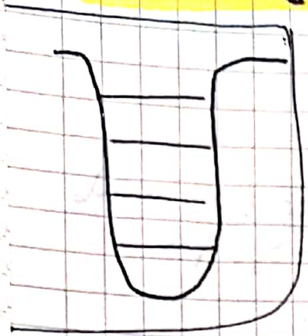
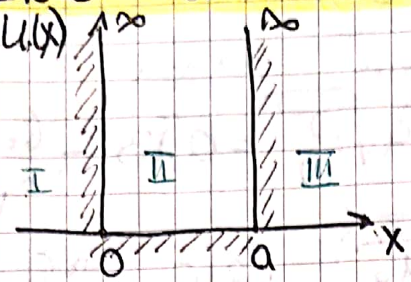
Семинар 5 (05.10.20)

Потенциал. ями. Квазиклассическое приближение



• 1D с ∞ стенками.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi.$$

$$\Psi_I = \Psi_{III} = 0.$$

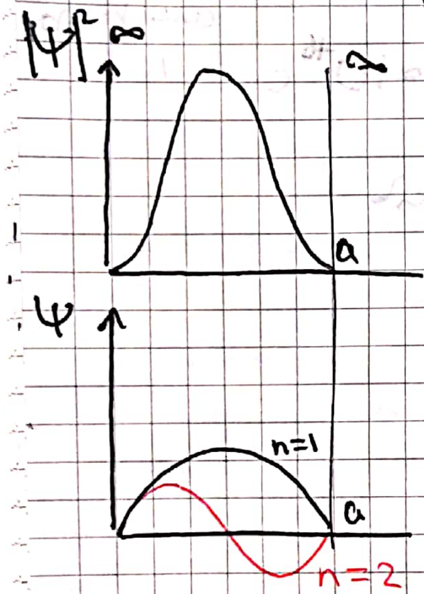
II. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi.$

$\Psi(x) = A\cos kx + B\sin kx$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\Psi(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$

$\Psi(a) = 0 \Rightarrow ka = \pi n.$

$\frac{2mE}{\hbar^2}a^2 = \pi^2 n^2 \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2}$ → энергия квантуется



$n \to \infty \Rightarrow P$ найти ч. в $\forall$ т. ями $\approx const$ →
→ классика (квази)

Нормировка: $\int_0^a B^2 \sin^2 kx\,dx = 1$

$a\frac{B^2}{2} = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$

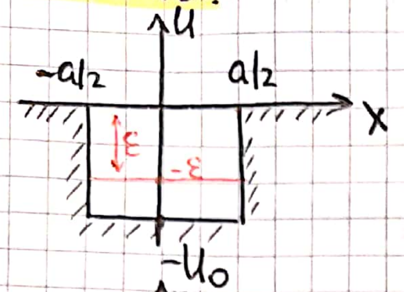
$$\boxed{\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx}$$

Импульс част. в яме:

$\langle p \rangle = 0.$ k харстоящую волну. $p = k\hbar$?

$\Delta p \approx k$

• 1D с U_0.

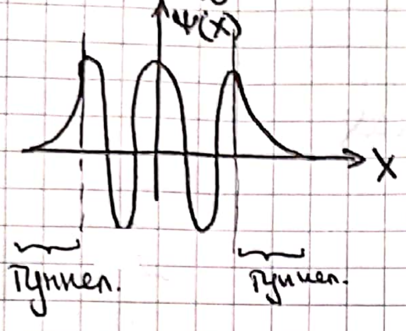


$\Psi(x)$ не обяз. быть симм (чет.)

(фу симм. у $|\Psi|^2$ ← чет.)

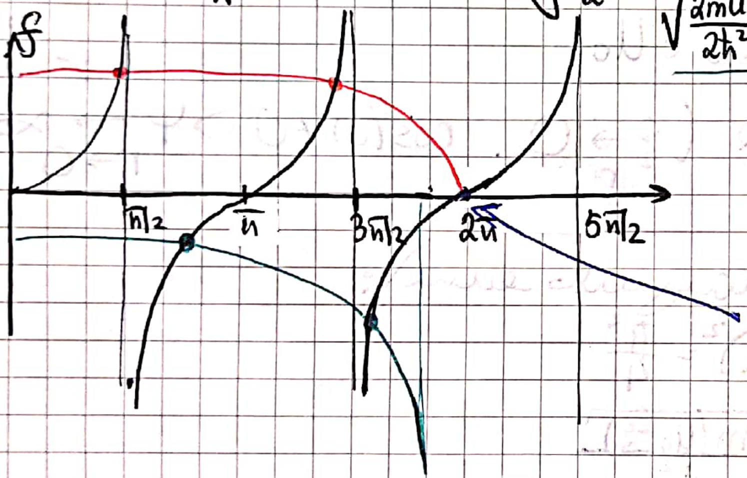
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U\Psi = E\Psi, \quad k = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

$$\varkappa = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$$



sin	cos
$A\sin\frac{ka}{2} = Be^{-\varkappa a/2}$	$A\cos\frac{ka}{2} = Be^{-\varkappa a/2}$
$ka\cos\frac{ka}{2} = -\varkappa Be^{-\varkappa a/2}$	$-ka\sin\frac{ka}{2} = -\varkappa Be^{-\varkappa a/2}$
$\mathrm{tg}\frac{ka}{2} = -\frac{k}{\varkappa}$	$\mathrm{tg}\frac{ka}{2} = \frac{\varkappa}{k}$
$\mathrm{tg}\frac{ka}{2} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2mU_0}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{(\frac{ka}{2})^2}-1}}$	$\mathrm{tg}\frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{mU_0a^2}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{(\frac{ka}{2})^2}-1}$

$$k^2 + \varkappa^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}$$



$$\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{mU_0a^2}{2\hbar^2}$$

• конеч. число уровней энергии

• м.б. ≤1 реш: $\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{mU_0a^2}{2\hbar^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

15, 25 ← малые E
(гр = не сфер)

• 3D с U_0. $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi$ ∄ сфер. симм.

$\Psi(r,\theta,\varphi) = \Psi(r)$ $\quad \Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$.

Rem: зад. с ур. теплопроводности от центра земли

$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$ — источник

$\Psi = \frac{\xi}{r}$ → для ξ УШ как для одномер. случая
(ампл. сфер. волны пад. как $1/r$)

$\frac{d}{dr}\left(\frac{\xi}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{r^2}\xi$

$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\xi}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d\xi}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2\xi}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d\xi}{dr} + \frac{2}{r^3}\xi$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\xi}{dr^2} + U\xi = E\xi$ ↔ см. 1D с U_0.

реш. типа cos не годится ($\xi \underset{r\to 0}{\not\to} 0$. $\cos(0) \neq 0 \Rightarrow \Psi \underset{r\to 0}{\to} \infty$) ?!

⇒ не всегда есть реш.

Когда нет реш (малая мощность ямы):

$\frac{mU_0a^2}{8\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4}$ $\qquad (ka)^2 = \frac{\pi^2}{4}$, $k = \frac{\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}}{\hbar^2}$

$\boxed{\underbrace{U_0a^2}_{\text{мощность ямы}} \geqslant \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}}$ — условие сущ. решения УШ для 3D ямы

Дейтон ∃ (p+n в ядре). Его не возбудить.

Сканировано с CamScanner

• Квазикласс. приближение

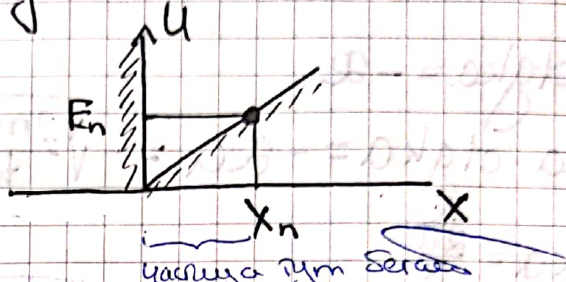
$n \gg 1$ (на $\lambda_{дБ}$ p не меняется — плавно). $\nexists$ финит.

$\boxed{\oint_L \vec{p}\, d\vec{l} = nh}$ ($n+1/2$ точно) - ф-ла Бора - Зоммерфельда. (без вывода) дали

Для H $\oint \vec{p}\, d\vec{l} = 2\pi r \cdot mV = n 2\pi\hbar$

Имит. вывода: $A \exp\left(i \int p(x) dx\right) + A^* \exp\left(-i \int \ldots\right)$ → Смирнов.
Кириченко - остроумное д-во.

3.6 $\frac{n \gg 1}{m}$ $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ kx, & x > 0 \end{cases}$



Не хотим решать УШ.
↳ приближ. реш.

пренебр. тонкими эфф. (подбарьер. отр. и т.д.) при $n \gg 1$

$$nh = 2\int_0^{x_n} p(x)\, dx = 2\int_0^{x_n} \sqrt{2m(\underbrace{E_n - kx}_{y_n})}\, dx \ominus$$

прибл. геом. опт.
(на $\lambda_{дБ}$ p мало мен.)

$$\int y^{1/2} dy = \frac{2}{3} y^{3/2}$$

$$\ominus -\frac{2\sqrt{2m}}{k} \int_{E_n}^{0} \sqrt{y}\, dy = \frac{2\sqrt{2m}}{k} \cdot \frac{2}{3} \cdot E_n^{3/2}$$

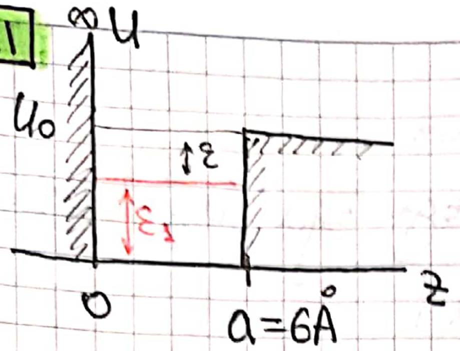
$$E_n = \sqrt[3]{\frac{8}{9} \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2 k^2}{m}}\, n^{2/3} \quad \underline{n \gg 1}$$

опечатка в ответах Овчинкина (верим Кореву)

BE DIFFERENT

Сканировано с CamScanner

3.21



$\varepsilon = U_0 - \varepsilon_1$. U_0 – ? $\langle z \rangle$ – ?

$\varphi \, ctg \varphi = -1{,}21 \Rightarrow \varphi = 2\pi/3$.

$\text{æ} = \sqrt{\dfrac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}$

① $A \sin ka = Be^{-\text{æ}a}$

$kA\cos ka = -\text{æ}Be^{-\text{æ}a}$

$k \, ctg\, ka = -\text{æ}$.

$ka \cdot ctg\, ka = -\text{æ}a = -\dfrac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \cdot a = -1{,}21$.

$ka = \dfrac{2\pi}{3}$.

$tg\, ka = \sqrt{3} = -\dfrac{k}{\text{æ}} = \dfrac{\sqrt{U_0 - \varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}$.

$3 = \dfrac{U_0 - \varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow U_0 = 4K$ //

② $\langle A \rangle = \int \Psi^* \hat{A} \Psi \, dV$.

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^a z A^2 \sin^2 kz \, dz + \int_a^\infty z B^2 e^{-2\text{æ}z} \, dz}{\int_0^a A^2 \sin^2 kz \, dz + \int_a^{+\infty} B^2 e^{-2\text{æ}z} \, dz} \approx$$

Нормировка

Считаем, что $\cancel{\int \sin^2}$ $(A \sim B \Rightarrow \underbrace{\int \sin^2 \ldots}_{\text{быстро осц.}} \ll \underbrace{\int e^{\ldots}}_{\text{экс}})$

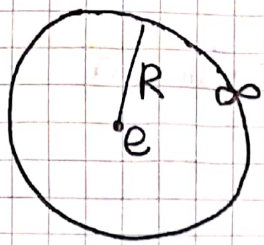
$$\approx \frac{\int_a^{+\infty} z \cancel{B^2} e^{-2\text{æ}z} \, dz}{\int_a^{+\infty} \cancel{B^2} e^{-2\text{æ}z} \, dz} \approx \Big(\underbrace{\frac{1}{2\text{æ}}}_{2,4} + \underbrace{a}_{6}\Big) = 8{,}4\,\text{Å} \text{ //}$$

– по частям

$(ze^{-2\text{æ}z})' = e^{-2\text{æ}z} + 2\text{æ}ze^{-2\text{æ}z}$

$\int_0^{+\infty} ze^{-2\text{æ}z} \, dz = \dfrac{1}{2\text{æ}} \left(\dfrac{1}{2\text{æ}} + a \right) e^{-2\text{æ}a}$

3.28



R - ? $\sigma = 0{,}35$ дин/см.

$E = E_1$

1) одномер. яд с ∞ стенками.

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2}$$

$$W = E_1 + 4\pi R^2 \sigma^{\,d\psi/ds}$$

енергия запас. на пов. ист.

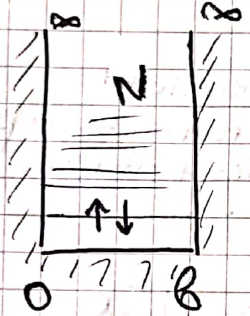
$$\frac{\partial W}{\partial S} = 0 \to R = \ldots$$

2) Давление е на стени или //-ос

$$F = -\frac{\partial E}{\partial R}$$

сила, действ. на стени или от e

3.11



$N \gg 1$. $\mathcal{E}_{min}$ - ? $F_{\text{на стени}}$

эл-ни не м. заиимав 1 энерг. ур. (спин)

2 эл-на на 1 уровне ферми-чаб

$$\mathcal{E}_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{\cancel{2}mb^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{N/2 = M} n^2}_{\frac{M(M+1)(M+2)}{3} = \frac{M^3}{3}} \cdot \cancel{2}$$

2 эл-на на уровне

$N \gg 1$.

$$\mathcal{E}_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{24 m b^2}$$

$$F = -\frac{\partial \mathcal{E}_{min}}{\partial R} = -\frac{\pi^2 \hbar^2}{12 m b^3}$$