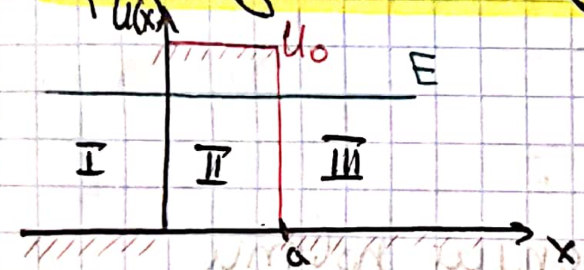
Лекция 5 (01.10.20)

Потенциальные барьеры. Пот. яма. Осциллятор.

Прямоугольный барьер



В обл. I и III: $\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0$

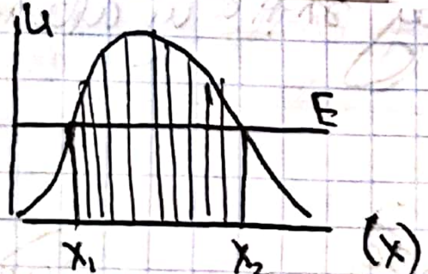
В обл. II: $\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi=0$

$\psi_I = 1\cdot e^{i\sqrt{2mE}\,x/\hbar} + Be^{-i\sqrt{2mE}\,x/\hbar}$, $\psi_{II}=\alpha e^{\sqrt{2m(E-U_0)}\,x/\hbar}+\beta e^{-\sqrt{2m(E-U_0)}\,x/\hbar}$

↑ пад. ↑ отр.

$\psi_{III}=Ce^{i\sqrt{2mE}\,x/\hbar}$

$\left[D\approx e^{-2/\hbar\sqrt{2m(U_0-E)}\,a}\right]$ – коэф-т прозрачности



разбиваем произв. барьер на прямоуг

$D=\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx\right\}$, $\mu=\frac{mM}{m+M}$ масса част, кот. барьер обр

$\psi_{II}=\beta e^{-\sqrt{2m(U_0-E)}\,x/\hbar}$, $D=|\psi_{II}(a)|^2\sim\ldots$

Ф-ла приближ. Она раб. тем лучше, чем

⇒ Туннел. эф-т – для легких частиц и на малых расст.
в exp m
$U-E \sim 10^{-3}$ В
$l \sim 10^{-7}$ см.

$E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$

$U(x)$ – подбар. прох.

(фикс. x ⇒ Δp ⇒ туннел. Неправда, что $p^2/2m < 0$)

$D \sim 1$: $\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,l \approx 1$

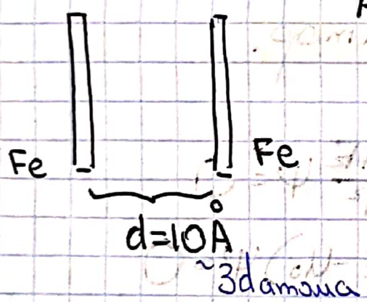
длина, на кот. частица туннел.

зафикс. в эксп. l: $\Delta x < l$ ⇒

неопр. в коорд. надо фикс. < иск. вел.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{\Delta p^2} > \frac{\hbar^2}{4\overline{\Delta x^2}} = \frac{\hbar^2}{4l^2} \\ &l^2 \sim \frac{\hbar^2}{8m(U-E)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{\Delta p^2} > \underbrace{\frac{\hbar^2 8m(U-E)}{4\hbar^2}}_{2m(U-E)} \frac{x}{\hbar}$$

Пример Туннельный сканир. микроскоп. Атом, вырв. из Fe



$A_{вых. атома} = 3,7$ эВ $= U_0 - E$

$M_E = 56 \cdot 1$ а.е.м $= 56 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24}$ г

$E \sim kT \sim 0,03$ эВ

$U_0 - E \approx 3,7$ эВ

Ставим иглу → туннел. ток → восст. форму пов-ти

Вер-ть продир. на 2 пластину:

$$w \sim e^{-\frac{2\cdot10^{-9}}{1,05\cdot10^{-34}}\sqrt{2\cdot9\cdot10^{-26}\cdot\underbrace{3,7\cdot1,6\cdot10^{-19}}_{Дж}}} \sim e^{-6000} \sim 10^{-2000}$$

$\tau \sim \frac{1}{w} \approx 10^{2000}$ с

время, кот надо ждать до дифф

Заменим выход атома из крист. на выход эл-на из атома

$M_{Fe} \to m_e \Rightarrow m \downarrow\downarrow$ в 10^5 раз

$e^{\sqrt{10^5}} \sim e^{300} \to w \sim e^{-20} \sim 10^{-10}$

В 1 см³ → 10^{23} эл-в
$V \sim 3\cdot10^7$ см/с

⇒ за 1 с. из 1 см² пов. ~10^{30} частиц пройдёт
⇒ $10^{30} w \sim 10^{20}$ част/с – тунн. эффект

$Md = 20\mathring{A}$ ↓ I ↓↓ в 10^{10} раз ⇒ Туннел. микроскоп - высокое разреш.

Классические соотношения должны выполняться для операторов соотв. величин! - 2 постулат квант. мех

пример 1) $T = \frac{p_x^2}{2m} \Rightarrow \hat{T} = \frac{(\hat{p}_x)^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\hat{p}_x^2 = \hat{p}_x \hat{p}_x \Psi.$$

$$\boxed{\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}$$

2) $\hat{x} = x \Rightarrow \forall$ ф-я от коорд - сама ф-я.

$\hat{U} = U(x,y,z)$

Тогда $\boxed{\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x,y,z)}$ - Гамильтониан

„Рецептурно" значимая часть системы постулатов

f: f_i - собств. зн. f ← измер.

$f = f_i \rightarrow \Psi = \Psi_i$ - собств. ф-и вел. f.

$\hat{f}\Psi_i = f_i\Psi_i$ спектр

$\langle f \rangle = \int \Psi_i^* \hat{f}\Psi_i \, dV = \int \Psi_i^* f_i \Psi_i \, dV = f_i \overbrace{\int \Psi_i^* \Psi_i dV}^{1}$

⇒ f_i - сред. зн-е f в сост. с данной ВФ

В рез. изм-я f обнаруж. только f_i, но f_i в сост. Ψ_i

$$\boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi \Rightarrow \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r})\right)\Psi = E\Psi, \; \Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(\vec{r})]\Psi = 0}$$ стац.

Класс: $\{q(t), p(t)\}$ - траект. $H(p,q) = E$ - полная аналог.

Идея: $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}(\vec{r})$. $E \neq T + U$

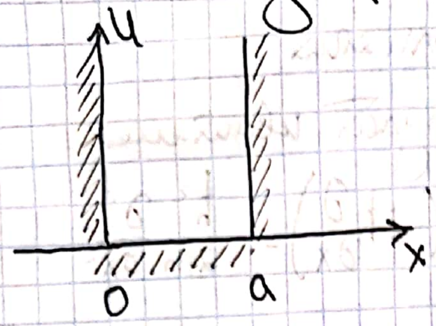
$\langle E \rangle = \int \Psi^* \hat{E}\Psi dV$

$\langle H \rangle = \int \Psi^* \hat{H}\Psi dV = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \langle U \rangle$

$\langle E \rangle = \langle H \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \langle U \rangle$.

Бесконечная прямоуг. пот. яма

Волновод – гранич. усл. ↔ квантование



$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x<0 \\ 0, & x\in(0,a) \\ +\infty, & x>a \end{cases}$$

$U_0 - E \to \infty$

гр. усл: $\psi(0)=0,\ \psi(a)=0$

в яме: $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi = 0$

$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\neq 0$ ($\psi = 0$ – в яме нет частицы)

$\psi(0)=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \psi(x) = 2iA\sin kx$

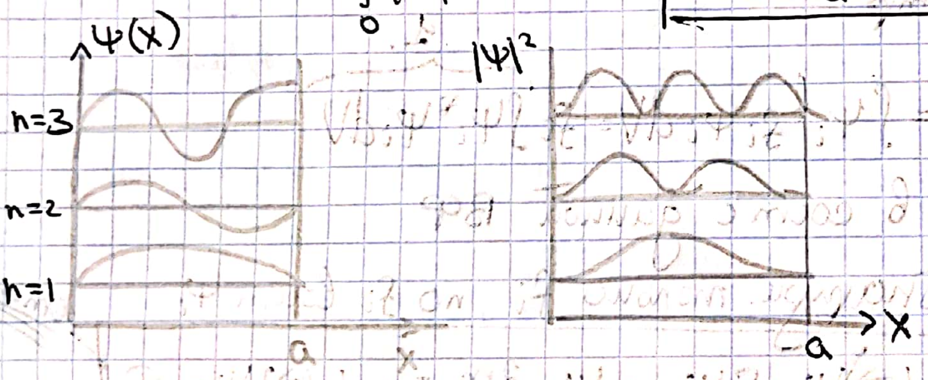
$\psi(a)=0 \Rightarrow k_n a = \pi n,\ n=1,2,\dots$

квант. число

$k_n = \dfrac{\pi}{a}n \Rightarrow \boxed{E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\ n=1,2,\dots}$

Нормировка: $\int_0^a |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow \boxed{\psi_n = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{\pi}{a}nx\right)}$ – квантование (дискр)

ф-я гранич. усл.

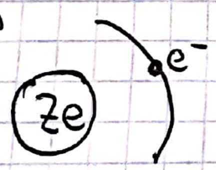


1) E дискр

2) $E_{min} = E_1 \neq$ дно ямы

$\Delta x \sim a \Rightarrow p \sim \Delta p \sim \hbar/a \Rightarrow E = \dfrac{p^2}{2m} \sim \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$

//Бор

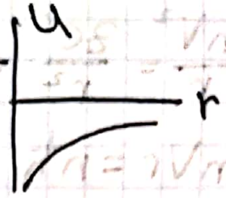


Водородоподоб. атом

$U(r) = -$

// Бор – водородоподоб. атом

(Ze) $)e^-$ $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$



$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = 0$ – сложно

Квазиклас. приближ.

Бор, 1913. 2 постулата: без этого

1. Длит. время атом м. наход. только в $E_1, E_2 \ldots$ (орбиты) стац.

2. $E_n \rightarrow E_m$: $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ – правило частот Бора

правило квантования Бора-Зоммерфельда

Гипотеза: $L = n\hbar$, $n = 1, 2, \ldots$ Как пришел?

Планк: $\hbar\omega$ – изл-е пот/изл. дискр. порциями

Полная энергия изл. с ω: $\underline{\mathcal{E}_n = n\hbar\omega}$, $n = 1, 2, \ldots$ ($n = 0$ – нет излучения)

$\Rightarrow$ энергия ЭМ поля квантуется

Из ЭД поле излучение $\equiv$ поле осцилл-в. $\rightarrow$ квантуется энергия осциллятора

Для e^-: $n\hbar\omega = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}}$, $n = 1, 2, \ldots$

q, p – коорд. и импульс

n, ω – фикс.

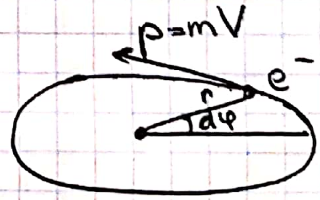
$\{p, q\} \Rightarrow$ эллипс: $a = \sqrt{\frac{2n\hbar\omega}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}$

фаз. пр-во

$b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$

Площ. эллипса в (p, q):

$S = \pi a b = 2\pi n\hbar$



$dq = r\,d\varphi$

сдр. стороны

$\boxed{\oint p\,dq = 2\pi n\hbar}$

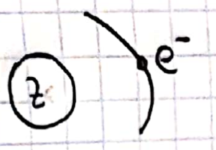
$S = \oint p\,dq = \oint \underline{mVr}\,d\varphi = 2\pi L$

$2\pi\hbar$ – ячейка (min, отраж. сост. ост)

$\Rightarrow 2\pi n\hbar = 2\pi L \Rightarrow L = n\hbar.$

Стоя. волн?

Сканировано с CamScanner



$$\frac{mV^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow (mVr)^2 = mZe^2 r$$

$$mVr = n\hbar$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2}\,\frac{n^2}{Z}, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

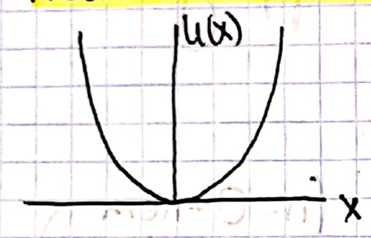
$\frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}529\ \text{Å}$ – боровский радиус

$$mV_n^2 = \frac{Ze^2}{r_n}$$

$$E_n = \frac{mV_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{Ze^2}{2r_n} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\,\frac{Z^2}{n^2}$$

$\frac{me^4}{2\hbar^2} = \varepsilon_Б \approx 13{,}60$ эВ – энерг. Бора / пост. Ридберга

Квантование энергии гарм. осцил-ра



$$U = U_0 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad k = \omega^2 m$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$$

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

$n = 0$ – энергия нулевых колебаний