Семинар 4 (28.09.20)

Ур-е Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эф-т.

Прош. сем. Ψ – волн. ф-я – ф-я Борна

① Формализм квантовой механики

$\Psi(\bar{r}, t) \xrightarrow{\text{свобод. час.}} A e^{-i/\hbar (Et - \bar{p}\bar{r})}$

$\Psi^* = A^* e^{i/\hbar (Et - \bar{p}\bar{r})}$ – не имеют физ. смысла

м.б. С, т.к. там сдвиг фаз

физ. смысл $\boxed{W_V = \int_V \Psi^* \Psi \, dV}$ – вер-ть наход. в V

В общ. случае (не для свобод. част.):

$\Psi = \sum_n \alpha_n \Psi_n$ – суперпозиция

базисные ф-и – базовые состояния

1) $\int_\infty \Psi_n^* \Psi_m = \delta_{nm}$ – ортонорм

A – измер. величина,

2) $\hat{A} \Psi_n = A_n \Psi_n$, Ψ_n – с.в. оператора A

Rem атом H.

$$\boxed{1 = \int \Psi^* \Psi \, dV = \sum |\alpha_n|^2 \int_\infty \Psi_n \Psi_m \, dV = \sum |\alpha_n|^2}$$

не знаем, какое сост-е реализ., но знаем, с какой вер-тью измерим какое сост.

$\langle A \rangle = \sum_n A_n |a_n|^2$

измер. сред. величины

$\langle p_e \rangle = 0$ в атоме H. $\qquad p = \overset{0}{\langle p \rangle} + \Delta p.$

- Оператор импульса:

$$\boxed{\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}}$$

- Оп-р энергии — Гамильтониан (перел. квант. мех.)

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + U(\bar{r}, t)}$$

ур. Дирака — реляв. не х.

② Нестационарное УШ. — не выводится (угад.)

переход Ψ при переходе м/у стац. сост.

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi}$$

- (!) ЗСЭ $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\bar{j} = 0.$ — для заряда / частиц.

$\rho = \Psi^*\Psi$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(\bar{r}, t)\Psi. \quad \Big| \cdot\Psi^*$$

$\ominus$

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^* + U(\bar{r}, t)\Psi^* \quad \Big| \cdot\Psi$$

$$i\hbar\frac{\partial(\Psi^*\Psi)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)$$

$$\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)$$

Для свобод. частицы ($\Psi = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \bar{p}\bar{r})}$):

$$j = -\frac{i\cancel{\hbar}}{\cancel{2}m}\underbrace{(AA^*)}_{\rho}\left(+\frac{i}{\cancel{\hbar}}p\cdot\cancel{2}\right) = \rho v$$

ск-ть

облако газа

③ Стационарное УШ.

$\boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi}$ решение - Ψ_n и E_n стац. сост-й системы

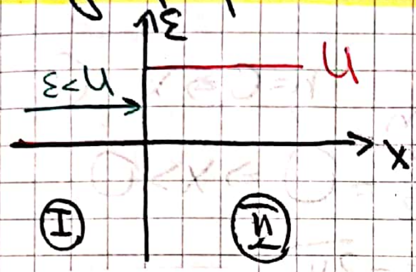
переноса в пл. волне нет

Rem $\partial\Psi/\partial t \neq 0$. Тут Ψ другая

в нестац

$$\boxed{\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\, e^{iEt/\hbar}}$$

④ Подбарьерное отражение



Налет. частицы с $\varepsilon < U$.

Найдем коэф. отраж. и прох. барьера.

• I $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = E\Psi$.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{=k_1}\Psi = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

волн. число

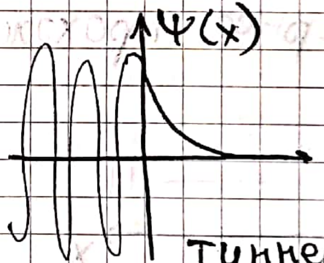
$$\Psi_1(x<0) = 1\cdot e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}$$

• II $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = (E-U)\Psi$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$$

$$\partial^2\Psi/\partial x^2 - k_2\Psi = 0.$$

$$\Psi_2(x>0) = \underset{\text{прох}}{d}\, e^{-k_2x} + \underset{=0}{f} e^{+k_2x}$$



Туннельный эффект: часть частиц прох. ч/з барьер

Rem Эксп. нараст. за пот. барьером ??? ⇒ $f = 0$

Ψ однознач, непр, огр

$$\begin{cases} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \\ \Psi'_{I x}(0) = \Psi'_{II x}(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + r = d \\ ik_1(1-r) = -k_2 d \end{cases}$$

сшивка ВФ

$$r = \frac{1 - ik_2/k_1}{1 + ik_2/k_1} = |r|e^{i\varphi}, \quad |r| = 1 \Rightarrow$$

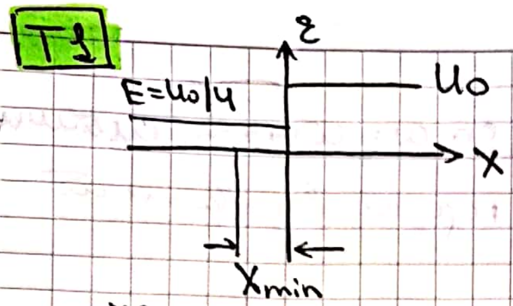
ЗСЭ не наруш, все частицы уйдут назад

φ — сдвиг фаз.

мен. $E_{нач}/U_{барьера}$ → мен. φ

$\Delta\varphi$ изм-да-ра

T1



• x_{min}: max ρ

min ρ

$$k_1/k_2=\sqrt{3} \Rightarrow r=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \varphi=\frac{4\pi}{3}$$ — разность налет. и прох. волн

• $$\rho(x)=\psi^*\psi=\left(e^{ik_1x}+e^{i\varphi}e^{-ik_1x}\right)^2=$$

$$=4\left(1+\cos(2k_1x-\varphi)\right)$$

$\rho(x)$ max $\Rightarrow \cos=1 \Rightarrow 2k_1x-\varphi=2\pi n$

$n=0 \quad 2k_1x-\frac{4\pi}{3}=0 \Rightarrow x>0$

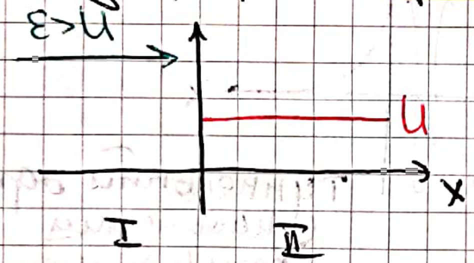
$n=-1 \quad 2k_1x-\varphi=-2\pi$

$2k_1x=-2\pi/3$

$$x_{max}=-\frac{\pi}{3k_1}=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\lambda}{2\pi}=-\frac{\lambda}{6}$$

⑤ Надбарьерное прохождение

$k_1>0,\ k_2>0.$



$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\overset{k_1^2}{\frac{2mE}{\hbar^2}}\psi=0$$

I. $\psi(x<0)=1\cdot e^{ik_1x}+re^{-ik_1x}$

II. $\psi(x>0)=de^{ik_2x}+\underset{=0}{fe^{-ik_2x}}$ — из ∞ ничего не придет

$$\begin{cases}1+r=d\\ k_1(1-r)=k_2d\end{cases}\qquad k_2(1+r)=k_1(1-r)$$

$$r(k_2+k_1)=k_1-k_2$$

$$r=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}>0.$$

$$R=r^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 \Rightarrow$$ ∀ ступеньки будет отр (сколь угодно мал) (кроме $\varepsilon=U$ — нет ступеньки)

отр. по энергии

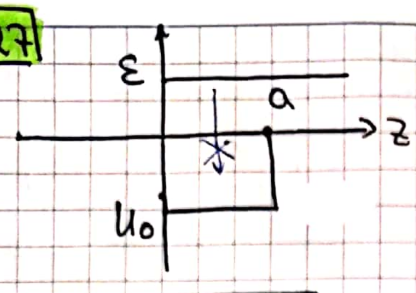
$$d=1+r=\frac{2k_1}{k_1+k_2}$$ — несимм

$$D=\frac{j_2}{j_1}=\frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}=d^2\cdot\frac{k_2}{k_1}=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$ — симм.

прох. по E

прох. нейтрона ч/з ядро. (р не оставил в нем)

3.27



$U_0 = 10$ эВ, $a = 4$ Å

$\varepsilon = 10^{-2}$ эВ. τ – ?

$\tau = (\nu D)^{-1}$

$1/$вер-ть вылететь за сек — число ударов о стенки

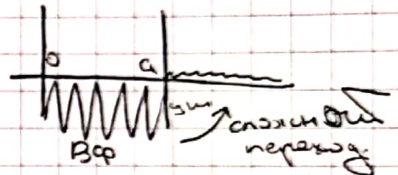
$$D = \frac{4\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+U_0)}}{(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon+U_0})^2} \underset{\varepsilon \ll U_0}{\approx} 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{U}} = 4\sqrt{\frac{10^{-2}}{10}} = 0{,}13$$ – вер-ть вылететь при 1 удара

Число ударов: $$\nu = \frac{v}{a} = \frac{\sqrt{2mU_0}}{m\, a} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}\,Дж}}{\sqrt{10^{-30}\,кг \cdot 16 \cdot 10^{-20}\,м}} = 5 \cdot 10^{15}$$

v ← ср. ск-ть

$U_0 + \varepsilon = U_0$ → p/m

$$\tau = \frac{1}{\nu D} \simeq 10^{-15}\ c$$



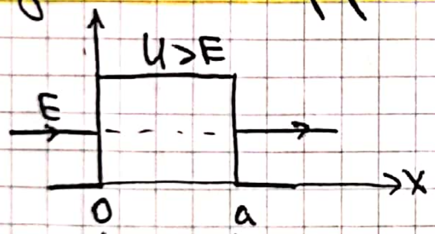
Rem исп. стац. УШ, а сост-е не стац.

грубо $\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \dfrac{\Psi_0}{\tau} = \dfrac{E}{\hbar}\Psi_0 \Rightarrow E\tau \sim \hbar$ – неопр.

$$\tau \sim \frac{10^{-34}\ Дж \cdot c}{10\ эВ} \approx 10^{-16}\ c$$

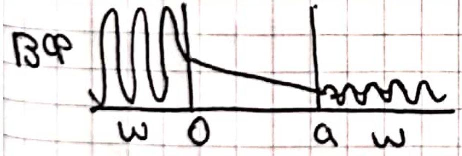
если h, то 10^{-15}.

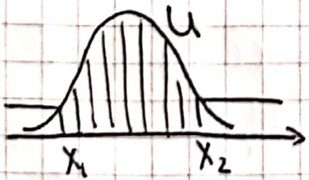
⑥ Туннельный эффект

- 

у частицы есть возм. вылететь

$$D = e^{-2\sqrt{2m(U-E)}\cdot a/\hbar}$$



- 

разбиваем на мал. прямоуг. пот. барьер

$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx\right)$$

Тунн. эффект позв. Солнцу светить

$p + p \to {}^2H + e^- + \nu_e + 6{,}5$ МэВ ← барьер. процесс

$T_{Солнц}$ = $E = 1$ кэВ

$$U = \frac{e^2}{r_{ядра}} = \frac{(5 \cdot 10^{-10})^2}{10^{-13}} \approx 10^{-6}\ эрг \sim 10^{6}\ эВ$$

пот. барьер (Кулон. отт.)