1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 18 января 2020 года

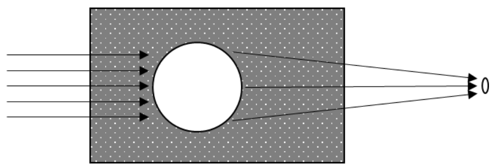
Вариант **А**

1А. Нобелевская премия по физике за 2019 г. присуждена за открытие несветящихся спутников (экзопланет) у звёзд. Экзопланеты могут быть обнаружены с помощью доплеровского смещения спектра излучения звезды за счёт движения вокруг общего центра масс. Оценить, могут ли экзопланетные физики обнаружить наличие у Солнца спутника (планеты Юпитер), если они используют спектрометр с разрешающей способностью $R = 4 \cdot 10^7$? Период обращения Юпитера $T_{Ю} = 11{,}9$ года, масса $M_{Ю} = 1{,}8 \cdot 10^{30}$ г. Масса Солнца $M_{С} = 2 \cdot 10^{33}$ г. Считать, что наблюдение ведётся в плоскости движения системы Солнце–Юпитер.

2А. Сосуд постоянного объема разделён подвижной теплоизолирующей перегородкой на две части, в каждой из которых содержится по одному молю идеального одноатомного газа. В начальный момент температуры газа в объёмах частей равны T_0 и αT_0, где $\alpha = 7$, а перегородка находится в механическом равновесии. Найти максимальную работу, которую можно получить от того или иного внешнего устройства, использующего данный сосуд как единственный источник энергии.

3А. В одном из экспериментов, нацеленных на создание управляемого термоядерного синтеза, ток $I_0 = 2$ МА пропускается по находящейся в вакууме полой тонкостенной цилиндрической оболочке радиуса $R_0 = 1$ см вдоль её образующей. В результате оболочка начинает сжиматься симметрично к оси системы. Найти изменение кинетической энергии оболочки на единицу её длины к моменту, когда она сожмётся до $R_1 = 10^{-2} R_0$. Толщину оболочки δ считать малой на протяжении всего процесса: $\delta \ll R_1$.

4А. В практических задачах рентгеновской оптики было предложено использовать собирающие линзы в виде сферических полостей внутри металлических блоков. Оценить в приближении параксиальной оптики минимальный размер пятна d, в который можно сфокусировать плоскопараллельный пучок рентгеновского излучения с энергией кванта $E_\gamma = 14$ кэВ при помощи такой линзы, если радиус сферической полости, сделанной в алюминии, составляет $R = 0{,}3$ мм. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.



5А. При β^--распаде ядра ^{137}Cs разность энергий покоя материнского и дочернего ядер ΔE составила две энергии покоя электрона. Электрон и антинейтрино разлетелись под углом $\alpha = 120°$. Дочернее ядро начало двигаться под углом $\varphi = 150°$ к направлению вылета электрона. Найти энергию вылетевшего антинейтрино в единицах энергии покоя электрона. Считать антинейтрино безмассовой частицей.

1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 18 января 2020 года

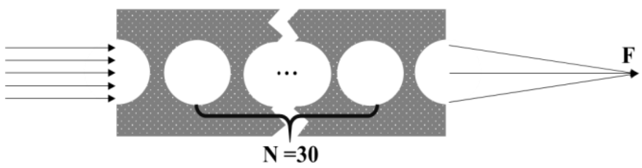
Вариант **Б**

1Б. Экзопланетный физик, наблюдая Солнечную систему, заметил возникающее с периодом $T = 11{,}9$ лет кратковременное (длительностью около земных суток) уменьшение светимости Солнца на $\delta = 1\%$. Также он обнаружил происходящие с тем же периодом колебания доплеровского сдвига линии атомарного водорода в спектре Солнца с амплитудой $|\Delta\lambda/\lambda| \approx 4 \cdot 10^{-8}$, обусловленные движением Солнца вокруг центра масс системы. Оценить из этих данных массу и радиус этой планеты, если масса Солнца $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{33}$ г, а его радиус $R_{\text{С}} = 7 \cdot 10^{10}$ см. Считать, что наблюдение ведётся в плоскости движения системы Солнце-планета.

2Б. Сосуд объёма $V = 12$ л разделён теплоизолирующим подвижным поршнем на две части, в каждой из которых содержится по одному молю идеального газа. Исходному состоянию системы соответствует положение поршня, при котором объёмы частей сосуда равны, а давления в них составляют $P_1 = 4$ атм и $P_2 = 9$ атм. Найти максимальную работу, которую можно получить при переводе системы в равновесное состояние с применением того или иного внешнего устройства, использующего данный сосуд как единственный источник энергии. Показатель адиабаты считать равным $\gamma = 4/3$.

3Б. В одном из экспериментов, нацеленных на создание управляемого термоядерного синтеза, ток $I_0 = 1$ МА пропускается по находящейся в вакууме тонкостенной цилиндрической плазменной оболочке вдоль её образующей. Начальный радиус оболочки $r_0 = 1$ см, толщина $\delta = 0{,}1$ мм, масса оболочки на единицу длины $m = 0{,}1$ мг/см. Протекание тока прекращается при сжатии до $r_1 \sim \delta$. Оценить температуру, до которой можно таким образом нагреть плазму, считая её квазинейтральной смесью идеальных газов протонов и электронов. Омическим нагревом пренебречь.

4Б. В практических задачах рентгеновской оптики было предложено использовать собирающие линзы в виде сферических полостей внутри металлических блоков. Оценить в приближении параксиальной оптики эффективное фокусное расстояние системы таких линз, представляющую собой 30 вплотную расположенных сферических полостей с радиусом $R = 0{,}3$ мм. Энергия кванта составляет $E_\gamma = 14$ кэВ. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.



5Б. При β^--распаде ядра ^{137}Cs разность энергий покоя материнского и дочернего ядра ΔE составила две энергии покоя электрона. Дочернее ядро начало двигаться вдоль линии, являющейся биссектрисой угла разлёта электрона и антинейтрино. Найти кинетическую энергию вылетевшего электрона в единицах его энергии покоя. Массу антинейтрино считать равной нулю.

1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 18 января 2020 года

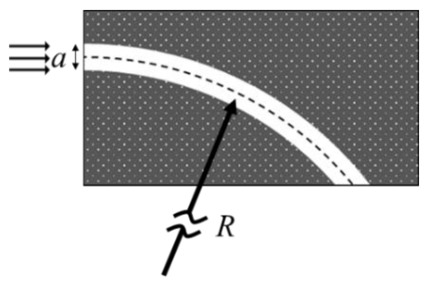
Вариант **В**

1В. В 2016 г. у ближайшей к нам звезды красного карлика Проксима Центавра ($M_{\Pi} = 0{,}12\, M_{С}$, $R_{\Pi} = 0{,}14\, R_{С}$, T_{Π} =3050 К) было обнаружено периодическое изменение доплеровского смещения линий излучения атомарного водорода, которое было интерпретировано как следствие движения её центра масс по круговой орбите со скоростью $v_{\Pi} = 1.5$ м/с и с периодом $\tau_{\Pi} = 11{,}2$ сут. Считая, что это движение обусловлено существованием у звезды спутника (планеты земного типа Проксима Центавра b), оценить его радиус орбиты (в астрономических единицах, а.е.), массу и температуру поверхности.

2В. Сосуд постоянного объема разделён теплоизолирующим поршнем на две части, в каждой из которых содержится по одному молю идеального газа. В начальный момент объёмы частей сосуда различны, газ в меньшем объёме имеет температуру T_1, а поршень находится в механическом равновесии. Найти максимальную работу, которую можно получить от тех или иных внешних устройств, использующих данный сосуд как единственный источник энергии. В конечном состоянии объём изначально меньшей части сосуда увеличился в β=9 раз. Принять теплоёмкость C_V=5R/2.

3В. В одном из экспериментов, нацеленных на создание управляемого термоядерного синтеза, через оболочку из тонкой фольги в форме полого цилиндра радиусом $r_0 = 5$ см вдоль образующей пропускается линейно нарастающий во времени ток $I(t) = I_0 t/\tau$, где $I_0 = 3$ МА, $\tau = 60$ нс. В результате оболочка начинает сжиматься симметрично относительно оси системы. Оценить радиальную скорость v, приобретаемую оболочкой к моменту времени $t = \tau$. Масса фольги на единицу длины цилиндра $m = 0{,}1$ мг/см. *Указание:* перемещение оболочки за время τ можно считать малым: $v\tau \ll r_0$.

4В. В практических задачах рентгеновской оптики было предложено использовать полости внутри металлических блоков в качестве «световодов». Пусть имеется цилиндрическая полость квадратного сечения: сторона квадрата $a = 0{,}3$ мм, радиусы цилиндров $R + a/2$ и $R - a/2$, $R \gg a$. Оценить в приближении геометрической оптики минимальное значение R, при котором излучение с энергией кванта $E_\gamma = 14$ кэВ, входящее в световод перпендикулярно его сечению, будет распространяться по нему без выхода за его пределы. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.



5В. При β^--распаде ядра ^{137}Cs разность энергий покоя материнского и дочернего ядра ΔE составила две энергии покоя электрона. Электрон и антинейтрино разлетелись под углом $\alpha = 90°$. Дочернее ядро начало двигаться под углом $\varphi = 150°$ к направлению вылета антинейтрино. Найти энергию вылетевшего антинейтрино в единицах энергии покоя электрона. Считать антинейтрино безмассовой частицей.

Решения письменной части ГКЭ 2020

Вариант А

1А. (*Гуденко А.В.*) Минимальная скорость, которую способен зарегистрировать по доплеровскому сдвигу спектрометр с такой разрешающей способностью:

$$V_{min} = c(\Delta f/f) = c(\Delta\lambda/\lambda) = c/R = 7.5 \text{ м/с}.$$

Оценим скорость Солнца, совершающего круговое движение покруг центра масс системы Солнце--Юпитер в приближении $M_Ю << M_C$. Использую третий закон Кеплера, находим орбитальную скорость Юпитера

$$V_Ю = 2\pi r_Ю/T_Ю = 2\pi[GM_C(T_Ю)^2/4\pi^2]^{1/3}/T_Ю = 13 \text{ км/с}.$$

Следовательно, скорость движения Солнца вокруг центра масс системы Солнце--Юпитер:

$$V_C = V_Ю(M_Ю/M_C) = 12 \text{ м/с}.$$

Регулярное изменение скорости Солнца относительно экзопланеты имеет вид: $V(t) = V_C\sin(2\pi t/T_Ю)$, т.е. амплитуда колебаний скорости составляет $V_C = 12$ м/с $> V_{min}$, что превышает предел чувствительности спектрометра. Таким образом, экзопланетные коллеги нобелевских лауреатов 2019 г. Майора и Кело вполне могут обнаружить Солнечную планетную систему.

2А.(*Крымский К.М.*) Максимальная работа достигается в условиях теплоизоляции от внешней среды и равна разности внутренних энергий системы в начальном и конечном состояниях: $A = U_1 - U_2 = C_V(T_0 + \alpha T_0) - 2C_V T$, где T – конечная температура системы. Работа максимальна при обратимой передаче тепла, то есть $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$. Для каждого объёма изменение энтропии $\Delta S_1 = C_V \ln\dfrac{T}{T_0} + R\ln\dfrac{V}{V_1}$, $\Delta S_2 = C_V \ln\dfrac{T}{\alpha T_0} + R\ln\dfrac{V}{V_2}$, откуда для всей системы $C_V \ln\dfrac{T^2}{\alpha T_0^2} + R\ln\dfrac{V^2}{V_1 V_2} = 0$, где $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$ - конечный объём каждого газа после выполнения всей работы системой, $V_1 = \dfrac{2V}{1+\alpha}$, а $V_2 = \alpha V_1$ в силу механического равновесия в начальный момент.

Сканировано с CamScanner

Значит, $T^2 = \alpha T_0^2\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right)^{\frac{R}{C_V}}$, а искомая работа равна $A = C_V T_0\left(1+\alpha-\frac{(4\alpha)^{\frac{C_p}{2C_V}}}{(1+\alpha)^{R/C_V}}\right)$.

Для одноатомного газа $A = \frac{3RT_0}{2}\left(1+\alpha-\frac{2\sqrt[3]{4}\alpha^{\frac{5}{6}}}{(1+\alpha)^{2/3}}\right)$, что при $\alpha = 7$ практически точно даёт $A \approx 6RT_0$.

3А. (*Попов П.В.*).

Первое решение. Выделим тонкий элемент вдоль образующей цилиндра с массой на единицу длины $dm = \rho\delta \cdot Rd\varphi$. По нему протекает ток $dJ = J_0\frac{d\varphi}{2\pi}$. Уравнение движения элемента:

$$dm \cdot \ddot{R} = \frac{dJ \cdot B(R)}{2c}.$$

Коэффициент 2 в знаменателе учитывает тот факт, что поле, действующее на элемент оболочки, составляет половину от полного поля. Подставляя магнитное поле на поверхности оболочки $B(R) = 2J_0/cR$ (внутри оболочки поля нет), и суммируя по всем элементам, получаем уравнение движения

$$m\ddot{R} = \frac{J_0^2}{c^2R},$$

где $m = \rho \cdot 2\pi R\delta$.

Работа силы Ампера $f(R) = \frac{J_0^2}{c^2R}$ по обжатию оболочки равна (знак минус учитывает, что$dR < 0$):

$$A = -\int_{R_0}^{R_1} f(R)dR = \frac{J_0^2}{c^2}\ln\frac{R_0}{R_1}.$$

Поскольку вначале оболочка покоилась, то работа силы переходит в конечную кинетическую энергию:

$$K = A = \frac{J_0^2}{c^2}\ln\frac{r_0}{r_1} = \frac{(2\cdot 10^6 \cdot 3\cdot 10^9)^2}{(3\cdot 10^{10})^2}\ln 10^2 = 1{,}84\cdot 10^{11} \text{ (эрг/см) или 1,84 МДж/м.}$$

Второе решение. Выражение для силы Ампера можно получить также следующим образом. Выделим внутри оболочки цилиндрический слой $[r; r+dr]$. Пусть dJ – протекающий в этом слое ток. Сила Ампера, действующая на него: $df = \frac{1}{c}dJ \cdot B$, где $B(r) = \frac{2J(r)}{cr}$ – поле, создаваемое током $J(r) = \int_R^r dJ$, охватываемым этим слоем (внешние токи вклада в поле не дают, собственное поле слоя на него

Сканировано с CamScanner

самого не действует). Интегрируя по всей толще оболочки $r \in [R; R+\delta]$, приходим к тому же результату (в приближении $R \gg \delta$):

$$f = \int \frac{1}{c} B dJ \approx \frac{1}{c^2 R} \int_0^{J_0} 2J dJ \approx \frac{J_0^2}{c^2 R}.$$

4А. (*Федоров Г.Е.*). Для расчета фокусного расстояния линзы $F = R/2(n-1)$ необходимо, прежде всего, рассчитать коэффициент преломления по формуле

$$n = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Поскольку в алюминии (A = 27, Z = 13) энергия связи даже самых «близких к ядру» электронов не превышает $E = Z^2\mathrm{Ry}$ = 2,23 кэВ, то в формулу для расчета плазменной частоты

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \tag{2}$$

нужно подставить полную концентрацию электронов

$$n_c = \frac{Z\rho N_A}{\mu_{Al}} = \frac{13 \cdot 2{,}7 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{27} = 7{,}8 \cdot 10^{23}\,\text{см}^{-3}. \tag{3}$$

При такой концентрации плазменная частота составит $\omega_p = \left(\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}8^2 \cdot 10^{-20} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{23}}{9{,}1 \cdot 10^{-28}}\right)^{1/2} = 5{,}0 \cdot 10^{16}\text{с}^{-1}$, что намного меньше частоты рентгеновского излучения $\omega = \frac{E_\gamma}{\hbar} = \frac{14 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{1{,}05 \cdot 10^{-27}} = 2{,}1 \cdot 10^{19}\text{с}^{-1}$. С учетом этого, выражение (1) можно переписать в виде

$$n = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}. \tag{4}$$

Таким образом, воздух в полости является оптически более плотной средой для рентгеновского излучения, чем алюминий, и поэтому сферическая полость будет играть роль собирающей линзы в алюминии. Для фокусного расстояния получаем:

$$F = \frac{R}{2} \cdot \frac{2\omega^2}{\omega_p^2} = R\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2. \tag{5}$$

Угловая дифракционная расходимость $\varphi = \lambda/2R$, так что размер пятна равен в фокальной плоскости:

$$d = F \cdot \varphi = R\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{2R} = \frac{\pi c \omega}{\omega_p^2} == \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{19}}{25 \cdot 10^{32}} \approx 8\ \text{мкм}. \tag{6}$$

P.S. В реальности сферические аберрации приводят к тому, что такого разрешения можно добиться лишь при помощи 30 последовательно расположенных «линз». См. статью A. Snigirev, V. Kohn, I. Snigireva, B. Lengeler, "A compound refractive lens for focusing high-

Сканировано с CamScanner

energy X-rays" // Nature. 1996. V.384. № 6604. P.49. Отметим, что при заданном материале линзы размер пятна, в который можно сфокусировать излучение (в использованном приближении!): 1) не зависит от размеров «линзы», 2) обратно пропорционален длине волны используемого излучения.

5А. (*Морозов А.И.*)

Первое решение. Дочернее ядро движется в направлении, противоположном суммарному импульсу электрона и антинейтрино. Из равенства модулей составляющих их импульсов, перпендикулярных этому направлению, получаем $cp_e = ckp_\nu$, где $k^2 = \frac{\sin^2(\alpha+\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = 4$. Из закона сохранения энергии находим, вводя обозначения $x = \frac{\varepsilon_\nu}{m_e c^2}$, $a = \frac{\Delta E}{m_e c^2} = 2$:

$$a = x + \sqrt{1 + k^2 x^2}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{a - \sqrt{k^2(a^2-1)+1}}{1-k^2} = 0{,}54.$$

Второе решение. Проектируя импульсы всех частиц на направление импульса электрона и перпендикулярное ему, получим

$$p_e = p_\nu \cos(180^\circ - \alpha) + p_{яд}\cos(180^\circ - \varphi),$$

$$p_\nu \sin(180^\circ - \alpha) = p_{яд}\sin(180^\circ - \varphi).$$

Из второго уравнения получаем $p_{яд} = \sqrt{3}p_\nu$, а из первого -- $p_e = 2p_\nu$. Поскольку $\Delta E = 2m_e c^2 \ll M_{яд}c^2$ (1 МэВ<<137 ГэВ), то кинетической энергией ядра по сравнению с энергиями легких частиц можно пренебречь и закон сохранения энергии примет вид

$$\Delta E = p_\nu c + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

Подставляя сюда выражение для импульса электрона, получаем уравнение относительно $x = p_\nu c/(m_e c^2)$

$$\frac{\Delta E}{m_e c^2} = x + \sqrt{4x^2+1} \quad \text{или} \quad 2 - x = \sqrt{4x^2+1},$$

откуда

$$3x^2 + 4x - 3 = 0 \text{ и } x = \frac{\sqrt{13}-2}{3} \cong 0.54$$

P.S. Интересно, что при указанных в задаче углах, импульсы нейтрино и ядра оказываются взаимно перпендикулярными.

Вариант Б

1Б. (*ГлазковВ.Н., Струминский А.Б.*). Изменение светимости происходит из-за того, что «холодная» планета перекрывает для удаленного наблюдателя некоторую долю излучения

Сканировано с CamScanner

от Солнца. Поскольку светимость пропорциональна площади поверхности Солнца, то изменение светимости

$$\Delta L/L = \delta \cong R_{\text{пл}}^2/R_{\text{С}}^2\,, \qquad (1)$$

откуда $R_{\text{пл}} = R_{\text{С}}\sqrt{\Delta L/L}$=0.1$R_{\text{С}}$.

Вклад в светимость различных участков Солнца дается интегралом по сферическим кольцам на его поверхности $L = 2\pi R_{\text{С}}^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, I_0 \cos\theta = \pi R_{\text{С}}^2 I_0 \sin^2\theta|_0^{\pi/2} = \pi R_{\text{С}}^2 I_0$. I_0 - яркость излучения перпендикулярно поверхности, при написании интеграла использован закон Ламберта. Если планета расположена в центре диска Солнца прямо напротив наблюдателя, то нижний предел в интеграле следует заменить на $R_{\text{пл}}/R_{\text{С}} \ll 1$. Откуда следует формула (1).

Поскольку Солнце и планета вращаются вокруг общего центра масс, то доплеровский сдвиг будет максимален, когда Солнце движется к наблюдателю и минимален, когда Солнце движется от наблюдателя. Следовательно, линейная скорость вращения Солнца находится из соотношения $V_{\text{С}} = c\Delta\lambda/\lambda = 1200$ см/с. Будем, считать, что масса планеты много меньше массы Солнца и центр масс системы практически совпадает с центром Солнца. Тогда радиус орбиты планеты находится из третьего закона Кеплера

$$R_{\text{пл}}^3 = GM_{\text{С}}T^2/4\pi^2,$$

откуда $R_{\text{пл}}$=7,8 10^{13} см = 7,8 10^8 км =5, 2 а.е., а линейная скорость движения планеты по орбите $V_{\text{пл}} = 2\pi R_{\text{пл}}/T$= 13 км/с. Из равенства импульсов планеты и Солнца, получаем $m_{\text{пл}} = M_{\text{С}}V_{\text{С}}/V_{\text{пл}} = 1{,}85\ 10^{30}$г. Полученные данные соответствуют Юпитеру.

2Б. (*Крымский*). Максимальная работа достигается в условиях теплоизоляции от внешней среды и равна разности внутренних энергий системы в начальном и конечном состояниях: $A = U_1 - U_2 = C_V \cdot \dfrac{P_1(V/2)}{R} + C_V \cdot \dfrac{P_2(V/2)}{R} - 2C_V \cdot \dfrac{P(V/2)}{R}$, где P – конечное давление в системе и учтено, что после выполнения системой всей работы конечный объём каждой части $V_x = V/2$ в силу механического равновесия. Работа максимальна при обратимой передаче тепла, то есть $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$, а так как для каждого объёма изменение энтропии $\Delta S_1 = C_V \ln\dfrac{P}{P_1}$, $\Delta S_2 = C_V \ln\dfrac{P}{P_2}$, то получаем $C_V \ln\dfrac{P}{P_1} + C_V \ln\dfrac{P}{P_2} = 0$, откуда $P = \sqrt{P_1 P_2}$.

Окончательно $A = \dfrac{V}{2(\gamma-1)}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})^2 = 1800\,Дж$.

3Б. (*Попов П.В.*). Согласно решению задачи 3А, работа по обжатию оболочки переходит в ее кинетическую энергию $K = \dfrac{J_0^2}{c^2}\ln\dfrac{r_0}{\delta}$. После того, как вся энергия перейдет в тепло,

Сканировано с CamScanner

получаем $K = 3\nu R\Delta T/2$, поскольку плазма – смесь одноатомных газов протонов и электронов. Здесь $\nu = \frac{2m}{\mu} \approx \frac{2m}{\mu_H}$ – количество молей на единицу длины оболочки, с учётом того, что масса электрона много меньше массы протона. Окончательно

$$\Delta T = \frac{J_0^2 \mu_H}{3mRc^2} \ln\frac{r_0}{\delta} = \frac{(10^6 \cdot 3 \cdot 10^9)^2 \cdot 1}{(3 \cdot 10^{10})^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}31 \cdot 10^7} \ln 10^2 \cong 1{,}85 \cdot 10^6\,\text{К}.$$

4Б.(*Федоров Г.Е.*). По аналогии с решением задачи 4А

$$F_1 = R\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = 3 \cdot 10^{-4}\left(\frac{2{,}1 \cdot 10^{19}}{5{,}0 \cdot 10^{16}}\right)^2 \approx 53\text{ м}.$$

Поскольку максимальный угол отклонения лучей очень мал, для составной линзы можно пользоваться параксиальным приближением, так что для ее фокусного расстояния получим

$$F_{30} = \frac{F_1}{30} \approx 1.8\text{ м}.$$

5Б. (*Морозов А.И.*).

Первое решение. Дочернее ядро движется в направлении, противоположном суммарному импульсу электрона и антинейтрино. Из равенства модулей составляющих их импульсов, перпендикулярных этому направлению, получаем $cp_e = ckp_v$, где $k^2 = 1$. Из закона сохранения энергии находим, вводя обозначения $x = \frac{\varepsilon_v}{m_e c^2}$, $a = \frac{\Delta E}{m_e c^2} = 2$:
$a = x + \sqrt{1 + k^2 x^2}$,
Откуда

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a} = \frac{3}{4}; \quad \frac{T_e}{m_e c^2} = a - x - 1 = 0{,}25.$$

Второе решение. Проектируя импульсы всех частиц на направление импульса ядра и перпендикулярное ему, получим

$$p_{яд} = p_v \cos\alpha + p_e \cos\alpha,$$

$$p_v \sin\alpha = p_{яд} \sin\alpha.$$

Из второго уравнения получаем $p_e = p_v$, а из первого --$p_{яд} = 2p_v \cos\alpha$. Поскольку $\Delta E = 2m_e c^2 \ll M_{яд} c^2$ (1 МэВ<<137 ГэВ), то кинетической энергией ядра по сравнению с энергиями легких частиц можно пренебречь и закон сохранения энергии примет вид

$$\Delta E = p_v c + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

Подставляя сюда выражение для импульса электрона, получаем уравнение относительно $x = p_e c/(m_e c^2)$

$$\frac{\Delta E}{m_e c^2} = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{или} \quad 2 - x = \sqrt{x^2 + 1},$$

Сканировано с CamScanner

откуда $x = 3/4$. Относительная кинетическая энергия электрона

$$\frac{T}{m_e c^2} = \sqrt{\left(\frac{p_e c}{m_e c^2}\right)^2 + 1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Вариант В

1В. (*Струминский А.Б.*). Для системы планета – звезда по третьему закону Кеплера $L_b^3 = GM_\Pi \tau_\Pi^2/4\pi^2$, откуда $L_b = (GM_\Pi \tau_\Pi^2/4\pi^2)^{1/3}$ =7.2 млн. км = $4{,}8 \cdot 10^{-2}$ а.е. (1 а.е. = 150 млн. км – расстояние от Земли до Солнца и предполагается, что масса звезды намного больше массы планеты).

Радиусы орбит планеты и звезды связаны соотношением $L_\Pi M_\Pi = L_b M_b$, откуда $M_b = \frac{L_\Pi M_\Pi}{L_b} = \frac{\tau_\Pi v_\Pi M_\Pi}{2\pi L_b} = 7.7 \cdot 10^{27}\text{г} = 1.28\ M_з$.

Приравнивая величины падающей в единицу времени на поверхность планеты энергии и энергии ей излучаемой, получаем

$$4\pi R_\Pi^2 \sigma T_\Pi^4 \frac{\pi R_b^2}{4\pi L_b^2} = 4\pi R_b^2 \sigma T_b^4,$$

откуда

$$T_b = T_\Pi \left(\frac{R_\Pi}{2L_b}\right)^{1/2} = 3050\left(\frac{0{,}14\cdot 7{,}0\cdot 10^5}{2\cdot 4{,}8\cdot 10^{-2}\cdot 150\cdot 10^6}\right)^{1/2} = 251\ \text{К}.$$

2В. (*Крымский К.М.*). Максимальная работа достигается в условиях теплоизоляции от внешней среды и равна убыли внутренней энергии: $A = U_1 - U_2 = C_V(T_2 + T_1) - 2C_V T$, где T – конечная температура системы, а $T_2 = \alpha T_1$ - температуры газа в момент равенства давлений, считая, что $V_2 = \alpha V_1$. Работа максимальна при обратимой передаче тепла, то есть $\Delta S_1 - \Delta S_2 = 0$. Для каждого объёма изменение энтропии $\Delta S_1 = C_V \ln\frac{T}{T_1} + R\ln\frac{V}{V_1}$, $\Delta S_2 = C_V \ln\frac{T}{T_2} + R\ln\frac{V}{V_2}$, откуда для всей системы $C_V \ln\frac{T^2}{\alpha T_1^2} + R\ln\frac{V^2}{\alpha V_1^2} = 0$, где $V = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{(\alpha+1)V_1}{2} = \beta V_1$ - конечный объём каждого газа после выполнения всей работы системой. Заменой $\alpha = 2\beta - 1$ получаем искомую работу в виде

$$A = C_V T_1\left(2\beta - \frac{(8\beta-4)^{\frac{C_P}{2C_V}}}{(2\beta)^{R/C_V}}\right) = \frac{5}{2}RT_1\left(2\beta - \frac{(8\beta-4)^{0{,}7}}{(2\beta)^{0{,}4}}\right),$$ что при β=9 практически точно даёт $A \approx 30RT_1$.

Сканировано с CamScanner

3В. (*Попов П.В.*) Согласно решению задачи А, уравнение движения оболочки под действием тока имеет вид

$$m\ddot{r} = m\dot{v} = \frac{J^2(t)}{c^2 r(t)} = \frac{J_0^2 t^2}{c^2 r(t) \tau^2}.$$

При условии $r(t) \cong r_0 = \mathrm{const}$ это уравнение можно проинтегрировать

$$v = \int_0^\tau \frac{J_0^2 t^2}{m c^2 r_0 \tau^2} dt = \frac{1}{3} \frac{J_0^2 \tau}{m c^2 r_0}.$$

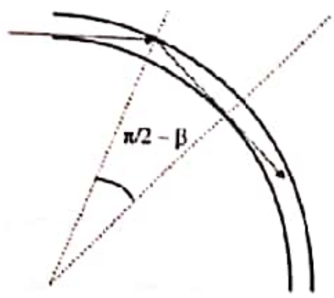
Подставляя числа, получаем

$$v = \frac{1}{3} \frac{(3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^9)^2 \cdot 6 \cdot 10^8}{(3 \cdot 10^{10})^2 \cdot 10^{-4} \cdot 5} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ см/с}.$$

Как видно, за время τ радиус оболочки изменится не более, чем на $\Delta r \sim v\tau = 0,22$ см $<< r_0 = 5$ см и предположение о неизменности радиуса трубки вполне оправдано.

4В. (*Федоров Г.Е.*). По аналогии с решением задачи 4А, находим выражение для величины показателя преломления

$$n = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}.$$



Наименьший угол падения на цилиндрическую поверхность большего радиуса имеет луч, входящий в волновод по касательной к внутреннему цилиндру. Радиус кривизны должен быть таким, чтобы угол β падения для этого луча был не меньше угла полного внутреннего отражения $(\sin\beta \geq n)$. Используя очевидное геометрическое соотношение

$$a = R(1 - \sin\beta),$$

окончательно получаем

$$R \geq a\frac{2\omega^2}{\omega_p^2} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{2,1 \cdot 10^{19}}{5,0 \cdot 10^{16}}\right)^2 \approx 110 \text{м}.$$

5В. (*Морозов А.И.*).

Первое решение. Дочернее ядро движется в направлении, противоположном суммарному импульсу электрона и антинейтрино. Из равенства модулей составляющих их импульсов, перпендикулярных этому направлению, получаем $cp_e = ckp_\nu$, где

Сканировано с CamScanner

$k^2 = \frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\alpha+\varphi)} = \frac{1}{3}$. Из закона сохранения энергии находим, вводя обозначения $x = \frac{\varepsilon_\nu}{m_e c^2}$, $a = \frac{\Delta E}{m_e c^2} = 2$:

$$a = x + \sqrt{1 + k^2 x^2}, \quad \text{откуда } x = \frac{a - \sqrt{k^2(a^2-1)+1}}{1-k^2} = 0{,}88.$$

Второе решение. Проектируя импульсы всех частиц на направление импульса антинейтрино и перпендикулярное ему, получим

$$p_\nu = p_e \cos(180^\circ - \alpha) + p_{яд}\cos(180^\circ - \varphi),$$
$$p_e \sin(180^\circ - \alpha) = p_{яд}\sin(180^\circ - \varphi).$$

Из второго уравнения получаем $p_{яд} = 2p_e$, а из первого -- $p_\nu = \sqrt{3}p_e$. Поскольку $\Delta E = 2m_e c^2 \ll M_{яд}c^2$ (1 МэВ<<137 ГэВ), то кинетической энергией ядра по сравнению с энергиями легких частиц можно пренебречь и закон сохранения энергии примет вид

$$\Delta E = p_\nu c + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

Подставляя сюда выражение для импульса электрона, получаем уравнение относительно $x = p_\nu c/(m_e c^2)$

$$\frac{\Delta E}{m_e c^2} = x + \sqrt{x^2/3 + 1} \quad \text{или} \quad 2 - x = \sqrt{x^2/3 + 1},$$

$$2x^2 - 12x + 9 = 0 \text{ и } x = 3\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 5{,}12; 0{,}88$$

Первый корень – лишний, поскольку $\sqrt{x^2/3+1} \geq 1$ и, следовательно, $x \leq 1$.

Максимум за каждую задачу – 2 балла. Итоговая оценка по 10-балльной шкале – сумма всех баллов, округленная в большую сторону

Сбор преподавателей для обсуждения задач, результатов письменного экзамена и для организационных объявлений 22 января 2020 года в 8-30 в Главной Физической аудитории

Сканировано с CamScanner