}, \quad \Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

Таким образом, имеем

$$\psi(z, \rho, \varphi) = \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} R(\rho). \quad (3)$$

Для радиальной функции $R(\rho)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} R \right) - \frac{1}{2} \hbar \omega_H \rho R + \frac{1}{8} M \omega_H^2 \rho^2 R = E_R R. \quad (4)$$

(Мы представили полную энергию в виде суммы $E = E_r + E_H$, где $E_r = p_z^2/(2M)$ — энергия продольного движения частицы.) Потенциальная энергия в (4) зависит квадратично от переменной ρ , как и для гармонического осциллятора, поэтому ее удобно измерять в осцилляторных

единицах: $E_H = \hbar\omega_H \epsilon$. Позадим уравнение (4) на $\hbar\omega_H$ и введем безразмерную переменную

$$\xi = \frac{\sqrt{2}\rho}{\rho_H} = \sqrt{\frac{2M\omega_H}{\hbar}}\rho,$$

где $\rho_H = \sqrt{\hbar/(M\omega_H)}$ — осцилляторная единица длины (П.16). В безразмерных переменных уравнение принимает вид

$$R'' + \frac{1}{\xi^2}R' + \left(\epsilon - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{m}{2} - \frac{\xi^2}{16}\right)R = 0. \quad (5)$$

Выделим асимптотику уравнения (5). При $\xi \rightarrow 0$ имеем

$$R_0'' + \frac{1}{\xi}R_0' - \frac{m^2}{\xi^2}R_0 = 0.$$

Ищем решение, как обычно, в виде степенной функции $R_0 \sim \xi^{\alpha}$ и получаем для x уравнение и его решение в виде

$$s(s-1) + \alpha - m^2 = 0, \quad \rightarrow \quad s = \pm m.$$

Таким образом, асимптотика радиальной функции при $\xi \rightarrow 0$ есть

$$R|_{\xi \rightarrow 0} \sim \xi^{|\alpha|}.$$

Для определение асимптотического решения при $\xi \rightarrow \infty$ на основании (5) получаем уравнение

$$R''_{\infty} - \frac{1}{16}\xi^2 R_{\infty} = 0.$$

Ищем решение в виде $R_{\infty} \sim e^{-\alpha\xi^2}$ и с асимптотической точностью получаем $\alpha = 1/8$, т. е.

$$R|_{\xi \rightarrow \infty} \sim e^{-\xi^2/8}.$$

Таким образом, полную радиальную функцию можно представить в виде

$$R(\xi) = e^{-\xi^2/8}\xi^{|m|}w(\xi), \quad (6)$$

учитывающем особенности поведения в нуле и на бесконечности.

Подставляя функцию $R(\xi)$ в виде (6) в радиальное уравнение (5) и вводя новую переменную z согласно $z = \xi^2/4$, получим уравнение для функции $w(z)$:

$$z \frac{d^2w}{dz^2} + ((|m|+1-z)\frac{dw}{dz} + \left[z - \frac{|m|-m+1}{2}\right]w = 0. \quad (7)$$

причем функцию $w(z)$ мы будем далее искать в виде суммы степенного ряда (вообще говоря, бесконечного)

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (8)$$

Подставив в (7) решение в виде суммы (8) и производя преобразование индекса суммирования таким образом, чтобы сгруппировать члены с одинаковыми степенями z , находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left[(k+1)(k+1+|m|)a_{k+1} + \left(\xi - k - \frac{|m|-m+1}{2}\right)a_k \right] = 0.$$

Для того, чтобы левая часть данного уравнения обратилась в ноль, необходимо и достаточно потребовать, чтобы коэффициенты при всех степенях z были бы равны нулю. На основании этого получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_k :

$$a_{k+1} = a_k \frac{2k+|m|-m+1-2\xi}{2(k+1)(k+1+|m|)}. \quad (9)$$

Заметим, что в ряде (8) отношение двух последующих коэффициентов согласно (9) при $k \gg 1$ стремится к пределу

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \Big|_{k \gg 1} \rightarrow \frac{1}{k}$$

и будет таким же, как и у функции e^x , разложенной в ряд

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Поэтому при $z \rightarrow \infty$ мы получим $\omega(z) \sim e^z$ или $\omega(\xi) \sim e^{\xi^2/4}$, т. е. радиальная функция (6) при $\xi \rightarrow \infty$ будет экспоненциально расти $R(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \sim e^{\xi^2/8}$. Единственная возможность избежать данного неограниченного роста — «оборвать» ряд (8) при некотором $k = n_p$ и превратить его в полином. При этом должно выполняться условие

$$\varepsilon_{n_p} = n_p + \frac{|m|-m+1}{2}, \quad n_p = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Число n_p , как и обычно, называется *радиальным квантовым числом* и определяет количество нулей многочлена $\omega_{n_p}(z)$.

Окончательно получаем энергетический спектр заряженной частицы в однородном магнитном поле²¹:

$$E_{np} = \hbar \omega_H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2M}, \quad n = n_p + \frac{|m|-m}{2} = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

где мы ввели *глажкое квантовое число* n . Данный результат находится в полном согласии с формулой (2) решения задачи 2.5.1. Уровни энергии (11) вырождены по значению проекции момента на направление

²¹ В учебнике [13] рассматривается задача для электрона с зарядом $e = -|e|$, поэтому проекция m входит в выражение для энергии с другим знаком.

магнитного поля: каждому фиксированному значению числа n отвечают состояния с $m = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, \infty$.

Для функции $\omega(z)$ мы получаем ряд (8), определяемый рекуррентными соотношениями (9) и сводящийся к вырожденной гипергеометрической функции $F(-n_\rho, |m|+1, z)$, которая является регулярным при $z \rightarrow 0$ решением уравнения (7). При условии (10) гипергеометрическая функция превращается в присоединенный полином Лагерра (см. (Л.24)), т. е.

$$\begin{aligned} w_{n_\rho, m}(z) &= a_0 \left[1 - \frac{n_\rho}{(|m|+1)!} \frac{z}{1} + \frac{n_\rho(n_\rho-1)}{(|m|+1)(|m|+2)!} \frac{z^2}{2!} + \dots \right] = \\ &= a_0 F(-n_\rho, |m|+1, z) = \frac{a_0 |m|!}{(|m|+n_\rho)!} L_{n_\rho}^{(m)}(z). \end{aligned}$$

Восстанавливая исходные обозначения, запишем общий вид радиальной функции $R(\rho)$, нормированной условием $\int_0^\infty |R(\rho)|^2 \rho d\rho = 1$:

$$R_{n_\rho, m}(\rho) = \frac{1}{\rho^{n_\rho} \sqrt{n_\rho! (Cm+n_\rho)!}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\rho_\mu^2}\right) \left(\frac{\rho}{\sqrt{2\rho_\mu}}\right)^{|m|} L_{n_\rho}^{(m)}\left(\frac{\rho^2}{2\rho_\mu^2}\right)$$

2.5.3. Утверждается, что координатные и спиновые переменные в уравнении Паули разделяются только в случае наличия однородного магнитного поля, возможно, зависящего от времени. Предполагая возможность такого разделения, ищем решение уравнения Паули

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = (\hat{H}^{(2)} - \mu_0(\sigma \mathcal{H})) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \hat{U}(\mathbf{r}), \quad \rho_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad c > 0,$$

в следующем виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \chi(t). \quad (2)$$

Здесь $\chi(t)$ — спиновая функция, зависящая только от времени. Подставим (2) в (1) и потребуем, чтобы функция $f(\mathbf{r}, t)$ подчинилась уравнению Шредингера для бесспиновой частицы

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t) = \hat{H}^{(2)} f(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Тогда для спиновой функции мы получим

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\mu_0(\hat{\sigma} \mathcal{H}) \chi(t). \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) будут независимыми, если магнитное поле \mathcal{H} — однородное, т. е. не зависит от координат.

2.5.4. По условию задачи магнитное поле постоянное и однородное, поэтому переменные в уравнении Паули разделяются, и уравнение (4) задачи 2.5.3 принимает вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\hbar \Omega \hat{\sigma}_z \chi(t), \quad \Omega = \frac{eH}{2mc} \quad (1)$$

С учетом явного вида матрицы $\hat{\sigma}_z$ уравнение (1) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = i\Omega \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}, \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— начальное условие. Решаем далее систему дифференциальных уравнений для z_1 и z_2 и получаем

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ i \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (2)$$

Используя (2), находим средние значения

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \chi^\dagger \hat{\sigma}_x \chi = 0, \quad \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \sin 2\Omega t, \quad \langle \hat{\sigma}_z \rangle = \cos 2\Omega t.$$

Поскольку $\langle \hat{\mu} \rangle_\chi = \mu_0 \langle \hat{\sigma} \rangle_\chi$, то ясно, что в плоскости zOz' , перпендикулярной к направлению магнитного поля, происходит периодические во времени изменения средних значений магнитного момента мюона. Это интерпретируется, как пренессия магнитного момента вокруг направления магнитного поля.

Перейдем к представлению Тейзенберга. Из формулы (1) следует, что гамильтониан $\hat{H} = -\hbar \Omega \hat{\sigma}_z$ и поэтому

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_H = e^{-i\Omega t \hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_x e^{i\Omega t \hat{\sigma}_z} = \hat{\sigma}_x,$$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle_H = e^{-i\Omega t \hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_y e^{i\Omega t \hat{\sigma}_z} = \hat{\sigma}_y \cos 2\Omega t + \hat{\sigma}_x \sin 2\Omega t,$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_H = e^{-i\Omega t \hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_z e^{i\Omega t \hat{\sigma}_z} = \hat{\sigma}_z \cos 2\Omega t - \hat{\sigma}_x \sin 2\Omega t.$$

При вычислениях необходимо использовать соотношение $e^{i\Omega t \hat{\sigma}_z} = \cos \Omega t + i \hat{\sigma}_x \sin \Omega t$, а также свойства матрицы Паули. Таким образом, в представлении Тейзенберга матрицы Паули (и спиновые операторы $\hat{s}_i = (1/2)\hat{\sigma}_i$) изменяются во времени, как компоненты трёхмерного вектора.

2.5.5. Данную задачу можно решить двумя способами: 1) используя унитарное преобразование, связывающее представления Шредингера и Тейзенберга (II.11) и 2) непосредственно решая уравнения Тейзенберга (II.10). Первый способ был применен при решении задачи 2.5.4, здесь мы воспользуемся вторым способом.

Направим магнитное поле по оси z , тогда спиновый гамильтониан электрона в однородном магнитном поле примет вид

$$\hat{H} = 2\mu_0\mathcal{H}\hat{S}_z.$$

Здесь $\mu_0 = e\hbar/(2mc)$ — магнетон Бора, $-e < 0$ — заряд электрона. Для решения задачи воспользуемся уравнением Тейзенберга (III.10). Получаем (с учетом $[\hat{S}_x, \hat{S}_\pm] = \pm\hat{S}_\pm$)

$$\frac{d\hat{S}_x}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{S}_\pm}{dt} = \pm\frac{i}{\hbar}2\mu_0\mathcal{H}\hat{S}_\pm.$$

Полученные уравнения легко решаются:

$$\hat{S}_x(t) = \hat{S}_x, \quad \hat{S}_\pm(t) = e^{\pm i\omega t}\hat{S}_\pm,$$

где $\omega = 2\mu_0\mathcal{H}/\hbar$.

Окончательно будем иметь (ср. с задачей 2.5.4)

$$\hat{S}_x(t) = \hat{S}_x \cos\omega t - \hat{S}_y \sin\omega t,$$

$$\hat{S}_y(t) = \hat{S}_y \cos\omega t + \hat{S}_x \sin\omega t.$$

2.5.6. Уравнение эволюции спина в лабораторной системе координат имеет вид (см. задачу 2.5.3)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(t) = \hat{H}\chi(t) = -\mu_0(\vec{\sigma}\mathcal{H})\chi(t) = -\gamma(\hat{\mathbf{S}}\vec{\Omega})\chi(t),$$

где $\gamma = e/(mc)$ — гиромагнитное отношение для спинового момента, $\hat{\mathbf{S}} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$ — оператор спина. Здесь наряду с постоянным полем \mathcal{H}_0 , направленным по оси z , имеется также поле \mathcal{H}_1 , вращающееся в плоскости xOy с угловой скоростью $\omega = \omega\hat{\mathbf{k}}$. Поэтому гамильтониан явно зависит от времени.

Перейдем в систему координат K' , врачающуюся относительно лабораторной системы K с угловой скоростью ω . При этом спиновая функция подвергается преобразованию, отвечающему повороту на угол ωt :

$$\chi' = e^{i\omega\sigma_z t}\chi = e^{i\delta\omega t}\chi.$$

Функция χ' будет удовлетворять преобразованному уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi'(t) = \hat{H}'_{eff}\chi'(t), \quad \text{где} \quad \hat{H}'_{eff} = e^{i\delta\omega t}\hat{H}e^{-i\delta\omega t} - (\hat{\mathbf{S}}\omega).$$

С учетом явного вида гамильтониана

$$\hat{H} = -\gamma[\mathcal{H}_1(\hat{S}_x \cos\omega t + \hat{S}_y \sin\omega t) + \mathcal{H}_0\hat{S}_z]$$

получим

$$\hat{H}'_{\text{eff}} = -\gamma(\mathbf{S}\mathcal{H}_{\text{eff}}), \quad \mathcal{H}'_{\text{eff}} = \left\{ \mathcal{H}_0, 0, \mathcal{H}_0 + \frac{\omega}{\gamma} \right\}.$$

Таким образом, мы перешли к некоторому эффективному полю $\mathcal{H}'_{\text{eff}}$, но зато теперь наш гамильтониан \hat{H}'_{eff} не зависит от времени.

В новой системе координат магнитное поле однородно и постоянно во времени. Магнитный момент частицы должен прецессировать вокруг направления магнитного поля (см. задачу 2.5.4). Переходим теперь к представлению Гейзенберга, учитывая, что $\partial\hat{H}'_{\text{eff}}/\partial t = 0$:

$$\chi_H = \chi'' = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_{\text{eff}}t}\chi' = e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma(\mathbf{S}\mathcal{H}_{\text{eff}})t}\chi' = e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{S}\Omega)t}\chi'.$$

Как видно, переход к представлению Гейзенберга эквивалентен еще одному повороту — вокруг направления вектора $\Omega = -\gamma\mathcal{H}_{\text{eff}}$ на угол Ωt . Спиновая функция χ'' не зависит от времени (как и должно быть), ибо новый вид уравнения эволюции:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi''(t) = 0, \quad \text{потому что} \quad \hat{H}''_{\text{eff}} = 0.$$

В итоге решение исходного уравнения $\chi(t)$ записывается при помощи оператора эволюции, представляющего собой два последовательных поворотов. Поскольку $\chi''(t) = \chi''(0) = \chi'(0) = \chi(0)$, решение принимает вид

$$\chi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\tilde{\mathbf{S}}\omega)t} e^{-\frac{i}{\hbar}(\tilde{\mathbf{S}}\Omega)t} \chi(0).$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} \omega_0 = \gamma\mathcal{H}_0, \quad \omega_1 = \gamma\mathcal{H}_1, \\ \Omega = \sqrt{(\omega + \omega_0)^2 + \omega_1^2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \theta = \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}'_{\text{eff}}} = \frac{\omega_1}{\Omega}, \\ \cos \theta = \frac{\mathcal{H}_0 + \omega/\gamma}{\mathcal{H}'_{\text{eff}}} = \frac{\omega + \omega_0}{\Omega}, \end{cases}$$

где θ — угол между векторами \mathcal{H}_0 и $\mathcal{H}'_{\text{eff}}$. Тогда

$$(\tilde{\mathbf{S}}\omega) = \omega \tilde{\mathbf{S}}_z, \quad (\tilde{\mathbf{S}}\Omega) = -\Omega(\tilde{\mathbf{S}}_x \sin \theta + \tilde{\mathbf{S}}_y \cos \theta).$$

Вероятность переворота спина к моменту t равна

$$\begin{aligned} W_\lambda \left(s_z = -\frac{1}{2} \right) &= |\chi_{-1/2}(t)|^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2}{(\omega + \omega_0)^2 + \omega_1^2} \sin^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{(\omega + \omega_0)^2 + \omega_1^2} t \right]. \end{aligned}$$

Вероятность переворота спина имеет резонансный характер. При условии $\mathcal{H}_1 \ll \mathcal{H}_0$ ($\omega_1 \ll \omega_0$) она мала при всех значениях частоты ω кроме

узкой области нблизи точки резонанса $\omega \rightarrow -\omega_0 = -2\mu_0 H_0/\hbar$. В резонансной области вероятность может быть близкой к единице в некоторые моменты времени t .

2.5.7. Магнитное поле движущегося электрона обусловлено как его собственным магнитным моментом, так и его движением. Поле спинового магнитного момента — поле магнитного диполя $H_{\text{сп}} \sim \mu/r^3$. Магнитное поле движущегося заряда ($v \ll c$)

$$H_{\text{вн}} \sim \left| \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right| \sim \frac{v e}{c r^3} \sim \frac{p e}{mc r^3}.$$

Для реализации эксперимента необходимо выполнение условия

$$\frac{H_{\text{сп}}}{H_{\text{вн}}} \ll 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{p e}{mc \mu} \ll 1.$$

Но импульс движущегося электрона точно не известен. Если считать, что область локализации электрона $\sim \Delta r$, то в соответствии с соотношением неопределеностей $p_{\text{им}} \gtrsim \hbar/\Delta r$, и тогда получим

$$\Delta r \gg \frac{\hbar r}{mc \mu}.$$

Если μ — спиновый магнитный момент свободного электрона, то $\mu = \mu_0 = e\hbar/(2mc)$, следовательно $\Delta r \gg r$, что противоречит разумной постановке опыта, ибо для проведения эксперимента требуется $\Delta r \ll r$ — локализация частицы.

2.5.8. Решение задачи основано на возможности описать сверхпроводящее состояние при помощи волновой функции вида

$$\psi = \sqrt{n_s} e^{i\varphi}, \quad (1)$$

где $n_s(\mathbf{r})$ — плотность сверхпроводящих электронов, $\varphi(\mathbf{r})$ — фаза, общая для всех частиц, находящихся в сверхпроводящем состоянии. Используем выражение для плотности тока вероятности при наложении магнитного поля $\mathcal{E} = \text{rot } \mathbf{A}$,

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} [(\nabla\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla\psi)] - \frac{e\mathbf{A}}{mc}\psi^*\psi = \left[\frac{\hbar}{m} \nabla\varphi - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \right] n_s, \quad (2)$$

где мы учли вид функции (1). Пронтегрируем (2) по замкнутому контуру l , проходящему глубоко внутри сверхпроводника, полагая, что плотность n_s постоянна на контуре интегрирования:

$$\frac{ie}{en_s} \oint_l (\mathbf{j} d\mathbf{l}) = \frac{\hbar e}{c} \oint_l (\nabla\varphi d\mathbf{l}) - \oint_l (\mathbf{A} d\mathbf{l}). \quad (3)$$

Левая часть (3) обращается в нуль, так как в толще сверхпроводника магнитного поля нет, т. е. $\mathcal{H} = 0$, следовательно $\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 0$, поэтому и $\mathbf{j} = 0$. Далее

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{A} d\mathbf{l}) = \iint \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \iint \mathcal{H} d\mathbf{S} = \Phi,$$

где Φ — поток вектора магнитного поля сквозь площадь, окруженную контуром. И наконец

$$\oint (\nabla \varphi d\mathbf{l}) = \oint \frac{d\varphi}{dt} d\mathbf{l} = \int d\varphi = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

где использовано условие однозначности волновой функции, вследствие чего изменение фазы должно быть равно $2\pi n$. Окончательно получаем, что

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e},$$

где Φ_0 — квант магнитного потока.

2.6. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

2.6.1. Система двух частиц описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$, которая подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t),$$

причем гамильтониан в координатном представлении имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Введем координату центра масс \mathbf{R} и относительную координату \mathbf{r} :

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Проделав далее замену переменных $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{r}, \Delta_R, \Delta_r$ (используя правило дифференцирования сложной функции), приведем гамильтониан к виду

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + U(\mathbf{r}),$$

где $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2 / M$ — соответственно полная и приведенная массы. Ввиду того, что система стационарна, полагаем, что волновая функция будет иметь вид

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = e^{-iEt/\hbar} \Phi(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}), \quad E = E_{\text{ши}} + E_{\text{отн}},$$

Полная энергия складывается из энергии движения центра масс E_{cm} и энергии относительного движения E_{rel} . Функции $\Phi(\mathbf{R})$ и $\psi(\mathbf{r})$ должны подчиняться уравнениям

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} \Phi(\mathbf{R}) = E_{\text{cm}} \Phi(\mathbf{R}), \quad (1)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E_{\text{rel}} \psi(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что функция $\Phi(\mathbf{R})$ описывает *свободное движение* центра масс: $\Phi(\mathbf{R}) = C e^{i \frac{\hbar}{M} \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}$, характеризуемое полным импульсом \mathbf{P} и энергией $E_{\text{cm}} = \mathbf{P}^2 / (2M)$.

2.6.2. Операторы \hat{r}^2 , \hat{l}_x , \hat{l}_y , \hat{l}_z , \hat{l} коммутируют с гамильтонианом и являются интегралами движения в произвольном центральном поле.

2.6.3. Используя явный вид волновой функции основного состояния водородоподобного атома в координатном представлении³¹

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{Z^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Zr},$$

перейдем в импульсное представление:

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{8Z^3}}{\pi} \frac{1}{(Z^2 + p^2)^{3/2}}.$$

2.6.4. Приходим ответы: $\langle r^2 \rangle = 3/Z$, $\langle 1/r \rangle = Z$; $\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle = Z^2$. Учитывая, что средняя кинетическая энергия $\langle \hat{T} \rangle = \langle \hat{\mathbf{p}}^2 / 2 \rangle$, а средняя потенциальная энергия $\langle \hat{U} \rangle = -(Z/r)$, убеждаемся в справедливости теоремы зирнера для кулоновских сил:

$$2\langle \hat{T} \rangle + \langle \hat{U} \rangle = 0.$$

2.6.5. Запишем выражения для радиального гамильтониана и энергетического спектра водородоподобного атома:

$$\begin{cases} \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} + \frac{(l+1)}{2r^2} - \frac{Z}{r}, \\ E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}. \end{cases}$$

³¹ В данной разделе при решении задач об атоме водорода мы используем атомную систему единиц $\hbar = m = e = 1$.



Учитывая теорему Фейнмана-Гельмана (задача 2.1.22), а также очевидные соотношения

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial Z} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial e_s}{\partial Z} = -\frac{Z}{n^2}, \quad \text{получаем} \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{n^2},$$

где угловыми скобками обозначено среднее по произвольному состоянию атома водорода $|nlm\rangle$.

Имея в виду далее, что

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l} = \frac{l+1/2}{r^2}, \quad \frac{\partial e_s}{\partial l} = \frac{Z^2}{n^2}, \quad \text{получаем} \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2}{n^2(l+1/2)}.$$

Здесь мы использовали связь квантовых чисел $n = n_r + l + 1$ для атома водорода. При дифференцировании выражений, например, по l , мы считали зависимость от l непрерывной, т.е. вместо реальной дискретной переменной l мы рассматривали некоторую фиктивную непрерывную переменную, равную l в точках, отвечающих целым значениям $l = 0, 1, \dots$

Из теоремы Эренфеста для радиального движения

$$\frac{d\langle \hat{p}_r \rangle}{dt} = \langle \hat{F}_r \rangle = -\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}_r] \rangle$$

легко получить, что

$$\langle \hat{H} \hat{p}_r - \hat{p}_r \hat{H} \rangle = 0, \quad \text{откуда} \quad \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} \right\rangle = 0$$

На основании этого окончательно находим

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2}{n^2(l+1/2)(l+1)}, \quad l > 0.$$

2.6.6. Уравнение Шредингера в импульсном представлении, как известно, является интегральным, причем роль ядра играет фурье-образ потенциала (см. задачу 2.1.21). В атомной системе единиц уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} - E \right) \phi(\mathbf{p}) = - \int d^3 p' W(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}'),$$

где

$$W(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x e^{-i(\mathbf{p}x)} U(r)$$

— фурье-образ потенциала взаимодействия. Для кулоновского потенциала $U(r) = -\frac{Z}{r}$ нетрудно получить $W(\mathbf{p}) = -\frac{Z}{2\pi^2 p^2}$, и уравнение примет вид

$$(p^2 - 2E) \phi(\mathbf{p}) = \frac{Z}{\pi^2} \int d^3 p' \frac{\phi(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) можно свести к одномерному интегральному уравнению, точное решение которого впервые было найдено В. А. Фоком (1935 г.).

2.6.7. Уравнение Шредингера для трехмерного изотропного осциллятора имеет вид

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right\} \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

а) Декартова система координат. Поскольку гамильтониан уравнения (1) можно записать в виде суммы

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{m\omega^2 x_i^2}{2} \right\},$$

где $x_i = x, y, z$, то очевидно, что решение может быть представлено в виде

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}) = u_{n_1}^{osc}(x) u_{n_2}^{osc}(y) u_{n_3}^{osc}(z), \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad n = n_1 + n_2 + n_3, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $u_n^{osc}(x_i)$ — собственные функции гамильтониана одномерного осциллятора (II.18).

$$u_n^{osc}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^2} H_n \left(\frac{x_i}{x_0} \right).$$

Здесь $H_n(x_i)$ — полиномы Эрмита, $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ — осцилляторная единица длины (II.16). Поскольку четность полиномов Эрмита $H_n(x_i)$ равна $I_n = (-1)^n$, то состояния (2) и уровни энергии (3) также характеризуются определенной четностью

$$I_n = (-1)^{n_1+n_2+n_3} = (-1)^n.$$

При вычислении кратности вырождения уровня энергии (3) заметим, что, если задать n_1 , то число n_2 будет принимать значения $n_2 = 0, 1, \dots, n - n_1$, т. е. всего $n - n_1 + 1$ различных значений. Число n_3 всегда фиксировано соотношением $n_3 = n - n_1 - n_2$. Поэтому полная кратность вырождения уровня энергии будет равна

$$\sum_{n_2=0}^n (n - n_1 + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2).$$

б) Сферическая система координат. Решение уравнения (1) будет иметь вид

$$\psi_{Elm}(\mathbf{r}) = R_E(r) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi),$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферическая функция, а функция $R_0(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \left\{ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad (4)$$

где $r_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ — осцилляторная единица длины (1.16). Переходя в уравнение (4) к безразмерным переменным, получим

$$R''(q) + \frac{2}{q} R'(q) + \left\{ 2\varepsilon - q^2 - \frac{l(l+1)}{q^2} \right\} R(q) = 0, \quad (5)$$

где $q = r/r_0$, $\varepsilon = E/(\hbar\omega)$.

Исследуем асимптотики функции $R(q)$. При $q \rightarrow 0$ имеем следующий асимптотический вид уравнения (5):

$$R''_0 + \frac{2}{q} R'_0 - \frac{l(l+1)}{q^2} R_0 = 0.$$

Нашем решение этого уравнения, как обычно, в виде $R_0 \sim q^s$ и получаем для s уравнение и его решения в виде

$$s(s-1) + 2\varepsilon - l(l+1) = 0, \quad \rightarrow \quad s_1 = l, \quad s_2 = -(l+1).$$

Следовательно, асимптотика радиальной функции при $q \rightarrow 0$ имеет вид $R_{q \rightarrow 0} \sim q^l$, поэтому сделаем подстановку $R(q) = q^l u(q)$. Для функции $u(q)$ получим уравнение

$$u'' + \frac{2(l+1)}{q} u' + (2\varepsilon - q^2) u = 0.$$

Асимптотику функции $u(q)$ при $q \rightarrow \infty$ определим из уравнения

$$u''_\infty - q^2 u_\infty = 0.$$

Подставляя в данное уравнение $u_\infty \sim e^{-q^2/4}$, находим $\alpha = 1/2$. Таким образом, радиальную функцию с выделенными асимптотиками можно записать в виде

$$R(q) = e^{-q^2/4} q^l w(q), \quad (6)$$

учитывающим особенности поведения в нуле и на бесконечности.

Введем новую переменную согласно $\xi = q^2$, и получим уравнение для функции $w(\xi)$

$$\xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \left\{ \left(l + \frac{3}{2} \right) - \xi \right\} \frac{dw}{d\xi} - \left\{ \frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \right\} w = 0. \quad (7)$$

Функцию $w(\xi)$ мы будем далее искать в виде суммы степенного ряда

$$w(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (8)$$

Подставляя в (7) решение в виде суммы (8) и, группируя члены с одинаковыми степенями ξ , находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \left[(k+1) \left(k + l + \frac{3}{2} \right) a_{k+l} - \left(\frac{1}{2} \left(l - \varepsilon + \frac{3}{2} \right) - k \right) a_k \right] = 0.$$

Отсюда, приравнивая нулю коэффициенты при ξ^k , найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_k :

$$a_{k+1} = a_k \frac{(l + 3/2 - \varepsilon) + 2k}{(k+1)(2(k+l)+3)} \quad (9)$$

Поскольку в ряде (8) отношение двух последующих коэффициентов в соответствии с (9) при $k \gg 1$ стремится к пределу

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \Big|_{k \gg 1} \rightarrow \frac{1}{k},$$

то при больших значениях аргумента, т. е. при $\xi \rightarrow \infty$ мы получим $w(\xi) \sim e^\xi$ или $w(q) \sim e^{q^2}$ (см. решение задачи 2.5.2). Поэтому радиальная функция (6) при $q \rightarrow \infty$ будет экспоненциально расти: $R(q)|_{q \rightarrow \infty} \sim e^{q^2/2}$. Чтобы избежать данного неограниченного роста, необходимо «оборвать» ряд (8) при некотором $k = n_r$, т. е. свести его к полиному. При этом должно выполняться условие

$$\frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} - \varepsilon \right) = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

откуда получаем уравнение энергии:

$$E_n = \hbar\omega \left(l + 2n_r + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad n = 2n_r + l = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь n_r — радиальное, l — орбитальное и n — главное квантовое число.

Для функции $w(\xi)$ мы имеем ряд (8), который определяется рекуррентными соотношениями (9) и сводится к вырожденной гипергеометрической функции $F(-n_r, l + 3/2, \xi)$, которая является регулярным при $\xi \rightarrow 0$ решением⁴⁾ уравнения (7). При условии (10) гипергеометриче-

⁴⁾ Второе линейно независимое решение уравнения (7) при $\varepsilon = 0$ ведет себя $\sim r^{-2(l+1)}$, что несовместимо при $l \neq 0$ с условием нормированности $\int_0^{\infty} |R(r)|^2 r^2 dr = 1$, а в случае $l = 0$ это решение приводит к расходимости при $r \rightarrow 0$ среднего значения кинетической энергии $-\hbar^2/(2m) \int \Psi^*(r) \Delta \Psi(r) d^3 r$.

ской функция превращается в присоединенный полином Лагерра (см. (Д.24)), т. е.

$$\begin{aligned} \psi_{n,l}(\xi) &= a_0 \left[1 - \frac{n_l}{(l+3/2)} \frac{\xi}{1} + \frac{n_l(n_l-1)}{(l+3/2)(l+3/2+1)} \frac{\xi^2}{2} + \dots \right] = \\ &= a_0 F(-n_l, l+3/2; \xi) = \frac{a_0 \Gamma(l+3/2)}{\Gamma(l+3/2+n_l)} L_{n_l}^{l+1/2}(\xi). \end{aligned}$$

Здесь константа a_0 определяется из условия нормировки. Восстановив исходные обозначения, запишем общий вид радиальной функции $R(r)$, нормированной условием $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$:

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{2}{r_0^n n_l! \Gamma(l+3/2+n_l)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l L_{n_l}^{l+1/2} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right). \quad (11)$$

Таким образом, полная волновая функция в сферической системе координат

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

зависит от трех квантовых чисел: n , l и m (функцию (11) можно записать с учетом $n_l = (n-l)/2$), в то время, как уровни энергии определяются только главным квантовым числом n . Поэтому имеется выражение: уровню энергии с определенным значением числа n отвечают функции с $l = n, n-2, \dots, 0$, если n — четное ($(n/2+1$ значений l), или с $l = n, n-2, \dots, 1$, если n — нечетное ($(n+1)/2$ значений l). Кроме того, для каждого l существует $2l+1$ различных значений магнитного квантового числа m (уровни энергии не зависят от m).

На основании этого заключаем, что уровни энергии имеют определенную четность³⁰: $I_n = (-1)^n = (-1)^l$ и полную кратность вырождения (для четного и нечетного n), равную

$$\sum_{i=0,2}^n (2i+1) = \sum_{i=1,3}^n (2i+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \quad (12)$$

что полностью соответствует результату п. а).

Потенциал изотропного гармонического осциллятора можно использовать в качестве модели самоогласованного поля, которое действует на каждый нуклон в ядре (модель ядерных оболочек). При этом най-

³⁰ В сферических координатах четность волновой функции определяется полуправые угловые частицы, т. е. сферической функцией $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Поскольку при преобразовании инверсия $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, имеем $Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$.

денные нами уровни энергии (3) представляют собой спектр одиночных уровней для рассматриваемой модели. Если главное квантовое число принимает значения $\ell = 0, 1, 3$, то максимальное число нуклонов, которые могут находиться на соответствующих уровнях равно 2, 6, 12 (удвоенное кратности вырождения (12) связано с тем, что нуклоны имеют спин $1/2$). Максимальное число нуклонов, которые можно разместить на всех уровнях, начиная с нулевого и заканчивая рассматриваемым, будет равно 2, 8, 20. Это и есть значения маточных чисел для данной модели оболочек.

2.6.8. Уравнение Шредингера для данного потенциала допускает разделение переменных в сферической системе координат, и его решение можно представить в виде (см. (II.33))

$$\psi(r) = R_l(r) Y_l^{2\ell+1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{r} \chi_l(r) Y_l^{2\ell+1}(\theta, \varphi).$$

В результате такой подстановки мы получаем для функции $\chi_l(r)$ так называемое «окороченное» радиальное уравнение

$$\chi_l''(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0, \quad \text{где } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1)$$

Функция χ_l удовлетворяет данному уравнению при $0 < r < a$, и должна быть равна нулю при $r = 0$ и при $r \geq a$.

Случай $l = 0$. В этом случае уравнение (1) и граничные условия $\chi_l(0) = \chi_l(a) = 0$ имеют точно такой же вид, как и в одномерной задаче (см. задачу 2.2.1). На основании этого сразу получаем решение:

$$E_{n,0} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_r^2, \quad \psi_{n,0} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a r}} \sin \frac{n_r \pi}{a} r, & 0 < r < a, \\ 0, & r \geq a, \end{cases}$$

где $n_r = 1, 2, 3, \dots$ — радиальное квантовое число.

Случай $l > 0$. При помощи замены $\chi_l(r) = \sqrt{r} \varphi(r)$ уравнение (1) приводится к виду

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + \left[k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] \varphi = 0.$$

Решениями данного уравнения являются функции Бесселя полузелого порядка $J_{\pm l+1/2}(kr)$. Поэтому общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\chi_l(r) = C_1 j_l(kr) + C_2 n_l(kr),$$



где мы используем сферическую функцию Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x)$$

и сферическую функцию Неймана

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{-l-1/2}(x).$$

При малых значениях аргумента имеют место следующие асимптотические представления:

$$j_l(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq \frac{x^{l+1}}{(2l+1)!}, \quad n_l(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq -\frac{(2l-1)!!}{x^l}. \quad (2)$$

Учитывая граничное условие $\chi_i(0) = 0$, а также асимптотику (2), приходим к выводу о том, что решение уравнения (1) необходимо выбрать в виде⁶ $\chi_i(r) = c j_l(kr)$. Граничное условие $\chi_i(a) = 0$ определяет значения k и, следовательно, — уровни энергии и собственные функции. Должно выполняться условие

$$j_l(ka) = 0, \quad \text{или} \quad J_{l+1/2}(ka) = 0,$$

поэтому окончательно находим

$$E_{n,l} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2} \lambda_{n,l}^2, \quad R_{n,l}(r) = \begin{cases} \frac{c}{r} J_l\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a} r\right), & 0 < r < a, \\ 0, & r \geq a, \end{cases}$$

где $\lambda_{n,l}$ — корни функции Бесселя $J_{l+1/2}(x)$, $n_l = 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число, определяющее номер корня и порядок возрастания его величины. Вырождение по орбитальному квантовому числу отсутствует — значение энергии однозначно определяет число l . Вырождение по магнитному квантовому числу m существует, ибо это обусловлено сферической симметрией задачи.

Используя значения корней $\lambda_{n,l}$, можно определить порядок расположения уровней энергии, начиная от основного состояния:

$$1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 2p, 1g, 2d, 1h, 3s, 2f, \dots,$$

где состояния с $l = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ обозначаются буквами s, p, d, f, g, h, \dots число перед буквой нумерует уровни с одинаковым l в порядке возрастания их значений (очевидно, в данном случае это число просто

⁶ См. также список на с. 326.

равно n .) Для сравнения приведем порядок расположения уровней для изотропного пространственного осциллятора (см. задачу 2.6.7, число перед буквой теперь равно $n - 1$)

$$1s, [1p, [1d, 2s], [3f, 2p], [3g, 2d, 3s], \dots]$$

Для уровней энергии осциллятора характерно вырождение по квантовому числу l , поэтому состояния, отвечающие одному и тому же уровню, заключены в скобки. Заметим, что отличия в порядке расположения начинают проявляться лишь для сравнительно высоко лежащих уровней энергии.

2.6.9. Как и в предыдущей задаче, представим решение уравнения Шредингера в виде

$$\psi(r) = R_l(r) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = \chi_l(r) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$$

Введем очевидные обозначения

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} |E|, \quad k^2 = k_0^2 - \kappa^2, \quad k_0^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2},$$

(см. задачу 2.2.2) и тогда радиальное уравнение Шредингера для определения функции $\chi_l(r)$ в случае связанных состояний примет следующий вид:

$$\chi_l''(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0 \quad \text{для } 0 < r < a, \quad (1a)$$

$$\chi_l''(r) + \left(-\kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0 \quad \text{для } r \geq a. \quad (1b)$$

Решение уравнения (1a), удовлетворяющее граничному условию $\chi_l(0) = 0$, представляет собой сферическую функцию Бесселя $\chi_l(r) = A_j l(kr)$ при $0 < r < a$. Решением уравнения (1b), экспоненциально убывающим при $r \rightarrow \infty$, является сферическая функция Ханкеля минимого аргумента (см. (Д.17)):

$$\chi_l(r) = B h_j^{(1)}(\kappa r) \quad \text{при } r \geq a;$$

$$h_j^{(1)}(x) = j_j(x) + i p_j(x).$$

Из условия непрерывности логарифмической производной на границе зоны $r = a$ получим

$$\frac{k f_l(ka)}{f_l(ka)} = i \kappa \frac{h_j^{(1)}(ka)}{h_j^{(1)}(ka)}. \quad (2)$$

Очевидно, что это и есть трансцендентное уравнение, определяющее уровни энергии связанных состояний в име-



Для з-состояний ($\ell = 0$) уравнение (2) приобретает совсем простой вид:

$$\hbar \operatorname{ctg} k a = -\varepsilon.$$

Данное уравнение фактически совпадает с уравнением, определяющим уровни энергии для нечетных состояний задачи 2.2.2 (см. также задачу 2.2.4). Обсуждение вопросов о существовании связанных состояний и о количестве уровней энергии можно повторить здесь без особых изменений.

2.6.10. Уравнение Шредингера в импульсном представлении для двумерной потенциальной ямы имеет вид (см. задачу 2.6.6)

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E \right) \phi(\mathbf{p}) = - \int d^2 p' W(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}') = - \int d^2 q W(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ — переданный импульс,

$$W(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2 r e^{-\frac{q^2}{4\hbar^2}} U(r)$$

— фурье-образ потенциала взаимодействия. Полагаем, что потенциал обладает аксиальной симметрией $U(\mathbf{r}) = U(|\mathbf{r}|) = U(r)$, поэтому для фурье-образа будет также $W(\mathbf{q}) = W(q)$.

Не конкретизируя вид потенциала, предположим, что он имеет минимум, равный $-U_0$ и радиус действия a (т. е. при $r < a$ потенциал отличен от нуля). Тогда из очевидных свойств преобразования Фурье следует, что область локализации фурье-образа $W(q)$ в импульсном пространстве ограничена значением $q \leq \hbar/a$.

Далее мы полагаем, что яма мелкая, и координатная волновая функция связанного состояния при больших значениях r имеет вид убывающей экспоненты $\phi(r) \sim e^{-\alpha r}$, причем выполняется условие $\alpha a \ll 1$ (см. также задачу 2.2.5). Поэтому область доказательства функции в импульсном представлении, т. е. $\phi(q)$, должна быть $\sim \hbar k \ll \hbar/a$. Таким образом, при $q \rightarrow \infty$ функция $\phi(q)$ убывает значительно быстрее, чем $W(q)$. При этом доминирующую роль в интеграле (1) играет область $|q| \lesssim \hbar/a$, поэтому мы можем вынести $W(q)$ из-под знака интеграла в точке $q = 0$. В результате получим

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E \right) \phi(\mathbf{p}) = -W(0) \int d^2 p \phi(\mathbf{p}).$$

Пусть $C = \int d^2 p \phi(\mathbf{p})$ и тогда

$$\phi(\mathbf{p}) = -\frac{2mCW(0)}{\mathbf{p}^2 + 2mE}$$

Из условия согласования находим

$$1 = -W(0) 2\pi \int_0^{\infty} \frac{2mp \, dp}{p^2 + 2m|E|} \approx -W(0) 2\pi m \ln \left(\frac{p^2}{2m} + |E| \right) \Big|_0^{\hbar/a}.$$

Учтем также, что

$$W(0) = -\frac{U_0}{(2\pi\hbar)^3 \pi a^3}$$

и получим

$$\ln \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2|E|} \right) \approx \frac{2\hbar^2}{ma^2 U_0}, \quad E \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \exp \left(-\frac{2\hbar^2}{ma^2 U_0} \right). \quad (2)$$

Таким образом, в мелкой двумерной яме, как и в симметричной одномерной, всегда существует одно связное состояние. Причем, как это видно из (2), глубина залегания соответствующего уровня энергии экспоненциально мала по сравнению с глубиной ямы. В трехмерной яме связное состояние есть не всегда (см. задачу 2.6.9).

2.7. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

2.7.1. Случай а) Исходя из правила квантования Бора-Зоммерфельда имеем

$$\int_{-x_0}^x p(x) \, dx = \int_{-x_0}^x \sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2} \, dx = \pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

где $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ — классическая точка поворота. Вычисляя интеграл (1), получим $E\pi/\omega$, откуда находим уровень энергии

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Построим волновую функцию, исходя из правила согласования квазиклассических решений при переходе из классически запрещенной области в классически разрешенную (II.36).

$$\psi_n(x) = C \begin{cases} \frac{(-i)^n}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp(-z_1), & x < -a, \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sin(z_2 + \pi/4), & -a < x < a, \\ \frac{1}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp(-z_3), & x > a. \end{cases} \quad (2)$$

где мы обозначили

$$z_1 = \frac{1}{\hbar} \int_x^{-a} |p(\xi)| \, d\xi, \quad z_2 = \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p(\xi) \, d\xi, \quad z_3 = \frac{1}{\hbar} \int_a^x |p(\xi)| \, d\xi.$$

При расчете нормировочного множителя, как и обычно, пренебрегаем вкладом экспонент и считаем, что $\ln^2 \alpha = 1/2$ (функция быстро осциллирует), поэтому $C \approx \sqrt{2\pi\omega/\varepsilon}$. Вычисляя интегралы, окончательно получаем

$$z_1 = \frac{E_n}{\hbar\omega} \left[\frac{x}{x_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\pi}{2} \right],$$

$$z_{1,2} = \frac{E_n}{\hbar\omega} \left[\mp \frac{x}{x_0} \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1} - \ln\left(\mp \frac{x}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1}\right) \right].$$

Полный вид решения легко восстанавливается, если учесть, что

$$\frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{x^2 - x_0^2}}}, \quad \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}}}.$$

Случай б) Прежде всего заметим, что условия применимости метода ВКБ (главный ход потенциала взаимодействия) выполняются только до $x = 0$, а в точке $x = 0$ необходимо поставить граничное условие $\psi(0) = 0$ (рис. 2.8).

Поэтому должно выполняться условие (для классически разрешенной области)

$$\sin\left\{\frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right\} = 0,$$

что приводит к модификации правила квантования Бора–Зоммерфельда:

$$\int_0^x p(x) dx = \pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right). \quad (3)$$

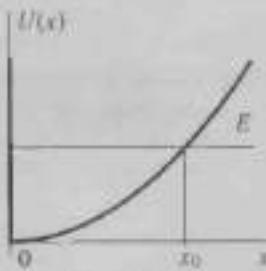


Рис. 2.8. Потенциал задачи 2.7.1 (случай б)

Из соотношения (3) получаем уровни энергии:

$$E_n = \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которые совпадают с нечетными уровнями для случая а). Волновые функции $\psi_n(x)$ связаны с функциями (2) очевидным соотношением (ср. с задачей 2.2.4):

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \psi_{2n+1}(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

2.7.2. В данной задаче, как и в задаче 2.7.1 п. 6) необходимо поставить специальное граничное условие при $x = 0$, т. е. $\psi(0) = 0$. Это приводит к следующему виду правила квантования:

$$\int_0^{\infty} p(\xi) d\xi = \int_0^{E/F} \sqrt{2m(E - F\xi)} d\xi = \pi\hbar \left(n + \frac{3}{4}\right).$$

В итоге получаем энергетические уровни:

$$E_n = \left(\frac{3\pi\hbar F}{2\sqrt{2m}}\right)^{2/3} \left(n + \frac{3}{4}\right)^{2/3}$$

и согласованные квазиклассические функции. В классически разрешенной области функция имеет вид

$$\psi_n(x)|_{0 < x < \frac{E_n}{F}} = \left(\frac{F^2}{E_n - Fx}\right)^{1/4} \sin\left(\frac{2\sqrt{2m}}{3F\hbar}(Ex - Fx)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

и в классически запрещенной,

$$\psi_n(x)|_{x > \frac{E_n}{F}} = \frac{1}{2} \left(\frac{F^2}{Fx - E_n}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{3F\hbar}(Fx - E_n)^{3/2}\right)$$

2.7.3. Согласно формуле Гамова (II.38) коэффициент прохождения через потенциальный барьер равен

$$D \simeq \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx\right\},$$

где

$$\int_a^b |p(x)| dx = \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx = \sqrt{2m} \int_{r_0}^{r_b} \sqrt{\frac{2Ze^2/\hbar}{x} - E} dx,$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$D \simeq \exp\left\{-\frac{4Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} (\arccos \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha(1-\alpha)})\right\}, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{r_b E}{2Ze^2}$. В случае, если $\alpha \ll 1$, выражение (1) упрощается:

$$D \simeq \exp\left\{-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}\right\}. \quad (2)$$

Следует заметить, что выражения (1) и (2) определяют коэффициент прохождения лишь по порядку величины, т.е. показывают его экспоненциальную малость. Поскольку условия применимости метода ВКБ нарушаются в точке $x = r_0$ (резкий скачок потенциала), то условия сингуляции решений в данной точке требуют уточнения. В точном выражении в отличие от (2) появляется предэкспоненциальный множитель ~ 1 .

Данная задача рассматривалась впервые в связи с теорией α -распада. С точки зрения квантовой механики α -распад представляет собой типичное явление прохождения частицы через потенциальный барьер.

Итак, α -частицазначит «заперта» в области $x \leq r_0$ (зона действия потенциала притяжения ядра, рис. 2.9). Для того, чтобы выйти из ядра, т.е. излучиться, α -частица должна преодолеть потенциальный барьер (при $x > r_0$ на частицу будут действовать кулоновские силы отталкивания).

Вероятность α -распада (или прохождение через барьер) в единицу времени λ пропорциональна коэффициенту прохождения D : $\lambda = nD$, где n — число столкновений со стенкой барьера в единицу времени.

Величину n можно оценить следующим образом: $n \sim v/r_0$, где v — характеристическая скорость частицы в потенциальной яме. Далее

$$v \sim \frac{\mu}{m_\alpha} \sim \frac{\hbar}{m_\alpha r_0}, \quad \text{поэтому} \quad n \sim \frac{\hbar}{m_\alpha r_0^2}.$$

Период полураспада $T_{1/2}$ связан с вероятностью распада в единицу времени λ известным соотношением:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{m_\alpha r_0^2 \ln 2}{n D} = C_1 \exp \left[\frac{C_2}{\sqrt{E}} \right], \quad (3)$$

где последнее равенство является следствием (2). Логарифмируем (3) и получаем соотношение

$$\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}},$$

которое и представляет собой закон Гейгера-Неттоля. Величины A и B , разумеется, несложно выразить через исходные данные задачи.

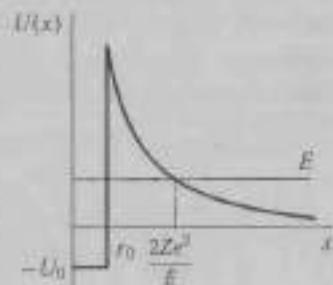


Рис. 2.9. Потенциал, используемый в теории α -распада

$$2.7.4. D \approx \exp \left\{ - \frac{2e(U_0 - E)}{\hbar\omega} \right\}.$$

2.7.5. Пусть возмущенный потенциал имеет вид $U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$, где $U_0(x)$ — начальный потенциал, а $\delta U(x)$ — малое изменение потенциальной энергии. Будем считать, что дискретные уровни энергии при наложении возмущения изменяются по схеме: $E_n^{(0)} \rightarrow E_n = E_n^{(0)} + \delta E_n$. Для поиска поправки δE_n представим формулу квантования Бора-Зоммерфельда в виде

$$\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) = \int_{a+\delta a}^{a+\delta b} \sqrt{2m(E_n^{(0)} + \delta E_n - U_0(x) - \delta U(x))} dx. \quad (1)$$

где δa и δb характеризуют возможные сдвиги точек поворота. Очевидно, что должно выполняться

$$U_0(a + \delta a) + \delta U(a) = E_n^{(0)} + \delta E_n,$$

откуда легко получать, что

$$|\delta a| = \left| \frac{\delta E_n - \delta U(a)}{U'(a)} \right| \ll 1,$$

т.е. $|\delta a| \ll 1$ и $|\delta b| \ll 1$, если выполнены условия квазиклассичности. Нетрудно показать, что изменение интеграла за счет сдвига точек поворота $\sim (\delta a)^{3/2}$ (или $\sim (\delta b)^{3/2}$), и в линейном приближении соответствующие поправки должны быть отброшены. Поэтому оставляем в интеграле (1) в пределах интегрирования только a и b , и, проводя разложение подынтегрального выражения с линейной точностью по $\delta U(x)$, δE_n , получаем

$$\delta E_n \approx \int_a^b \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{2m(U_0(x) - E_n^{(0)})}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2m(U_0(x) - E_n^{(0)})}} = \frac{2}{T} \int_a^b \frac{\delta U(x) dx}{v_0(x)},$$

где T — полный период классического движения частицы в потенциале $U_0(x)$, $v_0(x)$ — классическая скорость частицы.

Данный результат может быть получен и в первом приближении теории возмущений, если в качестве невозмущенной функции взять квазиклассическую функцию. В этом случае при расчете интегралов нужно пренебречь вкладом экспонент и заменить квадрат синуса на 1/2 под знаком интеграла, считая, что функция быстро осциллирует.

2.8. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.8.1. Для расчетов используем выражение оператора координаты \hat{x} для гармонического осциллятора через операторы \hat{a} и \hat{a}^\dagger (x_0 — осцилляторная единица длины (II.16)):

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Случай а) Поправки первого приближения $E_n^{(1)} = 0$ (см. задачу 2.3.3), поправка второго приближения:

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{\alpha^2 x_0^2}{2} \left(\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{n+1}{\hbar\omega} \right) = -\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}, \quad (1)$$

где $V_{nk} = \langle n | \hat{V} | k \rangle$, $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1/2)$.

Случай б) Для слагаемого Bx^4 в операторе возмущения поправка первого приближения найдена в задаче 2.3.3, для Bx^3 необходимо вычислить поправку второго приближения. Суммарная поправка равна

$$\Delta E_n = \frac{3}{2} B \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 \left[n^2 + n + \frac{11}{2} \right] - \frac{15}{4} \frac{B^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^3 \left[n^2 + n + \frac{11}{30} \right].$$

2.8.2. Оператор энергии взаимодействия с однородным полем имеет вид

$$\hat{V} = \alpha \hat{x} = \frac{\alpha x_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (1)$$

где α — некоторая константа взаимодействия.

Поправка к уровням энергии (с учетом второго приближения теории возмущений) найдена в задаче 2.8.1, формула (1). Как видим, поправка оказалась не зависящей от постоянной Планка, поэтому она имеет классическую интерпретацию. Действительно, если бы мы записали полный гамильтониан с учетом возмущения (1) и выделили бы полный квадрат, мы бы получили, что все уровни энергии сдвигнулись на одинаковую величину, совпадающую с полученной по теории возмущений, но при этом изменилось бы равновесное значение координаты осциллятора. Для нахождения смещения положения равновесия осциллятора по теории возмущений необходимо знать «поправленные» векторы состояния. Поправки к векторам состояний находим по формуле (II.40):

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + |\psi_n^{(1)}\rangle = |n\rangle + \frac{\alpha x_0}{\sqrt{2}\hbar\omega} (\sqrt{n}|n-1\rangle - \sqrt{(n+1)(n+1)}|n\rangle).$$

Вычислим теперь среднее значение координаты для состояния $|\psi_n\rangle$ с учетом поправок первого приближения:

$$\langle \psi_n | \hat{x} | \psi_n \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\langle n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \psi_n^{(0)} \rangle + \langle \psi_n^{(0)} | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle) = \\ = \frac{\alpha x_0^2}{\hbar \omega} (\sqrt{n} \langle n | \hat{a}^\dagger | n - 1 \rangle - \sqrt{(n+1)} \langle n | \hat{a} | n + 1 \rangle) = -\frac{\alpha}{m \omega^2}.$$

Полученный результат в точности совпадает с тем, который получается в результате выделения в гамильтониане полного квадрата.

2.8.3. Состояния трехмерного изотропного гармонического осциллятора определяются тремя квантовыми числами, принимающими целые неотрицательные значения $|l_1, l_2, l_3\rangle$. Первый возбужденный уровень энергии трехкратно вырожден. Обозначим состояния следующим образом:

$$|1\rangle = |1, 0, 0\rangle, \quad |2\rangle = |0, 1, 0\rangle, \quad |3\rangle = |0, 0, 1\rangle.$$

Оператор возмущения выражим через повышающие и понижающие операторы (см. задачи 2.8.1 и 2.8.2)

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \alpha x_0 (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x)(\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y),$$

где ω — частота осциллятора, $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ — осцилляторная единица длины (II.16).

Легко видеть, что все диагональные матричные элементы оператора возмущения равны нулю, а отличны от нуля только два недиагональных:

$$V_{11} = V_{22} = V_{33} = V_{13} = V_{23} = 0, \quad V_{12} = V_{21} = \frac{1}{2} \alpha x_0^2.$$

Таким образом, получаем, что состояние $|3\rangle = |0, 0, 1\rangle$ — правильное и имеет энергию, совпадающую с энергией первого возбужденного уровня невозмущенного осциллятора. Два других правильных состояния определяются линейными комбинациями

$$|\pm \Delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0, 0\rangle \pm |0, 1, 0\rangle)$$

и отвечают поправкам к невозмущенному уровню энергии, равным соответственно $\pm \Delta$, где $\Delta = \alpha x_0^2/2$.

2.8.4. Поскольку в рассматриваемом случае все матричные элементы оператора возмущения для состояний, относящихся к вырожденному уровню энергии $E_x^{(0)}$, равны нулю, то общий вид вектора состояния с

учетом первого приближения теории возмущений определяется стандартным образом в соответствии с (II.40):

$$|\psi_{n\mu}\rangle \simeq |\psi_{n\mu}^{(0)}\rangle + \sum_{k\nu}^{\prime} \frac{(k\nu|\hat{V}|n\mu)}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |\psi_{k\nu}^{(0)}\rangle, \quad (1)$$

где штрих означает отсутствие в сумме слагаемых с $n = k$, $\mu = \nu$. Составим теперь из состояний (1), относящихся к одному и тому же уровню энергии $E_n^{(0)}$, линейные комбинации

$$|\Phi_{n\alpha}\rangle = \sum_{\mu} C_{\mu}^{*} |\psi_{n\mu}\rangle \quad (2)$$

и подставим их в уравнение Шредингера:

$$(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}) |\Phi_{n\alpha}\rangle = E_{n\alpha} |\Phi_{n\alpha}\rangle.$$

Теперь мы можем получить систему алгебраических уравнений, аналогичную системе (II.41), из которой определяются поправки второго порядка к уровню энергии и, соответственно, коэффициенты линейных комбинаций (2), дающих правильные векторы первого приближения

$$\sum_{\sigma} \left(\sum_{k,\mu}^{\prime} (k\mu|\hat{V}|n\mu) \frac{(k\mu|\hat{V}|n\sigma)}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - \varepsilon \delta_{n\sigma} \right) C_{\sigma} = 0.$$

Уравнение формально сводится к стандартному (см. (II.41)), если ввести оператор возмущения $\hat{V}^{(0)}$.

2.8.5. Второй возбужденный уровень трехмерного изотропного гармонического осциллятора шестикратно вырожден. Обозначим состояния так же, как и в задаче 2.8.3:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |2,0,0\rangle, & |2\rangle &= |0,2,0\rangle, & |3\rangle &= |0,0,2\rangle, \\ |4\rangle &= |1,1,0\rangle, & |5\rangle &= |1,0,1\rangle, & |6\rangle &= |0,1,1\rangle. \end{aligned}$$

Для состояний |4⟩–|6⟩ отличны от куба только диагональные матричные элементы эффективного оператора возмущения $\hat{V}^{(0)}$ задачи 2.8.4. Таким образом, получаем трехкратно вырожденный уровень, смешенный на величину $-\Delta$, где

$$\Delta = \frac{\beta^2 h}{4m^2 \omega_0^2},$$

которому соответствуют три произвольные линейно независимые комбинации состояний |4⟩–|6⟩.

При действии оператора возмущения $\hat{V}^{(0)}$ состояния $|1\rangle - |3\rangle$ «смешиваются», поскольку отличны от нуля как диагональные, так и недиагональные матричные элементы:

$$V_{11} = V_{22} = V_{33} = -\frac{1}{2}\Delta, \quad V_{12} = V_{23} = V_{31} = -\Delta.$$

Таким образом, получаем секулярное уравнение третьей степени, корни которого, однако, легко находятся и равны

$$\varepsilon_{1,2} = \Delta, \quad \varepsilon_3 = -\frac{5}{8}\Delta.$$

Правильный вектор состояния для поправки ε_3 равен

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|2, 0, 0\rangle + |0, 2, 0\rangle + |0, 0, 2\rangle).$$

Для двукратно вырожденного уровня $\varepsilon_{1,2}$ правильными будут линейные комбинации, ортогональные вектору состояния $|\psi_3\rangle$ и имеющие вид

$$|I\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}(|2, 0, 0\rangle + |0, 2, 0\rangle) - |0, 0, 2\rangle\right),$$

$$|II\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}(|2, 0, 0\rangle + |0, 0, 2\rangle) - |0, 2, 0\rangle\right).$$

Как видим, шестикратно вырожденный уровень энергии расщепился на три: новырожденный, один двукратно и один трехкратно вырожденный уровня энергии. Учет более высоких порядков теории возмущений уже не сможет качественно изменить картину.

2.8.6. В невозмущенной задаче уровни энергии очень близки или совпадают, поэтому применем теорию возмущений для близких уровней энергии. Сформируем линейные комбинации волновых функций нулевого приближения $\psi = C_1\psi_1^{(0)} + C_2\psi_2^{(0)}$ и подставим их в уравнение $(\hat{H}^{(0)} + \hat{V})\psi = E\psi$. В результате для нахождения коэффициентов C_1 , C_2 мы получим систему

$$\begin{pmatrix} H_{11} - E & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

где введены обозначения

$$H_{mn} = \langle \psi_m^{(0)} | \hat{H} | \psi_n^{(0)} \rangle = \begin{cases} V_{nn} + E_n^{(0)}, & m = n, \\ V_{mn}, & m \neq n. \end{cases} \quad m, n = 1, 2$$



Вообще говоря, здесь не предполагается, что уровни энергии в невозмущенной задаче совпадают, т. е. $E_1^{(0)} \neq E_2^{(0)}$. Из условия разрешимости системы (1) находим значения уровней энергии для линейных комбинаций $\tilde{\psi}_{1,2}$:

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \{(H_{11} + H_{22}) \pm i\omega\}, \quad i\omega = \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2}.$$

Из системы (1) находим коэффициенты C_1, C_2 , позволяющие построить функции $\tilde{\psi}_{1,2} = C_1^{1,2} \psi_1^{(0)} + C_2^{1,2} \psi_2^{(0)}$, нормированные на единицу, т. е.

$$\begin{cases} C_1^{1,2} = \{|\beta_{12}(1 \pm \alpha)|\}^{1/2}, \\ C_2^{1,2} = \pm\{\beta_{21}(1 \mp \alpha)\}^{1/2}, \end{cases} \quad \alpha = \frac{H_{11} + H_{22}}{i\omega}, \quad \beta_{mn} = \frac{H_{mn}}{2|H_{12}|}. \quad (2)$$

Далее выражим $\psi_{1,2}^{(0)}$ через $\tilde{\psi}_{1,2}$: $\psi_{1,2}^{(0)} = \mp(C_{2,1}^2 \tilde{\psi}_1 - C_{1,1}^2 \tilde{\psi}_2)$. Здесь мы учли, что $\det C = -1$. Функции $\tilde{\psi}_{1,2}$ описывают состояния с определенной энергией, поэтому, восстанавливая зависимость от времени, получим

$$\psi_{1,2}^{(0)}(x, t) = C_2^{1,2} \tilde{\psi}_2 e^{-iE_1 t} - C_1^{1,2} \tilde{\psi}_1 e^{-iE_2 t}. \quad (3)$$

Полученная нами волновая функция описывает состояние, в котором $\Psi_1^{(0)}(x, 0) = \psi_1^{(0)}$, как и требуется по условию задачи. Подставим в соотношение (3) функции $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$, выраженные через $\psi_{1,2}^{(0)}$. В результате получим функцию $\Psi_1^{(0)}(x, t)$ в виде разложения по состояниям $\psi_{1,2}^{(0)}$, причем коэффициенты разложения теперь будут зависеть от времени. В соответствии с вероятностной интерпретацией квадрат модуля коэффициента перед $\psi_2^{(0)}$ должен быть равен вероятности обнаружить систему в момент t в состоянии $\psi_2^{(0)}$.

$$W = |C_2^{1,2} C_2^2 \left[e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t} \right]|^2 = \frac{2|H_{12}|^2}{(i\omega)^2} [1 - \cos \omega t] = \frac{4|H_{12}|^2}{(i\omega)^2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right).$$

Здесь мы использовали соотношение (2).

2.8.7. β -Распад трития ${}^3\text{H} \rightarrow {}^2\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ представляет собой быстрый процесс, в течение которого изменяется потенциальная энергия электрона в атоме:

$$U_{\text{H}}(r) = -\frac{e^2}{r} \quad \rightarrow \quad U_{\text{He}}(r) = -\frac{2e^2}{r}. \quad (1)$$

поскольку ядро трития превращается в ядро изотопа ${}^3\text{He}$. Время распада можно оценить, как время пролета β -электрона через область, занимаемую атомом $t_\beta \sim a/v_\beta$, где a — радиус боровской орбиты, v_β —

скорость β -электрона. Поскольку энергия β -электрона имеет порядок нескольких кэВ, то $v_\beta/c \sim 10^{-1} \gg v_{ee}/c \sim \alpha \approx 1/137$, где $v_{ee} \sim e^2/h$ — скорость атомных электронов. В итоге получаем, что t_B гораздо меньше характеристиках атомных времен:

$$t_B \sim \frac{a}{v_{ee}} \sim \frac{\hbar^2 / 1}{me^2 v_{ee}} \ll \frac{\hbar^2 / 1}{me^2 v_{ee}} \sim \frac{\hbar^2}{me^2} \sim \tau_{ee}.$$

Это означает, что волновая функция электрона не успевает измениться за время t_B , в течение которого меняется гамильтониан (1). Вместе с гамильтонианом меняется и система его собственных функций, поэтому мы можем разложить исходную волновую функцию электрона ψ^{He} в поле $U_H(r)$ по собственным функциям в поле $U_{He}(r)$:

$$\psi^{He} = \sum_n C_n \psi_n^{He} + \int C_k \psi_k^{He} dk,$$

где коэффициенты разложения $C_n = \langle \psi_n^{He} | \psi^{He} \rangle = \int \psi_n^{He*} \psi^{He} d^3x$ определяют вероятности перехода электрона из n -го $|C_n|^2$ в одно из связанных состояний иона He.

Имея в виду явный вид радиальных функций электрона в тритии и в гелии:

$$R_{10}^{He}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad R_{10}^{He}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{a^{3/2}} e^{-\frac{r}{a}},$$

$$R_{20}^{He}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}, \quad R_{21}^{He}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} \frac{r}{a\sqrt{3}} e^{-\frac{r}{a}},$$

получим окончательно

$$w_{10} = \left(\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)^2 \approx 0.70, \quad w_{20} = \frac{1}{4}, \quad w_{21} = 0.$$

2.8.8. При резонансном испускании γ -кванта ядром, переходящим из возбужденного состояния в основное, энергия испущенного γ -кванта ϵ_γ должна быть в точности равна энергии возбуждения ядра $\epsilon_0 = \epsilon$. Известно, что для свободно движущегося ядра такой процесс не идет, потому что этому мешает отдача ядра, возникающая вследствие действия закона сохранения импульса (см. задачу 1.3.36). Оказалось, что в твердом теле *связанные* ядра-излучатели могут излучать γ -кванты «без отдачи». Причем процесс возможен именно потому, что ядро связано, а не свободно.

В дальнейшем рассмотрим простую одномерную модель, предполагающую, что ядро-излучатель связано гармоническим потенциалом:

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}^2}{2M} + \frac{M\omega^2 \tilde{x}^2}{2}, \quad \tilde{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

(где M — масса ядра. Вектор $|n\rangle$ теперь характеризует состояние ядра в пространстве в целом).

В отличие от этого, если бы ядро было свободным, то его пространственное состояние следовало бы характеризовать собственным вектором оператора импульса $|\vec{k}'\rangle$, где $\hat{p}|\vec{k}'\rangle = \hbar\vec{k}'|\vec{k}'\rangle$. При испускании γ -кванта свободным ядром это состояние переходит в $|\vec{k}' - \vec{k}\rangle$, где $\hbar\vec{k}$ — импульс испущенного γ -кванта.

При движении в гармоническом потенциале импульс уже не будет интегралом движения, и начальное состояние ядра $|n\rangle$ не является собственным вектором оператора импульса. Поэтому теперь невозможно применить закон сохранения импульса по схеме $|\vec{k}'\rangle \rightarrow |\vec{k}' - \vec{k}\rangle$, как для свободного случая. Однако состояние ядра $|n\rangle$ можно разложить по собственным векторам оператора импульса:

$$|n\rangle = \int |\vec{k}'\rangle \langle \vec{k}'|n\rangle d\vec{k}' \quad (2)$$

Дальнейшие рассуждения будут существенным образом использовать тот факт, что рассматриваемый нами процесс является быстрым по сравнению с характерным временем движения в гармоническом потенциале. Приведем оценку времени взаимодействия. Длина волны γ -кванта намного больше размеров ядра, ибо $\hbar\omega_c \sim E_c/\lambda_c \ll hc/R_{\text{ядра}} \approx 40 \text{ МэВ}$. Поэтому время взаимодействия можно оценить, как $\tau_\gamma \sim \lambda_\gamma/c \sim \omega_\gamma^{-1}$. Поскольку энергия γ -кванта гораздо больше характерной энергии колебаний ядра $\hbar\omega$ (см. (1)), то время взаимодействия τ_γ оказывается много меньше $\tau_{\text{ядра}} \sim \omega^{-1}$ — характерного времени эволюции состояния ядра в гармоническом потенциале.

На основании этого делаем вывод о том, что процесс испускания γ -кванта действительно является быстрым. Одновременно и так же быстро срабатывает и закон сохранения импульса. Поэтому можно считать, что в выражении (2) каждое состояние с определенным значением импульса $|\vec{k}'\rangle$ получает сдвиг: $|\vec{k}'\rangle \rightarrow |\vec{k}' - \vec{k}\rangle$. Коэффициенты в разложении не изменяются. Следовательно, вектор конечного состояния ядра можно записать в виде

$$|f\rangle = \int |\vec{k}' - \vec{k}\rangle \langle \vec{k}'|n\rangle d\vec{k}' = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |\vec{k}'\rangle \langle \vec{k}'|n\rangle d\vec{k}' = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |n\rangle.$$

Очевидно, что состояние $|f\rangle$ не является собственным вектором гамильтонiana (1), но его можно разложить по полной системе собственных векторов $\{|n'\rangle\}$:

$$|f\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |n\rangle = \sum_n |n'\rangle \langle n'|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |n\rangle.$$

Отсюда видно, что вероятность того, что ядро при испускании перейдет в одно из состояний гармонического осциллятора, равна

$$W_{n \rightarrow n'} = |(n'|e^{-i\hat{H}t}|n)\|^2.$$

Энергия испущенного γ -кванта при этом $\varepsilon_\gamma = \varepsilon - \hbar\omega(n' - n)$, где последнее слагаемое — это энергия, забиранная ядром. Случай $n' = n$ отвечает условию $\varepsilon_\gamma = \varepsilon$, следовательно, это и есть условие резонансного испускания. Вычислим вероятность резонансного испускания из основного состояния осциллятора:

$$W_{0 \rightarrow 0} = |(0)e^{-i\hat{H}t}|0\rangle|^2 = \left| \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} dx \right|^2 = e^{-\frac{\omega t^2}{2}}.$$

Мы получили так называемый фактор Дебая-Уоллера.

2.8.9. Гамильтониан задачи имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{m} \omega_0^2 \delta(x) + \frac{F_x}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Для невозмущенной задачи

$$\psi_0^{(0)}(x) = \sqrt{\omega_0} e^{-\omega_0 x^2}, \quad E_0^{(0)} = E_0 = -\frac{\hbar^2 \omega_0^2}{2m}$$

— волновая функция и энергия связанных состояний в δ -виде (см. задачу 2.2.6). В основу вычислений положим общую формулу для вероятности переходов в единицу времени в состояния непрерывного спектра под действием периодического возмущения (II.50):

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \int |F_{\nu 0}|^2 \delta(E_n - E_0 - \hbar\nu) d\nu, \quad (II)$$

где ν — квантовое число, нумерующие состояния непрерывного спектра.

Прежде всего рассмотрим случай $\hbar\nu \gg |E_0|$, т.е. приближение, когда δ -势енциал не действует на частицу в конечном состоянии. Тогда в качестве волновой функции конечного состояния можно просто выбрать функцию свободной частицы:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad \text{тогда } \nu = k, \quad -\infty < k < \infty, \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Вначале необходимо вычислить матричный элемент

$$F_{k0} = \frac{F\sqrt{\omega_0}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\omega_0(x+k)+ikx} dx = i \frac{2F\omega_0^{3/2} k}{\sqrt{2\pi}(k^2 + \omega_0^2)},$$

а затем использовать формулу (1), имея в виду правило (Д.7) для δ -функции:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left[|F_{k0}|^2 + |F_{k0}|^2 \right] \left| \frac{dk}{dE_k} \right|, \quad k_{1,2} = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\hbar\omega + E_0)}.$$

Окончательно получим

$$w = \frac{2\hbar^2}{m(\hbar\omega)^2} |E_0|^{1/2} \sqrt{\hbar\omega - |E_0|}. \quad (2)$$

Заметим, что данная формула применима и при более слабом ограничении $\hbar\omega \geq |E_0|$. В этом случае в качестве функций нулевого приближения необходимо выбрать точные собственные функции невозмущенного гармонического осциллятора (для непрерывного спектра). Поскольку невозмущенный гармонический осциллятор коммутирует с оператором инверсии, то можно рассматривать отдельно четные и нечетные функции. Очевидно, что четные функции дают нулевой вклад в матричный элемент. Нечетные решения имеют вид $\psi(x) = (1/\sqrt{\pi}) \sin kx$. Вычисление вероятности с этими функциями приводят нас опять к формуле (2).

2.8.10. Вероятность квантовых переходов из начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$ в первом порядке временной теории возмущений имеет вид (см. (П.47))

$$W_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^t V_{if}(t') e^{i\omega_i t'} dt' \right|^2 = \frac{|V_{if}|^2}{4\hbar^2} |I(t)|^2, \quad (1)$$

причем верхний предел интеграла t необходимо в дальнейшем устремить к бесконечности. Чтобы не получить при $t \rightarrow \infty$ расходящийся интеграл, воспользуемся следующим приемом: в выражении (1) возьмем интеграл $I(t)$ по частям. При этом получим

$$I(t) = \frac{e^{i\omega_i t}}{i\omega_i} \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right] \Big|_{-\infty}^t - \frac{2\tau}{i\pi\omega_i} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega_i t'} dt'}{t'^2 + \tau^2}.$$

Здесь первое слагаемое описывает поправку первого приближения к начальной волновой функции при $t > 0$ и не дает вклада в переходы. Квантовые переходы описываются вторым слагаемым, и после устремления $t \rightarrow \infty$ интеграл легко берется. Окончательно находим

$$W_{fi} = \frac{|V_{if}|^2}{\hbar^2 \omega_i^2} e^{-2\omega_i t}.$$

2.8.11. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eEx,$$

причем последнее слагаемое должно учитываться по теории возмущений. Вероятность квантовых переходов из основного состояния $n = 0$ в различные возбужденные состояния k в первом порядке теории возмущений определяется квадратом модуля коэффициента $a_{0k}^{(1)}$ (с. (II.46)):

$$a_{0k}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\tau V_{0k}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' = i \int_{-\infty}^\tau \frac{\partial V_{0k}(t')}{\partial t'} \frac{e^{i\omega_0 t'}}{\hbar\omega_0} dt'. \quad (1)$$

Мы воспользовались здесь приемом, описанным в предыдущей задаче, т. е. проинтегрировали один раз по частям и отбросили интегральное слагаемое, считая, что оно не вносит вклада в квантовые переходы.

Очевидно, что в условиях данной задачи единственным возможным переходом будет переход в состояние $n = 1$, потому что только матричный элемент V_{10} отличен от нуля для осциллятора:

$$V_{10} = -eE(1|\hat{x}|0) = -\frac{eE\chi_0}{\sqrt{2}}, \quad \chi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Вследствие конкретной зависимости электрического поля от времени (см. условие) интегрировать в выражении (1) нужно от нуля до τ (предполагается, что $t \rightarrow \infty$, поэтому $t > \tau$). В результате для вероятности перехода получим

$$W_{0 \rightarrow 1} = W_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}, \quad W_0 = \frac{e^2 E^2}{2\hbar m\omega^3}$$

В случае мгновенного включения поля ($\omega\tau \ll 1$) имеем $W_{0 \rightarrow 1} \approx W_0$. При адабатически медленном включении поля ($\omega\tau \gg 1$) получим $W_{0 \rightarrow 1} \approx 0$, т. е. переходы в возбужденные состояния практически не происходят.

2.8.12. В основу решения задачи положим уравнение эволюции для спиновой функции мюона:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = \hat{H} \chi(t) = -\mu_0 (\vec{\sigma} \mathcal{H}_0) \chi(t), \quad (1)$$

где гамильтониан в представлении Шредингера имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\mu_0 (\vec{\sigma} \mathcal{H}_0) - \mu_3 (\vec{\sigma} \mathbf{h}) = \\ &= -\mu_0 (\vec{\sigma} \mathcal{H}_0) - \mu_3 h(\vec{\sigma}, \cos \omega t + \vec{\sigma}_y \sin \omega t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t). \end{aligned} \quad (2)$$



приним $\tilde{H}_0 = -\mu_0 \mathcal{H}_0 \hat{\sigma}_z = -(\hbar \omega_0 / 2) \hat{\sigma}_z$, где введено обозначение $\omega_0 = \gamma \mathcal{H}_0$. $\gamma = e/(mc)$ — гиromагнитное отношение для спинового момента.

а) Теория возмущений. Вначале применим для решения уравнения (1) нестационарную теорию возмущений, считая малым воздействие радиочастотного поля \mathbf{h} . Тогда в нулевом приближении мы имеем двухуровневую систему:

$$\tilde{H}_0 \chi^{(0)} = E^{(0)} \chi^{(0)}, \quad E_{12}^{(0)} = \mp \mu_0 \mathcal{H}_0 = \mp \frac{\hbar \omega_0}{2}, \quad \chi_{12}^{(0)} = \chi_{1/2}.$$

Если в начальный момент $\chi(0) = \chi_{1/2}$ ($a_1^{(0)} = 1$), то поправка первого приближения, описывающая вклад состояния $\chi_{-1/2}$, равна (см. (II.46))

$$a_{12}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{12}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{\omega_1}{2i} \int_0^t e^{i(\omega + \omega_0)t'} dt' = \frac{\omega_1}{2(\omega + \omega_0)} (e^{i(\omega + \omega_0)t} - 1),$$

где мы ввели обозначение $\omega_1 = \gamma h$. Таким образом, спиновая функция с учетом поправки первого приближения должна иметь вид

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_1 t}{2}} \\ \frac{\omega_1}{2(\omega + \omega_0)} (e^{i(\omega + \omega_0)t} - 1) e^{-\frac{i\omega_1 t}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Условия применимости теории возмущений предполагают, что $|a_{12}^{(1)}| \ll 1$. Это можно реализовать либо при $\omega_1 \ll |\omega + \omega_0|$, т. е. система должна быть далека от резонанса: $\omega \neq -\omega_0$, либо при малом времени действия возмущения. Оба варианта не позволяют детально рассмотреть резонансные явления, и поэтому мы обратимся к точному решению.

б) Точное решение. Мы уже рассматривали эту задачу ранее (см. задачу 2.5.6), ниже предлагается другой способ ее решения. Уравнение Шредингера (1) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = -\frac{\omega_0}{2} C_1 - \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} C_2, \\ i\dot{C}_2 = -\frac{\omega_0}{2} e^{i\omega t} C_1 + \frac{\omega_1}{2} C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1(0) = 1, \\ C_2(0) = 0, \end{cases} \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Данную систему можно свести к системе уравнений с независящими от времени коэффициентами при помощи подстановки

$$C_1 = e^{-\frac{1}{2}\omega t} a, \quad C_2 = e^{\frac{1}{2}\omega t} b,$$

Систему уравнений для функций $a(t)$ и $b(t)$ запишем в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega_0 \\ \omega_0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

где мы обозначили $\varepsilon = \omega + \omega_0$. Решение системы (4), удовлетворяющее необходимому граничному условию, можно записать в виде матричной экспоненты:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь Λ — матрица, имеющая следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega_0 \\ \omega_0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \equiv \Omega \begin{pmatrix} \varepsilon/\Omega & \omega_0/\Omega \\ \omega_0/\Omega & -\varepsilon/\Omega \end{pmatrix}$$

и мы ввели обозначение⁷⁾ $\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega_0^2}$. Поскольку $\Lambda^2 = \Omega^2 \cdot \mathbf{I}$, то все четные степени матрицы Λ будут пропорциональны единичной матрице, и мы приходим к соотношению

$$e^{\Lambda t} = \cos \Omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega_0 \\ \omega_0 & -\varepsilon \end{pmatrix} = \cos \Omega t + i \frac{\Lambda}{\Omega} \sin \Omega t. \quad (6)$$

Подставим (6) в решение (5) и отразелим $a(t)$ и $b(t)$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \cos \Omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \omega_0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, восстанавливая зависимость от времени в экспонентах, получаем искомую функцию $\chi(t)$ в виде

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \left[\cos \left(\frac{\Omega}{2} t \right) + i \frac{\varepsilon}{\Omega} \sin \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \right] e^{+ \frac{\varepsilon}{2} t} \\ i \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \left(\frac{\Omega}{2} t \right) e^{+ \frac{\varepsilon}{2} t} \end{pmatrix}.$$

Вероятность переворота спина, вычисленная при помощи данной функции, в частности совпадает с найденной в задаче 2.5.6. Реализация условия $\omega_0 \ll |\varepsilon|$ позволяет получить результат теории возмущений (3). Точный и приближенный результаты согласуются также и при малом времени действия возмущения $\Omega t \ll 1$.

⁷⁾ Введенные нами обозначения Ω , ω_0 и ω_0 совпадают с аналогичными обозначениями задачи 2.5.6.

Приведем также значения проекций вектора поляризации мюона:

$$P_x = \sin \theta [\cos \theta (1 - \cos \Omega t) \cos \omega t - \sin \Omega t \sin \omega t],$$

$$P_y = \sin \theta [\cos \theta (1 - \cos \Omega t) \sin \omega t + \sin \Omega t \cos \omega t],$$

$$P_z = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \Omega t,$$

где $\sin \theta = \omega_1 / \Omega$, $\cos \theta = \varepsilon / 11$, что совпадает с обозначениями задачи 2.5.6.

Заметим, что фактически мы нашли оператор эволюции для данной задачи, который, как нетрудно сообразить, будет иметь вид $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(1)} t} e^{i H}$, где первая экспонента отвечает начальной замене переменных (переходу $C_1, C_2 \rightarrow a, b$). Подумайте, совпадает ли этот оператор с оператором эволюции, полученным другим методом в задаче 2.5.6.

2.8.13. Вначале рассмотрим динамическую часть фазы, приобретаемой вектором $|e_{+}(\xi(t))\rangle$ (см. условие задачи). Заметим, что временная эволюция состояния неконсервативной системы может быть представлена в виде

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi_0\rangle,$$

где оператор эволюции определяется как хронологически упорядоченная экспонента,

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\xi(t')) dt' \right). \quad (1)$$

Пусть начальное состояние является одним из собственных векторов мгновенного гамильтонianца в момент времени $t^{(n)}$, совпадающим с моментом времени оператора $\hat{H}(t^{(n)})$ в соответствующем n -м члене разложения правой части соотношения (1) (см. также (П.45)). Тогда оператор $\hat{H}(t^{(n)})$ может быть заменен соответствующим собственным значением энергии, а в силу невырожденности уровня энергия мгновенное состояние останется тем же самым. Поскольку параметр ξ изменяется во времени медленно, на интервале времени $\Delta t = t - t_0 \ll \tau$, где τ — характерное время изменения параметра, можно считать, что состояние будет близко к собственному состоянию для всех сомножителей членов ряда \hat{T} exp. В этом случае действие оператора эволюции сводится к умножению исходного вектора состояния на фазовый множитель $\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t E_n(\xi(t')) dt' \right)$. При этом в силу невырожденности уровня энергии состояние по-прежнему будет мгновенным собственным вектором гамильтонiana в текущий момент времени.

Для интервала времени $\Delta t \geq \tau$ представим решение в виде, записанном в условии задачи, которое теперь должно удовлетворять уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t, \xi(t))\rangle = \hat{H}(\xi(t))|\Psi(t, \xi(t))\rangle.$$

В силу того, что гамильтониан зависит от времени только через параметр $\xi(t)$, уравнение Шредингера принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t, \xi(t))\rangle = [-\hbar\dot{\gamma}(t) + E_n(\xi(t))]|\Psi(t, \xi(t))\rangle + \\ + i\hbar\xi(t) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle \right) e^{i\gamma(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int E_n(\xi(t')) dt'}.$$

Производную от состояния $|\psi_n(\xi(t))\rangle$ по параметру ξ можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle = \sum_k |\psi_k(\xi(t))\rangle \langle \psi_k(\xi(t))| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle \approx \\ \approx \langle \psi_n(\xi(t))| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle |\psi_n(\xi(t))\rangle.$$

Здесь мы воспользовались адабатическим приближением и опустили в сумме все слагаемые с $k \neq n$, имея в виду, что вероятности переходов в эти состояния экспоненциально малы. Таким образом, с учетом мгновенного стационарного уравнения Шредингера получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t, \xi(t))\rangle = \\ = \left[-\hbar\dot{\gamma}(t) + i\hbar\xi(t) \langle \psi_n(\xi(t))| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle + E_n(\xi(t)) \right] |\Psi(t, \xi(t))\rangle.$$

Поскольку уровень энергии $E_n(\xi(t))$ невырожден, состояние $|\Psi(t, \xi(t))\rangle$ также должно соответствовать этому же уровню энергии. Поэтому в правой части полученного уравнения можно заменить значение $E_n(\xi)$ действием гамильтониана $\hat{H}(\xi)$. Таким образом, видим, что в правой части уравнения Шредингера появляются дополнительные члены, которые обязаны обратиться в нуль, что возможно при выполнении условия

$$\gamma(t) = i\xi(t) \langle \psi_n(\xi(t))| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi(t))\rangle.$$

Нетрудно показать, что функция $\gamma(t)$ является действительной. В этом деле, проинтегрируем условие нормировки 1 = $\langle \psi_n(\xi)|\psi_n(\xi)\rangle$ и найдем соотношение

$$0 = \langle \psi_n(\xi)| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi)\rangle^* + \langle \psi_n(\xi)| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi)\rangle = 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle \psi_n(\xi)| \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi_n(\xi)\rangle \right\},$$

которое, по существу, и доказывает данное утверждение.

Если параметр ξ изменяется периодически с периодом T , описывая замкнутую траекторию в параметрическом пространстве, изменение фазы за период можно выразить через интеграл по замкнутому контуру Γ в параметрическом пространстве:

$$\gamma = \int_0^T dt \gamma(t) = i \oint d\xi (\psi_n(\xi(t)) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] \psi_n(\xi(t))). \quad (2)$$

2.8.14. Состояния с определенными значениями проекции спина $s_{3z} = \pm 1/2$ на направление магнитного поля определяются векторами (см. задачу 2.4.19)

$$|+\rangle_{\text{ж}} = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle, \quad (1)$$

$$|-\rangle_{\text{ж}} = -\sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} |-\rangle,$$

где векторы $|+\rangle$ и $|-\rangle$ описывают состояния с положительной и отрицательной проекциями спина на ось z (см. (II-26)).

Два состояния $|\pm\rangle_{\text{ж}}$ (1) отвечают значениям энергии $\mp \mu_0 \mathcal{H}/2$. Таким образом, энергетический спектр невырожден. Пусть теперь магнитное поле адабатически медленно вращается вокруг оси z при постоянном угле θ (рис. 2.10). В этом случае применимо адабатическое приближение, из которого следует, что частица, находившаяся первоначально в основном состоянии, в нем и остается, а вектор состояния будет отличаться от исходного вектора (1) фазовым множителем (найденным в формуле (2) задачи 2.8.13).

Периоду T изменения параметров соответствует изменение азимутального угла φ от 0 до 2π , поэтому для фазы Берри имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= i \int_0^{2\pi} d\varphi \langle \chi | \left(\lambda \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \chi \right) \rangle_{\text{ж}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \cos \theta) = \\ &= -s_{2z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = -s_{2z} \Omega. \end{aligned}$$

где Ω — телесный угол, под которым из начала координат видна траектория, описываемая средним значением спина (рис. 2.10). $s_{2z} = 1/2$ — проекция спина на направление магнитного поля.

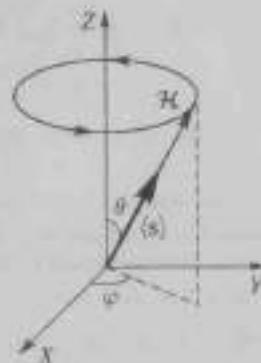


Рис. 2.10. Среднее значение спина мюона в медленно вращающемся магнитном поле

2.9. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНОВАЯ МЕХАНИКА

2.9.1. Приводим результаты расчета коммутаторов

- а) $[\hat{p}_i, \hat{H}_D] = 0,$ в) $[\vec{\gamma}^2, \hat{H}_D] = 0,$
 б) $[\hat{l}_i, \hat{H}_D] = ice_{ijk}\hat{\alpha}_j\hat{p}_k \neq 0,$ г) $[\hat{j}_i, \hat{H}_D] = 0,$
 в) $[\hat{V}, \hat{H}_D] = ice_{ijk}\hat{\alpha}_j(\hat{p}_k) + [\hat{p}_k] \neq 0,$ ж) $[\hat{J}^2, \hat{H}_D] = 0,$
 г) $[\hat{s}_i, \hat{H}_D] = ice_{ijk}\hat{\alpha}_j\hat{p}_k \neq 0,$ з) $[(\hat{\Sigma}\hat{p}), \hat{H}_D] = 0,$
 и) $[\gamma^5, \hat{H}_D] = 2imc^2\rho_2 \neq 0.$

Таким образом, для свободной диракковской частицы интегралами движения являются: три компонента импульса \hat{p}_i , три компонента и квадрат полного углового момента \hat{j}_i , а также оператор продольной поляризации $(\hat{\Sigma}\hat{p})/\rho$. В отличие от нерелятивистской теории компоненты орбитального и спинового моментов не являются интегралами движения, что является особенностью релятивистского движения. Оператор γ^5 (оператор киральности) является интегралом движения только для безмассовой частицы (например, для безмассового нейтрино).

2.9.2. Калибровочное преобразование — это одновременное преобразование потенциала электромагнитного поля и волновой функции

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f(x) \\ \varphi \rightarrow \varphi' &= \varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial t} f(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\nu f(x),$$

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{\frac{i}{\hbar c} f(x)} \Psi(x).$$

Таким образом, градиентное преобразование потенциала, дополненное умножением волновой функции на фазовый калибровочный множитель, оставляет инвариантным уравнение для электрона во внешнем поле (его удобно записать в ковариантном виде (11.54)).

2.9.3. Уравнение Дирака для свободной частицы в гамильтоновой форме имеет вид

$$\partial_i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}_D \Psi = \{c(\hat{\alpha}\hat{p}) + \hat{J}mc^2\} \Psi. \quad (1)$$

Для стационарных состояний можно записать $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(\mathbf{r})$, причем $\psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет стационарному уравнению — уравнению на собственные значения гамильтонiana Дирака. Кроме того, $\psi(\mathbf{r})$ должна



быть собственной функцией оператора импульса, потому что операторы трех компонент импульса $\hat{\mathbf{p}}$ коммутируют с гамильтонианом:

$$\begin{cases} \hat{H}_D\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (2)$$

Условия (2) указывают на то, что решения уравнения (1) следует искать в виде плоских волн:

$$\psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{p}, E)e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}, \quad (3)$$

где $u(\mathbf{p}, E)$ — не зависящий от координат и времени биспинор. Учитывая (3), перейдем к так называемой «расщепленной» форме записи стационарного уравнения Дирака:

$$\begin{cases} c(\hat{\sigma}\mathbf{p})\chi = (E - mc^2)\varphi, \\ c(\hat{\sigma}\mathbf{p})\varphi = (E + mc^2)\chi. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь мы использовали формулы, выражющие дираковские матрицы в блочном виде через $\hat{\sigma}$ -матрицы Ньютона (II.52):

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а также звезды обозначения

$$u(\mathbf{p}, E) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}, E) \\ \chi(\mathbf{p}, E) \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

— двухкомпонентные функции. Условие совместности системы уравнений (4) имеет вид

$$c^2(\hat{\sigma}\mathbf{p})(\hat{\sigma}\mathbf{p}) = E^2 - m^2c^4.$$

С учетом тождества $\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_a = \delta_{aa}\hat{1} + i\varepsilon_{abc}\hat{\sigma}_b$ (задача 2.4.13) из этого соотношения получаем

$$E = \xi E_p \equiv \xi \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}, \quad (6)$$

где $\xi = \pm 1$ — знак энергии. Двум знакам энергии отвечают два типа решений уравнения Дирака, соответствующие различным знакам энергии в экспоненте, т. е. различным типам зависимости функций от времени.

Рассмотрим далее так называемый знаковый оператор

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}_D}{(\hat{H}_D^2)^{1/2}} = \frac{c(\hat{\sigma}\mathbf{p}) + \hat{\beta}mc^2}{E_p}, \quad (7)$$

записанный в общем виде и в импульсном представлении. Очевидно он коммутирует с гамильтонианом H_p , и поэтому его собственные значения могут быть использованы для классификации состояний, собственных для H_p . Собственные значения оператора $\hat{\Lambda}$ есть $\xi = \pm 1$, причем $\xi = +1$ соответствует положительному ($E > 0$), а $\xi = -1$ — отрицательному знаку энергии ($E < 0$). Для свободного движения энергия E_p , импульс p и ξ (знак энергии) являются интегралами движения и могут одновременно принимать определенные значения. Далее, из (4) следует, что биспинор $\psi(p, E)$ можно представить в виде

$$\psi(p, E) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{i(\bar{\sigma}p)}{E E_p + m^2} \varphi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где N — нормировочный коэффициент, а φ — остающийся пока неопределенным двухкомпонентный спинор, нормируемый условием $\varphi^\dagger \varphi = 1$. Нормировочный коэффициент в (8) легко находится:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \xi \frac{mc^2}{E_p}}.$$

Осталось найти функцию φ . Неоднозначность в выборе φ связана с наличием спиновой степени свободы у дыроковской частицы. Рассмотрим оператор $(\bar{\Sigma}p)/p$, где $p = |\mathbf{p}|$. Собственные значения этого оператора характеризуют проекцию спина на направление движения, т. е. это — оператор продольной поляризации. Оператор продольной поляризации коммутирует с гамильтонианом, следовательно, физическая величина, соответствующая ему, является интегралом движения. Поэтому к уравнениям (2) можно добавить уравнение

$$\frac{(\bar{\Sigma}p)}{p} \psi(r) = s \psi(r),$$

где собственное значение $s = \pm 1$ называется спиральностью частицы. Используя (8), а также явный вид матриц $\bar{\Sigma}_i$ (5), сводим это уравнение к двухкомпонентному:

$$(\bar{\sigma}p) \varphi = sp\varphi, \quad (9)$$

т. е. к уравнению для паулиевских спиноров с определенным значением проекции спина на направление импульса. Ясно, что уравнение (9) определяет двухкомпонентный спинор, собственный для оператора $(\bar{\sigma}p)$, где $p = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Такие функции были найдены нами в задаче 2.4.19. На этом можно было бы и завершить решение данной задачи, но представ-

ляется полезным получить также другой вид решения уравнения (9) с явной зависимостью от спиральности δ . Такое решение может быть представлено в виде

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(1 + \varepsilon p_z/p)^{1/2}}{\varepsilon(1 - \varepsilon p_z/p)^{1/2} e^{i\delta}} \right), \quad (10)$$

где $\lg \delta = p_y/p_x$. Если ввести сферические координаты вектора $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, то эти функции перейдут в функции $\Psi_{\pm 1}$ задачи 2.4.19. Объединяя наши результаты (10) и (8), мы получаем нормированные собственные функции операторов \hat{H}_D , $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\Delta}$ и $(\hat{\Sigma}\mathbf{p})/p$:

$$\Psi_{p,\xi,i}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}(E_F - p\mathbf{c}t)}}{2\sqrt{V}} \begin{pmatrix} \left(1 + \xi \frac{mc^2}{E_S}\right)^{1/2} \left(1 + i \frac{p_x}{p}\right)^{1/2} \\ \varepsilon \left(1 + \xi \frac{mc^2}{E_S}\right)^{1/2} \left(1 - i \frac{p_x}{p}\right)^{1/2} e^{i\delta} \\ i\xi \left(1 - \xi \frac{mc^2}{E_S}\right)^{1/2} \left(1 + i \frac{p_x}{p}\right)^{1/2} \\ \xi \left(1 - \xi \frac{mc^2}{E_S}\right)^{1/2} \left(1 - i \frac{p_x}{p}\right)^{1/2} e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

2.9.4. Перейдем в гейзенберговское представление и вычислим оператор $d\hat{x}/dt$, представляющий собой, очевидно, x -компоненту оператора скорости:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{v}_x = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_D, \hat{x}] = \frac{i}{\hbar} \xi \hat{c} \hat{\alpha}_1 [\hat{p}_x, \hat{x}] = \hat{c} \hat{\alpha}_1.$$

Данный результат не поддается интерпретации в духе принципа соответствия. Во-первых, поскольку собственные значения оператора $\hat{\alpha}_1$ равны ± 1 , то оказывается, что собственные значения операторов компонент скорости равны $\pm c$, хотя в действительности скорость может принимать любые значения в промежутке от $-c$ до $+c$. Во-вторых, матрицы $\hat{\alpha}_1$ не коммутируют между собой, что должно приводить к принципиальной невозможности одновременно измерить хотя бы две компоненты скорости.

И, наконец, в теории Дирака происходит так называемое «расщепление» понятий скорости и импульса, т. е. отсутствуют обычные, аналогичные существующим в релятивистской классической механике связи между операторами скорости и импульса. Эти сложности в физической интерпретации оператора скорости, связанны с интерференцией состояний с различными знаками энергии.

В последовательной одиночастичной теории физические величины должны описываться операторами, не смешивающими между собой состояния с различными знаками энергии. Такие операторы называются четными (или «одиночастичными»). Четный оператор переводит волновую функцию с определенным знаком энергии в функцию с тем же знаком энергии, а нечетный оператор — в функцию с другим знаком энергии:

$$[\hat{F}]\Psi(\pm) = \bar{\Psi}(\pm), \quad \{\hat{F}\}\Psi(\pm) = \tilde{\Psi}(\mp).$$

Найдем четную часть оператора скорости:

$$\{\hat{v}_x\} = c\{\hat{a}_1\} = \frac{1}{2}(\hat{v}_x + \hat{\Lambda}\hat{v}_x\hat{\Lambda}) = \frac{c}{2E_p}\{\hat{a}_1, \hat{H}_D\}\hat{\Lambda} = \frac{c^2 p_x}{E_p}\hat{\Lambda}$$

Отсюда следует, что четная часть оператора скорости для решений с положительной энергией ($\xi = +1$) связана с оператором импульса соотношением, соответствующим связи между скоростью и импульсом в классической релятивистской теории — четная часть оператора скорости допускает простую классическую интерпретацию.

Нечетная часть оператора скорости $\{\hat{v}_x\} = \frac{1}{2}(\hat{v}_x - \hat{\Lambda}\hat{v}_x\hat{\Lambda})$ антисимметрична с гамильтонианом, потому что

$$\frac{\hat{H}_D}{E_p}\{\hat{v}_x\} = \frac{1}{2}(\hat{\Lambda}\hat{v}_x - \hat{v}_x\hat{\Lambda}) = -\{\hat{v}_x\}\frac{\hat{H}_D}{E_p}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\{\hat{v}_x\} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}_D, \{\hat{v}_x\}) = -\frac{2i}{\hbar}\{\hat{v}_x\}\hat{H}_D.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом $d\hat{H}_D/dt = 0$ дает

$$\{\hat{v}_x\} = c\{\hat{a}_1\} = c\{\hat{a}_1(0)\}e^{-\frac{2i\hat{H}_D t}{\hbar}}.$$

Таким образом, нечетная часть оператора скорости не имеет классического аналога и характеризуется быстрыми осцилляциями с частотой $\sim 2|E|/\hbar$, вызывая явление *Zitterbewegung* («дрожащее движение»), которое, по существу, и затрудняет физическую интерпретацию операторов в теории Дирака.

2.9.5. Система уровней энергии свободного электрона Дирака

$$E = \xi\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \quad \xi = \pm 1$$

представляет собой два континуума состояний для положительных и отрицательных значений энергии, которые разделены энергетической щелью $\Delta E = 2mc^2$ (рис. 2.11, а).

Предположим, что электрон находится в постоянном и однородном электрическом поле, направленном вдоль оси z . Пусть движение происходит вдоль поля $E = \{0, 0, E\}$.

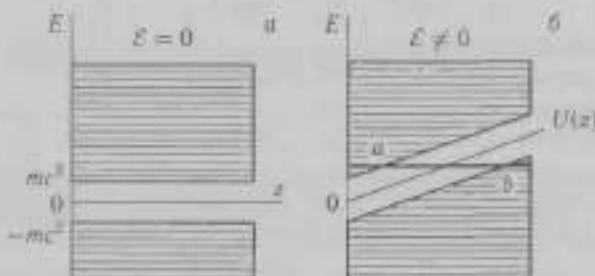


Рис. 2.11. Модификация уровней энергии дираковской частицы в однородном электрическом поле.

При этом существенно изменяется конфигурация уровней энергии: электрона изменяются границы верхнего ($E = mc^2$) и нижнего ($E = -mc^2$) континуумов энергии (рис. 2.11, б).

Новыми границами верхнего и нижнего континуумов состояний станут линии

$$E = \pm mc^2 + eCz,$$

где $U(z) = eEz$ — потенциальная энергия электрона в электрическом поле (подразумевается $-e < 0$ — заряд электрона). В результате поворота запрещенной энергетической зоны, разделяющей верхний и нижний континуумы, состояния с отрицательной и положительной энергией будут разделены лишь пространственно.

Таким образом, электрон, имеющий определенную энергию E , будет находиться в «состоянии с положительной энергией» ($\xi = +1$) при $z \leq a$ и в «состоянии с отрицательной энергией» ($\xi = -1$) при $z \geq b$. Но на самом деле (рис. 2.11) энергия электрона при этом остается одной и той же. Значит, при наличии внешнего электрического поля (или любого другого потенциала) не может быть строгого разделения состояний на состояния с положительной и отрицательной энергией. Более того, возможен туннельный переход через запрещенную зону из верхнего континуума в нижний (или наоборот). Этот эффект и представляет собой парадокс Клейна.

Оценим вероятность туннельного перехода из верхнего континуума в нижний, используя квазиклассическое приближение (П.38).

$$D \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho(z)| dz \right\},$$

где $|v(z)| = \frac{1}{c} \sqrt{m^2 c^4 - (E - eEz)^2}$. Вычисляем интеграл и получаем, что

$$D \approx \exp \left\{ -e \frac{m^2 c^3}{eE} \right\}.$$

Очевидно, что такой же вид должна иметь и вероятность обратного туннельного перехода — из нижнего континуума в верхний.

Итак, наложение электрического поля не приводит к локализации дираковской частицы — она может оказаться в состоянии с противоположным знаком энергии в результате туннельного перехода, причем вероятность такого перехода растет с ростом поля и стремится к единице в том случае, если напряженность поля равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{cr} = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} = 1,3 \cdot 10^{16} \text{ В/см}$$

— так называемому шинагровскому значению.

В соответствии с дырочной интерпретацией Дирака при переходе электрона из нижнего континуума состояний в верхний появляется пара частиц: электрон в верхнем континууме с энергией $E > 0$ и «дырка» в нижнем континууме (среди состояний с $E < 0$). Эта «дырка» интерпретируется как античастица по отношению к электрону, т. е. позитрон. Следовательно, мы описали процесс рождения электрон-позитронной пары.

2.9.6. Уравнение Дирака, описывающее движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = (\sigma(\vec{\alpha}\vec{P}) + \beta mc^2 - e\phi)\Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$, $-e < 0$ — заряд электрона.

Считаем состояние $\Psi(\mathbf{r}, t)$ стационарным: $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\mathbf{r})$. В дальнейшем будем полагать $E > 0$, т. е. мы фиксируем знак энергии (считаем энергию положительной, ибо в нерелятивистской квантовой механике имеются только состояния с положительной энергией). Представим далее, как и обычно, волновую функцию в виде $\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ и запишем (1) в «расщепленном» виде:

$$\begin{cases} (E - mc^2 + e\phi)\varphi = \epsilon(\vec{\sigma}\vec{P})\chi, \\ (E + mc^2 + e\phi)\chi = \epsilon(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Исследуем эту систему в нерелятивистском пределе и в слабых полях, т. е.

$$E \approx mc^2 + \epsilon; \quad |\epsilon + e\phi| \ll mc^2. \quad (3)$$



В этом случае (2) переходит в

$$\begin{cases} (\varepsilon + e\phi) \varphi(r) = c(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) \chi(r), \\ (\varepsilon + e\phi + 2mc^2) \chi(r) = c(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) \varphi(r). \end{cases}$$

Из второго уравнения с учетом (3) находим

$$\chi(r) = \frac{(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})}{2mc} \varphi(r). \quad (4)$$

откуда видно, что в нерелятивистском приближении двухкомпонентный спинор $\chi(r)$ имеет по отношению к $\varphi(r)$ порядок малости $(v/c) \ll 1$. Это и позволяет (в случае положительной энергии $E > 0$) говорить о двух нижних компонентах диряковского спинора как о малых.

Подставим (4) в первое уравнение системы и получим с линейной точностью по (v/c) уравнение для двухкомпонентного спинора $\varphi(r)$:

$$(\varepsilon + e\phi) \varphi(r) = \frac{1}{2m} (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) \varphi(r).$$

Преобразуя правую часть данного уравнения, находим

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) - \hat{\mathcal{P}}_i \hat{\mathcal{P}}_j (\delta_{ij} + ie_{ijk} \hat{\sigma}_k) &= \hat{\mathcal{P}}^2 + i \frac{e}{c} \hat{\sigma}_k e_{ijk} [\hat{p}_i \hat{A}_j + \hat{A}_i \hat{p}_j] = \\ &= \hat{\mathcal{P}}^2 + i \frac{e}{c} \hat{\sigma}_k e_{ijk} [\hat{p}_i \hat{A}_j] = \hat{\mathcal{P}}^2 + \frac{e^2}{c} (\hat{\sigma} \mathcal{H}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. В результате получаем нерелятивистское уравнение, описывающее движение частицы со спином $1/2$ в электромагнитном поле:

$$\left(\frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc} (\hat{\sigma} \mathcal{H}) - e\phi \right) \varphi(r) = \varepsilon \varphi(r).$$

Это и есть уравнение Паули, а $\varphi(r)$ — паульевский двухкомпонентный спинор.

2.9.7. В уравнении Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = (c(\hat{\alpha} \hat{\mathcal{P}}) + \beta mc^2 - e\phi) \Psi(r, t)$$

положим

$$U(r) = -e\phi(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad \mathbf{A} = 0,$$

т. е. будем считать, что внешнее поле — чисто кулоновское, при этом, очевидно, $\hat{\mathcal{P}} = \hat{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \hat{p}$, и, как и ранее, $-e < 0$ — заряд электрона.

Подаем, что задача — стационарная: $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\mathbf{r})$, фиксируем знак энергии $E > 0$. Переходим к «расщепленной» форме записи уравнения Дирака:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (E - mc^2 + e\phi)\varphi = c(\vec{\sigma}\vec{p})\chi \\ (E + mc^2 + e\phi)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) выражаем $\chi(\mathbf{r})$:

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{E + mc^2 + e\phi}c(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi(\mathbf{r})|_{\perp=0} \approx \frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{2mc^2}\varphi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

т. е. в передативистском приближении функция $\chi(\mathbf{r})$ имеет по отношению к $\varphi(\mathbf{r})$ порядок малости $(v/c) \ll 1$. Подставляем результат (2) в первое уравнение (1) и получим (пока еще точное) уравнение для $\varphi(\mathbf{r})$:

$$(E - mc^2 + e\phi)\varphi(\mathbf{r}) = c^2(\vec{\sigma}\vec{p})\frac{1}{E + mc^2 + e\phi}(c(\vec{\sigma}\vec{p}))\varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Переходим к передативистскому приближению:

$$E \approx mc^2 + \varepsilon, \quad |\varepsilon + e\phi| \ll mc^2,$$

и в дальнейшем при разложениях будем ограничиваться членами порядка $(v/c)^2$. Поэтому

$$(E + mc^2 + e\phi)^{-1} = (2mc^2 + \varepsilon + e\phi)^{-1} \approx \frac{1}{2mc^2} \left(1 - \frac{\varepsilon + e\phi}{2mc^2}\right).$$

При этом уравнение (3) принимает вид

$$\left(\varepsilon + e\phi - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\varphi(\mathbf{r}) = -(\vec{\sigma}\vec{p})\frac{\varepsilon + e\phi}{4m^2c^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi(\mathbf{r}). \quad (4)$$

В правой части уравнения (4) преобразуем слагаемое

$$\begin{aligned} -(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{e}(\vec{\sigma}\vec{p}) &= (\vec{\sigma}\vec{p})U(r)(\vec{\sigma}\vec{p}) = U(r)\vec{p}^2 + [(\vec{\sigma}\vec{p}), U(r)](\vec{\sigma}\vec{p}) = \\ &= U(r)\vec{p}^2 + (\delta_{ij} + ie_{ijk}\hat{\sigma}_k)(-i\hbar\nabla_i U(r))\hat{p}_j = \\ &= U(r)\vec{p}^2 - i\hbar((\nabla U(r))\hat{p}) + \hbar^2 \frac{dU(r)}{dr} \frac{1}{r}(\vec{\sigma}\vec{l}) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\vec{l} = \frac{1}{\hbar}[\vec{r} \times \vec{p}]$ — орбитальный момент. Уравнение (4) при этом прейдет в

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon + e\phi - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\varphi(\mathbf{r}) &= \\ &= \left\{ -\frac{\varepsilon + e\phi}{4m^2c^2}\vec{p}^2 + \frac{\hbar}{4m^2c^2} \left[-i((\nabla U(r))\hat{p}) + \hbar \frac{dU(r)}{dr} \frac{(\vec{\sigma}\vec{l})}{r} \right] \right\} \varphi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, в правой части (6) преобразуем первое слагаемое:

$$(z + e\phi)\hat{p}^2 = \hat{p}^2(z + e\phi) + [(z + e\phi), \hat{p}^2] = \frac{\hat{p}^4}{2m} - \hat{p}[U(r), \hat{p}] - [U(r), \hat{p}]\hat{p} = \\ = \frac{\hat{p}^4}{2m} - \hbar^2(\nabla^2 U(r)) - 2i\hbar((\nabla U(r))\hat{p}). \quad (7)$$

Здесь мы учли, что на решениях уравнения в рассматриваемом приближении $(z + e\phi)\varphi(r) \approx \frac{\hat{p}^2}{2m}\varphi(r)$, а также использовали правило дифференцирования произведения функций.

Теперь вспомним общий вид нашей (четырехкомпонентной) волновой функции (1) с учетом (2). Запишем условие нормировки функции $\psi(r)$ с точностью до $(v/c)^2$:

$$1 = \int \psi^\dagger(r)\psi(r)d^3x \approx \int d^3x \left\{ \varphi^\dagger(r)\varphi(r) + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}((\hat{\sigma}\nabla)\varphi(r))^+((\hat{\sigma}\nabla)\varphi(r))^- \right\}. \quad (8)$$

Здесь мы использовали вид оператора импульса: $\hat{p} = -i\hbar\nabla$. Заметим, что мы хотим получить приближенное уравнение для двухкомпонентной паулниевской (нерелятивистской) функции, которую в дальнейшем будем обозначать $\psi^0(r)$. Две компоненты такой функции должны, как всегда, описывать две возможные ориентации спина, и условие нормировки для $\psi^0(r)$ должно иметь традиционный вид:

$$1 = \int \psi^{0+}(r)\psi^0(r)d^3x. \quad (9)$$

Наше приближенное уравнение (6) пока записано для двухкомпонентной функции $\varphi(r)$ (верхние компоненты биспинора $\psi(r)$), но функция $\varphi(r)$ имеет существенно иное условие нормировки, следующее из (8).

В связи с этим в условии нормировки (8) принтегрируем по частям второе слагаемое:

$$\int d^3x ((\hat{\sigma}\nabla)\varphi)^+((\hat{\sigma}\nabla)\varphi) = - \int d^3x \varphi^+(\Delta\varphi) = - \int d^3x (\Delta\varphi^+)\varphi$$

Симметризуя эти два варианта, из условия (8) мы получим

$$1 = \int d^3x \left\{ \varphi^+\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}[(\Delta\varphi^+)\varphi + \varphi^+(\Delta\varphi)] \right\}. \quad (10)$$

Для согласования нормировочных условий (9) и (10) с точностью до $(v/c)^2$ положим

$$\psi^0(r) = \left(1 + \frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi(r), \quad \text{или} \quad \varphi(r) = \left(1 - \frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\psi^0(r).$$

где мы учли, что $\hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2 \Delta$. Это есть не что иное, как каноническое преобразование волновой функции, ибо оно сохраняет значение нормированного интеграла, т. е. *вероятность*.

Теперь подставим в уравнение (6) соотношение (7), а также функцию $\psi(\mathbf{r})$, выраженную через $\psi^{II}(\mathbf{r})$. В итоге получим окончательный вид приближенного уравнения:

$$\left(\epsilon + e\phi - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \right) \psi^{II}(\mathbf{r}) = \hat{\nabla} \psi^{II}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$$\hat{\nabla} = -\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{8m^2 c^2} + \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{dU(\mathbf{r})}{dr} \frac{1}{r} + \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 (\nabla^2 U).$$

В правой части полученного уравнения сгруппированы поправки к движению электрона в кулоновском поле. В порядке следования это: релятивистская поправка, спин-орбитальное взаимодействие и контактное взаимодействие.

2.9.8. Пусть магнитное поле направлено по оси z : $\mathcal{H} = \{0, 0, \mathcal{H}\}$. Выберем вектор-потенциал так же, как в нерелятивистском случае в задаче 2.5.1, т. е. $\mathbf{A} = \{0, 0, A_z\}$. Тогда стационарное уравнение Дирака будет иметь вид $\hat{H}_D \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})$, причем

$$\hat{H}_D = \alpha(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) + \beta mc^2, \quad \hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad -e < 0$$

— заряд электрона. Переходим к «расщепленной» форме записи уравнения Дирака:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{r}) \\ \varphi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})\chi = (E - mc^2)\varphi, \\ \alpha(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})\varphi = (E + mc^2)\chi. \end{cases} \quad (1)$$

Выразим из второго уравнения системы (1) $\chi(\mathbf{r})$ через $\varphi(\mathbf{r})$ и подставим результат в первое уравнение:

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi(\mathbf{r}) = \alpha^2 (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) \varphi(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Используем тождество (задача 2.9.6) $(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}})(\hat{\sigma} \hat{\mathcal{P}}) = \hat{\mathcal{P}}^2 + \frac{e\hbar}{c} (\hat{\sigma} \mathcal{H})$, и тогда уравнение (2) примет вид

$$\left\{ \hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{e}{c} \mathcal{H} x \right)^2 + \hat{p}_z^2 + \frac{e\hbar}{c} \mathcal{H} \hat{\sigma}_z \right\} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Полученное уравнение формально имеет вид уравнения Шредингера $\hat{H}_{\text{eff}} \varphi(\mathbf{r}) = E_{\text{eff}} \varphi(\mathbf{r})$, причем легко заметить, что \hat{H}_{eff} коммутирует с опе-



раторами \hat{p}_x и \hat{p}_y . Это значит, что можно искать решение уравнения (3) в виде

$$\varphi(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y \theta)} f(x). \quad (4)$$

Далее положим $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и приведем уравнение (3) к следующему виду:

$$\left\{ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\frac{e\partial}{mc} \right)^2 \left(x + \frac{cp_y}{eH} \right)^2 \right\} f_{1,2}(x) = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - m^2c^4 \mp e\hbar c\mathcal{H} - c^2 p_x^2] f_{1,2}(x). \quad (5)$$

Уравнение (5) есть не что иное, как нерелятивистское уравнение для осциллятора $\hat{H}'_{\text{ eff}} f_{1,2}(x) = E'_{\text{ eff}} f_{1,2}(x)$, причем

$$\hat{H}'_{\text{ eff}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m}{2} \Omega^2 x'^2, \quad x' = x + \frac{cp_y}{e\mathcal{H}}, \quad \Omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}, \quad \frac{d^2}{dx'^2} = \frac{d^2}{ds^2}.$$

Ясно, что должно выполняться $E'_{\text{ eff}} = \hbar\Omega(n' + 1/2)$ и на основании этого получаем

$$E^2 - m^2c^4 - c^2 p_x^2 = e\hbar c\mathcal{H}(2n' + 1 \pm 1).$$

Очевидно, что $2n' + 1 \pm 1$ — всегда четное число. Обозначим его $2n$ и получим окончательный результат:

$$E_{\text{ eff}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_x^2 + 2e\hbar c\mathcal{H}n}. \quad (6)$$

Поскольку в соотношении $2n' + 1 \pm 1 = 2n$ знак \pm относится к компонентам $f_{1,2}(x)$ функции $f(x)$, то ясно, что общий вид функции $\varphi(x)$ (формула (4)) должен быть таким:

$$\varphi_{n\mu,\nu}(x) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_y y + p_z z) \right] \begin{pmatrix} C_1 u_{n-1}^{(m)}(x') \\ C_2 u_n^{(m)}(x') \end{pmatrix},$$

где $u_n^{(m)}(x)$ есть обычное решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора (II.18). Коэффициенты $C_{1,2}$ можно определить, если конкретизировать спиновое состояние частицы, для этого нужен еще один оператор — спиновый интеграл движения.

Найденные нами уровни энергии (6) не являются эквидистантными в отличие от уровней Ландау (задача 2.5.1). Уровни энергии вырождены по спину с кратностью 2 (кроме основного состояния $\mu = 0$) и по p_y — с бесконечной кратностью.

2.9.9. Плотность заряда и плотность тока для дираховской частицы имеют вид

$$\rho = e\Phi^+ \Psi, \quad j = e\bar{\Psi}^\dagger \hat{\sigma} \Phi,$$

причем эти выражения справедливы как для частицы во внешнем электромагнитном поле, так и для свободной частицы.

Действуя стандартным образом, перейдем в уравнении Дирака к «расщепленной» форме записи (см., например, задачу 2.9.6), выразим две нижние компоненты $\chi(\mathbf{r})$ через две верхние $\varphi(\mathbf{r})$ и перейдем далее к нерелятивистскому пределу $E \approx mc^2$. В итоге получим с линейной точностью по v/c (формула (4) задачи 2.9.6)

$$\chi(\mathbf{r}) \approx \frac{(i\partial\hat{P})}{2mc} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)}{2mc} \varphi(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Далее необходимо учесть, что $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, а также связь матриц $\hat{\sigma}_i$ с $\hat{\sigma}$ -матрицами Паули (формула (5) задачи 2.9.3). В итоге находим, ограничиваясь линейными по v/c членами,

$$\rho \approx ev^+\varphi, \\ j = \frac{ie\hbar}{2m} ((\nabla\varphi^+) \rho - \rho^+ (\nabla\varphi)) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \varphi^+ \varphi + \frac{e\hbar}{2m} \text{rot}(\varphi^+ \hat{\sigma} \varphi).$$

Полученные выражения совпадают результатами нерелятивистской теории для плотности заряда и тока частицы со спином 1/2, обладающей зарядом e и собственным магнитным моментом $\mu = eh/(2mc)$.

2.9.10. Решения уравнения Дирака для свободного электрона, отвечающие определенным значениям импульса \mathbf{p} и энергии $E = \xi E_p$, могут характеризоваться различными значениями знака энергии $\xi = \pm 1$ (см. задачу 2.9.3). При этом решения с положительным знаком энергии $\xi = +1$ описывают состояния частиц, а решения с $\xi = -1$ должны описывать античастицы. Волновая функция античастицы (с положительной энергией) получается из решения уравнения Дирака с $\xi = -1$ в результате применения операции зарядового сопряжения.

Операция зарядового сопряжения при использовании стандартного представления для матриц Дирака (II.52) вводится по следующей схеме:

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t) = S_z \overline{\Psi}^T(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\overline{\Psi}^T = \gamma^0 \Psi^*$ (γ^0 — операция транспонирования биспинора), $S_z = \gamma^2 \gamma^0 = -\hat{\sigma}_2$.

Исследуем далее, как преобразование (1) будет действовать на конкретные решения уравнения Дирака в виде плоских волн (формула (11)

задачи 2.9.3). Исходя из функции с отрицательным значением энергии, получаем функцию античастицы:

$$\Psi_{-\xi, -\mathbf{p}, z}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \right]^* u^*(-\xi, -\mathbf{p}, z) = \\ = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} i\xi u(\xi, \mathbf{p}, z) = i\xi \Psi_{\xi, \mathbf{p}, z}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

То есть с точностью до несущественного фазового множителя мы получаем ту же самую функцию — свободные электроны и позитроны описываются одними и теми же волновыми функциями.

Мы видим, что при преобразовании (1) изменяется знак энергии и направление импульса; но не меняется спиральность ε . Волновая функция античастицы должна описывать состояние с противоположным (по отношению к частице) знаком заряда. Изменение знака заряда не заметно в (2), так как это соотношение записано для свободных частиц. Но если предположить, что волновая функция электрона с отрицательной энергией удовлетворяет уравнению Дирака с зарядом $-e < 0$ (мы записываем уравнение в ковариантной форме (11.54))

$$\left\{ i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - mc \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3)$$

то зарядово сопряженная функция будет удовлетворять уравнению

$$\left\{ i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - mc \right\} \Psi^*(\mathbf{r}, t) = 0,$$

которое отличается от (3) именно знаком заряда.

2.9.11. Мы полагаем, что нейтрино — нейтральные массивные дираковские частицы. Кроме того, мы считаем, что нейтрино определенного типа (например, электронное или мюонное), или, как принято говорить, определенного аромата, не являются состояниями с определенной массой, а представляют собой суперпозицию таких состояний:

$$\begin{cases} |\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta, \\ |\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta. \end{cases} \quad (1)$$

Состояния $|\nu_{1,2}\rangle$ в (1) удовлетворяют уравнениям Дирака соответственно с массами m_1 и m_2 , а θ — угол смешивания нейтрино.

Эволюция во времени состояний $|\nu_1\rangle$ и $|\nu_2\rangle$ дается выражением

$$|\nu_1(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |\nu_1(0)\rangle, \quad |\nu_2(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |\nu_2(0)\rangle.$$

где $E_{1,2} = \sqrt{p^2 c^2 + m_{1,2}^2 c^4}$. Если в момент $t = 0$ рождается электронное нейтрино, то его состояние эволюционирует во времени следующим образом:

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_{1t}}|\nu_1(0)\rangle + \sin\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2t}}|\nu_2(0)\rangle = \\ &= \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_{1t}}\cos^2\theta + e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2t}}\sin^2\theta\right)|\nu_e(0)\rangle + \\ &\quad + \cos\theta\sin\theta\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_{1t}} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2t}}\right)|\nu_\mu(0)\rangle. \end{aligned}$$

Вероятность того, что нейтрино, родившееся в момент $t = 0$, как электронное, перейдет в момент t в состояние $|\nu_\mu\rangle$, имеет вид

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \langle (\nu_\mu)|\nu_e(t)\rangle^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^2}{2\rho\hbar}t\right].$$

Здесь мы предположили, что $\rho \gg m_{1,2}c$. Вероятность появления нейтрино нового сорта периодически зависит от времени, поэтому такое явление и получило название осцилляций.

2.10. СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТИЦ

2.10.1. Система состоит из двух частиц со спином $1/2$. Одночастичные спиновые функции обозначаем, как и обычно: $\chi_{1/2}(1,2)$ и $\chi_{-1/2}(1,2)$, где индексы 1,2numedуют частицы. Должно выполняться условие

$$\hat{\tau}_{1,2} \chi_{\pm 1/2}(1,2) = \pm \frac{1}{2} \chi_{\pm 1/2}(1,2),$$

где $\hat{\tau}_{1,2}$ — одночастичные спиновые операторы, действующие только на спиновые функции первой или второй частицы. Обозначим искомые функции ψ_{SM} , причем

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{S}}^2 \psi_{SM} = S(S+1)\psi_{SM}, \\ \hat{S}_z \psi_{SM} = M\psi_{SM}. \end{cases}$$

где $\hat{\mathbf{S}} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ — оператор суммарного спина.

Сразу находим общие собственные функции операторов $\hat{\mathbf{S}}^2$ и \hat{S}_z , отвечающие собственным значениям $S = 1$, $M = \pm 1$:

$$\psi_{1,1} = \chi_{1/2}(1)\chi_{1/2}(2), \quad \psi_{1,-1} = \chi_{-1/2}(1)\chi_{-1/2}(2).$$

Применим к функции $\psi_{1,1}$ понижающий оператор $\hat{S}_- = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}$. С учетом правила действия этих операторов получаем

$$\psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{1/2}(1)\chi_{-1/2}(2) + \chi_{-1/2}(1)\chi_{1/2}(2)).$$

Спиновая функция $\psi_{0,0}$ должна иметь вид

$$\psi_{0,0} = A\chi_{1/2}(1)\chi_{-1/2}(2) + B\chi_{-1/2}(1)\chi_{1/2}(2),$$

где коэффициенты A и B находятся из условий ортогональности и нормировки. Окончательно находим

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{1/2}(1)\chi_{-1/2}(2) - \chi_{-1/2}(1)\chi_{1/2}(2)).$$

Спиновые функции ψ_{SM} обладают определенной симметрией по отношению к перестановкам спиновых переменных $1 \leftrightarrow 2$: они симметричны при $S = 1$ и антисимметричны при $S = 0$.

Заметим в этой связи, что для нахождения функций ψ_{SM} можно было бы воспользоваться оператором спинового обмена \hat{P}_{12} (см. задачу 2.10.5). Он действует на спиновые функции следующим образом: $\hat{P}_{12}\psi_{SM}(1,2) = \psi_{SM}(2,1)$, т.е. как раз переставляет спиновые переменные. Оператор \hat{P}_{12} коммутирует с \hat{S}^2 и \hat{S}_z , а поэтому искомые функции должны быть и его собственными функциями: $\hat{P}_{12}\psi_{SM}(1,2) = \lambda\psi_{SM}(1,2)$. Легко видеть, что $\lambda = \pm 1$, а собственные функции должны быть симметричными ($\lambda = 1$) или антисимметричными ($\lambda = -1$). Поэтому можно сразу составить из одиночстичных функций симметричные и антисимметричные комбинации, и тогда останется только определить значения квантовых чисел S и M .

2.10.2. Рассматриваем задачу в представлении, где $\hat{I}_{1,2}^2$ и $\hat{I}_{1,2,z}$ диагональны, индексы 1,2 нумеруют частицы. Пусть $\psi_{l_1, l_2, m_{12}}(1,2)$ — решения одиночстичной задачи. Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \hat{I}_{1,2}\psi_{l_1, l_2, m_{12}}(1,2) = l_{1,2}(l_{1,2}+1)\psi_{l_1, l_2, m_{12}}(1,2), \\ l_{1,2,z}\psi_{l_1, l_2, m_{12}}(1,2) = m_{12}\psi_{l_1, l_2, m_{12}}(1,2), \end{cases}$$

где $l_1 = l_2 = 1$, а m_1 и m_2 пробегают значения $0, \pm 1$. Необходимо найти функции Ψ_{LM} , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{L}}^2\Psi_{LM} = L(L+1)\Psi_{LM}, \\ \hat{L}_z\Psi_{LM} = M\Psi_{LM}, \end{cases}$$

где $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{l}}_1 + \hat{\mathbf{l}}_2$ — оператор суммарного орбитального момента. Всего мы должны получить девять состояний: пять состояний с $L = 2$, три состояния с $L = 1$ и одно — с $L = 0$.

Сразу находим общие собственные функции операторов $\hat{\mathbf{l}}^2$ и \hat{L}_z , отвечающие собственным значениям $L = 2, M = \pm 2$:

$$\Psi_{2,2} = \psi_{1,1}(1)\psi_{1,1}(2), \quad \Psi_{2,-2} = \psi_{1,-1}(1)\psi_{1,-1}(2).$$

Применяем к функции $\Psi_{2,1}$ понижающий оператор $\hat{L}_- = \hat{l}_{1-} + \hat{l}_{2-}$, а к $\Psi_{2,-1}$ — повышающий оператор $\hat{L}_+ = \hat{l}_{1+} + \hat{l}_{2+}$. Учитывая правила действия операторов \hat{L}_\pm , $\hat{l}_{1\pm}$ и $\hat{l}_{2\pm}$, получаем:

$$\Psi_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,0}(1) \psi_{1,1}(2) + \psi_{1,1}(1) \psi_{1,0}(2)),$$

$$\Psi_{2,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,0}(1) \psi_{1,-1}(2) + \psi_{1,-1}(1) \psi_{1,0}(2)).$$

Далее, действуя понижающим оператором \hat{L}_- на $\Psi_{2,1}$, находим

$$\Psi_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_{1,-1}(1) \psi_{1,1}(2) + \psi_{1,1}(1) \psi_{1,-1}(2) + 2\psi_{1,0}(1) \psi_{1,0}(2)).$$

Для построения состояний с моментом $L = 1$ воспользуемся соотношениями ортогональности для коэффициентов Клебша—Гордана (II.56) и (II.57). Вначале выпишем явный вид уже известных коэффициентов:

$$C_{1,0,1,1,1}^{2,+2} = 1, \quad C_{1,1,1,1,0}^{2,\pm 1} = C_{1,0,1,1,1}^{2,\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_{1,1,1,1,-1}^{2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad C_{1,0,1,0}^{2,0} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Далее используем соотношение ортогональности для коэффициентов с $M' = M = 1$, $L' = 2$, $L = 1$. Оно сводится к выражению

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (C_{1+L,1,0}^{1,+1} + C_{1,0,1,+1}^{1,+1}) = 0.$$

Соотношение ортогональности, записанное для коэффициентов со значениями $M' = M = 1$ и $L' = L = 1$, дает просто условие нормировки, поэтому получаем

$$\Psi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,0}(1) \psi_{1,1}(2) - \psi_{1,1}(1) \psi_{1,0}(2)).$$

Функция $\Psi_{1,-1}$ определяется отсюда trivialально и равна

$$\Psi_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,0}(1) \psi_{1,-1}(2) - \psi_{1,-1}(1) \psi_{1,0}(2)).$$

Действуя на функцию $\Psi_{1,1}$ понижающим оператором \hat{L}_- , получим

$$\Psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,-1}(1) \psi_{1,1}(2) - \psi_{1,1}(1) \psi_{1,-1}(2)).$$



Осталось построить последнюю функцию $\Phi_{L,0}$ с $L = 0$. Вновь воспользуемся соотношениями ортогональности для коэффициентов с $M' = M = 0$:

$$\begin{aligned} L' = 2, L = 0: \quad & \frac{1}{\sqrt{6}}(C_{L+1,L-1}^{0,0} + C_{L-1,L+1}^{0,0}) + \frac{2}{\sqrt{6}}C_{L,0,L}^{0,0} = 0, \\ L' = 1, L = 0: \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{L+1,L-1}^{0,0} - C_{L-1,L+1}^{0,0}) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решая систему уравнений (1) и используя условия нормировки, получаем

$$\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_{L-1}(1)\psi_{L+1}(2) + \psi_{L+1}(0)\psi_{L-1}(2) - \psi_{L,0}(1)\psi_{L,0}(2)).$$

Полученные нами функции Ψ_{LM} обладают симметрией по отношению к перестановкам частиц $1 \leftrightarrow 2$: они симметричны при $L = 0, 2$ и антисимметричны при $L = 1$.

2.10.3. Искомые волновые функции должны быть собственными для следующего набора взаимно-коммутирующих операторов: \hat{j}_z^2 , \hat{j}_z , \hat{l}^2 , \hat{s}^2 , где \hat{l} и \hat{s} — орбитальный и спиновый моменты электрона, а $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ — полный момент.

Волновая функция должна быть собственной для оператора проекции полного момента \hat{j}_z , т.е.

$$\hat{j}_z\Psi = \mu_j\Psi. \quad (1)$$

Поскольку $\hat{j}_z = \hat{l}_z + \hat{s}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z$, то, учитывая явный вид матрицы $\hat{\sigma}_z$, получаем, что уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_1 = i\left(m_j - \frac{1}{2}\right)\psi_1, \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_2 = i\left(m_j + \frac{1}{2}\right)\psi_2. \end{cases} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Интегрируя эти уравнения, легко получаем

$$\begin{cases} \psi_1 = f_1(\theta)e^{i(\pi-1)v}, \\ \psi_2 = f_2(\theta)e^{i(\pi+\frac{1}{2})v}. \end{cases} \quad (2)$$

Далее, искомая функция должна быть собственной для оператора \hat{l}^2 , т.е.

$$\hat{l}^2\Psi = l(l+1)\Psi. \quad (3)$$

и это позволяет конкретизировать функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ в (2). Учитывая (3), приходим к выводу о том, что

$$\psi_1 = C_1 Y_l^{(\kappa, -\frac{1}{2})}(\theta, \varphi), \quad \psi_2 = C_2 Y_l^{(\kappa, +\frac{1}{2})}(\theta, \varphi).$$

так $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$ — сферические функции.

Наконец, искомая функция должна быть собственной для оператора \hat{j}^2 .

$$\hat{j}^2 \Psi = j(j+1)\Psi, \quad (4)$$

причем оператор \hat{j}^2 имеет вид

$$\hat{j}^2 = \begin{pmatrix} \hat{P} + l_z + \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & \hat{P} - l_z + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

В результате из соотношения (4) получаем систему уравнений для определения констант C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} \left[(l(l+1) - j(j+1) + m_j + \frac{1}{4})C_1 + \sqrt{l(l+1) - m_j^2 - \frac{1}{4}}C_2 = 0, \right. \\ \left. \sqrt{l(l+1) - m_j^2 - \frac{1}{4}}C_1 + \left[l(l+1) - j(j+1) - m_j + \frac{1}{4} \right]C_2 = 0. \right]$$

Условие совместности для данной системы дает два решения: $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$. Окончательно, определяя из системы C_1 и C_2 , получаем нормированные функции (сферические спиноры) в виде

$$\Psi_{lm}^{(+\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m_j}{2j}} Y_l^{(\kappa, -\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{-m_j}{2j}} Y_l^{(\kappa, +\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) \end{pmatrix};$$

$$\Psi_{lm}^{(-\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{-m_j+1}{2j+2}} Y_l^{(\kappa, -\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l+m_j+1}{2j+2}} Y_l^{(\kappa, +\frac{1}{2})}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

$$2.10.4. \langle lsjm_l | (\bar{1}\bar{s}) | lsjm_l \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right);$$

$$\langle lsjm_l | (\bar{1}\bar{j}) | lsjm_l \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right),$$

$$\langle lsjm_l | (\bar{j}\bar{s}) | lsjm_l \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4} \right).$$

2.10.5. Прежде всего заметим, что оператор $\hat{P}_{12} = (1/2)(I + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2)$ связан с оператором квадрата суммарного спина системы двух частиц со спином $1/2$. В самом деле

$$\hat{S}^2 = (\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 = \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2),$$

откуда легко получить, что

$$\hat{P}_{12} = \frac{1}{2}(I + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2) = \hat{S}^2 - 1 = \begin{cases} 1, & \text{если } S = 1, \\ -1, & \text{если } S = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при действии оператором \hat{P}_{12} на симметричную функцию ($S = 1$) функция умножается на $+1$, а при действии этим оператором на антисимметричную функцию ($S = 0$) последняя умножается на -1 . С учетом симметрии функций такое действие оператора оказывается полностью эквивалентным перестановке частиц $1 \leftrightarrow 2$ (см. также задачу 2.10.1). Как известно, любая функция двух переменных может быть записана в виде суммы симметричной и антисимметричной функций, поэтому действие оператора \hat{P}_{12} на произвольную спиновую функцию двух частиц также будет сводиться к перестановке частиц.

Для того, чтобы доказать формулу $\hat{P}_{12}\hat{\sigma}_1\hat{P}_{12}^{-1} = \hat{\sigma}_2$, заметим, что выполняются соотношения

$$\frac{1}{2}(I + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2)\hat{\sigma}_{1k} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{1k} + \hat{\sigma}_{2k} + i\epsilon_{klj}\hat{\sigma}_{lj}\hat{\sigma}_{2l}),$$

$$\hat{\sigma}_{2k}\frac{1}{2}(I + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2) = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{1k} + \hat{\sigma}_{2k} + i\epsilon_{klj}\hat{\sigma}_{lj}\hat{\sigma}_{1l}).$$

Правые части этих равенств совпадают, что, по существу, и доказывает утверждение задачи.

2.10.6. Одночастичные координатные функции и уровни энергии (задача 2.2.1) имеют вид

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a}x, & 0 < x < a, \\ 0 & x \leq 0, x \geq a, \end{cases} \quad E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad (1)$$

а) Ферми-частицы со спином $1/2$. Полная волновая функция Φ (произведение координатной и спиновой функций) должна быть антисимметричной, поэтому в случае $n_1 \neq n_2$ возможны два варианта:

$$\Psi_{n_1 n_2} = \psi_{n_1}(x_1, x_2) \chi_3(S, M) \quad \text{и} \quad \Psi_{n_1 n_2} = \psi_{n_2}(x_1, x_2) \chi_3(S, M).$$

где ψ_A и ψ_S — антисимметричные и симметричные комбинации одиночных функций (1), χ_A и χ_S — функции системы двух спинов, найденные в задаче 2.10.1. Таким образом, χ_A отвечает значению суммарного спина $S = 0$ (одна функция), а χ_S отвечает состояниям с $S = 1$ (три функции). Энергия состояния двух частиц $E_{\psi_A} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2)$.

В случае $n_1 = n_2 = n$ может реализоваться только симметричная координатная функция ψ_S , поэтому спиновая функция должна быть антисимметричной χ_A , т. е. такому состоянию отвечает значение $S = 0$.

Энергия состояния двух частиц равна $E_{\psi_S} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} n^2$.

Энергия основного состояния N частиц:

$$E = \begin{cases} \frac{\pi^2 \hbar^2}{24ma^2} N(N+1)(N+2), & \text{если } N = 2n, \\ \frac{\pi^2 \hbar^2}{24ma^2} (N+1)(N^2+2N+3), & \text{если } N = 2n+1. \end{cases}$$

б) Бозе-частицы со спином 0. Полная волновая функция (она же — координатная) может быть только симметричной.

$$\Psi_{n_1 n_2} = \psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) + \psi_{n_2}(x_1) \psi_{n_1}(x_2)].$$

Энергия двух частиц: $E_{\psi_S} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2)$.

в) Бозе-частицы со спином 1. Полная волновая функция Ψ (произведение координатной и спиновой функций) должна быть симметричной, поэтому возможны два варианта ($n_1 \neq n_2$):

$$\Psi_{n_1 n_2} = \psi_S(x_1, x_2) \chi_A(S, M) \quad \text{и} \quad \Psi_{n_1 n_2} = \psi_A(x_1, x_2) \chi_S(S, M),$$

где спиновые функции имеют точно такой же вид, как и общие собственные функции операторов \hat{L}^2 и \hat{L}_z из решения задачи 2.10.2. Следовательно, χ_A отвечает значению суммарного спина $S = 1$ (три функции), а χ_S отвечает состояниям с $S = 0, 2$ (шесть функций). Энергия двух частиц: $E_{\psi_A} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2)$.

В случае $n_1 = n_2 = n$ может реализоваться только симметричная координатная функция ψ_S , поэтому спиновая функция должна быть также симметричной χ_S , т. е. такому состоянию отвечают значения $S = 0, 2$.

Энергия основного состояния N частиц для случаев б) и в) одинакова и равна

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^3} N.$$

2.10.7. Спин n -частиц равен нулю, и их общая волновая функция должна быть симметрична по отношению к перестановкам пространственных переменных. В системе центра масс такая перестановка приводит к преобразованию $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, где \mathbf{r} — относительная координата. При данной замене угловая часть волновой функции n -частиц должна умножаться на $(-1)^L$ — четность состояния (L — полный орбитальный момент). Число L должно быть четным, потому что волновая функция симметрична. Поэтому и полный момент ядра \mathbf{B} также должен быть четным. Следовательно, при $J = 1$ распад невозможен.

2.11. ТЕОРИЯ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

2.11.1. Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}, \quad \hat{H}^{(0)} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

причем решение невозмущенной задачи известно (основное состояние атома водорода):

$$E_0^{(0)} = -\frac{e^2}{2a}, \quad \psi^{(0)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

— боровский радиус. Ядро представляет собой равномерно заряженный по объему шар радиуса r_0 , поэтому электростатический потенциал такого ядра равен

$$U(r) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r}, & r \geq r_0, \\ \frac{e^2 r^2}{2r_0^3} - \frac{3e^2}{2r_0}, & 0 < r < r_0. \end{cases}$$

Возмущение определяется отличием потенциала $U(r)$ от жуденовского в области ядра ($r < r_0$), т.е. $\hat{V} = U(r) + e^2/r$. При расчете поправки первого приближения по теории возмущений $E_0^{(1)} = \langle \psi^{(0)} | \hat{V} | \psi^{(0)} \rangle$ можно считать, что $r_0 \sim 10^{-13}$ см $\ll a \sim 10^{-8}$ см. Окончательно получаем

$$E_0^{(1)} = \frac{2e^2 r_0^2}{5a^3} = -\frac{4}{5} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 E_0^{(0)}$$

2.11.2. Пусть атом водорода помещен в однородное электрическое поле $E = \{0, 0, E\}$. Взаимодействие с внешним полем приводит к модификации гамильтонiana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2} - \frac{1}{r} + Er \cos \theta = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}, \quad (1)$$

где мы используем атомную систему единиц $\hbar = m = e = 1$. В формуле (1) E есть отношение напряженности внешнего электрического поля к внутримолекулярному $E_0 = e/a^2 = 5.14 \cdot 10^9$ В/см, поэтому практически всегда $E \ll 1$, т. е. можно использовать теорию возмущений.

Если атом находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi^{(0)}(r) = \phi_{100} = (1/\sqrt{\pi})e^{-r}$, то поправка первого приближения к энергии $E_0^{(1)} = \langle \psi^{(0)} | \hat{V} | \psi^{(0)} \rangle = 0$ в силу сферической симметрии основного состояния и, как следствие, равенства нулю среднего значения дипольного электрического момента.

Для вычисления следующей поправки к энергии (квадратичной по полю) необходимо использовать второй порядок теории возмущений. На классическом языке такая поправка соответствует индуцированному дипольному моменту, возникающему под действием того же поля. В этом случае поправка к энергии будет иметь вид

$$E_0^{(2)} = -\frac{1}{2}\alpha E^2, \quad \text{где } \alpha = -\frac{\partial^2 E_0^{(1)}}{\partial E^2} \quad (2)$$

— поляризуемость атома.

Поправку к энергии во втором приближении теории возмущений можно выразить через поправку первого приближения к волновой функции $\psi^{(1)}$ при помощи известного соотношения

$$E_0^{(2)} = \langle \psi^{(1)} | \hat{V} | \psi^{(0)} \rangle = \int \psi^{(1)}(\mathbf{r}) E r \cos \theta \psi^{(0)}(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (3)$$

Функция $\psi^{(1)}$ должна удовлетворять уравнению первого приближения теории возмущений:

$$(\hat{H}^{(0)} - E^{(0)}) \psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\hat{V} \psi^{(0)}(\mathbf{r}).$$

Конкретизируем данное уравнение, получим

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\right) \psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{Er \cos \theta}{\sqrt{\pi}} e^{-r} = -\frac{2}{\sqrt{3}} Er e^{-r} Y_1^{(0)}(\theta, \varphi),$$

где $Y_1^{(0)}(\theta, \varphi) = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$. Предполагая, что исходная функция имеет вид $\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = f(r) e^{-r} Y_1^{(0)}(\theta, \varphi)$, где $f(r) = a + br + cr^2$, подставляем ее в уравнение и, определяя коэффициенты, находим окончательно

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{2E}{\sqrt{3}} r \left(1 + \frac{r}{2}\right) e^{-r} Y_1^{(0)}(\theta, \varphi).$$

Вычисляя интеграл (3), получаем

$$E_0^{(2)} = -\frac{4}{3} \mathcal{E}^2 \int_0^\infty r^4 \left(1 + \frac{r}{2}\right) e^{-2r} dr = -\frac{9}{4} \mathcal{E}^2.$$

Следовательно, с учетом (2) полипозиционность атома равна $\alpha = 9/2$ или, в обычной системе единиц, $\alpha = (9/2)a^3$.

2.11.3. Гамильтониан имеет в точности такой же вид, как и в задаче 2.11.2 (формула (1)). Взаимодействие с электрическим полем по-прежнему описывается по теории возмущений, и используется атомная система единиц $\hbar = m = e = 1$.

Атом водорода находится в возбужденном состоянии с $n = 2$. В этом случае энергетические поправки оказываются пропорциональны первой степени \mathcal{E} — имеет место линейный эффект Штерка. Причиной этого является «случайное» вырождение уровней энергии, благодаря которому возбужденные состояния не обладают определенной четностью, и у атома появляется отличный от нуля средний дипольный электрический момент.

Для невозмущенной задачи $n = 2$, поэтому $E_2^{(0)} = -Z^2/8$, причем данный уровень энергии вырожден с кратностью $n^2 = 4$, поэтому необходимо применять теорию возмущений для вырожденных уровней энергии. Итак, в невозмущенной задаче уровни $E_2^{(0)}$ отвечают четыре собственные функции гамильтониана $\hat{H}^{(0)}$,

$$\psi_{200} = R_{20}(r) Y_0^{(0)}(\theta, \varphi), \quad \psi_{210} = R_{21}(r) Y_1^{(0)}(\theta, \varphi),$$

$$\psi_{21\pm1} = R_{21}(r) Y_1^{(\pm1)}(\theta, \varphi),$$

где в явном виде

$$R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{1/2} e^{-\frac{Zr}{2}} 2 \left(1 - \frac{Zr}{2}\right), \quad R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{2}} \frac{Zr}{\sqrt{3}},$$

$$Y_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^{(\pm1)} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}.$$

Вычисления показывают, что отличны от нуля лишь следующие матричные элементы оператора возмущения:

$$\langle \psi_{200} | \hat{V} | \psi_{210} \rangle = \langle \psi_{210} | \hat{V} | \psi_{200} \rangle = -3 \frac{\mathcal{E}}{Z}.$$

Решая секулярное уравнение, получаем поправки к уровню энергии $E_2^{(0)}$:

$$E_{14}^{(1)} = \mp 3 \frac{\mathcal{E}}{Z}, \quad E_{23}^{(1)} = 0.$$

Таким образом, исходный уровень энергии $E_2^{(0)}$ под действием электрического поля расщепляется на три уровня с энергиями

$$E_{1,3} = E_2^{(0)} \pm E_{1,4}^{(1)} = E_2^{(0)} \mp 3 \frac{e}{Z}, \quad E_2 = E_2^{(0)}.$$

Уровню энергии E_1 отвечает состояние (правильная функция нулевого приближения) $\phi_1 = (1/\sqrt{2})(\psi_{200} + \psi_{210})$, уровню E_3 соответствует состояние $\phi_3 = (1/\sqrt{2})(\psi_{200} - \psi_{210})$, а уровни E_2 двукратно выражены — ему отвечают две линейно независимые функции: ψ_{211} и $\psi_{21,-1}$.

2.11.4. Ядро атома водорода (протон) обладает собственным магнитным моментом μ_p . Взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным полем ядра приводит к расщеплению атомных уровней по значению полного углового момента атома. Поскольку значение ядерного магнитного момента примерно в 10^3 раз меньше, чем значение орбитального магнитного момента электрона, то и соответствующее расщепление примерно в 10^3 раз меньше, чем расщепление тонкой структуры (см. задачу 2.11.7). Поэтому такое расщепление называют сверхтонким расщеплением.

Гамильтониан сверхтонкого взаимодействия имеет вид

$$\hat{V}^{(8)} = -(\bar{\mu} \mathcal{H}_s),$$

где введены обозначения:

$$\bar{\mu} = -\mu_0 \hat{\sigma} = -\frac{ie\hbar}{2mc} \hat{\sigma}, \quad \mathcal{H}_s = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = -[\mu_p \times \nabla] \frac{1}{r}.$$

$\hat{\mu}_p = \mu_p \hat{\sigma}_p$ — оператор магнитного момента протона, μ_0 — магнетон Бора. Таким образом,

$$\hat{V}^{(8)} = -\mu_0 \mu_p \hat{\sigma} [\nabla \times (\hat{\sigma}_p \times \nabla)] \frac{1}{r} = -\mu_0 \mu_p \hat{\sigma} [\hat{\sigma}_p \Delta - (\hat{\sigma}_p \nabla) \nabla] \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Расчет ведем далее по теории возмущений, оператором Гамилтона невозмущенной задачи является гамильтониан атома водорода $\hat{H}^{(0)} = -\hat{p}^2/(2m) - e^2/r$, в волновых функциях нулевого приближения пространственные переменные отделены от спиновых $\psi^{(0)}(\mathbf{r}, s, s_p) = \psi_{100}(\mathbf{r}) \times \chi(s, s_p)$, $\psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-r/a}$ — координатная волновая функция основного состояния атома водорода, $a = \hbar^2/(me^2)$ — боровский радиус. Поправка к энергии, связанная со взаимодействием (1), равна

$$E_{\text{cor}}^{(1)} = \int d^3x \chi^* \psi_{100}^*(\mathbf{r}) \hat{V}^{(8)} \psi_{100}(\mathbf{r}) \chi. \quad (2)$$

Для основного состояния вследствие сферической симметрии координатной части волновой функции взятие интеграла по угловым переменным в (2) дает усредненный по направлениям гамильтониан (1), в котором нужно заменить оператор $\nabla/\nabla_r \rightarrow (1/3)\delta_0\Delta$. В результате (1) сводится к

$$E_{\text{пр}}^{(1)} = \frac{8\pi}{3}\mu_0\mu_p|\psi_{100}(0)|^2\chi^\dagger(\hat{\sigma}\hat{\sigma}_p)\chi. \quad (3)$$

Здесь мы учли, что $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(r)$, см. также (Д.12).

Поскольку $(\hat{\sigma}\hat{\sigma}_p) = 2\hat{S}^2 - 3\cdot 1$, то правильными функциями нулевого приближения будут собственные функции оператора квадрата суммарного спина $\hat{S} = (1/2)(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_p)$ (т.е. ψ_{100} , см. задачу 2.10.1). С учетом того, что $|\psi_{100}(0)|^2 = (\pi a^3)^{-1}$, из выражения (3) получим

$$E_{\text{пр}}^{(1)} = \frac{8}{3}\mu_0\mu_p \frac{1}{a^3}(2S(S+1)-3) = \begin{cases} \frac{8\mu_0\mu_p}{3a^3}, & S=1, \\ -\frac{8\mu_0\mu_p}{a^3}, & S=0. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, исходный уровень энергии расщепляется на два в соответствии со значением суммарного спина электрона и протона, причем один из этих уровней трехкратно вырожден по проекции суммарного спина ($S=1, M=0, \pm 1$), а второй уровень — невырожденный ($S=0$).

Подставляя численные значения величин, находим частоту перехода:

$$\Delta\nu_{\text{спр}} = \frac{E_{S=1} - E_{S=0}}{\hbar} = 1417 \text{ МГц}.$$

Данное теоретическое значение отличается от экспериментально измеренного $\Delta\nu_{\text{спр}} = 1420 \text{ МГц}$. Причина расхождения результатов состоит в том, что в действительности магнитный момент электрона не равен в точности магнетону Бора μ_0 , а отличается от него на величину $\Delta\mu_0$, называемую аномальным магнитным моментом.

2.11.5. В задаче рассматривается эффект Зеемана для основного состояния атома водорода с учетом его сверхтонкой структуры.

Атом водорода, находящийся в основном состоянии, помещен в однородное магнитное поле $\mathcal{H} = \{0, 0, \mathcal{H}\}$. После проведения стандартных преобразований гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}^{\text{ат}} + \hbar\Omega(\hat{l}_z + 2\hat{s}_z), \quad (1)$$

где $\hat{V}^{\text{ат}}$ — гамильтониан сверхтонкого взаимодействия (формула (1) задачи 2.11.4), $\Omega = e\mathcal{H}/(2mc)$ — ларморова частота, \hat{l}_z и \hat{s}_z — операторы проекции орбитального момента и спина электрона на ось z . Мы

пренебрегли в (1) квадратичным по полю Э членом, считая его вклад в поправку к энергии малым по сравнению с линейным. Это можно сделать при $\mathcal{E} \ll 10^9$ Гц.

В качестве оператора возмущения выберем $\hat{V}_{\text{Э}} = \hbar\Omega(\hat{l}_x + 2\hat{s}_z)$. Гамильтониан невозмущенной задачи $\hat{H}^{(0)}$ включает сверхтонкое взаимодействие $\hat{V}_{\text{Э}}^{(0)}$, поэтому в нулевом приближении мы имеем два уровня с энергиями $E_0 = \Delta E_{0,1}$. Здесь $E_0 = -e^2/(2a)$ — энергия основного состояния атома водорода, $\Delta E_{0,1}$ — поправки сверхтонкой структуры (см. задачу 2.11.4) — соответственно для состояний с суммарным спином $S = 0$ и $S = 1$. Волновые функции невозмущенной задачи имеют вид $\psi^{(0)} = \psi_{00}(\mathbf{r})\phi_M$, где $\psi_{00}(\mathbf{r})$ — координатная волновая функция основного состояния атома водорода, ϕ_M — спиновые функции электрона и протона (задачи 2.10.1 и 2.11.4).

Поскольку $\langle \psi_{00} | \hat{l}_x | \psi_{00} \rangle = 0$, то вся содержательная часть будет касаться вычислений со спиновыми функциями. Обозначим состояния следующим образом: $|1\rangle = |\psi_{00}\rangle$, $|2\rangle = |\psi_{10}\rangle$, $|3\rangle = |\psi_{11}\rangle$, $|4\rangle = |\psi_{-1}\rangle$ и заметим, что последние три состояния относятся к трехкратно вырожденному уровню с $S = 1$, а состояние $|1\rangle$ — к невырожденному уровню с $S = 0$. Отличные от нуля матричные элементы оператора возмущения равны

$$\langle 1 | \hat{V}_{\text{Э}} | 2 \rangle = \langle 2 | \hat{V}_{\text{Э}} | 1 \rangle = \langle 3 | \hat{V}_{\text{Э}} | 3 \rangle = -\langle 4 | \hat{V}_{\text{Э}} | 4 \rangle = \hbar\Omega. \quad (2)$$

Учитывая малость сверхтонкого расщепления, мы можем считать невозмущенные уровни энергии близкими. Поэтому, записывая секулярное уравнение, включим в него наряду с матричными элементами (2) также и сверхтонкие поправки ΔE_0 :

$$\begin{vmatrix} \Delta E_0 - E^{(0)} & \hbar\Omega & 0 & 0 \\ \hbar\Omega & \Delta E_1 - E^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta E_1 + \hbar\Omega - E^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta E_1 - \hbar\Omega - E^{(0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Из секулярного уравнения получаем

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left\{ (\Delta E_0 + \Delta E_1) \mp \sqrt{(\Delta E_1 - \Delta E_0)^2 + 4(\hbar\Omega)^2} \right\}, \\ E_{3,4}^{(0)} &= \Delta E_1 \pm \hbar\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Проведем анализ результатов. Во-первых, состояния $|3\rangle = |\psi_{11}\rangle$ и $|4\rangle = |\psi_{-1}\rangle$, относящиеся к уровню сверхтонкой структуры с $S = 1$, получают линейные по полю поправки $\pm \hbar\Omega$. Тем самым снимается вы-

рождение по проекции суммарного спина M , уровень энергии с $S = 1$ расщепляется на три уровня.

В слабом поле, когда вклад магнитного поля много меньше вклада сверхтонкого взаимодействия ($\hbar\Omega \ll \Delta E_{\text{свт}} = \Delta E_1 - \Delta E_0$, это справедливо для $H \ll 10^3$ Гц), поправки получают также состояния $|1\rangle = |\psi_{00}\rangle$ и $|2\rangle = |\psi_{10}\rangle$. Эти состояния относятся к разным уровням сверхтонкой структуры: $S = 0$ и $S = 1$, но они отвечают одному и тому же значению проекции суммарного спина $M = 0$ (рис. 2.12). Данные поправки квадратичны по полю:

$$E_{1,2}^{\text{Д}} \approx \Delta E_{01} \pm \frac{(\hbar\Omega)^2}{\Delta E_1 - \Delta E_0}$$

но ввиду наличия малого знаменателя $\Delta E_1 - \Delta E_0$ (малости сверхтонкого расщепления) вклад этих поправок может быть существенно больше, чем вклад отброшенного квадратичного по 26 членов в гамильтониане.

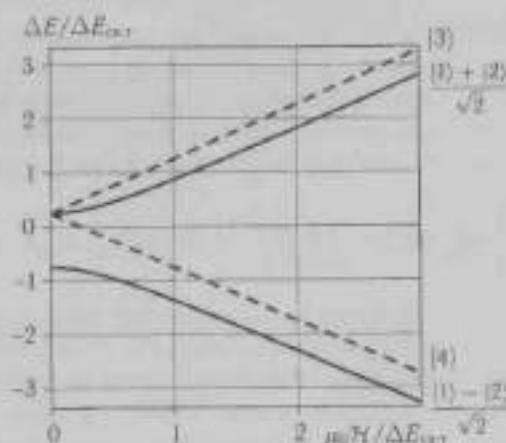


Рис. 2.12. Эффект Зеемана с учетом сверхтонкой структуры для основного состояния атома водорода ($\mu_0 H = \hbar\Omega$, $\Delta E_{\text{свт}} = \Delta E_1 - \Delta E_0$)

В сильном поле, когда $\hbar\Omega \gg \Delta E_1 - \Delta E_0$, поправки, относящиеся к состояниям $|1\rangle$ и $|2\rangle$, равны

$$E_{1,2}^{\text{Д}} \approx \mp \hbar\Omega, \quad (4)$$

а правильные функции

$$\tilde{\psi}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{00} \mp \psi_{10})$$

описывают состояния, которые характеризуются значениями проекций электронного и протонного спина на направление магнитного поля по отдельности.

Заметим, что в данном приближении состояния |3⟩ и |4⟩ получают поправки

$$E_{3,4}^{(0)} \approx \pm M\Omega, \quad (5)$$

и при этом в состояниях |3⟩ = |ψ_1⟩ и |4⟩ = |ψ_{-1}⟩ проекции электронного и протонного спина на ось z также имеют определенные значения (как и в состояниях |ψ_{1,2}⟩).

Это и понятно, ибо в случае сильного поля можно включить учет взаимодействия с полем, а затем, повторно применяв теорию возмущений, — сверхтонкое взаимодействие. Взаимодействие с магнитным полем в (1) влияет только на проекцию спина электрона и не затрагивает спин протона. Поэтому, сопоставляя (4) и (5), мы видим, что в сильном поле (до учета сверхтонкого взаимодействия) мы имеем два двукратно вырожденных (по значениям проекции спина протона) уровня энергии, отличающиеся поправками $E_{1,2}^{(0)} = E_{4,3}^{(0)} \approx \pm M\Omega$.

2.31.6. Гамильтониан атома водорода с учетом релятивистских и спиновых поправок приведен в решении задачи 2.9.7, см. формулу (11). Поправки содержат оператор спин-орбитального взаимодействия, который с учетом $U(r) = -Ze^2/r$ может быть записан в виде

$$\hat{V}^{(0)} = \frac{e^2 \hbar^2 (\vec{s}\vec{l})}{2m^2 c^3 r^3} = A(r)(\vec{s}\vec{l}),$$

где \vec{l} и \vec{s} — операторы орбитального и спинового моментов электрона.

Правильные функции нулевого приближения должны быть собственными функциями операторов, являющихся точными интегралами движения (т. е. коммутирующих не только с $\hat{H}^{(0)} = \vec{p}^2/(2m) - e^2/r$, но и с $\hat{V}^{(0)}$, играющим роль оператора возмущения). Стандартные решения уравнения Шредингера, пропорциональные сферическим функциям $\psi_{nlm}(r) = R_{nl}(r)Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$, не подходят для наших целей, ибо эти функции являются собственными для оператора \vec{l}_z , а данный оператор, как легко проверить, не коммутирует с $\hat{V}^{(0)}$: $[\hat{V}^{(0)}, \vec{l}_z] \neq 0$.

Однако оказывается, что $[(\vec{s}\vec{l}), \vec{l}_z] = 0$, т. е. точным интегралом движения является проекция на ось z полного углового момента $\vec{j}_z = \vec{l}_z + \vec{s}_z$. Это значит, что искомые функции должны быть общими собственными функциями для полного набора наблюдаемых $\hat{H}^{(0)}, \vec{l}^2, \vec{s}^2, \vec{P}, \vec{j}_z$, к которому можно перейти от стандартного набора $\hat{H}^{(0)}, \vec{l}^2, \vec{s}^2, \vec{s}_z, \vec{l}_z$. Эти два набора эквивалентны, ибо по сути данный переход есть не что иное, как задача сложения моментов: $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$.

Итак, правильный вектор состояния атома водорода должен определяться следующими квантовыми числами: $|nlm_l\rangle$, где мы опустили квантовое число s , потому что оно всегда имеет значение $s = 1/2$. В координатном представлении этим векторам отвечают функции, найденные в решении задачи 2.10.3. Воспользуемся результатами данной задачи и конкретизируем их для $n = 2$.

Для $n = 2$ имеется восемь состояний, из которых в двух состояниях орбитальный момент равен нулю. Поэтому волновые функции этих состояний можно записать в виде

$$\Psi_{2,0,+1/2}^{(1/2)}(\mathbf{r}) = R_{20}(r) \begin{pmatrix} Y_0^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{2,0,-1/2}^{(1/2)}(\mathbf{r}) = R_{20}(r) \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Соответствующие векторы состояний имеют вид

$$|2, 0, 1/2, +1/2\rangle = |2, 0, 0\rangle |\pm\rangle,$$

где $|\pm\rangle$ — собственные векторы оператора \hat{s}_z , а в представлении, где \hat{s}_z диагонален, им соответствуют функции $\lambda_{\pm 1/2}$ (П.26).

Для значения орбитального квантового числа $l = 1$ возможны два состояния с полным моментом $j = 1/2$ и четыре состояния с $j = 3/2$. Используя общие результаты задачи 2.10.3, получаем

$$\Psi_{2,1,+1/2}^{(1/2)}(\mathbf{r}) = R_{21}(r) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{(0)} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{(0)} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{2,1,-1/2}^{(1/2)}(\mathbf{r}) = R_{21}(r) \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(-1)} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{(0)} \end{pmatrix},$$

или в виде векторов состояний:

$$|2, 1, 1/2, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}|2, 1, +1\rangle |-\rangle - |2, 1, 0\rangle |+\rangle),$$

$$|2, 1, 1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|2, 1, 0\rangle |-\rangle + \sqrt{2}|2, 1, -1\rangle |+\rangle).$$

Соответственно для полного момента $j = 3/2$ мы должны записать четыре состояния. Выпишем только два состояния с положительными проекциями полного момента (остальные два легко написать самостоятельно):

$$\Psi_{2,1,+3/2}^{(3/2)}(\mathbf{r}) = R_{21}(r) \begin{pmatrix} Y_1^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{2,1,+1/2}^{(3/2)}(\mathbf{r}) = R_{21}(r) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(0)} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{(1)} \end{pmatrix},$$

или в виде векторов состояний:

$$|2, 1, 3/2, +3/2\rangle = |2, 1, +1\rangle |+\rangle,$$

$$|2, 1, 3/2, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}|2, 1, 0\rangle |+\rangle + |2, 1, +1\rangle |-\rangle).$$

2.11.7. Указание: Провести расчет по теории возмущений, положив в основу гамильтониан Дирака для кулоновского поля в нерелятивистском приближении (задача 2.9.7). В качестве гамильтониана невозмущенной задачи $\hat{H}^{(0)}$ использовать нерелятивистский гамильтониан атома водорода, возмущение V должно включать релятивистскую поправку, спин-орбитальное взаимодействие и контактное взаимодействие. В качестве правильных функций невозмущенной задачи выбрать функции, собственные для следующего набора коммутирующих операторов: $\hat{P}, \hat{s}^2, \hat{J}_z^2, \hat{j}_z$, где $j = l + \frac{1}{2}$ — полный угловой момент электрона, см. задачу 2.10.3.

Уровни энергии атома водорода с учетом релятивистских поправок:

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2} \left(\frac{\pi^2}{a} \right) \left\{ 1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left[\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right] \right\},$$

где $n = 1, 2, \dots$ — главное квантовое число, $j = l \pm 1/2$ — внутреннее квантовое число (формула Заммерфельда).

2.11.8. Приводим ответы, в электронных конфигурациях указаны только электроны на незаполненных оболочках.

Атом	Конфигурации	Возможные термы	Нормальный терм
${}_{1s}\text{Si}$	$3s^2 3p^1$	$^1S_0, ^1D_2, ^3P_0, ^3P_1, ^3P_2$	3P_2
${}_{1s}\text{P}$	$3s^2 3p^1$	$^1S_{1/2}, ^3P_{1/2}, ^3P_{3/2}, ^3D_{3/2}, ^3D_{5/2}$	$^3S_{1/2}$
${}_{1s}\text{S}$	$3s^2 3p^6$	$^1S_0, ^3D_3, ^3P_0, ^3P_1, ^3P_2$	3P_1
${}_{2s}\text{V}$	$3d^1 4s^2$		$^3F_{3/2}$
${}_{2s}\text{Co}$	$3d^7 4s^2$		$^3F_{5/2}$
${}_{2s}\text{Ce}$	$4f^7 5d^6 6s^2$		$^1G_6(^2H_4)$

Элемент Се представляет собой одно из немногих исключений из правила Хунда. В скобках записан терм, определенный согласно правилу Хунда (отличающийся от истинного).

2.11.9. При исследовании взаимодействий составных частиц таких, как атомы, с другими атомами или ионами можно использовать теорию возмущений, рассматривая изолированный атом или ион (или другой атом), как невозмущенную систему, а потенциальную энергию их электростатического взаимодействия — как оператор возмущения. Поскольку скорости относительного движения атомов невелики, мы можем считать, что ядра атомов (ионов) покоятся (приближение Борна-Оппенгеймера).

Считая, что составные частицы находятся на большом расстоянии друг от друга по сравнению с их размерами ($r_a \ll R$), найдем энергию



их электрического взаимодействия в виде разложения по степеням $1/R$. Первый неисчезающий член такого разложения (в силу электронейтральности атома) дает оператор возмущения нашей задачи (см. также (1.29)):

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{d}}$ — дипольный момент атома, \mathbf{E} — внешнее электрическое поле (при $r_a \ll R$ его можно считать приблизительно однородным на расстояниях $\sim r_a$).

Искомый потенциал взаимодействия получается в результате расчета по теории возмущений с оператором возмущения (1) и волновыми функциями, описывавшими состояние изолированного атома (иона).

а) Атом + ион. В этом случае $\mathbf{E} = Ze\mathbf{R}/R^3$ (поле иона на больших расстояниях, Ze — заряд иона), оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V} = -\frac{Ze}{R^3}(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{R}) = -\frac{Ze}{R^3}\hat{\mathbf{d}}_z, \quad (\hat{\mathbf{d}}_z = \sum_a e_a z_a),$$

если считать, что $\mathbf{R} \parallel \hat{\mathbf{d}}_z$. Поправка первого приближения теории возмущений $E^{(1)} = \langle \psi^{(0)} | \hat{V} | \psi^{(0)} \rangle = 0$ в силу сферической симметрии S -состояний. Во втором порядке теории возмущений имеем

$$E^{(2)} = \sum_{n,m \neq 0} \frac{|(00|\hat{V}|nm)|^2}{E_{00}^{(0)} - E_{nm}^{(0)}}, \quad (2)$$

где индексы 00 относятся к S -состояниям атома и иона (как наименее по энергии), индексы n, m нумеруют их возбужденные состояния. Из формулы (2) ясно, что $E^{(2)} < 0$, а также $E^{(2)} \sim 1/R^6$, и в итоге получаем общее выражение для потенциала взаимодействия в виде

$$U(R) = E^{(2)} = -\frac{C}{R^6}, \quad \text{где } C = \text{const}.$$

Взаимодействие такого типа называется полюляционным.

б) Атом + атом. В этом случае, учитывая, что напряженность электрического поля для атома с дипольным моментом $\hat{\mathbf{d}}$ имеет вид $\mathbf{E} = [3(\hat{\mathbf{d}}_z \mathbf{n} - \hat{\mathbf{d}}_z) \mathbf{n}] / R^3$, где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, из (1) получаем оператор возмущения

$$\hat{V} = \frac{(\hat{\mathbf{d}}_z \hat{\mathbf{d}}_z) - 3(\hat{\mathbf{d}}_z \mathbf{n})(\hat{\mathbf{d}}_z \mathbf{n})}{R^3} = \frac{1}{R^3}(\hat{d}_{z1}\hat{d}_{z2} + \hat{d}_{y1}\hat{d}_{y2} - 2\hat{d}_{x1}\hat{d}_{x2}),$$

(см. задачу 1.6.7). Аналогично п. а) имеем $E^{(1)} = 0$, а вычисление поправок второго приближения дает

$$U(R) = -\frac{C}{R^6}, \quad \text{где } C = \text{const}.$$

Именно такой зависимостью энергии от расстояния характеризуются силы притяжения Ван-дер-Ваальса.

2.11.10. Гамильтониан атома, находящегося в однородном магнитном поле \mathcal{H} , имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_i \left(\hat{\mathbf{p}}_i + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \right)^2 + U + \frac{e\hbar}{mc} \mathcal{H} \hat{\mathbf{S}},$$

где $-e < 0$ — заряд электрона, суммирование производится по всем электронам атома, U — энергия взаимодействия электронов с ядром и друг с другом, $\hat{\mathbf{S}} = \sum_a \hat{\mathbf{s}}_a$ — оператор суммарного спина электронов. Проводя стандартные преобразования (в частности, выбирая вектор-потенциал в виде $\mathbf{A}_0 = (1/2)[\mathcal{H} \times \mathbf{r}_0]$), получим

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) + \frac{e^2}{8mc^2} \sum_a [\mathcal{H} \times \mathbf{r}_a]^2, \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{L}}$ — полный орбитальный момент атома, \hat{H}_0 — гамильтониан атома в отсутствие поля (см. (II.61), (II.62)).

Имея в виду дальнейшее рассмотрение задачи по теории возмущений, сделаем ряд приближений. Во-первых, отбросим в (1) член, квадратичный по нараженности поля \mathcal{H} , считая, что в достаточно слабом поле он вносит малый вклад в решение по сравнению с линейным по \mathcal{H} слагаемым. Далее, полагая, что поле направлено по оси z , получим $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{3\mathcal{H}}$, где $\hat{V}_{3\mathcal{H}} = M(\hat{\mathbf{L}}_z + 2\hat{\mathbf{S}}_z)$ — оператор взаимодействия с магнитным полем, $M = e\mathcal{H}/(2mc)$ — ларморовская частота.

а) Слабое поле. В этом приближении считается, что поправка, связанная с магнитным полем, т. е. $\Delta E_{3\mathcal{H}}$, гораздо меньше тонкого расщепления уровней $\Delta E_{\text{тон}}$ ¹¹, и поэтому можно применить теорию возмущений к каждому уровню тонкой структуры. При этом оператором возмущения является $\hat{V}_{3\mathcal{H}}$, а невозмущенные уровни — это уровни энергии атома с учетом расщепления тонкой структуры, характеризующиеся определенными значениями квантовых чисел L, S, J (т. е. собственными значениями операторов $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{\mathbf{J}}^2$, где $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$). Правильными векторами нулевого приближения в этом случае являются $|L, S, J, M_J\rangle$ (собственные векторы для операторов $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z$). Расчет в первом порядке теории возмущений дает

$$\Delta E_{3\mathcal{H}}^{(1)} = M g M_J, \quad \text{где } g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2(J+1)}$$

есть так называемый фактор Ланде. Отсюда следует, что магнитное поле полностью снимает вырождение по магнитному квантовому числу M_J , каждый уровень тонкой структуры расщепляется на $2J+1$ подуровней.

¹¹ Это будет справедливо при $\mathcal{H} \ll 10^5$ Гц.

Конкретно для атома натрия находим, что уровень $^2P_{3/2}$ расщепляется на четыре компонента:

$$\Delta E_{^2P_{3/2}}^{(1)} = \frac{4}{3} \hbar \Omega M_J, \quad M_J = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}.$$

а каждый из уровней $^2P_{1/2}$ и $^2S_{1/2}$ расщепляется на две компоненты:

$$\Delta E_{^2P_{1/2}}^{(1)} = \frac{2}{3} \hbar \Omega M_J, \quad M_J = \pm \frac{1}{2},$$

$$\Delta E_{^2S_{1/2}}^{(1)} = 2 \hbar \Omega M_J, \quad M_J = \pm \frac{1}{2}.$$

Спектр наблюдаемых частот, в соответствии с правилом Бора, имеет вид

$$\omega = \frac{E_2^{(m)} - E_1^{(n)}}{\hbar} + \Omega(g_2 M_J - g_1 M_L) = \omega_0 + \Delta\omega, \quad (2)$$

причем здесь необходимо учитывать правила отбора для дипольного электрического излучения

$$\Delta J = 0, \pm 1, \quad \Delta M_J = 0, \pm 1, \quad \Delta L = \pm 1, \quad \Delta S = 0.$$

Применив эти правила, видим, что вместо линии $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ в магнитном поле возникают шесть переходов с частотами (см. (2)) $\Delta\omega = \pm\Omega$, $\pm(1/3)\Omega$, $\pm(5/3)\Omega$, а вместо линии $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ — четыре перехода с частотами $\Delta\omega = \pm(2/3)\Omega$, $\pm(4/3)\Omega$. Таким образом, в слабом магнитном поле вместо резонансного дублета наблюдается спектр, состоящий из 10 близких спектральных линий (аномальный или сложный эффект Зеемана).

б) Сильное поле. В данном случае считается, что $\Delta E_{\text{вн}} \gg \Delta E_{\text{маг}}$, т. е. расщепление в магнитном поле велико по сравнению с интервалами тонкой структуры, но по-прежнему настолько мало, что можно пренебречь квадратичным членом в (1). При этом также можно применить теорию возмущений, но необходимо сначала учесть влияние магнитного поля, а затем (если нужно) — спин-орбитальное взаимодействие, ответственное за тонкую структуру.

Правильными векторами нулевого приближения в данном случае являются $[L, S, M_L, M_S]$, т. е. общие собственные векторы для операторов $\hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z$. В первом приближении теории возмущений получаем поправку к энергии:

$$\Delta E_{\text{вн}}^{(1)} = \hbar \Omega (M_L + 2M_S)$$

и наблюдаемые частоты (с учетом правила отбора $\Delta M_S = 0$)

$$\omega = \omega_0 + \Omega \Delta M_J, \quad \Delta M_J = 0, \pm 1.$$

Таким образом, в сильном поле наблюдается тройной спектральных линий $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$ (простой или нормализованный эффект Зеемана).

В случае кадмия термы $|D\rangle$ и $|P\rangle$ являются синглетными, т.е. для них $S = 0, J = L$ и, следовательно, $g = 1$. Поэтому независимо от величины напряженности магнитного поля будет наблюдаться простой эффект Зеемана.

2.11.11. Параметры функции $\psi(\mathbf{r})$, выбранной для применения вариационного метода, определяются, исходя из того, чтобы вычисленное при помощи этой функции среднее значение гамильтонiana

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \hat{H} \psi(\mathbf{r}) d^3 r, \quad \text{где } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r},$$

имело бы минимум при условии, что функция $\psi(\mathbf{r})$ является нормированной. Вычислив интегралы и находя минимумы для средних значений гамильтонiana ($\langle \hat{H} \rangle$), получаем:

$$\text{случай а) } a = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad \langle \hat{H} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \quad (\text{точное решение});$$

$$\text{случай б) } b = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{e^2}{me^2}, \quad \langle \hat{H} \rangle = -\frac{4}{3\pi} \frac{me^4}{\hbar^2} \approx -\frac{1}{2,36} \frac{me^4}{\hbar^2}.$$

2.11.12. Гамильтониан атома гелия, записанный в атомной системе единиц, имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}}, \quad (1)$$

где $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. В выражении (1) первые два слагаемых описывают кинетическую энергию электронов, третье и четвертое слагаемые — притяжение электронов к ядру (для гелия $Z = 2$) и последнее слагаемое описывает кулоновское отталкивание электронов.

Первая часть задачи предполагает минимизацию среднего значения гамильтониана (1), найденного при помощи пробной функции $\psi \sim \exp[-Z'(r_1 + r_2)]$, и нахождение значения вариационного параметра Z' . Нормируем пробную функцию и получаем

$$\psi = \frac{Z'^3}{\pi} e^{-Z'(r_1 + r_2)}.$$

При вычислении среднего значения гамильтониана ($\langle \hat{H} \rangle$) нам встретится интегралы

$$\left\langle \frac{1}{r_1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r_2} \right\rangle = Z'. \quad (2)$$

по поводу их вычисления — см. задачу 2.6.4, а также интеграл

$$\left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle = \left(\frac{Z'^3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \int dr_1 dr_2 \frac{dr_1^2 d\Omega_1 d\Omega_2 e^{-Z'(r_1 + r_2)}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}} \quad (3)$$

В интеграле (3) зафиксируем вначале значение r_1 и промитегрируем по угловым переменным, относящимся к r_2 , совместив ось z с направлением вектора r_1 . В результате получим

$$2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}} = \begin{cases} \frac{4\pi}{r_1}, & r_1 > r_2, \\ \frac{4\pi}{r_2}, & r_2 > r_1. \end{cases}$$

С учетом данного результата приводим интеграл (3) к виду

$$\left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle = (4Z'^2)^2 \left\{ \int_0^\infty r_1 e^{-2Z' r_1} dr_1 \int_0^\infty r_2^2 e^{-2Z' r_2} dr_2 + \right. \\ \left. + \int_0^\infty r_2 e^{-2Z' r_2} dr_2 \int_0^\infty r_1^2 e^{-2Z' r_1} dr_1 \right\} = Z' \left(2 - \frac{11}{8} \right) = \frac{5}{8} Z'. \quad (4)$$

Собирая далее результаты (2) и (4), получаем для среднего значения $\langle \hat{H} \rangle$ следующее выражение:

$$\langle \hat{H} \rangle = -2ZZ' + \frac{5}{8} Z' + Z'^2,$$

где мы учли, что $-(\Delta_1) = -(\Delta_2) = Z'^2$, как это следует из решения задачи 2.6.4. Заметим, что наша прибная функция фактически есть произведение двух функций основного состояния атома водорода с единственным отличием $Z \rightarrow Z'$, поэтому использование результатов задачи 2.6.4 является корректным.

Минимизируем $\langle \hat{H} \rangle$ и находим

$$Z' = Z - \frac{5}{16},$$

т.е. для гелия $Z' = 27/16$. Полученное значение Z' имеет прозрачный физический смысл — это значение эффективного заряда ядра, которое «чувствует» электрон при движении в общем кулоновском поле ядра и второго электрона — часть заряда ядра Z экранируется вторым электроном.

Найдем далее диамагнитную восприимчивость основного состояния гелия. Запишем общий вид гамильтониана для атома гелия в однородном внешнем магнитном поле (в обычной системе единиц):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H}(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) + \frac{e^2}{8mc^2} \sum_{a=1,2} |\mathcal{H} \times \mathbf{r}_a|^2.$$

обозначения совпадают с обозначениями задачи 2.11.10. Заметим, что в основном состоянии гелия $L = S = 0$, поэтому линейные по \vec{H} слагаемое не дает вклада в поправку к энергии. Следовательно,

$$E^{(1)} = \frac{e^2}{8mc^2} \left(\sum_{n=1,2} [(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)]^2 \right) = \frac{e^2}{8mc^2} \frac{2}{3} \mathcal{H}^2 \sum_{n=1,2} \langle r_n^2 \rangle,$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по состоянию с пробной функцией с зарядом Z' . Диамагнитная восприимчивость равна

$$\chi = -\frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial Z^2} = -\frac{e^2}{6mc^2} \sum_{n=1,2} \langle r_n^2 \rangle = -\frac{e^2}{6mc^2} \frac{a^2}{Z^2} = -\frac{1}{Z^2} a^2 \alpha^2,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Численное значение восприимчивости: $\chi = -2,77 \cdot 10^{-30} \text{ см}^3$.

2.11.13. В этом случае поправка первого порядка для зеемановского взаимодействия \tilde{V}_2 (см. (II.61)) равна нулю. Оценим поправку второго порядка для возмущения \tilde{V}_{2x} х уровню энергии атома с $L = S = 0$ и $J = 0$. Поправка второго порядка содержит энергетический знаменатель, равный разности энергии основного терма и соответствующего возбужденного состояния. Среди всех возможных энергетических знаменателей следует учесть только те, которые относятся к одной конфигурации основного терма, поскольку расстояние между уровнями энергии с одной и той же конфигурацией имеет величину порядка $n^2 E_0 \sim A$, где A — эффективная величина спин-орбитального взаимодействия. Таким образом, оценка поправки второго порядка есть

$$\Delta E_x^{(2)} \approx \sum_{L,M_L} \frac{| \langle L, S, J, M_J | \tilde{V}_{2x} | L, S, 0, 0 \rangle |^2}{E_{LS0} - E_{LSM}} \sim \frac{\mu_0^2 \mathcal{H}^2}{A}.$$

Легко видеть, что $|\Delta E_x^{(2)}| / |\Delta E_B^{(1)}| > 1$, где $E_B^{(1)}$ — поправка первого приближения для диамагнитного взаимодействия (II.62). Вспомним также, что поправка второго приближения к основному состоянию всегда отрицательна, поэтому газ таких атомов, находящихся в основном состоянии с $J = 0$ и $L = S \neq 0$, будет парамагнитным.

2.11.14. Для определенности будем считать, что молекула водорода находится в основном состоянии (терм Σ_g^+). В приближении Борна-Оппенгаймера полная волновая функция молекулы представляет собой произведение электронной и ядерной волновых функций. Ядерную подсистему молекулы водорода образуют два протона, поэтому соответствующая ядерная волновая функция есть функции двух тождественных ча-

стич. В системе центра инерции ядер волновая функция ядер представляет собой произведение координатной функции $R(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ — взаимное расстояние ядер, на спиновую функцию ψ_{dm} , характеризующуюся значением суммарного спина ядер I (задача 2.10.1).

При перестановке ядер местами, т. е. при преобразовании $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$ координатная функция умножается на $(-1)^K$, где K — вращательное квантовое число. Спиновая функция ядер меняет знак при перестановке спинов, если суммарный спин $I = 0$, и не меняет знак, если $I = 1$. Поскольку полная ядерная функция должна быть антисимметричной (система двух фермионов), то при суммарном ядерном спине $I = 0$ возможны только четные значения вращательного квантового числа $K = 0, 2, 4, \dots$ (парацодорд), а при $I = 1$ — только нечетные K (ортодорд).

Заметим, что волновая функция электронной подсистемы не меняется при преобразовании $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$, если, как предполагалось выше, молекула находится в состоянии с электронным термом Σ^+ .

2.11.15. Потенциал Кратцера был предложен для описания колебательно-вращательного спектра двухатомной молекулы (рис. 2.13). Константа D характеризует минимум либо значение потенциала, которое достигается при $r = b$.

Отделем движение центра масс, и для волновой функции относительного движения ядер получаем уравнение

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E + 2D \left(\frac{b}{r} - \frac{b^2}{2r^2} \right) \right\} \psi = 0,$$

где μ — приведенная масса ядер. Решаем далее задачу методом разделения переменных в сферической системе координат и, полагая, что

$$\psi(r) = R(r)Y_K^{(M)}(\theta, \varphi)$$

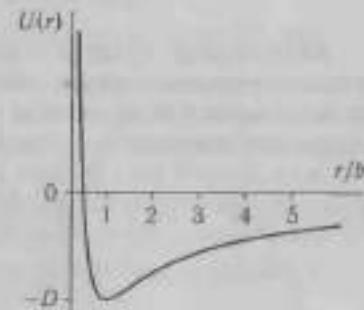


Рис. 2.13. Потенциал Кратцера

находим уравнение для радиальной функции $R(r)$:

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E - \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2\mu r^2} + 2D \left(\frac{b}{r} - \frac{b^2}{2r^2} \right) \right\} R(r) = 0.$$

Следим замену переменной согласно соотношению $\rho = 2r\sqrt{-2\mu E}/\hbar$, поскольку нас интересует дискретный спектр. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{2Db^2\mu}{\hbar^2} &= \gamma^2, \quad \frac{Db}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{-E}} = n, \\ K(K+1) + \gamma^2 &= \lambda(\lambda+1). \end{aligned} \tag{1}$$

В результате наше радиальное уравнение принимает вид

$$R''(\rho) + \frac{2}{\rho} R'(\rho) + \left\{ -\frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + \frac{n}{\rho} - \frac{1}{4} \right\} R(\rho) = 0.$$

Данное уравнение формально совпадает с радиальным уравнением, описывавшим движение в кулоновском поле.

В состояниях дискретного спектра функция $R(\rho)$ должна стремиться к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Отсюда получаем условие обреза соответствующего степенного ряда, которое одновременно фиксирует уровень энергии.

Условие обреза ряда имеет вид $n - \lambda - 1 = v = 0, 1, 2, \dots$, причем под λ здесь следует понимать положительный корень уравнения (1), т. е.

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(K + \frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}.$$

В итоге получаем дискретные уровни энергии:

$$E_{vK} = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \gamma^4 \left\{ \left(v + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(K + \frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2} \right\}^{-2}.$$

Безразмерный параметр γ^2 пропорционален приведенной массе ядер μ , и поэтому можно считать, что $\gamma^2 \gg 1$. Если при этом $v \ll \gamma$, $K \ll \gamma$, то выражение для E_{vK} можно разложить по малому параметру $1/\gamma$. В результате получим

$$E_{vK} = -\frac{1}{2} I \omega^2 + \hbar \omega \left(v + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} \left(K + \frac{1}{2} \right)^2 - \\ - \frac{3\hbar^2}{2I} \left(v + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3\hbar^2}{2I^2 \omega} \left(v + \frac{1}{2} \right) \left(K + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \quad (2)$$

где мы ввели частоту колебаний ω и момент инерции I :

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2D}{\mu}}, \quad I = \mu R^2.$$

Второе слагаемое в выражении (2) описывает колебательные уровни, характеризующиеся колебательным квантовым числом v . Третье слагаемое дает энергию вращательных уровней с постоянным моментом инерции. Четвертое слагаемое учитывает ангармоничность колебаний и ведет к некоторому понижению колебательных уровней. Наконец, пятые слагаемое дает поправку к энергии, обусловленную взаимодействием между вращением и колебанием ядер.

2.11.16. Оператор контактного сверхтонкого взаимодействия двух частиц со спинами s_1 и s_2 имеет вид

$$\hat{V}_{\text{суп}} = A \hat{s}_1 \hat{s}_2.$$

Данный оператор линейно связан с оператором квадрата суммарного спина системы \mathbf{S}^2 , где $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ (см., например, задачу 2.11.4), поэтому его действие на общие собственные векторы операторов $\hat{\mathbf{S}}^2$ и \hat{S}_z (обозначаемые, как $|S, M\rangle$) не приводит к изменению квантовых чисел S и M . Таким образом, оператор $\hat{V}_{\text{суп}}$ сохраняет суммарный спин системы.

Суммарный спин $p\bar{\mu}$ -атома может принимать два значения $S = 0, 1$. Покажем, что оператор $\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z}$ изменяет значение суммарного спина S . Действительно,

$$(\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|1, \pm 1\rangle = 0, \quad \text{но}$$

$$(\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|1, 0\rangle = |0, 0\rangle, \quad (\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|0, 0\rangle = |1, 0\rangle.$$

Несложно проверить также, что

$$(\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|1, +1\rangle = 0, \quad (\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|1, 0\rangle = 0,$$

$$(\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|1, +1\rangle = -\sqrt{2}|0, 0\rangle, \quad (\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\bar{\mu} z})|0, 0\rangle = \mp\sqrt{2}|1, \pm 1\rangle.$$

При рассеянии $p\bar{\mu}$ -атома ядро должно сохраняться полный спин системы «ядро + $p\bar{\mu}$ -атом», т.е. $F = s_p + s_{\bar{\mu}} + I = S + I$, который может принимать значения $|S - I| < F \leq S + I$ (здесь I обозначает спин ядра). Поскольку S принимает значения 0 или 1, полный спин F имеет возможность сохраняться при изменении суммарного спина $p\bar{\mu}$ -атома только в случае, когда $F = I$. Таким образом, искомый эффективный оператор контактного магнитного сверхтонкого взаимодействия \hat{Q} должен обладать свойством:

$$\langle S = 1, F, M_F | \hat{Q} | S = 0, F', M'_F \rangle = \delta_{F,F'} \delta_{M_F, M'_F}.$$

Будем искать оператор \hat{Q} в виде

$$\hat{Q} = A (\hat{s}_\mu - \hat{s}_{\bar{\mu}}) \hat{I}.$$

Запишем два возможных состояния системы «ядро + $p\bar{\mu}$ -атом» с полным спином $F = I$, обладающих максимальными значениями проекций полного спина на ось z :

$$|S = 1, F = I, I\rangle = \sqrt{\frac{I}{I+1}} |1, 0\rangle |I, I\rangle - \frac{1}{\sqrt{I+1}} |1, +1\rangle |I, I-1\rangle,$$

$$|S = 0, F = I, I\rangle = |0, 0\rangle |I, I\rangle.$$

Подействуем далее оператором \hat{Q} на состояние с $S = 1$ и в результате найдем

$$\begin{aligned} A \left\{ (\hat{s}_{\mu z} - \hat{s}_{\nu z}) \hat{l}_z + \frac{1}{2} [(\hat{s}_{\mu++} - \hat{s}_{\nu++}) \hat{l}_+ + (\hat{s}_{\mu-} - \hat{s}_{\nu-}) \hat{l}_-] \right\} |S=1, I, I\rangle = \\ = A(I+1) \sqrt{\frac{I}{I+1}} |0, 0\rangle |I, I\rangle = A \sqrt{I(I+1)} |S=0, F=I, I\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем записать итоговое выражение для оператора \hat{Q} в виде

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{I(I+1)}} (\hat{s}_{\mu} - \hat{s}_{\nu}) \hat{l}$$

2.12. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

2.12.1. Для нахождения амплитуды рассеяния в борновском приближении необходимо вычислить интеграл

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) e^{-iqr} d^3x = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty V(r) \sin qr r dr,$$

а для получения полного сечения — проинтегрировать $|f(\theta)|^2$ по углам:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.$$

Выше положено, что $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, $q = 2k \sin(\theta/2)$. Условие применимости получается из анализа интеграла

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{i\theta}}{r} V(r) e^{iqr} d^3x \right| \ll 1.$$

Результаты расчетов имеют вид

$$a) f = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\kappa^2 + q^2)}, \quad \sigma = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2\omega} \right)^2 \frac{4\pi}{4\kappa^2 + \omega^2}, \quad \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Условие применимости: $m\alpha/\kappa \ll \hbar^2$ (для любых энергий) или $\alpha \ll \hbar\omega$, где $\omega = \hbar k/m$ — скорость частицы (для быстрых частиц).

$$b) f = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[-\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\kappa^2 + q^2)} \right] = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 q^2}, \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Условие применимости: $\alpha \ll \hbar\omega$.

$$\text{в)} f = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2q^2} \left(\cos qa - \frac{\sin qa}{qa} \right),$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \left(\frac{mV_0a^2}{\hbar} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{(2ka)^2} + \frac{\sin 4ka}{(2ka)^2} - \frac{\sin^2 2ka}{(2ka)^4} \right].$$

Условия применимости: $2mV_0a^2 \ll \hbar^2$ (при любых энергиях) или $2m \times V_0a^2 \ll \hbar^2(\hbar\omega)$ (для быстрых частиц).

2.12.2. В данном подходе исследуются *индивидуальные отклонения* одной частицы в поле рассеивающего потенциала. Предполагается, что до взаимодействия с потенциалом движение частицы свободное, и ее состояние можно описать функцией, собственной для оператора импульса с собственным значением \mathbf{p} и энергией $E = \mathbf{p}^2/(2m)$. В результате взаимодействия с рассеивающим центром у частицы появляется определенная вероятность совершить квантовый переход в состояние с импульсом \mathbf{p}' и энергией $E' = \mathbf{p}'^2/(2m)$ (т. е. рассеяться).

В соответствии с «золотым» правилом Ферми вероятность хантовых переходов в единицу времени между состояниями непрерывного спектра дается формулой

$$d\omega_p = \frac{2\pi}{\hbar} |V_p|^2 \delta(E_f - E_i) d\eta, \quad (1)$$

где роль возмущения играет сам рассеивающий потенциал $V(r)$. В качестве интервала конечных состояний $d\eta$ выберем d^3p' , при этом волновая функция конечного состояния нормирована на δ -функцию: $\psi_p = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{ip \cdot r/\hbar}$. Начальную волновую функцию нормируем на единичную плотность потока ($|\psi_{con}| = 1$): $\psi_p = (\pi/p)^{1/2} e^{ip \cdot r/\hbar}$. Подставим в (1) также разность энергий $E' - E = (\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2)/(2m)$ и получим

$$d\omega_{p,p'} = \frac{4\pi m}{\hbar} |V_{p,p'}|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2) d^3p'.$$

Данное выражение имеет размерность площади и представляет собой дифференциальное сечение рассеяния. Исключаем δ -функцию, переходя к сферическим координатам (т. е. заменяя d^3p' по формуле $d^3p' = p'^2 dp' d\Omega = \frac{1}{2} p' d(p'^2) d\Omega$), и интегрируя по $d(p'^2)$. В итоге имеем

$$d\sigma = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \int V(r) e^{-ip' \cdot r} d^3r \right|^2 d\Omega,$$

где $\mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})/\hbar$. Это и есть искомое дифференциальное сечение.

2.12.3. Радиальное уравнение Шредингера для парциальной волны $u_l(r) = rR_l(r)$ имеет вид

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right\} u_l(r) = 0, \quad (1)$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Обозначим далее решение свободного уравнения $v_l(r)$, т. е.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} v_l(r) = 0. \quad (2)$$

Умножим почленно уравнение (1) на $v_l(r)$ и уравнение (2) на $u_l(r)$ и вычтем друг из друга. Полученный результат проинтегрируем по от нуля до r . В итоге будем иметь (с учетом $v_l(0) = u_l(0) = 0$)

$$v_l(r) \frac{d}{dr} u_l(r) - u_l(r) \frac{d}{dr} v_l(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^r V(r') v_l(r') u_l(r') dr'. \quad (3)$$

Перейдем далее к пределу $r \rightarrow \infty$. Предполагаем, что при $r \rightarrow \infty$ потенциал $V(r)$ стремится к нулю быстрее, чем $1/r$, поэтому интеграл в правой части сливается. Вспоминая, что функция $v_l(r)$ есть на самом деле сферическая функция Бесселя $j_l(kr)$ (см. задачу 2.6.8), используем асимптотики для $u_l(r)$ и $j_l(kr)$

$$j_l(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq \sin\left(x - \frac{\pi l}{2}\right), \quad u_l(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq \sin\left(x - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right),$$

где δ_l — фаза рассеяния. Тогда из уравнения (3) находим

$$\sin \delta_l = - \frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty V(r) j_l(kr) u_l(r) dr. \quad (4)$$

Заметим, что полученная формула — точная. Таким образом, чтобы найти фазу δ_l , необходимо знать точное решение уравнения (1). Но, если считать значение потенциала $V(r)$ малым, то $u_l(r)$ должна мало отличаться от свободной сферической волны (т. е. фактически от $j_l(kr)$), и, следовательно, фазовый сдвиг $\delta_l \rightarrow 0$. Имея в виду этот факт, из (4) получим

$$\sin \delta_l \simeq \delta_l \simeq - \frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty V(r) |j_l(kr)|^2 dr.$$

Найдем теперь амплитуду рассеяния. С этой целью подставим выражения для фаз с учетом малости δ_l в формулу разложения амплитуды

по парциальным амплитудам (II.67). Будем также иметь в виду, что $j_l(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{l+1/2}(x)$. В итоге находим, что

$$\begin{aligned} f(\theta) &\simeq \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \delta_l P_l(\cos \theta) \simeq \\ &\simeq -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} r^2 dr V(r) \left[\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\pi}{2\hbar r} J_{l+1/2}(x)^2 P_l(\cos \theta) \right]. \end{aligned}$$

Из теории бесселевых функций известно, что сумма в квадратных скобках вычисляется точно и равна $\sin qr/(qr)$, где $q = 2k \sin(\theta/2)$. Таким образом, мы пришли к амплитуде рассеяния в борновском приближении.

2.12.4. Разделяя переменные в сферической системе координат, находим уравнение для парциальной волны $u_l(r) = rR_l(r)$:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1}{r^2} \left[l(l+1) + \frac{2m\beta}{\hbar^2} \right] \right\} u_l(r) = 0. \quad (1)$$

При помощи замены $u_l(r) = \sqrt{r}\varphi(r)$ уравнение (1) приводится к виду

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + \left\{ k^2 - \frac{1}{r^2} \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2} \right] \right\} \varphi = 0.$$

Решениями данного уравнения являются функции Бесселя $J_{\nu}(kr)$, где

$$\nu = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}}.$$

В связи с этим решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию $u_l(0) = 0$, выбираем в виде (ср. с задачей 2.6.8)

$$u_l(r) = c \sqrt{\frac{\pi i \ell}{2}} J_\nu(kr).$$

Асимптотику этого решения при больших значениях аргумента мы приравняем граничному условию для парциальной волны (при $r \rightarrow \infty$):

$$u_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim c \sin \left(kr - \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = c \sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l \right).$$

Отсюда мы и находим фазы рассеяния:

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2} \left\{ \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}} - \left(l + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Рассмотрим предельный случай $2m\beta/\hbar^2 \ll 1$. В этом пределе получим

$$\delta_l \approx -\frac{\pi m \beta}{\hbar^2(2l+1)}.$$

очевидно, что при этом должно выполняться условие $|\delta_l| \ll 1$. Суммируем далее ряд разложения по парциальным амплитудам (II.57) с учетом $|\delta_l| \ll 1$ и находим

$$J(\theta) \approx \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \delta_l P_l(\cos \theta) = -\frac{\pi m \beta}{\hbar^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta).$$

Для вычисления суммы используем производящую функцию полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l P_l(z),$$

в которой необходимо положить $x = 1$, $z = \cos \theta$. В итоге получаем выражение для амплитуды рассеяния в виде

$$J(\theta) = -\frac{\pi m \beta}{2k\hbar^2 \sin(\theta/2)}. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что в результате расчета в борновском приближении получается выражение для амплитуды, в точности совпадающее с (2).

2.12.5. Условие «медленности» частиц $4a \ll 1$ означает, что энергия частицы настолько мала, что соответствующая длина волны де Броиля велика по сравнению с радиусом действия потенциала $V(r)$ ($\lambda \gg a$).

В таких случаях в рассеянии частиц низкой энергии будут участвовать только парциальные волны с малыми значениями l . В этом можно убедиться, исходя из простых качественных соображений. При $r \gg a$ на частицу с $l \neq 0$ будут действовать лишь центробежные силы отталкивания, поэтому частица не сможет приблизиться к рассеивающему центру ближе, чем на расстояние $\rho = \sqrt{l(l+1)}/k$. Если $\rho > a$, то она не попадет в область действия потенциала и не будет принимать участия в рассеянии.

Рассмотрим и более строгие соображения. Общий вид радикального уравнения для парциальной волны:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right\} u_l(r) = 0. \quad (1)$$

Полагаем, что на больших расстояниях потенциал стремится к нулю быстрее, чем $1/r^2$. Тогда при $r \gg a$ в уравнении (1) можно пренебречь вклад-

дом члена с $V(r)$ по сравнению с центробежным потенциалом $I(l+1)/r^2$. При этом уравнение (1) превратится в свободное радиальное уравнение с решением

$$u_l(r) = a_1 j_l(kr) + a_2 n_l(kr). \quad (2)$$

где $j_l(x)$ и $n_l(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана (см. (Д.15), (Д.16)). В области сравнительно малых расстояний $a \ll r \ll 1/k$ в уравнении (1) можно пренебречь как потенциалом $V(r)$, так и членом k^2 по сравнению с $I(l+1)/r^2$. Решение уравнения в данной области будет иметь вид

$$u_l(r) = c_1 r^{l+1} + c_2 r^{-l}. \quad (3)$$

В области $a \ll r \ll 1/k$ решение (2) должно переходить в (3). Воспользуемся асимптотическим видом функций $j_l(x)$ и $n_l(x)$ при малых x (Д.20) и получим

$$a_1 = c_1 \frac{(2l+1)!!}{k^{l+1}}, \quad a_2 = -c_2 \frac{k^l}{(2l-1)!!}.$$

А теперь рассмотрим асимптотику решения (2) в дальней области ($kr \gg 1$), учитывая асимптотический вид функций $j_l(x)$ и $n_l(x)$ при $x \rightarrow \infty$:

$$u_l(r)|_{kr \rightarrow \infty} \sim c_1 \frac{(2l+1)!!}{k^{l+1}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + c_2 \frac{k^l}{(2l-1)!!} \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)$$

Исходя из граничного условия для парциальной волны должно быть $u_l(r)|_{kr \rightarrow \infty} \sim \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$, откуда

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{c_2}{c_1} \frac{k^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}. \quad (4)$$

Отношение c_2/c_1 не зависит от k , ибо мы пренебрели в уравнении членом k^2 в области $a \ll r \ll 1/k$. Отсюда делаем вывод о том, что при инкогерентном рассеянии ($ka \ll 1$) существенный вклад вносит лишь рассеяние π -волны, потому что с ростом l фазы рассеяния $\operatorname{tg} \delta_l \approx \delta_l$ стремится к нулю.

Из выражения (4) следует, что максимальное значение фазы δ_l достигается в случае, когда $l=0$, при этом $\delta_0 \approx (c_2/c_1)k$. Соответствующая парциальная амплитуда равна

$$f_0 = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) \approx \frac{\delta_0}{k} = \frac{\Omega}{c_1} = -\alpha, \quad (5)$$

т. е. она не зависит от k . Величина α называется длиной рассеяния. Рассеяние при этом будет изотропным, и его сечение равно $\sigma = 4\pi\alpha^2$.

2.12.6. Указание. Воспользоваться выражением для амплитуды рассеяния в борновском приближении.

2.12.7. Нейтрон практически не взаимодействует с электронами, поэтому можно учитывать только рассеяние на ядрах молекулы, т. е. на протонах. В таком случае рассеяние на каждом ядре может быть описано псевдопотенциалом, приведенным в задаче 2.12.6, в котором теперь m — приведенная масса. Принимая $M_e \approx M_p = M$ и поместив начало координат в центр масс молекулы, расстояние между ядрами которой определяется радиусом-вектором \mathbf{R} , имеем

$$V_{\text{eff}} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M}a(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}/2) + \delta(\mathbf{r} + \mathbf{R}/2)).$$

2.12.8. Предположим, что потенциал рассеяния задан формулой

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a, \\ -V_0, & r \leq a. \end{cases}$$

В соответствии с выводами, сделанными в задаче 2.12.5, в случае рассеяния медленных частиц ($ka \ll 1$) вклад в сечение всех парциальных волн с $l \neq 0$ является малым по сравнению с вкладом от рассеяния s -волны. Поэтому запишем радиальное уравнение для s -волны:

$$u_0''(r) + k^2 u_0(r) = 0, \quad r > a,$$

$$u_0''(r) + \kappa^2 u_0(r) = 0, \quad r \leq a,$$

где мы ввели обозначения $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$, $V_0 = \hbar^2 \kappa_0^2 / (2m)$, $\kappa^2 = k^2 + \kappa_0^2$. Решение, удовлетворяющее условию $u_0(0) = 0$, имеет вид

$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin(kr + \delta_0), & r > a, \\ B \sin \kappa r, & r \leq a. \end{cases}$$

Условие непрерывности для логарифмической производной при $r = a$ дает

$$\frac{\kappa \cos \kappa a}{\sin ka} = \frac{k \cos (ka + \delta_0)}{\sin (ka + \delta_0)},$$

откуда для фазы рассеяния мы получим

$$\delta_0 = \arctg \left[\frac{ka}{\kappa a} \operatorname{tg} \kappa a \right] - ka, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\frac{\kappa a}{\kappa a} \operatorname{tg} \kappa a - \operatorname{tg} ka}{1 + \frac{ka}{\kappa a} \operatorname{tg} \kappa a \operatorname{tg} ka}. \quad (1)$$

Рассмотрим различные частные случаи данного решения.

Если $\omega_0 \ll 1$ (имея малой глубины), то, очевидно, также и $\omega_0 \ll 1$, и можно разложить тригонометрические функции в (1). В итоге найдем

$$\delta_0 = \frac{(\omega_0)^2}{3} ka, \quad \sigma \approx 4\pi a^2 \frac{(\omega_0)^2}{9}. \quad (2)$$

Тот же результат дает и борновское приближение (задача 2.12.1). Отметим, что сечение в данном приближении не зависит от знака потенциала — оба знака $\pm V_0$ приведут к выражению (2).

Далее, в случае $ka \ll 1$, и $k \ll \omega_0$, т. е. при малых энергетических относительного движения и сравнительно глубоких потенциальных ямах можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе (1), ибо он является величиной второго порядка малости по ka . В результате получим

$$\operatorname{tg} \delta_0 \approx ka \left(\frac{\operatorname{tg} \omega_0}{\omega_0} - 1 \right). \quad (3)$$

Если выполняется условие $\operatorname{tg} \omega_0 = \omega_0$, то из (3) следует, что $\delta_0 \approx 0$, $\sigma = \sigma_0 \approx 0$, т. е. при некоторых значениях энергии и глубины ямы она не приводит к рассеянию π -волны (эффект Рамзаура).

Если же выполняется соотношение

$$\omega_0 = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad (4)$$

то сечение достигает максимального резонансного значения

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2},$$

и в этом случае

$$k^2 = \frac{1}{a^2} \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \right]^2 - \omega_0^2.$$

Данные значения k^2 определяют так называемые виртуальные уровни энергии. При $k \rightarrow 0$ условие (4) совпадает с условием появления связанного π -состояния в сферической яме ($\operatorname{ctg} \omega_0 a = 0$). То есть при таком значении ω_0 в яме появляется новый уровень с вибрационной энергией, и падающая волна вступает с ним в резонанс. При этом сечение рассеяния характеризуется резкой энергетической зависимостью, что видно на рис. 2.14 (резонансное рассеяние).

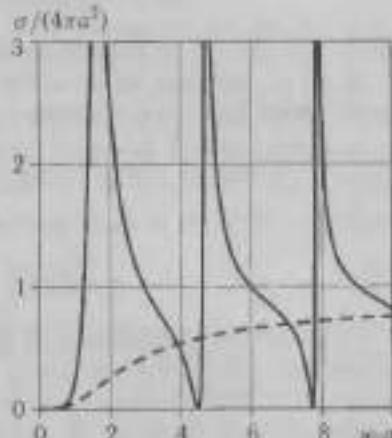


Рис. 2.14. Сечение рассеяния членами частиц на сферической яме глубины V_0 и радиуса a (сплошная линия) и на сферическом барьере высоты V_0 и радиуса a (штрихованная линия), $V_0 = h^2 \omega_0^2 / (2m)$, $ka = 0.5$

2.12.9. Потенциал рассеяния задается соотношениями

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a, \\ V_0, & r \leq a. \end{cases}$$

Радиальное уравнение для парциальной π -волны имеет вид

$$\begin{cases} u_0''(r) + k^2 u_0(r) = 0, & r > a, \\ u_0''(r) + k_1^2 u_0(r) = 0, & r \leq a, \end{cases}$$

где $E = h^2 k^2 / (2m)$, $V_0 = h^2 \omega_0^2 / (2m)$, $k_1^2 = k^2 - \omega_0^2$. Решение уравнения в области $r > a$ имеет вид

$$u_0(r) = A \sin(kr + \delta_0), \quad r > a.$$

В области действия потенциала ($r < a$) существуют два варианта решений, удовлетворяющих условию $u_0(0) = 0$, а именно

$$\begin{aligned} u_0(r) &= B_1 \sin k_1 r, & \text{если } k^2 \geq \omega_0^2, \\ u_0(r) &= B_2 \sinh \omega_1 r, & \text{если } k^2 \leq \omega_0^2, \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$. В случае низкоэнергетического рассеяния, очевидно, $k^2 \ll \omega_0^2$, поэтому $\omega_1 \approx \omega_0$. Из условия равенства логарифмических производных при $r = a$ получим

$$\delta_0 = \operatorname{arctg} \left[\frac{ka}{\omega_0 a} \operatorname{th} \omega_0 a \right] - ka.$$

Если $ka \rightarrow 0$, то $\omega_1 = \omega_0$, и сечение принимает вид

$$\sigma = 4\pi a^2 \left(\frac{\operatorname{th} \omega_0 a}{\omega_0 a} - 1 \right)^2.$$

С ростом $\omega_0 a$ (с увеличением высоты барьера V_0) сечение рассеяния медленных частиц, как это видно из рис. 2.14, монотонно стремится к пределу $\sigma = 4\pi a^2$, который отвечает низкоэнергетическому рассеянию на непроницаемой сфере (см. задачу 2.12.10).

2.12.10. Потенциал рассеяния задается соотношениями

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a, \\ \infty, & r \leq a. \end{cases}$$

Данная задача допускает точное определение фаз рассеяния. Запишем радиальное уравнение для парциальной волны $u_i(r)$ (при $r > a$)

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} u_i(r) = 0.$$

где $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$. Границные условия для функции $u_l(r)$ имеют вид

$$\begin{cases} u_l(a) = 0 \\ |u_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \end{cases}$$

Общее решение уравнения записывается через сферические функции Бесселя и Неймана:

$$u_l(r) = A_j(lkr) + B_n(lkr).$$

Реализация граничных условий дает возможность определить фазы рассеяния

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} \quad (1)$$

и получить точное выражение для сечения

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + n_l^2(ka)}. \quad (2)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи результата (2).

а) Медленные частицы ($ka \ll 1$). В соответствии с результатом задачи 2.12.5 можно утверждать, что в этом случае фазы рассеяния (1) настолько быстро убывают с ростом l , что при вычислении сечения фактически можно ограничиться только учетом вклада звуковых волн. В самом деле, учитывая асимптотики сферических функций Бесселя и Неймана (задача 2.6.8), нетрудно получить из (1), что $\operatorname{tg} \delta_l \sim (\hbar a)^{2l+1}|_{ka \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Окончательно в этом пределе имеем

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (ka)^2 = 4\pi a^2. \quad (3)$$

т. е. получается учетверенное геометрическое сечение. Такой результат объясняется преобладанием звукового аспекта в процессе рассеяния. Пространство за сферой заполняется частицами, идет дифракция, и это приводит к росту эффективного сечения. Заметим также, что в этом пределе сечение изотропно.

б) Быстрые частицы ($ka \gg 1$). С ростом энергии частиц вклад в рассеяние парциальных волн высокого порядка ($l > 0$) становится все более значительным. Предполагая, что $ka \gg 1$, разобьем сумму (2) на два слагаемых: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

В слагаемом σ_1 группируем члены, для которых $0 \leq l \leq ka$. Парциальные волны с такими значениями l будут давать вклад в сечение рассеяния, потому что для них $k^2 > l(l+1)/a^2$ (ср. с задачей 2.12.5). С учетом $ka \gg 1$ функции $j_l(ka)$ и $n_l(ka)$ можно заменить их асимптотиками при $ka \rightarrow \infty$ (Д.18).

В слагаемом σ_2 присутствуют члены с $l > ka$. В классической картине таким волнам отвечают частицы с большими приведенными параметрами $\sqrt{kl+1}/k > a$. Такие частицы вносят малый вклад в рассеяние. Для оценки можно положить $ka \gg 1$, $l \gg 1$, но $ko \ll l$. В этом пределе работают асимптотические представления (2) из задачи 2.6.8. В результате получаем, что $\lg \delta \rightarrow 0$, т. е. слагаемым σ_2 можно пренебречь.

Очевидно, что существует область значений $l \sim ka$, где интегрирование не верна. Однако, чем больше ka , тем точнее результат будет описываться при помощи слагаемого σ_1 . Итак, в нашем приближении

$$\sigma = \sigma_1|_{ka \gg 1} \approx \sum_{l=0}^{\lfloor ka \rfloor} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \left[ka - \frac{l\pi}{2} \right], \quad (4)$$

где $\lfloor ka \rfloor$ есть целая часть ka . Для оценки выражения (4) можно заменить сумму интегралом. Тогда в ведущем приближении по ka получим

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \int_0^{ka} dx (2x+1) \sin^2 \left[ka - \frac{x\pi}{2} \right] \approx 2\pi a^2, \quad (5)$$

т. е. удвоенное геометрическое сечение.

Такой, на первый взгляд, странный результат объясняется проявлением волновых свойств частиц, и, в частности, наличием дифракции.

$d\sigma/d\Omega$

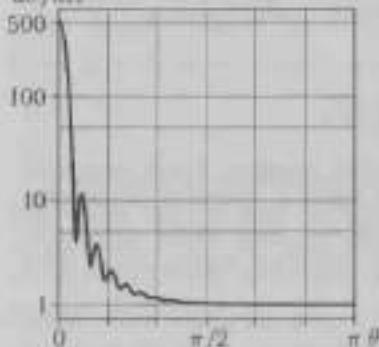


Рис. 2.15. Дифференциальное сечение рассеяния на непроницаемой сфере радиуса a при $ka = 20$, нормированное на классическое сечение $a^2/4$.

при этом $\simeq a^2/4$). Анализ и детальные аналитические оценки этих заявлений приведены, например, в [26].

Численный расчет по точной формуле (рис. 2.15) показывает, что угловое распределение рассеянных частиц обладает резко выраженной ангуляцией: в пределах узкого конуса с угловым раствором $\Delta\theta \sim \pi/(ka)$, направленного вдоль падающего пучка, рассеивается примерно половина всех частиц.

Иначе говоря, половина рассеянной волны (в пределах конуса $\Delta\theta$) интерферирует с падающей и формирует «тень», находящуюся за сферой. Другая же половина отражается более или менее изотропно во всех остальных направлениях, формируя обычное геометрическое сечение πa^2 (дифференциальное сечение

2.12.11. Наличие неупругих процессов легко учитывается в рамках фазовой теории рассеяния при помощи модификации формулы разложения амплитуды $f(\theta)$ по парциальным волнам (II.67): фактор $e^{i\omega t}$ заменяется на комплексное число η_l , по модулю меньшее единицы, т. е. $|\eta_l| < 1$. Таким образом можно описать изменение полного числа частиц в пучке, происходящее при неупругом рассеянии.

Для модели черного шара, применяемой в теории рассеяния нейтронов ядрами, коэффициенты η_l выбираются следующим образом:

$$\eta_l = \begin{cases} 1, & l > ka, \\ 0, & l < ka, \end{cases}$$

т. е., если прицельный параметр $\rho < a$, то частицы полностью поглощаются сферой, а если $\rho > a$, то «не замечают» ее. Полное сечение рассеяния делится на упругое и неупругое:

$$\sigma = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}},$$

причем амплитуда упругого рассеяния вычисляется по обычной формуле

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ik} (\eta_l - 1) P_l(\cos \theta),$$

откуда получаем

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{|ka|} (2l+1) \simeq \pi a^2. \quad (1)$$

Полное сечение рассеяния находим из оптической теоремы (II.69), которая верна и в случае наличия неупругих процессов:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) = -\frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{|ka|} \frac{(2l+1)}{2ik} \simeq 2\pi a^2. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), заключаем, что $\sigma_{\text{неупр}} \simeq \pi a^2$.

2.12.12. Волновая функция, описывающая движение двух тождественных частиц в системе центра масс, имеет вид (см. задачу 2.6.1)

$$\Psi(r_1, r_2, s_1, s_2) = \Phi(\mathbf{R}) \psi(r) \chi(s_1, s_2). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{R} = (1/2)(r_1 + r_2)$ — координата центра масс, функция $\Phi(\mathbf{R})$ описывает движение центра масс системы: $r = r_1 - r_2$ — относительная координата, функция $\psi(r)$ описывает движение частицы с приведенной

массой $\mu = m/2$; $\chi(s_1, s_2)$ — спиновая функция двух частиц. Мы предположили, что потенциал взаимодействия не зависит от спинов, поэтому спиновые и координатные переменные разделяются.

Согласно постулату тождественности полная волновая функция Ψ должна быть симметричной или антисимметричной относительно перестановки частиц $1 \leftrightarrow 2$. Сразу же заметим, что координата R не меняется при указанной перестановке, поэтому симметризации или антисимметризации подлежит только произведение $\psi(r)\chi(s_1, s_2)$.

а) α -частицы. Спин α -частицы равен нулю, поэтому полная волновая функция (совпадающая с функцией $\psi(r)$) должна быть симметричной относительно перестановки $1 \leftrightarrow 2$. При такой перестановке относительная координата меняет знак: $r \rightarrow -r$, и в сферической системе координат это эквивалентно замене $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, $r \rightarrow r$. В соответствии со сказанным вид функции $\psi(r)$ при больших значениях r должен быть следующим:

$$\psi(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikr} + e^{-ikr} + (f(\theta) + f(\pi - \theta)) \frac{e^{i\varphi}}{r}. \quad (2)$$

Рассмотрим смысл отдельных слагаемых в формуле (2). Два первых слагаемых описывают начальное движение частиц в системе центра масс. Если считать, что частицы движутся по оси z , то первое слагаемое в (2) описывает начальное состояние частицы с приведенной массой μ , налетающей на покоящийся рассеивающий центр из $-\infty$ (состояние A на рис. 2.16), а второе слагаемое в (2) описывает состояние такой же частицы, летящей из $+\infty$ (состояние B на рис. 2.16).

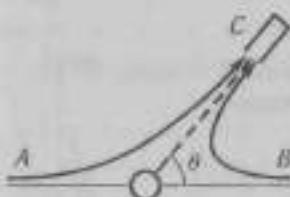


Рис. 2.16. Рассеяние тождественных частиц

Третье и четвертое слагаемые в (2) учитывают две возможности по рассеянию частицы с массой μ в поле рассеивающего центра. Частица, летящая из $-\infty$, может испытать рассеяние на угол θ и будет зарегистрирована детектором, находящимся в точке C (рис. 2.16), но тот же детектор зарегистрирует и частицу, летящую из $+\infty$, которая рассеялась на угол $\pi - \theta$. В силу тождественности частиц обе эти возможности учитываются одновременно в волновой функции (2).

Дифференциальное сечение рассеяния вычисляется как отношение числа частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении детектора, к плотности потока в каждой из падающих волн:

$$d\sigma = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\Omega.$$

б) Протоны. Полная волновая функция должна быть антисимметричной относительно перестановки частиц. Важную роль здесь играет спиновая функция в (1). В силу того, что протоны имеют спин $1/2$, в качестве спиновых функций будут выступать функции $\chi(S, M)$, собственные для операторов квадрата суммарного спина \hat{S}^2 и проекции суммарного спина \hat{S}_z (задача 2.10.1). Известно, что в состоянии с суммарным спином $S = 0$ спиновая функция антисимметрична, значит координатная функция должна быть симметричной, т. е. она должна совпадать с (2). В состояниях с $S = 1$ спиновые функции симметричные, поэтому функция $\psi(\mathbf{r})$ должна быть антисимметризована. Подводя итог, можно сказать, что в состояниях с полным спином протонов, равным S , дифференциальное сечение рассеяния равно (см. также (II.60))

$$d\sigma_S = |f(\theta) + (-1)^S f(\pi - \theta)|^2 d\Omega.$$

Если же пучки исходных частиц неполяризованы, то будет наблюдаться среднее значение эффективного сечения. Считая, что все спиновые состояния равновероятны, получим

$$d\sigma = \frac{1}{4} d\sigma_{S=0} + \frac{3}{4} d\sigma_{S=1}.$$

2.12.13. Для описания упругого рассеяния быстрых электронов на атоме (не обязательно на атоме водорода) можно использовать борновское приближение, если скорость налетающего электрона велика по сравнению со скоростями атомных электронов. Поскольку масса атома гораздо больше, чем масса электрона, можно считать, что атом является неподвижным в течение всего процесса рассеяния. Тогда в формуле борновского приближение

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-im\theta} V(r) d^3x, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad (1)$$

как и обычно, $m\mathbf{k}$ и $m\mathbf{k}'$ — импульсы электрона до и после рассеяния, m — масса электрона.

С точки зрения воздействия на электрон, атом представляет собой систему зарядов. Это распределение зарядов создает электрический потенциал, на котором и рассеивается заряженная частица. Потенциал атома создается зарядом ядра и зарядом электронов, распределенным по объему атома, т. е.

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + e^2 \int \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x,$$

где $-\rho(r)$ — плотность заряда электронов в атоме. Подставим $V(r)$ в выражение (1) и учитывая значения интегралов

$$\int \frac{1}{r} e^{-qr} d^3x = \frac{4\pi}{q}, \quad \int \frac{e^{-qr}}{|r - r'|} d^3x = \frac{4\pi}{q} e^{-qr},$$

получаем

$$J(\theta) = \frac{2me^2}{\hbar^2 q^2} [Z - F(q)], \quad \text{где } F(q) = \int \rho(r) e^{-qr} d^3x. \quad (2)$$

Выражение (2) определяет так называемый *атомный формфактор*. Он зависит от распределения плотности электронов в атоме и от величины q — передаваемого при рассеянии импульса. Если плотность электронов обладает центральной симметрией, то формулу (2) можно упростить:

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \sin qr \rho(r) r dr. \quad (3)$$

Для атома водорода ($Z = 1$), находящегося в основном состоянии, электронная плотность $\rho(r)$ определяется очевидным образом:

$$\rho(r) = |\psi_{100}(r)|^2 = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a},$$

где a — боровский радиус. При помощи выражения (3) находим формфактор

$$F(q) = \left[1 + \frac{(qa)^2}{4} \right]^{-1}.$$

Определим далее дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = 4a^2 \frac{(qa)^2 + 8}{((qa)^2 + 4)^2} d\Omega.$$

Для вычисления полного сечения заметим, что $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = (2\pi/k^2)q dq$, поскольку $q = 2k \sin \theta/2$. В итоге имеем

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{3} \frac{7(ka)^4 + 72(ka)^2 + 192}{((ka)^2 + 4)^2} \Big|_{ka \gg 1} \approx \frac{7\pi}{3k^2}$$

Критерий применимости борновского приближения (если положить $V_0 \sim e^2/a$) дает условие $ka \gg 1$, поэтому данное приближение применимо лишь для достаточно больших энергий налетающих электронов.

2.13. ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

2.13.1. $\langle 210|\hat{x}|100\rangle = 0$, $\langle 210|\hat{y}|100\rangle = 0$, $\langle 210|\hat{z}|100\rangle = \frac{128\sqrt{2}}{243}$,
 $\langle 21 \pm 1|\hat{x}|100\rangle = \pm \frac{128}{243}$, $\langle 21 \pm 1|\hat{y}|100\rangle = i \frac{128}{243}$, $\langle 21 \pm 1|\hat{z}|100\rangle = 0$.

(Ответы приведены в атомной системе единиц.)

2.13.2. $\langle 210|\hat{p}_x|100\rangle = 0$, $\langle 210|\hat{p}_y|100\rangle = 0$, $\langle 210|\hat{p}_z|100\rangle = i \frac{16\sqrt{2}}{81}$,
 $\langle 21 \pm 1|\hat{p}_x|100\rangle = \pm \frac{16}{81}$, $\langle 21 \pm 1|\hat{p}_y|100\rangle = - \frac{16}{81}$, $\langle 21 \pm 1|\hat{p}_z|100\rangle = 0$.

(Ответы приведены в атомной системе единиц.)

2.13.3. Уравнение Шредингера, описывающее атом водорода, взаимодействующий с вторично-квантованным полем фотонов, имеет вид

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}^{(0)} - \hat{V} \right\} |\Psi\rangle = 0, \quad \hat{V} = \frac{e}{mc} (\mathbf{A}\hat{p}), \quad -e < 0. \quad (1)$$

Здесь $\hat{H}^{(0)} = \hat{p}^2/(2m) - e^2/r$ — гамильтониан атома водорода, \hat{V} — оператор возмущения. Возмущение периодически зависит от времени, потому что вектор-потенциал фотонного поля (II.70) записывается так:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega^2}{\omega L^3}} \left\{ \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}r)} + \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}^* \hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)} \right\}, \quad (2)$$

где $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}$ — операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором \mathbf{k} и состоянием поляризации $\lambda = 1, 2$, а $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}$ — единичный вектор поляризации. Вектор-потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ нормирован на объем $V = L^3$, потому что поле фотонов рассматривается в кубе с длиной ребра L при циклических граничных условиях.

Рассмотрим квантовый переход, совершающийся атомом водорода из состояния $2p$ в состояние $1s$, который сопровождается излучением одного фотона с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией λ . Фотон излучается из вакуума, поэтому мы имеем дело с процессом спонтанного излучения. Начальное и конечное состояния полной квантовой системы, включающей атом и электромагнитное поле, имеют вид $|i\rangle = |2p; 0, 0, \dots, 0\rangle$ и $|f\rangle = |1s; \mathbf{I}_{\mathbf{k}, \lambda}; 0, \dots, 0\rangle$, причем $\mathbf{I}_{\mathbf{k}, \lambda}$ — число заполнения, отвечающее наличию одного фотона.

Поскольку $\langle \mathbf{I}_{\mathbf{k}, \lambda}; 0, \dots, 0 | \hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^* | 0, 0, \dots, 0 \rangle = 1$, то в матричный элемент оператора возмущения $\langle f | V | i \rangle$, отвечающий нашему процессу, вносят вклад только одно слагаемое из суммы (2), которое включает оператор рождения $\hat{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ и зависит от времени, как $e^{i\omega t}$. Поэтому дифферен-

циальная вероятность нашего квантового перехода в единицу времени записывается следующим образом (см. (II.50)):

$$dW_0^{\lambda} = \frac{2\pi}{\hbar} |(f|\tilde{V}_{k,\lambda}^*|i)|^2 \delta(E_i - E_f + \hbar\omega) d\Omega, \quad (3)$$

$$\tilde{V}_{k,\lambda}^* = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega L^3}} e^{-ikr} (\mathbf{e}_{k,\lambda}^* \hat{\mathbf{p}}).$$

где E_i и E_f — начальная и конечная энергия атома водорода (для состояний $2p$ и $1s$). В этой формуле предполагается далее провести интегрирование по энергии конечных фотонов.

Учитываем, что

$$d\Omega = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} L^3 = \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} L^3 = \frac{\omega^2 d(\hbar\omega)}{\hbar c^3 (2\pi)^3} L^3 d\Omega,$$

так как энергия фотона $E_k = \hbar\omega = \hbar k c$, и $dk = d\omega/c$. Интегрируя в (3) по энергии конечных фотонов при помощи δ -функции, получаем

$$dW_0^{\lambda} = \frac{e^2 \omega_0}{\hbar c 2\pi} \left| \frac{(\mathbf{e}_k^* \lambda \hat{\mathbf{p}}_k)}{mc} \right|^2 d\Omega, \quad \text{где } \mathbf{p}_k = (2\rho|e^{-ikr}\hat{\mathbf{p}}|1s). \quad (4)$$

и мы ввели обозначение $\omega_0 = (E_i - E_f)/\hbar$.

Поскольку характерное значение величины $(kr) \sim ka \sim \hbar\omega/(hc) \sim e^2/a$, $a/(hc) \sim a \approx 1/137 \ll 1$, т. е. является малым для атомных процессов, то можно разложить экспоненту в (4) и пренебречь величиной (kr) по сравнению с единицей⁹¹. Учитывая, кроме того, что

$$\frac{1}{m} \hat{\mathbf{p}}_k = -i\omega_0 \mathbf{r}_k,$$

видим, что матричный элемент оператора возмущения сводится к матричному элементу оператора дипольного электрического момента $\hat{\mathbf{d}} = -e\hat{\mathbf{r}}$. В итоге мы получаем дифференциальную вероятность перехода в дипольном приближении

$$dW_0^{\lambda} = \frac{\omega_0^2}{2\pi\hbar c^3} |(\mathbf{e}_{k,\lambda}^* \hat{\mathbf{d}}_k)|^2 d\Omega. \quad (5)$$

В формуле (5) необходимо провести суммирование по подразделениям конечных фотонов при помощи формулы

$$\sum_{\lambda=1,2} (\mathbf{e}_{k,\lambda})_i (\mathbf{e}_{k,\lambda}^*)_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (6)$$

⁹¹ По той же причине мы пренебрегли слагаемым с магнитным моментом во взаимодействии (II.71).

В результате получим угловое распределение вероятности излучения:

$$dW_{ij} = \frac{\omega_i^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{k}^0 \times \mathbf{d}_j|^2 d\Omega, \quad (7)$$

где $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Интегрируя в (7) по угловым переменным¹⁰⁾, получаем полную вероятность излучения фотонов, сопровождающего переход атома $2p \rightarrow 1s$:

$$W_{ij} = \frac{4}{3} \frac{\omega_i^3}{\hbar c^3} |\mathbf{d}_j|^2. \quad (8)$$

Воспользуемся далее результатами задачи 2.13.1 и увидим, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}_j|^2 &= e^2 |\langle 2p|\hat{r}|1s\rangle|^2 = \\ &= e^2 \left[|\langle 2p|\hat{x}|1s\rangle|^2 + |\langle 2p|\hat{y}|1s\rangle|^2 + |\langle 2p|\hat{z}|1s\rangle|^2 \right] = \left(\frac{128\sqrt{2}}{243} ea \right)^2. \end{aligned}$$

независимо от значения квантового числа $m = 0, \pm 1$ начального состояния ($a = \hbar^3/(me^2)$ — боровский радиус). Имея также в виду, что $\hbar\omega_f = E_2 - E_1 = 3e^2/(8a)$, находим из формулы (8)

$$W_{ij} = \left(\frac{2}{3} \right)^8 \alpha^4 \frac{e}{a}, \quad \text{где } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

— постоянная тонкой структуры. Подставляя численные значения физических величин, получаем, что вероятность $W_{ij} \approx 6.35 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, время жизни $2p$ -состояния $\tau \approx 1.57 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ или $\tau = (3/2)^8 \alpha^{-3} \tau_{si}$, где $\tau_{si} = \hbar\omega/e^2 = 2.4 \cdot 10^{-17} \text{ с}$ — атомная единица времени.

Наконец, проведем анализ углового распределения излученных фотонов. Оно будет различным для начальных состояний атома водорода с квантовыми числами $m = 0$ и $m = \pm 1$ (рисунки 2.17, а и б). Обозначим через φ и θ сферические углы волнового вектора \mathbf{k} . Учитывая значения матричных элементов оператора \hat{d} для начальных состояний $m = 0$ и $m = \pm 1$ (задача 2.13.1), получаем на основе формулы (7)

$$dW_{ij}|_{m=0} = W \sin^2 \theta d\Omega, \quad dW_{ij}|_{m=\pm 1} = W \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad (9)$$

где при помощи W мы обозначили величину

$$W = \frac{\omega_i^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{d}_j|^2 = \frac{3}{8\pi} W_{ij}.$$

¹⁰⁾ При интегрировании можно воспользоваться соотношением $(\mathbf{k}^0 \times \mathbf{k}^0) = \delta_{ij}/3$, где угловыми скобками обозначен интеграл $\frac{1}{4\pi} \oint (\dots) d\Omega$.

Заметим, что для вывода соотношений (9) можно использовать формулу $||\mathbf{k}^0 \times \mathbf{d}_\beta||^2 = (\mathbf{d}_\beta^* \mathbf{d}_\beta) - (\mathbf{k}^0 \mathbf{d}_\beta^*) (\mathbf{k}^0 \mathbf{d}_\beta)$. Интегрирование по углам в выражениях (9) в обоих случаях дает один и тот же результат (8).

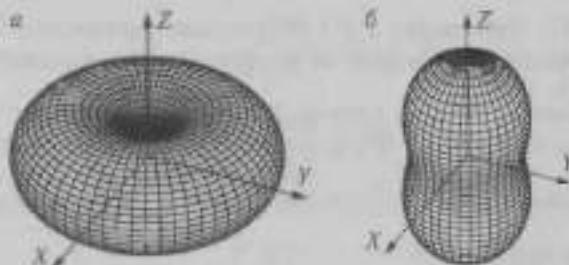


Рис. 2.17. Угловое распределение излучения 2p-состояния атома водорода.

2.13.4. Нейтрон – электрически нейтральная частица со спином $1/2$, обладающая собственным магнитным моментом $\mu = -\mu_n = -1,913 \mu_s$, где $\mu_s = e\hbar/(2m_nc)$ – ядерный магнетон.

Взаимодействие нейтрона с электромагнитным полем (с классическим внешним и вторично-квантованным полем излучения) имеет вид

$$\hat{V} = -\mu(\mathcal{H}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{rad}), \quad \text{где } \mu = -\mu_s \sigma,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{rad} &= \text{rot } \hat{\mathbf{A}}_{rad} = \\ &= i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{\omega\ell^3}} \left\{ [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}] \bar{c}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} - [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}^*] \bar{c}_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right\}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой (II.70).

Гамильтониан невозмущенной задачи записывается в виде $\hat{H}^{(0)} = -\bar{\mu} \mathcal{H}_0 = \mu_s \bar{\sigma} \mathcal{H}_0 = \mu_n \bar{\sigma}_z \mathcal{H}_0$, так как здесь z направлена вдоль поля \mathcal{H}_0 . Волновые функции, собственные для невозмущенного гамильтониана:

$$\chi_1 = \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти функции отвечают уровням энергии невозмущенного гамильтониана $E_{1,2}^{(0)} = \pm \mu_n \mathcal{H}_0$. Как видно, энергия нейтрона в магнитном поле зависит от ориентации магнитного момента по отношению к направлению поля. Причем два разных состояния ориентации магнитного момента обладают различной устойчивостью в отношении взаимодействия с полем фотонов. Поэтому оказываются возможными спонтанные переходы нейтрона между состояниями, отличающимися ориентацией магнитно-

го момента. Такие переходы сопровождаются изменением присутствия спина и одновременным испусканием фотона. Это и есть излучение магнитного момента нейтрона во внешнем магнитном поле.

В нашем случае возможен переход нейтрона из состояния χ_1 в состояние χ_2 , которое обладает большей устойчивостью. Проводя начальные преобразования по аналогии с задачей 2.13.3, мы можем записать дифференциальную вероятность излучения фотона с волновым вектором k и поляризацией λ в виде

$$dW_{12}^{\lambda} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{21}|^2 d\Omega = \frac{\omega_{12}}{2\pi\hbar c} |\langle k \times e_{k,\lambda}^* | \mu_{21} \rangle|^2 d\Omega, \quad (1)$$

где мы взяли обозначения $\omega_{12} = 2\mu_e H_0$, $\mu_{21} = \mu_n(\chi_2|\hat{\sigma}|\chi_1)$. Выражение (1) можно переписать в виде

$$dW_{12}^{\lambda} = \frac{\omega_{12}}{2\pi\hbar c} |\epsilon_{k,\lambda}^* m_{21}|^2 d\Omega, \quad \text{где } m_{21} = [k \times \mu_{21}]$$

Далее суммируем по поляризациям излученных фотонов, как в задаче 2.13.3. В итоге получаем

$$dW_{12} = \frac{\omega_{12}^3}{2\pi\hbar c^3} |\langle k^0 \times \mu_{21} \rangle|^2 d\Omega,$$

где $k^0 = k/k$, и мы учли, что $k[k \times \mu_{21}] = 0$. Интегрируем по углам вылета фотона так же, как и в задаче 2.13.3, и находим полную вероятность излучения в единицу времени:

$$W = \frac{4}{3} \frac{\omega_{12}^3}{\hbar c^3} |\mu_{21}|^2 \quad (2)$$

Очевидно, что излучение имеет магнитно-дипольный характер (ср. (2) и формулу (8) задачи 2.13.3).

Вычисляем матричные элементы:

$$(\mu_{21})_x = \mu_n, \quad (\mu_{21})_y = i\mu_n, \quad (\mu_{21})_z = 0$$

и получаем окончательное выражение для полной вероятности излучения, сопровождаемого переворотом спина в магнитном поле (так называемый спиновый свет нейтрона):

$$W = \frac{64}{3} \frac{\mu_n^3 H_0^2}{\hbar^5 c^2}$$

Проведем численные оценки. Для напряженности поля $H_0 = 1$ кГс получаем время жизни $\tau \approx 1.9 \cdot 10^{20}$ с $\approx 5.9 \cdot 10^{20}$ лет. Таким образом, в лабораторных условиях вероятность данного процесса чрезвычайно мала. Однако в сверхсильных полях $\sim 10^{13}$ Гс, существующих вблизи

астрофизических объектов таких, как нейтронные звезды, вероятность может сильно возрасти, при этом время жизни τ может составить ~ 10 с. Это указывает на большое значение данного процесса именно в астрофизических приложениях.

2.13.5. Фотоэффектом называется реакция «выбивания» электрона из атома падающим фотоном (в задаче речь идет о фотоэффекте на атоме водорода).

В соответствии с условием задачи полагаем, что в начальном состоянии в системе находятся один фотон и атом водорода в основном состоянии, т. е. $|i\rangle = |1s; \mathbf{1}_k\downarrow, 0, 0, \dots, 0\rangle$, а конкретно

$$E_i = E_1 = -\frac{e^2}{2a}, \quad \psi_i = \psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

— энергия и волновая функция основного состояния атома водорода, $a = \hbar^2/(me^2)$ — радиус боровской орбиты. Атом взаимодействует с вторично-квантованным полем фотонов, описываемым вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ (см. (II.70)). Оператор, описывающий взаимодействие, имеет обычный вид:

$$\hat{V} = \frac{e}{mc} (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}})$$

и играет роль оператора возмущения в рассматриваемой задаче ($-e < 0$ — заряд электрона). В результате акта взаимодействия происходит ионизация атома, т. е. атомный электрон переходит в непрерывный спектр. Энергия ионизации в данном случае равна $I = -E_1 = e^2/(2a)$.

Далее мы предположим, что энергия вылетающего из атома электрона велика по сравнению с I , а это значит, что электрон является быстрым, следовательно, можно преибречь влиянием атома на состояние электрона и выбрать конечное состояние системы в виде $|f\rangle = |\mathbf{p}; 0, 0, \dots, 0\rangle$, а конкретно

$$E_f = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad \psi_f = \psi_p(r) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1)$$

— энергия и волновая функция свободного электрона.

Вероятность процесса в единицу времени, во время которого система поглощает энергию радиационного поля, рассчитывается согласно формуле (см. (II.50))

$$d\omega_Q = \frac{2\pi}{\hbar} |V_R|^2 \delta(E_i - E_f + \hbar\omega) d\omega_f, \quad (2)$$

где E_i и E_f — начальная и конечная энергии электрона, а в матричный элемент $V_R = \langle f | \hat{V} | i \rangle$ вносит вклад только одно слагаемое из сум-

мы (II.70), включающее оператор уничтожения $\hat{c}_{k,\lambda}$, так что $\langle 0, 0, \dots, 0 | \hat{c}_{k,\lambda} | 1_{k,\lambda}, 0, \dots, 0 \rangle = 1$. Поэтому $V_B = \langle j | \hat{V}_{k,\lambda} | j \rangle$, где

$$\hat{V}_{k,\lambda} = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega^3}} e^{ikr} (\mathbf{e}_{k,\lambda} \cdot \hat{\mathbf{p}}). \quad (3)$$

Поскольку для волновой функции (1) мы использовали нормировку на объем куба периодичности L^3 , то связь дифференциальной вероятности перехода с дифференциальным сечением определяется соотношением

$$d\sigma = \frac{dW}{j} = L^3 \frac{dW}{v} = L^3 \frac{dW}{c}. \quad (4)$$

где $j = v/L^3$ — плотность потока вероятности при нашем выборе нормировки (для падающих фотонов, очевидно, $v = c$).

Запишем матричный элемент:

$$V_B = \frac{e}{mL^3} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega^3}} \mathbf{e}_{k,\lambda} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + ik \cdot \mathbf{r}} p e^{-\varepsilon/\hbar} d^3 r. \quad (5)$$

В этом выражении можно пренебречь импульсом фотона по сравнению с импульсом электрона, имея в виду, что из закона сохранения энергии (см. (2)) следует

$$\hbar\omega = I + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ll mc^2,$$

т. е. мы считаем электрон нерелятивистским, и поэтому

$$\frac{\hbar\omega}{p} \sim \left(\frac{\hbar\omega}{2mc^2} \right)^{1/2} \ll 1.$$

При вычислении интеграла в (5) удобно вначале проинтегрировать по частям, имея в виду, что $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ и перенести действие производной на плоскую волну. Кроме того необходимо учесть, что $\hbar\omega \gg I$, откуда следует, что $ra/\hbar \gg 1$. Расчет интеграла при этом условии дает

$$\frac{8\pi\hbar^4}{ap^4} \mathbf{p}$$

Для дальнейших вычислений заметим, что

$$dv_I = \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} L^3 = \frac{L^3 p^2 d\varphi d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{L^3 p d(p^2) d\Omega}{2(2\pi\hbar)^3}. \quad (6)$$

Подставляем теперь значение матричного элемента (5) в (2) и, учитывая (4) и (6), интегрируем по энергии конечных электронов при помощи

δ -функции (берем интеграл по $d(\rho^2)$). В итоге дифференциальное сечение нашего процесса приобретает вид

$$d\sigma = 64 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{J}{\hbar\omega} \right)^{1/2} |\mathbf{e}_{k,\lambda} \cdot \mathbf{n}|^2 d\Omega, \quad (7)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор в направлении вылета электрона.

Проводим усреднение по поляризациям начального фотона в выражении (7), используя формулу (6) задачи 2.13.3, разделив результат на два. В результате получаем дифференциальное сечение фотоэффекта для неполяризованных фотонов:

$$d\sigma = 32\alpha a^2 \left(\frac{J}{\hbar\omega} \right)^{1/2} |\mathbf{k}^0 \times \mathbf{n}|^2 d\Omega,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$, $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}/k$ — направление волнового вектора падающего фотона. Интегрируя по угловым переменным, получаем окончательный результат — полное сечение фотоэффекта:

$$\sigma = \frac{256}{3} \alpha a^2 \left(\frac{J}{\hbar\omega} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

В заключение сделаем несколько замечаний относительно полуклассического описания фотоэффекта. При таком подходе электромагнитное поле описывается классически, т. е.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + \mathbf{A}_0^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (9)$$

а частицы описываются методами квантовой механики. Все, сказанное о выборе начальных и конечных состояний для электрона и о приближениях оставается в силе, да и (по большей части) методы решения сохраняются. В основе также лежит формула для вероятности переходов в единицу времени (2). Оператор электромагнитного взаимодействия, очевидно, имеет вид

$$\hat{V} = -\frac{ie}{mc} (\mathbf{A} \hat{\nabla}).$$

Для определенности будем считать, что плоская волна распространяется вдоль оси z , а вектор электрического поля (т. е. поляризация) направлен вдоль оси x , тогда ось z совпадает с направлением вектора \mathbf{k} , а $\mathbf{A}_0 = [A_0, 0, 0]$ (A_0 считаем вещественной величиной). Тогда дифференциальная вероятность переходов в единицу времени, проинтегрированная по энергиям конечных электронов, имеет вид

$$dW_H = \frac{mpe^2}{4\pi^2\hbar^4} |V_H|^2 d\Omega,$$

$$V_H = -\frac{ie\hbar A_0}{mc} \int \frac{1}{L^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi a^2}} e^{-r/a} \right] d^3x. \quad (10)$$



Для вычисления интеграла в (10) тоже нужно вначале проинтегрировать по частям. Сечение процесса равно дифференциальной вероятности, деленной на плотность потока падающих фотонов. Усредненный по времени вектор Пойнтинга направлен вдоль оси z и равен

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{|E \times H|} = \frac{\omega^2}{2\pi c} A_0^2,$$

а плотность потока фотонов, т. е. число фотонов, падающих в 1 секунду на единичную площадку есть $j = \bar{S}/(\hbar\omega)$. В итоге

$$d\sigma = 32 \frac{e^2}{\omega m c a^3} \left(\frac{\hbar}{p} \right)^7 \left(\frac{p_r}{\hbar} \right)^2, \quad \text{где } p_z = p \cos \varphi \sin \theta.$$

Интегрирование по углам дает результат, полностью совпадающий с формулой (8).

3

3.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ

3.1.1. а) Статистическая сумма равна $Z = z_0^N/N!$, где N — число частиц газа, а одиночественная статистическая сумма z_0 имеет вид

$$z_0 = \int d^d \epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d} e^{-\epsilon_i/T}.$$

Для спектра $\epsilon_i = c\phi^k$ мы имеем $z_0 = A V T^{d/k}$, где A — постоянная величина, V — d -мерный объем, занимаемый газом, и T — температура. Соответственно, свободная энергия равна

$$F = -T \ln \frac{z_0^N}{N!} \approx -NT \ln \frac{z_0^N}{N} = -NT \ln \frac{Ae}{N} - NT \ln V - NT \left(\frac{d}{k}\right) \ln T.$$

Определяем давление согласно $P = -(dF/dV)_T$ и получаем $P = NT/V$. Энтропия газа равна

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = N\left(\frac{d}{k} + \ln \frac{Ae}{N}\right) + N \ln V + N\left(\frac{d}{k}\right) \ln T.$$

Соответственно, энергия газа $E = F + TS = (d/k)NT$ прямо пропорциональна температуре, а теплоемкость не зависит от температуры:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{d}{k}\right)N.$$

При этом можно сказать, что на каждую степень свободы в энергии частицы приходится по равной доле $1/k$ в ее энергии и теплоемкости.

б) Запишем свободную энергию газа:

$$F(T, V) = -NT \ln \frac{eV}{N} \int_0^\infty e^{-\epsilon/T} g(\epsilon) d\epsilon,$$

выраженную в терминах однчастичной плотности состояний $g(\varepsilon)$ на единицу объема

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} p^2(\varepsilon) \frac{dp(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{2m^3}{\pi^2\hbar^3} \frac{1}{(mc + \sqrt{m^2c^2 + 2mc\varepsilon})^2} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{m^2c^2 + 2mc\varepsilon}}$$

В области низких температур $T \ll mc^2$ термодинамические функции определяются поведением $g(\varepsilon)$ при малых энергиях $\varepsilon \leq T \ll mc^2$

$$g(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon^2}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{mc^2}\right).$$

Производя интегрирование, получим

$$F = -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \frac{T^3}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \left(1 - \frac{6T}{mc^2}\right) \right] \approx -NT \ln \frac{eV}{N} \frac{T^3}{2\pi^2\hbar^3 c^3} + \frac{6NT^2}{mc^2}$$

Отсюда для теплоемкости имеем низкотемпературное разложение:

$$C_V = 3N \left(1 - \frac{AT}{mc^2}\right)$$

В области высоких температур $T \gg mc^2$ в силу расходящегося характера плотности состояний с ростом энергии

$$g(\varepsilon \gg mc^2) = \frac{m\sqrt{2mc\varepsilon}}{2\pi^2\hbar^3} - \frac{m^2c}{\pi^2\hbar^3} + \dots = \frac{m\sqrt{2mc\varepsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \left(1 - \sqrt{\frac{2mc^2}{\varepsilon}} + \dots\right)$$

зклад в интеграл вносит область $\varepsilon \sim T \rightarrow \infty$. Используя высокознергетическое разложение для $g(\varepsilon)$, найдем

$$\begin{aligned} F &= -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left(1 - 2\sqrt{\frac{2mc^2}{\varepsilon T}} \right) \right] \approx \\ &\approx -NT \ln \frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + 2N\sqrt{\frac{mc^2 T}{\pi}}. \end{aligned}$$

Соответственно высокотемпературное поведение теплоемкости примет вид

$$C_V = \frac{3}{2} N \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2mc^2}{\pi T}}\right).$$

Таким образом, теплоемкость газа зависит от температуры и изменяется в пределах между $3N$ и $3N/2$.

3.1.2. Свободная энергия газа определяется выражением

$$F(T, V) = -NT \ln \frac{e}{N} \int d^3 r \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\epsilon/\hbar + U(r)/T} = \\ = F_0(T, V) - NT \ln \frac{1}{V} \int d^3 r e^{-U(r)/T}.$$

Рассматривая потенциал внешнего поля, как возмущение, разложим экспоненту:

$$\Delta F = F - F_0 = -NT \ln \frac{1}{V} \int d^3 r \left(1 - \frac{U(r)}{T} + \frac{U^2(r)}{2T^2} + \dots \right).$$

Далее, раскладывая логарифм, найдем поправку к свободной энергии газа.

$$\Delta F = N(U) + N \frac{\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2}{2T} + \dots,$$

где $\langle A \rangle = V^{-1} \int A(r) d^3 r$ обозначает среднее от величины $A(r)$ по объему V . После двукратного дифференцирования по температуре получим высокотемпературную поправку к теплоемкости

$$\Delta C = N \frac{\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2}{T^3}.$$

3.1.3. Изменение свободной энергии во внешнем поле $U(z) = mgz$ определяется выражением

$$\Delta F = -NT \ln \frac{1}{\pi R^2 H} \int_{r < R} d^3 r \int_0^H dz e^{-mgz/T}.$$

Простое интегрирование дает:

$$\Delta F = -NT \ln \frac{T}{mgH} (1 - e^{-mgH/T}) = N \frac{mgH}{2} - NT \ln \frac{\sinh mgH/2T}{mgH/2T}.$$

Отсюда получим для изменения теплоемкости во внешнем поле:

$$\Delta C_V = N \left(1 - \frac{(mgH/2T)^2}{\sinh^2 mgH/2T} \right).$$

Предельное поведение ΔC_V в области высоких и низких температур дается выражениями

$$\Delta C_V = N \times \begin{cases} \frac{(mgH)^2}{12T^2}, & T \gg mgH, \\ 1, & T \ll mgH. \end{cases}$$

3.1.4. Изменение свободной энергии во внешнем поле определяется формулой

$$\Delta F = -NT \ln \frac{1}{\pi R^2} \int_{r < R} d^2 r \exp \left[-\frac{U_0}{T} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Несложное интегрирование дает:

$$\Delta F = -NT \ln \frac{T}{U_0} (1 - e^{-U_0/T}) = N \frac{U_0}{2} - NT \ln \frac{\sinh U_0/2T}{U_0/2T}.$$

Отсюда получим для изменения теплоемкости во внешнем поле:

$$\Delta C_V = N \left(1 - \frac{(U_0/2T)^2}{\sinh^2 U_0/2T} \right).$$

3.1.5. Свободная энергия газа определяется выражением

$$\begin{aligned} F(T, N) &= -NT \ln \frac{e}{N} \int dx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-(\epsilon(p)+U(x))/T} = \\ &= -NT \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} 2x_0 \int_0^\infty dx e^{-\pi\omega^2(x^2 - x_0^2)/(2T)} \right]. \end{aligned}$$

Далее удобно ввести безразмерную переменную $\varepsilon = \sqrt{\pi\omega^2 x_0^2/(2T)}$, равную квадратному корню из отношения высоты потенциального барьера между ямами к температуре. Тогда для свободной энергии получим

$$F = -NT \ln \left\{ \frac{eT}{N\hbar\omega} [e^{-\varepsilon^2} \operatorname{erf}(s) + e^{\varepsilon^2} (1 - \operatorname{erf}(s))] \right\},$$

где $\operatorname{erf}(s)$ обозначает интеграл вероятности (функцию ошибок):

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-x^2} dx,$$

а $\operatorname{erf}(s)$ — интеграл вероятности (функцию ошибок) от минимого аргумента:

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{\operatorname{erf}(s)}{s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-x^2} dx.$$

Теплоемкость определяется второй производной по температуре $C(T) = -T(\partial^2 F / \partial T^2)$. Сначала рассмотрим низкотемпературное понеде-

ние, когда температура существенно ниже высоты барьера, разделяющего две ямы $T \ll m\omega^2 x_0^2/2$. Пользуясь разложениями при $z \ll 1$

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z^3}{3} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z^5}{10} + \dots$$

$$\text{erfi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z^3}{3} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z^5}{10} + \dots$$

найдем теплоемкость и соответствующую ей энергию газа при низких температурах:

$$C(T) = \frac{3}{2}N + 18N \left(\frac{T}{m\omega^2 x_0^2} \right)^2$$

$$E = \frac{3}{2}NT + 6N \frac{T^2}{(m\omega^2 x_0^2)^2}$$

При высоких температурах мы воспользуемся асимптотическими разложениями при большом аргументе $z \gg 1$:

$$\text{erf}(z) = 1 + e^{-z^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^3} - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^5} \dots \right)$$

$$\text{erfi}(z) = e^z \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^3} + \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^5} \dots \right)$$

В результате найдем высокотемпературное поведение теплоемкости и энергии газа, когда температура существенно превышает высоту барьера между ямами $T \gg m\omega^2 x_0^2/2$.

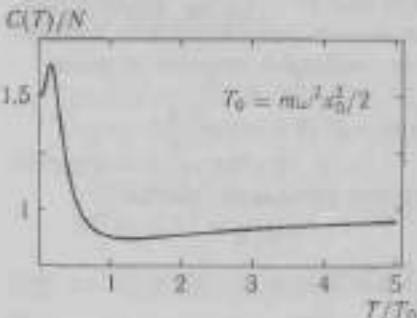


Рис. 3.1. График теплоемкости газа, относенной к одной частице, как функция безразмерной температуры T/T_0 .

нической ловушки, и проходит через минимальное значение при температуре, несколько превышающей высоту барьера; после чего начинает расти, достигая своего максимума, а затем опять уменьшается, приближаясь к своему предельному значению $3N/2$ при нулевой температуре.

$$C(T) = N - \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m\omega^2 x_0^2}{2T} \right)^{3/2}$$

$$E = NT - N \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} + \\ + \frac{2N}{\sqrt{\pi}} m\omega^2 x_0^2 \left(\frac{m\omega^2 x_0^2}{2T} \right)^{1/2}$$

В целом система демонстрирует интересное немонотонное поведение теплоемкости (рис. 3.1). С понижением температуры теплоемкость уменьшается от значения N , характерного для гармо-



3.1.6. Одночастичная плотность состояний определяется выражением

$$g(\varepsilon) = \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})),$$

где $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + U(\mathbf{r})$ — энергия одной частицы. Проводя интегрирование по импульсу, получим

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi\sqrt{2m^{3/2}}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{U(\mathbf{r}) < \varepsilon} d^3r \sqrt{\varepsilon - U(\mathbf{r})}.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью замены переменных $x \rightarrow x\sqrt{2/(m\omega_z^2)}$ и т. д. Окончательно,

$$g(\varepsilon) = \frac{16}{8\pi^2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \int_{x^2+y^2+z^2 < \varepsilon} dx dy dz \sqrt{\varepsilon - (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z}.$$

Свободная энергия для газа из N частиц с одночастичной плотностью состояний $g(\varepsilon)$ дается выражением

$$\begin{aligned} F = -NT \ln \frac{\varepsilon}{N} \int d\varepsilon g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} &= \\ &= -NT \ln \left[\frac{\varepsilon}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z N} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/T} \right] = -NT \ln \frac{eT^3}{N^2\omega_x\omega_y\omega_z N}. \end{aligned}$$

Химический потенциал и теплоемкость находим, соответственно, дифференцированием свободной энергии по числу частиц и температуре:

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -3T \ln \frac{T}{(6\omega_x\omega_y\omega_z N)^{1/3}}, \quad C(T) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = 3N.$$

3.1.7. Одночастичная плотность состояний определяется выражением

$$g(\varepsilon) = \int d^2r \int \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})),$$

где $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + U(\mathbf{r})$ — энергия одной частицы. Проводя интегрирование по импульсу, получим

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^2} \int_{U(\mathbf{r}) < \varepsilon} d^2r = \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{R e^{\varepsilon/(2m)}} 2\pi r dr,$$

Окончательно плотность состояний дается выражением

$$g(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^3} \pi R^2 \exp(-2\varepsilon/U_0)$$

и нарастает экспоненциальным образом с увеличением энергии, что связано с медленным ростом потенциала ловушки.

Вычислим свободную энергию газа из N частиц согласно

$$\begin{aligned} F &= -NT \ln \frac{e}{N} \int d\varepsilon g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} = \\ &= -NT \ln \left[\frac{e m R^2}{N (2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d\varepsilon \exp\left(\frac{2\varepsilon}{U_0} - \frac{\varepsilon}{T}\right) \right] = -NT \ln \left[\frac{e m R^2}{N (2\pi\hbar)^3} \frac{T U_0}{U_0 - 2T} \right]. \end{aligned}$$

Написанная формула верна при $T < U_0/2$. При $T > U_0/2$ интеграл расходится и термодинамическое равновесие невозможно. Таким образом, существует предельная температура $T_{\text{пр}} = U_0/2$, выше которой систему нагреть нельзя. Физическая причина заключается в том, что из-за медленного роста потенциала ловушки частицы с возрастанием энергии расходятся очень далеко, и их кинетическая энергия оказывается малой по сравнению с потенциальной.

Теплоемкость находится двукратным дифференцированием свободной энергии по температуре:

$$C(T) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = N \left(\frac{U_0}{U_0 - 2T} \right)^2.$$

и обращается в бесконечность при стремлении температуры к предельному значению $U_0/2$. Такой теплоемкости соответствует следующая энергия газа в ловушке:

$$E = NT \frac{U_0}{U_0 - 2T}.$$

3.1.8. Свободная энергия газа определяется выражением

$$\begin{aligned} F &= -NT \ln \frac{e}{N} \int_{r>R} d^3 r \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT} - \frac{U(r)}{T}\right) = \\ &= -NT \ln \left[\frac{e (2\pi m T)^{3/2}}{N (2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{U_0}{T} \ln \frac{r}{R}\right) \right]. \end{aligned}$$

Последний интеграл сходится только при $T < U_0/3$, тем самым определяя предельную температуру $T_{\text{пр}} = U_0/3$, при которой еще возможно



термодинамически равновесное состояние газа. Физически это связано с экспоненциальным ростом плотности состояний с увеличением энергии. Вычисляя интеграл, находим свободную энергию:

$$F = -NT \ln \left[\frac{e^{-\frac{(2\pi m T)^{1/2}}{N(2\pi\hbar)^3} 4\pi R^3 \frac{T}{U_0 - 3T}}} \right],$$

а затем и теплоемкость газа

$$C(T) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = N \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{U_0}{U_0 - 3T} \right)^2 \right],$$

которой соответствует энергия газа

$$E = NT \left(\frac{3}{2} + \frac{U_0}{U_0 - 3T} \right).$$

3.1.9. Прежде всего рассмотрим одиночественную плотность состояний $g(\varepsilon)$ для частицы газа с энергией $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + U(\mathbf{r})$:

$$g(\varepsilon) = \int_{r < R} d^2 r \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})) = \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^2} \int_{U(r) < \varepsilon}^R 2\pi r dr.$$

При $\varepsilon > 0$ нижний предел интегрирования равен $r = 0$, а при $\varepsilon < 0$ равен $r = R \exp(\varepsilon/U_0) < R$. Окончательно найдём

$$g(\varepsilon) = \frac{mR^2}{2\hbar^2} \begin{cases} 1, & \varepsilon > 0, \\ \exp(2\varepsilon/U_0), & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Свободная энергия дается выражением

$$\begin{aligned} F &= -NT \ln \frac{\pi}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} = \\ &= -NT \ln \left[\frac{\pi mR^2}{N 2\hbar^2} \left(\int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{2\varepsilon}{U_0} - \frac{\varepsilon}{T}\right) d\varepsilon + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right) d\varepsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл сходится только при условии $T > U_0/2$. Тем самым газ в рассматриваемой ловушке не может быть охлажден ниже предельной температуры $T_{\text{пр}} = U_0/2$. Физически это связано с экспоненциально малой плотностью состояний при отрицательных энергиях частиц газа. Вычисляя интегралы, получим свободную энергию:

$$F = -NT \ln \left(\frac{\pi m}{N \hbar^2} \frac{T^2}{2T - U_0} \right)$$

Отсюда находим теплоемкость:

$$C(T) = N \left[1 + \left(\frac{U_0}{2T - U_0} \right)^2 \right]$$

и соответствующую ей полную энергию газа в ловушке:

$$E = NT \left(1 - \frac{U_0}{2T - U_0} \right)$$

При $T \rightarrow T_{\text{ср}}$ теплоемкость газа стремится к бесконечности, а его энергия неограниченно уменьшается.

3.1.10. а) Если уровни энергии не вырождены, то число состояний с энергией $E = n\varepsilon$ есть число сочетаний из N по n :

$$\Gamma(E = n\varepsilon) = C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

Если нижний уровень g_1 -кратно вырожденный, а верхний — g_2 -кратно вырожденный, то число состояний с энергией $E = n\varepsilon$ будет равно

$$\Gamma(E = n\varepsilon) = g_1^{N-n} g_2^n C_N^n.$$

Соответственно, энтропия системы дается выражением

$$S(E) = \ln \Gamma(E = n\varepsilon) = (N-n)\ln g_1 + n\ln g_2 + \ln \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

В макроскопическом пределе $N \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ достаточно ограничиться приближенем

$$S(E) \approx (N-n)\ln g_1 + n\ln g_2 + N\ln N - (N-n)\ln(N-n) - n\ln n.$$

Обозначая максимально возможную энергию ансамбля двухуровневых систем как $E_{\max} = N\varepsilon$, найдем для энтропии:

$$S(E) = N \left(\ln g_1 + \ln \frac{E_{\max}}{E_{\max} - E} + \frac{E}{E_{\max}} \ln \left(\frac{E_{\max} - E}{E} \frac{g_2}{g_1} \right) \right).$$

Температуру системы определяем из равенства $1/T = \partial S(E)/\partial E$

$$T = \frac{\varepsilon}{\ln \left(\frac{E_{\max} - E}{E} \frac{g_2}{g_1} \right)}$$

Отсюда можно найти долю возбужденных двухуровневых систем или заселенность возбужденного уровня $n(T)/N$ как функцию температуры:

$$\frac{n(T)}{N} = \frac{E}{E_{\max}} = \frac{E}{kT e^{\varepsilon/kT} + g_1}$$

и выразить энтропию также как функцию температуры:

$$\begin{aligned} S(T) &= N \left(\ln g_1 + \ln \frac{E_{\text{ни}}}{E_{\text{ни}} - \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{T E_{\text{ни}}} \right) = \\ &= N \left(\ln(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T}) + \frac{\varepsilon}{T} \frac{g_2 e^{-\varepsilon/T}}{g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T}} \right). \end{aligned}$$

Так как энтропия связана со свободной энергией соотношением $S(T) = -\partial F / \partial T$, то несложно найти и свободную энергию системы, которая оказывается равной

$$F(T) = -NT \ln(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T}) = -T \ln z_0^N$$

б) При использовании распределения Гиббса для определения свободной энергии необходимо только вычислить статистическую сумму системы. В данном случае, когда система представляет ансамбль независимых подсистем, это нетрудно выполнить, так как полная статистическая сумма Z сводится к произведению статистических сумм всех независимых подсистем, т. е. $Z = z_0^N$, где z_0 — статистическая сумма отдельной двухуровневой системы:

$$z_0 = g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T}.$$

Очевидно, что оба подхода дают одинаковый результат.

Зная энтропию $S(T)$, нетрудно найти теплоемкость системы

$$C(T) = N \frac{\varepsilon^2}{T^2} \frac{g_1 g_2 e^{-\varepsilon/T}}{(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T})^2} = N \frac{\varepsilon^2}{T^2} \begin{cases} \frac{g_2}{g_1} e^{-\varepsilon/T}, & T \ll \varepsilon, \\ \frac{g_1 g_2}{(g_1 + g_2)^2}, & T \gg \varepsilon. \end{cases}$$

Максимум теплоемкости лежит в области температур $T \sim \varepsilon$.

Предельные выражения для энтропии очевидны. При $T = 0$ все двухуровневые системы находятся в основном состоянии, и $S(T = 0) = N \ln g_1$. В пределе высоких температур $T \rightarrow \infty$ все состояния — основное и возбужденное — становятся равновероятными, так что заселенность возбужденных состояний становится равной $n/N = g_2/(g_1 + g_2)$, а энтропия достигает своего максимального значения $S(T \rightarrow \infty) = N \ln(g_1 + g_2)$.

Характерной особенностью рассматриваемой системы является то, что ее энергетический спектр ограничен сверху. В этом случае можно осуществить аномальные состояния с инверсной заселенностью, когда заселенность возбужденных состояний (верхних энергетических уровней) превышает заселенность основных состояний (нижних уровней). В нашем случае — это $n/N > g_2/(g_1 + g_2)$. Предельный случай инверсной заселенности реализуется, когда все двухуровневые системы находятся

только в возбужденном состоянии, так что $n/N = 1$, и энергия системы достигает своего максимального значения $E_{\max} = Ne$. Очевидно, что инверсные состояния термодинамически неустойчивы и должны распадаться. Рассматривая функцию $T = T(E)$ при всех допустимых значениях энергии $0 \leq E < E_{\max}$, мы можем формально характеризовать инверсные состояния как состояния с отрицательной температурой. Причем, чем менее отрицательна температура, тем большей энергией обладает система. Энергия системы достигает максимума при $T = -0$, а соответствующая ей энтропия $S(T = -0) = \ln g_2$ меньше максимального возможного значения. Если термодинамические величины (заселенность, энтропия, теплоемкость) при переходе от области нормальных состояний с $T > 0$ к области инверсных состояний с $T < 0$ при увеличении энергии меняются плавным образом, то температура испытывает скачок от $T = +\infty$ к $T = -\infty$.

Теплоемкость отдельной двухуровневой системы с энергией возбуждения ε определяется выражением

$$c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{T^2} \frac{g_1 g_2 e^{-\varepsilon/T}}{(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T})^2}$$

Усредненное значение теплоемкости $C(T)$ для ансамбля двухуровневых систем со случайными значениями энергии возбуждения ε и их числом, задаваемым распределением $\rho(\varepsilon)$, будет равно

$$\begin{aligned} C(T) &= \int_0^\infty c(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{T^2} \frac{g_1 g_2 e^{-\varepsilon/T}}{(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/T})^2} \rho(\varepsilon) d\varepsilon = T \int_0^\infty \frac{g_1 g_2 x^2 e^{-x}}{(g_1 + g_2 e^{-x})^2} \rho(xT) dx. \end{aligned}$$

Если функция $\rho(x)$ непрерывна и остается конечной в нуле, то в пределе низких температур $T \rightarrow 0$ теплоемкость аморфного вещества (стекла) будет линейна по температуре:

$$C(T) = T \rho(0) \int_0^\infty \frac{g_1 g_2 x^2 e^{-x}}{(g_1 + g_2 e^{-x})^2} dx \sim T \rho(0).$$

При $g_1 = g_2$ интеграл легко вычисляется и равен $\pi^2/6$.

3.1.11. Энергия магнитного дипольного момента во внешнем поле \mathbf{H} равна $-(\mu \mathbf{H})$, где $\mu = \mu \mathbf{n}$, μ — величина момента, а \mathbf{n} — единичный вектор, указывающий направление момента в пространстве.

Поскольку магнитные моменты независимы, и, соответственно, в полной энергии их энергии складываются, то статистическая сумма сводится к произведению N одинаковых статистических сумм каждого из моментов, деленного на $N!$ для учета неразличности магнитных моментов, т.е. $Z = z_0^N/N!$, где

$$z_0 = \int \exp(-(-\mu H)/T) d\Omega = \int \exp(\mu H/T) \frac{d\Omega_0}{4\pi}.$$

Интеграл вычисляется по всему пространству изменения единичного вектора \mathbf{H} и нормирован на одно состояния в полном телесном угле $\Omega = 4\pi$.

Выбирая ось z вдоль направления магнитного поля H , мы находим:

$$z_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(\frac{\mu H \cos \theta}{T}\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{\mu H x}{T}\right) dx = \frac{\operatorname{sh} a}{a},$$

где через $a = \mu H/T$ обозначено отношение характерной магнитной энергии к температуре. Соответственно, свободная энергия равна

$$F = NT \ln N! - NT \ln(\operatorname{sh} a/a).$$

Полная намагниченность или полный магнитный момент определяется выражением

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T = -\frac{dF}{da} \frac{\partial a}{\partial H} = \mu N L\left(\frac{\mu H}{T}\right),$$

где функция

$$L(a) = \operatorname{csh} a - 1/a$$

называется функцией Ланжевена. Предельное поведение намагниченности в слабых и сильных полях имеет вид

$$M = \begin{cases} H\mu^2 N/3T, & \mu H \ll T, \\ \mu N(1 - T/\mu H), & \mu H \gg T. \end{cases}$$

В пределе бесконечно большого поля наступает насыщение $M = \mu N$, когда все магнитные моменты ориентируются вдоль направления магнитного поля.

Магнитная восприимчивость определяется соотношением $\chi = \partial M / \partial H$ и равна

$$\chi = \frac{\mu^2 N}{T} L'(\mu H/T), \quad \text{так} \quad L'(a) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a}\right).$$

Положительность восприимчивости означает paramагнитный отклик на магнитное поле. В слабом поле или при высоких температурах

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{\mu^2 N}{T} \quad (\mu H \ll T)$$

Изменение магнитной восприимчивости, обратно пропорциональное температуре, называется законом Кюри. В сильном поле или в пределе низких температур магнитная восприимчивость падает степенным образом с ростом величины поля:

$$\chi = N \frac{T}{\mu^2} \quad (\mu H \gg T),$$

что характерно для систем с бесцелевым спектром возбуждений.

Вычисление энтропии $S = -\partial F / \partial T$ дает

$$S(H) = \ln N! + N \left(\ln \frac{\sinh \mu H / T}{\mu H / T} - \frac{\mu H}{T} \mathcal{L}(\mu H / T) \right).$$

В рамках классической статистической физики имеет смысл говорить только об изменениях энтропии при физическом процессе, а не об абсолютном значении энтропии. Поэтому найдем изменение энтропии в магнитном поле или магнитную часть энтропии:

$$\Delta S(H) = S(H) - S(0) = N \left(\ln \frac{\sinh \mu H / T}{\mu H / T} - \frac{\mu H}{T} \mathcal{L}(\mu H / T) \right)$$

Пределные выражения для слабого и сильного поля:

$$\Delta S(H) = \begin{cases} -\frac{N}{6} \left(\frac{\mu H}{T} \right)^2, & \mu H \ll T, \\ -N \ln \frac{2\mu H}{T}, & \mu H \gg T. \end{cases}$$

Упорядочение магнитных моментов в поле ведет к уменьшению энтропии системы, и в пределе бесконечно большого поля, когда система находится в полностью упорядоченном состоянии, полное изменение энтропии стремится к минус бесконечности. Таким образом, можно считать, что в нулевом поле система имела бесконечную энтропию и была бесконечно вырождена. Магнитная часть теплоемкости находится из соотношения

$$\begin{aligned} \Delta C_m(T, H) &= T \frac{\partial \Delta S(T, H)}{\partial T} = N(\mu H / T)^2 \mathcal{L}'(\mu H / T) = \\ &= N \left(1 - \frac{(\mu H / T)^2}{\sinh^2(\mu H / T)} \right) = \begin{cases} \frac{N}{3} \left(\frac{\mu H}{T} \right)^2, & \mu H \ll T, \\ N, & \mu H \gg T. \end{cases} \end{aligned}$$

Интересно отметить, что теплоемкость магнитных моментов совпадает с изменением теплоемкости идеального газа в однородном поле тяжести, если в соответствующем выражении заменить энергию магнитного момента μH на среднюю энергию частицы в поле тяжести $mgh/2$.

3.1.12. В отсутствие магнитного поля энергия частицы не зависит от ее спина, и кратность вырождения по энергии равна $2S+1$ — числу возможных проекций спина на некоторую ось. Магнитное поле полностью снимает вырождение с образованием $2S+1$ равноотстоящих друг от друга магнитных уровней. При этом энергия k -го уровня равна $E_k = -\mu_{\text{eff}}\mu_0 H$, где μ_{eff} — эффективный магнетон Бора, а целое число k пробегает подряд $2S+1$ значений от $-S$ до S . В силу независимости частиц и аддитивности их энергии полная статистическая сумма дается произведением одночастичных сумм $Z = Z_0^N$, где Z_0 вычисляется суммированием геометрической прогрессии:

$$Z_0 = \sum_{n=-S}^S e^{-E_n/T} = \sum_{n=-S}^S (e^{-\alpha/2S})^n = \frac{\sinh(1+1/2S)\alpha}{\sinh \alpha/2S}.$$

Здесь через $\alpha = \mu_{\text{eff}}SH/T$ обозначено отношение характерной магнитной энергии к температуре. Свободная энергия равна

$$F = -NT \ln \frac{\sinh(1+1/2S)\alpha}{\sinh \alpha/2S}.$$

Подлинная намагниченность или полный магнитный момент определяется выражением

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T = -\frac{dF}{da} \frac{da}{dH} = \mu_{\text{eff}}SNB_S(a),$$

где функция

$$B_S(a) = \left(1 + \frac{1}{2S}\right) \operatorname{ctgh} \left(1 + \frac{1}{2S}\right) a - \frac{1}{2S} \operatorname{eth} \frac{a}{2S}$$

называется функцией Бриллюэна. Для спина $S = 1/2$ функция Бриллюэна принимает простой вид $B_{1/2}(a) = \operatorname{th} a$. В пределе большого значения $S \rightarrow \infty$ функция Бриллюэна переходит в свой классический аналог — функцию Ланжевена $L(a)$. Предельное поведение намагниченности в слабых и сильных полях имеет вид

$$M = \begin{cases} \frac{H\mu_{\text{eff}}^2 S(S+1)N}{3T}, & \mu_{\text{eff}}H \ll T, \\ \mu_{\text{eff}}SN(1 - S^{-1}e^{-\mu_{\text{eff}}H/T}), & \mu_{\text{eff}}H \gg T. \end{cases}$$

В пределе бесконечно большого поля наступает насыщение, и $M = \mu_{\text{зф}} S N$, когда все спины ориентируются вдоль направления магнитного поля.

Магнитную восприимчивость найдем из определения $\chi = \partial M / \partial H$:

$$\chi = N \frac{(\mu_{\text{зф}} S)^2}{T} B_S'(\mu_{\text{зф}} S H / T),$$

где

$$B_S'(a) = \left(\frac{1}{2S} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 a / 2S} - \left(1 + \frac{1}{2S} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 (1 + 1/2S)a}$$

Положительность восприимчивости означает парамагнитный отклик на магнитное поле. В слабом поле или при высоких температурах

$$\chi = N \frac{\mu_{\text{зф}}^2 S(S+1)}{3T} \quad (\mu_{\text{зф}} H \ll T)$$

и температурное поведение магнитной восприимчивости демонстрирует закон Кюри. Множитель $S(S+1)$ отражает тот факт, что в квантовой механике собственное значение S^2 равно $S(S+1)$. В сильном поле или в пределе низких температур, в отличие от классического случая, магнитная восприимчивость вымерзает экспоненциальным образом:

$$\chi = N \frac{\mu_{\text{зф}}^2}{T} e^{-\mu_{\text{зф}} H / T} \quad (\mu_{\text{зф}} H \gg T).$$

Такое низкотемпературное поведение напрямую связано с наличием энергетической щели $\mu_{\text{зф}} H$ в спектре возбуждений.

Вычисление энтропии $S = -\partial F / \partial T$ дает

$$S(T, H) = N \left(\ln \frac{\sinh(1 + 1/2S)a}{\sinh a / 2S} - a B_S(a) \right),$$

где $a = \mu_{\text{зф}} S H / T$.

В отличие от классической системы магнитных моментов здесь имеет смысл уже говорить об абсолютном значении энтропии. Предельные выражения для слабого и сильного полей:

$$S(T, H) = \begin{cases} N \left(\ln(2S+1) - \frac{\mu_{\text{зф}}^2 S(S+1)}{6T^2} H^2 \right), & \mu_{\text{зф}} H \ll T, \\ N \frac{\mu_{\text{зф}} H}{T} e^{-\mu_{\text{зф}} H / T}, & \mu_{\text{зф}} H \gg T. \end{cases}$$

Упорядочение спинов в магнитном поле ведет к уменьшению энтропии системы, и в пределе бесконечно большого поля, когда система находится в полностью упорядоченном и единственном состоянии, энтропия

обращается в нуль. Магнитная часть теплоемкости находится из соотношения

$$C_m(T, H) = T \frac{\partial S(T, H)}{\partial T} = N(\mu_{\text{eff}} SH/T)^2 B'_S(\mu_{\text{eff}} SH/T) = \\ = N \begin{cases} \frac{\mu_{\text{eff}}^2 S(S+1)}{3T^2} H^2, & \mu_{\text{eff}} H \ll T, \\ \left(\frac{\mu_{\text{eff}} H}{T}\right)^2 e^{-\mu_{\text{eff}} H/T}, & \mu_{\text{eff}} H > T. \end{cases}$$

Отметим, что следующее отношение не зависит от температуры и магнитного поля, оставаясь постоянной величиной:

$$\frac{T C_m(T, H)}{H^2 \chi(T, H)} = 1.$$

Переход к классическому пределу должен происходить, когда постоянная Планка $\hbar \rightarrow 0$. Так как эффективный магнетон Бора пропорционален \hbar , то он также должен исчезать в классическом пределе. Это можно компенсировать устремлением величины спина S к бесконечности, так что величина $\mu_{\text{eff}} S$ остается постоянной и переходит в классический магнитный момент, т. е.

$$\begin{cases} \mu_{\text{eff}} \propto \hbar \rightarrow 0, \\ S \rightarrow \infty \end{cases} \quad \text{с условием} \quad \mu_{\text{eff}} S = \mu_{\text{ex}} = \text{const}.$$

Функция Бриллюэна при этом переходит в функцию Ланжевена.

3.1.13. В отсутствие внешнего поля ось квадруполя ориентирована в пространстве случайным образом, поэтому средний квадрупольный момент молекул газа \bar{Q}_A равен нулю. Действительно:

$$\bar{Q}_A = Q(3(n_x n_z) - \delta_{ik}) = 0$$

и силу того, что среднее по пространственному углу Ω равно

$$(n_x n_z) = \int n_x n_z d\Omega / 4\pi = \delta_{ik}/3.$$

Запишем статистическую сумму N квадрупольей во внешнем поле $Z = z_0/N!$, где z_0 — статистическая сумма отдельного квадруполя:

$$z_0 = \int \exp(-Q_A \sigma_A / T) d\Omega / 4\pi,$$

и интеграл вычисляется по всему пространству изменения единичного вектора σ и нормирован на одно состояние в полном телесном угле

$\Omega = 4\pi$. В пределе высоких температур разложим экспоненту до второго порядка и усредним по углу:

$$z_0 = 1 - \frac{(Q_d)\sigma_{ik}}{T} + \frac{(Q_d Q_{ik})\sigma_{ik}\sigma_{jk}}{2T^2} + \dots$$

Второе слагаемое обращается в ноль, а при вычислении последнего слагаемого мы воспользуемся также соотношением

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \rangle = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{il}}{15}$$

После алгебраических вычислений найдем

$$x_0 = 1 + \Delta z_0 = 1 + \frac{Q^2(3\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{ik}\delta_{lm})\sigma_{ik}\sigma_{lm}}{5T^2}.$$

Свободная энергия N квадрупольей во внешнем поле равна

$$F = -NT \ln z_0 = -NT \ln(1 + \Delta z_0) \approx -NT \Delta z_0 = -\frac{NQ^2(M_0\delta_{ik} - \delta_{ik}\delta_{lm})\sigma_{ik}\sigma_{lm}}{5T}.$$

Средний квадрупольный момент находим из соотношения

$$\bar{Q}_d = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = -\frac{2Q^2}{5T} N(3\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{ik}\delta_{lm})\sigma_{lm} = -\frac{2Q^2}{5T} N(3\sigma_{ik} - \delta_{ik}\sigma_{lm}).$$

Зависимость от температуры отвечает закону Кюри. Соотношение для следа отдельного квадруполя $Q_d = 0$ сохраняется, естественно, и для следа средней величины $\bar{Q}_d = 0$.

3.1.14. В условиях аднабатичности магнетик находится в теплоизолированных условиях, не поглощая и не отдавая тепло. Поэтому энтропия магнетика не меняется, оставаясь постоянной. Рассматривая энтропию $S(T, H)$ как функцию температуры и внешнего магнитного поля, в условиях аднабатичности для изменения энтропии мы запишем

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T dH = 0.$$

Отсюда для величины магнитокалорического эффекта имеем:

$$\frac{dT}{dH} = -\frac{(\partial S/\partial H)_T}{(\partial S/\partial T)_H}$$

Производная $(\partial S/\partial T)_H = C_H/T$, где C_H – теплоемкость магнетика в постоянном магнитном поле. Вторую производную преобразуем, пользуясь цепочкой равенств

$$(\partial S/\partial T)_H = -\partial^2 F/\partial H \partial T = -\partial^2 F/\partial T \partial H = (\partial M/\partial T)_H.$$

где M — намагниченность магнетика. Окончательно, найдем:

$$\frac{dT}{dH} = -\frac{T(\partial M/\partial T)_H}{C_H}$$

Поскольку $C_H/T > 0$, охлаждение магнетика ($dT < 0$) или его нагрев ($dT > 0$) целиком зависит от знака производной и знака изменения магнитного поля dH . Более обычная ситуация реализуется, когда $(\partial M/\partial T)_H < 0$, поэтому при выключении магнитного поля ($dH < 0$) будет происходить охлаждение магнетика. При использовании парамагнетиков метод изнабиятического размагничивания особенно эффективен, если исходная температура достаточно низкая, поскольку теплоемкость парамагнетика при низких температурах становится малой благодаря тому, что $C_H \sim T^2$.

3.1.15. Свободная энергия, которая обусловлена вкладом магнитной иннозотропии, дает для соответствующей энтропии выражение

$$S_{\text{ин}} = -\left(\frac{\partial F_{\text{ин}}}{\partial T}\right)_H = -\left(\frac{\partial K(T)}{\partial T}\right)_H \sin^2 \theta.$$

С другой стороны, изменение энтропии определяется равенством

$$\Delta S = \frac{C_H}{T} \Delta T.$$

Отсюда, поскольку полная энтропия в процессе поворота ферромагнетика не меняется, находим изменение температуры:

$$\Delta T = \frac{T}{C_H} \left(\frac{\partial K(T)}{\partial T}\right)_H \Delta(\sin^2 \theta).$$

При повороте на 90° полное прекращение равно $\Delta(\sin^2 \theta) = 1$.

3.1.16. Вклад в энергию двухатомной молекулы, связанный с вращением молекулы относительно ее центра инерции, может быть приближенно описан с помощью гамильтониана $H = \hbar^2 \vec{k}^2 / (2J)$, где $\hbar \vec{k}$ — оператор вращательного момента молекулы и J — ее момент инерции (см. также задачу 2.11.14). Энергетические уровни даются выражением

$$E_{KK_z} = \frac{\hbar^2}{2J} K(K+1),$$

где $K = 0, 1, 2, \dots$ — вращательное квантовое число, и каждый уровень энергии вырожден $2K+1$ раз по проекции \vec{K}_z оператора момента \vec{k} . Соответствующая одиночественная статистическая сумма равна

$$z_0 = \sum_{K=0}^{\infty} (2K+1) \exp\left[-\frac{T_0}{T} K(K+1)\right],$$

где мы обозначили через $T_0 = \hbar^2/(2I)$ — характерную вращательную энергию молекулы. Отсюда вращательная часть свободной энергии, отнесенная к одной молекуле, определяется как $F_{sp} = -T \ln z_0$.

Если молекула образована двумя одинаковыми атомами, то возникает специфика, связанная с перестановкой тождественных частиц и соответствующей ей симметрии волновых функций ядер. Наиболее ярко эффект проявляется в молекуле водорода, где $T_0 \approx 85$ К — одно из наибольших значений. Обратим внимание на спин ядра атома водорода, который является протоном, т.е. фермионом со спином $I = 1/2$. Тогда полная волновая функция двух ядер, включающая в себя произведение спиновой и пространственной (орбитальной) частей, должна быть антисимметричной. При перестановке ядер или изменении направления радиус-вектора, равного разности радиус-векторов положений ядер, пространственная (орбитальная) часть волновой функции умножается на $(-1)^K$. В свою очередь, изменение знака спиновой части волновой функции будет зависеть от суммарного ядерного спина I , который в нашем случае может быть либо равен нулю, когда ядерные спины антипараллельны, либо единице, когда спины параллельны. Число состояний с полным спином $I = 0$ всего одно, и оно антисимметрично по перестановке ядер. Число состояний со спином $I = 1$ будет равно трем, и они все симметричны по перестановке ядер. Таким образом, в целом полная волновая функция ядер при их перестановке умножается на $(-1)^{I+K}$ и требование антисимметричности волновой функции двух фермионов приводит к тому, что $I + K$ обязано быть четным числом.

Водород с $I = 1$ называется ортовородородом, а с $I = 0$ — параводородом. Соответственно, в ортовородороде — три ядерных состояния, и вращательные числа K принимают только нечетные целые значения. В параводороде — всего лишь одно ядерное состояние, и вращательные числа K принимают только четные целые значения. Отметим, что при столкновениях молекул полный спин ядер I может изменяться, и об этом говорят как об орто-пара конверсии. В газе малой плотности вероятность столкновений невелика, и процесс орто-пара конверсии достаточно медленный. Смесь, в которой все возможные спиновые состояния ядер представлены в равной вероятности, называется статистической смесью и, соответственно, в ней молекул ортовородора в три раза больше молекул параводорода.

В чистом параводороде однокачественная статистическая сумма записывается следующим образом:

$$z_p = \sum_{K=0,2,\dots} (2K+1) \exp \left[-\frac{T_0}{T} K(K+1) \right],$$

а в чистом ортовородороде как

$$z_o = \sum_{K=1,3,\dots} 3(2K+1) \exp\left[-\frac{T_0}{T} K(K+1)\right].$$

Отсюда в пределе низких температурах $T \ll T_0$ найдем

$$z_p = 1 + 5e^{-6T_0/T} + \dots$$

$$z_o = 9e^{-3T_0/T} + 21e^{-12T_0/T} + \dots$$

Чтобы найти степенную асимптотику при высоких температурах $T \gg T_0$, удобно воспользоваться формулой типа Эйлера–Маклорена для медленно изменяющихся функций:

$$\sum_{n=0}^N f(n) = \int_{-1/2}^{N+1/2} f(n) dn - \frac{\Delta f}{24} + \frac{7}{5760} \Delta f''' - \frac{31}{967680} \Delta f^{(VI)} + \dots,$$

где $\Delta f^{(k)} = f^{(k)}(N+1/2) - f^{(k)}(-1/2)$ — разность производных k -го порядка на границах в точках $N+1/2$ и $-1/2$.

Асимптотические разложения статистических сумм z_p и z_o по обратной температуре имеют одинаковую структуру в обоих случаях:

$$z_p = \frac{1}{2} \frac{T}{T_0} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \frac{T_0}{T} + \frac{2}{315} \frac{T_0^2}{T^2} + \dots$$

$$z_o = 3 \left(\frac{1}{2} \frac{T}{T_0} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \frac{T_0}{T} + \frac{2}{315} \frac{T_0^2}{T^2} + \dots \right)$$

Далее находим предельные поведения теплоемкости пара и ортовородора на одну молекулу:

$$C_p(T) = \begin{cases} 180 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 e^{-6T_0/T}, & T \ll T_0, \\ 1 + \frac{1}{45} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + \frac{16}{945} \left(\frac{T_0}{T}\right)^3, & T \gg T_0. \end{cases}$$

$$C_o(T) = \begin{cases} \frac{700}{3} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 e^{-12T_0/T}, & T \ll T_0, \\ 1 + \frac{1}{45} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + \frac{16}{945} \left(\frac{T_0}{T}\right)^3, & T \gg T_0. \end{cases}$$

Данная высокотемпературная асимптотика удовлетворительно работает только в области $T > 10T_0$. Обе функции $C_p(T)$ и $C_o(T)$ с понижением температуры проходит через максимумы и далее экспоненциально вы-

мерзают (рис. 3.2). Для ортоизодорода максимум теплоемкости численно несъма невелик. Существенная количественная разница в теплоемкости пара и ортоизодорода в области невысоких температур начинается уже при $T \leq 5T_0$. Величины $6T_0$ и $10T_0$ в показателях экспонент представляют собой разницу между первым возбужденным и инжинион уровнями, соответственно.

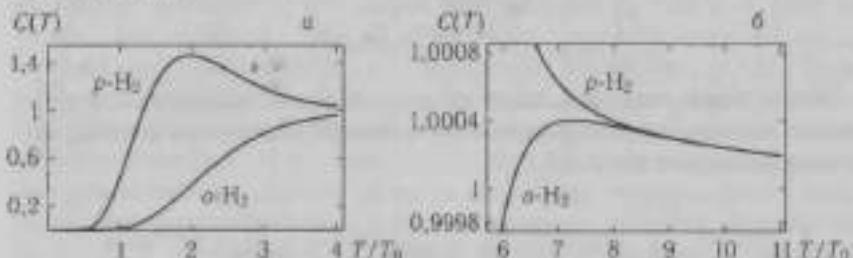


Рис. 3.2. График температурной зависимости теплоемкости паразодорода ($\rho\text{-H}_2$) и ортоизодорода ($\sigma\text{-H}_2$) в области низких температур (а) и промежуточных температур (б).

При полном тепловом равновесии между паром и ортомолекулами каждое ядерное спиновое состояние, пара или орто, должно быть учтено только один раз в статистической сумме с весом $(2K+1)\exp[-T_0 K(K+1)/T]$, т. е. одиночественная статистическая сумма будет суммой статистических сумм пары и ортосостояний:

$$z_{eq} = z_p + z_o = \sum_{K=0}^{\infty} (2 - (-1)^K)(2K+1) \exp\left[-\frac{T_0}{T} K(K+1)\right].$$

Вероятность в тепловом равновесии найти молекулу в состоянии с квантальным числом K равна

$$\omega_K = \frac{1}{z_{eq}} (2 - (-1)^K)(2K+1) \exp\left[-\frac{T_0}{T} K(K+1)\right].$$

Вероятность найти молекулу в парасостоянии с четными K будет равна сумме ω_K по всем четным квантальным числам, а вероятность в ортосостоянии — по всем нечетным. Соответственно, для вероятностей получим

$$\frac{z_p}{z_{eq}} = \frac{z_o}{z_{eq}}.$$

Таким образом, при тепловом равновесии отношение числа молекул орто и паразодорода $x(T)$ зависит от температуры согласно

$$x(T) = \frac{N_o}{N_p} = \frac{z_o}{z_p}.$$

и изменяется от 0 до 3 с ростом температуры от 0 до ∞ . Термодинамическое равновесие при орто-пара конверсии можно рассмотреть и с точки зрения условия равновесия для химической реакции типа $A \rightleftharpoons p$, когда равновесие относительно взаимного превращения достигается при условии равенства химических потенциалов пара и ортомолекул:

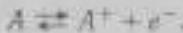
$$\mu_p = -T \ln \frac{z_p}{N_p} = -T \ln \frac{z_o}{N_o} = \mu_o.$$

Отсюда следует предыдущее соотношение. Используя равенства $N_p = N z_p / (z_p + z_o)$, $N_o = N z_o / (z_p + z_o)$, где N — полное число всех молекул, можно проверить, что свободная энергия равновесного газа F_{eq} есть сумма свободных энергий пара и ортовородора F_p и F_o , т.е.

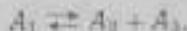
$$\begin{aligned} F_{eq} &= -NT \ln \frac{e(z_p + z_o)}{N} = -T \ln \left(\frac{e(z_p + z_o)}{N} \right)^{N_p} \left(\frac{e(z_p + z_o)}{N} \right)^{N_o} = \\ &= -T \ln \left(\frac{ez_p}{N_p} \right)^{N_p} \left(\frac{ez_o}{N_o} \right)^{N_o} = -N_p T \ln \frac{ez_p}{N_p} - N_o T \ln \frac{ez_o}{N_o} = F_p + F_o. \end{aligned}$$

Если ядро атома водорода было бы бесспиновой частицей, то в сумму по вращательным числам входили бы только четные числа.

3.1.17. Посмотрим на процесс ионизации атома A как на химическую реакцию



При тепловом равновесии должно выполняться равенство суммы химических потенциалов веществ в левой и правой частях уравнения. Действительно, пусть



Термодинамический потенциал зависит от числа частиц каждого из веществ $\Phi = \Phi(P, T; N_1, N_2, N_3)$, но в тепловом равновесии при фиксированных давлении P и температуре T числа частиц N_2 и N_3 есть функции числа частиц N_1 . Требование минимума потенциала дает

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial N_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial N_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial N_3} = 0,$$

$$\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial N_2}{\partial N_1} + \mu_3 \frac{\partial N_3}{\partial N_1} = 0.$$

Так как $\Delta N_2 = -\Delta N_1$ и $\Delta N_3 = -\Delta N_1$, то имеем $\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$.

Химический потенциал одноатомного газа с энергией частиц $\varepsilon_p = p^2/(2m) + \varepsilon_0$ дается выражением

$$\mu(P, T) = -T \ln \left[\frac{T}{P} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g e^{-\varepsilon_0/T} \right],$$

где g — кратность вырождения или статистический вес нижнего уровня частицы. Таким образом, в равновесии имеем следующее равенство:

$$\varepsilon_a + T \ln \left[\frac{P_a}{g_a T} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_a T} \right)^{3/2} \right] = \varepsilon_i + T \ln \left[\frac{P_i}{g_i T} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_i T} \right)^{3/2} \right] + T \ln \left[\frac{P_e}{g_e T} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m T} \right)^{3/2} \right],$$

и энергия электронов отсчитывается от нуля $\varepsilon_p = 0$, а P_a , P_i и P_e — парциальные давления атомов, ионов и электронов, соответственно. Далее найдем, что

$$T \ln \left[T \frac{P_a}{P_i P_e} \frac{g_i g_e}{g_a} \left(\frac{m M_i}{M} \frac{T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] = \varepsilon_i - \varepsilon_a = I_i,$$

где мы ввели потенциал ионизации атома согласно $I_i = \varepsilon_i - \varepsilon_a$.

Введя степень ионизации газа $\alpha = N_i/N$ как отношение числа ионизованных атомов к полному числу атомов, будем иметь с учетом $N_i = N_e = \alpha N$ и числа неионизованных атомов, равного $N_u = (1 - \alpha)N$, для парциальных давлений, выраженных через полное давление $P = P_a + P_i + P_e$:

$$\begin{cases} P_a \sim N_u \sim (1 - \alpha)N, \\ P_i \sim N_i \sim \alpha N, \\ P_e \sim N_e \sim \alpha N \end{cases} \implies P \sim (1 + \alpha)N \implies \begin{cases} P_a \sim \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} P, \\ P_i \sim \frac{\alpha}{1 + \alpha} P, \\ P_e \sim \frac{\alpha}{1 + \alpha} P. \end{cases}$$

Учитывая, что $M_i \approx M_a$ в силу $T \ll M_a$ и что кратность вырождения состояния электрона с одной и той же энергией равна $g_e = 2$, получим

$$\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 P} = \frac{g_a}{2g_e} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \frac{e^{I_i/T}}{T^{3/2}} = K(T).$$

Здесь $K(T)$ — константа разночленя реакции, а выражение

$$\alpha(P, T) = \frac{1}{\sqrt{1 + PK(T)}}$$

полностью определяет зависимость степени ионизации от полного давления и температуры.

В пределе низких температур степень ионизации газа становится экспоненциально малой величиной. Посмотрим, при какой температуре степень ионизации достигает 50 %. Выразим сначала полученный ответ для α через плотность неионизованного газа $n = N/V$, используя соотношение $P = (1 + \alpha)nT$.

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4nTK(T)} - 1}{2nTK(T)},$$

Величину $nTK(T)$ удобно записать в явном безразмерном виде:

$$nTK(T) = \left(\frac{T_e}{T}\right)^{1/2} e^{I_e/T},$$

вводя температуру T_e , согласно

$$T_e = \left(\frac{B_e}{B_i}\right)^{2/3} 2^{1/3} \pi \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m},$$

которая имеет смысл температуры вырождения электронного газа той же плотности n , что и плотность неионизованного газа атомов. Наполовину ионизованный газ становится при $nTK(T) = 2$, т. е. при температуре, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{T_e}{T}\right)^{1/2} e^{I_e/T} = 2, \quad \text{или} \quad T = \frac{I_e}{(3/2) \ln(2^{1/2} T_e/I_e)}.$$

Наиболее интересный случай возникает в пределе достаточно разреженного газа, когда $T_e \ll I_e$. Решив уравнение с помощью последовательных приближений и используя в качестве первого приближения $T \approx I_e$, во втором приближении найдем

$$T \approx \frac{I_e}{(3/2) \ln(2^{1/2} I_e/T_e)} \ll I_e, \quad \text{если} \quad \ln \frac{I_e}{T_e} \gg 1.$$

Таким образом, заметная ионизация газа достигается уже при температуре, заметно меньшей потенциала ионизации атома. В случае, когда T_e сравнима с I_e или превышает I_e , для достижения той же полумаксимальной степени ионизации уже необходима большая температура порядка I_e .

3.1.18. Для химической реакции



тепловое равновесие достигается при следующем условии на химические потенциалы μ_1 , μ_2 , μ_3 , соответственно, газов AB , A , и B :

$$\mu_1 = \mu_2 + \mu_3.$$

Химический потенциал μ и энтропия S идеального газа с постоянной теплоемкостью C_p даются выражениями

$$\mu(P, T) = \varepsilon_0 + T \ln P - C_p T \ln T - \zeta T = T \ln P + \chi(T),$$

$$S = N \left(C_p + \frac{(\varepsilon_0 - \mu)}{T} \right).$$

Здесь постоянная ζ называется химической постоянной газа, а постоянная ε_0 — химический потенциал при нулевой температуре или минимальная энергия частицы газа, от которой отсчитывается ее кинетическая энергия.

Введем степень ионизации газа $\alpha = (N - N_1)/N$ как отношение числа диссоциированных молекул к общему числу исходных молекул N . Далее с учетом стехиометрии реакции для числа атомов A и B , т. е. $N_2 = N_3 = N - N_1$, найдем парциальные давления газа молекул P_1 и атомов P_2, P_3 , выраженные через полное давление $P = P_1 + P_2 + P_3$ в системе:

$$N_1 = (1 - \alpha)N, \quad N_2 = N_3 = \alpha N;$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \frac{P_2}{P} = \frac{P_3}{P} = \frac{N_2}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Из условия на химические потенциалы имеем

$$T \ln \frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha} + \chi_1 = T \ln \frac{\alpha P}{1 + \alpha} + \chi_2 + T \ln \frac{\alpha P}{1 + \alpha} + \chi_3.$$

Отсюда получаем, что степень диссоциации определяется выражением

$$\alpha(P, T) = \frac{1}{\sqrt{1 + PK(T)}},$$

а константа равновесия реакции $K(T)$ равна

$$K(T) = \frac{e^{\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3}}{T^{C_{p1} + C_{p2} - C_{p3}}} e^{\ell/T}.$$

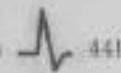
Энергия диссоциации дается соотношением $\ell = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{03} - \varepsilon_{02}$.

Энтропию находим как сумму энтропий каждой из компонент смеси газов:

$$S = \sum_{i=1}^3 N_i \left(C_{pi} + \frac{\varepsilon_{0i}}{T} - \frac{N_i \mu_i}{T} \right) \Big|_{\mu_1 = \mu_2 + \mu_3}.$$

Продолжая далее, найдем

$$S = \sum_{i=1}^3 N_i \left(C_{pi} + \frac{\varepsilon_{0i}}{T} \right) - \frac{(N_1 + N_2) \mu_2 + \mu_3}{T} = N \left(C_{p1} + \alpha (C_{p2} + C_{p3} - C_{p1}) - (1 - \alpha) \frac{1}{T} - \ln P_2 + C_{p2} \ln T + \zeta_2 - \ln P_3 + C_{p3} \ln T + \zeta_3 \right).$$



Отсюда получаем окончательный результат для энтропии:

$$S = N \left(C_{p1} + \alpha(C_{p2} + C_{p3} - C_{p1}) - (1 - \alpha) \frac{I}{T} - 2 \ln \frac{\alpha}{1 + \alpha} + (C_{p2} + C_{p3}) \ln T + \zeta_2 + \zeta_3 - 2 \ln P \right).$$

Теперь мы можем найти теплоемкость, как $T(\partial S / \partial T)$ при постоянном давлении P . При дифференцировании по температуре нужно учесть, что степень диссоциации зависит от температуры. Итак,

$$\frac{C_p}{N} = C_{p2} + C_{p3} + (1 - \alpha) \frac{I}{T} + T\alpha' = \frac{2T\alpha'}{\alpha(1 + \alpha)} + (C_{p2} + C_{p3} - C_{p1})T\alpha'.$$

Это выражение можно упростить, выразив производную $\alpha' = \partial\alpha/\partial T$ через α . Действительно,

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{\alpha^2 P K'}{2} = -\frac{\alpha(1 - \alpha^2)(\ln K)' }{2}, \\ -T(\ln K)' &= C_{p2} + C_{p3} - C_{p1} + \frac{I}{T}; \\ T\alpha' &= \frac{\alpha(1 - \alpha^2)(C_{p2} + C_{p3} - C_{p1} + I/T)}{2}.\end{aligned}$$

Окончательно для теплоемкости, отнесенной к одной частице, получим

$$\frac{C_p}{N} = (1 - \alpha)C_{p1} + \alpha(C_{p2} + C_{p3}) + \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{2} \left(C_{p2} + C_{p3} - C_{p1} + \frac{I}{T} \right)^2.$$

Предельные значения теплоемкости при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ очевидны.

3.1.19. Для вычисления средних значений прежде всего необходимо найти функцию вероятности для флуктуаций термодинамических величин. С этой целью рассмотрим среду, ограниченную объемом V_0 , в котором находится N_0 частиц при температуре T_0 и давлении P_0 . Среда может обмениваться энергией с термостатом, так что ее энергия не сохраняется. Пусть в объеме $V' \ll V_0$, который занимает N' частиц, изменились давление, температура, энтропия и другие возможные величины, но полное число частиц в среде N_0 и полный объем среды V_0 не изменились. Изменение энергии в среде, связанное с флуктуацией, равно

$$U = E_1 - E_0 = e(\sigma', \varepsilon')N' + e(v, s)N - e(v_0, s_0)N_0,$$

где e' , e представляют энергию в области флуктуации объемом V' и вне ее — объемом $V_0 - V'$. Соответственно, σ' , v , v_0 — удельные объемы частиц в области флуктуации, вне ее и в исходной среде. То же самое

относится и к удельным энтропиям s' , s , s_0 , отнесенным к одной частице. Используя сохранение полного числа частиц и полного объема:

$$N_0 = N' + N, \quad V_0 = V' + V,$$

будем иметь

$$U = (e' - e_0)N' + [e(s, s) - e(s_0, s_0)]N.$$

В силу $N' \ll N_0$ и $V' \ll V_0$ мы можем разложить разность энергий во втором слагаемом. Воспользовавшись тем, что $de(v, s) = Tds - Pdv$, найдем

$$U = \Delta E + T_0(s - s_0)N - P_0(v - v_0)N,$$

где ΔE — изменение энергии N' частиц, которые занимают объем V' . Из сохранения объема $N_0v_0 = Nv + N'v'$ имеем

$$N(v - v_0) = -N'(v' - v_0) = -\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема, связанного с N' частицами. Что касается энтропии, то в силу второго закона термодинамики, ее полная величина не обязана сохраняться и может увеличиваться, т. е.

$$eN + e'N \geq e_0N_0, \quad \text{или} \quad (s - s_0)N \geq -(s' - s_0)N' = -\Delta S,$$

где ΔS — изменение энтропии, связанное с флуктуацией N' частиц. Таким образом, энергия флуктуации удовлетворяет следующему неравенству

$$U \geq U_{\min} = \Delta E - T_0\Delta S + P_0\Delta V.$$

Флуктуации, которые происходят с сохранением энтропии, т. е. достаточно медленно, адиабатически, без диссипации энергии, мы будем называть термодинамическими флуктуациями. Им соответствует энергия (минимальная работа) $U = U_{\min}$, которая выражается только через термодинамические функции среды. В реальности всегда есть диссипация энергии, которая зависит от скорости изменения параметров флуктуации, например, объема флуктуации $V = V(t)$, и тогда $U - U_{\min} \propto \propto (dV/dt)^2 > 0$. Как минимум здесь должна возникнуть вторая степень производной, чтобы увеличивалась энтропия и была положительной диссипация энергии независимо от направления процесса. Вероятности нетермодинамических флуктуаций зависят от конкретного типа процесса, а также и от кинетических диссипативных коэффициентов среды, например, вязкости, теплопроводности. Для термодинамических флуктуаций результаты носят универсальный характер.

Ниже мы уберем индекс $иоль$ у всех величин, стоящих перед флуктуациями, и представим минимальную энергию U_{\min} в удобном для вычислений симметричном виде по флуктуирующему переменным, которые



все равноправны. Считая флуктуации малыми по сравнению со средним значением самой флуктуирующей величины, мы будем пренебречь всеми членами выше второго порядка по отклонениям от средних величин. Рассматривая ΔE , как функцию энтропии и объема, разложим ΔE в U_{\min} по отклонениям ΔS и ΔV :

$$\begin{aligned} U_{\min} &= \frac{\partial E}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial E}{\partial V} \Delta V + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} (\Delta V)^2 - T \Delta S + P \Delta V = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial T}{\partial V} \Delta V \right) \Delta S - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial P}{\partial V} \Delta V \right) \Delta V = \frac{1}{2} (\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V). \end{aligned}$$

Для термодинамической устойчивости среди относительно флуктуаций необходимо выполнение условия

$$U_{\min} = \frac{1}{2} (\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V) > 0.$$

Вероятность найти среду с энергией термодинамической флуктуации, равной U_{\min} , будет определяться распределением Гиббса:

$$W \propto \exp \left(-\frac{U_{\min}}{T} \right) \propto \exp \left(-\frac{\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V}{2T} \right).$$

Предэкспоненциальный множитель проще находить из условия нормировки полной вероятности на единицу.

а) Флуктуации энтропии и давления. Выберем в качестве независимых переменных S и P . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta P = \frac{T}{C_P} \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta P, \\ \Delta V &= \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Delta P = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Delta P. \end{aligned}$$

Здесь C_P — теплоемкость при постоянном давлении, и мы учли с помощью определения и перестановки смешанных производных от энталпии W , что $(\partial V / \partial S)_P = \partial^2 W / \partial S \partial P = (\partial T / \partial P)_S$. Члены с $\Delta S \Delta P$ скращаются, и в результате для распределения вероятности имеем

$$W(\Delta S, \Delta P) = A \exp \left[\frac{(\partial V / \partial P)_S}{2T} (\Delta P)^2 - \frac{1}{2C_P} (\Delta S)^2 \right].$$

Постоянная A может быть определена из условия нормировки плотности вероятности $W(\Delta S, \Delta P)$:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W(\Delta S, \Delta P) d(\Delta S) d(\Delta P) = 1.$$

Для средних флюктуаций энтропии и давления, согласно

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 W(x, y) dx dy \quad \text{и} \quad \langle xy \rangle = \int xy W(x, y) dx dy,$$

находим

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = C_V, \quad \langle (\Delta P)^2 \rangle = -T \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S, \quad \langle \Delta S \Delta P \rangle = 0.$$

Из последнего соотношения видно, что термодинамические флюктуации давления и энтропии происходят независимо друг от друга, а из положительности первых двух следуют необходимые условия термодинамической устойчивости среды на теплоемкость $C_V > 0$ и адиабатическую сжимаемость $(\partial P / \partial V)_S < 0$. С учетом того, что плотность $\rho \sim 1/V$, последнее неравенство эквивалентно положительности квадрата скорости звука $(\partial P / \partial \rho)_S > 0$.

б) Флюктуации температуры и объема. Выбирая в качестве независимых переменных T и V , имеем

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \Delta V = \frac{C_V}{T} \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V, \\ \Delta P &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \Delta V. \end{aligned}$$

Здесь C_V — теплоемкость при постоянном объеме, и мы учли с помощью определения и перестановки смешанных производных от свободной энергии F , что $(\partial S / \partial V)_T = -(\partial^2 F / \partial T \partial V) = (\partial P / \partial T)_V$. Члены с $\Delta T \Delta V$ сокращаются и в результате для распределения вероятности имеем

$$W(\Delta T, \Delta V) \propto \exp \left[\frac{(\partial P / \partial V)_T}{2T} (\Delta V)^2 - \frac{C_V}{2T^2} (\Delta T)^2 \right].$$

Отсюда, аналогично, найдем для средних флюктуаций температуры и объема:

$$\langle (\Delta T)^2 \rangle = \frac{T^2}{C_V}, \quad \langle (\Delta V)^2 \rangle = -T \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \langle \Delta T \Delta V \rangle = 0$$

Последнее равенство означает, что температура и объем являются термодинамически независимыми переменными, подобно паре — давление и энтропия, и флюктуируют независимо друг от друга. Необходимые условия термодинамической устойчивости среды подразумевают положительность C_V , т. е. $C_V > 0$, и отрицательность изотермической сжимаемости $(\partial V / \partial P)_T < 0$.

В нашем рассмотрении мы не учитывали члены третьего и более высоких порядков по отклонениям. Для этого, по крайней мере, необходимо, чтобы средние квадраты флуктуаций были много меньше квадрата самой величины, например, $\langle (\Delta T)^2 \rangle \ll T^2$, т.е.

$$\frac{\langle (\Delta T)^2 \rangle}{T^2} = \frac{1}{C_V} \sim \frac{1}{N} \ll 1.$$

Таким образом, относительные флуктуации термодинамических величин обратно пропорциональны корню из числа частиц N .

в) Корреляции термодинамических переменных. Для примера рассмотрим корреляционные средние $\langle \Delta V \Delta P \rangle$ и $\langle \Delta S \Delta T \rangle$. Итак, имеем

$$\Delta P \Delta V = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T (\Delta V)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta T \Delta V.$$

Усреднив по флуктуациям и учитывая, что $\langle \Delta T \Delta V \rangle = 0$, получим

$$\langle \Delta P \Delta V \rangle = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \langle (\Delta V)^2 \rangle = -T.$$

Аналогично находим

$$\langle \Delta S \Delta T \rangle = T.$$

3.1.20. Обобщение минимальной энергии (минимальной работы) U_{min} , рассмотренной в предыдущей задаче, на случай флуктуации числа частиц N дается выражением

$$U_{min} = \Delta E - T \Delta S + P \Delta V - \mu \Delta N = \frac{1}{2} (\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V + \Delta \mu \Delta N),$$

где μ — химический потенциал. Переменные температура, объем, число частиц — термодинамически независимы и флуктуируют независимо друг от друга. Поэтому средний квадрат флуктуации числа частиц можно вычислить, считая температуру и объем постоянными. Тогда минимальная энергия будет равна

$$U_{min} = \Delta F - \mu \Delta N,$$

где $F = E - TS$ — свободная энергия. После разложения флуктуации свободной энергии ΔF при постоянных T и V до второго порядка, найдем, что вероятность флуктуации $W(\Delta N)$ пропорциональна следующей гиббсовской экспоненте:

$$W(\Delta N) \propto \exp \left[-\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V} (\Delta N)^2 \right].$$

Отсюда сразу находим, что

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \frac{T}{(\partial \mu / \partial N)_{T,V}}.$$

Пользуясь тем, что $\Delta \mu = (\partial \mu / \partial N)_{T,V} \Delta N$ при постоянных T и V , получаем, что переменные μ и N — термодинамически зависимые переменные, и

$$\langle \Delta \mu \Delta N \rangle = T.$$

3.1.21. Статистическая сумма определяется гамильтонианом $H(p,q) = H_0(p,q) - qf$ и имеет вид

$$Z_{\text{ss}}(f) \sim \int dp dq e^{-(H_0(q) - qf)/T}.$$

Дифференцируя свободную энергию $\tilde{F}(f)$ по f , находим

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial f} = -T \frac{\partial \ln Z_{\text{ss}}}{\partial f} = -T \frac{\partial Z_{\text{ss}} / \partial f}{Z_{\text{ss}}} = -\langle q \rangle.$$

$$\chi = \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial f} = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial f^2} = T \left[\frac{1}{Z_{\text{ss}}} \frac{\partial^2 Z_{\text{ss}}}{\partial f^2} - \left(\frac{1}{Z_{\text{ss}}} \frac{\partial Z_{\text{ss}}}{\partial f} \right)^2 \right] = T \frac{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}{T^2} = \frac{\langle (\Delta q)^2 \rangle}{T}.$$

Отсюда получаем искомое соотношение:

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle = T \chi,$$

которое представляет собой одно из утверждений флуктуационно-дисципационной теоремы для термодинамически равновесных классических систем.

Этот результат может получить и с использованием понятия о минимальной энергии флуктуации U_{min} из предыдущих задач. Обозначим для удобства $Q = \langle q \rangle$. Тогда для дифференциала потенциала $F(f)$ имеем $dF(f) = -Q df$. Сопряженный потенциал $F(Q)$ вводится согласно $F(Q) = F + Qf$, и его дифференциал равен $dF(Q) = f dQ$. Минимальная энергия или минимальная работа при флуктуации термодинамической переменной Q будет равна

$$U_{\text{min}} = \Delta F(Q) - f \Delta Q = \frac{\partial F}{\partial Q} \Delta Q - f \Delta Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} (\Delta Q)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial Q} (\Delta Q)^2 - \frac{\langle (\Delta Q)^2 \rangle}{2\chi}.$$

Последнее соотношение после усреднения с гауссовой экспонентой $-\langle (\Delta Q)^2 \rangle / 2T\chi$ даст то же равенство $\langle (\Delta Q)^2 \rangle = T\chi$, где $\chi^{-1} = \partial^2 F / \partial Q^2$.

3.2. КВАНТОВЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

3.2.1. Идеальный ферми-газ

3.2.1. Запишем энергию и число частиц ферми-газа, используя понятие одночастичной плотности состояний $g(\varepsilon)$:

$$E = \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1},$$

$$N = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}$$

Химический потенциал неявно определяется из второго уравнения. При вычислениях в области низких температур полезно следующее разложение по температуре:

$$\int_0^{\infty} F(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon \approx F(\mu) + \frac{\pi^2 T^3}{6} F''(\mu).$$

Интегрируя оба выражения по частям и применяя последнее равенство, найдем низкотемпературные $T \ll \varepsilon_F$ разложения для энергии и химического потенциала:

$$E(T) = E(T=0) + \frac{\pi^2}{6} T^3 g(\varepsilon_F), \quad \mu(T) = \varepsilon_F - \frac{\pi^2 T^3}{6} \frac{g'(\varepsilon_F)}{g(\varepsilon_F)}.$$

Отсюда следуют линейные законы для низкотемпературного поведения теплоемкости и энтропии:

$$C(T) = \frac{\pi^2}{3} T g(\varepsilon_F) \quad \text{и} \quad S(T) = \frac{\pi^2}{3} T g(\varepsilon_F).$$

Линейный закон роста теплоемкости и энтропии ферми-газа с температурой не зависит от размерности пространства d . Для химического потенциала это свойство не выполняется. Учитывая, что для d -мерного газа плотность состояний $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{(d-3)/2}$, знак производной химического потенциала по температуре $d\mu/dT^2 \sim -(d-2)$ меняет знак с положительного при $d=1$ на отрицательный при $d=3$ и больше.

3.2.2. Вводя поверхностную плотность ферми-частиц n_S , имеем

$$n_S = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} = \frac{mT}{\pi} \left[\frac{\varepsilon}{T} + \ln(1 + e^{-\mu/T}) \right].$$

Отсюда химический потенциал $\mu = \mu(T)$ равен

$$\mu(T) = \varepsilon_F + T \ln(1 - e^{-\varepsilon_F/T}) = \begin{cases} \varepsilon_F - Te^{-\varepsilon_F/T}, & T \ll \varepsilon_F, \\ -T \ln(T/\varepsilon_F), & T \gg \varepsilon_F, \end{cases}$$

где $\varepsilon_F = \pi \hbar^2 n_0 / m$ — энергия Ферми.

3.2.3. Энергия частицы в магнитном поле будет равна $\varepsilon_p \pm \beta H$ в зависимости от ориентации спина взаду или против магнитного поля. Число частиц со спином взаду или против поля будет равно

$$N_+ = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon - \beta H) g(\varepsilon), \quad N_- = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon + \beta H) g(\varepsilon).$$

Множитель $1/2$ отражает тот факт, что в определение плотности состояний включено две проекции спина. Полный магнитный момент $M = \beta(N_+ - N_-)$ будет равен

$$M = \frac{\beta}{2} \int_0^\infty d\varepsilon [f(\varepsilon - \beta H) - f(\varepsilon + \beta H)] g(\varepsilon).$$

В слабом магнитном поле можно разложить под интегралом разность функций распределения и найти парамагнитную восприимчивость согласно $M = \chi_P H$:

$$\chi_P = \beta^2 \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) g(\varepsilon).$$

Спиновая (парамагнитная) восприимчивость выраженного ферми-газа называется также восприимчивостью Паули и при низких $T \ll \varepsilon_F$ температурах для нее имеется разложение

$$\chi_P = \beta^2 g(\varepsilon_F) \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_F^2} \ln g(\varepsilon_F) \right).$$

Оставаясь конечной при нулевой температуре, парамагнитная восприимчивость Паули с ростом температуры ведет себя по-разному в зависимости от размерности системы, подобно случаю с химическим потенциалом. Нетрудно видеть, что $\partial^2 \ln g(\varepsilon) / \partial \varepsilon^2 = -(d/2 - 1)/\varepsilon^2$, где d — размерность пространства.

3.2.4. При полной поляризации газа в состояние с одним и тем же квазипартикулом можно поместить только один фермion, а не два, как в случае нулевого магнитного поля. Поэтому размер ферми-сферы увеличится и

будет равен $p_F = 2^{1/3} p_0$, где p_0 — импульс Ферми без учета магнитного поля. Соответственно, энергия Ферми равна $\epsilon_F = 2^{2/3} \epsilon_0$, где ϵ_0 — энергия Ферми в нулевом поле.

Пусть N_+ (N_-) — число частиц с магнитными моментами, ориентированными вдоль (против) магнитного поля. Тогда соответствующие импульсы Ферми и числа частиц удовлетворяют соотношениям

$$p_+^3 = 6\pi^2 N_+, \quad p_-^3 = 6\pi^2 N_-, \quad p_0^3 = 3\pi^2 N, \quad \text{и} \quad N_+ + N_- = N.$$

Отсюда

$$\left(\frac{p_+}{p_0}\right)^3 + \left(\frac{p_-}{p_0}\right)^3 = 2.$$

Для энергий Ферми фермионов с магнитными моментами, ориентированными вдоль и против поля, имеем

$$\frac{p_+^2}{2m} - \frac{p_-^2}{2m} = 2\beta H, \quad \text{или} \quad \left(\frac{p_+}{p_0}\right)^2 - \left(\frac{p_-}{p_0}\right)^2 = \frac{2\beta H}{\epsilon_0},$$

где β — магнитный момент фермиона. Два уравнения на p_+ и p_- полностью определяют зависимости p_+ и p_- от магнитного поля H . В полях $H > H_c = \epsilon_0/(2^{1/3}\beta)$ ферми-газ становится полностью поляризованным.

Отношение квадратов скорости звука дается соотношением

$$\frac{c^2(H)}{c^2(0)} = \frac{2p_0}{p_+ + p_-}, \quad \frac{c^2(H \geq H_c)}{c^2(0)} = 2^{1/3}, \quad c(0) = \frac{p_0}{\sqrt{3}m}.$$

Химический потенциал газа в магнитном поле будет

$$\mu(H) = \epsilon_0 \frac{2p_0}{p_+ + p_-} - \beta H \frac{p_+ - p_-}{p_+ + p_-}.$$

3.2.5. В пренебрежении взаимодействием между атомами примеси ${}^3\text{He}$ свободная энергия единицы объема раствора при $T = 0$ дается выражением

$$F(n_4, n_3) = F_4^{(0)}(n_4) - n_3 \Delta + \frac{3}{5} \frac{p_0^2}{2M} n_3,$$

где $p_0 = \hbar(3\pi^2 n_3)^{1/3}$ — импульс Ферми. Дифференцируя по n_3 , найдем химический потенциал ${}^3\text{He}$:

$$\mu_3 = -\Delta + \frac{p_0^2}{2M}.$$

Химический потенциал ${}^4\text{He}$ в растворе равен

$$\mu_4 = \mu_4^{(0)} - \frac{\partial \Delta}{\partial n_4} n_3 - \frac{3}{5} \frac{\partial \ln M}{\partial n_4} \frac{p_0^2}{2M} n_3.$$

Зависимость Δ и M от плотности n_4 несущественна, и в первом приближении ее можно пренебречь, положив $\mu_4 = \mu_4^{(0)}$. Изменение химических потенциалов частиц в растворе приведет к изменению давления, которое можно выразить из приращения термодинамического потенциала Ω :

$$dP = n_3 d\mu_3 + n_4 d\mu_4.$$

С учетом $d\mu_4 \approx d\mu_4^{(0)} = 0$ найдем осмотическое давление

$$\Pi = \int_0^{n_2} n_3 \frac{\partial \mu}{\partial n_3} dn_3 = \int_0^0 \frac{2}{3} \frac{\rho_0^3}{2M} dn_3 = \frac{2}{3} \frac{\rho_0^3}{2M} n_3,$$

которое приблизительно равно давлению идеального ферми-газа.

В полностью поляризованном растворе осмотическое давление увеличится в $2^{2/3}$ раз.

3.2.6. Новый участок электронного спектра дает вклад в изменение плотности одночастичных состояний $g(\varepsilon) = g_0(\varepsilon) + \delta g(\varepsilon)$, где

$$\delta g(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \Delta, \\ \gamma(\varepsilon - \Delta)^{1/2}, & \varepsilon \geq \Delta \quad (\gamma = Vm\sqrt{2m}/\pi^2\hbar^3). \end{cases}$$

Изменение потенциала Ω определяется выражением

$$\delta\Omega = -T \int d\varepsilon \delta g(\varepsilon) \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon)/T}),$$

которое после интегрирования по частям принимает вид

$$\delta\Omega = -\frac{2}{3}\gamma \int_{\Delta}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \Delta)^{1/2}}{e^{(\mu - \varepsilon)/T} + 1} d\varepsilon.$$

Предельные случаи в зависимости от соотношения между температурой T и отклонением химического потенциала от порога зоны ($\mu - \Delta$) даются формулами

$$\delta\Omega = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}}{8}(4 - \sqrt{2})\gamma T^{5/2} \left[\zeta(5/2) + \frac{2}{3}(3 - \sqrt{2})\zeta(3/2) \frac{(\mu - \Delta)}{T} \right], & T \gg \mu - \Delta, \\ -\frac{4}{15}\gamma(\mu - \Delta)^{5/2} - \frac{\pi^2}{6}\gamma T^2(\mu - \Delta)^{1/2}, & T \ll \mu - \Delta. \end{cases}$$

Отсюда при стремлении $T \rightarrow 0$ имеем корневую аномалию в электронной теплоемкости:

$$\delta\left(\frac{C(T=0)}{T}\right) = \begin{cases} 0, & \mu < \Delta, \\ \frac{\pi^2}{3}\gamma(\mu - \Delta)^{1/2}, & \mu > \Delta \end{cases}$$

При изменении давления P меняется химический потенциал $\mu = \mu(P)$, и в случае малых изменений имеем

$$\mu - \Delta = \mu(P) - \mu(P_c) \approx \frac{\partial \mu}{\partial P}(P - P_c).$$

Та же аномальная часть, связанная с $\delta\Omega$, имеется и у термодинамического потенциала $\Phi(P, T)$. При нулевой температуре будем иметь

$$\delta\Phi = \delta\Omega = \begin{cases} 0, & P < P_c, \\ -\frac{4}{15}\gamma\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)^{1/2}(P - P_c)^{5/2}, & P > P_c. \end{cases}$$

Отсюда следует, что модуль объемного сжатия

$$\alpha = -V^{-1}\frac{\partial V}{\partial P} = -V^{-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial P^2} \sim (P - P_c)^{1/2}$$

тоже имеет корневую особенность. Конечные температуры $T \gtrsim |\mu - \Delta|$ размывают и сглаживают особенности в электронных свойствах.

3.2.7. Простейший способ ввести квазиклассическое описание — это использовать приближение локальной плотности для функции распределения Ферми

$$f(r, p) = (e^{(c(r, p) - \mu)/T} + 1)^{-1},$$

где $c(r, p) = p^2/(2m) + U(r)$ — классическая энергия частицы и μ — химический потенциал, определяемый из нормировочного условия на полное число частиц:

$$N = 2 \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(r, p) = \int_0^\infty \frac{\nu(r) dr}{e^{(c(r) - \mu)/T} + 1}.$$

Здесь мы ввели одночастичную плотность состояний

$$\nu(r) = 2 \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - c(r, p)) = \frac{e^2}{h^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}.$$

С введением плотности состояний легко вычисляются термодинамические функции, например, энергия газа:

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{e^{\nu(\varepsilon)} d\varepsilon}{e^{(E-\mu)/T} + 1}$$

При $T=0$ химический потенциал определяет энергию Ферми $\varepsilon_F = \mu(T=0)$. Из нормировочного условия имеем

$$\varepsilon_F = \hbar(3N\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$$

Соответственно, энергия газа E_0 при $T=0$ равна

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \nu(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\varepsilon_F^3}{4\pi^2 \omega_x \omega_y \omega_z} = \frac{3}{4} N e_F.$$

Низкотемпературные поправки к энергии, химическому потенциалу, энтропии и теплоемкости очевидны:

$$E(T) = E_0 + \frac{\pi^2}{6} T^2 \nu(\varepsilon_F), \quad \mu(T) = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{3} \frac{T^2}{\varepsilon_F},$$

$$S(T) = \frac{\varepsilon_F^2}{3} T \nu(\varepsilon_F), \quad C(T) = \frac{\pi^2}{3} T \nu(\varepsilon_F).$$

Здесь $\nu(\varepsilon_F) = \varepsilon_F^2 / (\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z) = 3N/\varepsilon_F$ — плотность состояний на поверхности Ферми.

Распределение плотности частиц $n(\mathbf{r})$ в ловушке можно найти интегрированием функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в импульсном пространстве. При $T=0$ выполнено $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}))$ и тогда

$$n(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} (\varepsilon_F - U(\mathbf{r}))^{3/2} =$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{N}{R_x R_y R_z} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right)^{3/2}.$$

Найденное выше распределение плотности фермионов называется распределением Томаса-Ферми и в данной ловушке имеет форму эллипсоида с полуосьюми R_x , R_y и R_z согласно

$$\frac{1}{2} m \omega_i^2 R_i^2 = \varepsilon_F = \frac{\rho_r^2}{2m} \quad (i = x, y, z).$$

Интегрируя функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ по координатам, найдем импульсное распределение для частиц. При $T = 0$ получим

$$n(\mathbf{p}) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \theta(\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) = \frac{8N}{\pi^2 p_F^3} \left(1 - \frac{p^2}{p_F^2}\right)^{3/2}.$$

для $p < p_F$ и $n(\mathbf{p}) = 0$ в обратном случае. Это уравнение является аналогом импульсного распределения в виде ступеньки $\theta(1 - p^2/p_F^2)$ в однородном Ферми-газе. Заметим, что значение граничного импульса $p_F = \hbar[3\pi^2 n(r=0)]^{1/3}$ в обоих случаях совпадает.

3.2.8. Рассмотрение аналогично предыдущей задаче. Одночастичная плотность состояний, отнесенная к 1 см³ поверхности, дается выражением

$$\nu(\varepsilon) = 2 \int_0^\infty dz \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - mgz\right) = \frac{(2\pi\hbar)^3/2}{3\pi^2 \hbar^3 mg}.$$

Химический потенциал μ находится из условия нормировки:

$$N = 2 \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} / (\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int_0^\infty \frac{\nu(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1}.$$

Отсюда при $T = 0$ находим энергию Ферми $\varepsilon_F = \mu(T = 0)$ и пограничный импульс p_F :

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad \text{и} \quad p_F = \hbar \left(\frac{15\pi^2 N m^2 g}{h^3} \right)^{1/3}.$$

Распределение плотности нейтронов по высоте дается при $T = 0$ соотношением

$$n(z) = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(\varepsilon_F - \frac{p^2}{2m} - mgz\right) = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{z}{z_{max}}\right)^{3/2}.$$

Таким образом, использование ящика высотой большей, чем $z_{max} = -\varepsilon_F/(mg)$, не имеет смысла, так как плотность нейтронов при $z > z_{max}$ пренебрежимо мала. Это остается справедливым, пока температура достаточно низкая $T \ll \varepsilon_F$. Распределение в импульсном пространстве также легко находится:

$$n(\mathbf{p}) = \int \frac{2dz}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(\varepsilon_F - \frac{p^2}{2m} - mgz\right) = \frac{15N}{8\pi p_F^3} \left(1 - \frac{p_F^2}{p^2}\right) \theta(p_F^2 - p^2).$$

3.2.9. В потенциале $U(r) = -eQ/r$ энергия k -го уровня равна $\varepsilon_k = -\varepsilon_0/k^2$, где $\varepsilon_0 = m(eQ)^2/(2\hbar^2)$. При $T=0$ электроны будут последовательно заполнять уровни в соответствии с принципом Паули. На каждый уровень может быть помещено $2k^2$ электронов. Таким образом, для заполнения полностью последнего n -го уровня необходимо следующее число электронов:

$$N = \sum_{k=1}^n 2k^2 = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Big|_{n \gg 1} = \frac{2}{3} n^3.$$

Отсюда номер последнего заполненного уровня $n \approx (3N/2)^{1/3}$, а его энергия и, соответственно, энергия Ферми будет приблизительно

$$\varepsilon_F \approx -\varepsilon_0 \left(\frac{2}{3N} \right)^{2/3}.$$

Полная энергия всех электронов: $E \approx -3N\varepsilon_F$.

При конечной температуре условие нормировки примет вид

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{e^{-(\varepsilon_k/\hbar^2 + \mu)/T} + 1},$$

и это условие невозможно удовлетворить при конечной температуре. Причину такого поведения можно увидеть из сильной расходности плотности состояний при $c \rightarrow -0$:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_0}{|\varepsilon|} \right)^{3/2}.$$

3.2.10. При температуре $T=0$ вырождение последнего по энергии уровня, занятого электронами, — разное в случае четного числа и нечетного числа электронов. Так как один и тот же уровень энергии может быть занят максимум двумя электронами с противоположными спинами, то в случае с четным числом электронов, уровень Ферми полностью занят. При нечетном числе электронов на уровне Ферми находится только один электрон, и состояние дважды вырождено по проекции спина. Из условия $T < \delta$ следует, что только уровни, наиболее близкие к уровню Ферми, могут существенно влиять на инакометаболические свойства частицы. Для оценки теплоемкости в пределе $T \rightarrow 0$ достаточно учесть только уровни, отстоящие от уровня Ферми не более, чем на δ . Соответственно, статистическая сумма Z и свободная энергия F для четного числа и нечетного числа электронов приблизительно равны

$$Z_{\text{чет}} = 1 + 4e^{-\delta/T} + \dots, \quad F_{\text{чет}} \approx -4Te^{-\delta/T};$$

$$Z_{\text{неч}} = 2e^{-\delta/T} + 4e^{-2\delta/T} + \dots, \quad F_{\text{неч}} \approx \delta - T \ln 2 - 2Te^{-\delta/T}.$$

Дважды дифференцируя по температуре, для теплоемкостей приближенно найдем

$$C_{\text{ин}} \approx 4 \left(\frac{\delta}{T} \right)^2 e^{-\delta/T} \quad \text{и} \quad C_{\text{вын}} \approx 2 \left(\frac{\delta}{T} \right)^2 e^{-\delta/T}.$$

Таким образом, в пределе $T \rightarrow 0$ поведение теплоемкостей качественно совпадает, хотя и отличается по величине.

В поведении спиновой восприимчивости разница оказывается более существенной. Действительно, в магнитном поле H каждый уровень расщепляется на два магнитных подуровня, симметрично отстоящих относительно уровня в нулевом поле на $\pm \beta H$, где β — магнитный момент электрона. В слабом поле $2\beta H < \delta$ при четном заполнении металлической частицы для возбуждения магнитного состояния необходимо затратить энергию $\delta - 2\beta H > 0$. Наоборот, в случае нечетного заполнения в силу вырожденности уровня Ферми по спину, энергия возбуждения отсутствует и электрон на этом уровне будет вести себя подобно свободному спину, т. е. обладать заметной восприимчивостью. В слабом поле получим

$$\begin{aligned} Z_{\text{вын}} &= 1 + e^{-\frac{\delta-\beta H}{T}} + e^{-\frac{\delta}{T}} + e^{-\frac{\delta+\beta H}{T}} + \dots = \\ &= 1 + 2 \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2\beta H}{T} \right) e^{-\delta/T} + \dots; \\ Z_{\text{инт}} &= e^{-\frac{\delta-\beta H}{T}} + e^{-\frac{\delta+\beta H}{T}} + 2e^{-\frac{\delta-\beta H}{T}} + 2e^{-\frac{\delta+\beta H}{T}} + \dots = \\ &= 2 \operatorname{ch} \frac{\beta H}{T} e^{-\delta/T} (1 + 2e^{-\delta/T}) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда находим спиновую восприимчивость, используя соотношение $\chi = -T \partial F / (\partial H^2)$

$$\chi_{\text{вын}} = 8 \left(\frac{\beta^2}{T} \right) e^{-\delta/T} \quad \text{и} \quad \chi_{\text{инт}} \approx \frac{\beta^2}{T}.$$

Таким образом, мы приходим к качественно разному поведению для восприимчивости при $T \rightarrow 0$.

Более подробное рассмотрение дает следующий результат для разности в энергиях нечетного и четного заполнения электронами металлической частицы:

$$\delta F(T) = F_{\text{вын}}(T) - F_{\text{инт}}(T) = -T \ln \frac{1 - f(T)}{1 + f(T)},$$

где

$$f(T) = \prod_{k,\sigma} \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k,\sigma}}{2T} = \exp \left(\sum_{k,\sigma} \ln \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k,\sigma}}{2T} \right)$$

и k обозначает номер уровня, а σ — проекцию спина.

3.2.11. Для плотности состояний имеем

$$g(\varepsilon) = \nu \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} [\delta(\varepsilon - \omega p) + \delta(\varepsilon + \omega p)] = \nu \frac{|\varepsilon|}{2\pi\hbar^2 c^2},$$

где $\nu = 2 \times 2 = 4$ — кратность вырождения по спину и числу конических зон.

Дифференцируя по температуре выражение для энергии, отнесенной к единице площади,

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon \cdot g(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1}$$

и, считав химический потенциал фиксированным, найдем

$$C(T) = \frac{\nu}{2\pi\hbar^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon \cdot |\varepsilon|}{47 \operatorname{ch}^2(\varepsilon - \mu)/2T} \frac{\varepsilon - \mu}{T}.$$

Наиболее интересен случай, когда химический потенциал проходит через коническую точку спектра, т. е. $\mu = 0$. В этом случае ферми-поверхность вырождается в точку и единственный параметр, имеющий размерность энергии, — это температура. Параметром длины будет $\xi(T) = \hbar\nu/T$. Окончательно

$$C(T) = \frac{\nu T^2}{2\pi\hbar^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{dx \cdot x^2}{4 \operatorname{ch}^2 x/2} = \nu \frac{9\zeta(3)}{2\pi} \frac{T^2}{\hbar^2 c^2}$$

Такая зависимость является простым следствием конической формы изоэнергетической поверхности и плотности состояний $g(\varepsilon) \sim |\varepsilon|$. Действительно, только электроны вблизи конической точки с энергией $|\varepsilon| \lesssim T$ вносят вклад в тепловое возбуждение системы. Число таких электронов порядка $N(T) \sim Tg(\varepsilon \sim T)$, и, соответственно, энергия теплового возбуждения $E(T) \sim TN(T) \sim T^2$. В результате это дает $C \sim T^2$.

Зависимость $C(T) \sim T^2$ справедлива пока $|\mu| \ll T$. В обратном пределе $|\mu| \gg T$ возбуждения находятся вдали от конической точки, ферми-поверхность представляет окружность вместо точки, и температурная зависимость теплоемкости становится привычной, т. е. линейной и пропорциональной плотности состояний на уровне химического потенциала:

$$C(T) = \frac{2\pi^2}{3} T g(|\mu|) = \nu \frac{\pi}{3} \frac{|\mu|}{\hbar^2 c^2} T, \quad (|\mu| \gg T).$$

В условиях, когда фиксируется число частиц, температурные зависимости сохраняются, но численные коэффициенты могут изменяться. От-

метим отдельно случай $\mu(T=0)=0$. Эта точка является фиксированной точкой в том смысле, что при изменениях температуры остается $\mu(T)=0$. Если $\mu(T=0)=\mu_0 \neq 0$, то можно выделить две области температур $T \ll |\mu|$ и $T \gg |\mu|$. При низких температурах, пока $T \ll |\mu|$, зависимость $\mu(T)$ имеет обычное фермиевское поведение $\mu(T) - \mu_0 \sim -T^2/\mu_0$. В области $T \gtrsim |\mu_0|$ поведение $\mu(T)$ становится нетрадиционным со степенным спаданием: $\mu(T) \sim \mu_0|\mu_0|/T$.

3.2.12. Энергия электрона в магнитном поле равна $\epsilon_F \pm \beta H$, где β — эффективный магнитный момент частицы. Полный магнитный момент, выраженный через функцию распределения $f(\varepsilon)$, дается соотношением

$$M = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) [f(\varepsilon - \beta H) - f(\varepsilon + \beta H)],$$

где $g(\varepsilon) = v|\varepsilon|/(2\pi\hbar^2 v^2)$ — плотность состояний с учетом двух проекций спина. Дифференцированием по магнитному полю найдем восприимчивость $\chi_F = -\partial M / \partial H$:

$$\begin{aligned} \chi_F &= -\frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \left(\frac{\partial f(\varepsilon - \beta H)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f(\varepsilon + \beta H)}{\partial \varepsilon} \right) = \\ &= \frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon [g(\varepsilon - \beta H) + g(\varepsilon + \beta H)] \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) = \\ &= \frac{v}{2\pi\hbar^2 v^2} \frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{[\varepsilon + \mu - \beta H] + [\varepsilon + \mu + \beta H]}{4T} \operatorname{ch}^2(\varepsilon/2T) \end{aligned}$$

Далее мы используем соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+a|}{\operatorname{ch}^2 x} dx = 2 \ln(2 \operatorname{ch} a),$$

и в итоге получаем следующую зависимость:

$$\chi_F(T, H) = \frac{v}{2\pi\hbar^2 v^2} \beta^2 T \ln \left[2 \left(\operatorname{ch} \frac{\mu}{T} + \operatorname{ch} \frac{\beta H}{T} \right) \right].$$

Отметим, что μ и βH входят в ответ симметричным образом. Простые соотношения даются простыми выражениями. При $T=0$

$$\chi_F(H) = \begin{cases} \beta^2 g(\mu) \sim \text{const}, & \beta H < |\mu| \quad (\text{слабое поле}), \\ \beta^2 g(dH) \sim H, & \beta H > |\mu| \quad (\text{сильное поле}). \end{cases}$$

При конечных температурах в пределе слабого поля $\beta H \ll T$ имеем

$$\begin{aligned}\chi^s(T) &= \frac{\nu}{2\pi\hbar^2 a^3} 2\beta^2 T \ln(2\cosh \mu/2T) \approx \\ &\approx \begin{cases} \beta^2 g(\mu) \sim \text{const}, & T \ll |\mu| \quad (\text{низкие температуры}), \\ 2 \ln 2 \beta^2 g(T) \sim T, & T \gg |\mu| \quad (\text{высокие температуры}). \end{cases}\end{aligned}$$

3.2.13. Уровни энергии жесткого ротора в зависимости от величины магнитного потока через кольцо $\Phi = \pi R^2 H$ лежатся соотношением

$$\varepsilon_n(\Phi) = \varepsilon_0 \left(\pi - \frac{\Phi}{2\phi_0} \right)^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2mR^2},$$

где $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ — хвант магнитного потока, и орбитальное число $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Термодинамический потенциал Ω с учетом двух проекций спина определяется выражением

$$\Omega = -2T \sum_n \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_n(\Phi))/T}),$$

а ток, который течет по кольцу, будет равен

$$I = -e \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = -2e \sum_n \frac{\partial \varepsilon_n(\Phi)/\partial \Phi}{e^{(\mu_n(\Phi) - \mu)/T} + 1}.$$

Для вычисления тока воспользуемся формулой суммирования по Пуассону

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn F(n) e^{2\pi i k n}.$$

Отсюда, сдвигая переменную $n \rightarrow n - \Phi/(2\phi_0)$, находим ток:

$$\begin{aligned}I &= \frac{2e\beta}{\pi R^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi ik\Phi/\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{ne^{2\pi i kn}}{e^{(kn)^2 - \mu/T} + 1} = \\ &= -\frac{4e\beta}{\pi R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k\Phi/\phi_0) \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{ne^{2\pi i kn}}{e^{(kn)^2 - \mu/T} + 1}.\end{aligned}$$

где $\beta = eh/(2mc)$ — электронный магнетон Бора.

При больших температурах в случае невырожденного газа электронов, когда распределение Ферма переходит в бозе-максвельское распределение, интеграл легко оценивается:

$$I_s = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{n e^{2\pi i \mu n}}{e^{(2\pi i \mu n - \varepsilon_0)/T} + 1} \approx e^{\mu/T} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dn n e^{2\pi i \mu n - \varepsilon_0 n^2/T} = \\ = e^{\mu/T} \left(\frac{\pi k T}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} e^{-i\pi k T/\varepsilon_0^2}.$$

Химический потенциал μ можно выразить через полное число частиц согласно

$$N = 2 \sum_n e^{(\mu - \varepsilon_n \Phi)/T} \approx 2 e^{\mu/T} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-\varepsilon_n (\Phi/T)} = 2 e^{\mu/T} \sqrt{\frac{\pi T}{\varepsilon_0}}.$$

Тогда находим, что

$$I_s = N \frac{\pi T}{2\varepsilon_0} e^{-i\pi k T/\varepsilon_0^2},$$

и ток в кольце равен

$$I = \frac{2cd}{\pi R^2} N \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\pi k T/\varepsilon_0)^2} \sin(\pi k \Phi / \phi_0).$$

Поскольку условие невырожденности газа подразумевает $T \gg \varepsilon_F \approx \varepsilon_0(N/4)^2 \gg \varepsilon_0$, то фактически в сумму дает вклад только лишь первый член с $k = 1$, и амплитуда тока экспоненциально подавлена температурой.

Перейдем к противоположному пределу вырожденного газа и рассмотрим случай нулевой температуры. В этом случае

$$I_h = \int_{-\infty}^{\infty} dn n \sin(2\pi k n) \Theta(\mu - \varepsilon_0 n^2) = \\ = -\frac{2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0} \cos(2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0}) - \sin(2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0})}{2\pi^2 k^2}.$$

И ток в кольце при $T = 0$ равен сумме

$$I = \frac{2cd}{\pi R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0} \cos(2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0}) - \sin(2\pi k \sqrt{\mu/\varepsilon_0})}{\pi^2 k^2} \sin(\pi k \Phi / \phi_0).$$

Оscилляции тока будут не только по напряженности магнитного поля, но и в зависимости от химического потенциала, т. е. от постепенного

заполнении электронами энергетических уровней. Период осцилляций соответствует изменению значения корня $\sqrt{\mu/\varepsilon_F}$ на единицу. Амплитуда тока при этом будет нарастать пропорционально $\sqrt{\mu/\varepsilon_F}$ или числу электронов.

Ненулевой ток в кольце означает, что кольцо будет обладать намагничностью величиной $M(\Phi) = \pi R^2 I(\Phi)/c$.

3.2.14. При движении электрона в магнитном поле его уровни энергии дискретны:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0(n + 1/2) \quad (\omega_0 = \frac{eH}{mc} \text{ и } n = 0, 1, 2, \dots)$$

и выражены по положению центра орбиты электрона. Число вырожденных состояний на каждом уровне Ландау одинаково и с учетом двух проекций спина равно $eHS/(4\pi\hbar c)$, где S — площадь, занимаемая электронным газом. Введем обозначение: $n = N/S$ — плотность электронов и $\varepsilon_F = \pi\hbar^2 n/\pi$ — энергия ферми-газа электронов без магнитного поля.

Вычислим термодинамический потенциал:

$$\Omega_H(\mu) = -T \frac{eHS}{\pi\hbar c} \sum_{n=-1/2}^{\infty} \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}).$$

Рассмотрим сначала предел слабых полей. При $\hbar\omega_0 \ll \min(T, \varepsilon_F)$ от суммирования можно приблизенно перейти к интегрированию с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена:

$$\begin{aligned} \Omega_H(\mu) &= -T \frac{eHS}{\pi\hbar c} \int_{n=-1/2}^{\infty} dn \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_n)/T}) = \\ &= \frac{1}{24} \frac{eHS}{\pi\hbar c} \frac{\hbar\omega_0}{e^{(\mu - \varepsilon_F)/T}} \int_{n=-1/2}^{n=\infty} + \dots = \\ &= -S \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/T}}{e^{x/T} + 1} + \frac{1}{24} S \frac{m}{\pi\hbar^2} \frac{(\hbar\omega_0)^2}{e^{-\mu/T} + 1} + \dots \end{aligned}$$

Первое слагаемое, полученное интегрированием по частям, не зависит от поля и соответствует потенциалу электронов при $H = 0$, а второе описывает уже влияние магнитного поля. Разложение в ряд происходит по параметру $(\hbar\omega_0 / \min(T, \varepsilon_F))^2 \ll 1$. Магнитный момент единицы площади равен

$$M = -\frac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial H} = -\frac{1}{3} \mu_B^2 \frac{n}{c\varepsilon_F} (1 - e^{-\mu/T}) H.$$

где n — электронная плотность. Следовательно, диполемагнитная восприимчивость равна

$$\chi(T) = -\frac{1}{3} \mu_B^2 \frac{n}{\pi c} (1 - e^{-\hbar\omega_H/T}).$$

Выше мы учили, что химический потенциал в двумерном ферми-газе равен

$$\mu = T \ln(e^{\mu/T} - 1)$$

и $\hbar\omega_H = 2\mu_B H$, где $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ — электронный магнетон Бора.

Рассмотрим теперь температуру $T = 0$, которая является особой в том смысле, что для нее не существует приближения слабого поля. Введем целое число N :

$$N = \left[\frac{n}{\mu_B} - \frac{1}{2} \right],$$

имеющее смысл последнего полностью заполненного уровня Ландау, и запишем энергию системы:

$$\begin{aligned} E &= \frac{eHS}{\pi\hbar c} \sum_{k=0}^N \hbar\omega_H \left(k + \frac{1}{2} \right) + \left(nS - \frac{eHS}{\pi\hbar c} N \right) \hbar\omega_H \left(N + \frac{1}{2} \right) = \\ &= -\frac{eHS}{\pi\hbar c} \hbar\omega_H \frac{N(N+1)}{2} + nS\hbar\omega_H \left(N + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Намагниченность на единицу площадки равна

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{S} \frac{\partial E}{\partial H} = \\ &= -\mu_B(2N+1) + \frac{2eH}{\pi\hbar c} \mu_B N(N+1). \end{aligned}$$

Изучим поведение намагниченности в ситуации, когда члено полностью заполненных уровней меняется на единицу. Если уровень с номером $N+1$ близок к заполнению, то намагниченность стремится к

$$M_- = -\mu_B.$$

Здесь мы учли, что $eH(N+1)/(\pi\hbar c) \rightarrow \pi$. Если уровень $N+1$ уже занят, и только начал заполняться следующий, то

$$M_+ = \mu_B$$

В итоге поведение зависимости $M = M(H)$ выглядит следующим образом (рис. 3.3)

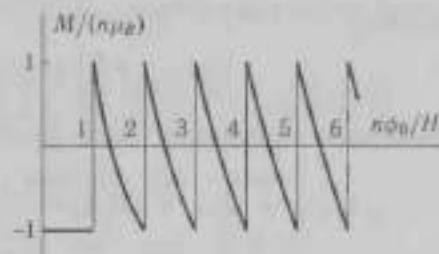


Рис. 3.3. График осцилляций намагниченности в зависимости от обратной величины магнитного поля

Всякий раз, когда происходит полное заполнение уровня Ландау, намагниченность испытывает скачок величиной $2\mu_B$, а в промежутках меняется по линейному закону. В точках

$$\hbar\omega_H = \frac{\pi\hbar^2 n}{m} \frac{N+1/2}{N(N+1)}$$

намагниченность всякий раз обращается в волны. В целом, можно говорить об осцилляциях намагниченности в зависимости от обратного поля $1/H$. Период осцилляций Δ равен

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{1}{n\phi_0}$$

Здесь $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант потока и n — плотность электронов. Осцилляции магнитного момента или намагниченности, периодические по обратному магнитному полю, и составляют эффект де Гааза-ван Альфена в магнитном поле.

Рассмотрение ненулевой температуры можно провести с помощью формулы суммирования по Пуассону:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_{-1/2}^{\infty} f(n) dn + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{\infty} f(n) e^{2kn/\hbar} dn,$$

Полагая

$$f(n) = -T \frac{mS}{\pi\hbar^2} \hbar\omega_H \ln(1 + e^{(\mu - \epsilon)/T}),$$

представим термодинамический потенциал $\Omega_H(\mu)$ в виде

$$\Omega_H(\mu) = \Omega_0(\mu) + \Delta\Omega_H(\mu) = \Omega_0(\mu) + \frac{mS}{\pi\hbar^2} 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} I_k,$$

где $\Omega_0(\mu)$ — термодинамический потенциал в отсутствие поля.

$$\Omega_0(\mu) = -T \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} d\epsilon \ln(1 + e^{(\mu - \epsilon)/T}).$$

Интеграл I_0 определяется выражением

$$I_0 = -T \int_0^{\infty} d\epsilon e^{2\pi i k \epsilon / \hbar\omega_H} \ln(1 + e^{(\mu - \epsilon)/T})$$

Интегрируя I_k два раза по частям, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_k &= \operatorname{Re} \frac{\hbar\omega_H}{2\pi k} \left[T \ln(1 + e^{\mu/T}) - \int_0^\infty dx \frac{e^{2\pi i k x/\hbar\omega_H}}{e^{x-\mu/T} + 1} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \frac{(\hbar\omega_H)^2}{(2\pi k)^2} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\pi i k x/\hbar\omega_H}}{4 \operatorname{ch}^2(x - \mu)/2T} dx - \frac{1}{1 + e^{-\mu/T}} \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение возникает в предложении достаточно низких температур и вырождения газа электронов $T \ll \mu$. Вклад в интеграл избирается вблизи $\varepsilon = \mu$ в узкой области порога T . Обозначив $x = (x - \mu)/T$ и распространяя нижний предел интегрирования до $-\infty$, приближенно получим

$$\operatorname{Re} I_k \approx \left(\frac{\hbar\omega_H}{2\pi k} \right)^2 \operatorname{Re} \left[e^{2\pi i k \mu/\hbar\omega_H} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2\pi i k T x/\hbar\omega_H}}{4 \operatorname{ch}^2 x/2} dx - 1 \right].$$

Учитывая значение интеграла

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{4 \operatorname{ch}^2 x/2} dx = \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a},$$

найдем для части потенциала $\Delta\Omega_B(\mu)$, зависящей от магнитного поля, окончательное выражение:

$$\Delta\Omega_B(\mu) = \frac{2\pi S}{\pi\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{\hbar\omega_H}{2\pi k} \right)^2 \left(1 - \frac{2\pi^2 k T / \hbar\omega_H}{\operatorname{sh} 2\pi^2 k T / \hbar\omega_H} \cos \frac{2\pi k \mu}{\hbar\omega_H} \right).$$

При $T = 0$ сумму можно оценить с помощью соотношения

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 - \cos 2\pi k x}{(xk)^2} = x^2 \quad \text{при } |x| \leq 1/2.$$

Функция $H(x)$ периодична, и ее период равен единице. Термодинамический потенциал, в вместе с тем и намагниченность, содержит осциллирующий член, период осцилляций $\Delta(1/H)$ которого определяется условием $\mu/(\hbar\omega_H) = 1$. При конечной температуре амплитуда осцилляций уже первой гармоники экспоненциально быстро падает с ростом температуры как $\exp[-2\pi^2 T / (\hbar\omega_H)]$, и уже при $T > 2\pi^2 \hbar\omega_H$ осцилляции де Гаусса-ван Альфена становятся несущественными. Физически это связано с температурным удешевлением уровней энергии и замазыванием дискретной картины магнитных уровней.

3.2.15. Энергетический спектр электронов в магнитном поле дается соотношением

$$\varepsilon_{n_1, n_2}(p_z) = \hbar\omega_1(n_1 + 1/2) + \hbar\omega_2(n_2 + 1/2) + \frac{p_z^2}{2m},$$

где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ и частоты ω_1, ω_2 равны

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega_r^2}{4}} \pm \frac{\omega_r}{2}, \quad \omega_r = \frac{eH}{mc}.$$

Термодинамический потенциал Ω с учетом двукратного вырождения по спину равен

$$\Omega = -2T \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L dp_z}{2\pi\hbar} \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_{n_1, n_2})/kT}).$$

Оценить двойную сумму можно с помощью приближенной формулы

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F\left(n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}\right) &\approx \\ &\approx \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(x, y) dx dy + \frac{1}{24} \int_0^{\infty} F_1(0, y) dy + \frac{1}{24} \int_0^{\infty} F'_2(x, 0) dx + \frac{F''_2(0, 0)}{576}. \end{aligned}$$

Условие применимости формулы предполагает малое изменение функции F при изменении ее аргументов $n_{1,2} \rightarrow n_{1,2} + 1$, т. е. $\omega_{1,2} \ll T$. Тогда

$$\begin{aligned} \Omega = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(n_1, n_2) dn_1 dn_2 - \frac{\hbar\omega_1}{24} \int_0^{\infty} \frac{\partial F(0, n_2)}{\partial n_1} dn_2 - \\ - \frac{\hbar\omega_2}{24} \int_0^{\infty} \frac{\partial F(n_1, 0)}{\partial n_2} dn_1 + \frac{\hbar^2 \omega_1 \omega_2}{576} \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \mu^2}, \end{aligned}$$

где мы обозначили для краткости

$$F(\mu, n_1, n_2) = -2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L dp_z}{2\pi\hbar} \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_{n_1, n_2, p_z})/kT}).$$

Далее введем новые переменные согласно $\xi_{1,2} = \hbar\omega_{1,2} n_{1,2}$ и найдем потенциал Ω с учетом $\omega_1 \omega_2 = \omega^2$ и $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega^2 + \omega_r^2$:

$$\Omega = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 - \frac{2\omega^2 + \omega_r^2}{24\omega^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial F(0, t)}{\partial \xi_1} dt + \frac{\hbar^2 \omega^2}{576} \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \mu^2}.$$

Здесь функция $F(\xi_1, \xi_2) = F(\mu, \xi_1, \xi_2)$ равна

$$F(\xi_1, \xi_2) = -2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \ln(1 + e^{(\mu - \xi_1 - \xi_2^2/2m)/T}).$$

Выделив слагаемое, зависящее от магнитного поля, найдем

$$\Delta\Omega(H) = -\frac{\mu_B^2 H^2}{5\hbar^2 \omega^2} \int_0^\infty \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \mu} d\xi,$$

где $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ — магнетон Бора.

Можно показать, что последний интеграл выражается через производную полного числа частиц по химическому потенциалу с обратным знаком как $-\hbar^2 \omega^2 (\partial N / \partial \mu)$. Действительно, выражение для полного числа частиц имеет вид:

$$N(\mu) = \int \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\mu - \varepsilon/T} + 1},$$

где $g(\varepsilon)$ — плотность состояний, разная

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \int d^2 r \int \frac{dp_x dp_y}{(2\pi\hbar)^2} \delta\left(\varepsilon - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} - \frac{m\omega^2(x^2 + y^2)}{2}\right) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \frac{(\varepsilon - p_x^2/2m) \theta(\varepsilon - p_x^2/2m)}{\hbar^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $g(\varepsilon)$ в выражение для $N(\mu)$ и переходя к переменной $\xi = \varepsilon - p_x^2/(2m)$, получим

$$N(\mu) = \frac{2}{\hbar^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^{(\mu + p_x^2/2m - \xi)/T} + 1}.$$

С другой стороны после интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(0, \xi) d\xi &= -2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \int_0^\infty d\xi \ln(1 + e^{(\mu - \xi - p_x^2/2m)/T}) = \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L d\rho_s}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^{(\mu - \xi - p_x^2/2m)/T} + 1} = -\hbar^2 \omega^2 N(\mu). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\Delta\Omega(H) = \frac{\mu_B^2 H^2}{6} \frac{\partial N}{\partial \mu},$$

что дает следующее выражение для динамагнитной восприимчивости

$$\chi = -\frac{\partial^2 \Delta\Omega(H)}{\partial H^2} = -\frac{\mu_B^2}{3} \frac{\partial N}{\partial \mu}.$$

При низких температурах $T \ll \mu$ производная $\partial N / \partial \mu$ равна $5N/2\mu$, а при высоких равна N/T .

3.2.16. Решение задачи аналогично предыдущей. Динамагнитная восприимчивость дается тем же выражением

$$\chi = -\frac{\mu_B^2}{3} \frac{\partial N}{\partial \mu}.$$

Вычисляя производную при низких $T \ll \mu$ температурах, найдем

$$\chi = -\frac{\mu_B^2 \cdot 2\mu}{3 \hbar^2 \omega} = -\frac{2}{3} \frac{\mu_B^2}{\hbar \omega} N^{1/2}$$

с корневой зависимостью от полного числа частиц N .

При $\hbar\omega \gtrsim T$ в динамагнитной восприимчивости необходимо учитывать также и вклады от осцилляций намагниченности, обусловленные дискретностью магнитных уровней.

3.2.17. Запишем термодинамический потенциал Ω в магнитном поле:

$$\Omega(\mu) = -\nu \frac{eH}{2\pi\hbar c} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(1 + e^{(\mu - \epsilon_n)/T}).$$

Так как формально уровни энергии ничем снизу не ограничены, то удобно рассмотреть разность термодинамического потенциала для разных значений химических потенциалов:

$$\Delta\Omega_H = \Omega(\mu_1) - \Omega(\mu_2) = -\nu \frac{eH}{2\pi\hbar c} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{(\mu_1 - \epsilon_n)/T}}{1 + e^{(\mu_2 - \epsilon_n)/T}}.$$

В реальной ситуации имеется минимальная энергия $E_0 < 0$, ниже которой не существует электронных состояний. Естественно предполагается, что абсолютное значение $|E_0|$ гораздо больше всех остальных энергетических параметров задачи. В дальнейшем, мы устремим μ_2 к E_0 , что соответствовало бы полностью незаполненным верхней $\varepsilon > 0$ и нижней $\varepsilon < 0$ подзонам, и будем от этих значений отсчитывать термодинамический потенциал.

Для суммирования по уровням используем формулу Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = I_0 + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} I_k,$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} F(n) dn, \quad I_{k>0} = 2 \int_0^{\infty} F(n) e^{2\pi i k n} dn.$$

Начнем с простейшего вклада, отвечающего гармонике $k = 0$:

$$\begin{aligned} I_0 &= -\nu \frac{eH}{2\pi hc} T \int_{-\infty}^{\infty} dn \ln \frac{1+e^{(\mu_1-\varepsilon_1)/T}}{1+e^{(\mu_2-\varepsilon_1)/T}} = \\ &= -\nu \frac{eH}{2\pi hc} \frac{2}{\varepsilon_0^2} T \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon |\varepsilon| \ln \frac{1+e^{(\mu_1-\varepsilon)/T}}{1+e^{(\mu_2-\varepsilon)/T}} = -T \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \ln \frac{1+e^{(\mu_1-\varepsilon)/T}}{1+e^{(\mu_2-\varepsilon)/T}}, \end{aligned}$$

где $g(\varepsilon) = \nu|\varepsilon|/(2\pi\hbar^2 v^2)$ — плотность состояний в отсутствие магнитного поля. Итак, I_0 равно значению в нулевом поле и вклада в намагниченность не зовет, так как не зависит от магнитного поля.

Перейдем к ненулевым гармоникам.

$$I_{k>0} = -2\nu \frac{eH}{2\pi hc} T \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{2\pi i k n} \ln \frac{1+e^{(\mu_1-\varepsilon_1)/T}}{1+e^{(\mu_2-\varepsilon_1)/T}}.$$

Делая замену переменных $n = \varepsilon|\varepsilon|/\varepsilon_0^2$ и $dn = 2|\varepsilon|d\varepsilon/\varepsilon_0^2$, имеем

$$I_{k>0} = -2\nu \frac{T}{2\pi\hbar^2 v^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon |\varepsilon| e^{2\pi i k \varepsilon|\varepsilon|/\varepsilon_0^2} \ln \frac{1+e^{(\mu_1-\varepsilon)/T}}{1+e^{(\mu_2-\varepsilon)/T}}.$$

Далее интегрируем по частям:

$$I_{k>0} = -\frac{2\nu}{2\pi\hbar^2 v^2} \frac{\varepsilon_0^2}{4\pi ik} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon e^{2\pi i k \varepsilon|\varepsilon|/\varepsilon_0^2} [f(\varepsilon - \mu_1) - f(\varepsilon - \mu_2)],$$

где $f(x) = 1/(e^x + 1)$ — фермиевская функция распределения. Для дальнейшего, поскольку нас интересует только действительная часть I_k , удобно ввести интеграл Френеля $S(x)$:

$$S(x) = \int_0^x ds \sin \frac{\pi}{2} s^2.$$

Интегрируя еще раз по частям, получим

$$\operatorname{Re} I_{k>0} = \frac{\nu}{2\pi^2 h^2 v^2} \frac{\varepsilon_0^2}{4\pi\hbar^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon S(2\sqrt{k}|\varepsilon|/\varepsilon_0) \left[-\frac{\partial f(\varepsilon - \mu_1)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f(\varepsilon - \mu_2)}{\partial \varepsilon} \right].$$

При низких температурах производная фермиевской функции распределения $f(\varepsilon - \mu)$ сосредоточена в узкой $\sim T$ области вблизи химического потенциала, а при $T = 0$ просто равна $-\delta(\varepsilon - \mu)$. Интегралы по энергии быстро сходятся, и второе слагаемое, полагая $\mu_2 \sim E_0$, можно опустить.

Тогда для зависящей от магнитного поля поправки к термодинамическому потенциалу $\Delta\Omega_H(\mu)$ получим

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_H(\mu) &= \frac{\nu\varepsilon_0^2}{8\pi^2 h^2 v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{S(2\sqrt{k}|\varepsilon|/\varepsilon_0)}{h^{3/2}} \left(-\frac{\partial f(\varepsilon - \mu)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{T=0} = \\ &= \nu \frac{\varepsilon_0^2}{8\pi^2 h^2 v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{h^{3/2}}. \end{aligned}$$

В пределе слабого магнитного поля $\varepsilon_0 \ll |\mu|$ для анализа поведения суммы удобно воспользоваться следующим асимптотическим разложением интеграла Френеля:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} - f(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} - g(x) \sin \frac{\pi x^2}{2}; \\ f(x) &= \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{(\pi x^2)^{2n}} = \frac{1}{\pi x} - \frac{3}{\pi^2 x^3} + \dots; \\ g(x) &= \frac{1}{\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n+1)}{(\pi x^2)^{2n+1}} = \frac{1}{\pi^2 x^3} + \dots. \end{aligned}$$

С помощью этого разложения можно легко выделить монотонную и осциллирующую части термодинамического потенциала $\Delta\Omega_H = \Delta\Omega_H^{(\text{mon})} + \Delta\Omega_H^{(\text{osc})}$:

$$\Delta\Omega_H^{(\text{mon})} = \nu \frac{\varepsilon_0^2}{8\pi^2 h^2 v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{3/2}} = \nu \frac{\zeta(3/2)}{16\pi^2} \hbar v \left(\frac{2eH}{\hbar c} \right)^{3/2}.$$

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_H^{(\text{osc})} &= -\nu \frac{\varepsilon_0^2}{8\pi^2 h^2 v^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{k^{3/2}} \cos \left(\frac{2\pi k \mu^2}{\varepsilon_0^2} \right) + \frac{g(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{k^{3/2}} \sin \left(\frac{2\pi k \mu^2}{\varepsilon_0^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Монотонная часть дает расходящийся при $H \rightarrow 0$ вклад в динамомагнитную восприимчивость:

$$\chi_{\mu}^{\text{тпод}} = -\nu \frac{3\zeta(3/2)}{64\pi^2} \hbar v \left(\frac{2e}{\hbar c}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{H}} = -\frac{3\zeta(3/2)}{2\pi} B_{>0}^2(\varepsilon_0) g_{>0}(\varepsilon_0).$$

Последний результат мы представили в форме, традиционно принятой для электронного газа с обычным квадратичным спектром. Для этого мы ввели эффективную массу, зависящую от энергии $m_{\text{eff}}(\varepsilon) = |\varepsilon|/\nu^2$, так чтобы плотности состояний формально совпадали для дираевского и квадратичного спектров.

$$g(\varepsilon) = \nu \frac{|\varepsilon|}{2\pi\hbar^2 v^2} = g_{>0}(\varepsilon) = \nu \frac{m_{\text{eff}}(\varepsilon)}{2\pi\hbar^2}.$$

Соответствующий эффективный магнетон Бора

$$\beta_{>0}(\varepsilon) = \frac{e\hbar}{2m_{\text{eff}}(\varepsilon)c} = \frac{e\hbar\nu^2}{2c|\varepsilon|}$$

также зависит от энергии и обращается в бесконечность в конической точке $\varepsilon = 0$. В целом, точка нулевого магнитного поля $H = 0$ является особой точкой термодинамического потенциала, а расходимость восприимчивости указывает на неустойчивость однородного состояния в слабом магнитном поле.

Частота осцилляций термодинамического потенциала (эффект де Гааза—ван Альфена) равна $\mu^2/\varepsilon_0^2 - \mu^2/H$. Такие же осцилляции в зависимости от отношения μ^2/H возникают и в изматичности и магнитной восприимчивости. В этом, в частности, наблюдается отличие от обычных систем с квадратичным законом дисперсии, где период осцилляций зависит от отношения μ/H . Пользуясь понятием эффективной массы $m_{\text{eff}}(\varepsilon)$, здесь также можно провести аналогию с квадратичным спектром, для которого период осцилляций зависит от отношения $\mu/(k\omega_c)$. Действительно, определяя эффективную циклотронную частоту $\omega_{\text{eff}}(\varepsilon) = eH/(cm_{\text{eff}}(\varepsilon))$, легко убеждаемся, что

$$\frac{|\mu|}{2\omega_{\text{eff}}(\varepsilon)} = \frac{\mu^2}{\varepsilon_0^2}.$$

Выпишем далее первый член разложения $\Delta\Omega_H^{(\text{ин})}$ в слабом поле по малому отношению $\varepsilon_0/|\mu|$:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_H^{(\text{ин})} &= -\nu \frac{\varepsilon_0^4}{16\pi|\mu|\hbar^2 v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k\mu^2/\varepsilon_0^2)}{(\pi k)^2} + \dots = \\ &= -\nu \frac{\varepsilon_0^4}{16\pi|\mu|\hbar^2 v^2} B_2(\mu^2/\varepsilon_0^2) + \dots \quad (\varepsilon_0 \ll |\mu|). \end{aligned}$$

Здесь $B_2(x)$ — периодическая функция с периодом равным единице и совпадающая на отрезке $[0, 1]$ с полиномом Бернуди второй степени:

$$B_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{(x+k)^3} = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Следующие члены разложения могут быть также выражены через полиномы Бернуди более высоких степеней. Хотя и осциллирующие члены в термодинамическом потенциале малы по сравнению с монотонным членом, но после дифференцирования по магнитному полю намагниченность $M^{(\text{loc})} = -\partial \Delta \Omega_H^{(\text{loc})} / \partial H$ и восприимчивость $\chi^{(\text{loc})} = \partial M^{(\text{loc})} / \partial H$ приобретают большие по абсолютной величине значения.

Теперь проанализируем противоположный предел сильного поля, когда $\varepsilon_0 \gg |\mu|$. Для оценки суммы

$$\Delta \Omega_H(\mu) = \nu \frac{\varepsilon_0^3}{8\pi^2 h^2 v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{k^{3/2}}$$

проведем следующее рассуждение. При малых аргументах интеграл Френеля $S(x)$ ведет себя приближенно так

$$S(x \ll 1) = \frac{\pi x^3}{6} - \frac{\pi^2 x^7}{336} + \dots$$

Соответственно, основной вклад в сумму вносят члены с большими номерами до тех пор, пока номер k не превысит $k \sim k_0 \sim \varepsilon_0^2/\mu^2 \gg 1$. В этих условиях, когда функция медленно меняется при изменении ее аргумента, для оценки суммы можно воспользоваться следующей приближенной формулой:

$$F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F(k) = \int_0^{\infty} F(k) dk + \frac{F(0)}{2} - \frac{F'(0)}{12} + \frac{F''(0)}{720} + \dots$$

Далее учитывая, что

$$\frac{S(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{k^{3/2}} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2|\mu|}{\varepsilon_0} \right)^3 - \frac{\pi^2}{336} \left(\frac{2|\mu|}{\varepsilon_0} \right)^7 k^2 + \dots$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta \Omega_H(\mu) &= \nu \frac{\varepsilon_0^3}{8\pi^2 h^2 v^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{S(2\sqrt{k}|\mu|/\varepsilon_0)}{k^{3/2}} dk - \frac{\pi}{12} \left(\frac{2|\mu|}{\varepsilon_0} \right)^3 \right) = \\ &= \frac{\nu \cdot \varepsilon_0^2 |\mu|}{2\pi^2 h^2 v^2} \int_0^{\infty} \frac{S(x)}{x^2} dx - \frac{\nu |\mu|^3}{12\pi^2 h^2 v^2} = \frac{\nu \varepsilon_0^2 |\mu|}{8\pi^2 h^2 v^2} - \frac{\nu |\mu|^3}{12\pi^2 h^2 v^2}. \end{aligned}$$

Отсюда дифференцированием по напряженности магнитного поля с учетом того, что $\varepsilon_0^2 = 2e\hbar v^2 H/c$, находим намагниченность в пределе сильного поля, когда $\varepsilon_0 > |\mu|$:

$$M = -\frac{e}{4\pi\hbar c} \frac{\varepsilon}{\mu} |\mu| = -\beta_{\text{Ф}}(\mu) g_{\text{Ф}}(\mu) |\mu|.$$

По существу это вклад наименшего уровня Ландау, который единственный выживает в пределе сильного поля. Интерпретируя ответ, можно считать, что на этом наименшем уровне находятся все электроны, числу которых $g_{\text{Ф}}(\mu) |\mu|$, и каждый несет магнитный момент $\beta_{\text{Ф}}(\mu)$. Магнитных колебаний пока выполняется $\varepsilon_0 > |\mu|$, нет.

3.2.18. Корреляционная функция $\nu(r)$ флуктуаций плотности частиц $\Delta n(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) - \bar{n}$ в ферми-газе определяется соотношением:

$$\langle \Delta n(\mathbf{r}_1) \Delta n(\mathbf{r}_2) \rangle = \bar{n}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + n\nu(r), \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|,$$

где \bar{n} — средняя плотность газа и \mathbf{r} — радиус-вектор. Корреляционная функция связана с функцией распределения следующим соотношением:

$$\begin{aligned} n\nu(r) &= -2 \left| \int \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{e^{i\varepsilon_p - \mu/\hbar} + 1} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \right|^2 = -\frac{1}{2\pi^2 \hbar^3 r^2} I^2, \\ I &= \int_0^\infty \frac{dp p \sin(pr/\hbar)}{e^{i\varepsilon_p - \mu/\hbar} + 1}. \end{aligned}$$

Мы рассмотрим наиболее интересную область температур, отвечающую вырожденному ферми-газу $T \ll \varepsilon_F$. Вычисляя последний интеграл по частям, получим

$$I = \frac{\hbar^2}{p^2} \int_0^\infty \left(\sin \frac{pr}{\hbar} - \frac{pr}{\hbar} \cos \frac{pr}{\hbar} \right) \frac{(\partial \varepsilon / \partial p) dp}{4T \operatorname{ch}^2(\varepsilon_F - \mu)/2T}.$$

При $T \ll \varepsilon_F$ можно положить $\mu = \mu(T=0) = \varepsilon_F$. Далее, вклад в интеграл набирается в области импульсов, близких к поверхности Ферми $|\varepsilon_p - \mu| \approx v_F |p - p_F| \leq T \ll \varepsilon_F$, и удобно перейти к переменной интегрирования $\xi = \varepsilon_p - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F)$. Распространяя нижний предел интегрирования, т. е. $-\mu$, до $-\infty$, приближенно получим

$$I \approx -\frac{\hbar^2}{2p^2} \int_{-\infty}^\infty \left[\left(\frac{p_F r}{\hbar} + i \right) e^{i p_F r / \hbar} e^{i \xi r / 2v_F} + \text{c.c.} \right] \frac{d\xi}{4T \operatorname{ch}^2 \xi / 2T}.$$

Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \rho_F \xi / h}}{4T \sin^2 \xi / 2T} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \rho_F x / h}}{4T \sin^2 x / 2} dx = \frac{\pi T r / h \rho_F}{\sin \pi T r / h \rho_F},$$

найдем

$$I = -\frac{\hbar \rho_F}{r} \left(\cos \frac{\rho_F r}{h} - \frac{\hbar}{\rho_F r} \sin \frac{\rho_F r}{h} \right) \frac{\pi T r / h \rho_F}{\sin \pi T r / h \rho_F}.$$

Наиболее интересны корреляции между частицами на расстояниях, превышающих средние расстояния между частицами, т.е. при $r \gg \hbar / \rho_F \sim n^{-1/3}$. Тогда с учетом $\pi = \rho_F^3 / (3\pi^2 \hbar^3)$ для корреляционной функции $\nu(r)$ найдем

$$\nu(r) = -\frac{9\pi}{4} \frac{1 + \cos(2\rho_F r / \hbar)}{(\rho_F r / \hbar)^4} \left(\frac{\pi T r / h \rho_F}{\sin \pi T r / h \rho_F} \right)^2, \quad r \gg \frac{\hbar}{\rho_F}.$$

Отсюда видно, что при $T = 0$ корреляционная функция медленно спадает степенным образом с расстоянием, т.е. флуктуации плотности коррелированы. Кроме того, корреляционная функция также осциллирует с периодом, определяемым диаметром Ферми-поверхности $2\rho_F$. Осцилляции с таким периодом в физических характеристиках называют фриделевскими осцилляциями. Конечная температура разрушает пространственные корреляции в Ферми-газе. Как следствие, корреляционная функция экспоненциально быстро затухает на расстояниях, больших корреляционной длины $r \gtrsim \xi(T)$, которая равна

$$\xi(T) = \frac{\hbar \rho_F}{2\pi T}.$$

3.2.2. Идеальный бозе-газ

3.2.19. Если при заданной плотности бозе-газа понижать его температуру, то при $T = T_c$ химический потенциал газа обращается в нуль и остается нулем вплоть до абсолютного нуля температур ($\mu(T < T_c) = 0$). Плотность надконденсатных частиц при $T \leq T_c$ дается соотношением

$$n_{cc}(T) = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) = n \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}.$$

Соответственно, плотность конденсатных частиц копечна и равна

$$n_0(T) = n - n_{cc}(T) = n \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right].$$

3.2.20. Энергия конденсированного газа определяется интегралом

$$\begin{aligned} E = \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{x_0}{e^{x_0/T} - 1} &= VT \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{3/2} = \\ &= \frac{3\zeta(5/2)}{2} VT \left(\frac{\pi T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{3\zeta(5/2)}{2\zeta(3/2)} T n_{\text{ex}}(T) V \sim VT^{5/2}. \end{aligned}$$

Теплоемкость C_V при постоянном объеме имеет вид

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{5E}{2T} \sim VT^{3/2}.$$

Давление конденсированного газа P можно вычислить с помощью потенциала $\Omega = -PV$:

$$\begin{aligned} \Omega = T \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 - e^{-x_0/T}) &= VT \left(\frac{\pi T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{3/2} \ln(1 - e^{-x}) = \\ &= -VT \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(5/2) = -\frac{2}{3}E. \end{aligned}$$

Отсюда давление идеального бозе-конденсированного газа равно

$$P(T) = T \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(5/2) \sim T^{5/2},$$

и не зависит от объема газа. Это приводит к расходящимся значениям для изотермических коэффициентов расширения и сжимаемости газа, а также для теплоемкости при постоянном давлении.

Поскольку $\mu = 0$, то свободная энергия газа F легко находится из соотношения $F = \mu N + \Omega$:

$$F = \Omega = -\frac{2}{3}E \sim -VT^{5/2}.$$

Далее находим энтропию S , согласно $S = -\partial F / \partial T$:

$$S = \frac{5E}{3T} = \frac{2}{3}C_V \sim VT^{3/2}.$$

Так как энтропия газа зависит от его объема, то значения адабатических коэффициентов расширения и сжимаемости остаются конечными в отличие от их изотермических аналогов. При изменении T и V вдоль адабаты отношение T/T' остается неизменным и, следовательно, соотношение между надконденсированной и конденсированной фазами в адабатическом процессе остается неизменным.

3.2.21. Выразим максимально возможное число частиц во всех возбужденных состояниях $\varepsilon > 0$ в виде интеграла от одночастичной плотности состояний $g(\varepsilon)$:

$$\max[N_{ex}(T)] = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} = T \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon/T) d\varepsilon}{e^{\varepsilon} - 1}$$

Результат зависит от поведения $g(\varepsilon)$ при малых значениях энергии ε . Если интеграл сходится и неограниченно убывает с понижением температуры, то при некоторой температуре необходимо вместе конденсацию частиц на наименее высокий уровень энергии, так как все частицы уже не смогут быть размещены в возбужденных состояниях. В противоположном случае расходящегося интеграла, когда значение $\max[N_{ex}(T=0)]$ превышало бы полное число частиц N , нормировка на полное число частиц в газе всегда будет удовлетворяться при значении химического потенциала, меньшем его максимально возможного, т. е. при $\mu < 0$. Заселенность основного уровня $\varepsilon = 0$ тогда пропорциональна ограниченному по величине фактору $[exp(-\mu/T) - 1]^{-1}$ и, тем самым, не возникает макроскопической заселенности основного уровня.

В пространстве размерности d и при обычном законе дисперсии $\varepsilon_p = p^2/(2m)$ одночастичная плотность состояний $g(\varepsilon)$ пропорциональна $\varepsilon^{(d-2)/2}$. В результате, бозе-Эйнштейновская конденсация в идеальном газе бозонов отсутствует при $T \neq 0$ в пространстве размерностью $d \leq 2$.

3.2.22. При адиабатическом процессе ($S = \text{const}$) в идеальном конденсированном бозе-газе выполняется соотношение $PV^{5/3} = \text{const}$. Отсюда, адиабатическая сжимаемость равна

$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{3}{5} \frac{1}{P(T)} \sim T^{-5/3}$$

и остается конечной при $T \neq 0$ в отличие от бесконечной изотермической сжимаемости. Пользуясь тем, что $\rho(\partial P / \partial \rho) = -V(\partial P / \partial V)$ ($\rho \sim 1/V$ — плотность газа), найдем квадрат адиабатической скорости звука из определения:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{5 P(T)}{3 \rho} \sim T^{5/2}$$

Значение адиабатической скорости звука при $T \neq 0$ также конечно в отличие от нулевого значения изотермической скорости звука.

3.2.23. Воспользуемся соотношением для теплоемкостей C_p и C_v :

$$C_p = C_v \frac{(DP/DV)_S}{(DP/DV)_T}$$

Величины C_V и $(\partial P / \partial V)_S$ непрерывны в точке перехода T_c , и расходимость C_p связана с обращением в нуль знаменателя. Итак,

$$C_p \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = - \frac{25 P^2(T_c)}{4 T_c} = - \left(\frac{5 \zeta(5/2)}{2 \zeta(3/2)} \right)^2 \left(\frac{N}{V} \right)^2 T_c.$$

Давление P найдем, пользуясь условием $(\partial P / \partial \mu)_{T,V} = N/V$. Тогда

$$P = P_0(T) + \mu \frac{N}{V},$$

где $P_0(T)$ — давление при $\mu = 0$. Тогда

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{N}{V} \mu(T, V) \right).$$

Вблизи T_c химический потенциал приближительно равен

$$\mu = - \frac{9 \zeta^2(3/2)}{16 \pi} \frac{(T - T_c)^2}{T_c} \theta(T - T_c).$$

С учетом $\partial T_c / \partial V = -(2/3) T_c / V$ найдем основной вклад в обратную скимаемость при $T \rightarrow T_c$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = - \frac{3 \zeta^2(3/2)}{4 \pi} \frac{N}{V^2} (T - T_c) \theta(T - T_c),$$

и окончательно при $T \rightarrow T_c$

$$C_p := \frac{25 \pi \zeta^2(5/2)}{3 \zeta^2(3/2)} N \frac{T_c}{T - T_c} \sim \frac{1}{T - T_c}.$$

3.2.24. Обозначим магнитный момент бозона через β . Трем проекциям спина в магнитном поле H отвечает три уровня энергии

$$\epsilon_{\rho\sigma} = \frac{p^2}{2m} + \sigma \beta H, \quad \sigma = -1, 0, +1.$$

Связь между плотностью газа $n = N/V$ и химическим потенциалом μ дается соотношением

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\sigma=0,\pm 1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(p^2/2m + \sigma \beta H - \mu)/T} - 1} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{\sigma=0,\pm 1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{e} de}{e^{(\mu + \sigma \beta H - \mu)/T} - 1}. \end{aligned}$$

Обозначим через T_0 температуру конденсации при $H = 0$:

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2 n^{2/3}}{[3\zeta(3/2)]^{2/3} m}$$

При $H \rightarrow \infty$ все базоны будут находиться в одном спиновом состоянии и в конденсированном состоянии с $\mu = -\beta H$. Температура конденсации T_∞ вырастет за счет уменьшения вырождения основного уровня энергии и будет равна $T_\infty = 3^{2/3} T_0$. Таким образом, предел сильного поля означает $\beta H \gg T_\infty$ или T_0 . В этом пределе

$$T_F = T_\infty \left(1 - \frac{2}{3\zeta(3/2)} e^{-\beta H/T_\infty} \right), \quad \beta H \gg T_\infty.$$

Перейдем к пределу слабого поля $\beta H \ll T_0$. В области конденсации $\mu \sim -\beta H$, поэтому и $|\mu| \ll T_0$. Пользуясь разложением

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^{x+\mu} - 1} = \zeta(3/2) - 2\sqrt{\pi}\sqrt{\mu} + \zeta(1/2)\mu + \dots \quad \text{при } \mu \rightarrow +0,$$

найдем связь между химическим потенциалом, температурой и магнитным полем:

$$\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} = 1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{3\zeta(3/2)} \frac{\sqrt{-\beta H - \mu} + \sqrt{-\mu} + \sqrt{\beta H - \mu}}{\sqrt{T}}.$$

Отсюда, полагая $\mu = -\beta H$, найдем температуру базе-конденсации в слабом поле:

$$\frac{T_0}{T_0} = 1 + \frac{4\sqrt{\pi}(\sqrt{2} + 1)}{9\zeta(3/2)} \sqrt{\frac{\beta H}{T_0}}, \quad \beta H \ll T_0.$$

Запишем намагниченность газа на единицу объема ($T > T_H$):

$$\begin{aligned} M &= \beta \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{e^{(x-\beta H-\mu)/T} - 1} - \frac{1}{e^{(x+\beta H-\mu)/T} - 1} \right) = \\ &= \beta \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^3} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sh} \frac{\beta H}{T} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\operatorname{ch}(x - \mu/T) - \operatorname{ch}(\beta H/T)}, \end{aligned}$$

где мы перешли в интегрировании к переменной $x = p^2/2mT$. В пределе слабого поля, устремля H к нулю, найдем намагниченность $M = \chi H$, где восприимчивость $\chi(T)$ равна

$$\chi(T) = \frac{\beta^2}{T} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^3} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\operatorname{ch}(x - \mu/T) - 1}.$$

Оценивая интеграл вблизи точки бозе-конденсации, когда $|\mu| \ll T$, и полагая $T = T_0$ всюду, кроме расходящихся членов, найдем

$$\chi(T) = \frac{2\beta^2}{T_0} \left(\frac{mT_0}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{eT_0}{|\mu(T)|}} = \frac{8\pi}{9\zeta(3/2)} \frac{\beta^2 n}{T - T_0}.$$

При высоких температурах $T \gg T_0$ для восприимчивости мы должны иметь обычный закон Кюри $\chi(T) = 2\beta^2 n/(3T)$.

При низких температурах $T \ll T_0$, когда бозе-газ находится в конденсированном состоянии, намагниченность становится нелинейной функцией магнитного поля даже в слабых полях. Более того, точка $H = 0$ — особая точка, так как в ней снимается вырождение конденсата по различным проекциям спинов. При любом $H > 0$ конденсат имеет только только одну проекцию спина. Представим намагниченность газа $M(T, H)$, т. е. магнитный момент единицы объема, как сумму намагниченности конденсата и надконденсата:

$$M(T, H) = \beta n_c + \beta n_{\sigma=1}^{(ex)} - \beta n_{\sigma=-1}^{(ex)}.$$

С другой стороны, для полной плотности частиц n имеем соотношение

$$n = n_c + n_{\sigma=1}^{(ex)} + n_{\sigma=0}^{(ex)} + n_{\sigma=-1}^{(ex)}.$$

Отсюда находим намагниченность с учетом $\mu = -\beta H$:

$$\begin{aligned} M(T, H) &= \beta(n - n_{\sigma=0}^{(ex)} - 2n_{\sigma=-1}^{(ex)}) = \\ &= \beta n - \beta \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{x} dx}{e^{x+2\beta H/T} - 1} + \frac{2\sqrt{x} dx}{e^{x+2\beta H/T} - 1} \right). \end{aligned}$$

В пределе слабого поля $T \gg \beta H > 0$, пользуясь разложением для интегралов, получаем

$$M(T, H) = \beta n_c(T) + \frac{2\sqrt{\pi}(2\sqrt{2}+1)}{3\zeta(3/2)} \left(\frac{\beta H}{T} \right)^{1/2} \beta n_{ex}(T),$$

где, соответственно, $n_c(T)$ и $n_{ex}(T)$ — плотности конденсата и надконденсата в нулевом магнитном поле $H = 0$. Отсюда поведение параметрической восприимчивости конденсированного газа в слабом поле описывается выражением

$$\chi(T, H) = \frac{\sqrt{\pi}(2\sqrt{2}+1)}{3\zeta(3/2)} \frac{\beta^2 n_c(T)}{T} \sqrt{\frac{T}{\beta H}} \sim \frac{1}{\sqrt{H}} \quad (T \gg \beta H),$$

которое расходится в пределе $H \rightarrow 0$.

В пределе сильного поля $\beta H \gg T$ намагниченность экспоненциально мало отличается от намагниченности насыщения.

$$M(T, H) = \beta n - \frac{\beta n_{ex}^{(co)}(T)}{\zeta(3/2)} \left(e^{-\beta H/T} + \frac{8 + \sqrt{2}}{4} e^{-2\beta H/T} \right),$$

где $n_{ex}^{(co)}(T) = n_{ex}(T)/3$ — плотность надконденсатных частиц в пределе бесконечного магнитного поля. Соответственно, магнитная восприимчивость оказывается экспоненциально малой:

$$\chi(T, H) = \frac{\beta^2 n_{ex}^{(co)}(T)}{\zeta(3/2) T} \left(e^{-\beta H/T} + \frac{8 + \sqrt{2}}{2} e^{-2\beta H/T} \right),$$

что связано с малым тепловым возбуждением на магнитные уровни, отстоящие от основного на βH и $2\beta H$.

3.2.25. Прежде всего определим одиночественную плотность состояний газа в гармонической ловушке:

$$g(\varepsilon) = \int \frac{d^3 p d^3 r}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left(\varepsilon - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2}\right) = \int \frac{d^3 p d^3 r}{(\pi\hbar\omega)^3} \delta(\varepsilon - \mathbf{p}^2 - \mathbf{r}^2).$$

Последний интеграл можно рассмотреть, как интеграл в шестимерном пространстве $\mathbf{R} = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$:

$$g(\varepsilon) = \int \frac{d^6 R}{(\pi\hbar\omega)^3} \delta(\varepsilon - \mathbf{R}^2) = \int \frac{\pi^3 R^5 dR}{(\pi\hbar\omega)^3} \delta(\varepsilon - R^2),$$

где мы учли, что площадь поверхности шестимерной сферы равна π^3 . Вычислив последний интеграл с подстановкой $R^2 = \rho$, находим плотность состояний в ловушке:

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\omega)^3}.$$

Температуру бозе-зинштейновской конденсации T_c находим из условия

$$N = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon \varepsilon^2}{2(\hbar\omega)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/T_c} - 1} = \frac{T_c^3}{2(\hbar\omega)^3} 2\zeta(3).$$

Откуда $T_c = \hbar\omega(N/\zeta(3))^{1/3}$. Число надконденсатных частиц равно

$$N_{ex}(T) = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon \varepsilon^2}{2(\hbar\omega)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} = \frac{T^3}{(\hbar\omega)^3} \zeta(3) = N(T/T_c)^3.$$

Энергия конденсированного газа определяется соотношением

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{dx e^x}{2(\hbar\omega)^3} \frac{x}{e^{x/T} - 1} = \frac{T^3}{2(\hbar\omega)^3} \frac{x^4}{15} = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} TN_{ss}(T).$$

Дифференцированием по температуре находим теплоемкость конденсированного газа:

$$C(T) = 4 \frac{E(T)}{T} = \frac{2\pi^4}{15\zeta(3)} N_{ss}(T) \sim T^3.$$

Рассмотрим поведение химического потенциала $\mu(T)$ вблизи температуры перехода T_c . Для его определения запишем

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\infty} \frac{dx e^x}{2(\hbar\omega)^3} \frac{1}{e^{(x-\mu)/T} - 1} = \frac{T^3}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^{\infty} \frac{dx e^x}{e^{-(\mu/T)} e^x - 1} \approx \\ &\approx \frac{T^3}{2(\hbar\omega)^3} \left(2\zeta(3) + \frac{\pi^2 \mu}{3 T} \right) = \frac{T_c^3}{(\hbar\omega)^3} \zeta(3). \end{aligned}$$

При оценке интеграла мы учли, что вблизи T_c химический потенциал $|\mu| \ll T \sim T_c$. Отсюда находим

$$\mu(T) = -\frac{18\zeta(3)}{\pi^2} (T - T_c) \theta(T - T_c), \quad \text{при } |T - T_c| \ll T_c.$$

В отличие от привычного случая трехмерной ловушки, представляющей собой кубический ящик, здесь производная $\partial\mu/\partial T$ испытывает конечный скачок.

Переходя к переменной $x = e/T$ и дифференцируя энергию газа по температуре, представим выражение для теплоемкости в следующем виде:

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{2(\hbar\omega)^3} \frac{x}{e^{(x-\mu)/T} - 1} = \\ &= \frac{4T^3}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^{(x-\mu)/T} - 1} + \frac{T^3}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3 e^{(x-\mu)/T}}{(e^{(x-\mu)/T} - 1)^2} \frac{\partial(\mu/T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность μ и скачок производной $\partial\mu/\partial T$, найдем вблизи T_c

$$C(T_c + 0) = C(T_c - 0) + \frac{T_c^3}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \left(-\frac{18\zeta(3)}{\pi^2 T_c} \right).$$

И с учетом значения интеграла, равного $6\zeta(3)$, получаем для скачка теплоемкости в точке бозе-эйнштейновской конденсации следующее выражение:

$$\Delta C(T_c) = C(T_c - 0) - C(T_c + 0) = \frac{54\zeta(3)}{\pi^2} N.$$

Таким образом, бозе-эйнштейновская конденсация в гармонической ловушке представляет собой пример фазового перехода второго рода.

3.2.26. Термодинамические флуктуации температуры описываются формулой

$$\langle (\Delta T)^2 \rangle = \frac{T^2}{C(T)} = \frac{15\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{T_c^3}{NT} = \frac{15}{2\pi^4} \frac{(\hbar\omega)^3}{T}.$$

Флуктуации температуры малы ($\langle \Delta T \rangle^2 \ll T^2$, пока $T \gg \hbar\omega$). Чтобы найти термодинамические флуктуации частоты, разделим обе части равенства на $(\hbar\omega)^2$:

$$\left\langle \left(\Delta \frac{T}{\hbar\omega} \right)^2 \right\rangle = \frac{15}{2\pi^4} \frac{\hbar\omega}{T}.$$

Эта величина не зависит от того, рассматриваем ли мы флуктуации при постоянной частоте или при постоянной температуре. Считая теперь температуру заданной величиной и имея для приращений

$$\Delta \frac{T}{\hbar\omega} = T \Delta \frac{1}{\hbar\omega} = - \frac{T}{(\hbar\omega)^2} \Delta(\hbar\omega),$$

находим

$$\langle (\Delta\omega)^2 \rangle = \frac{15\omega^2}{2\pi^4} \frac{(\hbar\omega)^3}{T^2}.$$

Относительная флуктуация частоты мала, пока $\hbar\omega \ll T$.

Для оценки влияния флуктуаций частоты ловушки на температуру перехода T_c учтем, что $\Delta T_c = (N/\zeta(3))^{1/3} \Delta(\hbar\omega)$. Отсюда

$$\langle (\Delta T_c)^2 \rangle = (N/\zeta(3))^{2/3} \langle (\Delta\hbar\omega)^2 \rangle = \frac{15}{2\pi^4 \zeta^{2/3}(3)} N^{2/3} \frac{(\hbar\omega)^5}{T_c^3}.$$

Таким образом, относительная величина термодинамических флуктуаций температуры перехода приблизительно равна

$$\sqrt{\frac{\langle (\Delta T_c)^2 \rangle}{T_c}} \approx N^{-1/2}.$$

Это приводит к размытию перехода в системе с конечным числом частиц. Другая причина размытия температуры перехода связана с дискретностью уровней в ловушке. Действительно, поведение химического потен-

иначе $|\mu(T)| = (T - T_c)$ вблизи T_c было найдено в непрерывном пределе $\omega \rightarrow 0$, который справедлив, пока $|\mu(T)| \gg \hbar\omega$. Обратное неравенство приводит к области, где существенна дискретность уровней в системе:

$$\frac{|\mu(T)|}{\hbar\omega} \sim \frac{(T - T_c)}{\hbar\omega} \lesssim 1, \quad \text{или} \quad \frac{T - T_c}{T_c} \lesssim \frac{\hbar\omega}{T_c} \sim \frac{1}{N^{1/3}}$$

Следовательно, относительная величина разности температуры перехода из-за дискретности энергетического спектра имеет порядок $N^{-1/3}$, и влияние термодинамических флуктуаций на фоне дискретности спектра не оказывается, пока отношение $N^{-1/2}/N^{1/3} = N^{-1/6} \ll 1$. Таким образом, в качестве параметра макроскопичности гармонической ловушки выступает величина $N^{1/6} \gg 1$.

3.2.27. а) Плотность одиночных состояний в шестимерном пространстве описывается выражением

$$g(\varepsilon) = \int \frac{V_0 d^6 p}{(2\pi\hbar)^6} \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m}\right) = V_0 \int \frac{\pi^3 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{V_0}{2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}.$$

Подставляя объем $V_0 = l^6 = [2\pi\hbar/(m\omega)]^3$, найдем

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1/2}}{2(\hbar\omega)^3}.$$

Поскольку плотность состояний оказалась идентичной плотности состояний газа в гармонической ловушке, то все термодинамические функции и тепловые свойства двух разных систем будут также идентичны. В частности, бозе-эйнштейновская конденсация в шестимерном пространстве будет фазовым переходом второго рода.

б) Корреляционная функция $\nu(r)$ флюктуаций плотности $\Delta n(r) = n(r) - \bar{n}$ определяется соотношением

$$\langle \Delta n(r_1) \Delta n(r_2) \rangle = \bar{n}\delta(r_1 - r_2) + n\nu(r), \quad r = |r_1 - r_2|,$$

где $\bar{n} = N/V_0$ — средняя плотность газа и r — радиус-вектор в пространстве $d = 6$. Корреляционная функция связана с функцией распределения выражением

$$n\nu(r) = \left| \int \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} - 1} \frac{d^6 p}{(2\pi\hbar)^6} \right|^2$$

Мы рассмотрим наиболее интересную область температур выше температуры бозе-эйнштейновской конденсации, но близкую к ней. Вблизи $T = T_c$ химический потенциал μ мал, и интеграл определяется областью

малых импульсов $\varepsilon \sim p^2/(2m) \sim \mu \ll T$. Поэтому, разлагая экспоненту, находим

$$\langle n \rangle(r) \approx \left| 2mT \int \frac{e^{p^2/2m}}{p^2 + 2m|\mu|} \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} \right|^2$$

Поскольку мы ограничились малыми импульсами $p \lesssim (2mT)^{1/2}$, то мы подразумеваем расстояния $r \gtrsim \hbar/\sqrt{mT}$.

Интеграл можно оценить, используя уравнение Пуассона в пространстве размерностью $d = 6$:

$$\nabla^2 u - \kappa^2 u = -\delta(r), \quad \text{или} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \kappa^2 u = -\delta(r)$$

и формулы для фурье-образа $u(r)$. Решение этого уравнения выражается через функцию Бесселя конического аргумента $K_2(x)$:

$$u(r) \sim \frac{\kappa^2}{r^2} K_2(\kappa r)$$

С другой стороны, u_q — фурье-образ функции $u(r)$ — удовлетворяет уравнению $(q^2 + \kappa^2)u_q = 1$, т. е.

$$u(r) = \int \frac{e^{iqr}}{q^2 + \kappa^2} \frac{d^6 q}{(2\pi)^6}$$

Таким образом, приходим к выражению

$$\langle n \rangle(r) \sim \left(\frac{\kappa}{r} \right)^4 K_2^2(\kappa r),$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|\mu|}{b^2}} = \frac{6\sqrt{2}\zeta^{1/2}(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{V_b}{V_s} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{T - T_c}{T_c}}.$$

Пользуясь тем, что $K_2(x \gg 1) \sim e^{-x}/\sqrt{x}$, находим асимптотическое поведение корреляционной функции на больших расстояниях $r \gg \kappa^{-1}$:

$$\langle n \rangle(r) \sim \frac{\kappa^{2/3}}{r^{3/2}} e^{-2\kappa r}$$

Отсюда видно, что на расстояниях $r \gtrsim 1/2\kappa$ корреляции между частицами экспоненциально быстро затухают. Величина $\xi(T) = 1/2\kappa$ называется корреляционным радиусом и равна

$$\xi(T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6\zeta^{1/2}(3)} \left(\frac{V_b}{N} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{T_c}{T - T_c}} \sim (T - T_c)^{-\nu}, \quad \nu = 1/2,$$



где показатель степени ν называется критическим индексом. В пространстве $d = 3$ среднее расстояние между частицами приблизительно равно $(V_0/N)^{1/3}$. При приближении к точке перехода T_c корреляционный радиус $\xi(T)$ корневым образом расходится и обращается в бесконечность в самой точке перехода. Отметим, что критический индекс $\nu = 1/2$ совпадает с соответствующим критическим индексом в самоогласованной теории Ландау фазовых переходов второго рода.

3.2.28. Для существования бозе-эйнштейновской конденсации при конечной температуре необходимо, чтобы плотность состояний $g(\varepsilon)$ обращалась в нуль при $\varepsilon = 0$. В квазиклассическом приближении плотность состояний дается выражением

$$g(\varepsilon) = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \delta\left(\varepsilon - U(x) - \frac{p^2}{2m}\right) = \int_{U(x) \leq \varepsilon} \frac{dx}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon - U(x)}}$$

Пусть при малых x удерживающий потенциал ловушки имеет вид $U(x) = -Ax^n$ ($n > 0$). Тогда из оценки интеграла можно увидеть, что $g(\varepsilon) \sim \sim \varepsilon^{(1-n)/2n}$. Поэтому вблизи центра ловушки при $x \rightarrow 0$ потенциал $U(x)$ должен нарастать быстрее, чем гармонический, т. е. $n < 2$.

3.2.29. Квазиклассические уровни энергии частицы в поле тяжести $U(x, y, z) = mgz$ с наложенным ограничением $z > 0$ для движения в направлении оси z описываются выражением

$$\varepsilon_n(p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \varepsilon_0 \left(n + \frac{3}{4}\right)^{2/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $\varepsilon_0 = (9\pi^2 m g^2 h^3 / 8)^{1/3}$. Ниже мы будем предполагать, что температура $T \gg \varepsilon_0$, чтобы в процесс бозе-эйнштейновской конденсации было вовлечено много уровняй. В противном случае задача сводится к бозеконденсации в системе из нескольких уровней.

В этих предположениях одиночественную плотность состояний $g(\varepsilon)$ проще всего оценить, согласно

$$g(\varepsilon) = S \int_0^H dz \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - mgz\right),$$

где S — площадь дна ящика. В результате найдем

$$g(\varepsilon) = S \frac{\sqrt{2m}}{3\pi^2 \hbar^3 g} \begin{cases} \varepsilon^{3/2}, & \varepsilon < mgH, \\ \varepsilon^{3/2} - (\varepsilon - mgH)^{1/2}, & \varepsilon > mgH. \end{cases}$$

Температуру T_c базе-зинцтейновской конденсации находим из уравнения

$$N = \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{e^{\mu/T_c} - 1},$$

Введя поверхностную плотность частиц $n = N/S$, имеем

$$n = \frac{\sqrt{2m}}{3\pi^2 h^3 g} \left(\int_0^{mgH} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\mu/T_c} - 1} + \int_{mgH}^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2} - (e - mgH)^{1/2}}{e^{\mu/T_c} - 1} \right)$$

или

$$n = \frac{\sqrt{2m} T_c^{5/2}}{3\pi^2 h^3 g} \left(\int_0^{\infty} dx \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} - \int_{mgH/T_c}^{\infty} dx \frac{(x - mgH/T_c)^{1/2}}{e^x - 1} \right).$$

Для открытого или неограниченного по высоте ящика $H = \infty$ находим, что

$$n = \frac{\sqrt{2m} T_c^{5/2}}{3\pi^2 h^3 g} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta(5/2), \quad \text{или} \quad T_c = \frac{(2\pi)^{5/2}}{\zeta(2m)(5/2)} h \left(\frac{hg^2 n^2}{m} \right)^{1/5}.$$

В другом предельном случае, когда $mgH \ll T_c$ или $H \rightarrow 0$, для оценки T_c достаточно провести разложение числителя подынтегрального выражения во втором интеграле. В результате получим

$$n \approx \frac{\sqrt{2m} T_c^{5/2}}{3\pi^2 h^3 g} \frac{3mgH}{2T_c} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = \frac{(mT_c)^{3/2} H \sqrt{\pi} \zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi^2 h^3} \frac{9}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$T_c = \frac{2\pi}{\zeta^{3/2}(3/2)} \frac{h^2}{m} \left(\frac{n}{H} \right)^{2/3},$$

что совпадает с обычным однородным случаем для объемной плотности, равной n/H . Таким образом, температура перехода T_c с увеличением высоты ящика H падает и при

$$H \gtrsim H_0 \sim \frac{h}{m} \left(\frac{hn^2}{mg^2} \right)^{1/5}$$

выходит на насыщение.

Ниже температуры конденсации T_c конденсатные частицы находятся в состоянии с нулевым импульсом и в области минимального значения потенциала, т. е. на дне ящика. Распределение числа надконденсатных частиц $N_{ex}(z)$ по высоте можно найти интегрированием функции распределения $f(z(p, r))$ в импульсном пространстве:

$$N_{ex}(z) = S \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{p^2/(2m) + \mu_B(T)/T} - 1} = S \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{2/3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx \sqrt{x}}{e^{x + \mu_B(T)/T} - 1}.$$

Оценивая последний интеграл, найдем в предельных случаях:

$$N_{ex}(z) = S \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{2/3} \begin{cases} \zeta(3/2) \left(1 - \frac{2}{\zeta(3/2)} \sqrt{\frac{\pi m g^2}{T}} \right), & z < \frac{T}{mg}, \\ e^{-\mu_B(T)/T}, & z > \frac{T}{mg}. \end{cases}$$

3.2.3. Идеальный газ элементарных бозе-возбуждений

3.2.30. Термодинамический потенциал фононов, отнесенный к единице длины, описывается выражением

$$\Omega_b(T) = T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \ln(1 - e^{-p^2/T})$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\Omega_b(T) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{c(p)}{e^{p^2/T} - 1} = -E_b(T),$$

$$E_b(T) = \frac{T^2}{\pi\hbar c} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi T^2}{6\hbar c}$$

Дифференцируя энергию $E_b(T)$ по температуре, находим теплоемкость одномерных фононов $C_b(T) = \pi T / (3\hbar c)$ — линейную по температуре.

Для фермionов с фиксированным значением проекции спина термодинамический потенциал Ω_f записывается следующим образом:

$$\Omega_f(T) = -T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \ln(1 + e^{(\mu - p^2/2m)/T}).$$

Интегрируя по частиям, найдем

$$\Omega_f(T) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{p^2/2m}{e^{(p^2/2m - \varepsilon_F)/T} + 1} = -2E_f(T),$$

$$E_f(T) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/T} + 1} \approx \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} \left(\frac{2}{3} \varepsilon_F^{3/2} + \frac{\varepsilon_F^2}{6} \frac{T^2}{\sqrt{\varepsilon_F}} \right).$$

Здесь мы ограничиваемся низкотемпературным приближением $T \ll \varepsilon_F$. Вводя импульс и скорость Ферми, согласно $\varepsilon_F = p_F^2/(2m) = m v_F^2/2$, получим

$$E_f(T) = \frac{p_F}{3\pi\hbar} \varepsilon_F + \frac{\pi T^3}{6m\varepsilon_F}, \quad T \ll \varepsilon_F.$$

Отсюда для теплоемкости одномерных фермионов с фиксированной проекцией спина находим $C_f(T) = \pi T / (3\hbar v_F)$. Таким образом, при $c = v_F$ теплоемкости совпадают, и по термодинамическим свойствам при низких температурах обе системы эквивалентны. Преобразование фермионной системы в эквивалентную ей по свойствам бозеевскую упругую среду называется бозонизацией. Аналогия, в первую очередь, связана с возможностью линеаризации закона дисперсии фермионных возбуждений $\varepsilon_p - \varepsilon_F \approx \pm \mu(|p| - p_F)$ вблизи ферми-поверхности, которая представляет в одномерном случае две точки при $p = \pm p_F$.

3.2.31. Для твердого тела конечного размера из N частиц и объемом $V = L^3$ фононный вклад в теплоемкость равен

$$C(T) = \sum_n \left(\frac{\hbar\omega_n/2T}{\sinh \hbar\omega_n/2T} \right)^2 = \int d\omega g(\omega) \left(\frac{\hbar\omega/2T}{\sinh \hbar\omega/2T} \right)^2,$$

где $\{n\} = (n_1, n_2, n_3)$ означает сумму по всем разрешенным $3N$ нормальным модам упругих колебаний, а плотность состояний определяется как $g(\omega) = \sum_{\{n\}} \delta(\omega - \omega_n)$. Конечный размер тела L ведет к ограничению максимального значения длины волны упругих колебаний и, следовательно, к существованию минимального ненулевого значения частоты колебаний $\omega_{min} \sim \pi/L$, где π — скорость звука. Поэтому, в пределе $T \rightarrow 0$ теплоемкость вымерзает экспоненциально:

$$C(T) \sim N(\hbar\omega_{min}/T)^3 e^{-\hbar\omega_{min}/T} \quad (\hbar\omega_{min} \lesssim T).$$

Это меньше, чем было бы объемное значение $C_v \sim N(T/\Theta_D)^3$. Здесь Θ_D — температура Дебая. Наиболее интересен интересует область

$\hbar \omega_{\text{кин}} \ll T \lesssim \Theta_D$, так как в пределе $T \gg \Theta_D$ температура выходит на классическое значение Дюлонга-Петти $C(T) = 3N$, не зависящее от размера тела.

Частоты нормальных колебаний твердого куба размером $L \times L \times L$ с закрепленными гранями равны

$$\omega_{n_1, n_2, n_3} = \begin{cases} \frac{\pi u}{L} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}, & (n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots), \\ \frac{\pi u}{L} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} \end{cases}$$

где u_1 и u_2 — скорости продольного и поперечного звуков в изотропном упругом теле. Для оценки плотности состояний воспользуемся следующим рассмотрением. Используя формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(n) dn + \frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \dots$$

три раза для трех суммирований с условием, что каждый раз производная $\partial F / \partial n|_{n=0} = 0$, можно получить

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} F(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) &= \int_0^{\infty} dn_1 dn_2 dn_3 F(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^{\infty} dn_1 dn_2 F(n_1^2 + n_2^2) + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} dn_1 F(n_1^2) + \dots = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} 4\pi r^2 dr F(r^2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\infty} 2\pi r dr F(r^2) + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} dr F(r^2) + \dots \end{aligned}$$

Подставив $F(q^2) = \delta(\omega - \pi u q / L)$, найдем вклад в плотность состояний от одной звуковой ветви, скорость которой равна u ,

$$g_s(\omega) = \frac{L^3}{2\pi^2 u^3} \omega^2 + \frac{3}{4} \frac{L^2}{\pi u^2} \omega + \frac{3}{4} \frac{L}{\pi u} + \dots$$

Суммируя плотности состояний от одной продольной и двух поперечных ветвей звукового спектра и взводя усредненные скорости распространения звука согласно

$$\frac{3}{u_3^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{2}{u_2^2}, \quad \frac{3}{u_1^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{2}{u_2^2}, \quad \frac{3}{u_1} = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2},$$



найдем полную плотность состояний:

$$g(\omega) = \frac{3}{2} \frac{L^3}{\pi^2 \hbar^3} \omega^2 + \frac{9}{4} \frac{L^2}{\pi \hbar^3} \omega + \frac{9}{4} \frac{L}{\pi \hbar} + \dots$$

Второе и третье слагаемые обусловлены дискретностью спектра колебаний в частице конечных размеров. Подставляя $g(\omega)$ в выражение для теплоемкости и вычисляя три интеграла с подстановкой $x = \hbar\omega/T$ и бесконечным верхним пределом, найдем

$$C(T) \approx \frac{2\pi^2}{5} \left(\frac{T}{\hbar\omega_1} \right)^3 L^3 + \frac{27\zeta(3)}{2\pi} \left(\frac{T}{\hbar\omega_2} \right)^2 L^2 + \frac{3\pi}{4} \frac{T}{\hbar\omega_1} L.$$

Отсюда при промежуточных температурах $\hbar\omega_{\min} \ll T \leq \Theta_D$ для поправки к объемному значению теплоемкости, отнесенной к единице объема $c = C/L^3$, получим

$$c(T) - c_b(T) = \frac{27\zeta(3)}{2\pi} \left(\frac{T}{\hbar\omega_2} \right)^2 \frac{1}{L} + \frac{3\pi}{4} \frac{T}{\hbar\omega_1} \frac{1}{L^2}.$$

Положительность поправки означает, что существует температура, выше которой $c > c_b$, и ниже которой $c < c_b$.

3.2.32. Свободная энергия ротонов (как бозе-газа с $\mu = 0$) равна

$$F = \Omega = T \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 - e^{-\epsilon_p/T}) \approx -TVn_r(T).$$

Здесь мы разложили логарифм, имея в виду малость экспоненты в силу неравенства $T \ll \Delta$, и ввели плотность ротонов $n_r(T)$ согласно

$$n_r = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\epsilon_p/T} = \frac{\pi^{-3/2} T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-(p-p_0)^2/2\pi T}.$$

Далее, пользуясь тем, что в силу неравенства $p_0^2/(2m) \gg T$ вклад в интеграл набирается в окрестности $|p - p_0| \lesssim (2mT)^{1/2}$, найдем

$$n_r(T) = \frac{2p_0^2(mT)^{1/2}}{(2\pi\hbar^2)^{1/2}} e^{-\Delta/T}.$$

Дифференцированием выражения для F , находим энтропию S_r и теплоемкость C_r ротонного газа на единицу объема:

$$S_r = n_r \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right) \quad \text{и} \quad C_r = n_r \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right).$$

В области $T \gtrsim 0.8$ К ротонный вклад играет основную роль в термодинамических функциях сверхтекущего гелия.



3.2.33. Тепловое возбуждение магнитонов приводит к изменению значения термодинамического потенциала магнетика при $T = 0$, так что $\Omega(T) = \Omega(0) + \Omega_m(T)$. В результате изменяется намагниченность и теплоемкость магнетика. Равновесное значение намагниченности и теплоемкости связаны с потенциалом Ω соотношениями

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{H}} \quad \text{и} \quad C = -\frac{T}{V} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2},$$

где V — объем тела. Термодинамический потенциал Ω_m газа магнитонов описывается соотношением

$$\Omega_m(T) = - \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\hbar\omega_k/T}).$$

Это дает поправки к намагниченности и теплоемкости, обусловленные тепловым возбуждением спиновых волн:

$$\Delta M(T) = M(T) - M_0 = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar(\partial\omega_k/\partial H)}{e^{\hbar\omega_k/T} - 1} = -\beta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega_k/T} - 1},$$

$$C_m(T) = \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_k}{e^{\hbar\omega_k/T} - 1} = \frac{\partial E_m(T)}{\partial T},$$

где M_0 — намагниченность при $T = 0$, а $E_m(T)$ — энергия газа магнитонов. Из первого соотношения видно, что спиновые возбуждения уменьшают намагниченность ферромагнетика пропорционально числу магнитонов в единице объема. Введя переменную $x = \beta M_0 \alpha k^2 / T$, представим интегралы в виде

$$\Delta M(T) = -\frac{\beta}{8} \left(\frac{T}{\pi \beta M_0 \alpha} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{x + \beta H/T} - 1}.$$

$$C_m(T) = \frac{\partial E_m}{\partial T}, \quad E_m = \frac{T}{8} \left(\frac{T}{\pi \beta M_0 \alpha} \right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{x + \beta H/T} - 1}.$$

Оценивая интегралы в слабых $\beta H \ll T$ и сильных $\beta H \gg T$ полях, найдем для вклада магнитонов в намагниченность

$$\Delta M(T) = -\frac{\beta}{8} \left(\frac{T}{\pi \beta M_0 \alpha} \right)^{3/2} \begin{cases} \zeta(2/3) - 2\sqrt{\frac{\pi \beta H}{T}}, & \beta H \ll T, \\ e^{-\beta H/T}, & \beta H \gg T, \end{cases}$$

и в теплоемкость

$$C_H(T) = \frac{3}{16} \left(\frac{T}{\pi \beta M_0 \alpha} \right)^{3/2} \begin{cases} \frac{5}{2} \zeta(5/2) - \frac{3}{2} \zeta(3/2) \frac{\beta H}{T}, & \beta H \ll T, \\ \frac{\beta H}{T} e^{-\beta H/T}, & \beta H \gg T. \end{cases}$$

Температурная зависимость $T^{3/2}$ для магнитного вклада при $H=0$ называется законом Блэка. Эта зависимость справедлива при температурах достаточно удаленных от температуры Кюри, при приближении к которой необходимо учитывать как ограниченность возможных волновых векторов по величине, так и взаимодействие магнитов друг с другом. В сильных магнитных полях отклонение намагниченности от M_0 и магнитная часть теплоемкости экспоненциально малы, что связано с наличием энергии активации βH спиновых волн в магнитном поле.

3.2.34. Рассматривая рождение пар, как химическую реакцию $b + \bar{b} \xrightarrow{\gamma} \gamma$, и учитывая, что химический потенциал гамма-квантов равен нулю, для соотношения химических потенциалов бозонов и антибозонов мы найдем $\mu_b + \mu_{\bar{b}} = 0$. Разность плотностей бозонов и антибозонов, которая сохраняется, имеет вид

$$n = n_b - n_{\bar{b}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu_b)/T} - 1} - \frac{1}{e^{(\epsilon_p + \mu_b)/T} - 1} \right).$$

Здесь ϵ_p дается релятивистским выражением $\epsilon_p = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. Упрощая выражение, найдем

$$n = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sinh \mu_b/T}{\cosh \epsilon_p/T - \cosh \mu_b/T}$$

Поскольку числа заполнения бозонов и антибозонов должны быть неотрицательны, то $|\mu_b| \leq mc^2$. При температуре бозе-Эйнштейновской конденсации должно быть $|\mu_b(T_c)| = mc^2$, и тогда

$$n = \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{\sinh(mc^2/T_c)}{\cosh(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/T_c) - \cosh(mc^2/T_c)}$$

В ультрарелятивистском пределе $T_c \gg mc^2$ можно положить $\epsilon_p = cp$, и тогда

$$n \approx \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{mc^2/T_c}{\cosh(pc/T_c) - 1} = \frac{mc^2 T_c^3}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\cosh x - 1} = \frac{m T_c^2}{3 \hbar^3 c}$$

Отсюда $T_c = \hbar(3k\pi/m)^{1/2}$. Без учета рождения пар $T_c \sim \hbar c n^{1/2}$. Для выполнения условия $T_c \geq mc^2$ необходима высокая плотность $n^{-1/2} < \ll \hbar/(mc)$, т. е. среднее расстояние между частицами должно быть меньше их комптоновской длины.

3.2.35. Полная интенсивность излучения физиков абсолюту черным телом площадью $4\pi R_p^2$ равна $4\pi R_p^2 \sigma T^4$, где $\sigma = \pi^2/(60h^3c^2)$ — постоянная Стефана-Больцмана. Потери массы черной дыры в процессе ее испарения даются уравнением баланса энергии:

$$-\frac{d}{dt}(Mc^2) = 4\pi R_p^2 \sigma T^4 = \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{15\pi} \frac{\hbar c^5}{G^2 M^2}.$$

Время жизни черной дыры оказывается конечным и равным

$$\tau = 15 \cdot 2^{10} \pi \frac{G^2}{\hbar c^5} \int_0^M dM = 5 \cdot 2^{10} \pi \frac{G^2 M^3}{\hbar c^5} = \frac{320}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{M_p}\right)^3 t_p.$$

Последнее равенство записано в планковских единицах массы $M_p = (\hbar c/8\pi G)^{1/2}$ и времени $t_p = (\hbar G/c^5)^{1/2}$.

3.3. НЕИДЕАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ (ЖИДКОСТИ). ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

3.3.1. Нормальная (несверхтекучая) ферми-жидкость

3.3.1. Воспользуемся тем, что импульс единицы объема жидкости равен плотности потока массы, и тем, что число истинных частиц массой m в ферми-жидкости равно числу квазичастиц. С учетом того, что скорость квазичастича равна de/dp , плотность потока квазичастич даётся выражением

$$I = \int \frac{\partial e}{\partial p} n(p) d\tau_p, \quad d\tau_p = 2 \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

и, соответственно, плотность потока массы жидкости будет $j = mI$. С другой стороны, импульс единицы объема жидкости равен интегралу

$$\mathcal{P} = \int p n d\tau_p.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\int p n d\tau_p = m \int \frac{\partial e}{\partial p} n(p) d\tau_p.$$

Варьиран это равенство по функции распределения, найдем

$$\begin{aligned} \int p \delta n d\tau_p &= m \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta n d\tau_p + m \int n(p) \frac{\partial(\delta \epsilon)}{\partial p} d\tau_p = \\ &= m \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta n d\tau_p + m \int d\tau_p n(p) \frac{\partial}{\partial p} \left(\int f(p, p') \delta n(p') d\tau_{p'} \right) = \\ &= m \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta n d\tau_p + m \int d\tau_p \delta n(p) \int d\tau_{p'} n(p') \frac{\partial}{\partial p} f(p', p). \end{aligned}$$

Ввиду произвольности δn и с учетом симметричности $f(p, p')$ имеем равенство

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} + \int \frac{\partial f(p, p')}{\partial p} n(p') d\tau_{p'},$$

которое после интегрирования по частям и с учетом замуления подынтегрального выражения на бесконечно удаленной поверхности $p' = \infty$ примет вид

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} - \int f(p, p') \frac{\partial n(p')}{\partial p} d\tau_{p'}.$$

Для равновесной функции распределения при $T = 0$

$$\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = -\nu_F \frac{p}{p_F} \delta(\epsilon - \epsilon_F) = -\frac{p}{p_F} \delta(p - p_F).$$

При определении эффективной массы m^* нас будут интересовать значения импульса на поверхности Ферми $|p| = p_F$. Выберем направление вектора p за полярную ось и введем угол χ , равный углу между векторами $p = p_F n$ и $p' = p_F n'$:

$$\begin{aligned} \frac{p}{m} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \Big|_{p=p_F} + \int f(p_F n, p_F n') \delta(p' - p_F) \frac{p'}{p_F} \frac{2p'^2 dp' d\Omega_\chi}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \nu_F \frac{p}{p_F} + \int f(\chi) n' \frac{p_F^2}{\pi^2 \hbar^3} \frac{d\Omega_\chi}{4\pi} = \nu_F \frac{p}{p_F} + \frac{n_F^2}{\pi^2 \hbar^3} n \int f(\chi) \cos \chi \frac{d\Omega_\chi}{4\pi}, \end{aligned}$$

где $d\Omega_\chi = 2\pi \sin \chi d\chi$ — элемент телесного угла. Используя $\nu_F = p_F/m^*$ и вводя определение параметра Ландау F_1 , представляющего собой усредненное с косинусом угла по поверхности Ферми взаимодействие между квазичастичами

$$F_1 = 3 \frac{p_F^2}{\pi^2 \hbar^3 \nu_F} \int f(\chi) \cos \chi \frac{d\Omega_\chi}{4\pi} = 3 \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \int f(\chi) \cos \chi \frac{d\Omega_\chi}{4\pi}.$$

Найдем связь между эффективной массой m^* и параметром F_1 :

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m^*} \left(1 + \frac{F_1}{3} \right), \quad \text{или} \quad m^* = m \left(1 + \frac{F_1}{3} \right).$$

В жидком ${}^3\text{He}$ значение $F_1 = 6.25$ и, соответственно, $m^* = 3.08m$, где m — масса атома ${}^3\text{He}$. В металлах или полупроводниках m^* может быть как больше, так и меньше электронной массы. В так называемых тяжелогермийонных металлах на основе церия или урана эффективная масса m^* может превышать массу электрона в 100 и более раз.

3.3.2. Эффективная масса определяет энтропию S и теплоемкость C жидкости в пределе низких температур $T \ll \epsilon_F$. Теплоемкость находится с помощью дифференцирования энергии по температуре при заданном числе частиц N . Изменение энергии жидкости в единице объема при температурном изменении равновесной функции распределения $\delta n = n(T) - n_0$ можно записать в виде

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n d\tau_p = \int \varepsilon_0 \delta n d\tau_p + \int \delta \varepsilon \delta n d\tau_p \approx \int \varepsilon_0 \delta n d\tau_p,$$

Пренебрежение вторым слагаемым в данном случае оправдано только тем обстоятельством, что в пределе низких температур вклад от оставленного слагаемого линеен по температуре T , а вклад от отброшенного слагаемого, который обусловлен взаимодействием квазичастич, — более низкого порядка, чем первая степень температуры. Действительно,

$$\frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial T} = \int / \frac{\partial(\delta n')}{\partial T} d\tau_{p'},$$

а также учтем, что при $T \rightarrow 0$ имеет место разложение

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial \mu}{\partial T} \delta(\varepsilon - \mu) - \frac{\pi^2}{3} T \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta(\varepsilon - \mu) + \dots$$

Производная $\partial \mu / \partial T$ разна энтропии, которая как и теплоемкость, будет линейна по температуре. Следовательно, величина $\delta\varepsilon$ — второго порядка по T , и наше приближение будет оправдано. Тогда при фиксированном числе частиц жидкости $N = \text{const}$ имеем

$$C(T) \approx \int \varepsilon_0(p) \frac{\partial a}{\partial T} d\tau_p \quad \text{и} \quad 0 = \int \frac{\partial a}{\partial T} d\tau_N,$$

причем в низшем порядке по температуре T в производной функции a по T можно заменить точные значения ε на ε_0 . После этого вычисления становится тождественным вычислению для случая идеального газа с заменой в плотности состояний массы частицы m на эффективную массу m^* . Таким образом, теплоемкость ферми-жидкости равна

$$C(T) = \gamma T, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{3} g(\varepsilon_F), \quad g(\varepsilon_F) = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3},$$

где γ — постоянная Зоммерфельда и $g(\varepsilon_F)$ — плотность состояний на поверхности Ферми. В силу линейной температурной зависимости энтропии и теплоемкости совпадают. Положительность теплоемкости дает необходимое условие устойчивости ферми-жидкости $m^* > 0$ или $F_1 > -3$.

3.3.3. Когда ферми-жидкость находится в магнитном поле H , то квазичастицы приобретают дополнительную энергию от приложенного поля в изменении функции распределения $\delta n_\sigma(\mathbf{p}) = n_\sigma(\mathbf{p}) - n_0(\mathbf{p})$:

$$\delta \epsilon_\sigma(\mathbf{p}) = -\beta \sigma H + \text{Tr}_{\sigma'} \int f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}\mathbf{p}') \delta n_{\sigma'}(\mathbf{p}') d\tau_{\sigma'}, \quad d\tau_p = \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где β — эффективный магнетон Бора, σ — матрицы Паули. Спиновая восприимчивость вычисляется согласно

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \text{Tr}_\sigma \int \beta \sigma n_\sigma(\mathbf{p}) d\tau_p = \beta \frac{\partial}{\partial H} \text{Tr}_\sigma \int \sigma \delta n_\sigma(\mathbf{p}) d\tau_p$$

В линейном приближении по магнитному полю можно пренебречь изменением химического потенциала, так как он меняется лишь во втором порядке по магнитному полю H . Поэтому приблизительно

$$\begin{aligned} \chi &\approx \beta \frac{\partial}{\partial H} \text{Tr}_\sigma \int \sigma \frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta \epsilon_\sigma(\mathbf{p}) d\tau_p, \\ \delta \epsilon_\sigma(\mathbf{p}) &\approx -\beta \sigma H + \text{Tr}_{\sigma'} \int f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}\mathbf{p}') \frac{\partial n_0(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \delta \epsilon_{\sigma'}(\mathbf{p}') d\tau_{\sigma'}, \end{aligned}$$

Так как $n'_0(\varepsilon) = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) = -\delta(p - p_F)/\pi\hbar$, то интегрирование в обоих интегралах происходит по поверхности Ферми, и существенны значения только при $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_F$. Предполагая решение в виде $\delta \epsilon_\sigma(\mathbf{p}) = -\zeta(\mathbf{p}) \beta \sigma H$, найдем уравнения для определения ξ и χ :

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{p}) &= 1 + 2 \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n_0(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \xi(\mathbf{p}') d\tau_{\sigma'}, \\ \chi &= -2\beta^2 \int \zeta(\mathbf{p}) \frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\tau_p = \beta^2 \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \xi(p_F) = \beta^2 g(\varepsilon_F) \xi(p_F), \end{aligned}$$

где $g(\varepsilon_F)$ — плотность состояний на поверхности Ферми. Мы воспользовались тем, что $\text{Tr}_{\sigma'}(\sigma\sigma')\sigma = 2\sigma$ и $\text{Tr}_\sigma(\sigma H)\sigma = 2H$. Независящая от спинов часть взаимодействия $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ естественно выпадает из результата. Выберем направление вектора \mathbf{p} за полярную ось z и введем угол θ , равный углу между векторами $\mathbf{p} = p_F \mathbf{n}$ и $\mathbf{p}' = p_F \mathbf{n}'$. Тогда

$$\zeta(p_F) = 1 - \int \zeta(\theta) \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \xi(p_F) \frac{d\Omega_F}{4\pi}, \quad \zeta(\theta) = \zeta(p_F \mathbf{n}, p_F \mathbf{n}').$$

где $d\Omega_0 = 2\pi \sin \theta d\theta$ — элемент телесного угла. Отсюда

$$\zeta(p_F) = \frac{1}{1 + Z_0} \quad \text{и} \quad Z_0 = g(\varepsilon_F) \int \zeta(\theta) \frac{d\Omega_0}{4\pi},$$

где Z_0 — обменный параметр Ландау, равный с точностью до множителя усредненному значению обменного взаимодействия по поверхности Ферми. Следовательно, спиновая восприимчивость в ферми-жидкости равна

$$\chi = \frac{\partial^2 g(\varepsilon_F)}{1 + Z_0}.$$

Условие устойчивости (критерий Стонера) парамагнитного состояния ферми-жидкости определяется соотношениями $\chi > 0$ или $Z_0 > -1$. Если Z_0 становится равным -1 , то χ обращается в бесконечность, что означает наличие ферромагнитной неустойчивости. В жидком ${}^3\text{He}$ $Z_0 \approx -0.67$, Металлы Pd , где $Z_0 \approx -0.9$, еще ближе к магнитной неустойчивости.

3.3.4. Рассмотрим малые отклонения функции распределения $\delta n = n - n_0$ от равновесной функции n_0 . При этом также изменяется и энергия квазичастиц H :

$$n = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad \text{и} \quad H = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \delta \varepsilon[n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)].$$

В линейном приближении по δn и $\delta \varepsilon$ из уравнения Лиувилля найдем

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \tau} = 0.$$

Скорость квазичастиц равна $\mathbf{v} = \partial \varepsilon_0 / \partial \mathbf{p}$, и производная имеет вид $\partial n_0 / \partial \mathbf{p} = \mathbf{v} \partial n_0 / \partial \varepsilon$. Решение ищем в виде бегущей волны

$$\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta n(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t},$$

где \mathbf{k} — волновой вектор и ω — частота колебаний. Изменение энергии квазичастиц, выраженное через функцию взаимодействия $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, можно записать в виде

$$\delta \varepsilon = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\tau_{p'}, \quad d\tau_{p'} = 2 \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поэтому

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta n(\mathbf{p}) = -(\mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') d\tau_{p'} = -(\mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} f_0 \int \delta n(\mathbf{p}') d\tau_{p'},$$

где для упрощения анализа мы положили $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f_0 = \text{const}$, а также $T = 0$. Решение уравнения имеет вид $\delta n(\mathbf{p}) = n_0'(\varepsilon) \nu(\theta)$, где θ — угол

между векторами \mathbf{v} и \mathbf{k} . Поскольку $n'_0(\epsilon) = -\delta(p - p_F)/v_F$, поправка $\delta n(\mathbf{p})$ отлична от нуля только на поверхности Ферми, т. е. $|\mathbf{p}| = p_F$ и $|\mathbf{v}| = v_F$. Подставляя $\delta n(\mathbf{p})$, найдем

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\nu(\theta) = \mathbf{k}\mathbf{v}F_0 \int \nu(\theta') \frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi}, \quad F_0 = \frac{p_F^2}{\pi^2 \hbar^3 n_F} I_0 = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} I_0.$$

Здесь F_0 — безразмерный параметр Ландау, $m^* p_F / (\pi^2 \hbar^3)$ — плотность состояний и $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ — элемент телесного угла.

Далее

$$\frac{\nu(\theta)}{F_0} = \frac{\cos \theta}{z - \cos \theta} \int \nu(\theta') \frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi} \quad \text{и} \quad z = \frac{\omega}{v_F k}.$$

Из условия самосогласования

$$\frac{1}{F_0} \int \nu(\theta) \frac{d\Omega_{\theta}}{4\pi} = \int \frac{\cos \theta}{z - \cos \theta} \frac{d\Omega_{\theta}}{4\pi} \left(\int \nu(\theta') \frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi} \right)$$

находим

$$\frac{1}{F_0} = \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{z - \cos \theta} \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{z dz}{z - z}.$$

Дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{F_0} = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1,$$

имеет действительные решения только при $F_0 > 0$, так как правая часть изменяется в пределах $(-\infty, 0)$ при изменении z от 1 до $+\infty$. Таким образом, если $F_0 > 0$, что отвечает отталкиванию квазичастиц на ферми-поверхности, то имеется действительное решение $z = z(F_0)$, которое дает незатухающую волну со звуковым спектром:

$$\omega(k) = z(F_0) v_F k.$$

Такие звуковые волны в ферми-жидкости называются бесстолкновительным звуком или нуль-звуком. Если $F_0 \rightarrow +0$, то $z \rightarrow 1$. Для $F_0 \gg 1$, $z \approx \sqrt{F_0}/3$. Следовательно, незатухающие волновые процессы возможны только при условии, что скорость квазичастиц v_F не превышает fazовую скорость волны ω/k . В жидком ${}^3\text{He}$ значение $F_0 = 10.8$, и скорость нуль-звучка примерно 197 м/с. В процессе распространения нуль-звучка поверхность Ферми вытягивается в направлении распространения волны и сплющивается в противоположном направлении.

При $F_0 < 0$ действительных решений дисперсионного уравнения нет, и моды колебаний ферми-поверхности — затухающие.

3.3.5. Поверхностное натяжение σ определяется минимизацией по параметру b разности энергий металла при наличии поверхности раздела между двумя частями металла и при ее отсутствии:

$$2\sigma = 2E[n(x)] - E[n].$$

Здесь энергии отнесены к единице площади поверхности, а n — объемная электронная плотность и $n(x)$ — плотность электронов при наличии поверхности.

Поскольку при образовании поверхности изменением в распределении положительного фона пренебрегают, то вклад в поверхностное натяжение от кулоновского взаимодействия между зарядами проще вычислить, используя скалярный потенциал $\varphi(x)$. Энергия взаимодействия зарядов на единицу площади равна

$$E_{\text{вз}} = \frac{e}{2} \int (n_+(x) - n(x)) \varphi(x) dx.$$

Без поверхности $n(x) = n_+ = n$ и $E_{\text{вз}} = 0$. Изменение электростатической энергии взаимодействия, вносимое образованием поверхности и перераспределением электронной плотности в поверхностное натяжение, будет равно

$$\sigma_{\text{вз}} = \frac{e}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (n_+(x) - n(x)) \varphi(x) dx,$$

$$n_+(x) = n\theta(-x) \quad \text{и} \quad n(x) = n \left[\left(1 - \frac{e^{x/b}}{2}\right) \theta(-x) + \frac{e^{-x/b}}{2} \theta(x) \right].$$

Потенциал $\varphi(x)$ найдем с помощью уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} = -4\pi e[n_+(x) - n(x)].$$

Отсюда $\varphi(x) = 4\pi eb^2 n(x)$. Вычисляя далее интеграл, получим

$$\sigma_{\text{вз}} = \frac{\pi e^2 n^2 b^3}{2} = Ab^3.$$

Вклад от кинетической и обменной энергий дается соотношением

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{обм}} &= \frac{3(3\pi^2)^{2/3} h^3}{5(2m)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} [n^{5/3}(x) - n^{5/3}\theta(-x)] dx - \\ &- \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} e^2 \int_{-\infty}^{\infty} [n^{4/3}(x) - n^{4/3}\theta(-x)] dx = \\ &= - \left[\frac{3(3\pi^2)^{2/3} h^3}{5(2m)^{1/3}} n^{5/3} I_{5/3} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} e^2 n^{4/3} I_{4/3} \right] b = -3Bb. \end{aligned}$$

Здесь мы введи обозначения:

$$-I_b = \int_{-\infty}^0 (1 - e^x/2)^b dx + \int_0^\infty (e^x/2)^b dx = \int_0^{1/2} \frac{(1-x)^b - 1}{x} dx + \frac{1}{2^b b}.$$

Выполнив вычисления, найдем значения $I_{5/3}$ и $I_{4/3}$:

$$I_{5/3} = \frac{21}{10} (1 - 2^{-2/3}) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2^{2/3}}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln(1 - 2^{-1/3}) - \frac{3}{2} \ln 6 \approx 0.572,$$

$$I_{4/3} = \frac{15}{4} (1 - 2^{-1/3}) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2^{2/3}}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln(1 - 2^{-1/3}) - \frac{3}{2} \ln 6 \approx 0.339.$$

Вклад от энергии неоднородности вычисляется проще:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{неод}} &= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^0 \frac{(\nabla n)^2}{72n} dx = \\ &= \frac{\hbar^2 \pi}{72mb} \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x} dx}{1 - e^x/2} + \int_0^\infty \frac{2e^{-2x} dx}{e^{-x}} \right) = \frac{\hbar^2 n \ln 2}{mb \cdot 72} = \frac{C}{b}. \end{aligned}$$

Окончательно для поверхностного натяжения получим

$$\sigma(b) = Ab^3 - Bb + \frac{C}{b}$$

Отсюда видно, что не выгодны как малые значения b , так и большие. Оптимальное значение b находится из условия минимума $\partial\sigma/\partial b = 0$ и положительности значений b . В результате будем иметь

$$b_0 = \left(\frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC/3}}{2A} \right)^{1/2}, \quad \sigma(b_0) = 2b_0 \left(\sqrt{B^2 + \frac{4AC}{3}} - 2B \right).$$

Для анализа формул удобно ввести безразмерный радиус Вигнера-Зейца, как радиус сферы в атомных единицах, объем которой приходится на один электрон:

$$\frac{4\pi r_i^3}{3} = \frac{1}{na_B^3}; \quad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Коэффициент B меняет знак при $r_i = 2^{1/3}(3\pi^2)^{2/3} I_{5/3}/5I_{4/3} \approx 4$ н, следовательно, при больших плотностях преобладает кинетический член, а при низких плотностях — обменный вклад. При малых плотностях

или больших $r_s \gtrsim 4$ можно приближенно полагать $AC \ll B^2$ и считать вклад в B только обменным ($B < 0$):

$$b_0 \approx \sqrt{\frac{C}{3B}} \approx a_B r_s^{1/2} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{\ln 2}{54f_{1/2}}\right)^{1/2} \approx 0.25a_B r_s^{1/2},$$

$$\sigma(b_0) \approx 2\sqrt{3CB} \approx \frac{e^2}{a_B^2} \frac{1}{r_s^{7/2}} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \left(\frac{f_{1/2} \ln 2}{96}\right)^{1/2} \approx \frac{e^2}{a_B^2} \frac{0.0185}{r_s^{7/2}}.$$

В итоге, при малых плотностях или больших $r_s \gtrsim 4$ поверхностное натяжение положительно и уменьшается с ростом r_s .

При больших электронных плотностях или малых $r_s \lesssim 1$ можно пренебречь обменным вкладом по сравнению с вкладом от кинетического члена, и также воспользоваться тем, что опять $AC \ll B^2$. После чего мы приходим к следующим оценкам:

$$b_0 \approx \sqrt{B/A} \approx a_B r_s^{1/2} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{3f_{1/2}}{5}\right)^{1/2} \approx 0.75a_B r_s^{1/2}.$$

$$\sigma(b_0) \approx -\frac{2B^{1/2}}{A^{1/2}} \approx -\frac{e^2}{a_B^2} \frac{1}{r_s^{3/2}} \frac{9}{40} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} f_{1/2}^{3/2} \approx -\frac{e^2}{a_B^2} \frac{0.0754}{r_s^{3/2}}.$$

Видно, что при малых $r_s \lesssim 1$, поверхностное натяжение становится отрицательным и растет по абсолютной величине с уменьшением r_s . Физическая причина лежит в том, что электроны, вытекая в приповерхностную область, уменьшают свою плотность и кинетическую энергию. Этот вклад в поверхностное натяжение имеет отрицательный знак и становится определяющим при малых $r_s \lesssim 1$. Таким образом, металлическое состояние с высокой плотностью электронов обладает поверхностной неустойчивостью, связанной с отрицательным значением поверхностного натяжения.

Как функция r_s , поверхностное натяжение (рис. 3.4) в простейшей модели «желе» растет с отрицательных значений, проходит через нулевое значение около $r_s \sim 2.8$, достигает положительного максимума r_s , и начинает спадать с ростом r_s , оставаясь положительным. Для лучшего количественного согласия с экспериментальными значениями поверхностного натяжения металлов необходимо

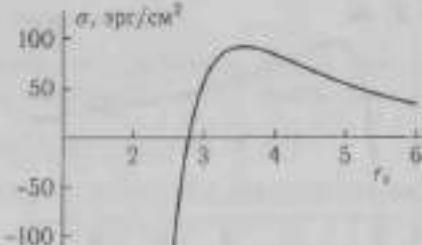


Рис. 3.4. График зависимости поверхностного натяжения как функции радиуса Вигнера-Зейца в модели «желе»

мо учитывать корреляционную энергию электронной жидкости и дискретность положительных ионов. Для большинства обычных металлов $r_s = 2 \div 6$.

3.3.6. Условие разновесия электронов в металле при сохранении числа электронов $\int n(r) dr$ задается условием постоянства множителя Лагранжа, который в данном случае часто называется электрохимическим потенциалом и равен

$$\zeta = \frac{\delta E[n(r)]}{\delta n(r)} = -e\varphi(r) - \mu[n(r)].$$

Электрический потенциал $\varphi(r)$ определяется обычным образом:

$$\varphi(r) = e \int \frac{n_s(r') - n(r)}{|r - r'|} dr'.$$

а химический потенциал $\mu[n(r)]$ равен

$$\mu[n(r)] = \frac{\delta E_{kin}[n(r)]}{\delta n(r)} + \frac{\delta E_{int}[n(r)]}{\delta n(r)} = \mu_{kin}[n(r)] + \mu_{int}[n(r)].$$

Однородная часть — сумма кинетической и обменной энергий, отнесенных к одной частице:

$$\mu_{kin}(n) = \frac{\hbar^2(3\pi^2n)^{2/3}}{2m} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} e^2 n^{1/3}.$$

Работа выхода W есть работа по удалению электрона из металла и определяется как разность электрохимических потенциалов электрона вне и внутри металла:

$$W = \zeta(\infty) - \zeta(-\infty) = -e[\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] - \mu_{kin}(n),$$

где мы учли, что для одного электрона $\mu(\infty) = 0$, а внутри металла электронная плотность становится однородной $n(-\infty) = n$. Разность электростатических потенциалов $\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$ возникает вследствие нарушения локальной электронейтральности близи границы металла с вакуумом и образования двойного электрического слоя. Скачок электрического потенциала чувствителен к виду

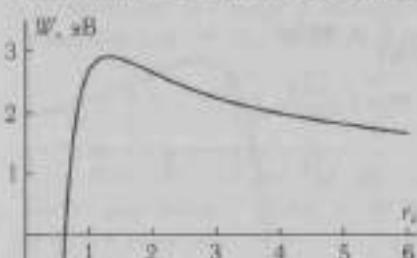


Рис. 3.5. График зависимости работы выхода электрона как функции радиуса Вигнера-Зейда в модели «желе»

аблизи границы металла с вакуумом и образования двойного электрического слоя. Скачок электрического потенциала чувствителен к виду

распределения электронной плотности и может быть выражен как дипольный момент двойного слоя:

$$\varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} x(n_+(x) - n(x)) dx.$$

Это соотношение можно получить из уравнения Пуассона. Подчеркнем, что работа выхода электрона складывается из двух вкладов. Первый — энергия связи электрона в металле, как нейтральной частицы. Второй вклад связан с притяжением удаленного электрона к поверхности металла и равен работе по преодолению потенциального барьера, образованного двойным слоем на поверхности металла.

Для вариационного распределения электронной плотности $n(x)$ из предыдущей задачи найдем

$$W = 4\pi n e^2 b^2 - \frac{\hbar^2 (3\sigma^2 n)^{2/3}}{2m} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} e^2 n^{1/3} = \\ = \frac{e^2}{ab} \left[\frac{3}{r_s} \left(\frac{b}{a_B}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{1}{r_s^2} + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{r_s} \right].$$

В качестве b можно использовать значение $b = b_0$, которое минимизирует поверхностную энергию.

В области малых плотностей или больших $r_s \gtrsim 2$ работа выхода (рис. 3.5) всегда положительна и убывает. С уменьшением $r_s \lesssim 2$ работа выхода проходит через максимум и затем неограниченно уменьшается, приобретая отрицательное значение при $r_s \lesssim 0.5$. Это также указывает на неустойчивость однородного металлического состояния для высоких значений электронной плотности ($r_s \lesssim 1$).

3.3.2. Сверхпроводимость. Теория БКШ

3.3.7. В сверхпроводнике с синглетным σ -спариванием спектр элементарных возбуждений вблизи ферми-поверхности дается выражением

$$\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}; \quad \xi_p = v_F(p - p_F) \quad (|p - p_F| \ll p_F).$$

По определению плотность состояний, отнесенная к единице объема, равна

$$\nu_i(\varepsilon) = \sum_p \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int p^2 dp \delta\left(\varepsilon - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}\right).$$

Поскольку нас интересует область значений $|p - p_F| \ll p_F$, то приближенно можно заменить $p^2 dp \rightarrow (p_F^2/v_F) d\xi$. Тогда

$$\nu_i(\varepsilon) = \frac{p_F^2}{\pi^2 \hbar^3 v_F} \int d\xi \delta\left(\varepsilon - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right) = \nu(0) \int \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon'^2 - \Delta^2}} \delta(\varepsilon - \varepsilon')$$

Окончательно имеем

$$\nu_s(\varepsilon) = \nu(0) \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon < \Delta, \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}, & \text{при } \varepsilon > \Delta. \end{cases}$$

где $\nu(0)$ — плотность состояний на поверхности Ферми в нормальном состоянии. Плотность состояний квазичастичных возбуждений в щели при $\varepsilon < \Delta$ тождественно обращается в ноль.

3.3.8. Плотность состояний, отнесенная к единице объема, равна

$$\begin{aligned} \nu_s(\varepsilon) &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} \delta\left(\varepsilon - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta}\right) = \\ &= \nu(0) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \delta\left(\varepsilon - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы учли две проекции спинов элементарных возбуждений и то, что нас интересует область энергий $\varepsilon \ll \varepsilon_F$. Последнее позволяет выполнить замену $p^2 dp \rightarrow (p_F^2/v_F) d\xi$. Далее

$$\nu_s(\varepsilon) = \frac{\nu(0)}{2} \int_{\ln \theta < \varepsilon/\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta d\theta,$$

где $\nu(0)$ — плотность состояний на поверхности Ферми в нормальном состоянии. Вычисление интеграла дает

$$\nu_s(\varepsilon) = \frac{\nu(0)}{2} \frac{\varepsilon}{\Delta} \ln \left| \frac{\varepsilon + \Delta}{\varepsilon - \Delta} \right| = \nu(0) \begin{cases} (\varepsilon/\Delta)^2, & \varepsilon \ll \Delta, \\ 1, & \varepsilon \gg \Delta \end{cases}$$

Таким образом, при $\varepsilon < \Delta$ мы имеем ненулевую плотность состояний элементарных возбуждений.

3.3.9. Линеаризованное самосогласованное уравнение для щели

$$\Delta_p = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V(p, p') \frac{\ln(\xi_p'/2T_c)}{2\varepsilon_p} \Delta_{p'}$$

служит для определения температуры сверхпроводящего перехода T_c , как температуры, при которой впервые возникает нетривиальное решение $\Delta_p \neq 0$. Так как вклад в интеграл дает область импульсов вблизи ферми-поверхности $|p - p_F| \ll p_F$, то можно заменить дифференциал $d^3 p'$ на $4\pi(p_F^2/v_F)d\xi'$. Тогда

$$\Delta(\xi) = -N(0) \int d\xi' V(\xi, \xi') \frac{\ln(\xi'/2T_c)}{2\xi'} \Delta(\xi').$$

где $N(0) = \rho_F^2 / (2\pi^2 \hbar^3 v_F)$ — плотность состояний на поверхности Ферми с фиксированной проекцией спина. Решение ищем в виде кусочно-гладкой функции

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} \Delta_1, & |\xi| < \hbar\omega_D, \\ \Delta_2, & \hbar\omega_D < |\xi| < \hbar\omega_C, \\ 0, & \hbar\omega_C < |\xi|. \end{cases}$$

В результате получим систему двух линейных уравнений:

$$\Delta_1 = (\lambda - \mu)L_1\Delta_1 - \mu L_2\Delta_2, \quad L_1 = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi'}{2\xi'} \operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{2T_c}\right) = \ln\left(\frac{\gamma 2\hbar\omega_B}{\pi T_c}\right),$$

$$\Delta_2 = -\mu L_1\Delta_1 - \mu L_2\Delta_2, \quad L_2 = \int_{\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_C} \frac{d\xi'}{2\xi'} \operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{2T_c}\right) = \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_B}\right).$$

Здесь $\lambda = gN(0)$ — безразмерная константа электрон-фонового притяжения, $\mu = VN(0)$ — константа кулоновского отталкивания электронов, и $\ln\gamma = C \approx 0,577$ — постоянная Эйлера. В оценке интегралов использовали обычное приближение слабой связи $\hbar\omega_C, \hbar\omega_D \gg T_c$. Условие существования нетривиального решения однородной системы линейных уравнений (обращение в ноль детерминанта) дает уравнение

$$(1 - (\lambda - \mu)L_1)(1 + \mu L_2) - \mu^2 L_1 L_2 = 0$$

или

$$\left(\lambda - \frac{\mu}{1 + \mu L_2}\right)L_1 = 1.$$

Отсюда температура сверхпроводящего перехода описывается обычной формулой БКШ с некоторой эффективной константой $\lambda - \mu^*$:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda - \mu^*}\right),$$

где μ^* — кулоновский псевдопотенциал:

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu \ln(\omega_C/\omega_B)}$$

В силу $\hbar\omega_C \sim \epsilon_F \gg \hbar\omega_D$ происходит логарифмическое ослабление кулоновского отталкивания за счет большого значения кулоновского логарифма $|\ln[\epsilon_F/(\hbar\omega_D)]| \gg 1$. Даже при $\lambda < \mu$ еще возможно существование сверхпроводимости.

Величина изотопического эффекта дается формулой

$$\alpha = -\frac{d(\ln T_c)}{d(\ln M)} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\mu^*}{\lambda - \mu^*} \right)^2 \right].$$

Купоновское отталкивание всегда ведет к уменьшению изотопического эффекта.

3.3.10. Обобщение самосогласованного уравнения на шель для сверхпроводника с двумя перекрывающимися зонами, каждая из которых имеет свою шель, описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -g_{11} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\tanh(\epsilon_{p_1}/2T)}{2\varepsilon_{p_1}} \Delta_1 - g_{12} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\tanh(\epsilon_{p_2}/2T)}{2\varepsilon_{p_2}} \Delta_2, \\ \Delta_2 &= -g_{21} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\tanh(\epsilon_{p_1}/2T)}{2\varepsilon_{p_1}} \Delta_1 - g_{22} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\tanh(\epsilon_{p_2}/2T)}{2\varepsilon_{p_2}} \Delta_2.\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_{p_i} = (\xi_{p_i}^2 + |\Delta_i|^2)^{1/2}$. Для простоты предполагаем $\xi_{p_i} = p_i^2/(2m_i) - \omega_p$ — энергетический спектр электронов, отсчитанный от энергии Ферми, и с эффективной массой m , в каждой из зон. Вблизи Ферми-поверхности приближение можно положить $\xi_{p_i} = \nu_F(p_i - p_F)$ и дифференциал $d^3 p_i / (2\pi\hbar)^3$ заменить на $N_i d\xi_i$, где $N_i = \mu_F^2 / (2\pi^2 \hbar^3 v_F)$ — плотность состояний в i -й зоне на уровне Ферми. Из эрмитовости матрицы g_{ij} следует $g_{ii} = g_{ii}^*$. Взаимодействие обрезается на частоте порядка лебавской частоты ω_D .

Для определения температуры сверхпроводящего перехода T_c перейдем к линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -g_{11} N_1 \Delta_1 \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi_1 \frac{\tanh(\xi_1/2T_c)}{2\xi_1} - g_{12} N_2 \Delta_2 \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi_2 \frac{\tanh(\xi_2/2T_c)}{2\xi_2}, \\ \Delta_2 &= -g_{21} N_1 \Delta_1 \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi_1 \frac{\tanh(\xi_1/2T_c)}{2\xi_1} - g_{22} N_2 \Delta_2 \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi_2 \frac{\tanh(\xi_2/2T_c)}{2\xi_2}.\end{aligned}$$

Отсюда приходим к системе двух линейных уравнений

$$\Delta_1 = \lambda_{11} L \Delta_1 + \lambda_{12} L \Delta_2, \quad \lambda_{ik} = -g_{ik} N_k \quad (i, k = 1, 2),$$

$$\Delta_2 = \lambda_{21} L \Delta_1 + \lambda_{22} L \Delta_2, \quad L = \ln\left(\frac{2\hbar\omega_D}{\pi T_c}\right).$$

Условие существования нетривиального решения дает уравнение

$$(1 - \lambda_{11} L)(1 - \lambda_{22} L) - \lambda_{12} \lambda_{21} L^2 = 0.$$

Отсюда, выбирая наибольший корень, найдем

$$\frac{1}{L} = \lambda_{\text{сп}} = \frac{\lambda_B + \lambda_H + \sqrt{(\lambda_B - \lambda_H)^2 + 4\lambda_B\lambda_H}}{2},$$

и затем критическую температуру для двухзонного сверхпроводника:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \hbar \omega_0 \exp(-1/\lambda_{\text{сп}}).$$

Таким образом, в каждой из зон имеется свой конденсат куперовских пар, который возникает благодаря притяжению электронов внутри зоны и за счет межзонных переходов пар частиц. Наличие двух перекрывающихся зон благоприятствует сверхпроводимости и увеличивает критическую температуру за счет межзонных переходов в силу $\lambda_{12}\lambda_{21} = |g_{12}|^2 N_1 N_2 > 0$. При ненулевом перекрытии $g_{12} \neq 0$ сверхпроводящие щели Δ_1 и Δ_2 возникают при $T = T_c$ во всех зонах одновременно.

3.3. II. Запишем уравнение для щели при $T = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta_p = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V_{pp'} \frac{\Delta_{p'}}{2(\xi_p^2 + \Delta_{p'}^2)^{1/2}} = \\ = -g \cos 2\theta_\infty \int \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \int \frac{d^2 p'}{(2\pi\hbar)^2} \cos 2\theta_{p'} \frac{\Delta_{p'}}{2(\xi_p^2 + \Delta_{p'}^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Сразу видно, что

$$\Delta_p = \Delta \cos 2\theta_\infty \sim (p_z^2 - p_{\phi}^2),$$

т. е. величина щели зависит от направления в кристалле, и щель изменяет знак с прохождением через нулевое значение всякий раз при повороте на 90° . Такой сверхпроводник называют сверхпроводником с d -спиреванием, поскольку симметрия щели относительно осей кристалла аналогична электронной $d_{x^2-y^2}$ орбитали в атоме.

Максимальная величина щели находится из уравнения

$$\begin{aligned} 1 = -g \int_{|\xi_p| \leq \hbar \omega_0} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{2(\xi_p^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta)^{1/2}} = \\ = -g N(0) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \ln \frac{2\hbar \omega_0}{|\Delta| \sin 2\theta} = -\frac{g N(0)}{2} \ln \frac{4\hbar \omega_0}{|\Delta| \sqrt{e}}, \end{aligned}$$

где $N(0) = p_F^2/(2\pi^2\hbar^3 v_F)$ — плотность состояний на поверхности Ферми с фиксированной проекцией спина. Решение существует для притяжения $g < 0$, и максимальная величина щели равна

$$|\Delta| = \frac{2}{\sqrt{e}} 2k_B T e^{-\frac{\Delta}{k_B T}}, \quad \lambda = gN(0).$$

Как обычно, предполагалась слабая связь $|\lambda| \ll 1$ и $|\Delta| \ll k_B T$.

3.3.12. Для вычисления низкотемпературного поведения теплоемкости воспользуемся тем, что изменение полной энергии фермия-системы при варьировании функции распределения f_p элементарных возбуждений равно

$$\delta E = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon_p \delta f_p,$$

где мы учли наличие двух проекций спина. Отсюда получаем теплоемкость

$$C_v = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon_p \frac{\partial f_p}{\partial T} = \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\varepsilon_p^2}{4T^3 \operatorname{ch}^3(\varepsilon_p/2T)} \frac{1}{\varepsilon_p - \varepsilon(\xi)},$$

Вклад в интеграл по p набирается в окрестности импульса Ферми $|p - p_F| \ll \varepsilon_F$, в которой можно воспользоваться приближением $\xi_p \approx \varepsilon_F(p - p_F) = \xi$. Тогда

$$C_v = 2\nu(0) \int_0^\infty d\xi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \frac{\varepsilon^2(\xi)}{4T^3} \frac{1}{\operatorname{ch}^3(\varepsilon(\xi)/2T)},$$

где $\nu(0) = p_F^2/(\pi^2\hbar^3 v_F)$ — плотность состояний на уровне Ферми. При $\theta = 0$ щель в спектре $\varepsilon(\xi)$ обращается в нуль. В пределе $T \rightarrow 0$ главный вклад в интеграл дает область углов $\theta \lesssim \xi/\Delta$, и приближенно

$$\begin{aligned} C_v &= 2\nu(0) \int_0^\infty d\xi \int_0^{\xi/\Delta} \theta d\theta \frac{\xi^2}{4T^3 \operatorname{ch}^3(\xi/2T)} = \\ &= \nu(0) \frac{8T^3}{\Delta^2} \int_0^\infty dx \frac{x^6}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{7\pi^4}{30} \nu(0) \frac{T^3}{\Delta^2} \sim T^3. \end{aligned}$$

Теплоемкость сверхтекучего (сверхпроводящего) состояния со щелью, которая обращается в нуль в изолированных точках на ферми-поверхности, при $T \rightarrow 0$ пропорциональна T^3 вместо традиционного поведения $\sim \exp(-\Delta/T)$.

3.3.13. В сверхпроводнике с синглетным спариванием куперовские пары не обладают суммарным спином и не дают вклада в спиновый магнитный момент. Спиновый момент определяется только вкладом от спинов нормальных возбуждений:

$$\mathbf{M} = \sum_{\sigma, \sigma} \mu \sigma f(\varepsilon_{p\sigma}), \quad \varepsilon_{p\sigma} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} - \mu \sigma H,$$

где $f(\varepsilon_{p\sigma})$ — фермиевская функция распределения. Раскладывая f в пределе слабого магнитного поля, получим

$$\mathbf{M} = \sum_{\sigma, \sigma} \mu \sigma \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} (-\mu \sigma H) = -2\mu^2 H \sum_{\sigma} \frac{\partial f(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p}.$$

Парамагнитная восприимчивость $\chi_s = \partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{H}$ тогда равна

$$\chi_s = -2\mu^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} = -\mu^2 \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3 4T \operatorname{ch}^2(\varepsilon_p/2T)}.$$

Вклад в интеграл дает область импульсов вблизи ферми-поверхности $|p - p_F| \ll p_F$, и можно заменить дифференциал $p^2 dp$ на $(p_F^2/v_F) d\varepsilon$ с интегрированием по ε в бесконечных пределах. Тогда

$$\chi_s = \chi_n Y(T), \quad \chi_n = \mu^2 \nu(0), \quad \nu(0) = \frac{p_F^2}{\pi^2 \hbar^3 v_F}.$$

Здесь χ_n — спиновая восприимчивость в нормальном состоянии, а $Y(T)$ — функция Иосиды, равная

$$Y(T) = \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}/2T)} = \\ = \begin{cases} \left(\frac{2\pi\Delta}{T}\right)^{1/2} e^{-\Delta/T} \sim e^{-\Delta/T}, & \Delta \gg T \rightarrow 0, \\ 1 - \frac{7\zeta(3)\Delta^2}{4\pi^2 T_c} = 1 - 2\frac{T_c - T}{T_c}, & T \sim T_c \gg \Delta \end{cases}$$

Функция Иосиды $Y(T)$ описывает долю нормальных электронов в сверхпроводнике.

3.3.14. Парамагнитная восприимчивость χ_s в сверхпроводящем состоянии меньше нормальной восприимчивости χ_n . Следовательно, нормальное состояние поляризуется сильнее, чем сверхпроводящее, и в достаточно большом магнитном поле окажется, что поляризованное нормаль-

ное состояние будет иметь более низкую свободную энергию, чем поларизованное сверхпроводящее состояние. В этом случае, когда свободные энергии $F_n(H)$ и $F_s(H)$ сравняются, произойдет фазовый переход с разрушением сверхпроводимости. При этом должно выполниться условие

$$F_n(0) - \frac{\chi_n H^2}{2} = F_s(0) - \frac{\chi_s H^2}{2}, \quad \text{или}$$

$$\frac{(\chi_n - \chi_s)H^2}{2} = F_n(0) - F_s(0) = \frac{H_c^2(T)}{8\pi}.$$

Отсюда находим предельное магнитное поле, выше которого сверхпроводимость не может существовать:

$$H_p(T) = \frac{H_c(T)}{\sqrt{4\pi(\chi_n - \chi_s)}}.$$

При $T = 0$ парамагнитный предел равен

$$H_p(0) = \frac{H_c(0)}{\sqrt{4\pi\chi_s}} = \frac{\sqrt{2\pi\nu(0)}\Delta_0}{\sqrt{4\pi\mu^2\nu(0)}} = \frac{\Delta_0}{\mu\sqrt{2}}.$$

В поле $H_p(0)$ происходит разрушение синглетного состояния куперовской пары, так как обоим спинам электронов в паре становится выгоднее ориентироваться вдоль магнитного поля.

3.3.15. Термодинамический потенциал сверхпроводника складывается из энергии конденсата куперовских пар и термодинамического потенциала газа нормальных возбуждений. Так как конденсат куперовских пар содержит четное число электронов, то разность термодинамических потенциалов сверхпроводника с нечетным числом электронов $\Omega_{\text{неч}}$ и с четным числом электронов $\Omega_{\text{чет}}$ равна разности термодинамических потенциалов газа нормальных возбуждений с нечетным числом возбуждений $\Omega_{\text{неч}}^{(\text{н})}$ и с четным числом возбуждений $\Omega_{\text{чет}}^{(\text{н})}$:

$$\delta\Omega = \Omega_{\text{неч}} - \Omega_{\text{чет}} = \Omega_{\text{неч}}^{(\text{н})} - \Omega_{\text{чет}}^{(\text{н})}.$$

Для вычисления потенциала $\Omega^{(\text{н})} = -T \ln Z$ газа нормальных возбуждений, состояние которых характеризуется импульсом p и спиновой переменной σ , определим статистическую сумму, которая равна произведению статистических сумм для каждого отдельного состояния с энергией $\epsilon_{p,\sigma}$:

$$Z = \prod z_i = \prod (1 + e^{-\beta \epsilon_i}), \quad \text{для краткости } i = (p, \sigma).$$

Здесь $\beta = 1/T$ — обратная температура, и мы учли, что состояния с энергией ϵ_i может быть свободно или занято лишь только одним возбуждением.

Далее представим Z в виде суммы двух слагаемых $Z = Z_{\text{чет}} + Z_{\text{неч}}$:

$$Z_{\text{чет}} = \frac{1}{2} \left[\prod_i (1 + e^{-\beta \epsilon_i}) + \prod_i (1 - e^{-\beta \epsilon_i}) \right] = \frac{Z}{2} \left[1 + \prod_i \operatorname{th} \frac{\beta \epsilon_i}{2} \right],$$

$$Z_{\text{неч}} = \frac{1}{2} \left[\prod_i (1 + e^{-\beta \epsilon_i}) - \prod_i (1 - e^{-\beta \epsilon_i}) \right] = \frac{Z}{2} \left[1 - \prod_i \operatorname{th} \frac{\beta \epsilon_i}{2} \right].$$

Очевидно, что $Z_{\text{чет}}$ состоит из суммы всевозможных произведений только четного числа экспонент, а $Z_{\text{неч}}$, наоборот, из суммы всевозможных произведений только нечетного числа экспонент. Соответственно, $Z_{\text{чет}}$ и $Z_{\text{неч}}$ представляют статистические суммы для сверхпроводников с четным и нечетным числом нормальных возбуждений. Окончательно,

$$\delta\Omega = \Omega_{\text{неч}}^{(0)} - \Omega_{\text{чет}}^{(0)} = -T \ln \frac{Z_{\text{неч}}}{Z_{\text{чет}}} = -T \ln \frac{1 - e^{-\alpha(T)}}{1 + e^{-\alpha(T)}}.$$

$$\alpha(T) = -\ln \prod_i \operatorname{th} \frac{\epsilon_i}{2T} = \sum_i \ln \operatorname{cth} \frac{\epsilon_i}{2T} = V \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \ln \operatorname{cth} \frac{\epsilon_{p\sigma}}{2T},$$

В сверхпроводнике $\epsilon_{p\sigma} = (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}$ и

$$\alpha(T) = 2V \frac{4\pi p_0^2}{8\pi^2 \hbar^2 k_F} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ln \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T} = 2\nu(0)V \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\epsilon \, dx}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}} \ln \frac{1 + e^{-x/T}}{1 - e^{-x/T}}.$$

Здесь $\nu(0)$ — плотность состояний и V — объем сверхпроводника. При $T \lesssim \Delta$ основной вклад в $\alpha(T)$ дает малая окрестность $x = \epsilon - \Delta \lesssim \Delta$ области $\epsilon = \Delta$.

$$\alpha(T) \approx 4\nu(0)V e^{-\Delta/T} \int_0^{\infty} \frac{\Delta \, dx}{\sqrt{2\Delta x}} e^{-x/T} = 2\nu(0)V \sqrt{2\pi T \Delta} e^{-\Delta/T} \ll 1.$$

В результате находим

$$\delta\Omega = \Delta - T \ln N_{\text{нф}}, \quad N_{\text{нф}} = \nu(0)V \sqrt{2\pi T \Delta}.$$

При $T = 0$ очевидно, что $\delta\Omega = \Delta$. Число $N_{\text{нф}}$ можно трактовать как эффективное число состояний, которые занимают нормальные возбуждения при $T \lesssim \Delta$.

В нормальном состоянии $\Delta = 0$ и

$$\alpha(T) = 4\nu(0)VT \int_0^{\infty} dx \ln \operatorname{cth} x = \frac{\pi^2}{2} \nu(0) VT.$$

Эффект четности в нормальном состоянии мала:

$$\delta\Omega \approx 2T \exp(-\pi^2 \nu(0) VT/2)$$

если температура T велика по сравнению со средним расстоянием между энергетическими уровнями $\delta\varepsilon \sim (\nu(0)V)^{-1}$.

3.3.3. Слабонеидеальный бозе-газ.

Уравнение Гросса–Питтаевского

3.3.16. Пусть стена совпадает с плоскостью $x = 0$, в газ занимает полупространство $x > 0$. Волновая функция конденсата $\psi(x)$ может быть выбрана действительной и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + g\psi^3(x) = \mu\psi(x)$$

с граничными условиями $\psi(x=0) = 0$ и $\psi(x=\infty) = \psi_0 = (\mu/g)^{1/2}$. Домножая обе части уравнения на $\psi'(x)$ и интегрируя, получим с учетом граничных условий первый интеграл:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'^2(x) + \frac{E}{2}\psi^4(x) - \mu\psi^2(x) = -\frac{\mu}{2}\psi_0^2.$$

Решение уравнения дает волновую функцию

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{th}(x/2\xi), \quad \xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{m\mu}},$$

которая восстанавливает свое объемное значение на расстоянии порядка корреляционной длины ξ .

3.3.17. Волновая функция конденсата $\psi(r)$ может быть выбрана действительной и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\psi + g\psi^3 = \mu\psi.$$

В приближении Томаса–Ферми, пренебрегая градиентным членом, найдем распределение плотности газа $n(r) = \psi^2(r)$:

$$n(r) = \frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}{g} = \frac{m\omega^2}{2g}(R^2 - r^2), \quad \mu = \frac{m\omega^2 R^2}{2},$$

где радиус R – размер конденсатного облака. Число частиц N в конденсате удовлетворяет соотношению

$$N = \int n(r) 4\pi r^2 dr = \frac{m\omega^2}{2g} 4\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r^2 dr = \frac{4\pi m\omega^2}{15} R^5.$$

Отсюда можно найти радиус облака и химический потенциал:

$$R = \left(\frac{15gN}{4\pi m\omega^2} \right)^{1/3} = l \left(\frac{15aN}{l} \right)^{1/5}, \quad g = \frac{4\pi\hbar^2\sigma}{m};$$

$$\mu = \frac{m\omega^2}{2} \left(\frac{15gN}{4\pi m\omega^2} \right)^{2/3} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{15aN}{l} \right)^{2/5}, \quad l = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2}.$$

Здесь a — длина рассеяния частиц газа и l — осцилляторная длина ловушки. Пользуясь тем, что $\mu = \partial E / \partial N$ и $\mu \sim N^{1/3}$, найдем полную энергию газа:

$$E = \frac{5}{7}\mu N \sim N^{7/3}.$$

Справедливость приближения Томаса-Ферми предполагает выполнение неравенства

$$\frac{\hbar^2}{2mR^2} \psi \ll \mu \psi$$

Это дает следующее условие на полное число частиц в ловушке: $N \gg l/a$, что подразумевает необходимое требование $N \gg 1$.

3.3.18. Вариационная волновая функция, удовлетворяющая условию нормировки $N = \int \psi^2(r) d^3r$, имеет вид

$$\psi(r) = \frac{N^{1/2}\lambda^{3/2}}{\pi^{3/4}l^{1/2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2 r^2}{2l^2}\right).$$

Подставив варационной функции в выражение для энергии

$$E(\lambda) = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi^2 + \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \psi^4 \right)$$

даем следующее выражение для полной энергии газа

$$E(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} N \left[\frac{3}{2} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) + \gamma \lambda^3 \right], \quad \gamma = \sqrt{\frac{2a}{\pi l}} N.$$

Безразмерный параметр γ характеризует силу межчастичного взаимодействия. При отталкивании частиц друг от друга $\gamma > 0$ минимум $E(\lambda)$ всегда абсолютно устойчив при любых значениях λ , т. е. всегда $E(\lambda) \geq E_{\min}$.

При притяжении между частицами $\gamma < 0$ это становится не так (рис. 3.6) потому, что при $\lambda \rightarrow \infty$ отрицательный член с λ^3 доминирует, и $E(\lambda) \rightarrow -\infty$, тем самым указывая на неустойчивость или коллапс газа в ловушке. Условие $E'(\lambda) = 0$ дает положение локального мини-

мума. При достаточно малых значениях $|\gamma|$ минимум в $E(\lambda)$ существует, указывая на то, что возможно метастабильное состояние газа — устойчивое при достаточно малых изменениях λ . При $|\gamma| \ll 1$ имеем

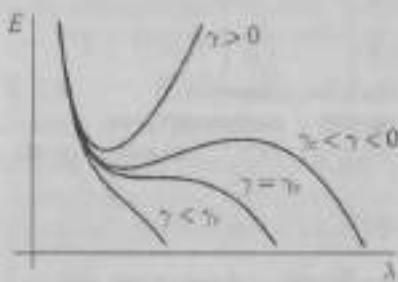


Рис. 3.6. Зависимость энергии газа от вариационного параметра λ при разных значениях параметра межчастичного взаимодействий γ

отсюда $\lambda_c = 5^{1/4}$ и $\gamma_c = -4/5^{1/4}$.

Окончательно находим критическое число частиц в ловушке, при котором исчезает потенциальный барьер, препятствующий коллапсу газового облака:

$$N_c = \frac{2\sqrt{2\pi} J}{5^{5/4} |\alpha|} \approx 0.67 \frac{J}{|\alpha|}.$$

Численный расчет дает 0,57 вместо 0,67.

3.3.19. Нестационарные уравнения Гросса–Питтаевского

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}) \psi + g|\psi|^2 \psi, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(\mathbf{r}) \psi^* + g|\psi|^2 \psi^* \end{aligned}$$

домножим на ψ^* и ψ и вычтем одно из другого:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*).$$

Пользуясь тождеством

$$\operatorname{div}(\psi \nabla \psi^*) = \psi \nabla^2 \psi^* + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \psi^*),$$

и таким же тождеством для сопряженных величин, получим уравнение непрерывности для плотности газа $\rho = m|\psi|^2$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где плотность потока массы дается соотношением

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \rho\mathbf{v}.$$

Если мы запишем волновую функцию в терминах амплитуды и фазы $\psi = |\psi| \exp(i\theta)$, то скорость конденсата \mathbf{v} дается простым выражением

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta.$$

При условии, что поворот $\nabla\theta$ — несингулярно, течение бозе-конденсата потенциально и удовлетворяет условию $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Сингулярные линии, на которых $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, называются энхревыми линиями или нитями. Циркуляция скорости вокруг нити

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m}[\theta],$$

где $[\theta]$ — приращение фазы при обходе вокруг нити. Для однозначности волновой функции ψ необходимо, чтобы $[\theta] = 2\pi n$, и n — целое число. Это дает условие квантования циркуляции.

3.3.20. Однородное и равновесное состояние бозе-конденсата с плотностью n и химическим потенциалом μ описывается следующей волновой функцией:

$$\psi_0(t) = \sqrt{n} e^{-i\mu t/\hbar} \quad \text{и} \quad \psi_0^*(t) = \sqrt{n} e^{i\mu t/\hbar} \quad (\mu = |\psi_0|^2),$$

которая является решением нестационарного уравнения Гросса-Питтаевского. Химический потенциал μ связан с плотностью конденсата соотношением $\mu = gn$, где g — константа взаимодействия между бозе-частицами. Представим волновую функцию в виде $\psi = \psi_0 + \delta\psi$ и, соответственно, $\psi^* = \psi_0^* + \delta\psi^*$. Далее линеаризуем уравнение Гросса-Питтаевского для $\delta\psi$ и сопряженной функции $\delta\psi^*$ по малым отклонениям $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$. В итоге получим

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \delta\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta\psi + 2gn\delta\psi + g\psi_0^2 \delta\psi^*, \\ -i\hbar \frac{\partial \delta\psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta\psi^* + 2gn\delta\psi^* + g\psi_0^2 \delta\psi. \end{aligned}$$

Решение системы линейных уравнений ищем в виде суммы независимых фурье-гармоник, характеризуемых волновым вектором \mathbf{k} и амплитудами $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$:

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} \sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}} t} + v_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}} t}],$$

$$\delta\psi^*(\mathbf{r}, t) = e^{i\mu t/\hbar} \sum_{\mathbf{k}} [v_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}} t} + u_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}} t}],$$

В результате получим пару связанных уравнений для определения амплитуд u_k и v_k , которые в нашем простейшем случае являются действительными величинами:

$$\begin{aligned}\hbar\omega_k u_k &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn - \mu \right) u_k - gn v_k, \\ -\hbar\omega_k v_k &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn - \mu \right) v_k + gn u_k.\end{aligned}$$

Условие существования нетривиальных решений, когда детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных зануляется, дает спектр возбуждений:

$$\hbar^2 \omega_k^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn - \mu \right)^2 - g^2 n^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn \right)^2 - g^2 n^2.$$

Отсюда приходим к боголюбовскому спектру возбуждений

$$\hbar\omega_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2 gn}{m}}.$$

Отношение амплитуд u_k и v_k равно

$$L_k = \frac{v_k}{u_k} = \frac{1}{gn} \left(\hbar\omega_k - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - gn \right)$$

Нормировка самих амплитуд u_k и v_k — произвольна. Для квантовомеханических приложений удобен выбор $u_k^2 - v_k^2 = 1$ или

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{1 - L_k^2}} \quad \text{и} \quad v_k = \frac{L_k}{\sqrt{1 - L_k^2}}.$$

3.3.21. Чтобы найти энергию вихря, мы должны из полной энергии газа с выхром вычесть энергию однородного газа с тем же числом частиц газа N . В этом случае плотность газа ядали от вихря будет несколько отличаться от плотности однородного газа n_0 , что порождает неудобства при сравнении энергий газа $E_0(N)$ и $E_0(N)$.

В этом случае удобнее анализировать энергию газа в зависимости от химического потенциала μ :

$$\tilde{E}(\mu) = E(N) - \mu N = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4 - \mu |\psi|^2 \right)$$

и сравнивать энергию газа с выхром и без выхра при фиксированном химическом потенциале. Это автоматически обеспечивает в газе с выхром

те же самые характеристики газа идентичны от инвариантам и в однородном безвихревом случае и, в частности, та же плотность по в силу простой связи $\mu = g\mu_0$.

Энергия вихря на единицу длины равна

$$\Delta E = E_v - E_0 = \int d^2r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2} g|\psi|^4 - \mu|\psi|^2 - \left(\frac{1}{2} g|\psi_0|^4 - \mu|\psi_0|^2 \right) \right],$$

или

$$\Delta E = \int d^2r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{g}{2} (\psi_0^2 - |\psi|^2)^2 \right].$$

Записывая конденсатную волновую функцию с вихрем в цилиндрических координатах r и φ , как $\psi(r, \varphi) = n^{1/2}(r) \exp(i\varphi)$, предем к

$$\Delta E = \int 2\pi r dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \sqrt{n}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n}{r^2} + \frac{g}{2} (n_0 - n)^2 \right].$$

Подставляя варикационную функцию $n = n_0 r^2 / (r^2 + a^2)$, получим

$$\Delta E(a) = \frac{\rho_0 \kappa^2}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R}{a} + \frac{a^2}{8\xi^2} \right), \quad \xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{mg\mu_0}}, \quad \kappa = \frac{2\pi\hbar}{m},$$

где $\rho_0 = m\mu_0$ — плотность конденсата, ξ — корреляционная длина и κ — квант циркуляции. При вычислении вклада от второго слагаемого интеграла, логарифмически расходящийся при $r \rightarrow \infty$, обрезан на радиусе R , представляющем собой радиус цилиндрического сосуда, в котором находится бозе-газ. Естественно, $R \gg a$. Минимизируя $\Delta E(a)$ по варикационному параметру a , находим $a = 2\xi$ и линейную энергию вихря

$$\Delta E = \frac{\rho_0 \kappa^2}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{2\xi} + \frac{3}{4} \right) = \frac{\rho_0 \kappa^2}{2\pi} \ln \left(1.058 \frac{R}{\xi} \right).$$

Численное расчет линейной энергии дает тот же ответ с коэффициентом 1.035 вместо 1.058.

3.3.22. Однородное стационарное состояние бозе-конденсата описывается волновой функцией

$$\psi_0(x, t) = f_0 e^{-i\omega t/\hbar},$$

где химический потенциал μ связан с амплитудой f_0 и плотностью конденсата μ_0 соотношением $\mu = g\mu_0 = gf_0^2$. Представляя волновую функцию ψ в виде

$$\psi(x, t) = f e^{i\varphi - i\mu t/\hbar}$$

и разделяя уравнение Гросса-Питвеевского на действительную и мнимую части, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned}-\hbar f \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}(f'' - f\varphi'^2) + gf^3 - \mu f, \\ \hbar \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}(2f'\varphi' + f\varphi'').\end{aligned}$$

Ищем солитонное решение с амплитудой $f(x, t) = f(x - ct)$ и фазой $\varphi(x, t) = \varphi(x - ct)$. Это дает упрощение: $f = -c\varphi'$ и $\varphi = -c\varphi'$. Тогда

$$\begin{aligned}\hbar c f \varphi' &= -\frac{\hbar^2}{2m}(f'' - f\varphi'^2) + gf^3 - \mu f, \\ \hbar c f' &= \frac{\hbar^2}{2m}(2f'\varphi' + f\varphi'').\end{aligned}$$

Введем сверхтекущую скорость согласно $v = \hbar\varphi'/m$ и перепишем уравнения в виде

$$\begin{aligned}mcfv &= -\frac{\hbar^2 f'}{2m} + \frac{1}{2}m\mu^2 fv^2 + gf^3 - \mu f, \\ 2cf' &= 2f'v + fv'.\end{aligned}$$

Домножая второе уравнение на f , получим первый интеграл:

$$cf^2 - f^2 v = \text{const} = cf_0^2,$$

где использованы граничные условия $f = f_0$ и $v = 0$ на $x = \pm\infty$. Отсюда найдем $v = v(f)$:

$$v = c\left(1 - \frac{f_0^2}{f}\right).$$

Далее подставляем $v = v(f)$ в первое уравнение:

$$\frac{\hbar^2 f''}{2m} + \frac{1}{2}mc^2 f\left(1 - \frac{f_0^2}{f}\right) - gf^3 + \mu f = 0.$$

Первый интеграл получим умножением уравнения на f' . Постоянную интегрирования определим из граничных условий $f' = 0$, $f = f_0$ при $x = \pm\infty$ и связи $\mu = gf_0^2$. В результате

$$\frac{\hbar^2}{2m} f'^2 = (gf^3 - mc^2) \frac{(f_0^2 - f^2)^2}{2f^2}.$$

Далее удобно перейти к переменной $n = f^2$ (плотность):

$$\frac{\hbar^2}{4m} n'^2 = (gn - mc^2)(n_0 - n)^2.$$

Результат интегрирования дает следующий профиль плотности

$$\pi(x, t) = \pi_{\min} + (\pi_0 - \pi_{\min}) \operatorname{th}^2 \frac{x - ct}{2\xi}, \quad \pi_{\min} = \frac{mc^2}{g},$$

где ширина солитона зависит от его скорости:

$$\xi_c = \frac{\xi}{\sqrt{1 - c^2/u^2}}, \quad \xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{mg\pi_0}},$$

Скорость солитона также выражается через значение минимальной плотности:

$$c = u \sqrt{\frac{\pi_{\max}}{\pi_0}},$$

где $u = (g\pi_0/m)^{1/2}$ — скорость звука в бозе-газе.

Изменение фазы вдоль солитона можно найти интегрированием соотношения $\varphi' = mv/\hbar$:

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = -\frac{mc}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\pi_0 - \pi_{\min}) dx}{\pi_0 \operatorname{ch}^2(x/2\xi_c) - (\pi_0 - \pi_{\min})} = -2 \arccos \left(\sqrt{\frac{\pi_{\max}}{\pi_0}} \right).$$

По аналогии с нелинейной оптикой солитоны с обеднением плотности частиц газа $\pi_{\min} < \pi_0$ называют темными солитонами. Для статического солитона $c = 0$ изменение фазы максимально и равно $-\pi$. Волновая функция представляет собой кинк и имеет вид $\psi(x) = f_0 \operatorname{th}(x/2\xi)$.

3.3.23. Обобщение выражения для энергии смеси двух конденсированных бозе-газов имеет вид

$$E = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2 |\nabla \psi_1|^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 |\nabla \psi_2|^2}{2m_2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} g_{ij} n_i n_j \right).$$

Константы взаимодействия между разными бозе-частицами g_{12} и g_{21} одинаковы $g_{12} = g_{21}$, а $n_i = |\psi_i|^2$ — плотность i -компоненты смеси. Нестационарные уравнения Гросса-Питта-Венского можно записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 \psi_1 + g_{11} |\psi_1|^2 \psi_1 + g_{12} |\psi_2|^2 \psi_1 = \frac{\delta E}{\delta \psi_1^*},$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 \psi_2 + g_{21} |\psi_1|^2 \psi_2 + g_{22} |\psi_2|^2 \psi_2 = \frac{\delta E}{\delta \psi_2^*}.$$

Стационарное равновесное решение для волновых функций бозе-конденсаторов

$$\psi_1(t) = \sqrt{n_1} e^{-i\omega_1 t/\hbar} \quad \text{и} \quad \psi_2(t) = \sqrt{n_2} e^{-i\omega_2 t/\hbar}$$

приводят к следующим значениям химических потенциалов:

$$\mu_1 = g_{11}n_1 + g_{12}n_2 \quad \text{и} \quad \mu_2 = g_{21}n_1 + g_{22}n_2.$$

Чтобы найти спектр возбуждений смеси, рассмотрим малые возмущения волновых функций согласно $\psi_i \rightarrow \psi_i + \delta\psi_i$ и $\psi_i^* \rightarrow \psi_i^* + \delta\psi_i^*$, и найдем линеаризованные уравнения, которым подчиняются возмущения второй компоненты:

$$i\hbar \frac{\partial \delta\psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 \delta\psi_1 + (2g_{11}n_1 + g_{12}n_2) \delta\psi_1 + g_{11} \psi_1^* \delta\psi_1^* + \\ + g_{12} \psi_1 \psi_2^* \delta\psi_2 + g_{12} \psi_1 \psi_2 \delta\psi_2^*.$$

$$-i\hbar \frac{\partial \delta\psi_1^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 \delta\psi_1^* + (2g_{11}n_1 + g_{12}n_2) \delta\psi_1^* + g_{11} \psi_1^{*2} \delta\psi_1 + \\ + g_{12} \psi_1^* \psi_2 \delta\psi_2^* + g_{12} \psi_1^* \psi_2^* \delta\psi_2.$$

и возмущения второй компоненты:

$$i\hbar \frac{\partial \delta\psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 \delta\psi_2 + (2g_{22}n_2 + g_{21}n_1) \delta\psi_2 + g_{22} \psi_2^* \delta\psi_2^* + \\ + g_{21} \psi_2 \psi_1^* \delta\psi_1 + g_{21} \psi_2 \psi_1 \delta\psi_1^*.$$

$$-i\hbar \frac{\partial \delta\psi_2^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 \delta\psi_2^* + (2g_{22}n_2 + g_{21}n_1) \delta\psi_2^* + g_{22} \psi_2^{*2} \delta\psi_2 + \\ + g_{21} \psi_2^* \psi_1 \delta\psi_1^* + g_{21} \psi_2^* \psi_1^* \delta\psi_1.$$

Решение системы линейных уравнений ищем в виде суммы по волновым векторам \mathbf{k} независимых фурье-гармоник с амплитудами u_{ik} и v_{ik} :

$$\delta\psi_1(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega_1 t / \hbar} \sum_{\mathbf{k}} [u_{1k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_1 t} + v_{1k}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_1 t}],$$

$$\delta\psi_2(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega_2 t / \hbar} \sum_{\mathbf{k}} [u_{2k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_2 t} + v_{2k}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_2 t}].$$

Аналогичные соотношения можно записать и для сопряженных величин. В результате получим четыре уравнения на определение амплитуд u_i и v_i , которые оказываются действительными величинами:

$$i\hbar\omega_1 u_1 = (\eta_1 + g_{11}n_1 + g_{12}n_2 - \mu_1)u_1 + \Delta_{11}v_1 + \Delta_{12}v_2 + \Delta_{21}v_1,$$

$$-i\hbar\omega_1 v_1 = (\eta_1 + g_{11}n_1 + g_{12}n_2 - \mu_1)v_1 + \Delta_{11}u_1 + \Delta_{12}u_2 + \Delta_{21}u_1,$$

$$i\hbar\omega_2 u_2 = (\eta_2 + g_{22}n_2 + g_{21}n_1 - \mu_2)u_2 + \Delta_{22}v_2 + \Delta_{12}v_1 + \Delta_{21}v_2,$$

$$-i\hbar\omega_2 v_2 = (\eta_2 + g_{22}n_2 + g_{21}n_1 - \mu_2)v_2 + \Delta_{22}u_2 + \Delta_{12}u_1 + \Delta_{21}u_2.$$

Здесь для краткости мы засели обозначения

$$\eta_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} + \Delta_{11}, \quad \eta_2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} + \Delta_{22};$$

$$\Delta_{11} = g_{11}n_1, \quad \Delta_{22} = g_{22}n_2, \quad \Delta_{12} = g_{12}\sqrt{n_1 n_2} = g_{21}\sqrt{n_1 n_2}.$$

Нетривиальное решение системы уравнений существует при обращении в поле детерминанта, составленного из коэффициентов при неизвестных амплитудах, т. е.

$$\begin{vmatrix} \eta_1 - \hbar\omega_k & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{12} \\ \Delta_{11} & \eta_2 + \hbar\omega_k & \Delta_{12} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12} & \Delta_{12} & \eta_2 - \hbar\omega_k & \Delta_{22} \\ \Delta_{12} & \Delta_{12} & \Delta_{22} & \eta_1 + \hbar\omega_k \end{vmatrix} = 0.$$

Частота элементарных возбуждений в смеси двух бозе-конденсаторов определяется из биквадратного уравнения. Это означает существование в смеси двух ветвей возбуждений ω_{1k} и ω_{2k} . Квадрат частоты каждой из них определяется из соотношения

$$\hbar^2 \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \pm \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2 + 16\Delta_{12}^2(\eta_1 - \Delta_{11})(\eta_2 - \Delta_{22})} \right],$$

где $\varepsilon_i = (\eta_i^2 - \Delta_{ii}^2)^{1/2}$ — боголюбовский спектр возбуждений каждой из компонент смеси в отдельности. Длинноволновая область спектра ($k \rightarrow 0$) представляет собой две звуковые ветви $\omega_{1,2} = u_{1,2}k$ со скоростями звука $u_{1,2}$, определенными соотношениями

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[u_1^2 + u_2^2 \pm \sqrt{(u_1^2 - u_2^2)^2 + \frac{4\Delta_{12}^2}{m_1 m_2}} \right],$$

где $u_i^2 = \Delta_{ii}/m_i = g_{ii}n_i/m_i$ — квадрат скорости звука в отдельной i -компоненте. Требование положительности квадрата скорости звука приводит к условию $g_{11}g_{22} > g_{12}^2$. Это эквивалентно требованию положительной определенности матрицы из констант взаимодействия

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

При нарушении этого требования однородная смесь двух бозе-конденсаторов неустойчива, и происходит ее расложение на отдельные компоненты.

3.3.4. Теория сверхтекучести

3.3.24. Возможность сверхтекущего движения He II в капилляре ограничена по скорости некоторой критической скоростью v_c . Рассмотрим жидкость ⁴⁰He при нуле температуры в основном состоянии, протекающий по капилляру с однородной постоянной скоростью v . Если жидкость испытывает трение о стенки капилляра, то часть ее кинетической энергии переходит в тепловую энергию. Это приводит к нагреву жидкости и ее переходу в возбужденное состояние. Возбужденное состояние жидкости характеризуется наличием элементарных возбуждений и, тем самым, трение или наличие вязкости у жидкости будет проявляться в рождении элементарных возбуждений. Конечное время жизни или затухание рожденных элементарных возбуждений будет приводить к релаксации жидкости в основное состояние и замедлению потока жидкости с соответствующей диссипацией энергии. Необходимым условием для существования бездиссипативного течения жидкости является запрет на спонтанное рождение элементарных возбуждений.

В системе отсчета, в которой жидкость покается, энергия элементарного возбуждения с импульсом p равна $\epsilon(p)$. Согласно принципу относительности Галилея для инерциальных систем в лабораторной системе отсчета, в которой жидкость движется с однородной и постоянной скоростью v , энергия элементарного возбуждения подвергнется доплеровскому сдвигу и будет равна $\epsilon(p) + rv$. Спонтанное рождение элементарного возбуждения становится энергетически выгодным при условии $\epsilon(p) + rv < 0$. Рождение возбуждений с импульсами, направленными против скорости течения v — наиболее выгодно. Необходимое условие для бездиссипативного течения

$$v < v_c = \min_p \frac{\epsilon(p)}{p}$$

определяет максимальную допустимую или критическую скорость течения жидкости и называется *критерием сверхтекучести Ландau*.

Минимум отношения ϵ/p определяется из условия экстремума $d\epsilon/dp = 0$, которое дает

$$\frac{d\epsilon}{dp} = \frac{\pi}{p}$$

Геометрически это отвечает точке, где прямая, проведенная из начала координат, касается кривой $\epsilon(p)$. Для спектра возбуждений в He-II эта точка лежит несколько правее точки ротонного минимума и критическая скорость

$$v_c = \sqrt{\frac{\rho_0^2 + 2m\Delta}{m}} - \rho_0 \approx \frac{\Delta}{\rho_0}$$

составляет 58 м/с. В слабонендеальном конденсированном бозе-газе с богословским спектром возбуждений критическая скорость равна скорости звука. Идеальный конденсированный бозе-газ с частицеподобным спектром возбуждений $\varepsilon = p^2/(2M)$ не обладает свойством сверхтекучести в силу нулевого значения критической скорости.

При ненулевых температурах $T \neq 0$ в жидкости уже существуют тепловые элементарные возбуждения в термодинамически равновесной концентрации. Тем не менее, при малых скоростях течения $v < v_0$ возможность изменения числа элементарных возбуждений за счет дополнительного рождения элементарных возбуждений отсутствует. Жидкость может оставаться тогда в том же состоянии и поддерживать бездиссипативное течение.

3.3.25. Элементарные возбуждения, обладающие импульсом, вносят вклад в полный импульс жидкости. Плотность импульса или импульс единицы объема, вносимый возбуждениями с функцией распределения $n(\mathbf{p})$, равен

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} n(\mathbf{p}).$$

Течение жидкости с постоянной и однородной скоростью \mathbf{v} приводят к изменению энергии возбуждений вследствие допплеровского сдвига:

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{v},$$

где $\varepsilon(\mathbf{p})$ — энергия возбуждений и \mathbf{p} — импульс в системе координат, в которой жидкость поконится и описывается равновесной функцией распределения $n(\varepsilon)$. Далее имеем

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} n(\varepsilon_p - \mathbf{p}\mathbf{v}) = \rho_n(v) \mathbf{v},$$

Коэффициент-пропорциональности между плотностью импульса и скоростью называют плотностью нормальной компоненты ρ_n . При малых скоростях интеграл легко оценивается, и с учетом усреднения по направлениям импульса \mathbf{p}

$$\mathbf{P} \approx - \int \mathbf{p} (\mathbf{p}\mathbf{v}) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \Psi \frac{1}{3} \int p^2 \left(-\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

для плотности нормальной компоненты найдем

$$\rho_n(T) = \frac{1}{3} \int p^2 \left(-\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поток элементарных возбуждений обязательно сопровождается и переносом части жидкости. Доля переносимой массы жидкости равна ρ_s/ρ , где ρ — полная плотность жидкости.

Вычисление ρ_s для фононных возбуждений с $\varepsilon_p = cp$ дает

$$\rho_{s,ph} = \frac{2\pi^2}{45} \frac{T^4}{h c^3} \sim T^4,$$

а для ротонных возбуждений

$$\rho_{s,r} = \frac{2m^{1/2} p_0^4}{3(2\pi^2)^{1/2} T^{1/2} h^2} e^{-\Delta/T} = \frac{\rho_0^2}{3T} n_r \sim e^{-\Delta/T},$$

где n_r — плотность ротонов. В Не-II плотность нормальной компоненты есть сумма фононного и ротонного вкладов $\rho_s = \rho_{s,ph} + \rho_{s,r}$.

3.3.26. Для одновременного рождения двух элементарных возбуждений необходимо выполнение условия

$$\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) + (p_1 + p_2)v < 0,$$

где v — скорость течения жидкости. Это выражение удобно переписать в виде

$$\varepsilon(q) + \varepsilon(p - q) + pv < 0,$$

Условие минимума по q дает соотношение между скоростями возбуждений:

$$v(q) = \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial q} = \frac{\partial \varepsilon(p - q)}{\partial p} = v(p - q),$$

которое отвечает двум возбуждениям, распространяющимся в направлении p с одинаковыми скоростями. Критическая скорость v_c определяется как минимум отношения

$$\begin{aligned} v_c &= \min \frac{\varepsilon(q) + \varepsilon(p - q)}{|p|} = \min \frac{|q| \frac{\varepsilon(q)}{|q|} + |p - q| \frac{\varepsilon(p - q)}{|p - q|}}{|p|} \geq \\ &\geq \frac{|q| \min \frac{\varepsilon(q)}{|q|} + |p - q| \min \frac{\varepsilon(p - q)}{|p - q|}}{|p|} \geq v_c \frac{|q| + |p - q|}{|p|} \geq v_c. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что v_c — критическая скорость для рождения отдельного возбуждения, определяемая минимумом отношения $\varepsilon(q)/q$, и учли в последней дроби неравенство для сторон треугольника. Равенство $v_c = v$ заведомо достигается при рождении двух одинаковых возбуждений с $p_1 = p_2 = p_c$, где p_c — импульс, отвечающий критической скорости v_c .

3.3.27. При вращении сосуда с гелем в предположении о безвихревом движении сверхтекущей компоненты тот $v_z \equiv 0$ только нормальная компонента жидкости будет вращаться вместе со сосудом, а сверхтекущая компонента будет оставаться неподвижной. Нормальные возбуждения, сталкиваясь и взаимодействуя со стенками сосуда, увлекаются вращением подобно обычной вязкой жидкости. Сверхтекущая компонента, не взаимодействуя со стенками, остается в покое. Такая ситуация сохраняется, пока скорость стенок достаточна мала и они не могут рождать элементарные возбуждения. Если допустить рождение элементарных возбуждений в виде квантованных вихрей, циркуляция сверхтекущей скорости вокруг которых отлична от нуля, т. е. $\times \neq 0$, то наличие вихрей будет имитировать вращение сверхтекущей компоненты как целого. Число вихрей при этом будет пропорционально удвоенной частоте вращения 2Ω , деленной на квант циркуляции \times .

Чтобы найти критическую скорость вращения Ω_c , необходимо определить две величины: энергию вихря E и его момент импульса L , которые представляют собой изменение кинетической энергии и момента импульса всей жидкости. Изменение обусловлено возникновением циркуляции сверхтекущей скорости v_z вокруг оси вихря. Спонтанное рождение вихря становится выгодным при достижении неравенства $E_{kp} = -E - L\Omega < 0$. Действительно, в системе отсчета, в которой жидкость движется со скоростью v , энергия возбуждения подвержена дополнительному сдвигу $\varepsilon + p v$, и условие $\varepsilon + p v < 0$ позволяет спонтанно рождать возбуждение. В нашем случае для возбуждения на расстоянии r от оси сосуда сверхтекущая компонента движется со скоростью $v = v_z = -[\Omega \times r]$ и

$$\varepsilon + p v_z = \varepsilon - p[\Omega \times r] = \varepsilon - I(r)\cdot\Omega,$$

где $I(r) = [r \times p]$ — момент импульса. Интегрируя последнее соотношение по всему объему, придем к $E_{kp} = E - L\Omega$, где $E = \int \varepsilon dV$ и $L = \int I dV$.

Наименьшей энергией вихря E_{kp} соответствует расположение вихря в центре сосуда вдоль оси цилиндра. Условие квантования циркуляции сверхтекущей скорости по замкнутому контуру, охватывающему вихревую нить, имеет вид:

$$\times = \oint v_z dl = \frac{2\pi h}{m_4},$$

где m_4 — масса атома ${}^4\text{He}$. Если контур не охватывает нить, то циркуляция равна нулю. Скорость $v_z = \times/(2\pi r)$ имеет только азимутальную

компоненту. Момент импульса вихря параллелен оси вращения, и его величина в расчете на единицу длины нити равна

$$L = \int d^2r [\mathbf{r} \times p_z \mathbf{v}_z]_z = p_z \int d^2r r v_z = \frac{1}{2} \rho_s R^2,$$

где ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты. Мы учли также, что в данной геометрии вектор сверхтекучей скорости не имеет z -компоненты. Энергия вихревой нити на единицу длины нити дается интегралом

$$E = \int \frac{\rho_s v_z^2}{2} d^2r = \frac{\rho_s}{2} \int_{\xi}^R \left(\frac{w}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\rho_s w^2}{4\pi} \ln \frac{R}{\xi}.$$

Из условия $E_{\text{кр}} = E - L\Omega = 0$ находим критическую скорость вращения:

$$\Omega_c = \frac{w}{2\pi R^2} \ln \frac{R}{\xi}.$$

Ей соответствует линейная критическая скорость

$$v_c = \Omega_c R = \frac{w}{m_i R} \ln \frac{R}{\xi}.$$

По порядку величины это оценка справедлива и для критической скорости рождения вихрей в капиллярах и отверстиях с характерным диаметром $2R$.

3.3.28. Воспользуемся соотношением, которое определяет нормальную плотность:

$$\rho_n(\mathbf{w}) \mathbf{w} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} n(c_p - p\mathbf{w}).$$

Для фоновых $n(c)$ — функция распределения Бозе и $c_p = cp$. Выбрав ось z вдоль направления относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, имеем

$$\begin{aligned} \rho_{n,ph}(\mathbf{w}) \mathbf{w} &= \frac{2\pi}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{p \cos\theta}{e^{(c_p - p\mathbf{w})\cos\theta/c} - 1} = \\ &= \frac{T^4}{4\pi^2\hbar^3 c^4} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(1 - x\mathbf{w}/c)^4} \int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \frac{T^4}{4\pi^2\hbar^3 c^4} \frac{8}{3} \frac{w/c}{(1 - w^2/c^2)^3} \frac{\pi^4}{15}. \end{aligned}$$

Отсюда фоновый вклад в нормальную плотность равен

$$\rho_{n,ph}(\mathbf{w}) = \frac{\rho_{n,ph}(0)}{(1 - w^2/c^2)^{1/2}}, \quad \rho_{n,ph}(0) = \frac{2\pi^2 T^4}{45 \hbar^3 c^4}.$$

Нормальная плотность увеличивается с ростом относительной скорости \mathbf{w} и расходится при $\mathbf{w} = c$.

3.3.29. В идеальном газе спектр возбуждений имеет вид $\varepsilon_p = p^2/(2m)$. Согласно результатам предыдущей задачи

$$\rho_n(w)w = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p}{e^{(p^2/2m - pw)/T} - 1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p + pw}{e^{(p^2/2m - pw)/T} - 1}$$

На двух слагаемых в числителе слагаемое с p зануляется в силу симметрии. Тогда

$$\rho_n(w) = m \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(p^2/2m - pw^2/2)^2/T} - 1}$$

При $w = 0$ плотность нормальной компоненты совпадает с плотностью надконденсатных возбуждений:

$$\rho_n(0) = mn_{ei}(T), \quad n_{ei}(T) = \left(\frac{\pi T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta(3/2) = n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}.$$

При $w > 0$ последний интеграл имеет особенность в точке $p = tw$ и расходится. В этом смысле $\rho_n(w > 0)$ обращается в бесконечность аналогично фононному вкладу в нормальную плотность при $w > c$. Это коррелирует с утверждением о том, что критическая скорость в идеальном конденсированном газе равна нулю.

3.3.30. Воспользуемся соотношением, которое определяет плотность нормальной компоненты при малых скоростях:

$$\rho_{n,i} = \frac{1}{3} \int p^2 \left(-\frac{\partial n_i}{\partial \varepsilon}\right) 2 \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Здесь $n_i(\varepsilon)$ — фермиевская функция распределения для примесей, и множитель 2 учитывает две проекции спина возбуждений. Для вычисления $\rho_{n,i}$ удобно энергию растворения ε_0 включить в химический потенциал. Тогда

$$\rho_{n,i} = -\frac{2M}{3} \int \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial n_i}{\partial \varepsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

После однократного интегрирования по частям получаем

$$\rho_{n,i} = M \int n_i(\varepsilon) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = MN_3 = \rho c \frac{M}{M_3},$$

где N_3 — концентрация атомов ${}^3\text{He}$, ρ — плотность раствора, $c = M_3 N_3 / (M_3 N_3 + M_4 N_4)$ — массовая концентрация, и $M_{3,4}$ — массы атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$. Сверхтекучий раствор ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ — пример сверхтекучей системы, в которой плотность нормальной компоненты остается конечной при нулевой температуре.

3.3.31. Чтобы найти искомую температуру, необходимо оценить свободную энергию отдельного вихря

$$F = E - TS,$$

где E — энергия и S — энтропия вихря в пленке радиуса R . Спонтанное рождение вихрей происходит при условии $F < 0$. Поле сверхтекущей скорости v_s для вихря с осью, перпендикулярной плоскости пленки, определяется выражением

$$v_s = \frac{\kappa}{2\pi r},$$

в соответствии с условием квантования циркуляции сверхтекущей скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему вихревую нить:

$$\kappa = \oint v_s dl = v_s(r) 2\pi r = \frac{2\pi\hbar}{m_e}.$$

Здесь m_e — масса атома гелия. Энергия вихря представляет собой кинетическую энергию сверхтекущего движения:

$$E = \frac{1}{2} \rho_s d \int_0^R v_s^2 2\pi r dr = \rho_s d \frac{\mu^2}{4\pi} \ln \frac{R}{\xi}.$$

Интеграл ограничен сверху размером пленки, а снизу размером кора ξ , представляющего собой нормальную область, где сверхтекущее движение отсутствует.

Кор вихря размером ξ занимает площадь $\pi\xi^2$, и его центр может быть помещен в любую точку пленки площадью πR^2 . Соответственно, энтропия равна логарифму числа возможных размещений вихря площадью $\pi\xi^2$ на пленке площадью πR^2 :

$$S = \ln \frac{\pi R^2}{\pi \xi^2} = 2 \ln \frac{R}{\xi}.$$

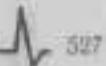
Итак, свободная энергия отдельного вихря имеет вид

$$F = \left(\frac{\rho_s d \mu^2}{4\pi} - 2T \right) \ln \frac{R}{\xi}.$$

Температура $T_{БКЛ}$, равная

$$T_{БКЛ} = \frac{\rho_s d \mu^2}{8\pi},$$

называется температурой Березинского–Костлерица–Таулеса. При $T > T_{БКЛ}$ в сверхтекущей пленке становится энергетически выгодным рождение вихрей в силу $F < 0$, что приводят к разрушению сверхтекущего состояния.



3.4. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

3.4.1. Приближение самосогласованного поля

3.4.1. Если S_1 и S_2 — энтропии первой и второй фаз, то энтропия всей системы:

$$S = S_1(E_1, V_1, N_1) + S_2(E_2, V_2, N_2),$$

где $E_{1,2}$ — энергия, $V_{1,2}$ — объем и $N_{1,2}$ — число частиц в первой и второй фазах. Из максимальности энтропии следует, что $dS = 0$:

$$dS = \left(\frac{dE_1}{T_1} + \frac{P_1}{T_1} dV_1 - \frac{\mu_1}{T_1} dN_1 \right) + \left(\frac{dE_2}{T_2} + \frac{P_2}{T_2} dV_2 - \frac{\mu_2}{T_2} dN_2 \right) = 0.$$

Учитывая, что в замкнутой (изолированной) системе

$$E = E_1 + E_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad dE_1 = -dE_2,$$

$$V = V_1 + V_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad dV_1 = -dV_2,$$

$$N = N_1 + N_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad dN_1 = -dN_2,$$

получим

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}, \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \quad \frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}.$$

Отсюда для условия равновесия фаз: $T_1 = T_2$, $P_1 = P_2$, $\mu_1 = \mu_2$.

3.4.2. Для определенности считаем $a > 0$ ($a < 0$ сводится к замене $\varphi \rightarrow -\varphi$). Энергия неупорядоченной фазы $\Phi(\varphi = 0) = 0$. Выгодности упорядоченной фазы отвечает условие $\Phi \leq 0$. Точку фазового перехода или точку бинодали τ_c можно найти из условия $\Phi = 0$ и $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$. Это дает температуру фазового перехода τ_c и значение параметра порядка в точке перехода φ_c :

$$\tau_c = \frac{2a^2}{9b} \quad \text{и} \quad \varphi_c = -\frac{2a}{3b}.$$

Конечный скачок параметра порядка в точке перехода означает, что это переход первого рода. При $\tau < \tau_c$ значение параметра порядка находим из условия минимальности энергии:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \varphi(\tau + a\varphi + b\varphi^2) = 0.$$

Абсолютному минимуму энергии отвечает корень с максимальным отрицательным значением параметра порядка. Итак,

$$\varphi_0(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau > \tau_c, \\ \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4b\tau})}{2b} & \text{при } \tau < \tau_c. \end{cases}$$

Точки спинодали (точки абсолютной неустойчивости фаз) можно найти из условия нарушения минимальности энергии, когда вторая производная $\partial^2 \Phi / \partial \tau^2$ меняет знак с положительного значения на отрицательное, т.е.

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=\tau_c} = 0.$$

Отсюда получаем точку спинодали (точку максимального переохлаждения) для неупорядоченной фазы $\tau_{c-} = 0$ и точку спинодали (точку максимального перегрева) для упорядоченной фазы $\tau_{c+} = a^2/(4b)$. Очевидно, что $\tau_{c-} < \tau_c < \tau_{c+}$, и области температур $\tau_{c-} < \tau < \tau_c$ и $\tau_c < \tau < \tau_{c+}$ отвечают областям метастабильности фаз (рис. 3.7).

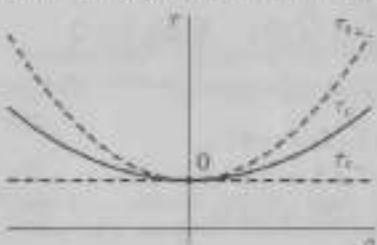


Рис. 3.7. Диаграмма фазовых состояний. Сплошной линией показана бинодаль. Пунктирными линиями обозначены спинодали

меняется род фазового перехода, т.е. является критической точкой. Видно также, что в критической точке точки бинодали и спинодалей совпадают, так как при переходе второго рода нет областей метастабильности фаз.

3.4.3. Если $a > 0$, то переход при $\tau = 0$ в сегнетозанктрическую упорядоченную фазу является фазовым переходом второго рода. Роль члена $-p^6$ не существенна, так как при этом род перехода и качественное поведение системы в непосредственной окрестности точки перехода $\tau = 0$ не меняется. При $|\tau| \ll a^2/b$ этим членом можно пренебречь в силу $b p_0^2 \ll a p_0^4$, где $p_0^2 \sim |\tau|/a$.

При $a < 0$ поведение системы качественно меняется и возникает переход первого рода в точке, определяемой условиями

$$\Phi(p) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = (\tau + ap^2 + bp^4)p = 0.$$

Отсюда находим точку фазового перехода первого рода:

$$\tau_c = \frac{3}{16} \frac{a^2}{b}$$

и значение параметра порядка, который скачком возникает сразу ниже точки перехода:

$$\mathbf{p}_c^2 = -\frac{3a}{4\pi}.$$

Таким образом, линия фазовых переходов в зависимости от коэффициента a дается соотношением

$$\tau_c(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq 0, \\ \frac{3a^2}{16b} & \text{при } a \leq 0, \end{cases}$$

и точка $a = \tau = 0$, в которой происходит смена рода фазового перехода, называется *трикритической* (рис. 3.8). Во всей области существования сегнетоэлектрической фазы параметр порядка определяется уравнением

$$P_0(\tau) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b\tau}}{2b}$$

(знак минус перед корнем отвечает либо отсутствию действительных решений, либо большему значению потенциала Φ). Потенциал Φ_0 сегнетоэлектрической фазы дается соотношением

$$\begin{aligned} \Phi_0(\tau) &= \Phi(\mathbf{p}_0) = \\ &= \frac{a^3 - 6ab\tau - (a^2 - 4b\tau)^{1/2}}{24b^2}. \end{aligned}$$

Теплоемкость, определяемая как $C(\tau) = -\partial^2 \Phi / \partial \tau^2$, обращается в ноль в неупорядоченной фазе и равна

$$C(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b\tau}}$$

в сегнетоэлектрической фазе. Теплоемкость характеризуется различным поведением в двух областях: в окрестности, близкой к трикритической точке, т. е. $a^2 \lesssim |\tau|$ и в далекой окрестности $a^2 \gtrsim |\tau|$. При фазовом переходе вдали от трикритической точки скачок теплоемкости конечен и $\Delta C \sim 1/|a|$. Вблизи окрестности трикритической точки имеем усиление особенности и поведения теплоемкости вида $|\tau|^{-1/2}$.

Для определения верхней критической размерности трикритической точки, т. е. точки, в которой коэффициент $a = 0$, используем критерий

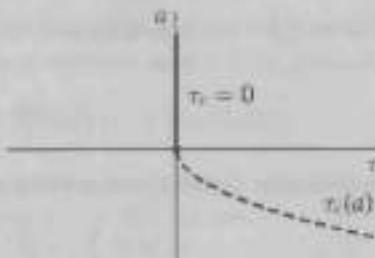


Рис. 3.8. Диаграмма фазовых состояний сегнетоэлектрика. Сплошной линией показан фазовый переход второго рода. Пунктирной линией — фазовый переход первого рода

слабости флуктуаций параметра порядка в объеме $V_\xi \sim \xi^d$ с линейным размером порядка корреляционной длины ξ

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{T_c \chi}{V_\xi} \sim \frac{T_c \chi}{\xi^d} \ll p_0^2.$$

Здесь $\chi \sim 1/|\tau|$ — восприимчивость, и d — размерность пространства.

Корреляционную длину можно оценить, используя энергию неоднородности порядка $c(\nabla p)^2$ и сравнив ее с энергией $\sim |\tau| p^2$. Тогда $\xi \sim \sim (c/|\tau|)^{1/2}$. При $a = 0$ равновесное значение p_0 можно оценить из соотношения $\tau p_0^2 \sim b p_0^2$, согласно которому $p_0^2 \sim |\tau|/b$. Окончательно имеем

$$T_c \frac{1}{|\tau|} \left(\frac{|r|}{c} \right)^{d/2} \ll \left(\frac{|r|}{b} \right)^{1/2}, \quad \text{или} \quad \frac{b T_c^2}{|\tau|^2} \ll |r|^{2-d}.$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ неравенство всегда удовлетворяется при $d > 3$ и не удовлетворяется при $d < 3$. Соответственно, для трикритической точки или для взаимодействия в шестой степени $\sim p^6$ верхняя критическая размерность равна трем. Линия кроссовера $\tau = a^2$ отделяет трикритическое поведение от обычного критического. В теории самосогласованного поля для трикритической точки индекс кроссовера $\varphi = 2$.

3.4.4. Для анализа фазовых состояний удобно представить параметр порядка $\varphi(x)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_q \varphi_q e^{iqx},$$

и записать термодинамический потенциал в виде

$$\Phi = \sum_q \frac{\tau(q)}{2} |\varphi_q|^2 + \frac{\delta}{4} \int dx \varphi^4(x),$$

где коэффициент $\tau(q)$ будет равен

$$\tau(q) = \tau + \delta q^2 + \frac{dq^4}{2}.$$

Неустойчивость неупорядоченной фазы с $\varphi = 0$ будет связана с появлением отрицательного значения $\tau(q)$. При $\delta > 0$ минимум $\tau(q)$ в зависимости от волнового вектора q достигается при $q = 0$ и впервые $\tau(q)$ меняет знак при $\tau = 0$. Следовательно, в области $\delta > 0$ при $\tau = 0$ происходит обычный фазовый переход второго рода в упорядоченную однородную фазу с $\varphi_0 = (|\tau|/a)^{1/2}$ и $q = 0$. Потенциал этой однородной фазы равен

$$\Phi_0 = -\frac{\tau^2}{4a}.$$

В области значений $\delta < 0$ минимум $\tau(q)$ достигается при ненулевом значении волнового вектора

$$q = \sqrt{\frac{|\delta|}{d}},$$

а знак $\tau(q)$ изменяется с положительного на отрицательный при температуре перехода

$$\tau_{n+} = \frac{k^2}{2d}$$

При $\tau < \tau_{n+}$ становится выгодной модулированная упорядоченная фаза, в которой параметр порядка изменяется в пространстве согласно соотношению

$$\varphi(x) = \varphi_n \cos qx.$$

Период пространственной структуры L определяется из условия

$$L = \frac{2\pi}{q} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{|\delta|}}$$

Термодинамический потенциал модулированной упорядоченной фазы найдем из соотношения

$$\Phi_n = \frac{\tau}{2} \langle \varphi^2(x) \rangle + \frac{\delta q^2}{2} \langle \varphi^2(x) \rangle + \frac{dq^4}{4} \langle \varphi^4(x) \rangle + \frac{a}{4} \langle \varphi^4(x) \rangle,$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по периоду пространственной структуры. С учетом того, что $\langle \cos^2 qx \rangle = 1/2$ и $\langle \cos^4 qx \rangle = 3/8$, имеем

$$\Phi_n = \frac{\tau(q)}{4} \varphi_n^2 + \frac{3}{32} a \varphi_n^4,$$

где φ_n — амплитуда модуляций параметра порядка. Минимизируя Φ_n , находим амплитуду модуляций и термодинамический потенциал фазы из

$$\varphi_n^2 = -\frac{4\tau - \tau_{n+}}{3 - a} \quad \text{и} \quad \Phi_n = -\frac{(\tau - \tau_{n+})^2}{6a} \quad \text{при} \quad \tau \leq \tau_{n+},$$

Переход в модулированную упорядоченную фазу из неупорядоченной фазы является фазовым переходом второго рода, поскольку при этом параметр порядка φ_n , или амплитуда модуляций пространственной структуры, меняется плавно.

Сравнив Φ_n и Φ_0 , мы видим, что при достаточно больших отрицательных τ потенциал Φ_0 становится меньше, чем Φ_n . Переход из модулированной упорядоченной фазы в упорядоченную однородную фа-

зу происходит при равенство $\Phi_{\text{в}}(\tau_{\text{н.}}) = \Phi_{\text{б}}(\tau_{\text{н.}})$. Это дает температуру перехода, равную

$$\tau_{\text{н.}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \tau_{\text{н.}}$$

Переход при $\tau_{\text{н.}}$ является переходом первого рода со скачком модуля параметра порядка и периода пространственной структуры.

Точка параметров $\delta = 0$ и $\tau = 0$, которая называется точкой Лифшица, является точкой, в которой сходятся две линии фазовых переходов второго рода и одна линия фазового перехода первого рода. При $\delta < 0$ в области температур $\tau_{\text{н.}} < \tau < \tau_{\text{н.}}$ существует модулированная упорядоченная фаза. Область существования однородной упорядоченной фазы: $\tau < \tau_{\text{н.}}$ при $\delta < 0$ и $\tau < 0$ при $\delta > 0$. В точке Лифшица сосуществуют три фазы (рис. 3.9).

Корреляционную длину ξ при $\delta = 0$ вблизи перехода можно оценить, сравнивая энергию $\tau\varphi^2/2$ и энергию неоднородности $d(\nabla^2\varphi)^2/4$

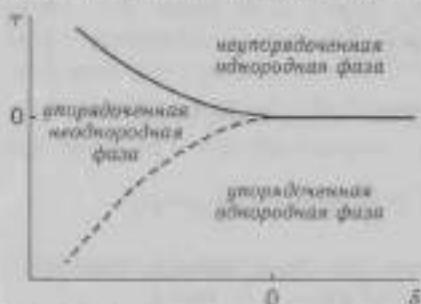


Рис. 3.9. Диаграмма фазовых состояний. Сплошными линиями показаны фазовые переходы второго рода. Пунктирный линии — фазовый переход первого рода

в пренебрежении членом φ^4 в силу его малости. Считая, что в этом случае $\tau\varphi^2/2 \sim d(\nabla^2\varphi)^2/4$, и оценивая $d(\nabla^2\varphi)^2 \sim d\varphi^2/\xi^2$, получим, что $\xi \sim (d/\tau)^{1/4}$. Поэтому критический индекс $\nu = 1/4$ вместо $1/2$ удален от точки Лифшица.

Особенностью точки Лифшица $\delta = 0$ также является стремление к бесконечности периода модуляции пространственной структуры, что связано с уменьшением δ . Это аналогично уменьшению корреляционной длины $\xi \sim \delta^{1/2}$ с переходом к закону $\xi \sim \tau^{-1/4}$ вместо $\xi \sim \tau^{-1/2}$. Это способствует росту

флуктуаций параметра порядка. В результате вблизи точки Лифшица расширяется флуктуационная область, а верхняя критическая размерность увеличивается, становясь больше четырех.

3.4.2. Функционал Гинзбурга–Ландау

3.4.5. Для циркуляции вдоль контура C с необходимостью имеем

$$0 = \oint \left(\frac{ie}{2v} \nabla \theta - A \right) dl = \frac{ie}{2v} \Delta \theta - \Phi,$$

В силу однозначности параметра порядка, как функции координаты r , приращение фазы $\Delta\theta$ при полном обходе контура и возврате в ту же точку должно быть кратно 2π , что и приводит к квантованию магнитного потока $\Phi = \phi_0$.

Простейший пример вихревого состояния в сверхпроводнике можно описать следующим поведением параметра порядка:

$$\psi(r) = |\psi|e^{i\theta(r)}, \quad \theta(r) = \pi \operatorname{arctg}(y/x) \quad \text{и} \quad n \text{ — целое.}$$

Здесь $\operatorname{arctg}(y/x) = \varphi$ — азимутальный угол в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Градиент фазы равен

$$\nabla\theta = \left(-\pi \frac{y}{\rho^2}, \pi \frac{x}{\rho^2}, 0 \right), \quad |\nabla\theta| = \frac{\pi}{\rho} \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ось z , которая соответствует $\rho = 0$, представляет собой особую линию, называемую вихревой линией. Изменение фазы при обходе по любому контуру, охватывающему вихревую линию, равно 2π . Так как сверхпроводящий ток j , на бесконечно удаленном от вихревой линии контуре обращается в ноль, то полный поток магнитного поля, переносимый одной вихревой линией, квантуется:

$$\int \mathbf{h} dx dy = \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = n\phi_0.$$

Для выполнения условия однозначности параметра порядка обращается в ноль в центре вихря на вихревой линии $\psi(\rho = 0) = 0$. Квантованный вихрь представляет собой пример топологического дефекта.

3.4.6. а) Количественное описание структуры вихря заметно упрощается в предельном сверхпроводнике H рода с $\propto \gg 1$. В этом случае центральная область вихря, называемая кором вихря, представляет собой приближение нормальную область, внутри которой параметр порядка изменяется от нулевого значения в центре вихря до равновесного значения ϕ_0 вне коры вихря. Радиус коры приблизительно равен корреляционной длине $\xi(T)$.

Магнитное поле вихря $\mathbf{h}(\rho)$ в области вне коры $\rho \geq \xi$ описывается уравнением

$$\mathbf{h} + \delta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{h} - \delta^2 \nabla^2 \mathbf{h} = n\phi_0 \mathbf{e}_z \delta_2(\rho) \quad (\rho \geq \xi),$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор, задающий направление вихревой линии и $n\phi_0$ — полный поток магнитного поля, созданного вихрем. Точное ре-

шенное уравнение выражается через функцию Бесселя нулевого порядка от минимого аргумента (функцию Макдональда) $K_0(x)$:

$$h(\rho) = \frac{\pi \phi_0}{2\pi \delta^2} K_0(\rho/\delta) = \frac{\pi \phi_0}{2\pi \delta^2} \begin{cases} \ln(\delta/\rho), & \xi \lesssim \rho \lesssim \delta, \\ \sqrt{\frac{\pi \delta}{2\rho}} \exp(-\rho/\delta), & \rho \gtrsim \delta. \end{cases}$$

Поле в центре вихря остается конечным, достигая максимального значения порядка

$$h(0) \sim \pi \frac{\phi_0}{2\pi \delta^2} \ln \frac{\delta}{\xi}.$$

Образование вихря связано с дополнительной энергией. При вычислении энергии вихря при $\xi \gg 1$ можно пренебречь изменением энергии конденсации сверхпроводящей фазы в коре вихря, и тогда энергия вихря будет складываться из энергий магнитного поля и сверхпроводящих токов в области вне кора. Энергия вихревой линии, отнесенная к единице ее длины, т. е. линейное напряжение, приближенно выражается формулой

$$\epsilon_a = \int_{\rho \gtrsim \xi} d^3 \rho \left\{ \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} + \frac{\delta^2}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s \right)^2 \right\} \approx \pi^2 \frac{\phi_0^2}{(4\pi \delta)^2} \ln \frac{\delta}{\xi}, \quad \delta \gg \xi.$$

Вклад от области кора в энергию вихря порядка $(H^2/8\pi)\pi\xi^2$, т. е. примерно в $|\ln \xi| \gg 1$ раз меньше, и поэтому не существен. Так как $\epsilon_a \sim \eta^2$ и $\eta^2 \geq |\eta|$, то состояние из $|l|$ вихрей с одиночным квантами потока ϕ энергетически более выгодно, чем состояние с одним вихрем, но несущем сразу $|n|$ квантов потока.

6) В присутствии внешнего магнитного поля \mathbf{B} необходимо также учитывать энергию намагниченности вихря во внешнем магнитном поле $-M\mathbf{h}$, где \mathbf{M} — полный магнитный момент вихря. Из связи $\mathbf{j}_s = c \mathbf{M}/\mathbf{h}$, где \mathbf{M} — плотность магнитного момента, создаваемым циркулирующим сверхтекучим током, и уравнения Максвелла $\text{rot}(\mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M}) = 0$ находим для полного магнитного момента вихря на единицу его длины соотношение

$$4\pi M_s = 4\pi \iint m d^2 \rho = \iint h d^2 \rho = \eta \phi_0.$$

Поле, при котором становится энергетически выгодным появление вихря, находится из условия $\epsilon_a - M_s H = 0$. Наименьшему возможному полю, которое называется нижним (первым) критическим магнитным полем

H_{c1} , соответствует вихрь с одним квантами потока ϕ_0 , или $H_{c1} = 4\pi e/\phi_0$. Для сверхпроводника II рода с $\kappa \gg 1$ это дает

$$H_{c1} \approx \frac{\phi_0}{4\pi\hbar^2} \ln \kappa = H_c \frac{\ln \kappa}{x\sqrt{2}} = H_{c2} \frac{\ln \kappa}{2\pi^2}.$$

Таким образом, вблизи T_c также имеем $H_{c1}(T) \sim (T_c - T)$.

По мере превышения внешним полем критического значения H_{c1} расчет число вихрей и увеличивается проникновение магнитного поля в сверхпроводник. Эффект Мейсснера становится неполным. Состояние сверхпроводника в промежуточных полях $H_{c1} < H < H_{c2}$ называется смешанным или вихревым. Плотность числа вихрей N связана с магнитной индукцией соотношением $B = N\phi_0$. Среднее расстояние между вихревыми линиями зависит от магнитного поля примерно, как $(\phi_0/B)^{1/2}$. Исчезновение сверхпроводящего состояния при поле $H = H_{c2}$ представляет собой фазовый переход второго рода. При этом расстояние между вихрями становится порядка размера их кора $\xi(T)$, так что коры, состоящие из нормальных областей, фактически сливаются. В смешанном состоянии вихри образуют регулярную периодическую пространственную структуру называемую вихревой решеткой Абрикосова. Обычно — это треугольная решетка.

3.4.7. Верхнее критическое поле H_{c2} , при котором в сверхпроводнике второго рода происходит переход, соответствует максимальной температуре, при которой впервые появляется нетривиальное решение линеаризованного уравнения Гинзбурга—Ландau. Выберем ось z вдоль оси симметрии \mathbf{n} , а оси x и y расположим в балансной плоскости. В этой системе координат запишем линеаризованное уравнение Гинзбурга—Ландau:

$$\frac{\gamma_1}{2} (D_x^2 + D_y^2) \psi + \frac{\gamma_2}{2} D_z^2 \psi = -\alpha(T) \psi, \quad D_\alpha = -i\hbar \nabla_\alpha - \frac{2e}{c} A_\alpha.$$

Введем параметр анизотропии κ согласно $\gamma_1 = \kappa^2 \gamma_2$ и сделаем замену координаты и вектор-потенциала:

$$\begin{aligned} z &= \kappa z', & A_z &= A'_z / \kappa, \\ y &= y', & A_y &= A'_y, \\ x &= x', & A_x &= A'_x. \end{aligned}$$

Тогда в новых переменных уравнение будет выглядеть так же, как и в изотропном случае:

$$\gamma_2 \left(-i\hbar \nabla' - \frac{2e}{c} \mathbf{A}' \right)^2 \psi = -\alpha(T) \psi.$$

Соответственно нашему преобразованию и соотношению $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$ мы выразим компоненты магнитного поля в штрихованных величинах через исходные величины:

$$\mathbf{h}' = \{\epsilon H_x, \epsilon H_y, H_z\}.$$

При этом величина магнитного поля H' будет равна

$$H' = |\mathbf{h}'| = \sqrt{\epsilon^2(H_x^2 + H_y^2) + H_z^2} = H\sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta},$$

где θ — угол между осью симметрии и направлением магнитного поля. Воспользовавшись результатом для изотропного случая, сразу получим

$$\frac{c(\alpha(T))}{h\epsilon\gamma_{\perp}} = H_{z2} = H_0\sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

или окончательно

$$H_{z2}(\theta) = \frac{c(\alpha(T))}{h\epsilon\sqrt{\gamma_{\perp}(\gamma_{\perp} \cos^2 \theta + \gamma_0 \sin^2 \theta)}} = \frac{H_0(0)}{\sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon^2 \sin^2 \theta}}.$$

В кристаллах с кубической симметрией выполняется $\gamma_{\perp} = \gamma_0$, и величина H_{z2} не зависит от ориентации поля по отношению к осям кристаллической решетки.

3.4.8. Поверхностное критическое магнитное поле H_{cz} соответствует максимальной температуре, при которой впервые возникает нетривиальное решение линеаризованного уравнения Гинзбурга—Ландау с учетом граничных условий для параметра порядка на границе сверхпроводник+вакуум:

$$\frac{\gamma}{2} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(r) + \alpha(T) \psi(r) = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}],$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi(r) \Big|_S = 0.$$

Направим ось x вглубь сверхпроводника, занимающего полупространство $x > 0$, а ось z — вдоль магнитного поля \mathbf{H} , приложенного параллельно поверхности сверхпроводника. В калибровке для вектор-потенциала $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ имеем

$$-\frac{\gamma h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2eH}{c} \right)^2 \left(x + \frac{i\hbar e}{2\epsilon_{eff} \partial y} \right)^2 \psi - \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\alpha(T) \psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x=0) = 0.$$

Решение, которое можно представить в виде

$$\psi = e^{i\alpha_0 x/h} e^{i\mu_0 z/h} f(x)$$



ведет к уравнению, аналогичному уравнению Шредингера для осциллятора с массой $1/\gamma$, у которого положение центра орбиты смешено в точку $x = x_0$:

$$-\frac{\gamma\hbar^2}{2}f'' + \frac{\omega_n^2}{2\gamma}(x - x_0)^2 + \frac{\gamma p_z^2}{2}f = Ef, \quad f(x=0);$$

$$x_0 = \frac{cp_z}{2eH}, \quad \omega_H = \frac{2\gamma eH}{\hbar} \quad \text{и} \quad E = -\alpha(T) = |\alpha(T)|.$$

Благодаря граничному условию собственные значения E кроме номера уровня $n = 0, 1, 2, \dots$ и импульса p_z зависят также от расстояния центра орбиты x_0 до границы сверхпроводника, т. е. $E = E_n(x_0) + \gamma p_z^2/2$. Минимальное положительное значение E достигается при $p_z = 0$, $n = 0$ и некоторым значении x_0 .

Последнее уравнение, которое в безразмерных переменных

$$z = \frac{x}{\lambda}, \quad x_0 = \frac{x_0}{\lambda}, \quad \lambda^2 = \frac{\gamma\hbar}{2\omega_H} = \frac{\hbar c}{4eH}, \quad \varepsilon_n(z_0) = \frac{E_n(x_0)}{\hbar\omega_H},$$

сводится к уравнению

$$-f''(z) + \frac{(z - z_0)^2}{4}f(z) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)f(z), \quad \varepsilon_n(z_0) = \nu + \frac{1}{2},$$

имеет ограниченные на бесконечности решения — функции параболического цилиндра D_ν с индексом ν :

$$f = D_\nu(z - z_0) = D_\nu\left(\frac{z - z_0}{\lambda}\right), \quad \nu = \frac{E_n(x_0)}{\hbar\omega_H} - \frac{1}{2} = \varepsilon_n(z_0) - \frac{1}{2}$$

Джонсон $E_n(x_0)$ или $\varepsilon_n(z_0)$ определяется условием на границе

$$f'(z=0) = D'_\nu(-x_0/\lambda) = 0, \quad \text{или} \quad f'(z=0) = D'_\nu(-z_0) = 0.$$

Численный расчет дает для минимального собственного значения $\varepsilon_{\min} \approx \approx 0.295$ или $\varepsilon_{\min} \approx 0.59\varepsilon_\infty$, где $\varepsilon_\infty = 1/2$ — собственное значение энергии нижнего уровня осциллятора — очевидное решение при $x_0 = 0$ и $\lambda_0 = \infty$. Оптимальное положение центра орбиты x_0^* , отвечающее ε_{\min} , можно определить, дифференцируя граничное условие $D'_{\nu(z_0)}(-z_0) = 0$ по z_0 и используя условие минимума $\nu'(z_0^*) = 0$. Тогда найдем, что $D''_{\nu(z_0^*)}(-z_0^*) = 0$, и из уравнения на $f(z)$ при $z = 0$ получим $z_0^* = 2(\varepsilon_{\min})^{1/2} \approx 1.1$. Пространственно решение локализовано вблизи поверхности в области $z \lesssim 1$.

Магнитное поле H_{c0} , при котором впервые возникает нетривиальное решение $\psi(x) \neq 0$ с поверхностным зародышем сверхпроводящей фазы, определяется из соотношения

$$\frac{E_{\min}}{\hbar\omega_H} = \frac{|\alpha(T)|}{\hbar\omega_H} = \varepsilon_{\min}.$$



Отсюда поверхностное критическое магнитное поле H_{c3} равно

$$H_{c3} = \frac{1}{2\varepsilon_{\min}} \frac{|\alpha(T)|c}{\hbar\gamma} = \frac{H_{c2}(T)}{2\varepsilon_{\min}} \approx 1,69 H_{c2}(T),$$

а оптимальное значение x_0 — порядка корреляционной длины $\xi(T)$:

$$x_0^* = 2\varepsilon_{\min}\xi(T) \approx 0,59\xi(T).$$

Наличие поверхности может способствовать возникновению сверхпроводящей фазы в параллельном к поверхности магнитном поле. Толщина возникающего при H_{c3} сверхпроводящего слоя — порядка корреляционной длины. По мере уменьшения напряженности магнитного поля сверхпроводящий слой уширяется и при H_{c2} заполняет весь объем. В диапазоне полей $H_{c2} < H < H_{c3}$ может наблюдаться явление извергностной сверхпроводимости.

Значение ε_{\min} можно оценить, используя вариационный метод для уравнения Шредингера. Вариационная функция $f(x) = \exp(-bx^2)$ с минимизацией энергии E по отношению к b и x_0 дает $2\varepsilon_{\text{вар}} = (1 - 2/\pi)^{1/2}$ или $\varepsilon_{\text{вар}} \approx 0,60\varepsilon_\infty$.

3.4.9. Направим ось x перпендикулярно плоскости пластины и положим $x = 0$ в середине пластины. Границы пластины находятся в точках $x = \pm D/2$. Ось z направим вдоль магнитного поля. Соответственно, сверхпроводящий ток течет вдоль оси y .

Решение задачи удобно провести, используя безразмерные единицы:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\psi}{\psi_0}, \quad \psi_0^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}; \\ r &= \frac{x}{\delta}, \quad \delta^{-2} = 4\pi\gamma \left(\frac{2e}{c}\right)^2 \psi_0^2; \\ h &= \frac{h}{H_c\sqrt{2}}, \quad H_c = \frac{2\sqrt{\pi}|\alpha|}{\beta^{1/4}}; \\ \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{A}}{H_c\sqrt{2\delta}}. \end{aligned}$$

Здесь ψ_0 — равновесное значение параметра порядка, δ — глубина проникновения магнитного поля и H_c — термодинамическое магнитное поле. В безразмерных единицах функционал Гинзбурга—Ландау равен

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{H_c^2}{8\pi} \int d^3r \left[\left| \left(\frac{-i\nabla}{\kappa} - \mathbf{A} \right) f \right|^2 - |f|^2 + \frac{|f|^4}{2} + h^2 \right],$$

а уравнения Гинзбурга—Ландау принимают вид

$$\left(\frac{-i\nabla}{\kappa} - \mathbf{A} \right)^2 f - f + |f|^2 f = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = -(i/2se) (f'' \nabla f - f \nabla f'') - \mathbf{A} |f|^2, \quad \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Учитывая, что величины $f(x)$ и $\mathbf{A}(x) = (0, a, 0)$ изменяются только вдоль оси x , получим

$$\frac{d^2f}{dx^2} = x^2 f(a^2 - 1 + |f|^2)$$

Правая часть уравнения стремится к нулю "при" $x \rightarrow 0$, и в первом приближении ею можно пренебречь. К тому же, если $df/dx \neq 0$, то в силу $\lambda \ll 1$ вклад градиентного члена в функционал Гинзбурга-Ландау велик и энергетически невыгоден. В результате имеем $f(x) = \text{const}$, что также удовлетворяет граничному условию $df/dx = 0$ на краях пластины при $x = \pm d/2$. Уравнение Максвелла принимает форму уравнения Ландштейна:

$$-\frac{d^2a}{dx^2} = -f^2 a.$$

С учетом $h = da/dx$ и граничного условия непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля на поверхности пластины, т.е. $h(x = \pm d/2) = h_0$, находим распределение магнитного поля $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ и вектор-потенциала в пластине:

$$h(x) = h_0 \frac{\sin(xf)}{\sin(fd/2)}, \quad a(x) = \frac{h_0}{f} \frac{\sin(xf)}{\sin(fd/2)}.$$

Конкретное значение параметра порядка f , которое реализуется, отвечает минимуму свободной энергии $\Delta\mathcal{F} = \Delta\mathcal{F}(T, \mathbf{B})$, где \mathbf{B} — магнитная индукция, определяемая как среднее магнитное поле по объему пластины V :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int \mathbf{h} dV.$$

При фиксированном внешнем магнитном поле следует перейти к термодинамическому потенциальному

$$\Delta\tilde{\mathcal{F}}(T, \mathbf{h}) = \Delta\mathcal{F}(T, \mathbf{B}) - \int dV \frac{HB}{4\pi},$$

зависящему от внешнего магнитного поля H . В безразмерных единицах потенциал $\tilde{\mathcal{F}}$, приходящийся на единицу площади пластины, и который мы ниже будем минимизировать, равен

$$\Delta\tilde{\mathcal{F}}(f) = \frac{H_0^2}{8\pi} \int_{-d/2}^{d/2} dx \left(a^2 f^2 - f^2 + \frac{f^4}{2} + h^2 - 2h_0 h \right).$$

Вычисление вклада от трех магнитных членов дает

$$\int_{-d/2}^{d/2} a^2 dx = d \frac{h_0^2}{f^3} \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2(f/d/2)} \left(\frac{\operatorname{sh}(fd)}{fd} - 1 \right),$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} h^2 dx = d h_0^2 \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2(f/d/2)} \left(\frac{\operatorname{sh}(fd)}{fd} + 1 \right),$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} h dx = d \frac{h_0}{fd} \frac{\operatorname{sh}(fd)}{2 \operatorname{ch}^2(f/d/2)}.$$

В итоге для термодинамического потенциала получим

$$\frac{\Delta \bar{T}(f)}{d} = \frac{H_c^2}{8\pi} \left(-f^2 + \frac{f'}{2} - h_0^2 \frac{\operatorname{th}(fd/2)}{fd/2} \right).$$

Из условия $\partial(\Delta \bar{T})/\partial f = 0$ находим связь между f и h_0 :

$$h_0^2 = f^2(1 - f^2)[1 + \operatorname{ch}(fd)] \frac{fd}{\operatorname{sh}(fd) - fd}$$

В нормальном состоянии пластинки $f = 0$. Следовательно, критическое поле h_{cr} для данного значения f определяется из условия равенства потенциалов

$$\frac{\Delta \bar{T}(f)}{d} = \frac{\Delta \bar{T}(f=0)}{d} = -h_{cr}^2 \frac{H_c^2}{8\pi}.$$

Отсюда

$$h_{cr}^2(f) = \frac{1}{2} \frac{f^2(2 - f^2)}{1 - \operatorname{th}(fd/2)/(fd/2)}.$$

Уравнения для $h_0(f)$ и $h_{cr}(f)$ при $h_0 = h_{cr}$ позволяют определить критическое магнитное поле пластины.

Рассмотрим предельные случаи. В толстой пластине ($d \gg 1$) в точке перехода значение f близко к единице и

$$h_{cr} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 1/d), \quad d \gg 1,$$

или в обычных единицах

$$H_{cr} = H_c(1 + \delta/D), \quad D \gg \delta.$$

Разрушение сверхпроводящего перехода в толстой пластине является фазовым переходом первого рода, так как параметр порядка в точке перехода испытывает конечный скачок.

В тонкой пластине ($d \ll 1$) вблизи точки перехода значение $f \ll 1$ и в точке перехода при

$$h_{cr} \approx \frac{\sqrt{5}}{d}$$

обращается в ноль. Соответственно, фазовый переход становится фазовым переходом второго рода. В обычных единицах критическое поле пластины будет равно

$$H_{cr} = \frac{\sqrt{24\delta}}{D} H_c, \quad D \ll \delta.$$

Определим толщину пластины D_0 , при которой меняется род фазового перехода. Рассмотрим поведение разности

$$\frac{\Delta \tilde{T}(f)}{d} - \frac{\Delta \tilde{T}(f=0)}{d} = \frac{H_c^2}{8\pi} \left[-f^2 \left(1 - \frac{h_0^2 d^2}{12} \right) + \frac{f^4}{2} \left(1 - \frac{h_0^2 d^2}{12} \frac{d^2}{5} \right) + \dots \right]$$

при малых значениях f . Видно, что толщина $d_0 = \sqrt{5}$ выделена тем, что коэффициенты при f^2 и f^4 обращаются в ноль одновременно при $h_0^2 = 12/d_0^2$. Действительно, при $d_0 < \sqrt{5}$, когда $h_0 < \sqrt{12}/d$, энергетически выгодное состояние с малым значением f :

$$f^2 = \frac{1 - h_0^2 d^2 / 12}{1 - (h_0^2 d^2 / 12)(d^2 / 5)} > 0.$$

В обратном случае, если $d > \sqrt{5}$, то вблизи $f = 0$ не существует минимума разности потенциалов при $h_0^2 d^2 / 12 \rightarrow 1$. Но сверхпроводящая фаза может быть энергетически выгодна уже при $h_0^2 d^2 / 12 > 1$. Для этого требуется конечное значение f , удовлетворяющее условию

$$f^2 > \frac{h_0^2 d^2 / 12 - 1}{(h_0^2 d^2 / 12)(d^2 / 5) - 1},$$

и переход становится фазовым переходом первого рода. В обычных единицах $D_0 = \sqrt{5}\delta$.

3.4.10. Выберем ось z в направлении сверхпроводящего тока, ось x направим в перпендикулярном к плоскости пластины направлении. Условие $d \ll \xi$ обеспечивает в первом приближении постоянство параметра порядка ψ по сечению пленки, которое также согласуется с граничным условием $d\psi/dx = 0$ на обеих сторонах пленки. В противном случае $\nabla\psi \sim \psi/d$, и вклад в функционал Гinzбурга-Ландау от градиентного члена становится слишком большим и энергетически невыгодным.

Второе условие $d \ll \delta$ позволяет в первом приближении пренебречь возможным изменением вектор-потенциала \mathbf{A} , магнитного поля и изменением плотности тока по сечению пленки. Относительная величина поправок имеет порядок $(d/\delta)^2 \ll 1$. В этом приближении

$$\mathbf{A} \approx -\frac{c\mathbf{j}}{4\gamma e^2 |\psi|^2},$$

и магнитное поле пренебрежимо мало: $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A} \approx 0$. Соответственно, для плотности свободной энергии Гинзбурга-Ландau получим

$$\Delta F = \frac{1}{8\gamma e^2} \frac{\mathbf{j}^2}{|\psi|^2} - \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4.$$

Условие минимума ΔF относительно ψ дает

$$-\frac{1}{8\gamma e^2} \frac{\mathbf{j}^2}{|\psi|^4} - \alpha + \beta |\psi|^2 = 0.$$

Полагая $|\psi| = \psi_0 f$, где $\psi_0^2 = |\alpha| / \beta$ — равновесное значение параметра порядка, находим

$$j_c = j_c \frac{3\sqrt{3}}{2} f^2 (1 - f^2)^{1/2}, \quad j_c = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{e\gamma h}{\epsilon} \psi_0^2 \sim (T_c - T)^{3/2}.$$

Величину j_c называют критической плотностью сверхпроводящего тока. Если рассмотреть j_c как функцию f^2 , то видно, что она обращается в нуль при $f = 0$ и $f = 1$, а при $f^2 = 2/3$ имеет максимум. Таким образом, j_c является максимальным значением плотности тока, которое может быть совместимо со сверхпроводящим состоянием. В точке перехода к нормальному состоянию при $j_c = j_c$ параметр порядка ψ скачком меняется от $\sqrt{2}/3$ до нуля. Физический смысл найденного значения j_c можно увидеть из соотношений

$$j_c = \frac{1}{3\sqrt{6}} \frac{eH_c(T)}{\pi\lambda_0(T)} = e n_c(T) v_F(T),$$

С учетом того, что $n_c(T)$ — плотность сверхпроводящих электронов, величина

$$n_c(T) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{h v_F}{\pi r_F \xi(T)},$$

где v_F и r_F — скорость и импульс Ферми, можно придать смысл критической скорости элементарных возбуждений (квазичастиц), при достижении которой происходит разрыв куперовских пар. В этом смысле критическая скорость пропорциональна ширине сверхпроводящей шели $\Delta(T)$, т. е. $v_c \propto \Delta(T)/r_F$.

3.4.11. Условие $d \ll \xi$ позволяет в первом приближении пренебречь изменением модуля параметра порядка по толщине цилиндра: $|\psi| = \text{const}$. Условия $\delta \ll R$ и $d \ll R$ также позволяют приближенно считать, что вектор-потенциал \mathbf{A} практически не изменяется в пределах толщины цилиндра, и не делать различия между магнитными полями внутри и вне цилиндра.

Выберем вектор-потенциал \mathbf{A} таким образом, чтобы он имел только компоненту A_φ в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) . Подставляя

$$\psi = |\psi| e^{i\theta\varphi}$$

в плотность свободной энергии

$$\Delta F = \frac{\gamma}{2} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{H^2}{8\pi},$$

получим

$$\Delta F = \frac{\gamma h^2}{2} \left(\nabla \theta - \frac{2e}{hc} \mathbf{A} \right)^2 |\psi|^2 + \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{H^2}{8\pi}.$$

Пользуясь тем, что $\nabla \theta$ и \mathbf{A} приближенно постоянны по сечению цилиндра, представим $\nabla \theta = [2e/(hc)] \mathbf{A}$ в виде среднего от интеграла по контуру, перпендикулярному оси цилиндра и представляющему собой окружность внутри цилиндра:

$$\nabla \theta - \frac{2e}{hc} \mathbf{A} = \frac{1}{2\pi R} \int \left(\nabla \theta - \frac{2e}{hc} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = \frac{1}{2\pi R} \left([\Delta \theta] - \frac{2e}{hc} \Phi \right) = \frac{1}{R} \left(n - \frac{\Phi}{\phi_0} \right).$$

Здесь $[\Delta \theta] = 2\pi n$, где $[\Delta \theta]$ — приращение фазы при полном обходе вокруг оси цилиндра и n — произвольное целое число, которое обеспечивает однозначность параметра порядка. Магнитный поток через цилиндр равен $\Phi = \pi R^2 H$, и ϕ_0 — квант потока. В результате

$$\Delta F = \frac{\gamma h^2}{2R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\phi_0} \right)^2 |\psi|^2 + \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{H^2}{8\pi}.$$

Целое число n выбирается из условия минимума свободной энергии, т.е. n соответствует неравенству

$$n - \frac{1}{2} < \frac{\Phi}{\phi_0} < n + \frac{1}{2}.$$

Критическая температура сверхпроводящего перехода $T_c = T_c(H)$ определяется условием

$$\alpha(T_c) + \frac{\gamma h^2}{2R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\phi_0} \right)^2 = 0, \quad \alpha(T_c) = \alpha_0(T_c - T_{c0})$$



Относительное изменение критической температуры равно

$$\frac{T_c - T_{c0}}{T_{c0}} = - \frac{\gamma h^2}{2R^2 \alpha_0 T_{c0}} \left(n - \frac{\Phi}{\phi_0} \right)^2 \sim - \left(\frac{\xi(T=0)}{R} \right)^2 \left(n - \frac{\Phi}{\phi_0} \right)^2.$$

Зависимость $\Delta T_c/T_{c0}$ от Φ состоит из периодически повторяющихся параболических дуг с периодом ϕ_0 с максимальным отношением

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = - \frac{\gamma h^2}{8R^2 \alpha_0 T_{c0}} \sim - \left(\frac{\xi(T=0)}{2R} \right)^2.$$

3.4.12. Пусть при $x \rightarrow +\infty$ имеется сверхпроводящая фаза с $\psi = \psi_0$, а в левом полупространстве при $x \rightarrow -\infty$ — нормальная фаза с $\psi = 0$. Выберем ось z вдоль магнитного поля H и вектор-потенциал A вдоль оси y , так что $h = dA/dx$. Все величины ψ , H , A зависят только от x . Ось x перпендикулярна плоскости границы.

В пределе $\kappa \ll 1$ или $\delta \rightarrow 0$ магнитное поле проникает только на глубину $\delta \ll \xi$, и в первом приближении мы можем считать, что магнитное поле совсем не проникает в те области, где $\psi \neq 0$. Поэтому в уравнении Гинзбурга–Ландау мы можем полностью пренебречь магнитным полем и вектор-потенциалом, полагая $H = A = 0$ при $x > 0$, т. е.

$$-\frac{\gamma h^2}{2} \psi'' + \alpha \psi + \beta \psi^3 = 0,$$

и приближенно считать, что $\psi(x) = 0$ при $x \leq 0$. В нашем приближении будет $H = H_c$ при $x \leq 0$. Домножая уравнение на ψ' , получим первый интеграл:

$$-\frac{\gamma h^2}{2} \psi'^2 + \alpha \psi^2 + \frac{\beta}{2} \psi^4 = \text{const} = \alpha \psi_0^2 + \frac{\beta}{2} \psi_0^4 = -\frac{\alpha^2}{2\beta},$$

Здесь мы учли, что $\psi'(\infty) = 0$, и $\psi(\infty) = \psi_0 = (\alpha/\beta)^{1/2}$ представляет собой равновесное значение параметра порядка. Далее имеем

$$\frac{\psi'}{\psi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \left(1 - \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \right), \quad \xi = \frac{\gamma h^2}{2|\alpha|},$$

где ξ — корреляционная длина. Решение уравнения есть

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{2}\xi}.$$

Свободная энергия сверхпроводящей фазы, отнесенная к единице площади границы, равна

$$F_s = \int_0^\infty dx \left(\frac{\gamma h^2}{2} \psi'^2 + \alpha \psi^2 + \frac{\beta}{2} \psi^4 \right).$$



Поверхностное натяжение σ_{SS} представляет собой разность между F_s и свободной энергией сверхпроводящей фазы F_{s0} , отвечающей случаю, если бы все полупространство $x \geq 0$ была заполнено однородной сверхпроводящей фазой с $\psi(x) = \psi_0$. Итак,

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{SS}} = F_s - F_{s0} &= \int_0^\infty dx \left(\frac{\gamma h}{2} \psi'^2 + \alpha \psi^2 + \frac{\beta}{2} \psi^4 \right) - \int_0^\infty dx \left(-\frac{\alpha^2}{2\beta} \right) = \\ &= \frac{\alpha^2}{2\beta} \int_0^\infty dx \left[2k^2 \frac{\psi'^2}{\psi_0^2} + \left(1 - \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta} \int_0^\infty dx \left(1 - \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \right)^2 = \frac{H_c^2}{4\pi} \sqrt{2\zeta} \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^2 x} = \frac{H_c^2 4\sqrt{2}\zeta}{8\pi}.\end{aligned}$$

В конце мы учили, как α^2/β выражается через термодинамическое критическое поле H_c .

3.4.13. Пусть две вихревые нити параллельны оси z и проходят в плоскости $z = 0$ через точки $r_1 = (x_1, y_1)$ и $r_2 = (x_2, y_2)$. Магнитное поле \mathbf{h} описывается уравнением с двумя источниками магнитного потока:

$$\mathbf{h} + \delta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \phi_{01} \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \phi_{02} \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),$$

где $\phi_{01} = \phi_0 \mathbf{e}_z$ и $\phi_{02} = \pm \phi_0 \mathbf{e}_z$. Знак плюс (минус) отвечает одинаковым (противоположным) направлениям циркуляции, \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z , δ — квант потока. Магнитное поле является суммой двух полей, создаваемых каждой из нитей:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{\phi_0}{2\pi r_i} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\delta}\right),$$

где $\mathbf{h}_0(\mathbf{r})$ — магнитное поле отдельного вихря, выраженное через функцию Маклоренда K_0 .

Вклад вихрей в энергию системы на единицу длины вдоль оси z описывается выражением

$$E = \int \frac{\mathbf{h}^2 + \delta^2 (\operatorname{rot} \mathbf{h})^2}{8\pi} d^2 r = E_1 + E_2 + U_{\text{int}},$$

где E_i — энергия отдельной вихревой нити:

$$E_i = \int \frac{\mathbf{h}_i^2 + \delta^2 (\operatorname{rot} \mathbf{h}_i)^2}{8\pi} d^2 r, \quad i = 1, 2.$$

а энергия взаимодействия нитей дается соотношением

$$U_{\text{нз}} = \int \frac{\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta^2 (\text{rot } \mathbf{h}_1) \cdot (\text{rot } \mathbf{h}_2)}{4\pi} d^3 r.$$

Пользуясь тождеством

$$\nabla \text{rot } \mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B},$$

преобразуем последний интеграл к следующему виду:

$$\begin{aligned} U_{\text{нз}} &= \int (\mathbf{h}_1 + \delta^2 \text{rot } \text{rot } \mathbf{h}_1) \frac{\mathbf{h}_2}{4\pi} d^3 r + \frac{\delta^2}{4\pi} \int \text{div}(\mathbf{h}_2 \times \text{rot } \mathbf{h}_1) d^3 r = \\ &= \frac{\phi_{01} \cdot \mathbf{h}_2(r_1)}{4\pi} + \frac{\delta^2}{4\pi} \int [\mathbf{h}_2 \times \text{rot } \mathbf{h}_1] dt. \end{aligned}$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, поскольку магнитное поле вихрей экспоненциально спадает при условии $r \rightarrow \infty$. В результате

$$\begin{aligned} U_{\text{нз}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \frac{\phi_{01} \cdot \mathbf{h}_2(r_1)}{4\pi} = (\phi_{01} \phi_{02}) \frac{k_B(r_1 - r_2)/\delta}{8\pi^2 \delta^2} = \\ &= \frac{(\phi_{01} \phi_{02})}{8\pi^2 \delta^2} \begin{cases} \ln \frac{\delta}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, & \xi \lesssim |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim \delta, \\ \left(\frac{\pi \delta}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)^{1/2} e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/\delta}, & |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim \delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, когда направления магнитного потока в обоих вихрях совпадают ($\phi_{01} \phi_{02} > 0$), вихри отталкиваются, а вихри с противоположными направлениями магнитного потока (вихрь-антивихрь), т. е. ($\phi_{01} \phi_{02} < 0$) — притягиваются.

Сила, действующая на первый вихрь со стороны второго вихря, равна по определению

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= -\frac{\partial U_{\text{нз}}}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\phi_{01} \mathbf{h}_2(r_1))}{\partial \mathbf{r}_1} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} [\phi_{01} \times \text{rot } \mathbf{h}_2] - \frac{1}{4\pi} (\phi_{01} \cdot \nabla) \mathbf{h}_2 = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{12}(r_1) \times \phi_{01}]. \end{aligned}$$

Здесь мы учли равенство $\nabla(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B}$ при $\mathbf{A} = \text{const.}$, а также то, что $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2(x, y)$ не зависит от z , и воспользовались уравнением Максвелла $\text{rot } \mathbf{h} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. Структура полученного выражения совпадает со структурой силы Лоренца. Обобщение выражения для силы, действующей на вихрь, на случай произвольного числа вихрей, очевидно.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_I \times \phi_{01}],$$

где j — суммарная плотность тока в коре вихря, наведенная всеми остальными вихрями. Вихревая линия может находиться в равновесии, если сумма токов от всех остальных вихрей на данной вихревой линии обращается в ноль. Это условие можно выполнить, если каждый из вихрей поместить в узлы симметричной периодической решетки, например, квадратной или треугольной.

3.4.14. Пусть вихревая линия находится на расстоянии x от поверхности сверхпроводника. Магнитное поле описывается уравнением

$$\mathbf{h} + \delta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \phi_0 \delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{r}_0 = (x, 0)$ и вектор ϕ_0 параллелен поверхности и оси z . Границные условия на поверхности $x = 0$ — непрерывность магнитного поля и отсутствие сверхпроводящего тока через границу сверхпроводника — имеют вид

$$\mathbf{h} = 0 \text{ и } (J_z)_x = 0 \text{ при } x = 0.$$

Чтобы найти магнитное поле, воспользуемся методом изображений, рассматривая бесконечный сверхпроводник, в котором имеются два вихря с противоположными направлениями магнитного потока (вихрь-антивихрь), расположенные на равном расстоянии от поверхности симметрично относительно $x = 0$. В силу симметрии граничные условия удовлетворяются автоматически. В силу однозначности решения поле, созданное парой вихрь-антивихрь в области $x > 0$, совпадает с полем одного вихря у поверхности сверхпроводника. Пользуясь результатами предыдущей задачи, найдем энергию взаимодействия вихря с поверхностью

$$U_{\text{int}}(x) = -\frac{\phi_0 h_0(2x)}{4\pi},$$

где h_0 — поле, создаваемое вихрем изображения. Сила притяжения вихря к поверхности сверхпроводника равна

$$F_{\text{прит}} = -\frac{dU_{\text{int}}(x)}{dx} = \frac{\phi_0 h'_0(2x)}{2\pi} = -\frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \delta^2} \begin{cases} 1/x, & \xi \leq x \leq \delta, \\ (\pi/x\delta)^{1/2} \exp(-2x/\delta), & x \geq \delta. \end{cases}$$

Внешнее магнитное поле H , параллельное вихревой нити, якоборот, отталкивает ее от поверхности вглубь сверхпроводника с силой, определяемой экранирующим мейсснеровским током

$$j_r = \frac{c}{4\pi} \frac{H}{\delta} e^{-x/\delta}.$$

текущим вдоль поверхности в направлении оси y и перпендикулярно к ней. В результате

$$F_{\text{вн}} = \frac{1}{c} J_1 \psi_0 = \frac{\phi_0 H}{4\pi\delta} e^{-r/\delta}.$$

Полная сила, действующая на выхрь у поверхности, равна сумме $F = F_{\text{вн}} + F_{\text{вн}}$.

3.4.15. Физическое состояние системы определяется минимумом свободной энергии. Приравнивая производные от ΔF по \mathbf{M} и ψ^2 , найдем

$$(A(T) + BM^2 + 2G|\psi|^2)\mathbf{M} = 0,$$

$$(\alpha(T) + \beta|\psi|^2 + GM^2)\psi = 0.$$

Система имеет четыре возможных решения и, соответственно, четыре возможные фазы. Нормальная немагнитная N -фаза:

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = 0, \quad \Delta F_N = 0.$$

Сверхпроводящая немагнитная S -фаза, если $T \leq T_c$:

$$\psi^2 = \psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = 0, \quad \Delta F_S = -\frac{\alpha^3}{2\beta}.$$

Нормальная ферромагнитная F -фаза, если $T \leq \theta < T_c$:

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = -\frac{A}{\beta}, \quad \Delta F_F = -\frac{A^3}{4\beta}.$$

И, наконец, SF -фаза ферромагнитного сверхпроводника, если T ниже T_c и θ :

$$\psi^2 = -\frac{\alpha\beta - AG}{\beta B - 2G^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^2 = -\frac{A\beta - 2\alpha G}{\beta B - 2G^2},$$

$$\Delta F_{SF} = \Delta F_F - \frac{1}{2B} \frac{(AG - \alpha\beta)^2}{\beta B - 2G^2} = \Delta F_S - \frac{1}{4\beta} \frac{(A\beta - 2\alpha G)^2}{\beta B - 2G^2}.$$

Из последнего соотношения видно, что энергия SF -фазы всегда больше, чем энергия S -фазы или энергия F -фазы, если константа взаимодействия G велика: $G^2 > \beta B / 2$ или велико безразмерное отношение

$$g = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{\beta B}} > 1.$$

Следовательно, при $g > 1$ SF -фаза не реализуется и осуществляется одна из N , S , F -фаз, которая имеет наименьшую энергию. В результате при $T > T_c$ будет N -фаза. Ниже T_c будет переход второго рода к S -фазе.

При $T < \theta$ становится возможным существование F -фазы. Однако, переход к F -фазе, как более выгодной, происходит при температуре T_0 , когда энергии конденсации S -фазы и F -фазы сравняются:

$$\frac{\alpha^2(T_0)}{2\beta} = \frac{A^2(T_0)}{4B\gamma}$$

Переход при температуре T_0 с разрушением сверхпроводящего состояния и возникновением ферромагнитного упорядочения будет фазовым переходом первого рода, так как при этом скачком меняется сверхпроводящий параметр порядка от ψ_0 к нулю, а намагниченность скачком увеличивается от нуля к M_0 .

При относительно малой константе взаимодействия $g < 1$ энергия SF -фазы в области ее существования всегда будет меньше, чем энергия S -фазы или F -фазы. Переход из S -фазы в SF -фазу происходит на линии $A(T)B = 2\alpha(T)G$. Поскольку на этой линии намагниченность M образуется в ноль, то переход является фазовым переходом второго рода. На линии $\alpha(T)B = A(T)G$ будет иметь место переход из SF -фазы в F , который также является фазовым переходом второго рода, так как на линии перехода сверхпроводящий параметр порядка ψ обращается в ноль.

Итак (рис. 3.10), при $g < 1$ с понижением температуры будем последовательно иметь фазовые переходы второго рода: из нормальной немагнитной фазы в сверхпроводящую немагнитную фазу, потом в фазу ферромагнитного сверхпроводника и далее в нормальную ферромагнитную фазу. Если уравнение $\alpha(T)B = A(T)G$ не имеет решения при любой $T < T_0$, то фаза ферромагнитного сверхпроводника существует и при нуле температуры. Точка на фазовой диаграмме $g = 1$ и $T = T_0$ представляет собой трикритическую точку, в которой сходятся две линии фазовых переходов второго рода и линия фазового перехода первого рода, а также соприкасаются S , SF и F -фазы.

3.4.16. Если вектор намагниченности $\mathbf{M}(r) = \text{const}$, то магнитное поле в объеме сверхпроводника экранируется: $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{A} = 0$, и появляется дополнительная энергия $2\pi M^2$. Если быстро менять направление вектора \mathbf{M} на длине, гораздо меньшей глубины проникновения магнитного

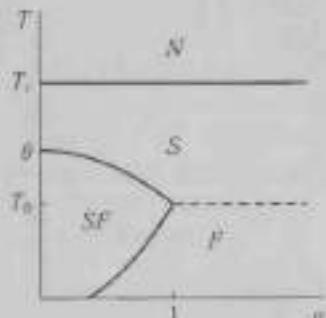


Рис. 3.10. Диаграмма фазовых состояний ферромагнитного сверхпроводника. Сплошными линиями показаны фазовые переходы второго рода. Пунктирной линией — фазовый переход первого рода.

поля δ , то магнитное поле не экранируется, $\mathbf{h} \approx 4\pi\mathbf{M}$, и энергия $2\pi M^2$ пропадает. С другой стороны, это приводит к отличным от нуля вектор-потенциалу \mathbf{A} и $\nabla\mathbf{M}$, что увеличивает вклады градиентных членов в энергию системы. Период структуры будет определяться балансом между уменьшением магнитной энергии и ростом градиентной энергии.

Пусть ось магнитной спирали направлена вдоль оси x и вектор намагниченности вращается в плоскости $y - z$, перпендикулярной оси x , с волновым вектором q :

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin qx, \quad M_z = M \cos qx$$

так, что $\mathbf{M}^2(x) = \text{const}$. Из уравнения движения для намагниченности

$$-C_n \frac{d^2 \mathbf{M}}{dx^2} + (A + 2G|\psi|^2 + b\mathbf{M}^2)\mathbf{M} = \mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M}$$

видно, что $|\psi|^2 = \text{const}$ и вектор $\mathbf{h}(x)$ также описывает спираль с тем же волновым вектором. Это согласуется также и с уравнением Гинзбурга–Ландау для ψ . Чтобы найти связь между \mathbf{h} и \mathbf{M} , запишем уравнение Максвелла или уравнение Лондонов:

$$\text{rot}(\mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_y = -\frac{\mathbf{A}}{\delta^2}$$

Для решения удобно ввести вектор индукции $\mathbf{B} = \mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M}$. Тогда

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{B}}{\delta^2} - \frac{4\pi\mathbf{M}}{\delta^2}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} - \frac{\mathbf{B}}{\delta^2} = \frac{4\pi\mathbf{M}}{\delta^2}$$

В результате получаем следующие соотношения

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi\mathbf{M}}{1 + q^2\delta^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{h} = \frac{q^2\delta^2}{1 + q^2\delta^2} 4\pi\mathbf{M}$$

Величину волнового вектора найдем из условия минимума функционала Гинзбурга–Ландау. Выпишем часть функционала, зависящую только от волнового вектора:

$$\Delta F_q = \frac{C_n}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 + \frac{(\mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{A}^2}{8\pi\delta^2}$$

Из условия $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$ или $\mathbf{h} = (0, -dA_x/dx, dA_y/dx)$ находим

$$A_x = 0, \quad A_y = \frac{\hbar}{q} \cos qx, \quad A_z = \frac{\hbar}{q} \sin qx, \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^2 = \frac{\hbar^2}{q^2}$$

В результате получим

$$\Delta F_q = \frac{C_n}{2} q^2 \mathbf{M}^2 + \frac{2\pi\mathbf{M}^2}{1 + q^2\delta^2}$$



Дифференцирование по q приводят к уравнению

$$q \left(C_n - \frac{4\pi\delta^2}{(1+q^2\delta^2)^2} \right) = 0.$$

Если магнитная жесткость большая, т.е. $C_n > (4\pi\delta^2)^{1/2}$, то решением уравнения является $q = 0$, и намагниченность однородна: $\mathbf{M} = \text{const}$. При $C_n < (4\pi\delta^2)^{1/2}$ энергетически выгоднее неоднородное решение с геликоидальным упорядочением. При этом волновой вектор будет равен

$$q = \frac{1}{\delta} \left[\left(\frac{4\pi\delta^2}{C_n} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}.$$

Период геликоида $L = 2\pi/q$. При $C_n \ll (4\pi\delta^2)^{1/2}$ он приблизительно равен

$$L = 2\pi(C_n\delta^2/4\pi)^{1/4} \sim \delta^{1/2}.$$

3.4.17. Выше температуры перехода T_c и в ее непосредственной окрестности T_c флуктуации сверхпроводящего параметра порядка достаточно мала $|\psi|^2 \ll \alpha/\beta$, и можно пренебречь членом четвертого порядка. В этом же приближении также можно не рассматривать и флуктуации магнитного поля, вызванные флуктуациями сверхпроводящего тока, которые пропорциональны $|\psi|^2$. По определению корреляционной функции

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\sum_{\psi} \sum_{\psi^*} \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') e^{-\mathcal{F}/T}}{\sum_{\psi} \sum_{\psi^*} e^{-\mathcal{F}/T}},$$

где сумма берется по всем реализациям полей $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$, а \mathcal{F} — функционал Гинзбурга—Ландау, ограниченный квадратичными членами

$$\mathcal{F}[\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r})] = \int d^3r \left(\frac{\gamma h^2 |\nabla \psi|^2}{2} + \alpha(T) |\psi|^2 \right).$$

Вычисления удобно провести в фурье-представлении:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad \text{и} \quad \psi^*(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^* e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

в котором \mathcal{F} принимает простой диагональный вид:

$$\mathcal{F} = \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^* \left(\frac{\gamma h^2 \mathbf{q}^2}{2} + \alpha \right) \psi_{\mathbf{q}},$$

а корреляционная функция равна

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') \rangle = \sum_{\mathbf{q} \mathbf{q}'} \langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}'}^* \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}'\mathbf{r}'} = \sum_{\mathbf{q}} \langle |\psi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')},$$

Последнее равенство возникает, если гармоники с разными \mathbf{q} флюктуируют независимо друг от друга, т.е. $\langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}'}^* \rangle = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$.

Для вычисления среднего используем метод производящего функционала Z :

$$Z[\eta_{\mathbf{q}}, \eta_{\mathbf{q}}^*] = \frac{\sum_{\psi_{\mathbf{q}}} \sum_{\psi_{\mathbf{q}}^*} e^{-\sum_{\mathbf{q}} (\eta_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}}^{-1} \psi_{\mathbf{q}} + \eta_{\mathbf{q}}^* \psi_{\mathbf{q}} + \psi_{\mathbf{q}}^* \eta_{\mathbf{q}})}}{\sum_{\psi_{\mathbf{q}}} \sum_{\psi_{\mathbf{q}}^*} e^{-\sum_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}}^{-1} \psi_{\mathbf{q}}}}, \quad K_{\mathbf{q}} = \frac{T}{\gamma h^2 q^2/2 + \alpha}.$$

Искомый коррелектор равен второй производной:

$$\langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^* \rangle = \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta_{\mathbf{q}}^* \delta \eta_{\mathbf{q}'}} \right|_{\eta_{\mathbf{q}}^* = 0, \eta_{\mathbf{q}'} = 0}.$$

Для вычисления Z воспользуемся преобразованием однородного сдвига полей $\psi_{\mathbf{q}}$ и $\psi_{\mathbf{q}}^*$, по которым ведется суммирование:

$$\psi_{\mathbf{q}} \rightarrow \psi_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}} \quad \text{и} \quad \psi_{\mathbf{q}}^* \rightarrow \psi_{\mathbf{q}}^* + \xi_{\mathbf{q}}^*,$$

При такой замене переменных значение сумм, входящих в определение Z , не меняется, поскольку суммирование по $\psi_{\mathbf{q}}$ и $\psi_{\mathbf{q}}^*$ ведется в бесконечных пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Далее

$$\begin{aligned} \sum_{\psi_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}}} \sum_{\psi_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}}} e^{-\sum_{\mathbf{q}} [(\psi_{\mathbf{q}}^* + \xi_{\mathbf{q}}^*) K_{\mathbf{q}}^{-1} (\psi_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}}) + \eta_{\mathbf{q}}^* (\psi_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}}) + (\eta_{\mathbf{q}}^* + \xi_{\mathbf{q}}^*) \psi_{\mathbf{q}}]} = \\ = e^{\sum_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}}^{-1} \eta_{\mathbf{q}}} \sum_{\psi_{\mathbf{q}}} \sum_{\psi_{\mathbf{q}}^*} e^{-\sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}}^{-1} \psi_{\mathbf{q}}}, \end{aligned}$$

где мы выбрали величину сдвига $\xi_{\mathbf{q}} = -K_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}}$ и $\xi_{\mathbf{q}}^* = -\eta_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}}$, чтобы избавиться от линейных членов по $\psi_{\mathbf{q}}$ и $\psi_{\mathbf{q}}^*$. Отсюда находим производящий функционал:

$$Z[\eta_{\mathbf{q}}, \eta_{\mathbf{q}}^*] = \exp \left(\sum_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}}^* K_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}} \right) = \exp \left(\sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \eta_{\mathbf{q}}^* (K_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}) \eta_{\mathbf{q}'} \right).$$

Это дает следующий результат:

$$\langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^* \rangle = K_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \frac{T}{\gamma h^2 q^2/2 + \alpha} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'},$$

который приводит нас к корреляционной функции

$$K(r - r') = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{T}{\gamma h^2 q^2/2 + \alpha} e^{iqr - ir'q} = \frac{2T}{\gamma h^2 4\pi |r - r'|} e^{-|r - r'|/L}.$$

здесь $\xi = b(\gamma/2\alpha)^{1/2} \sim (T - T_c)^{-1/2}$ — корреляционная длина или характерный размер области, в которой формируется новая фаза, возникающая в бесконечном объеме при $T = T_c$.

3.4.18. Благодаря малости размера гранулы по сравнению с длиной корреляции $R \ll \xi$ можно приближенно считать параметр порядка ψ постоянным. Малость размера гранулы по сравнению с глубиной проникновения b позволяет пренебречь эффектами экраанирования магнитного поля и приближенно считать магнитное поле внутри частицы равным внешнему магнитному полю H . Тогда зависимыми от флуктуаций ψ в функционале Гинзбурга–Ландau остаются только градиентный и квадратичный члены. Членом с $|\psi|^4$ пренебрежем в силу приближения малости v . Итак, рассмотрим только существенные члены:

$$\Delta F = \int d^3r \left[\frac{\gamma}{2} \left(\frac{2eA}{c} \right)^2 |\psi|^2 + \alpha(T) |\psi|^2 \right] = V \left[\frac{2e^2 \gamma}{c^2} \langle A^2 \rangle + \alpha(T) \right] |\psi|^2 = V \bar{\alpha} |\psi|^2,$$

где V — объем, а $\langle A^2 \rangle$ — среднее по объему гранулы. Выбирая вектор-потенциал в калибрахке $A = [H \times r]/2$, вычислим

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{V} \int d^3r \frac{|H \times r|^2}{4} = \frac{2\pi H^2/4}{(4\pi R^3/3)} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{H^2 R^3}{10}$$

Влияние магнитного поля сводится здесь к изменению коэффициента $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, т. е. к уменьшению температуры сверхпроводящего перехода.

Подана намагниченность равна производной от свободной энергии $F = -T \ln Z$:

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = T \frac{\partial Z / \partial H}{Z},$$

где Z — статистическая сумма. Далее

$$M = -\frac{\int d\psi^* d\psi [V(2e^2\gamma/c^2)|\psi|^2 \bar{\alpha} \langle A^2 \rangle / \partial H] \exp(-\Delta F/T)}{\int d\psi^* d\psi \exp(-\Delta F/T)} =$$

$$= -\frac{2HV \frac{e^2 \gamma R^2}{c^2} \int_0^\infty d|\psi|^2 |\psi|^2 \exp(-V\bar{\alpha}|\psi|^2/T)}{\int_0^\infty d|\psi|^2 \exp(-V\bar{\alpha}|\psi|^2/T)} = -\frac{2 \frac{T e^2 \gamma R^2}{c^2}}{\bar{\alpha}(T) + e^2 \gamma H^2 R^2 / 5c^2} \frac{H}{H + e^2 \gamma H^2 R^2 / 5c^2}.$$

Флуктуационная намагниченность отрицательна и соответствует динамагнетизму, т. е. выталкиванию магнитного поля из области гранулы. При приближении к точке сверхпроводящего перехода, когда $\partial(T_c) = 0$, намагниченность неограниченно нарастает. В слабом поле флуктуационный вклад в динамагнитную восприимчивость равен

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{2Te^2\gamma R^2}{5e^2\alpha(T)} \sim -\frac{1}{T-T_c}.$$

3.4.19. В пульмерном сверхпроводнике, благодаря неравенству $R \ll \xi(T)$, основной вклад в статистическую сумму Z вносит пространственно-независимая часть параметра порядка $\psi(\mathbf{r}) = \psi$. Термодинамическое среднее для величины $|\psi|^2$ определяется выражением

$$\langle |\psi|^2 \rangle = \langle |\psi|^2 \rangle = \frac{\int d\psi^* d\psi |\psi|^2 \exp(-V(\alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4/2)/T)}{\int d\psi^* d\psi \exp(-V(\alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4/2)/T)}.$$

в котором интегрирование ведется по всем возможным значениям ψ^* и ψ . Величины $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$ и β — суть параметры разложения Гинзбурга—Ландау. Далее имеем

$$\langle \psi^2 \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\beta T}{V} \right)^{1/2} \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x \exp(-(sx + x^2))}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-(sx + x^2))} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\beta T}{V} \right)^{1/2} F(s),$$

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-s^2}}{1 - \operatorname{erf}(s)} - s, \quad \text{где} \quad s = \alpha \left(\frac{V}{2\beta T} \right)^{1/2}$$

и $\operatorname{erf}(s)$ — интеграл вероятности или функция ошибок:

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Пределные выражения для $F(s)$ даются соотношениями

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2s}, & s \gg 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{\pi - 2}{2\pi} s, & |s| \ll 1, \\ -s, & s \ll -1. \end{cases}$$

Прежде всего отметим, что параметр порядка $\psi_0 = \psi_0(T)$ — регулярная функция температуры, плавно нарастающая с понижением температуры. Точка $T = T_c$ ничем не выделена. Тем самым, строго говоря, сверхпроводящий фазовый переход в нульмерной системе отсутствует. Благодаря флуктуациям параметр порядка отличен от нуля в заметной области температур при $T > T_c$. При $x \lesssim -1$ величина ψ_0^2 принимает значение $\psi_0^2 \approx -\alpha/\beta$, которое равно значению в случае объемного сверхпроводника при $T < T_c$, а при $x \gtrsim 1$ величина ψ_0^2 стремится к нулю. В области $|x| \lesssim 1$ различие, благодаря конечно-стости объема гранулы, существенно.

Такое поведение (рис. 3.11) параметра порядка характеризуют как размытие области фазового перехода. Область размытия определяется неравенством

$$1 \gtrsim \frac{a^2(T)V}{2\beta T} = \frac{H_c^2(T)V}{8\pi T} \sim \frac{VN(0)T_c^2}{T} \frac{(T-T_c)^2}{T_c^2},$$

где $N(0)$ — плотность состояний на поверхности Ферми с данной проекцией спина. Введя характерное расстояние между энергетическими уровнями $\delta\varepsilon \sim (N(0)V)^{-1}$ и учитывая $T \sim T_c$, приходим к следующей ширине размытия области сверхпроводящего перехода:

$$\tau_c = \frac{|T - T_c|}{T_c} \sim \sqrt{\frac{\delta\varepsilon}{T_c}}$$

Если $\tau_c \ll 1$, то ширина размытия области перехода относительно невелика, и в области температур $\tau_c \ll |T - T_c|/T_c \ll 1$ приближенно можно пользоваться формулами теории функционала Гinzбурга-Ландау.

3.4.3. Основы теории критических явлений

3.4.20. Статистическая сумма Z определяется выражением

$$Z = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} e^{\frac{i}{T} \sigma_1 \mu_1 + \frac{i\theta}{T} \sigma_1} \sigma_2 \frac{i}{T} \sigma_2 \dots \frac{i\theta}{T} \sigma_N \dots e^{\frac{i}{T} \sigma_N \mu_N + \frac{i\theta}{T} \sigma_N}$$

Введем матрицу

$$T_{\sigma_1 \sigma_2} = e^{\frac{i}{T} \sigma_1 \mu_1 + \frac{i\theta}{T} \sigma_1} = \begin{pmatrix} e^{i/T + \mu_1/T} & e^{-i/T} \\ e^{-i/T} & e^{i/T - \mu_1/T} \end{pmatrix}$$

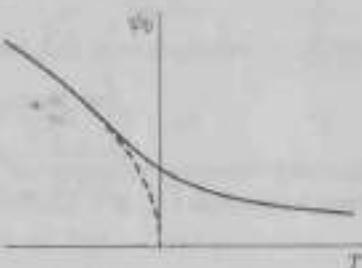


Рис. 3.11. Зависимость сверхпроводящего параметра порядка от температуры для гранулы (сплошная линия). Пунктирной линией показан случай массивного сверхпроводника

Тогда статистическая сумма Z записывается как

$$Z = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} T_{\sigma_1 \sigma_2} T_{\sigma_2 \sigma_3} \dots T_{\sigma_N \sigma_1} = \text{Tr } T^N = \lambda_m^N,$$

где λ_m — максимальное собственное число матрицы T :

$$\lambda_m = e^{U/T} \cosh \frac{\mu H}{T} + e^{-U/T} \sqrt{1 + e^{U/T} \sinh^2 \frac{\mu H}{T}}.$$

Выбирая только максимальное значение, мы подразумеваем макроскопический предел $N \gg 1$. Свободная энергия равна

$$F(T, H) = -NT \ln \lambda_m(T, H).$$

В нулевом магнитном поле теплоемкость равна

$$C(T) = N \frac{(J/T)^2}{\cosh^2(J/T)}$$

и непрерывна как функция температуры. Последнее указывает на отсутствие фазового перехода при конечной температуре.

Далее находим магнитный момент $M = -\partial F / \partial H$ и восприимчивость $\chi = \partial M / \partial H$:

$$M = \mu N \frac{\sinh(\mu H/T)}{\sqrt{e^{-U/T} + \sinh^2(\mu H/T)}},$$

$$\chi = \frac{\mu^2 N}{T} \frac{e^{-U/T} \cosh(\mu H/T)}{\left[e^{-U/T} + \sinh^2(\mu H/T) \right]^{3/2}}.$$

Высокотемпературный предел $T \gg |J|$ дает результат для свободных спинов $M = \mu N \tanh(\mu H/T)$. Низкотемпературное поведение зависит от знака J . Для ферромагнитной цепочки ($J > 0$) при $T \rightarrow 0$ имеем насыщение: $M = \mu N$. Для антиферромагнитной цепочки ($J < 0$) поведение при $T \rightarrow 0$ зависит от величины магнитного поля. Пока $\mu H < 2|J|$, полный магнитный момент $M = 0$. При $\mu H > 2|J|$ все спины выстраиваются в одном направлении: $M = \mu N$. Восприимчивость в нулевом поле, равная

$$\chi(T) = \frac{\mu^2 N}{T} e^{U/T},$$

при $T \rightarrow 0$ расходится, если $J > 0$, и зануляется, если $J < 0$.

3.4.21. В обозначениях предыдущей задачи коррелятор спинов в узлах m и n можно представить в виде

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = Z^{-1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} T_{\sigma_1 \sigma_2} \dots T_{\sigma_{n-1} \sigma_n} \sigma_m T_{\sigma_n \sigma_{n+1}} \dots$$

$$\dots T_{\sigma_{m-1} \sigma_m} \sigma_n T_{\sigma_n \sigma_{n+1}} \dots T_{\sigma_N \sigma_1} = Z^{-1} \text{Tr}(T^{n-1} S T^{m-n} S T^{N-n+1}).$$

Матрицы T и S имеют вид (для кратности положим $\alpha = J/T$)

$$T_{\sigma\sigma'} = e^{i\sigma\sigma'} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & e^{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_{\sigma\sigma'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В представлении, где матрица T диагональна, т.е.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad \lambda_+ = 2 \cos \alpha, \quad \lambda_- = 2 \sin \alpha,$$

матрица S принимает вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Перемножая матрицы и вычислив след, найдем

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = -Z^{-1} \text{Tr} \left[\left(\begin{pmatrix} \lambda_+^{N-m} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^{m-n} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{m-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^{N-m+n} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-m+n} \end{pmatrix} \right) \right].$$

В результате получим

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = \frac{\lambda_+^{N-1(m-n)} \lambda_-^{m-n} + \lambda_-^{N-1(m-n)} \lambda_+^{m-n}}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \rightarrow \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{m-n},$$

где в последнем равенстве мы учили предел $N \rightarrow \infty$. Окончательно с учетом симметрии $m \leftrightarrow n$ имеем

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = \left(\tanh \frac{J}{T} \right)^{|m-n|} = (\text{sgn } J)^{|m-n|} e^{-|m-n|/k(T)}.$$

Корреляционная длина $\xi(T)$ равна

$$\xi(T) = -1 / \ln \tanh(J/T) = \begin{cases} \frac{e^{J/T}}{2}, & T \ll |J|, \\ \frac{1}{\ln(T/|J|)}, & T \gg |J|. \end{cases}$$

При высоких температурах корреляционная длина не превышает расстояния между ближайшими спинами. С понижением температуры $\xi(T)$ неограниченно возрастает, обращаясь в бесконечность при нулевой температуре. Тем самым, дальний порядок, ферромагнитный, когда $\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = 1$, или антиферромагнитный, когда $\langle \sigma_m \sigma_n \rangle = (-1)^{|m-n|}$, возникает только при $T = 0$.

3.4.22. Пусть в данной случайной реализации цепочки Изинга из полного числа $N = N_1 + N_2$ обменных констант, N_1 констант имеют значение J_1 , а N_2 констант — значение J_2 . Используя рассмотрение двух предыдущих задач, найдем статистическую сумму Z , отвечающую данной реализации констант:

$$Z = \text{Tr}(T^{N_1} T^{N_2}) = \text{Tr}(\lambda_{1+}^{N_1} \lambda_{2+}^{N_2} + \lambda_{1-}^{N_1} \lambda_{2-}^{N_2}),$$

где матрица T и ее собственные значения λ_+ и λ_- разны

$$T = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & e^{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \lambda_+ = 2 \cosh \alpha, \quad \alpha = \alpha_{1,2} = \frac{J_1 z}{T},$$

В макроскопическом пределе $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ следует ограничиться только максимальными значениями λ_{1+} и λ_{2+} . Тогда свободная энергия равна

$$F(N_1, N_2) = -T(N_1 \ln \lambda_{1+} + N_2 \ln \lambda_{2+}) = -NT \left(\frac{N_1}{N} \ln \lambda_{1+} + \frac{N_2}{N} \ln \lambda_{2+} \right).$$

Усреднив по всем случайным реализациям, найдем среднюю свободную энергию $F = \langle F(N_1, N_2) \rangle$ и среднюю теплоемкость $C(T) = -T(\partial^2 F / \partial T^2)$:

$$F = -NT(p_1 \ln \lambda_{1+} + p_2 \ln \lambda_{2+}),$$

$$\frac{C(T)}{N} = \frac{p_1^2 \alpha_1^2 + p_2^2 \alpha_2^2 + p_1 p_2 [(p_1^2 + p_2^2) \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 - 2 p_1 p_2 \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2]}{(p_1 \cosh \alpha_1 + p_2 \cosh \alpha_2)^2}.$$

3.4.23. Для вычисления статистической суммы Z представим гамильтониан системы в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2 - \mu \sum_{i=1}^N \sigma_i H$$

и воспользуемся формулой

$$e^{t^2/4a} = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{-am^2 + bm} \quad (a > 0)$$

для линеаризации квадратичного члена с суммой по спинам. Обозначая через вектор σ все возможные состояния системы, имеем

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} e^{-\beta \mathcal{H}/T} = \left(\frac{JN}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm \sum_{\sigma} e^{\left[-\frac{JN}{2T} m^2 + \frac{(\mu + \mu H)}{T} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right]} = \\ &= \left(\frac{JN}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{-\frac{JN}{2T} m^2} \prod_{i=1}^N \sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{\left(\frac{\mu + \mu H}{T} \sigma_i \right)} = \\ &= \left(\frac{JN}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{-\frac{JN}{2T} m^2} \left(2 \cosh \frac{(\mu + \mu H)}{T} \right)^N = \left(\frac{JN}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{-\frac{JN}{2T} m^2}. \end{aligned}$$

где функция $f(m)$ равна

$$f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{T}{J} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta m + \mu H}{T} \right) \right]$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ основной вклад в Z дает окрестность точки $m = m_0(T, H)$, где $f(m)$ минимальна. Условие $\partial f(m)/\partial m = 0$ дает самосогласованное уравнение:

$$m_0 = \tanh \frac{\beta m_0 + \mu H}{T}$$

В нулевом магнитном поле $H = 0$ при $T > J$ уравнение имеет только тривиальное решение $m_0 = 0$, а при $T < J$ возникает нетривиальное решение с $m_0 \neq 0$, которое вблизи $T = J$ принимает вид $m_0 = [3(T - J)/J]^{1/2}$ и стремится к $m_0 = 1$ при $T = 0$. В слабом магнитном поле $H \rightarrow 0$ при $T > J$ значение m_0 подчиняется закону Кюри:

$$m_0 = \frac{\mu H}{T - J}$$

Свободная энергия, отнесенная к одному спину, приближенно равна

$$\frac{F(T, H)}{N} \approx \frac{J}{2} m_0^2 - T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta m_0 + \mu H}{T} \right) \right]$$

Чтобы проиллюстрировать физический смысл параметра m , пронтерпретируем представление Z как статистическую сумму системы с гамильтонианом

$$H[m, \sigma] = \frac{JN}{2} m^2 - (Jm + \mu H) \sum_{i=1}^N \sigma_i,$$

$$Z = \left(\frac{JN}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dm \sum_{\sigma} e^{-H[m, \sigma]/T}.$$

Соответствующая эффективная свободная энергия в зависимости от m равна

$$F[m] = -T \ln \sum_{\sigma} e^{-H[m, \sigma]/T},$$

Вычислив минимум $F[m]$ по отношению к параметру m , из условия $\partial F[m]/\partial m = 0$ получаем соотношение

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_i e^{-H[m, \sigma]/T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle,$$

Поскольку $\langle \sigma_i \rangle$ есть термодинамическое среднее значение спина на узле i , то параметр μ имеет смысл средней намагниченности в системе. Кроме того, уравнение, определяющее $m_0(T, H)$, совпадает с уравнением для намагниченности в теории самосогласованного (среднего) поля. Следовательно, для рассмотренной модели с бесконечным радиусом взаимодействия приближение самосогласованного (среднего) поля является точным.

3.4.24. Выше точки сверхпроводящего перехода T_c в нормальной фазе можно пренебречь в первом приближении членом четвертого порядка в функционале Гинзбурга–Ландсау:

$$\Delta F[\psi(x), \psi^*(x)] = \int dx \left[\frac{\gamma}{2} |\partial \nabla \psi|^2 + a(T) |\psi|^2 \right].$$

Здесь $a(T) = \alpha\tau$, где $\tau = (T - T_c)/T_c$ — близость к точке перехода. Вычисление удобно проводить в фурье-представлении:

$$\psi(x) = \sum_k \psi_k e^{ikx},$$

в котором функционал приобретает вид

$$\Delta F = \sum_k \left(\alpha\tau + \frac{\gamma h^2 k^2}{2} \right) |\psi_k|^2.$$

Термодинамический потенциал $\Delta F = -T \ln Z$, где статистическая сумма Z является суммой по бесконечному числу реализаций поля параметра порядка $\psi(x)$. Перебор всех возможных фурье-компонент ψ_k эквивалентен перебору всех возможных реализаций поля $\psi(x)$:

$$Z = \sum_{\text{Re } \psi_k, \text{Im } \psi_k} e^{-\sum_k \frac{\alpha\tau + \gamma h^2 k^2 / 2}{T} |\psi_k|^2} = \prod_k \sum_{\text{Re } \psi_k, \text{Im } \psi_k} e^{-\sum_k \frac{\alpha\tau + \gamma h^2 k^2 / 2}{T} |\psi_k|^2}.$$

Вычисляя в данном произведении значение суммы с фиксированным k , найдем

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Re } \psi_k, \text{Im } \psi_k} e^{-\sum_k \frac{\alpha\tau + \gamma h^2 k^2 / 2}{T} |\psi_k|^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\text{Re } \psi_k) \int_{-\infty}^{\infty} d(\text{Im } \psi_k) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha\tau + \gamma h^2 k^2 / 2}{T} ((\text{Re } \psi_k)^2 + (\text{Im } \psi_k)^2) \right] = \frac{\pi T}{\alpha\tau + \gamma h^2 k^2 / 2}. \end{aligned}$$

Окончательно, получаем выражение для статистической суммы:

$$Z = \prod_{\mathbf{k}} \frac{\pi T}{\alpha\tau + \gamma\hbar^2 k^2/2}$$

и тогда термодинамический потенциал равен

$$\Delta F = -T \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi T}{\alpha\tau + \gamma\hbar^2 k^2/2} \approx -T_c \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi T_c}{\alpha\tau + \gamma\hbar^2 k^2/2}$$

Поскольку из дальнейшего будет видно, что наиболее сингулярное поведение связано с областью малых волновых векторов \mathbf{k} и малостью от, то в остальных местах выражение для ΔF можно пренебречь различием между T и T_c . Тогда сингулярная поправка в теплоемкость $C = -T \partial(\Delta F) / \partial T^2$, обусловленная флуктуациями параметра порядка, будет равна

$$\delta C_{\text{sing}}(\tau) = -T_c^{-1} \frac{\partial^2(\Delta F)}{\partial \tau^2} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\alpha^2}{(\alpha\tau + \gamma\hbar^2 k^2/2)^2} = \int \frac{V_d d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2\alpha/\gamma\hbar^2)^2}{(k^2 + 2\alpha\tau/\gamma\hbar^2)^2},$$

где $V_d = L^d$ — объем в пространстве размерности d . Вычисление интеграла дает следующую сингулярную поправку в теплоемкость при $d < 4$:

$$\delta C_{\text{sing}}(\tau) = \frac{V_d S_d}{(2\pi)^d} \frac{\pi(2-d)}{4 \sin(\pi d/4)} \left(\frac{2\alpha}{\gamma\hbar^2} \right)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{4-d}{2}} \sim \frac{1}{\tau^{4-d/2}},$$

где S_d — поверхность d -мерной сферы. При $d = 4$ особенность поправки — логарифмическая $\delta C_{\text{sing}} \sim \ln(1/\tau)$. В размерности $d > 4$ особенности вообще не возникает, и роль флюктуаций параметра порядка не существенна.

В обычной размерности $d = 3$

$$\delta C_{\text{sing}}(\tau) = \frac{V}{8\pi} \left(\frac{2\alpha}{\gamma\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{3/2}$$

Сравнивая эту величину со скачком теплоемкости, возникающим при полном пренебрежении пространственными флюктуациями параметра порядка

$$\Delta C = \frac{V\alpha^2}{\beta T_c},$$

где β — коэффициент при $|\psi|^4$, овеним число Гинзбурга—Ландаука

$$\tau_{\text{GL}} = \text{Gi} = \frac{\sigma^2 T_c^2}{8\pi^2 \alpha (\gamma\hbar^2)^3}$$

3.4.25. Для решения задачи удобно ввести угловые переменные

$$S_r^x = \cos \varphi_r \quad \text{и} \quad S_r^y = \sin \varphi_r,$$

в которых гамильтониан примет вид

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle r, a \rangle} \cos(\varphi_r - \varphi_{r+a}).$$

Представим коррелятор спинов в виде

$$\langle \mathbf{S}_r \mathbf{S}_{r+a} \rangle = \langle e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} \rangle = Z^{-1} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} (\prod d\varphi_k) e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} e^{\frac{i}{k} \sum_{\langle r, k \rangle} \cos(\varphi_r - \varphi_{r+k})},$$

где Z — статистическая сумма:

$$Z = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} (\prod d\varphi_k) e^{\frac{i}{k} \sum_{\langle r, k \rangle} \cos(\varphi_r - \varphi_{r+k})}.$$

Рассмотрим сначала область высоких $T \gg J$ температур и коррелятор между ближайшими соседними спинами в узлах r и $r+a$. При $T \gg J$ экспоненту в формулах, приведенных выше, можно разложить в ряд, и мы ограничимся членами ряда по $J/T \ll 1$ не выше линейного. Принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{i\varphi_k} \equiv 0,$$

убеждаемся в том, что в коррелятор между ближайшими соседними спинами в узлах r и $r+a$ из всей суммы по узлам ненулевой вклад внесет только слагаемое с $k = r$. Поэтому

$$\langle e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} \rangle \approx \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\varphi_r e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} \cos(\varphi_r - \varphi_{r+a}) = \frac{J}{T}.$$

В пределе высоких температур мы ожидаем быстрое спадание корреляции в направлении спинов с ростом расстояния между ними, и в первом приближении мы можем пренебречь какой-либо корреляцией между исходным спином и спином, следующим за ближайшим соседним спином. Тогда приближение можно записать

$$\langle e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} \rangle \approx \langle e^{i(\varphi_r - \varphi_{r+a})} \rangle \langle e^{i(\varphi_{r+1} - \varphi_{r+1+a})} \rangle \cdots \langle e^{i(\varphi_{(r+a)-1} - \varphi_{(r+a)-1+a})} \rangle,$$

где следует взять кратчайший путь от узла t к узлу $t+n$. Окончательно

$$\langle \mathbf{S}_t \mathbf{S}_{t+n} \rangle \sim (J/2T)^n = e^{-\beta n k T / D} \quad (T \gg J),$$

т. е. коррелятор спадает экспоненциально с расстоянием между спинами, и корреляционный радиус $\xi \sim 1/\ln(2T/J) \ll 1$.

В пределе низких температур $T \ll J$ энергетически выгодно максимальное значение $\cos(\varphi_t - \varphi_{t+n})$, или чтобы φ_t медленно менялось на расстоянии между двумя соседними узлами. Другими словами, корреляционный радиус должен быть гораздо больше периода решетки. В этих условиях можно использовать приближение

$$\cos(\varphi_t - \varphi_{t+n}) \approx 1 - \frac{(\varphi_t - \varphi_{t+n})^2}{2}.$$

Далее опуская единицу, которая приводит к сдвигу уровня отсчета энергии, и используя приближение

$$\sum_s (\varphi_t - \varphi_{t+s})^2 \approx a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2,$$

где a — постоянная решетки, приходим к эквивалентному гамильтониану

$$H = \frac{J}{2} \int (\nabla \varphi)^2 dx dy$$

с учетом правила перехода от суммы по узлам к интегралу по площади

$$a^2 \sum_t \rightarrow \int dx dy.$$

В параметризации $n_x = \cos \varphi$ и $n_y = \sin \varphi$ имеем $n^2 = 1$ и

$$H = \frac{J}{2} \int (\nabla n)^2 dx dy.$$

Распределение Гиббса с гамильтонианом $H[\varphi(r)]$ является гауссовым, и можно воспользоваться соотношением

$$\langle e^{i\varphi(r) - i\varphi(r')} \rangle = e^{-\beta(kT - \langle \varphi(r) - \varphi(r') \rangle)^2/2}$$

для средних величин, распределенных по Гауссу. Среднее значение

$$\frac{1}{2} \langle |\varphi(r) - \varphi(r')|^2 \rangle = \langle \varphi^2(r) \rangle - \langle \varphi(r) \varphi(r') \rangle$$

можно вычислить, используя фурье-представление

$$\varphi(r) = \sum_q \varphi_q e^{iqr} \quad (\varphi_q^* = \varphi_{-q}).$$

в котором коррелятор имеет вид

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') \rangle = \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} (\varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}'}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

и тем самым он диагонален по $\varphi_{\mathbf{q}}$:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} J q^2 |\varphi_{\mathbf{q}}|^2.$$

В нашем случае распределение Гиббса $\sim \exp(-H/T)$ представляет собой гауссовское распределение для флюктуирующей величины $\varphi_{\mathbf{q}}$. В результате это дает

$$\langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}'} \rangle = \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \delta_{-\mathbf{q}\mathbf{q}'} \quad \text{и} \quad \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \frac{T}{J q^2}.$$

В итоге мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')|^2 \rangle &= \sum_{\mathbf{q}} \frac{T}{J q^2} (1 - e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}) = \\ &= \frac{T}{J} \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi q^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (1 - e^{iq(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cos \theta}) = \frac{T}{2\pi J} \int_0^\infty dq \frac{1 - J_0(q|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{q}. \end{aligned}$$

Интегрирование по углу θ выдало нам функцию Бесселя нулевого индекса $J_0(x)$. Интеграл по q расходится на больших волновых векторах логарифмически. Расходимость связана с неприменимостью континуального приближения на больших $q \sim 1/a$, с которыми связаны быстрые изменения поля φ на масштабах порядка периода решетки a . Поэтому мы должны устранить расходимость интеграла на волновом векторе $q \sim 1/a$. Это дает следующую оценку для среднего значения:

$$\frac{1}{2} \langle |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')|^2 \rangle \approx \frac{T}{2\pi J} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a}$$

и, соответственно, степенное поведение корреляционной функции с бесконечным радиусом корреляции в низкотемпературной области $T \ll J$.

$$\langle \mathbf{S}_r \mathbf{S}_{r'} \rangle = \langle e^{i(\varphi_r - \varphi_{r'})} \rangle = \left(\frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)^{T/2\pi J}.$$

Из вида коррелятора спинов можно заключить, что в XY-модели, строго говоря, нет спонтанного спинового упорядочения. В противном случае из того, что при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ коррелятор спинов расщепляется $\langle \mathbf{S}_r \mathbf{S}_{r'} \rangle = \langle \mathbf{S}_r \rangle \langle \mathbf{S}_{r'} \rangle$ и обращается в нуль, следует $\langle \mathbf{S}_r \rangle = 0$. С другой



стороны, по мере уменьшения температуры в области $T \sim J$ должно происходить изменение поведения коррелятора от экспоненциального к степенному. Согласно гипотезе подобия или теории скейлинга в точке фазового перехода корреляционная функция имеет степенную зависимость от расстояния, причем для размерности пространства $d = 2$ должно быть

$$\langle S_r S_{r'} \rangle \sim |r - r'|^{-\eta}.$$

Это соответствует критическому индексу Фишера, зависящему от температуры, т. е. $\eta = T/2\pi J$. Наивысшая температура $T_{\text{БК}} \sim J$, при которой экспоненциальное спадание коррелятора сменяется на степенное, соответствует специальному фазовому переходу, который называется переходом Березинского-Костлериши-Таулеса.

3.4.26. Масштабная размерность плотности термодинамического потенциала равна размерности пространства d , т. е. трем. Поэтому из размерности ρ, ψ имеем соотношение $\Delta_\rho + 2\Delta_\psi = 3$. Так как согласно

$$\nabla_\lambda = -\frac{i\hbar}{2m_1} \frac{\psi' \nabla \psi - (\nabla \psi)'}{|\psi|^2}$$

масштабные размерности ψ сокращаются, то масштабная размерность ψ , равна $\Delta_\psi = 1$ и, следовательно, $\Delta_\rho = 1$. Последнее означает, что $\rho_s \sim \xi^{-1}$, где $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ — корреляционный радиус, имеющий ту же масштабную размерность $\Delta_\xi = 1$. Отсюда $\rho_s \sim \tau^\nu$ и, используя скейлинговое соотношение $\alpha d = 2 - \nu$, окончательно получим критическое поведение $\rho_s \sim (-\tau)^{(2-\nu)/3}$ ($\tau < 0$) с индексом $(2 - \nu)/3$.

3.4.27. При подходе к точке фазового перехода характерный масштаб флуктуаций параметра порядка φ неограниченно возрастает. Длинноволновые флуктуации φ описываются самодельтонином Ландау

$$H = H[\varphi_q; q_0] = \int dx \left[\frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \frac{\tau_0 \varphi^2}{2} + g_0 \varphi^4 \right],$$

в котором поле $\varphi(x)$ слажено. Сглаженность означает, что в фурье-разложении

$$\varphi(x) = \sum_{q < q_0} \varphi_q e^{iqx}$$

отсутствуют гармоники с большими волновыми векторами $q \geq q_0$. Решение проблемы сводится к анализу статистической суммы

$$Z = \text{Tr } e^{-H} = \int \prod_{q < q_0} d\varphi_q e^{-H[\varphi_q; q_0]},$$

представляющей собой многомерный интеграл по всем значениям $\varphi_{\mathbf{q}}$, изменяющимся в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Прямое вычисление интеграла представляет собой затруднительную задачу.

Интегрирование по части импульсов в интервале волновых векторов $\lambda q_0 < q_0$ ($\lambda < 1$) или сглаживание S_λ приводит к новому эффективному гамильтониану $H_\lambda = S_\lambda H$, который следует определить согласно

$$e^{-S_\lambda H} = \int \prod_{\lambda q_0 < q < q_0} d\varphi_{\mathbf{q}} e^{-H[\varphi_{\mathbf{q}}, \mathbf{p}_{\mathbf{q}}]},$$

и, соответственно, разделить поле $\varphi(\mathbf{x})$ на медленную $\varphi_0(\mathbf{x})$ и быструю $\varphi_1(\mathbf{x})$ части:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x}),$$

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \sum_{q < \lambda q_0} \varphi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \quad \text{и} \quad \varphi_1(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda q_0 < q < q_0} \varphi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}.$$

Согласно гипотезе подобия гамильтониан $H_\lambda = S_\lambda H$ должен иметь ту же структуру, что и исходный гамильтониан H , а в самой точке фазового перехода не изменяться.

Для сравнения $H_\lambda = S_\lambda H$ и исходного гамильтониана H необходимо произвести обратное изменение пространственного масштаба до прежнего размера:

$$q \rightarrow q' = \lambda^{-1} q,$$

и одновременное преобразование масштаба или растяжение D_λ поля параметра порядка $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi_{\mathbf{q}} \rightarrow \varphi'_{\mathbf{q}'} = Z_\lambda^{-1} \varphi_{\lambda q'} = Z_\lambda^{-1} \varphi_q.$$

Растяжение D_λ преобразует гамильтониан H , в котором изменяет волновой вектор в λ^{-1} раз, длину в λ раз, и поля в Z_λ раз:

$$D_\lambda H[\varphi_{\mathbf{q}}, q_0] = H[Z_\lambda \varphi_{\lambda^{-1} q}, \lambda^{-1} q_0] = H'[\varphi'_{\mathbf{q}}, \lambda^{-1} q_0],$$

Последовательное применение сглаживания S_λ и растяжения D_λ называется ренормировкой гамильтониана: $R_\lambda = D_\lambda S_\lambda$. Ренормированный гамильтониан

$$R_\lambda H[\varphi_{\mathbf{q}}, q_0] = H[Z_\lambda \varphi_{\lambda^{-1} q}, \lambda^{-1} q_0] = H'[\varphi'_{\mathbf{q}}, q_0]$$

описывает флуктуации нового поля в неизменной области волновых векторов $q < q_0$. Если система находится в точке фазового перехода, то ренормированный гамильтониан не должен изменяться и зависеть от

выбора волнового вектора q_0 . В противном случае после многократного ренормированием мы придем к достаточно большим масштабам (малые λq_0), которые превышают корреляционную длину и отвечают некоррелированным гауссовым флуктуациям поля φ .

Рассмотрим ренормирование гамильтониана свободного поля H_0 в пространстве размерностью d :

$$H_0[\varphi_q, q_0] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (q^2 + \tau_0) |\varphi_q|^2 \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$$

Так как φ_q с разными q не взаимодействуют друг с другом, то слагивание сводится к появлению постоянного слагаемого, возникавшего при интегрировании по φ_q в интервале векторов от λq_0 до q_0 и приводящего к сдвигу отсчета энергии:

$$S_\lambda H_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (q^2 + \tau_0) |\varphi_q|^2 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda q < q < q_0} \ln \frac{q^2 + \tau_0}{\tau_0}$$

Постоянное слагаемое, как несущественное и не зависящее от φ , мы опускаем. Ренормированный гамильтониан будет равен

$$R_\lambda H[\varphi_q, q_0] = \frac{\lambda^d Z_1^0}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda^2 q^2 + \tau_0) |\varphi_q|^2 \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$$

Для гамильтониана свободного поля точка $q_0 = 0$ — точка фазового перехода. В этой точке ренормированный гамильтониан не изменяется, если мы выберем

$$Z_\lambda = \lambda^{-(d+2)/2}$$

При этом τ_0 преобразуется по закону

$$\tau_0 \rightarrow \tau'_0 = \lambda^{-1} \tau_0$$

соответствуя масштабной размерности $\Delta_\tau^0 = 2$.

Рассмотрим теперь гамильтониан Ландау $H = H_0 + H_i$, где H_i — гамильтониан взаимодействия:

$$H_i = g_0 \int \varphi^4(x) dx = g_0 \iiint_{q_1, q_2, q_3 < q_0} \varphi_{q_1} \varphi_{q_2} \varphi_{q_3} \varphi_{-q_1 - q_2 - q_3} \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_3}{(2\pi)^d}$$

Его прямое интегрирование затруднительно из-за членов с взаимодействием φ^4 , поэтому интегрирование мы проводим по теории возмуще-

ний, выбрав в качестве нулевого приближения гамильтониан свободного поля H_0 . Воспользуемся тождеством

$$e^{-S_\lambda H} = \frac{\int \prod_{\lambda \varphi_0 < q < \varphi_0} d\varphi_q e^{-H_q} e^{-H_0}}{\int \prod_{\lambda \varphi_0 < q < \varphi_0} d\varphi_q e^{-H_q}} \int \prod_{\lambda \varphi_0 < q < \varphi_0} d\varphi_q e^{-H_0} = \langle e^{-H_0} \rangle_0 e^{-S_\lambda H_0}$$

и представим сложенный гамильтониан как

$$S_\lambda H = S_\lambda H_0 - \ln \langle e^{-H_0} \rangle_0.$$

Вычисление последнего слагаемого проводим в виде разложения в ряд по константе взаимодействия g_0 , предполагая ее малой.

$$\langle e^{-H_0} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{g_0^n}{n!} \left\langle \left[\int d\mathbf{x} (\varphi_0(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x}))^4 \right]^n \right\rangle_0.$$

Сглаживание не затрагивает медленную компоненту $\varphi_0(\mathbf{x})$, которая играет при вычислениях роль внешнего параметра. Мы ограничимся здесь только первым и вторым порядком по константе взаимодействия g_0 .

$$\langle e^{-H_0} \rangle_0 = 1 - g_0 ((\varphi_0 + \varphi_1)^4)_0 + \frac{g_0^2}{2} ((\varphi_0 + \varphi_1)^4 (\varphi_0' + \varphi_1')^4)_0 + \dots$$

Для краткости мы опустили знаки интеграла. Рассмотрим первый порядок:

$$\begin{aligned} ((\varphi_0 + \varphi_1)^4)_0 &= \varphi_0^4 + 4\varphi_0^3(\varphi_1)_0 + 6\varphi_0^2(\varphi_1^2)_0 + 4\varphi_0(\varphi_1^3)_0 + (\varphi_1^4)_0 = \\ &= \varphi_0^4 + 6\varphi_0^3 G_\lambda + G_\lambda^{(2)}, \quad G_\lambda = \langle \varphi_1^2 \rangle_0 \quad \text{и} \quad G_\lambda^{(2)} = \langle \varphi_1^4 \rangle_0. \end{aligned}$$

Члены с нечетным числом φ_1 обнуляются. Итак, в первом порядке по g_0 имеем

$$S_\lambda H = S_\lambda H_0 - g_0 \int d\mathbf{x} [\varphi_0^4(\mathbf{x}) + 6\varphi_0^3(\mathbf{x})G_\lambda + G_\lambda^{(2)}].$$

Последний член, независящий от φ_0 , представляет собой непринципиальный сдвиг уровня энергии и может не рассматриваться. Второй член означает сдвиг τ_0 , т. е. температуры фазового перехода:

$$\tau_0 \rightarrow S_\lambda \tau_0 = \tau_0 + \delta \tau_0 = \tau_0 + 12g_0 G_\lambda + O(g_0^2).$$

В точке фазового перехода должно быть $\tau^* = \tau_0 + \delta \tau_0 = 0$. Константа взаимодействия в первом порядке остается той же самой

$$g_0 \rightarrow S_\lambda g_0 = g_0 + O(g_0^2),$$

и для определения ее сдвига необходимо рассмотреть второй порядок теории возмущений. Рассматривая в разложении логарифма $\ln(e^{-H})_0$ члены, пропорциональные $g_0^2 K_\lambda$, найдем

$$g_0 \rightarrow S_\lambda g_0 = g_0 - 36g_0^2 K_\lambda,$$

где неприводимый коррелатор K_λ дается соотношением

$$K_\lambda = \frac{1}{2} [\langle (\varphi_1^2(\mathbf{x}) \varphi_1^2(\mathbf{x}'))_0 - \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}') \rangle_0].$$

Растяжение D_λ дает следующие преобразования для τ_0 :

$$D_\lambda \tau_0 = Z_\lambda^2 \lambda^d = \lambda^{-\epsilon} \tau_0$$

и для g_0 :

$$D_\lambda g_0 = Z_\lambda^{\epsilon} \lambda^{d-\epsilon} = \lambda^{d-\epsilon} g_0 \quad (d = 4 - \epsilon).$$

Последнее соотношение легко увидеть из представления члена с взаимодействием в виде трехкратного интеграла по волновым векторам. Размерность $d = 4$ в некотором смысле выделена, и в дальнейшем мы считаем $\epsilon \ll 1$.

Ниже мы будем интересоваться волновыми векторами медленной компоненты, гораздо меньшими быстрой компоненты ($\lambda \ll 1$), и для упрощения можно положить волновые векторы медленного поля равными нулю, т.е. рассматривать компоненту $\varphi_0(\mathbf{x})$, как приближенно постоянную величину. Для вычисления K_λ можно воспользоваться следующим соотношением для средних от гауссовых интегралов:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}) \varphi_1^2(\mathbf{x}') \rangle_0 = \\ & = \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}) \rangle_0 \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}') \rangle_0 + 2 \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \langle \varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_1(\mathbf{x}') \rangle_0 \langle \varphi_1(\mathbf{x}') \varphi_1(\mathbf{x}) \rangle_0. \end{aligned}$$

Это соотношение можно получить из среднего для фурье-гармоник

$$\langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}'} \varphi_{-\mathbf{q}'} \rangle_0 = \langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \rangle_0 \langle \varphi_{\mathbf{q}'} \varphi_{-\mathbf{q}'} \rangle_0 + \langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \rangle_0^2 \delta_{\mathbf{q}', -\mathbf{q}} + \langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \rangle_0^2 \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'},$$

пользуясь независимостью фурье-гармоник

$$\langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}'} \rangle_0 = \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle_0 \delta_{\mathbf{q}', -\mathbf{q}} \quad (\varphi_{-\mathbf{q}} = \varphi_{\mathbf{q}}^*)$$

и соотношением $\langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^4 \rangle_0 = 3 \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle_0^2$. Итак,

$$K_\lambda = \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \langle \varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_1(\mathbf{x}') \rangle_0 \langle \varphi_1(\mathbf{x}') \varphi_1(\mathbf{x}) \rangle_0 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle_0 \langle |\varphi_{-\mathbf{q}}|^2 \rangle_0.$$

Выберем τ_0 таким образом, чтобы ренормированное τ_0 обратилось в нуль, и тем самым, чтобы система находилась в точке фазового перехода, т. е. $(\langle \varphi_q \rangle^2)_0 = 1/q^2$. Тогда

$$K_\lambda = \int_{A_{g_0}}^{S_d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_{A_{g_0}}^{S_d} \frac{dq}{q^{d+1}} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g_0^{-d} \frac{\lambda^{-d} - 1}{\epsilon},$$

где S_d — площадь сферы единичного радиуса в d -мерном пространстве. В первом приближении нам достаточно положить $\epsilon = 0$. Учитывая, что $S_d = 2\pi^d$, получим

$$K_\lambda = -\frac{1}{8\pi^2} \ln \lambda \quad \text{и} \quad S_d g_0 = g_0 + \frac{9}{2\pi^2} g_0^2 \ln \lambda + O(g_0^3).$$

Малый параметр, по которому ведется разложение, будет $g_0 \ln \lambda \ll 1$.

Ренормированное значение константы взаимодействия $g(\lambda) = R_\lambda g_0$ с учетом растяжения равно

$$g(\lambda) \approx \lambda^{-d} \left(g_0 + \frac{9g_0^2}{2\pi^2} \ln \lambda \right), \quad \text{или} \quad \ln g(\lambda) \approx \ln g_0 - d \ln \lambda + \frac{9g_0}{2\pi^2} \ln \lambda.$$

Дифференцируя по $\ln \lambda$, получим

$$\frac{d \ln g}{d \ln \lambda} = -d + \frac{9}{2\pi^2} g_0 + O(g_0^2).$$

В нашем приближении $g_0 \ll 1$. С точностью до первого порядка по g мы можем заменить g_0 на g и получить уравнение ренорм-группы

$$\frac{d \ln g}{d \ln \lambda} = f(g), \quad f(g) = -d + \frac{9}{2\pi^2} g + \dots$$

Функция $f(g)$ называется функцией Гелл-Манна-Лоу. Она была определена нами в нашем первом порядке разложения по константе взаимодействия g и, вообще говоря, подлежит дальнейшему вычислению и уточнению.

Неподвижную или фиксированную точку ренорм-преобразования g^* , в которой константа взаимодействия не меняется, находим из условия $f(g^*) = 0$:

$$g^* \approx g_0 = \frac{2\pi^2}{9} \epsilon \ll 1.$$

Малость $\epsilon \ll 1$ оправдывает наше приближение малой величины константы взаимодействия.

Масштабная размерность Δ_τ величины τ подразумевает, что τ при ее ренормировании R_λ подчиняется скейлинговому закону:

$$\tau \rightarrow \tau(\lambda) = R_\lambda \tau = \lambda^{-\Delta_\tau} \tau, \quad \text{или} \quad \frac{d \ln \tau(\lambda)}{d \ln \lambda} = -\Delta_\tau.$$

Найдем размерности величины τ вблизи неподвижной (фиксированной) точки g^* . Для этого нужно вычислить ренормированную величину τ с точностью до первого порядка по ϵ . Начнем с вычисления значения G_λ :

$$G_\lambda = \int d\mathbf{x} \tau_1^2(\mathbf{x}) = \int_{\lambda g_0 < q < q_0} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle |\varphi_1(\mathbf{q})|^2 \rangle = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_{\lambda g_0}^{q_0} \frac{q^{d-1} dq}{q^2 + \tau_0}$$

При вычислениях с точностью до первого порядка по ϵ достаточно положить $d = 4$. Тогда приближенно новая температура фазового перехода τ^* определяется из уравнения

$$0 = \tau^* + \frac{3}{2\pi^2} g_0 \int_{\lambda g_0}^{q_0} \frac{q^3 dq}{q^2 + \tau^*} = \tau^* + \frac{3}{2\pi^2} g_0 \int_{\lambda g_0}^{q_0} q \left(1 - \frac{\tau^*}{q^2 + \tau^*} \right) dq.$$

Ренормированное τ_0 нам дало уравнение

$$R_\lambda \tau_0 = \lambda^{-2} \left[\tau_0 + \frac{3}{2\pi^2} g_0 \int_{\lambda g_0}^{q_0} q \left(1 - \frac{\tau_0}{q^2 + \tau_0} \right) dq \right].$$

Однако, при анализе этого уравнения мы должны иметь в виду, что в результате учета взаимодействия флуктуаций произошел сдвиг точки фазового перехода из $\tau_0 = 0$ в новую точку $\tau_0 = \tau^*$, и, следовательно, нам уже нужно отсчитывать температуру от новой точки фазового перехода τ^* . То есть, мы должны рассмотреть ренормирование величины $\tau' = \tau_0 - \tau^*$. В результате в первом порядке по g_0 получим

$$\tau(\lambda) = R_\lambda \tau'_0 = \lambda^{-2} \left(\tau'_0 - \frac{3g_0}{2\pi^2} \tau'_0 \int_{\lambda g_0}^{q_0} \frac{q dq}{q^2} \right) = \lambda^{-2} \left(1 + \frac{3g_0}{2\pi^2} \ln \lambda \right) \tau'_0.$$

$$\ln \tau = \ln \tau_0 - 2 \ln \lambda + \ln \left(1 + \frac{3g_0}{2\pi^2} \ln \lambda \right) \approx \ln \tau_0 - \left(2 - \frac{3g_0}{2\pi^2} \right) \ln \lambda$$

Заменяя g_0 на g , получим уравнение ренорм-группы на величину τ :

$$\frac{d \ln \tau}{d \ln \lambda} = -\Delta_-(g), \quad \Delta_-(g) = 2 - \frac{3}{2\pi^2} g + \dots$$

Наконец, положив $g = g^* = 2\pi^2\epsilon/9$, найдем масштабную размерность величины τ в неподвижной (фиксированной) точке — точке фазового перехода

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{\epsilon}{3}.$$

Критический индекс ν для корреляционной длины $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ равен

$$\nu = \frac{1}{\Delta_\nu} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2),$$

что в интересующем нас случае $\epsilon = 1$ дает приближенное значение $\nu = 7/12 = 0,6$.

Пользуясь скейлинговым соотношением $d\nu = 2 - \alpha$ при $d = 4 - \epsilon$, находим в первом по ϵ приближении критический индекс для теплоемкости:

$$\alpha = \frac{\epsilon}{6}.$$

Критический индекс β параметра порядка $\varphi(x)$ найдем, пользуясь соотношением $\beta = \nu \Delta_\beta$. Выше мы нашли, что при масштабном преобразовании Fourier-компоненты параметра порядка φ_q умножается на множитель $Z_\lambda^{-1} = \lambda^{(d+2)/2}$. Соответственно, сам параметр порядка $\varphi(x)$ переходит в $Z_\lambda^{-1} \lambda^{-d/2} \varphi(x) = \lambda^{-(d-2)/2} \varphi(x)$ в силу $\varphi(x) = \int \varphi_q d^d q / (2\pi)^d$ и $q \rightarrow \lambda^{-1} q$. Таким образом, в нашем приближении масштабная размерность параметра порядка равна

$$\Delta_\beta = \frac{d-2}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Далее легко находим

$$\beta = \Delta_\beta \nu = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2).$$

Индекс восприимчивости γ можно определить из скейлингового соотношения $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$, и он равен

$$\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2).$$

Индекс Фишера ζ в линейном приближении по ϵ оказывается равным нулю, т. е. $\zeta = O(\epsilon^2)$. Дело в том, что в линейном приближении по ϵ или по ϵ коэффициент при $q^2 |\varphi_q|^2$ после слаживания S_1 , как мы видели, не меняется. Вместе с этим и масштабный коэффициент Z_λ остается тем же, что и для гамильтониана свободного поля, т. е. $Z_\lambda = \lambda^{-(d+2)/2}$. Соответственно, поведение коррелятора $K(x, x') = \langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle$ в точке фазового перехода не изменяется по сравнению со случаем гамильтониана свободного поля, для которого $K(x, x') \sim |x - x'|^{-(d-2)}$.

Итак,

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{7}{6}, \quad \nu = \frac{7}{12}, \quad \zeta = 0$$

в линейном ϵ -разложении при $\epsilon = 1$. Эти значения неплохо согласуются с экспериментом.

ДОПОЛНЕНИЯ

1. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА И ДРУГИЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

δ-Функция Дирака является обобщенной функцией (распределением) и определяется как линейный функционал на множестве так называемых основных¹⁾ (или «хороших») функций Φ . Если функция $f(x) \in \Phi$, то δ-функция определяется как функционал, ставящий в соответствие функции $f(x)$ ее значение в точке $x = 0$:

$$\delta[f(x)] = f(0). \quad (\text{Д.1})$$

При практических расчетах, как правило, достаточно ограничиться подходом, при котором δ-функция (не являющаяся функцией в обычном смысле) понимается, как ядро линейного интегрального оператора. В этом случае функциональные равенства (Д.1) переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{Д.2})$$

Таким образом, все вычисления с δ-функцией должны рассматриваться в интегральном смысле, как в формуле (Д.2). В остальном, соблюдая известную осторожность, с δ-функцией можно обращаться, как с обычной функцией.

¹⁾ Функции из пространства Φ должны обладать гораздо лучшими свойствами, нежели функции $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, которые обычно используются в квантовой механике. (Пространство L^2 квадратично интегрируемых функций представляет собой реализацию гильбертового пространства.) Примером конкретной реализации пространства Φ является пространство Шварца \mathcal{S} : пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, которые убывают вместе со своими производными на бесконечности быстрее любой степени $1/x$. Такие функции принято называть «хорошими» функциями.

Используя (Д.2), можно получить различные соотношения с участием δ -функции:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{Д.3})$$

$$x\delta(x) = 0, \quad (\text{Д.4})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0, \quad (\text{Д.5})$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad (\text{Д.6})$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (\text{Д.7})$$

где $f'(x_i) \neq 0$, x_i — простые (некратные) корни, n — число таких корней на всей оси x . На основе (Д.2) можно получить выражение для производной от δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx = -f'(0), \quad (\text{Д.8})$$

а также обобщение (Д.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Важными для приложений являются различные представления δ -функции в виде пределов последовательностей функций из пространства L^2 , например,

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{\pi x} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-K^2 x^2} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{K}{K^2 x^2 + 1}, \quad (\text{Д.9})$$

причем эти пределы понимаются также в интегральном смысле, т. е. переход к пределу осуществляется после вычисления интеграла согласно (Д.2).

Функции, находящиеся под знаками пределов в (Д.9) при достаточно больших, но конечных значениях K , характеризуются наличием резких положительных максимумов в точке $x = 0$, в то же время интегралы от этих функций по всей числовой прямой остаются равными единице. Это — примеры так называемых слаженных (физических или «размазанных») δ -функций, которые дают возможность получить наглядное представление о математической δ -функции.

Используя первое из равенств в (Д.9), нетрудно показать, что

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk. \quad (\text{Д.10})$$

Это — интегральное представление (фурье-разложение) δ -функции.

Обобщение δ -функции на трехмерный случай производится очевидным образом и дает соотношение

$$\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} dk, \quad (\text{Д.11})$$

где интегрирование ведется по всему \mathbf{k} -пространству. Важное значение имеет равенство

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r), \quad (\text{Д.12})$$

которое говорит о том, что $1/r$ является решением уравнения Пуассона с точечным источником (фундаментальным решением).

Еще одним примером обобщенной функции является ступенчатая функция или θ -функция Левисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{Д.13})$$

По аналогии с (Д.9) функцию $\theta(x)$ можно представить в виде предела

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right].$$

Важным для приложений является соотношение, понимаемое также в смысле (Д.2),

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad (\text{Д.14})$$

т. е. δ -функция является производной θ -функции.

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛУЦЕЛОГО ИНДЕКСА

Функции Бесселя с индексом $\nu = l + 1/2$, где $l = 0, 1, 2, \dots$, появляются при решении уравнения Шредингера методом разделения переменных в сферической системе координат. Обычно рассматриваются

функции следующих типов:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x) \quad (\text{Д.15})$$

— сферическая функция Бесселя;

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{-(l+1)/2}(x) \quad (\text{Д.16})$$

— сферическая функция Неймана;

$$h_l^{(1,2)}(x) = j_l(x) \pm i n_l(x) \quad (\text{Д.17})$$

— сферические функции Ханкеля 1-го и 2-го рода.

Эти функции являются решениями дифференциального уравнения

$$u_l''(x) + \left(1 - \frac{R_l^2 + 1}{x^2}\right) u_l(x) = 0$$

и обладают следующим асимптотическим поведением при $x \rightarrow \infty$:

$$j_l(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad n_l(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim -\cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (\text{Д.18})$$

$$h_l^{(1)}(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim x^{-l-1/2} e^{ix}, \quad h_l^{(2)}(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim x^{l+1} e^{-ix}. \quad (\text{Д.19})$$

Заметим, что в случае чисто мнимого аргумента ($x = i\rho$) только функция $h_l^{(1)}(x)$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. При малых значениях аргумента справедливы приближенные формулы

$$j_l(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq \frac{x^{l+1}}{(2l+1)!}, \quad n_l(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq -\frac{(2l-1)!}{x^l}, \quad (\text{Д.20})$$

где $(2l+1)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)$.

Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля можно выразить через элементарные функции, например,

$$j_0 = \sin x, \quad n_0 = -\cos x,$$

$$j_1 = \frac{\sin x}{x} - \cos x, \quad n_1 = -\frac{\cos x}{x} - \sin x,$$

$$h_0^{(1)} = -ie^{ix}, \quad h_0^{(2)} = ie^{-ix},$$

$$h_1^{(1)} = -\left(\frac{i}{x} + 1\right)e^{ix}, \quad h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x} - 1\right)e^{-ix}.$$

ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Вырожденная гипергеометрическая функция $F(a, c, x)$ определяется при помощи ряда

$$F(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{Д.21})$$

где a и c — некоторые константы, причем $c \neq -k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Эта функция является частным решением уравнения Куммера

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (c-x) \frac{dF}{dx} - aF = 0. \quad (\text{Д.22})$$

При $a \neq -n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция (Д.21) имеет следующую асимптотику при $x \rightarrow \infty$:

$$F(a, c, x)|_{x \rightarrow \infty} \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{a-c} e^x, \quad (\text{Д.23})$$

где $\Gamma(x)$ есть гамма-функция. Если $c \neq -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то второе линейно независимое решение уравнения Куммера (Д.22) может быть представлено в виде

$$\Phi(x) = x^{1-c} F(a-c+1, 2-c, x).$$

Возвращаясь к функции $F(a, c, x)$ (Д.21), заметим, что при выполнении условия $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) она превращается в полином степени n (происходит «обрыв» гипергеометрического ряда):

$$F(-n, c, x) = 1 - \frac{n}{c} \frac{x}{1!} + \frac{n(n-1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{c(c+1) \dots (c+n-1)} x^n.$$

Данный полином с точностью до общего множителя представляет собой присоединенный полином Лагерра, т. е.

$$F(-n, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} L_n^{c-1}(x). \quad (\text{Д.24})$$

причем

$$L_n^c(x) = e^x x^{-c} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{c+n}). \quad (\text{Д.25})$$

Для присоединенных полиномов Лагерра выполняется следующее условие ортонормированности:

$$\int_0^\infty L_n^c(x) L_k^c(x) e^{-x} x^k dx = n! \Gamma(c+k+1) \delta_{nk}. \quad (\text{Д.26})$$

4. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется при помощи интеграла

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re} x > 0 \quad (\text{Д.27})$$

и удовлетворяет следующим функциональным соотношениям:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{Д.28})$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = \Gamma(2x)\Gamma(1/2).$$

Если аргумент принимает целые значения, то из формулы (Д.28) следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (\text{Д.29})$$

и это означает, что гамма-функция является обобщением понятия факториала на случай произвольного комплексного аргумента.

Гамма-функция, определенная формулой (Д.27), является аналитической при всех значениях аргумента, кроме точек $x = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), в которых она имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными $(-1)^n/n!$.

Приведем некоторые конкретные значения гамма-функции:

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2.$$

При больших значениях аргумента $|z| \gg 1$ и при условии, что $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, (тем самым исключаются точки, в которых расположены полюсы Г-функции) асимптотическое поведение гамма-функции описывается формулой Стирлинга

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z} z^z H(z), \quad H(z) \approx 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots,$$

или

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n H(n) \quad (\text{Д.30})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Литература по теории поля

1. Ландau L.D., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Наука, 2001.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
3. Батыев В.Н., Толтасин И.Н. Сборник задач по электродинамике. — М.: РХД, 2002.
4. Алексеев А.Н. Сборник задач по классической электродинамике. — М.: Наука, 1977.
5. Брейбов М.М., Ружинец В.В., Толтасин И.Н. Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985.
6. Белоусов Ю.М. Методы теоретической физики. Ч. I. Уч. пос. — М.: МФТИ, 2010.
7. Новожилов Ю.В., Янна Ю.А. Электродинамика. — М.: Наука, 1978.
8. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963.
9. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Квантовая электродинамика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
10. Кранецов В.П., Смыаго В.П. Движение заряженной частицы во внешнем слабонесимметричном магнитном поле. Дрейфовая теория. Уч.-метод. пос. — М.: МФТИ, 2001.
11. Фомичев С.В., Тодорянников С.В. Изучение заряженных частиц в вакууме: Уч.-метод. пос. — М.: МФТИ, 2003.
12. Киселев В.В. Классическая электродинамика. Семинары по курсу «Теория поля». Конспекты и упражнения. Учеб. пос. — Противно: ИФВЭ, 2006.

Литература по квантовой механике

13. Ландau L.D., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. — М.: Наука, 2010.
14. Берестетский В.Б., Лифшиц Е.М., Питалевский Л.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.
15. Мессиа А. Квантовая механика. — М.: Наука: Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
16. Балашинец Д.Н. Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976.

17. Давыдов А.С. Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.
18. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
19. Белоусов Ю.М. Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория. Уч. пос. — М.: МФТИ, 2005.
20. Балашов В.В., Долинов В.К. Курс квантовой механики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
21. Елютина П.В., Кравченков В.Д. Квантовая механика. — М.: Наука, 1976.
22. Зеленинский В.Г. Лекции по квантовой механике. — Новосибирск: Сиб. ун-ив. изд-во, 2002.
23. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. — М.: Наука, 1992.
24. Фаюзег З. Задачи по квантовой механике Т 1, 2. — М.: Мир, 1974.
25. Гольдман И.И., Кравченков В.Д. Сборник задач по квантовой механике. — М.: Гостехиздат, 1957.
26. Аллазумов С.П., Заблохин К.Н. Избранные вопросы квантовой теории расщепления. Уч. пос. — М.: МФТИ, 2005.
27. Тернов А.И. Основы релятивистской квантовой механики: Уч. пос. — М.: МФТИ, 2002.

Литература по статистической физике

28. Гандар Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
29. Хуана К. Статистическая механика. — М.: Мир, 1966.
30. Румир Ю.Б., Рыжик М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1972.
31. Кубо Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1967.
32. Максаков Л.А., Миленко А.В., Полящук И.И. Лекции по статистической физике: Уч. пос. — М.: МФТИ, 2011.
33. Заблохин Р.О. Введение в современную статистическую физику: курс лекций. — М.: Едиториал УРСС, 2005.
34. Каснаков Н.А. Термодинамика и статистическая физика. Т. 2. Теория равновесных систем: Статистическая физика. — М.: УРСС, 2002.
35. Абрекосов А.А. Основы теории металлов. — М.: Наука, 1987.
36. Халатников И.М. Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971.
37. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1969.
38. Гандар Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 2. — М.: Наука, 1976.
39. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.
40. Варлаков А.А., Ларкин А.И. Теория флуктуаций в сверхпроводниках. — М.: Добросвет, 2007.
41. Шнейдер В.В. Введение в физику сверхпроводимости. — М.: МЦНМО, 2000.

42. Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. — М.: Мир, 1970.
43. Паташинский А.З., Погровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.
44. Красников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем. Термодинамика. — М.: УРСС, 2002.

Литература по общим вопросам

45. Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П. Катехис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику: Уч. пос. — М.: МФТИ, 2005.
46. Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П. Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Даугавпилс: ИД «Интеллект», 2009.
47. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — Даугавпилс: ИД «Интеллект», 2007.
48. Грайштейн И.С., Рыжих И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматлит, 1963.
49. Белтмен Г., Эрдели А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1974.
50. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. — М.: Наука, 1986.

Учебное издание

Заявки на книги прсылайте по адресам:

zakaz@id-intellect.ru

solo@id-intellect.ru

id-intellect@mail.ru

тел. (495) 579-96-45

факс (495) 617-41-88

В заявках обязательно указывайте
свои реквизиты (для организаций) и почтовый адрес!

Подробная информация о книгах на сайте
<http://www.id-intellect.ru>

Юрий Михайлович Белоусов

Сергей Николаевич Бурмистров

Алексей Игоревич Тернов

**ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ**

Компьютерная верстка — А.А. Пиринуу

Корректура авторов

Художник — С.Ю. Бирючен

Ответственный за выпуск — Л.Ф. Соловейчик

Формат б6×90/16. Печать офсетная.

Гарнитура Ньютон.

Печ. л. 36,5. Тираж 2000 экз. Зак. № 1441.

Бумага офсетная № 1, плотность 80 г/м².

Издательский Дом «Интеллект»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный,

Промышленный пр-д, д. 14,

тел. (495) 617-41-83

Отпечатано в типографии филиала ОАО «ТАТМЕДИА» «ПИК «Изда-Пресс»
420066, г. Казань, ул. Декабристов, д. 2

