

Лагранжиан, пусть и через поля и их производные, но является скалярной функцией пространства времени, и перейти к координатам x можно по формуле

$$\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x + \tilde{\delta}x) = \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (7.1.25)$$

В итоге преобразованное действие (7.1.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left(1 + \frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\mu}\right) \left[\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Сохраняя лишь слагаемые первого порядка, мы его перепишем, как

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left[\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\mu} + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu\right) \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

Если рассматриваемые преобразования являются симметрией действия (7.1.6), то должно быть выполнено следующее

$$\int_{\Sigma} d^4x \left[\mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) - \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) + \partial_\mu (\tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon)) \right] = 0 \quad (7.1.28)$$

Поскольку часть, связанная с вариацией формы, уже рассматривалась в предыдущем разделе, то приведем лишь окончательный ответ

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta \Phi^\Upsilon + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \right) = 0 \implies \\ & \implies \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta \Phi^\Upsilon + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.1.29) \quad \text{GenCurrent}$$

Напоминаю, что последнее следствие верно в силу произвольности области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$. Теперь нам осталось перейти от вариации формы $\delta \Phi^\Upsilon$ к полной вариации, потому что, как правило, именно эти преобразования известны, а вариация формы является лишь вспомогательным инструментом доказательства. Связь между ними из (7.1.4) и (7.1.5) дается формулой

$$\tilde{\delta} \Phi^\Upsilon(x) = \Phi^\Upsilon(x') - \Phi^\Upsilon(x) = \Phi^\Upsilon(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \Phi^\Upsilon(x) - \Phi^\Upsilon(x) = \delta \Phi^\Upsilon(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.30)$$

После этой подстановки выражение для тока, отвечающего симметрии (7.1.3), (7.1.4), запишем в виде

$$\mathfrak{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} (\tilde{\delta} \Phi^\Upsilon - \tilde{\delta}x^\nu \partial_\nu \Phi^\Upsilon) + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \quad (7.1.31)$$

Слагаемые в этом выражении целесообразно перегруппировать и представить выражение в форме

$$\mathfrak{J}^\mu = \tilde{\delta}x^\nu \left(\delta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\nu \Phi^\Upsilon \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \tilde{\delta} \Phi^\Upsilon. \quad (7.1.32) \quad \text{NcurrentG}$$

Слагаемое в скобках называют **каноническим тензором энергии-импульса**

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu := \delta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\nu \Phi^\Upsilon. \quad (7.1.33) \quad \text{Tcan}$$

Далее мы покажем, что именно этот ток отвечает законам сохранения, связанным с трансляционной инвариантностью пространства времени.

Обращаю ваше внимание на одну тонкость. В выводе сохраняющегося тока по симметрии (7.1.3), (7.1.4) мы использовали уравнения движения, но сами преобразования симметрии должны быть симметриями действия и для полевых конфигураций, которые не дают экстремальность действия¹. В этом смысле в теоретической физике высоких энергий вводят понятия **off-shell** и **on-shell** симметрий, первые являются симметриями для произвольных полевых конфигураций, а вторые – только на уравнениях движения. В контексте этой терминологии мы исследовали off-shell симметрии.

В выводе (7.1.32) мы нигде не уточняли, рассматриваются ли глобальные или локальные симметрии. Напоминаю, что отличие заключается в том, что для первых параметры преобразований не являются функциями пространства времени, в отличие от вторых. Формула (7.1.32) справедлива для любых!

1.3 Трансляционная инвариантность. Тензор энергии-импульса

В предыдущем разделе был рассмотрен случай общих преобразований, которые вообще могут быть симметриями действия. Здесь же мы остановимся на преобразованиях, которые связаны исключительно с заменой координат. В частности, рассмотрим только трансляции, т.е. в качестве (7.1.3) у нас будут выступать

$$\tilde{\delta}x^\mu = Const. \quad (7.1.34) \quad \text{translati}$$

Также мы будем рассматривать преобразования полей (7.1.4), индуцированные исключительно заменой координат (см. формулы (1.1.6), (1.1.10), (1.1.19)). Поскольку мы рассматриваем только постоянные сдвиги (7.1.34), то все матрицы перехода из формул (1.1.10), (1.1.19), (1.1.20) равны единичным

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (x^\mu + \tilde{\delta}x^\mu)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \dots = \delta_\nu^\mu, \quad (7.1.35)$$

и у полей преобразуется только аргумент: например, для векторного поля $A^\mu(x)$ справедливо следующее

$$\tilde{\delta}A^\mu(x) = \delta_\nu^\mu A^\nu(x(x')) - A^\mu(x) = A^\mu(x(x')) - A^\mu(x) = 0. \quad (7.1.36)$$

¹В суперсимметричных теориях бывает, что уравнения движения обладают инвариантностью относительно преобразований суперсимметрии, а действие, из которого они были получены, – нет.

Аналогичное верно для тензоров любого ранга и даже спинорных полей. Т.е. для любого набора полей теории, если выполняются исключительно постоянные трансляции, выполнено

$$\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) = 0. \quad (7.1.37) \quad \boxed{\text{scalar2}}$$

Для этой симметрии ((7.1.34) и (7.1.37)) Нётеровский ток (7.1.32) приобретает вид

$$\mathfrak{J}^{\mu} = \tilde{\delta}x^{\nu} \left(\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\nu} \Phi^{\Upsilon} \right), \quad (7.1.38)$$

который сохраняется при любых значения $\tilde{\delta}x^{\nu}$, а следовательно мы имеем 4 условия сохранения и 4 соответствующих им заряда

$$\partial_{\mu} T_{can}{}^{\mu}{}_{\nu} = 0, \quad Q_{\nu} = \int d^3x T^0{}_{\nu}. \quad (7.1.39) \quad \boxed{\text{conserve}}$$

Далее мы покажем, что заряд Q_0 отвечает энергии рассматриваемой полевой системы, а $Q_{1,2,3}$ – импульсу, отсюда и название тензора, по которому они были получены.

Лекция 8

26 октября 2022

8.1 Тензор энергии-импульса скалярного поля

аларField

На предыдущей лекции мы получили так называемый канонический тензор энергии-импульса, который является сохраняющимся током, отвечающим трансляционной инвариантности действия. Ниже на примере скалярного поля мы оправдаем его название. Действие для свободного вещественного скалярного поля имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (8.1.1)$$

Подставив соответствующие производные в (7.1.33), мы получим

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (8.1.2)$$

Если метрикой поднять индекс ν , то получим

$$T_{can}{}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi. \quad (8.1.3) \quad \text{TcanUP}$$

Из этого выражения видно, что тензор энергии-импульса для скалярного поля является симметричным (относительно перестановки индексов $\mu \leftrightarrow \nu$). Только для скалярных полей процедура получения тензора энергии-импульса через теорему Нётер приводит к симметричному выражению! Ниже мы увидим, что канонический тензор энергии-импульса для электромагнитного поля уже не является симметричным. Рассмотрим $T_{can}{}^{00}$ компоненту

$$T_{can}{}^{00} = \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \dot{\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{2} ((\dot{\phi})^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2), \quad (8.1.4)$$

где было использовано следующее сокращенное обозначение

$$(\nabla \phi)^2 := \partial_1 \phi \partial_1 \phi + \partial_2 \phi \partial_2 \phi + \partial_3 \phi \partial_3 \phi. \quad (8.1.5) \quad \text{Tcan00}$$

Вычислим теперь плотность функции Гамильтона (Гамильтониан) для свободного вещественного скалярного поля. По аналогии с механикой Гамильтониан определяется по формуле

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (8.1.6)$$

Прямое вычисление дает следующее выражение

$$\mathcal{H} = (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}((\dot{\phi})^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2). \quad (8.1.7) \quad \boxed{\text{Ham}}$$

Обращаю ваше внимание, что получившееся выражение является положительным, как и ожидалось для плотности функции Гамильтона, кроме того, оно с точностью до общего множителя совпадает с T_{can}^{00} (8.1.5). Это сходство оправдывает название тензора, определенного в (7.1.33), потому как его 00 компонента совпадает с Гамильтонианом, т.е. описывает плотность энергии полевой системы¹. Желющие могут также убедиться в том, что T_{can}^{0i} компоненты отвечают плотностям переносимого полевой системой импульса (см., например, Боголюбов, Ширков «Квантовые поля»).

8.2 Тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля

Мы не просто так рассмотрели сперва простой пример со скалярным полем. Гамильтонов анализ электродинамики является весьма нетривиальной задачей из-за наличия калибровочной инвариантности. В частности, если вычислить канонический импульс, отвечающий A_0 , то получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0} = 0. \quad (8.2.1)$$

Т.е. электродинамика является системой со связью. Разрешить эту связь, сохраняя при этом явную лоренц-ковариантность, к сожалению, невозможно (см. раздел 5.5 про фиксацию калибровки).

Вычислим по формуле (7.1.33) канонический тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля

$$T_{can}^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{1}{4}\delta_{\nu}^{\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho}\partial_{\nu}A_{\rho}. \quad (8.2.2) \quad \boxed{\text{EMcan}}$$

Если поднять индекс ν

$$T_{can}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho}\partial^{\nu}A_{\rho}, \quad (8.2.3)$$

то получившийся тензор не является симметричным. Его симметричность нужна для построения совместного взаимодействия света с гравитационным полем. Тем не менее, для нас куда важнее, что получившееся выражение не является калибровочно инвариантным, поскольку зависит не только от $F_{\mu\nu}$, но и от A_{μ} . Как мы выяснили в предыдущем разделе, T_{can}^{00} отвечает плотности энергии поля, а это измеримая в эксперименте величина, которая должна быть калибровочно инвариантной!

Определяющим свойством тензора энергии-импульса является то, что он сохраняющий ток $\partial_{\mu}T_{can}^{\mu}{}_{\nu} = 0$, по которому потом могут быть построены сохраняющиеся во времени заряды (интегралы движения). Само выражение для тензора энергии-импульса

¹Подобные прямые аналогии справедливы только для скалярного поля, но мы будем пользоваться и для других полей. Имеется ввиду, что T_{can}^{00} не обязательно является плотностью энергии для произвольной полевой системы.

можно модернизировать, не нарушая при этом условие сохранения. Действительно, если к $T_{can}{}^\mu{}_\nu$ добавить тривиально сохраняющиеся слагаемые

$$\partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu, \quad U^{\mu\rho}{}_\nu = -U^{\rho\mu}{}_\nu, \quad (8.2.4) \quad \boxed{\text{improv}}$$

то условие сохранения не нарушится

$$\partial_\mu (T_{can}{}^\mu{}_\nu + \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu) = \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \partial_\mu \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu = 0, \quad (8.2.5)$$

где на последнем шаге мы воспользовались антисимметричностью $U^{\mu\rho}{}_\nu$ ² по верхним индексам (8.2.4). Т.е. добавки типа (8.2.4) меняют выражение для сохраняющихся токов, но тривиально сохраняются. В этом свете тензором энергии-импульса в литературе называют не только выражение (7.1.33), но и все производные из него, полученные добавлением слагаемых типа (8.2.4). Подчеркнем, что когда говорится о **каноническом** тензоре энергии-импульса, то под этим всегда понимают выражение (7.1.33), которое в случае свободного электромагнитного поля равно (8.2.2). В литературе по теории поля доказывается, что если рассматриваемая полевая система обладает лоренц-инвариантностью, то подобного рода добавки всегда можно перейти от канонического тензора энергии-импульса к симметричному³. Рассмотрим добавку

$$U^{\mu\rho}{}_\nu = -F^{\mu\rho} A_\nu, \quad (8.2.6)$$

тогда

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu - \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = -\frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho (F^{\mu\rho} A_\nu). \quad (8.2.7) \quad \boxed{\text{preTensor}}$$

Напоминаю, что условие сохранения для тока (7.1.39) верно только в том случае, когда поля решают уравнения движения, которые для свободной электродинамики имеют вид $\partial_\rho F^{\mu\rho} = 0$. Последнее позволяет представить (8.2.7) в виде

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu - \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = -\frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho} F_{\nu\rho}. \quad (8.2.8) \quad \boxed{\text{preTensor}}$$

Получившееся выражение является калибровочно инвариантным! Определим тензор энергии импульса для свободного электромагнитного поля в виде

$$T_{EM}{}^\mu{}_\nu := \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F_{\nu\rho}. \quad (8.2.9) \quad \boxed{\text{EMtensor}}$$

Это выражение отличается от (8.2.8) общим знаком, который очевидно никак не влияет на условие сохранения, сделано это для того, чтобы $T_{EM}{}^{00}$ отвечало плотности энергии, а не минус плотности энергии (см. раздел 8.1 про скалярное поле). Если в выражении (8.2.9) поднять индекс ν

$$T_{EM}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho, \quad (8.2.10)$$

²Мне неизвестно какое-то общепринятое название для $U^{\mu\rho}{}_\nu$ в русскоязычной литературе. В ОТФ ФИАН их называют *импрувментами*.

³В литературе по теории гравитации также приводится так называемая процедура Розенфельда, которая сразу приводит в симметричному выражению для тензора энергии-импульса, но которая требует модификации действия. Действие в этой процедуре должно быть инвариантно относительно произвольных гладких замен координат (диффеоморфизмов).

то легко видеть, что получившееся выражение симметрично по индексам μ и ν .

Если рассмотреть конкретные компоненты, в частности

$$T_{EM}^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad T_{EM}^{i0} = [\vec{E}, \vec{H}]^i, \quad (8.2.11)$$

то можно узнать уже знакомые вам из курса Общей Физики выражения для плотности энергии электромагнитного поля и вектора Умова-Пойнтинга соответственно

$$W = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (8.2.12) \quad \boxed{\text{WS}}$$

Условие сохранения $\partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu}$ для $\nu = 0$ имеет вид

$$\partial_\mu T_{EM}^{\mu 0} = 0 \implies \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0. \quad (8.2.13)$$

Последнее уравнение называют **уравнением баланса энергии в отсутствии внешних токов (источников)**.

8.3 Электромагнитное поле с внешними токами

Действие для системы, которую мы будем рассматривать, имеет вид

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \right), \quad (8.3.1)$$

т.е. Лагранжиан уже НЕ является только функцией полей и их производных, но имеет еще и явную зависимость от координат пространства времени

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \underline{J_\mu(x)}). \quad (8.3.2)$$

Появление такой зависимости обусловлено тем, что мы рассматриваем незамкнутую систему. Можно было бы проделать вывод тензора энергии-импульса с учетом этой явной зависимости (см., например, Ицксон, Зюбер «Квантовая теория поля» Том 1). Мы же поступим иначе: мы возьмем тензор энергии-импульса для электромагнитного поля (8.2.9) и продифференцируем его с учетом того, что поля уже подчиняются не свободным уравнениям, а $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$. Естественно, действуя таким образом, мы не получим ноль, но найдем слагаемое, которое стоит добавить для того, чтобы условие сохранения снова было выполнено.

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(\frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} \right) = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} - J^\rho F_{\nu\rho} - F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - J^\rho F_{\nu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\nu\mu} - J^\rho F_{\nu\rho} = \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\rho} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) - J^\rho F_{\nu\rho} = -J^\rho F_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Здесь мы использовали то, что выполнена первая пара уравнений Максвелла. Таким образом, в присутствии внешнего тока выполняется следующий закон сохранения

$$\partial_\mu T_{EM}{}^\mu{}_\nu + J^\rho F_{\nu\rho} = 0. \quad (8.3.4)$$

Если подставить явный вид тензора электромагнитного поля через \vec{E} и \vec{H} (4.3.12) и выражение для тока (5.4.6), то $\nu = 0$ компонента этого уравнения может быть представлена в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + (\vec{j}, \vec{E}) = 0. \quad (8.3.5)$$

Последнее уравнение называют **уравнением баланса энергии с внешними источниками**.

8.4 Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и точечной частицы

Пусть траектория частицы в пространстве времени задается некоторой функцией $y^\mu(s)$, тогда для системы «электромагнитное поле и заряженная частица» можно представить в виде

$$S[A_\mu, y^\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m \int ds - e \int A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} ds. \quad (8.4.1) \quad \boxed{\text{S}_0}$$

Это действие можно эквивалентно переписать в виде

$$S[A_\mu, y^\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x \int ds \left(m + e \int A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} \right) \delta^{(4)}(x - y(s)), \quad (8.4.2) \quad \boxed{\text{S}_1}$$

где дельта-функцию следует понимать как

$$\delta^{(4)}(x - y(s)) := \delta(x^0 - y^0(s)) \delta(x^1 - y^1(s)) \delta(x^2 - y^2(s)) \delta(x^3 - y^3(s)). \quad (8.4.3)$$

Если во втором слагаемом (8.4.2) выполнить сперва интеграл по x , то очевидно, что (8.4.1) и (8.4.2) совпадают. Действие (8.4.2) инвариантно относительно трансляций

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu, \quad y^\mu \rightarrow y^\mu - a^\mu, \quad (8.4.4) \quad \boxed{\text{symm}}$$

где a^μ – произвольный постоянных вектор в пространстве времени.

Несмотря на то что действие инвариантно только относительно постоянных трансляций, т.е. вектор a^μ не является функцией пространства времени, на практике полезен следующий технический прием для нахождения сохраняющегося тока, который может быть применен для любых глобальных симметрий действия: будем считать, что параметр симметрии (в нашем случае вектор a^μ) является функцией пространства времени, тогда разность преобразованного (с учетом того, что параметр является функцией пространства времени) и непреобразованного действий будет иметь вид

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu (\varepsilon(x)) J^\mu, \quad (8.4.5)$$

где $\varepsilon(x)$ – это параметр глобальной симметрии, который мы фиктивно сделали функцией пространства времени. Такой вид вариации неизбежно получится потому, что действие по предположению инвариантно для постоянных параметров. Затем после интегрирования по частям получим

$$\delta S = - \int d^4x \varepsilon(x) \partial_\mu J^\mu, \quad (8.4.6) \quad \text{Rcurrent}$$

после чего, вспомнив, что параметры должны быть константами, получаем сохраняющиеся токи $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Поскольку мы уже знаем чему равна вариация действия для электромагнитного поля при преобразованиях (8.4.4), то заново новым способом ее выводить не будем (учтите, что из (8.4.4) следует, что $\tilde{\delta}x^\mu = -a^\mu$), а остановимся лишь на части, связанной с частицей. Вариация действия (8.4.2) относительно преобразования (8.4.4) равна

$$\begin{aligned} \delta S[A_\mu, y^\mu] = & - \int d^4x a^\nu(x) \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \\ & + \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)), \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

где $T_{can}{}^\mu{}_\nu$ дается формулой (8.2.2). Далее будем рассматривать только часть действия, связанного с частицей. Сама эта вариация была получена следующим образом. Просто по определению нам нужно рассмотреть следующую разность

$$\begin{aligned} \delta S_{part.} = & \int d^4x \int ds \left[-m \sqrt{\frac{d(y^\mu - a^\mu)}{ds} \frac{d(y^\nu - a^\nu)}{ds}} \eta_{\mu\nu} - e A_\mu(y - a) \frac{d(y^\mu - a^\mu)}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)) - \\ & - \int d^4x \int ds \left[-m \sqrt{\frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}} \eta_{\mu\nu} - e A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)). \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Оставляя лишь слагаемые с первой степенью по a^μ , мы можем привести эту разность к виду

$$\delta S_{part.} = \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.9)$$

Обращаю ваше внимание на схожесть полученной формулы и выражений из раздела 4.3, где на месте a^μ была вариация траектории частицы в пространстве времени δx^μ . Мы хотим привести соответствующее выражение к виду (8.4.6). Обращаю ваше внимание, что при интегрировании по частям нужно дифференцировать еще и дельта-функцию, производная которой по s равна

$$\frac{d}{ds} \delta^{(4)}(x - y(s)) = \frac{dy^\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.10)$$

После череды упрощений нам удалось привести вариацию части действия, связанного с

частицей, к виду

$$\begin{aligned}\delta S_{particle} &= \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)) = \\ &= \int d^4x \int ds a_\mu \left(m \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} - e F^{\mu\nu} \frac{dy_\nu}{ds} \right) \delta^{(4)}(x - y(s)) + \\ &\quad + \int d^4x \int ds a^\mu \left(m \frac{dy_\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + e A_\mu \frac{dy^\nu}{ds} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^{(4)}(x - y(s)).\end{aligned}\quad (8.4.11)$$

Первое слагаемое равно нулю, так как мы предполагаем, что траектория частицы удовлетворяет уравнениям движения (4.3.11).

В итоге полную вариацию действия можно представить в виде

$$\delta S = \int d^4x a^\nu(x) \left(-\partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy_\nu}{ds} + e A_\nu \frac{dy^\mu}{ds} \right] \right). \quad (8.4.12)$$

Теперь вспомним, что мы рассматриваем только постоянные трансляции, так как только они являются симметриями действия, и сразу же получим сохраняющийся ток

$$T_{can}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) \left(m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + e A^\nu \frac{dy^\mu}{ds} \right), \quad (8.4.13)$$

который является каноническим тензором энергии-импульса для системы: электромагнитное поле и заряженная частица. Полученное выражение не является симметричным по индексам μ, ν и не является калибровочно инвариантным. Тем не менее, его можно сделать калибровочно инвариантным и симметричным с помощью добавки

$$\partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A_\nu). \quad (8.4.14)$$

Калибровочно инвариантный тензор энергии-импульса для заряженной частицы и электромагнитного поля имеет вид

$$T_{EM+part.}{}^{\mu\nu} := \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}. \quad (8.4.15) \quad \boxed{\text{gaugeInv}}$$

Здесь мы воспользовались тем, что электромагнитное поле решает уравнения Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, и ток равен (6.1.10), который можно эквивалентно представить в виде

$$J^\mu = e \frac{dy^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}(s)) \Big|_{t=y^0(s)} = e \int ds \frac{dy^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.16) \quad \boxed{4\text{Current}}$$

Обращаем внимание, что несмотря на то что рассматривалась взаимодействующая система, тензор энергии-импульса состоит из двух независимых вкладов, которые отвечают свободному электромагнитному полю и свободной частице

$$T_{part.}{}^{\mu\nu} := \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}. \quad (8.4.17)$$

Лекция 9

2 ноября 2022

9.1 Электростатика

Рассмотрим вторую пару уравнений Максвелла в системе СГС

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad J^\nu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (9.1.1)$$

которая после наложения условия Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ ¹ приобретает вид (см. раздел 5.5)

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (9.1.2) \quad \text{LorGauge}$$

В **электростатике** отсутствуют токи, т.е. $\vec{j} = 0$, и в силу уравнения непрерывности плотности не зависят от времени

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (9.1.3)$$

Уравнения (9.1.2) после разделения временных пространственных компонент имеют вид

$$\square A^0 = 4\pi\rho, \quad \square A^i = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1.4)$$

Очевидно, что $A^i = 0$ является частным решением для пространственных компонент уравнения (9.1.2). Условие Лоренца при этом накладывает ограничения на зависимость A^0 от времени

$$\partial_0 A^0 + \text{div} \vec{A} = 0 \implies \partial_0 A^0 = 0. \quad (9.1.5)$$

Т.е. $A^0 = \phi$ компонента 4-потенциала не зависит от времени. С учетом этого для нахождения полей в электростатике остается решить уравнение

$$\Delta \phi = -4\pi\rho, \quad (9.1.6) \quad \text{Puasson}$$

которое также называют **уравнением Пуассона**.

¹В каждой конкретной задаче из соображений удобства накладывают соответствующие условия, (частично) фиксирующие калибровку. В электростатике таким условием является условие Лоренца, в магнитостатике – калибровка Кулона.

9.2 Функция Грина уравнения Пуассона

Уравнение на функцию Грина для уравнения Пуассона имеет вид

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (9.2.1) \quad \boxed{\text{Green}}$$

здесь обозначение Δ_x означает, что оператор Лапласа действует только на \vec{x} аргумент функции $G(\vec{x}, \vec{y})$. Обращаю ваше внимание, что в литературе нет какой-либо унифицированной договоренности относительно коэффициентов в правой части (9.2.1) перед дельта-функцией, поэтому, прежде чем использовать выражение из какого-либо учебника, обязательно посмотрите, как устроена правая часть уравнения (9.2.1).

Прежде чем непосредственно приступить к решению (9.2.1), выясним, чем же так хорош формализм функции Грина. Предположим, что мы каким-то образом решили (9.2.1) и нашли $G(\vec{x}, \vec{y})$, тогда решение уравнения Пуассона с произвольной правой частью может быть записано в виде

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}). \quad (9.2.2) \quad \boxed{\text{GreenCont.}}$$

Действительно, подставим это выражение в уравнение Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\vec{x}) &= \Delta \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \int d^3y \Delta G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \\ &= -4\pi \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}) = -4\pi \rho(\vec{x}). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Т.е. решив однажды уравнение (9.2.1), мы можем для произвольной правой части выписать решение в виде (9.2.2). Но тут стоит также отметить, что функция Грина из уравнения (9.2.1) не определяется однозначно: к ней всегда можно добавить решение однородного уравнения. Добавление решений однородного уравнения позволяет учитывать специфические граничные условия. Далее нас будут интересовать «физические» граничные условия, т.е. $\phi(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0$, последнее не приводит к противоречию, поскольку мы считаем, что нет зарядов на пространственной бесконечности $\rho(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0$.

Приступим наконец к решению (9.2.1). Воспользуемся однородностью пространства, т.е. тем, что выражение для функции Грина должно быть инвариантно относительно преобразований вида

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a} \quad \vec{y} \rightarrow \vec{y} + \vec{a}. \quad (9.2.4)$$

Эта симметрия позволяет перейти от общего выражения к

$$G(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow G(\vec{x} - \vec{y}). \quad (9.2.5)$$

Уравнение (9.2.1) – это уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, которое может быть решено преобразованием Фурье. Фурье-образы функции Грина и дельта-функции имеют следующий вид

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \tilde{G}(\vec{k}), \quad (9.2.6) \quad \boxed{\text{GreenF}}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (9.2.7) \quad \boxed{\text{deltaF}}$$

Подставляя (9.2.6) и (9.2.7) в уравнение (9.2.1), мы получим

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} (-\vec{k}^2) \tilde{G}(\vec{k}) = -4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \iff \vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 4\pi. \quad (9.2.8)$$

Откуда находим, что фурье-образ для функции Грина равен

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2}. \quad (9.2.9) \quad \text{GreenMom}$$

Обращаю ваше внимание, что полученное выражение зависит только от модуля \vec{k} . Следствием какой симметрии является такая зависимость? Теперь используя (9.2.6), мы получим выражение для функции Грина в координатном пространстве (выражение (9.2.9) часто называют представлением функции Грина в импульсном пространстве)

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = 4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2}. \quad (9.2.10)$$

Для краткости введем обозначение

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}, \quad (9.2.11)$$

а сам интеграл будем вычислять, перейдя в сферические координаты в k -пространстве. Ось z в этом пространстве направим вдоль вектора \vec{r} , тогда интеграл примет вид

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{y}) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2} = \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\xi e^{ikr\xi} = \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} = \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k}. \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

Последний интеграл не расходится в окрестности $k = 0$, и мы можем его эквивалентно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k + i\delta}, \quad (9.2.13)$$

а этот интеграл может быть вычислен с помощью уже известной вам теоремы Коши о вычетах. Для дальнейшего удобства разобьем этот интеграл на два слагаемых

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k + i\delta} - \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} \right], \quad (9.2.14)$$

Чтобы воспользоваться теоремой Коши о вычетах, нам необходим **замкнутый** контур!, для того чтобы замкнуть его удобным образом, воспользуемся леммой Жордана. У нас $r > 0$, следовательно в первом интеграле контур следует замыкать в верхней полуплоскости (см. Рис 9.1), так как в этом случае интеграл вдоль добавленного замыкания будет равен нулю, а во втором интеграле контур следует замкнуть в нижней полуплоскости. Таким образом, мы имеем

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\oint_{\Gamma_1} dk \frac{e^{ikr}}{k + i\delta} - \oint_{\Gamma_2} dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} \right], \quad (9.2.15)$$

где контуры Γ_1, Γ_2 изображены на рисунке 9.1. Контур Γ_1 не охватывает никаких полюсов, поэтому по теореме Коши о вычетах соответствующий интеграл равен нулю. В области, охватываемой контуром Γ_2 , есть полюс первого порядка. В итоге получаем

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_2} dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} = \frac{1}{2\pi ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi i e^{-\delta r} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (9.2.16) \quad \text{Coulomb}$$

Полученное выражение должно быть вам знакомо, поскольку это потенциал в точке \vec{x} единичного положительного заряда, находящегося в точке \vec{y} . Теперь вернемся к формуле

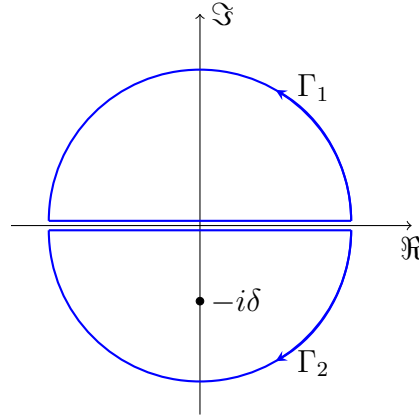


Рис. 9.1: Контура Γ_1 и Γ_2 и расположение полюса

contours

(9.2.2). Мы считаем, что заряды расположены в некоторой компактной области, поэтому при стремлении $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ потенциал обращается в ноль, что соответствует нашим «физическим» граничным условиям, и никакой модификации (9.2.16) решениями однородного уравнения не требуется.

Для системы точечных зарядов, плотность которой задается формулой

$$\rho(\vec{R}) = \sum_J e_J \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{r}_J), \quad (9.2.17)$$

где e_J – это величина точечного заряда, а \vec{r}_J – его радиус-вектор, потенциал будет очевидно равен

$$\phi(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{|\vec{R} - \vec{r}_J|}. \quad (9.2.18) \quad \text{potential}$$

Далее мы будем изучать поведение потенциала при больших \vec{R} , в случае, когда заряды локализованы в некоторой малой области пространства.

2.1 Мультипольное разложение

Multipole

В этом разделе мы изучим различные приближения формулы (9.2.18), которые оказываются важны в практических приложениях. Для удобства поместим начало координат внутри компактной области, в которой сосредоточены заряды (см. рисунок 9.2). Считая,

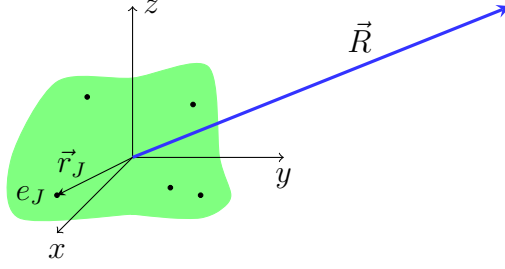


Рис. 9.2: Система координат и пространственное расположение зарядов

charges

что точка, в которой мы хотим вычислить потенциал, сильно удалена от системы зарядов, т.е. $|\vec{r}_J| \ll |\vec{R}|$, мы можем представить (9.2.18) в виде

$$\phi(\vec{R}) = \underbrace{\sum_J \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{точечный заряд}} - \underbrace{\sum_J r_{Ji} \frac{\partial}{\partial R_i} \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{диполь}} + \underbrace{\sum_J \frac{1}{2} r_{Ji} r_{Jj} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{квадруполь}} + \dots \quad (9.2.19)$$

phiTaylor

Чтобы представить каждое из слагаемых явно, нам нужно вычислить соответствующие производные

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{R}|} = \partial_i \frac{1}{\sqrt{R_k R_k}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}} 2R_i = -\frac{1}{(R_k R_k)} \frac{R_i}{\sqrt{R_k R_k}}. \quad (9.2.20)$$

В векторных обозначениях последнее равенство можно записать в виде

$$\nabla \frac{1}{|\vec{R}|} = -\frac{\vec{n}}{|\vec{R}|^2}. \quad (9.2.21)$$

nablaR

где единичный вектор нормали определен каноническим образом $\vec{n} = \vec{R}/|\vec{R}|$. Вторые производные от $\frac{1}{R}$ соответственно равны

$$\partial_j \partial_i \frac{1}{|\vec{R}|} = \partial_j \left(-\frac{1}{(R_k R_k)} \frac{R_i}{\sqrt{R_k R_k}} \right) = 3 \frac{R_i R_j}{(R_k R_k)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.2.22)$$

Дипольным моментом системы зарядов называется вектор

$$d_i := \sum_J q_J r_{Ji}. \quad (9.2.23)$$

dipole

В этих обозначениях дипольный вклад в формуле (9.2.19) можно записать в виде

$$\phi_{dipole}(\vec{R}) = \frac{(\vec{d}, \vec{n})}{R^2}. \quad (9.2.24)$$

dipolePhi

В аналогичном виде

$$\phi_{multipole} = \frac{1}{n!} \frac{O_{i_1 \dots i_n} n_{i_1} \dots n_{i_n}}{R^{n+1}} \quad (9.2.25)$$

multipole

мы хотим! представить все мультипольные порядки разложения. Удобство такого представления заключается в том, что мы явно выделяем некоторые характеристики системы зарядов, мультипольные моменты $O_{i_1 \dots i_n}$, которые вообще не зависят от того, в какой точке мы собираемся вычислять потенциал ($\partial_{\vec{R}} O_{i_1 \dots i_n} = 0$). Продолжая разложение (9.2.19), можно убедиться в том, что любой порядок можно привести к виду (9.2.25). Пока вклад, отвечающий квадрупольному слагаемому,

$$\phi_{quad}(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{2} r_{Ji} r_{Jj} \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}}, \quad (9.2.26) \quad \text{preQuad}$$

не имеет вида типа (9.2.25). Тем не менее, его можно эквивалентно переписать в виде

$$\phi_{quad}(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{2R^3} (3r_{Ji} r_{Jj} - |\vec{r}_J|^2 \delta_{ij}) n_i n_j. \quad (9.2.27)$$

Появившийся в этом представлении симметричный бесследовый тензор второго ранга

$$D_{ij} := \sum_J e_J (3r_{Ji} r_{Jj} - |\vec{r}_J|^2 \delta_{ij}) \quad (9.2.28) \quad \text{Quad}$$

называют **квадрупольным моментом** системы зарядов.

Используя новые определения, разложение потенциала можно записать в виде

$$\phi(\vec{R}) = \frac{Q}{R} + \frac{(\vec{d}, \vec{n})}{R^2} + \frac{D_{ij} n_i n_j}{2R^3} + \dots, \quad (9.2.29)$$

где $Q = \sum_J e_J$ – полный заряд системы.

2.2 Симметрии и тензор квадрупольного момента

Для произвольной фигуры тензор квадрупольного момента определяется пятью независимыми компонентами: 6 из симметрии и минус 1 из бесследовости. Для фигур, обладаю-

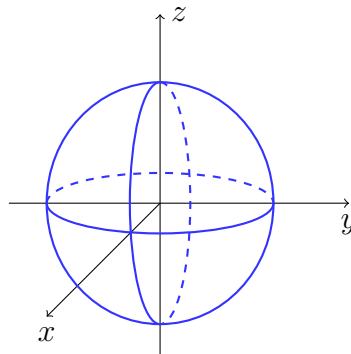


Рис. 9.3: Равномерно заряженный эллипсоид

ellipse

щих симметриями, количество компонент, определяющих тензор квадрупольного момента меньше. Рассмотрим в качестве примера однородно заряженный эллипсоид из задания

(см. рисунок 9.3). Эта фигура очевидно симметрична при поворотах на π вокруг любой из осей. Посмотрим к каким ограничения на компоненты тензора квадрупольного момента это приводит. Матрица поворота на π вокруг оси z имеет вид

$$A_{z,\pi}^j{}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.30)$$

Тензор квадрупольного момента после такой замены координат будет иметь вид

$$D'_{ij} = A_i^m A_j^n D_{mn} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & -D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9.2.31)$$

Поскольку тензор квадрупольного момента при такой замене не меняется $D'_{ij} = D_{ij}$ из-за симметрии фигуры, то имеем следующие ограничения на компоненты тензора, следующие из этой симметрии,

$$D_{xz} = 0, \quad D_{yz} = 0. \quad (9.2.32) \quad \boxed{\text{PIz}}$$

Аналогично из симметрии при повороте на π относительно оси x

$$A_{x,\pi}^j{}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.2.33)$$

получим, что

$$D_{xy} = 0, \quad D_{xz} = 0. \quad (9.2.34) \quad \boxed{\text{PIx}}$$

Очевидно, что симметрия относительно вращения на π вокруг оси y не приводит к новым ограничениям относительно (9.2.32), (9.2.34). Этот факт совсем не удивителен так как композиция поворотов на π относительно осей z и x дает поворот на π относительно y , т.е.

$$A_{z,\pi}^j{}_i A_{x,\pi}^m{}_j = A_{y,\pi}^m{}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.35)$$

Таким образом, для фигуры, симметричной относительно поворотов на π , тензор квадрупольного момента диагонален

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9.2.36)$$

Может поставить обратный вопрос: допустим тензор квадрупольного момента диагонален следует ли отсюда, что фигура обладает упомянутыми симметриями? Ответ – нет. Самостоятельно придумайте контрпример.

9.3 Потенциальная энергия зарядов во внешнем поле

Мы уже получали, как выглядит функция Гамильтона для точечной частицы во внешнем электромагнитном поле (5.1.8). В случае электростатики формула упрощается до

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{P}^2} + e\phi(\vec{r}), \quad (9.3.1)$$

последнее слагаемое которой мы будем называть **потенциальной энергией взаимодействия частицы с внешним полем**². Если же рассматривается некоторая система зарядов, то потенциальная энергия взаимодействия с внешним полем имеет вид

$$U := \sum_J e_J \phi(\vec{r}_J), \quad (9.3.2) \quad \boxed{\text{potEnergy}}$$

где потенциал ϕ отвечает исключительно внешнему полю, как если бы зарядов вообще не было.

Как и в разделе (2.1), мы поместим начало координат внутрь системы зарядов и будем считать, что заряды расположены близко к началу координат. Здесь уместно сказать о различии разложения (9.2.19) и разложения, которое будет проделано ниже. Здесь мы считаем, что расстояния r_J малы по сравнению с расстоянием, на котором значительно меняется потенциал внешнего электростатического поля³.

Выполним разложение формулы (9.3.2) с учетом малости r_J

$$U = \sum_J e_J \phi(0) + \sum_J e_J r_{Ji} \partial_i \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \frac{1}{2} \sum_J e_J r_{Ji} r_{Jj} \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \dots \quad (9.3.3)$$

Если воспользоваться тем, что $\delta^{ij} \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0}$, т.е. в центре нашей системы координат нет зарядов (а если мы вдруг случайно и попали в точечный заряд, то центр всегда можно чуть-чуть сместить), то предыдущую формулу для потенциальной энергии можно эквивалентно переписать в виде

$$U = \sum_J e_J \phi(0) + \sum_J e_J r_{Ji} \partial_i \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \frac{1}{6} \sum_J e_J (3r_{Ji} r_{Jj} - \delta_{ij} r_J^2) \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \dots \quad (9.3.4)$$

Если воспользоваться определениями дипольного и квадрупольного моментов (9.2.23), (9.2.28) и связью напряженности электрического поля с потенциалом (5.1.2) для случая электростатики ($\vec{A} = 0$), то формулу для потенциальной энергии системы зарядов во внешнем поле можно представить в виде

$$U = Q\phi(0) - (\vec{d}, \vec{E}_0) + \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial^2 \phi(\vec{R})}{\partial R_i \partial R_j} \Big|_{\vec{R}=0} + \dots, \quad (9.3.5) \quad \boxed{\text{Uel}}$$

где \vec{E}_0 – это значение напряженности внешнего электрического поля в начале координат.

²Аналогично можно выделить потенциальную энергию взаимодействия с внешним полем и из Лагранжовой формулировки, что будет проделано позже для магнитостатики.

³Подобного рода формулировки часто появляются в физике, и уже в каждой конкретной задаче нужно определять, что же является характерным расстоянием, на котором значительно меняется потенциал.

В случае, когда внешнее поле создается диполем, то потенциальная энергия взаимодействия другого диполя с этим полем равна

$$U_{d-d} = -(\vec{d}_2, \vec{E}_1), \quad (9.3.6)$$

где \vec{E}_1 – это поле, создаваемое «внешним» диполем \vec{d}_1 в точке, где находится диполь \vec{d}_2 . Напряженность этого поля можно вычислить, взяв градиент от (9.2.24)

$$(\vec{E}_1)_i = -\partial_i \left(\frac{d_k R_k}{R^3} \right) = \frac{3d_k n_k n_i - d_i}{R^3} \iff \vec{E} = \frac{3(\vec{d}, \vec{n})\vec{n} - \vec{d}}{R^3}. \quad (9.3.7)$$

Edipole

А потенциальная энергия диполь-дипольного взаимодействия соответственно равна

$$U_{d-d} = \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2)R^2 - 3(\vec{d}_1, \vec{R})(\vec{d}_2, \vec{R})}{R^5}. \quad (9.3.8)$$

Обратим внимание, что формула симметрична относительно перестановки диполей 1 и 2, т.е. совершенно не важно, какой из них считать «внешним».

Лекция 10

9 ноября 2022

Lec10

10.1 Магнитостатика

Задача в магнитостатике становится по аналогии с электростатикой. Ранее у нас были где-то статично! расположены заряды и мы искали электрическое поле, создаваемое такой системой. При этом нас вообще не интересовал вопрос о том почему заряды именно так расположены и почему они не двигаются. В магнитостатике у нас заряды движутся, но при этом совершают исключительно финитное движение (см. рисунок 10.1). Мы не собираемся отвечать на вопрос «Почему они так движутся?» (представьте, что кто-то или что-то их вращает), нас интересует лишь какое магнитное поле будет создаваться таким образом движущимися зарядами.

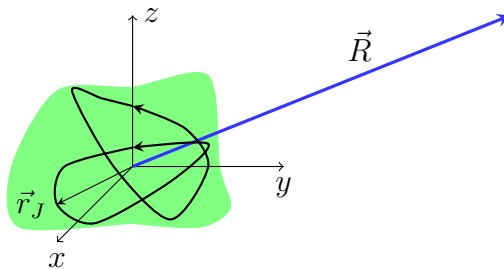


Рис. 10.1: Система координат и пространственное расположение токов

currents

Рассмотрим следующие уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (10.1.1)$$

Считая движение зарядов, т.е. функции \vec{j} периодическими (и как следствие сами поля), мы можем выполнить усреднение по времени

$$\operatorname{div} \langle \vec{H} \rangle = 0, \quad \operatorname{rot} \langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.2)$$

Здесь под обозначение $\langle \vec{B} \rangle$ для любого вектора \vec{B} понимается

$$\langle \vec{B} \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{B}. \quad (10.1.3) \quad \text{AvDef}$$

Среднее значение производных от функций, изменяющихся в конечных пределах, равны нулю

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\vec{E}(T) - \vec{E}(0)) = 0. \quad (10.1.4) \quad \text{AvDer}$$

Таким образом, после усреднения имеем следующие уравнения на поля

$$\text{div} \langle \vec{H} \rangle = 0, \quad \text{rot} \langle \vec{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.5) \quad \text{preMagnet}$$

Первое уравнение позволяет выразить напряженность магнитного поля в терминах вектор-потенциала \vec{A} (пока мы не накладывали никаких условий, фиксирующих калибровку)

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (10.1.6)$$

Подставив это представление в левую часть второго уравнения (10.1.5), мы получим

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m \langle A_n \rangle = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m \langle A_n \rangle = (\text{grad} \text{div} \langle \vec{A} \rangle - \Delta \langle \vec{A} \rangle)_i. \quad (10.1.7)$$

Если воспользоваться калибровочным произволом и наложить на вектор-потенциал условие бездивергентности $\text{div} \langle \vec{A} \rangle = 0$, которое называют **калибровкой Кулона** и которое всегда может быть наложено, то уравнения на поля примут вид

$$\Delta \langle \vec{A} \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.8) \quad \text{Magn}$$

Это уравнение, также называемое **уравнением магнитостатики**, аналогично уравнению Пуассона (9.1.6), а следовательно может быть решено таким же способом. Решение этого уравнения для токов $\langle \vec{j} \rangle$, локализованных в компактной области пространства, имеет вид

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\langle \vec{j} \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (10.1.9) \quad \text{Apotential}$$

Обращаю внимание на важное отличие уравнений магнитостатики от уравнений электростатики. В магнитостатике на векторный потенциал кроме уравнения (10.1.8) также наложена калибровка Кулона $\text{div} \langle \vec{A} \rangle = 0$. Проверим, что частное решение (10.1.9) не нарушает это калибровочное условие. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{div} \langle \vec{A} \rangle &= \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\langle j \rangle_i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \langle j \rangle_i(\vec{y}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial}{\partial y^i} \langle j \rangle_i(\vec{y}) = 0, \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

где мы проинтегрировали по частям. Последнее равенство выполнено в силу уравнения непрерывности

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle \text{div} \vec{j} \rangle = \langle \text{div} \vec{j} \rangle = \text{div} \langle \vec{j} \rangle = 0. \quad (10.1.11)$$

Вычислив ротор от (10.1.9), мы найдем магнитное поле, создаваемое токами $\langle \vec{j} \rangle$

$$(\text{rot} \langle \vec{A} \rangle)_i = \frac{1}{c} \int d^3 y \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\langle j_k \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\epsilon_{ijk} (x - y)_j \langle j_k \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (10.1.12)$$

В векторной форме это соотношение можно переписать в виде

$$\langle \vec{H} \rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\langle \vec{j} \rangle(\vec{y}), \vec{x} - \vec{y}]}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d^3 y. \quad (10.1.13)$$

Эту формулу, позволяющую найти напряженность магнитного поля через токи, называют **законом Био-Савара-Лапласа**.

10.2 Магнитное поле системы токов на больших расстояниях

Рассмотрим в качестве системы токов движущиеся заряды

$$\vec{j}(\vec{y}, t) = \sum_J e_J \frac{d\vec{r}_J}{dt} \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)). \quad (10.2.1) \quad \text{PointCurrent}$$

Среднее (по времени) значение плотности тока равно

$$\langle \vec{j} \rangle(\vec{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_J e_J \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)). \quad (10.2.2) \quad \text{goodAverage}$$

Эта формула приведена потому, что литературе (даже в ЛЛ) можно встретить вот такую формулу для плотности тока системы точечных частиц в случае финитного движения

$$\vec{j}(\vec{y}, t) = \sum_J e_J \frac{d\vec{r}_J}{dt}, \quad (10.2.3)$$

и усреднение по времени приводит к непониманию, так как формально это интеграл от полной производной и равен нулю

$$\left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} = 0. \quad (10.2.4) \quad \text{vAverage}$$

Все противоречия уходят, если держать в уме дельта-функцию (или явно писать), локализирующую точечную частицу, и понимать усреднение в смысле (10.2.2).

Система токов (10.2.1) согласно (10.1.9) дает следующее значение вектор-потенциала

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{1}{|\vec{R} - \vec{y}|} \sum_J e_J \langle \vec{v}_J \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)) \rangle = \sum_J \frac{e_J}{c} \left\langle \frac{\vec{v}_J}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} \right\rangle. \quad (10.2.5) \quad \text{AfullMagnetic}$$

Далее, как и в случае электростатики, мы будем считать, что $|\vec{r}_J| \ll |\vec{R}|$ (см. рисунок 10.1), но в отличие от электростатики мы ограничимся только первым порядком разложения

$$\frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} = \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{R}|} - (\vec{r}_J, \nabla) \frac{1}{|\vec{R}|} + \dots \right) = \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{R}|} + \frac{(\vec{r}_J, \vec{R})}{|\vec{R}|^3} + \dots \right), \quad (10.2.6)$$

где мы использовали (9.2.21). Усреднее по времени даст

$$\left\langle \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} \right\rangle = \frac{1}{|\vec{R}|} \left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} \right\rangle + \frac{1}{|\vec{R}|^3} \left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} (\vec{r}_J, \vec{R}) \right\rangle + \dots \quad (10.2.7)$$

Первое слагаемое равно нулю (см. (10.2.4)), а второе может быть эквивалентно переписано в несколько иной форме. Из-за усреднения по времени мы можем добавлять любые полные производные никак не изменяя результат усреднения. Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) = \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) + \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R}), \quad (10.2.8)$$

с его помощью мы можем представить искомое $\langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) - \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R})) \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R} - \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R})) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle [[\vec{r}_J, \vec{v}_J], \vec{R}] \rangle. \end{aligned} \quad (10.2.9) \quad \boxed{\text{trick}}$$

Введем вектор

$$\vec{\mathfrak{m}} := \sum_J \frac{e_J}{2c} \langle [\vec{r}_J, \vec{v}_J] \rangle, \quad (10.2.10)$$

который будем называть **магнитным (дипольным) моментом системы токов**. В терминах $\vec{\mathfrak{m}}$ вектор-потенциал (10.2.5) с точностью до первого порядка запишется в виде

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{R}) = \frac{[\vec{\mathfrak{m}}, \vec{R}]}{|\vec{R}|^3}. \quad (10.2.11) \quad \boxed{\text{Adipole}}$$

Вычислим магнитное поле, создаваемое вектор-потенциалом (10.2.11),

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \mathfrak{m}_m R_n \frac{1}{R^3} &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \mathfrak{m}_m \partial_j \left(\frac{R_n}{R^3} \right) = \mathfrak{m}_i \partial_n \left(\frac{R_n}{R^3} \right) - (\mathfrak{m}_j \partial_j) \left(\frac{R_i}{R^3} \right) = \\ &= \mathfrak{m}_i \left(\frac{3}{R^3} - 3 \frac{R_n R_n}{R^5} \right) - \mathfrak{m}_j \left(\frac{\delta_{ij}}{R^3} - 3 \frac{R_i R_j}{R^5} \right) = -\frac{\mathfrak{m}_i}{R^3} + 3 \frac{\mathfrak{m}_j n_j n_i}{R^3}. \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

Последнюю формулу можно переписать в векторных обозначениях

$$\vec{H}_{\mathfrak{m}} = \frac{3(\vec{\mathfrak{m}}, \vec{n})\vec{n} - \vec{\mathfrak{m}}}{R^3}, \quad (10.2.13)$$

которая аналогична (9.3.7).

10.3 Теорема Лармора

Рассмотрим поведение заряда во внешнем однородном поле. Его траектория (нерелятивистский случай) определяется следующими уравнениями движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{F}, \quad (10.3.1)$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{r}, \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right] + [\vec{r}, \vec{F}], \quad (10.3.2) \quad \boxed{\text{dM}}$$

где \vec{M} – момент импульса рассматриваемой заряженной частицы, а \vec{F} – сила, обеспечивающая быстрое финитное движение заряда. Природа этой силы нам не важна, это может быть, например, кулоновское поле ядра атома, удерживающие на орбите электрон. Мы будем считать, что средний момент этой силы равен нулю $\langle [\vec{r}, \vec{F}] \rangle$ (это верно, например, для кулоновского поля). Как и всюду в магнитостатике нас интересуют усредненные по времени (быстрого финитного движения) величины. Мы будем считать поле \vec{H} малым, тогда после усреднения по быстрому финитному движению справедливо

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = \left\langle \left[\vec{r}, \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right] \right\rangle. \quad (10.3.3)$$

В силу ранее полученных формул (10.2.9) и однородности поля \vec{H} получим

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = [\vec{m}, \vec{H}]. \quad (10.3.4) \quad \boxed{\text{preLarmor}}$$

Воспользовавшись связью магнитного и механического моментов

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \langle \vec{M} \rangle, \quad (10.3.5)$$

которое также называют **гиромангнитным отношением**, мы можем привести уравнение движения (10.3.4) к виду

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = -\frac{eH}{2mc} [\vec{h}, \langle \vec{M} \rangle], \quad (10.3.6) \quad \boxed{\text{Larmor}}$$

где \vec{h} – единичный вектор вдоль направления внешнего магнитного поля \vec{H} . Полученное уравнение означает, что вектор $\langle \vec{M} \rangle$ вращается (прецессирует. Вспомните соответствующие уравнения теории гироскопа) с угловой скоростью $\frac{eH}{2mc}$, которое называют **ларморовой частотой**. Само явление называют **ларморовой прецессией**.

10.4 Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле

В магнитостатике функция Лагранжа для массивной релятивистской частицы (5.1.4) упрощается до

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{v}, \vec{A}), \quad (10.4.1)$$

где последнее слагаемое отвечает за взаимодействие с магнитным полем, которое и будем называть **энергией магнитного момента во внешнем поле**

$$U_m := -\frac{e}{c} (\vec{v}, \vec{A}). \quad (10.4.2) \quad \boxed{\text{Um}}$$

Однородное магнитное поле \vec{H} можно задать с помощью векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}, \vec{r}]. \quad (10.4.3) \quad \boxed{\text{homH}}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\vec{H} = \text{rot} \vec{A} &\iff H_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} H_m x_n = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} H_m \delta_{jn} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \delta_{jn} H_m = \frac{1}{2} (3 - 1) H_i = H_i. \quad (10.4.4)\end{aligned}$$

Обращаю ваше внимание, что для представления (10.4.3) важно, что поле является однородным. Желаящие могут убедиться, что формула (10.4.3) является частным следствием (4.3.13) (при $\vec{E} = 0$ и для стационарного однородного поля \vec{H}), которая справедлива в случае произвольного электромагнитного поля. С помощью (10.4.3) энергию магнитного момента (10.4.2) можно представить в виде

$$U_m = \frac{e}{2c} (\vec{v}, [\vec{r}, \vec{H}]) = -\frac{e}{2c} ([\vec{r}, \vec{v}], \vec{H}) = -(\vec{m}, \vec{H}), \quad (10.4.5)$$

которая аналогична слагаемому, отвечающему за взаимодействие электрического диполя с внешним полем (9.3.5). При преобразованиях мы воспользовались свойством цикличности для смешанного произведения векторов

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = ([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}),$$

которое следует из того, что циклические перестановки индексов у символа Леви-Чивиты оставляют его инвариантным.

Лекция 11

16 ноября 2022

11.1 Свободное электромагнитное поле

Рассмотрим свободные ($J^\nu = 0$) уравнения Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (11.1.1) \quad \text{MaxFree}$$

Мы всегда можем наложить условие Лоренца (условие 4-поперечности). Действительно, пусть некоторое поле A^μ решает уравнение Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, но не удовлетворяет условию 4-поперечности $\partial_\mu A^\mu$, тогда с помощью калибровочных преобразований мы всегда можем сделать его 4-поперечным:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \implies \partial_\mu A'^\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu + \square f \implies \square f = -\partial_\mu A^\mu. \quad (11.1.2)$$

Последнее уравнение всегда может быть разрешено, что вам будет доказано в курсе уравнений математической физики. Тем не менее даже после наложения условия Лоренца мы не полностью зафиксировали калибровочный произвол, уравнение $\square f = -\partial_\mu A^\mu$ решается с точностью до решения однородного уравнения $\square f = 0$. Воспользовавшись остаточным калибровочным произволом мы можем откалибровать в ноль любую компоненту 4-потенциала (для свободных уравнений Максвелла), обычно выбирают нулевую $A^0 = 0$. После всех наложенных условий уравнения (11.1.1) примут вид

$$\square A^\nu = 0, \quad A^0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (11.1.3) \quad \text{fullFixed}$$

Обращаю ваше внимание, что условия $A^0 = 0$ и $\text{div} \vec{A} = 0$ хотя и полностью фиксируют калибровочный произвол, но не являются Лоренц-ковариантными, т.е. при переходе в другую систему отсчета в общем случае $A'^0 \neq 0$. Решая уравнения (11.1.3) с помощью Фурье-преобразования получим

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} \delta(k^2) \epsilon_\mu(k), \quad (11.1.4) \quad \text{complexS}$$

где фурье-образ $\epsilon_\mu(k)$ (который также называют поляризацией в КТП¹) также подчиняется условиям $\epsilon_0(k) = 0$ (следствие $A^0 = 0$) и $k_i \epsilon^i(k) = 0$ (следствие $\text{div} \vec{A} = 0$).

¹В квантовой электродинамике за взаимодействие электрона позитрона с фотоном отвечает слагаемое $ie\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$ в действии. Обращаю внимание, что сюда входит именно A_μ , а не поля \vec{E} и \vec{H} через тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Поэтому целесообразно рассматривать поляризацию именно этого вектора при расчете, например, процессов рассеяния.

Рассмотрим отдельный вклад $\epsilon_\mu(k)$, где импульс k_μ уже лежит на поверхности $k_\mu k^\mu = 0$ (иногда говорят, что импульсы лежат на массовой оболочке). Мы в праве выбрать любую удобную нам систему отсчета, например, такую где импульс равен

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (11.1.5)$$

Разрешая уравнения $\epsilon^0(k) = 0$ и $k_i \epsilon^i(k) = 0$, мы получим два линейнонезависимых решения

$$\epsilon_\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.6) \quad \boxed{\text{lin}}$$

Такие поляризации называют **линейными**. Можно выбрать и другой базис в этом двумерном пространстве

$$\epsilon_\mu^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\mu^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.7) \quad \boxed{\text{circ}}$$

Такие поляризации называют **круговыми**. Действительно, рассмотрим вещественную часть $\epsilon_\mu^{R,L}(k)e^{i\omega t}$ (будем смотреть на изменение в конкретной точке z)

$$\Re \{ \epsilon_\mu^{R,L} e^{i\omega t} \} = \Re \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \\ \mp \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.8)$$

Последнее очевидно описывает вращение единичного вектора в плоскости xy с постоянной угловой скоростью ω . Общим случаем является так называемая **эллиптическая** поляризация. Самостоятельно найдите базис, который бы реализовывал такое движение вектора поляризации.

На лекции студентами было сделано замечание, что не «существует» линейной поляризации, а бывает только циркулярная. Это утверждение требует пояснения. Как известно, в квантовой механике нет возможности измерить волновую функцию: в зависимости от того, какую величину мы измеряем волновая функция коллапсирует в собственное состояние оператора измеряемой величины. Измеряя проекция спина фотона, которую для безмассовых частиц часто называют спиральностью, мы получим только значения $+1$ и -1 , которым соответствуют векторы поляризации (11.1.7). Т.е. фотоны с линейной поляризацией существуют как суперпозиция (11.1.7), но при измерениях мы получим либо лево- либо правозакрученный фотон.

11.2 Свойства плоских электромагнитных волн

PlaneWave

Для полностью зафиксированного калибровочного произвола (11.1.3) решение для плоской волны, движущегося по оси z имеет вид (см. лекцию 3)

$$\vec{A}(ct - z), \quad (11.2.1) \quad \boxed{\text{partSol}}$$

где вектор \vec{A} ортогонален единичному вектору вдоль оси z в силу $\text{div} \vec{A} = 0$. Напряженности электрического и магнитного полей даются соответственно формулами

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{A}', \quad (11.2.2) \quad \text{Ерр}$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = -[\vec{e}_z, \vec{A}'], \quad (11.2.3) \quad \text{Нрр}$$

где \vec{A}' – это производная векторного поля \vec{A} по полному аргументу (см. (11.2.1)), а \vec{e}_z – единичный вектор вдоль направления z . Из формул (11.2.2), (11.2.3) и калибровки Кулона следует, что для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{e}_z являются взаимноперпендикулярными

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}_z. \quad (11.2.4)$$

Кроме того, как видно из формул (11.2.2) и (11.2.3) напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне совпадают по модулю

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (11.2.5)$$

Выбор конкретного решения (11.2.1) был продиктован исключительно наглядностью. Решение для плоской волны, распространяющейся вдоль некоторого единичного вектора \vec{e} будет иметь вид

$$\vec{A}(ct - (\vec{e}, \vec{r})). \quad (11.2.6)$$

Для этого решения также будут выполнены соотношения

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|, \quad \vec{H} = [\vec{e}, \vec{E}], \quad \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}. \quad (11.2.7)$$

Наконец найдем вектор Умова-Пойнтинга (см. (8.2.12))

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, [\vec{e}, \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \vec{e}. \quad (11.2.8)$$

11.3 Тензор поляризации

Следует заметить, что все рассматриваемые поля в настоящем курсе вещественные, поэтому, например, на решение (11.1.4) следует наложить соответствующие условия вещественности. Тем не менее, на практике очень удобно рассматривать комплексные поля и потом брать от них вещественную часть. Это связано с тем, что в таком подходе можно общим множителем выделить эволюцию по времени в виде комплексной экспоненты $e^{i\omega t}$, а поляризация волны будет задаваться пусть и комплексным, но константным вектором.

Далее вспомогательные комплекснозначные векторы мы будем обозначать

$$\vec{E}, \vec{H} \in \mathbb{C}^3. \quad (11.3.1)$$

Их вещественные части соответствуют наблюдаемым напряженностям электрического и магнитного полей

$$\vec{E} = \Re\{\vec{E}\} = \frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2}, \quad \vec{H} = \Re\{\vec{H}\} = \frac{\vec{H} + \vec{H}^*}{2}. \quad (11.3.2) \quad \text{LLhalhs}$$

Обратите внимание на появившиеся в знаменателях двойки. Именно таким образом они возникают в соответствующих формулах ЛЛ. Рассматривая электромагнитные волны часто говорят лишь о напряженности электрического поля поскольку воздействие на пробный заряд магнитного поля в $\frac{v}{c}$ раз меньше (см. (4.3.15))

Напряженность плоской электромагнитной волны имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i(\vec{k}, \vec{r})}. \quad (11.3.3)$$

Как правило приборы регистрируют величину квадратичную по \vec{E} , например, интенсивность (определение будет дано ниже). Рассмотрим общее квадратичное по \vec{E} выражение

$$E_i E_j = \frac{E_i + E_i^*}{2} \frac{E_j + E_j^*}{2}. \quad (11.3.4)$$

Без уменьшения общности можем считать, что прибор, с помощью которого проводятся измерения расположен в начале координат, т.е. $\vec{r} = 0$. С учетом этого замечания предыдущую формулу можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_i E_j &= \frac{1}{4} (E_{0i} e^{i\omega t} + E_{0i}^* e^{-i\omega t}) (E_{0j} e^{i\omega t} + E_{0j}^* e^{-i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (E_{0i} E_{0j} e^{2i\omega t} + E_{0i} E_{0j}^* + E_{0i}^* E_{0j} + E_{0i}^* E_{0j}^* e^{-2i\omega t}). \end{aligned} \quad (11.3.5) \quad \text{prePolar}$$

Приборы не регистрируют мгновенное значение $E_i E_j$, а измеряется лишь усредненная по времени величина (см. (10.1.3))

$$\langle E_i E_j \rangle = \frac{1}{4} (E_{0i} E_{0j}^* + E_{0i}^* E_{0j}) \quad (11.3.6) \quad \text{prePolar2}$$

остальные слагаемые обращаются в ноль после усреднения по времени. Как видно из (11.3.6) произвольная квадратичная форма $\langle E_i E_j \rangle$ для электромагнитной волны однозначно определяется в терминах тензора

$$J_{ij} := E_{0i} E_{0j}^*. \quad (11.3.7)$$

Нас интересуют исключительно поляризоционные свойства, т.е. только направления векторов \vec{E}_0 и \vec{E}_0^* , а не их абсолютные значения. Для этого вводят **тензор поляризации**

$$\rho_{ij} := \frac{J_{ij}}{J_{kk}} \equiv \frac{E_{0i} E_{0j}^*}{E_{0k} E_{0k}^*}, \quad (11.3.8) \quad \text{PolarDef}$$

где в знаменателе стоит след тензора J_{ij} (след J_{kk} – вещественен). Определенный таким образом тензор поляризации обладает следующими свойствами

$$\rho_{ii} = 1, \quad \rho_{ij}^* = \rho_{ji}. \quad (11.3.9)$$

Рассмотрим некоторые примеры:

- Для **линейно поляризованного света** вектор \vec{E}_0 вещественен (см. (11.1.6)). Пусть \vec{e} – единичный вектор вдоль \vec{E}_0 , который ортогонален волновому вектору $\vec{e} \perp \vec{k}$. Таким образом тензор поляризации для линейно поляризованного света имеет вид

$$\rho_{ij}^{lin.} = e_i e_j. \quad (11.3.10) \quad \text{pLin}$$

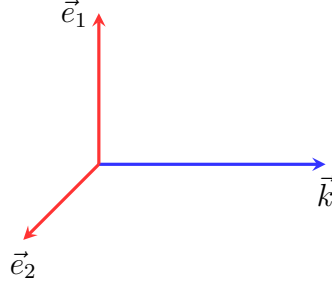


Рис. 11.1: Волновой вектор \vec{k} и лежащие в перпендикулярной ему плоскости взаимноортогональные векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2

Polar

- Для **циркулярно поляризованного света** вектор \vec{E}_0 комплексный (см. (11.1.7)). Рассмотрим пару ортогональных векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , которые ортогональны волновому вектору \vec{k} (см. рисунок 11.1). Векторы \vec{E}_0 для лево- или правозакрученного света могут быть соответственно представлены в виде

$$\vec{E}_0^L = |\vec{E}_0| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad \vec{E}_0^R = |\vec{E}_0| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - i\vec{e}_2). \quad (11.3.11)$$

Подставляя полученные выражения в формулу для тензора поляризации мы получим

$$\rho_{ij}^{circ.L} = \frac{1}{2} (e_{1i} + ie_{2i})(e_{1j} - ie_{2j}) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j})}_{\text{проектор}} - i \underbrace{(e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i})}_{\text{антисимметрично}} \right). \quad (11.3.12)$$

Для $\rho_{ij}^{circ.R}$ справедливо аналогичное выражение, которое может быть получено комплексным сопряжением, т.е. $\rho_{ij}^{circ.R} = (\rho_{ij}^{circ.L})^*$. Выделенное слагаемое $e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j}$ является проектором на подпространство ортогональное волновому вектору (продумайте) и может быть представлено в виде

$$e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (11.3.13)$$

Второе слагаемое $e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i}$ антисимметрично по индексам $i \leftrightarrow j$ и может быть эквивалентно представлено в виде

$$e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i} = e_{1m}e_{2n}(\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}) = e_{1m}e_{2n} \epsilon_{pmn} \epsilon_{pij} = \epsilon_{pij} \frac{k_p}{k}. \quad (11.3.14)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{k}/|\vec{k}|$ (см. рисунок 11.1). Таким образом тензор поляризации для циркулярно поляризованного света имеет вид

$$\rho_{ij}^{circ.L} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} - i \epsilon_{ijp} \frac{k_p}{k} \right), \quad (11.3.15) \quad \text{pCircL}$$

$$\rho_{ij}^{circ.R} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + i \epsilon_{ijp} \frac{k_p}{k} \right). \quad (11.3.16) \quad \text{pCircR}$$

- Для естественно поляризованного света вещественный вектор \vec{E}_0 нужно усреднить по всем направлениям, ортогональным волновому вектору. Поскольку эта задача уже решалась в первом задании, то сразу выпишем ответ

$$\rho_{ij}^{nat.} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (11.3.17) \quad \boxed{\text{pNat}}$$

Обратим внимание на то, что ЛЛ рассматривается двумерный тензор поляризации $\rho_{\alpha\beta}$ в плоскости, ортогональной волновому вектору, т.е. индексы принимают лишь два значения. Такое представление не совсем удобно для решения задачи о рассеянии электромагнитных волн на зарядах (см. лекцию 14).

11.4 Неоднородное уравнение Максвелла и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим теперь уравнение Максвелла в присутствии внешних источников, с наложенным на 4-потенциал условием Лоренца, оно имеет вид

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (11.4.1) \quad \boxed{\text{WaveInh}}$$

Условие Лоренца позволило свести вторую пару уравнений Максвелла (5.4.9) к набору из 4-х волновых уравнений. Обращаю ваше внимание на тонкое место: решение уравнения (11.4.1) априори не является решением уравнений Максвелла (5.4.9). Чтобы решить уравнения Максвелла нужно решить систему! (см. аналогичное обсуждение в лекции 10)

$$\begin{cases} \square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \\ \partial_\mu A^\mu = 0. \end{cases} \quad (11.4.2) \quad \boxed{\text{MaxLor}}$$

Сосредоточимся пока на первом уравнение этой системы, чтобы его решить нам нужно найти функцию Грина волнового уравнения, которая удовлетворяет уравнению

$$\square_x G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (11.4.3) \quad \boxed{\text{WavGreen}}$$

С ее помощью решение первого уравнения системы (11.4.2) можно записать в виде

$$A^\nu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y G(x, y) J^\nu(y). \quad (11.4.4) \quad \boxed{\text{almost}}$$

По этой формуле мы можем найти поле $A^\nu(x)$ по заданной функции источников $J^\nu(y)$. Тем не менее, если на функцию $G(x, y)$ не наложено никаких ограничений, то для нахождения поля в момент времени x^0 нам нужно знать функции источников как во все предшествующие моменты времени $y^0 < x^0$, так и во все последующие $y^0 > x^0$. Т.е. без наложения ограничений на функцию Грина поле A^ν в момент времени x^0 «знает» о том, как будут вести себя поля источников в будущем, последнее естественно нарушает фундаментальный принцип причинности. Чтобы избежать подобных парадоксов мы будем искать решение

уравнения (11.4.3) такое, чтобы $G(x, y) = 0$ при $x^0 - y^0 < 0$, такую функцию Грина будем называть **запаздывающей**.

Решать уравнение (11.4.3) мы будем с помощью преобразования Фурье

$$G(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}, \quad (11.4.5) \quad \text{gREPR}$$

$$\delta^{(4)}(x - y) := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}. \quad (11.4.6)$$

После подстановки этих выражений в (11.4.3) мы получим следующее алгебраическое уравнение на $\tilde{G}(k)$

$$-k_\mu k^\mu \tilde{G}(k) = 1 \implies \tilde{G}(k) = -\frac{1}{k_\mu k^\mu} = -\frac{1}{k^2}. \quad (11.4.7) \quad \text{Green4Mom}$$

Следует обратить внимание на важное отличие функции Грина волнового уравнения от функции Грина уравнения Пуассона, для которого получилось схожее уравнение на фурье-образ (9.2.9). Для уравнения Пуассона соответствующий знаменатель обращался в ноль лишь в одной единственной точке из-за положительной определенности Евклидова скалярного произведения, в отличие от (11.4.7), где выражение сингулярно на поверхности (световом конусе). Последнее приводит к тому, что после подстановки (11.4.7) в (11.4.5) соответствующий интеграл расходится. Эта расходимость ни в коем случае не является патологией волнового уравнения, просто соответствующий интеграл необходимо доопределить (подробности и справедливость такого рода доопределений вам будет изложена в курсе уравнений математической физики).

Сам интеграл имеет вид

$$G(x, y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{k^2} = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}, \vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0^2 - \vec{k}^2}. \quad (11.4.8) \quad \text{genG}$$

Рассмотрим отдельно интеграл по k_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0^2 - \vec{k}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{2|\vec{k}|} \left(\frac{1}{k_0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k_0 + |\vec{k}|} \right). \quad (11.4.9)$$

Для решения проблемы с расходимостями нужно каким-то образом обойти полюса $k_0 = \pm|\vec{k}|$. Всего существует 4 способа, но нас интересует только такой, при котором функция Грина обращается в ноль для $x^0 - y^0 < 0$. Для этого выберем обход таким образом, чтобы ни один из этих полюсов не охватывался контуром после его замыкания по лемме Жордана в случае $x^0 - y^0 < 0$. При $x^0 - y^0 < 0$ из-за экспоненты контур следует замыкать в нижней полуплоскости – контур Γ_2 , соответствующий обход полюсов изображен на рисунке 11.2. Нетривиальный вклад будет только при $x^0 - y^0 > 0$, когда контур необходимо замыкать в верхней полуплоскости – контур Γ_1 . Интеграл по контуру Γ_1 равен

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{2|\vec{k}|} \left(\frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0 - |\vec{k}|} - \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0 + |\vec{k}|} \right) = \frac{i}{2|\vec{k}|} (e^{i|\vec{k}|(x^0 - y^0)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0 - y^0)}). \quad (11.4.10)$$

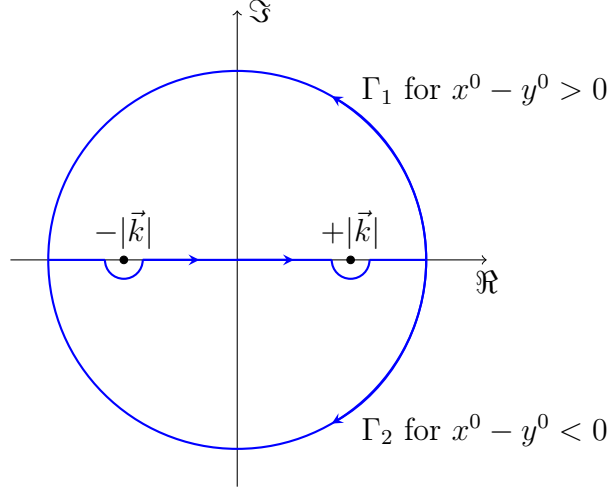


Рис. 11.2: Правила обхода полюсов для запаздывающей функции Грина.

contours2

После вычисления интеграла по k_0 мы имеем следующее выражение для функции Грина

$$G_{ret}(x, y) = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}, \vec{x} - \vec{y})} \theta(x^0 - y^0) \frac{i}{2|\vec{k}|} (e^{i|\vec{k}|(x^0 - y^0)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0 - y^0)}) . \quad (11.4.11)$$

Здесь мы добавили индекс *ret* (от англ. retarded) поскольку из-за правила обхода полюсов мы получили тетта-функцию, определяемую как

$$\theta(\tau) := \begin{cases} 1 & \text{for } \tau > 0 \\ 0 & \text{for } \tau < 0 \end{cases} , \quad (11.4.12)$$

которая эффективно обеспечивает причинность (запаздывание) функции Грина. Для вычисления интеграла $\int d^3 \vec{k}$ перейдем в сферические координаты (ось z в импульсном пространстве направлена вдоль вектора $\vec{x} - \vec{y}$)

$$\begin{aligned} G_{ret}(x, y) &= \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi k \theta(x^0 - y^0) e^{ik|\vec{x} - \vec{y}| \cos \theta} (e^{ik(x^0 - y^0)} - e^{-ik(x^0 - y^0)}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty dk (e^{ik|\vec{x} - \vec{y}|} - e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}) (e^{ik(x^0 - y^0)} - e^{-ik(x^0 - y^0)}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty dk (e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} + e^{-ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} - e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))} - e^{-ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi) |\vec{x} - \vec{y}|} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} (e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} - e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi) |\vec{x} - \vec{y}|} (\delta(x^0 - y^0 + |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)) = \\ &= \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} . \quad (11.4.13) \end{aligned}$$

Здесь в последней строчке мы воспользовались тем, что $\theta(x^0 - y^0)\delta(x^0 - y^0 + |\vec{x} - \vec{y}|) = 0$, так как из-за тета-функции аргумент дельта-функции всегда положителен и никогда не равен нулю. Таким образом, мы получили, что **запаздывающая функция Грина волнового уравнения** равна²

$$G_{ret}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = \frac{\delta(ct - ct' - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{4\pi c |\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right). \quad (11.4.14) \quad \boxed{\text{Gret}}$$

Тем, кто сомневается в законности доопределений расходящихся интегралов рекомендуется прямой проверкой убедиться, что (11.4.14) действительно решает уравнение (11.4.3).

Покажем наконец, что выражение (11.4.4) также решает второе уравнение системы (11.4.2). Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_\nu A^\nu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y \frac{\partial}{\partial x^\nu} G_{ret}(x - y) J^\nu(y) = -\frac{4\pi}{c} \int d^4y \frac{\partial}{\partial y^\nu} (G_{ret}(x - y)) J^\nu(y) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y G_{ret}(x - y) \frac{\partial}{\partial y^\nu} J^\nu(y) = 0. \end{aligned} \quad (11.4.15)$$

Здесь мы явно воспользовались тем, что функция Грина зависит лишь от разности $x^\mu - y^\mu$ и после интегрирования по частям воспользовались уравнением непрерывности $\partial_\mu J^\mu = 0$. Выражения для скалярного и векторного потенциалов соответственно могут быть записаны в виде

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int d^3\vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c |\vec{r} - \vec{x}|} c\rho(\vec{x}, \tau) = \int d^3\vec{x} \frac{\rho\left(\vec{x}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad (11.4.16) \quad \boxed{\text{phiRet}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int d^3\vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c |\vec{r} - \vec{x}|} \vec{j}(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x} \frac{\vec{j}\left(\vec{x}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad (11.4.17) \quad \boxed{\text{ARet}}$$

где в каждом случае для получения последнего выражения было выполнено тривиальное интегрирование по τ .

²В физике также рассматривают еще, например, опережающую G_{adv} и фейнмановскую G_F , которые соответствуют другим способам обхода полюсов. Несмотря на то что причинной в смысле уравнения (11.4.3) является только G_{ret} появление в выражениях КТП G_F отнюдь не означает, что где-то нарушена причинность.

Лекция 12

23 ноября 2022

12.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Рассмотрим одну! частицу, двигающуюся с релятивистской скоростью. Плотность заряда и плотность тока соответственно равны¹

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e\dot{\vec{r}}_0(t)\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \quad (12.1.1) \quad \text{rho_\&_j}$$

С помощью запаздывающей функции Грина (11.4.14) мы можем найти скалярный и векторный потенциалы. Подставив плотность точечной частицы (12.1.1) в (11.4.16) и выполняя тривиальное интегрирование по \vec{x} , мы получим

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int d\tau \int d^3\vec{x} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c |\vec{r} - \vec{x}|} ce \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_0(\tau)) = \\ &= \int d\tau \frac{e\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}. \end{aligned} \quad (12.1.2) \quad \text{preLV}$$

Здесь аргумент дельта-функции – сложная функция от τ . Пусть t' – это решение уравнения

$$t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} = 0. \quad (12.1.3) \quad \text{retEq}$$

Если частица движется медленнее скорости света, то у этого уравнения **единственное** решение (продумайте!). Время t' называют **запаздывающим временем** или **временем запаздывания**. Физический смысл запаздывающего времени состоит в следующем. Пусть известна траектория частицы как функция времени, нас интересует потенциал в точке \vec{r} в момент времени t . Время $(t - t')$ – это время, за которое свет из точки $\vec{r}_0(t')$ дойдет до точки наблюдения \vec{r} (см. рисунок 12.1). Используя (12.1.3), мы можем преобразовать дельта-функцию

$$\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right) = \frac{\delta(\tau - t')}{\left|\frac{\partial}{\partial \tau}\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right)\right|_{\tau=t'}} = \frac{\delta(\tau - t')}{1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'), -\dot{\vec{r}}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}}. \quad (12.1.4) \quad \text{deltaTr}$$

¹Плотности заряда и тока можно представить и в явно Лоренц-ковариантной форме (8.4.16), но данное представление не совсем удобно для дальнейшего анализа полей \vec{E} и \vec{H} .

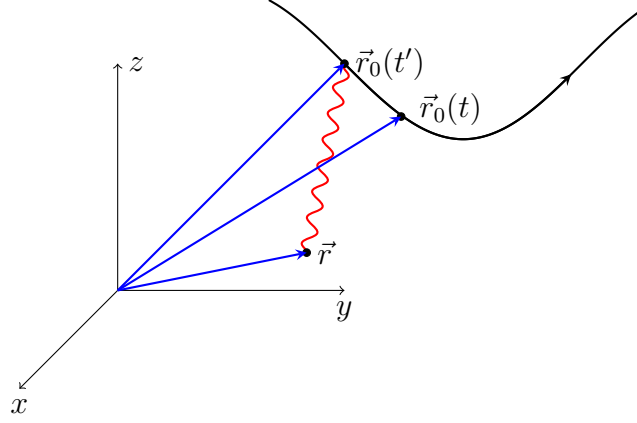


Рис. 12.1: Иллюстрацию к запаздывающему времени. Поле в точке \vec{r} в момент времени t определяется свойствами траектории частицы в момент времени t' .

RetTime

В дальнейшем будем использовать сокращенные обозначения из ЛЛ

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t'), \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}, \quad \vec{v}(t') = \dot{\vec{r}}_0(t'). \quad (12.1.5)$$

В новых терминах выражение (12.1.4) принимает вид

$$\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right) = \frac{\delta(\tau - t')}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.1.6)$$

Подставляя в таком виде дельта-функцию в (12.1.2) и выполняя оставшееся интегрирование по τ , мы получим

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau \frac{e\delta(\tau - t')}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} = \frac{e}{R\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}. \quad (12.1.7) \quad \text{phiLV}$$

Действуя аналогичным образом, мы получим выражение для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d\tau \frac{e\dot{\vec{r}}_0(\tau) \delta(\tau - t')}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} = \frac{e\vec{v}}{cR\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}. \quad (12.1.8) \quad \text{ALV}$$

Выражения (12.1.7), (12.1.8) называют **(запаздывающими) потенциалами Лиенара-Вихерта**. Выражения для скалярного и векторного потенциалов (12.1.7) и (12.1.8) могут быть объединены в 4-потенциал и представлены в явно Лоренц-ковариантном виде

$$A^\mu = e \frac{u^\mu}{\mathcal{R}_\nu u^\nu}, \quad (12.1.9) \quad \text{relLV}$$

где 4-вектор \mathcal{R}_ν определяется как

$$\mathcal{R}^\nu = \begin{pmatrix} c(t - t') \\ \vec{r} - \vec{r}_0(t') \end{pmatrix}. \quad (12.1.10) \quad \text{calR}$$

Настоятельно рекомендую проверить, что из (12.1.9) действительно получаются выражения (12.1.7), (12.1.8)!

12.2 Напряженности \vec{E} и \vec{H} из запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта

2.1 Словарик производных

Напряженности полей через потенциалы даются выражениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad (12.2.1) \quad \boxed{\text{EHLV}}$$

но выражения для потенциалов (12.1.7), (12.1.8) определяются с помощью неявно заданной функции $t'(\vec{r}, t)$ через уравнение (12.1.3).

Продифференцируем уравнение (12.1.3) по t и выразим производную $\partial t' / \partial t$

$$1 - \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{(\vec{R}, -\vec{v})}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.2.2) \quad \boxed{\text{pt_prime}}$$

Также для вычисления напряженностей нам нужно знать градиент $\nabla t'$. Снова продифференцируем уравнение (12.1.3)

$$-\partial_i t' - \frac{1}{c} \frac{R_j (\delta_{ij} - v_j \partial_i t')}{R} = 0 \implies \partial_i t' = -\frac{n_i}{c - n_j v_j} \iff \nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c - (\vec{n}, \vec{v})}. \quad (12.2.3)$$

Используя формулы для производных запаздывающего времени, вычислим производные по времени от \vec{R} и R

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{v}}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}, \quad (12.2.4)$$

и пространственные производные

$$\partial_i R_j = \delta_{ij} - v_j \partial_i t' = \delta_{ij} + \frac{n_i v_j}{c - n_k v_k}, \quad \partial_i R = n_i + \frac{n_i n_j v_j}{c - n_k v_k} \iff \nabla R = \frac{\vec{n}}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.2.5)$$

2.2 Вычисление напряженностей

Вычислим напряженность, отвечающую потенциалам (12.1.7) и (12.1.8).

- Вычислим градиент скалярного потенциала

$$\begin{aligned} \partial_i \phi &= \partial_i \left(\frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)} \right) = -\frac{e}{R^2} \frac{R_i}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} - \frac{e}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \partial_i \left(-\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right) = \\ &= -\frac{e R_i}{R^3 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} + \frac{e}{c R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \partial_i \left(\frac{R_j v_j}{R} \right) = \\ &= \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \left[-\frac{R_i}{R^2} + \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{R} \left(\delta_{ij} + \frac{n_i v_j}{c - (\vec{n}, \vec{v})} \right) v_j - \frac{R_j v_j}{R^2} \frac{n_i}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R_j v_j}{R} \frac{n_i}{c - (\vec{n}, \vec{v})} \right\} \right]. \quad (12.2.6) \end{aligned}$$

Здесь для ускорения мы ввели следующее обозначение

$$\vec{w} := \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}(t')}{\partial t'}, \quad (12.2.7)$$

т.е. это производная скорости по запаздывающему времени. Далее будем использовать векторные обозначения. Градиент скалярного потенциала в векторных обозначениях соответственно равен

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \\ &= \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[-\frac{\vec{n}}{R} + \frac{\vec{v}}{cR} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\vec{n}}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \frac{\vec{n}}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} - \frac{(\vec{n}, \vec{w})}{c^2} \frac{\vec{n}}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] = \\ &= \frac{e\vec{v}}{cR^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} - \frac{e\vec{n}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] - \\ &\quad - \frac{e(\vec{n}, \vec{w})\vec{n}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3}. \quad (12.2.8) \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получим окончательное выражение в виде

$$\nabla \phi = \frac{e\vec{v}}{cR^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} - \frac{e\vec{n} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e(\vec{n}, \vec{w})\vec{n}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \quad (12.2.9) \quad \boxed{\text{gradPhi}}$$

- Вычислим производную по времени векторного потенциала

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{e\vec{w}}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} + \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} + \\ &+ \frac{e\vec{v}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left\{ \frac{-v^2}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{(\vec{n}, \vec{w})}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{(\vec{n}, \vec{v})^2}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right\} = \\ &= \frac{e}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n}, \vec{w})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] + \\ &+ \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{\left(\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right]. \quad (12.2.10) \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получим окончательное выражение в виде

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n}, \vec{w})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] + \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \left[\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (12.2.11) \quad \boxed{\text{partA}}$$

Подставляя найденные производные (12.2.9) и (12.2.11) в (12.2.1), мы получим

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} + \frac{e\vec{n}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \frac{e(\vec{n},\vec{w})\vec{n}}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \\
&\quad - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n},\vec{w})}{c\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] - \frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right] = \\
&= -\frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[1 + \frac{\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}}{\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} - \frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] + \frac{e\vec{n}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \\
&\quad + \frac{e\vec{n}(\vec{n},\vec{w})}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n},\vec{w})}{c\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] = \\
&= \frac{e\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[-\vec{n}(\vec{n},\vec{w}) + \vec{w} - \vec{w}\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c} + \frac{\vec{v}}{c}(\vec{n},\vec{w}) \right]. \quad (12.2.12)
\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно переписать через двойное векторное произведение

$$\begin{aligned}
&\left(-\underbrace{\vec{n}}_c(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{w}}_b) + \underbrace{\vec{w}}_b(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{n}}_c) \right) + \frac{1}{c} \left(\underbrace{\vec{v}}_b(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{w}}_c) - \underbrace{\vec{w}}_c(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{v}}_b) \right) = \\
&= -[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{w}]] + \left[\vec{n}, \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right] = -\left[\vec{n}, \left[\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right]. \quad (12.2.13)
\end{aligned}$$

В итоге имеем следующее выражение для напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \frac{e\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[\vec{n}, \left[\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right]. \quad (12.2.14) \quad \boxed{\text{E}_{LV}}$$

Аналогично, используя вторую формулу (12.2.1), мы получим выражения для напряженности магнитного поля. Оказывается, что магнитное поле всюду перпендикулярно электрическому и дается простым выражением в терминах (12.2.14)

$$\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E} \right]. \quad (12.2.15) \quad \boxed{\text{H}_{LV}}$$

Выражение для напряженности электрического поля и как следствие (12.2.15) для магнитного поля состоит из двух типов слагаемых: пропорциональных $1/R$ и пропорциональных $1/R^2$. Слагаемые первого типа, как будет видно ниже, отвечают за излучение электромагнитных волн, а расстояния (большие значения R), на которых эти слагаемые дают доминирующий вклад в напряженность, называют **волновой зоной**. Слагаемые

второго типа зависят только от скорости частицы и отвечает полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Они дают доминирующий вклад на малых расстояниях, так называемая **квазистационарная зона**. Несмотря на огромную важность излучения квазистационарные поля также находят применение в нашей повседневной жизни. В частности квазистационарные поля используются в технологии передачи информации NFC (Near Field Communication).

12.3 Дипольное приближение

ip_approx

Выражения (12.2.14) и (12.2.15) – это точные решения уравнений Максвелла с источником (12.1.1). Далее мы будем последовательно упрощать формулы рассматривая различные приближения.

Рассмотрим приближение медленно движущейся частицы, т.е.

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (12.3.1) \quad \text{nonRel}$$

и будем интересоваться полем, отвечающему излучению электромагнитных волн. Напряженность электрического поля в этом случае дается выражением

$$\vec{E}\Big|_{v/c \ll 1} \approx \frac{e [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{w}]]}{c^2 R} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}]]}{c^2 R} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{R}{c})]]}{c^2 R}. \quad (12.3.2) \quad \text{preDipole}$$

Здесь мы воспользовались определением дипольного момента $\vec{d} = e\vec{r}_0$. Обращаю ваше внимание, что в этой формуле \vec{n} отнюдь не единичный направляющий вектор в точку наблюдения как это было, например, в мультипольном разложении электростатики.

Будем считать, что заряд совершает финитное периодическое движение в окрестности начала координат и улетает от начала координат не более чем на a , а модуль радиус-вектора в точку наблюдения r много больше a

$$\frac{a}{r} \ll 1. \quad (12.3.3) \quad \text{large_dis}$$

В этом случае для R справедливо разложение

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = r \left(1 + \frac{(\vec{r}, \vec{r}_0(t'))}{r^2} + \dots \right). \quad (12.3.4)$$

В **дипольном приближении** мы ограничиваемся лишь первым слагаемым, т.е.

$$R_{dipole} \approx |\vec{r}|. \quad (12.3.5) \quad \text{R_dipole}$$

В таком приближении в формулу (12.3.2) можно упростить до

$$\vec{E}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c})]]}{c^2 r}, \quad (12.3.6) \quad \text{preDipole}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$ – единичный направляющий вектор в точку наблюдения.

Мы не просто так оставили аргумент дипольного момента нетронутым. Несмотря на то что в дипольном приближении справедливо (12.3.5) следует все же очень аккуратно применять его когда дело касается временных аргументов. Рассмотрим входящий в (12.3.6) дипольный момент, из-за малости $|\vec{r}_0|/|\vec{r}| \ll 1$ аргумент можно представить в виде

$$\vec{d} \left(t - \frac{r}{c} + \underbrace{\frac{(\vec{n}, \vec{r}_0)}{c}} + \dots \right). \quad (12.3.7) \quad \text{dipArg}$$

Пренебрегать выделенным слагаемым на основании его сравнения с r/c не имеет никакого смысла! Мы рассматриваем периодическое движение, поэтому из r/c , например, можно вычесть полные периоды и выделенная добавка может уже оказаться того же порядка, что и r/c . Выделенное в (12.3.7) выражение следует сравнивать с периодом T функции $\vec{d}(t)$ и пренебречь им можно в случае

$$\frac{a}{c} \ll T \iff a \ll cT \implies a \ll \lambda. \quad (12.3.8) \quad \text{lambda}$$

Следует заметить, что это ограничение и есть малость скорости частицы (12.3.1). Действительно, удаление частицы от начала координат a можно представить как $a = vT$, тогда из (12.3.8) имеем

$$\frac{vT}{c} \ll T \implies \frac{v}{c} \ll 1. \quad (12.3.9)$$

В итоге формулу (12.3.6) можно упростить до

$$\vec{E} \Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} \approx \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{r}{c})]]}{c^2 r}. \quad (12.3.10) \quad \text{E_dip}$$

Еще раз обращаю ваше внимание, что аргумент дипольного момента был упрощен НЕ в силу (12.3.5), а в силу (12.3.8).

На самом деле кроме неравенств (12.3.3) и (12.3.8) неявно предполагается также что выполнено

$$r \gg \lambda. \quad (12.3.11)$$

Если бы λ было наибольшим масштабом, то из двух слагаемых (12.2.14) большим бы уже было квазистационарное. Действительно, предположим, что дипольный момент меняется по гармоническому закону

$$\ddot{\vec{d}} = -\omega^2 \vec{d}, \quad (12.3.12)$$

тогда в нерелятивистском пределе имеем

$$\vec{E} \Big|_{v/c \ll 1} \approx \frac{e\vec{n}}{r^2} - \frac{\omega^2 [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{d}]]}{c^2 r} \approx \frac{e\vec{n}}{r^2} - \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{d}]]}{\lambda^2 r}, \quad \frac{1}{r^2} \gg \frac{a}{\lambda^2 r} \text{ при } \lambda \gg r \gg a. \quad (12.3.13)$$

Таким образом имеем цепочку неравенств на параметры

$$r \gg \lambda \gg a, \quad (12.3.14)$$

в силу которых справедлива формула (12.3.10) для напряженности электрического поля в **волновой зоне** в **дипольном приближении**.

Используя формулу (12.2.15), найдем в дипольном приближении напряженность магнитного поля

$$\vec{H}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} \approx -\frac{[\vec{n}, \ddot{\vec{d}}]}{c^2 r} \quad (12.3.15)$$

и вектор Умова-Пойнтинга

$$\vec{S}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{\vec{n} (\ddot{\vec{d}}^2 - (\vec{n}, \ddot{\vec{d}})^2)}{4\pi c^3 r^2}. \quad (12.3.16)$$

Далее для краткости мы не будем уточнять в каких предположениях была получена формула. **Интенсивностью** будем называть мощность переносимую электромагнитной волной. В частности в телесный угол $d\Omega$ бесконечно удаленной сферы в единицу времени будет уноситься энергия

$$\frac{dI}{d\Omega} = (\vec{S}, \vec{n}) r^2 d\Omega = \frac{\ddot{\vec{d}}^2 - (\vec{n}, \ddot{\vec{d}})^2}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}]^2}{4\pi c^3}. \quad (12.3.17)$$

dif_inten

Эту формулу называют **дифференциальной интенсивностью дипольного излучения**. Саму формулу также можно представить графически в виде так называемой диаграммы направленности (см. рисунок 12.2). **Полная интенсивность дипольного из-**

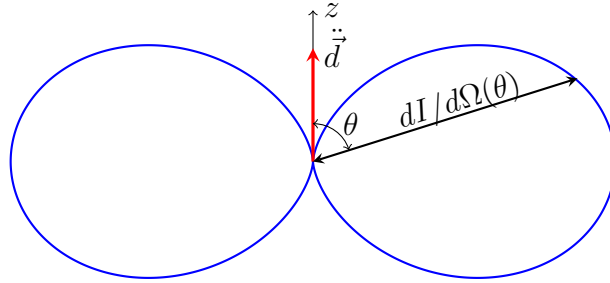


Рис. 12.2: Сечение диаграммы направленности для дипольного излучения.

dipDir

лучения равна интегралу по телесному углу от дифференциальной

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega. \quad (12.3.18)$$

Вычислять полную интенсивность будем в сферических координатах, направив ось z вдоль вектора $\ddot{\vec{d}}$. Имеем

$$I = \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\ddot{\vec{d}}^2 (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3} \frac{4}{3} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}^2. \quad (12.3.19)$$

int_inten

Несмотря на то что формула для интенсивности была получена с учетом ряда предположений, для некоторых движений она является точной! Например, если частица в момент времени t' покоилась в начале координат, то формулы (12.3.17) и (12.3.19) дают «честные» выражения для дифференциальной и полной интенсивностей соответственно.

Лекция 13

30 ноября 2022

13.1 Синхротронное излучение

1.1 Мощность

Рассмотрим движение релятивистского электрона по окружности. Из формулы (12.2.14) мы знаем, что напряженности электрического и магнитного полей в **лабораторной системе отсчета**, отвечающие излучению, равны

$$\vec{E}_{\text{изл.}}(\vec{r}, t) = \frac{e \left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right), \vec{w} \right] \right]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^3} \bigg|_{t'}, \quad \vec{H}_{\text{изл.}} = \left[\vec{n}, \vec{E} \right]. \quad (13.1.1)$$

Вектор Умова-Пойнтинга для такой полевой конфигурации равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{изл.}}^2 \vec{n}. \quad (13.1.2)$$

Следовательно в единицу **лабораторного** времени, в телесный угол $d\Omega$ уносится следующее количество энергии

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left(\frac{\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right), \vec{w} \right] \right]}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^3} \right)^2 d\Omega dt. \quad (13.1.3) \quad \boxed{\text{rel_int}}$$

Далее будем рассматривать потери энергии в единицах запаздывающего времени t' (см. (12.2.2))

$$dt = \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right) dt'. \quad (13.1.4) \quad \boxed{\text{t_t_prime}}$$

Таким образом за единицу запаздывающего времени через телесный угол $d\Omega$ уносится

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\left| \left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right), \vec{w} \right] \right] \right|^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^5} d\Omega. \quad (13.1.5)$$

Рассмотрим **мгновенно сопутствующую систему отсчета** K' , т.е. систему отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится. В этой системе отсчета легко вычислить полную потерю энергии в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int d\Omega \left(\vec{w}^2 - (\vec{n}, \vec{w})^2 \right) = \frac{e^2}{4\pi c^3} 2\pi \vec{w}^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 - \cos^2\theta) = \frac{2e^2 \vec{w}^2}{3c^3}. \quad (13.1.6) \quad \boxed{\text{lose1}}$$

Последняя формула совпадает с полной интенсивность дипольного излучения (см. (12.3.19)), но является при этом точным! результатом (см. также обсуждении после (12.3.19)). В силу симметрий распределения дипольного излучения (см. рисунок 12.2) импульс электромагнитным полем не уносится, т.е. изменение 4-импульса частицы за время dt' в системе K' имеет вид

$$dP^\mu = \begin{pmatrix} -d\mathcal{E}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.1.7)$$

При переходе в другую систему отсчета, например, в лабораторную мы получим

$$d\tilde{P}^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu dP^\nu = \begin{pmatrix} -\gamma d\mathcal{E}/c \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \quad (13.1.8) \quad \boxed{\text{diez}}$$

Здесь $\#$ – некоторые выражения, являющиеся линейными комбинациями $d\mathcal{E}$ и элементов матрицы $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$, явный вид которых не важен для дальнейшего анализа. Аналогично для координат частицы в пространстве времени имеем

$$dx'^\mu = \begin{pmatrix} c dt' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.1.9)$$

где пространственные компоненты равны нулю, так как по нашему предположению в момент времени t' частица покоится. При переходе в другую систему отсчета мы получим

$$d\tilde{x}'^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu dx'^\nu = \begin{pmatrix} \gamma c dt' \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}. \quad (13.1.10)$$

Здесь аналогично (13.1.8) $\#$ – линейные комбинации dt' и элементов матрицы $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$, явный вид которых не важен. Таким образом мы имеем, что отношение, которое далее будем называть **мощностью синхротронного излучения**,

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\tilde{t}'} = \frac{\gamma d\mathcal{E}}{\gamma dt'} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = W \quad (13.1.11)$$

является релятивистским инвариантом! Т.е. потеря энергии частицы на излучение в единицу запаздывающего времени может быть вычислена в любой системе отсчета. Эту величину можно также представить в явно Лоренц-инвариантной форме, которую называют **формулой Лармора**¹, с помощью 4-ускорения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2c}{3} w^\mu w_\mu, \quad (13.1.12)$$

само 4-ускорение в терминах трехмерных величин даётся формулой

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \left(\frac{\gamma^4}{c^3} (\vec{v}, \vec{w}) \right) \cdot \quad (13.1.13)$$

Также в приложениях полезна формула для скалярного квадрата 4-ускорения

$$w_\mu w^\mu = -\frac{\gamma^6}{c^4} \left(\vec{w}^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{w}]^2 \right). \quad (13.1.14)$$

Призываю вас не путать мощность синхротронного излучения с интенсивностью, которую зафиксирует наблюдатель в лаборатории. Не следует думать, что различия обусловлены тем, что где-то не сохраняется энергия: сколько частица излучила – столько зарегистрирует прибор! Различие обусловлено крайне нетривиальной связью запаздывающего времени с лабораторным через уравнение (12.1.3). Также стоит отметить, что в отличие от мощности интенсивность синхротронного излучения НЕ является релятивистским инвариантом и вычисляется по формуле

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \frac{|\vec{n}, [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}), \vec{w}]]|^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^6} d\Omega. \quad (13.1.15)$$

Кажущееся незначительным изменение степени в знаменателе в сравнении с (13.1.6), сильно затрудняют вычисление на практике.

1.2 Угловое и спектральное распределения

Если в формуле (13.1.3) явно раскрыть квадрат, то получим следующее выражение для дифференциальной интенсивности синхротронного излучения

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{2(\vec{n}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^5} + \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{n}, \vec{w})^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^6} \right] d\Omega. \quad (13.1.16) \quad \boxed{\text{true_int}}$$

Излучение углового распределения синхротронного излучения в общем случае является сложной задачей и выходит за рамки настоящего курса. Мы же рассмотрим предел ультрарелятивистских частиц, т.е.

$$1 - \frac{v}{c} \ll 1. \quad (13.1.17)$$

¹Формулу (13.1.6) для потерь излучения в единицу запаздывающего времени в сопутствующей системе отсчета K' через трехмерное ускорение в литературе также называют формулой Лармора.

В этом случае следует обратить внимание на знаменатели в формуле (13.1.16): интенсивность будет значительной если знаменатель близок к нулю, т.е.

$$\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \sim 0 \iff 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \sim 0. \quad (13.1.18)$$

Здесь θ – угол между векторами \vec{n} и \vec{v} . Раскладывая косинус в ряд получим

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \sim 0 \implies \theta \sim \sqrt{1 - \frac{v}{c}}. \quad (13.1.19)$$

Исключительно из соображений красоты² последнее соотношение также может быть представлено в форме

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (13.1.20)$$

Таким образом основная часть синхротронного излучения ультрарелятивистской частицы приходится в узкий конус раствора $1/\gamma$ в направлении скорости частицы (см. рисунок 13.1).

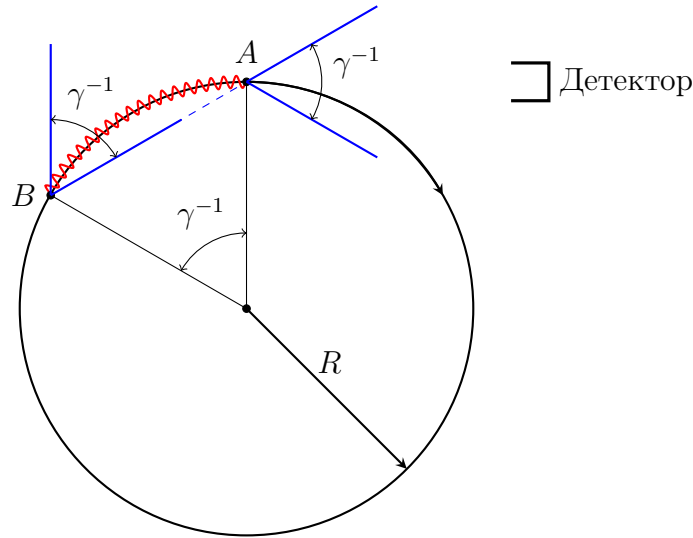


Рис. 13.1: Иллюстрацию к синхротронному излучению ультрарелятивистской частицы. Излучение в точке A будет состоять (сформировано) из электромагнитных волн, излученных при движении частице по дуге $BA = R/\gamma$, которую называют **длиной формирования излучения** или **длиной когерентности**.

Ответ на вопрос о спектральном распределении также содержится в формуле (13.1.16) и в литературе вы можете найти спектр синхротронного излучения, который выражается через спец. функции. Мы же попытаемся ответить на вопрос качественно. Из-за того, что частица «светит» в узкий конус, то детектор будет регистрировать короткие импульсы, длина которых в единицах **запаздывающего времени** равна

$$\Delta t' = \frac{R}{\gamma v}. \quad (13.1.21)$$

²Общий множитель $\sqrt{2}$ естественно не существует при грубой оценке.

Наблюдатель в лаборатории согласно (13.1.4) регистрирует длительность

$$\Delta t = \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \Delta t' \approx \gamma^{-2} \Delta t'. \quad (13.1.22) \quad \boxed{\text{delta2}}$$

Таким образом с учетом (13.1.21) и (13.1.22) мы можем оценить длительность принимаемых детектором импульсов как

$$\Delta t \approx \gamma^{-2} \Delta t' \approx \gamma^{-3} \frac{R}{v} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_0}, \quad (13.1.23)$$

где ω_0 – угловая частота обращения электрона по кольцу синхротрона.

На основании длительности сигнала мы можем сделать вывод о ширине спектра

$$\Delta \omega \Delta t \sim 1 \implies \Delta \omega = \gamma^3 \omega_0. \quad (13.1.24)$$

Без вывода, который при желании можно найти в специализированной литературе (например в 4-м томе ЛЛ), мы будем предполагать, что мощность растёт с частотой в диапазоне $(0, \Delta \omega)$ после чего мощность резко падает. В этом свете $\Delta \omega$ совпадает с максимумом мощности синхротронного излучения

$$\omega_{\text{синх.}} \approx \gamma^3 \omega_0. \quad (13.1.25)$$

13.2 Излучение в мультипольном приближении

В разделе 12.3 предыдущей лекции было изучено дипольное приближение, где напряженности электрического и магнитного полей получались в предположении

$$r \gg \lambda \gg a. \quad (13.2.1) \quad \boxed{\text{inEq}}$$

Напомним, что рассматриваемая нами система совершала финитное периодическое движение в окрестности начала координат. В дипольном приближении мы оставляли лишь нулевые слагаемые при разложении в ряд Тейлора. При изучении мультипольного приближения мы по прежнему остаемся в рамках неравенств (13.2.1). Также мы считаем, что модуль радиус-вектора из начала координат в точку наблюдения очень большой и будем пренебрегать всеми поправками в сравнении с ним, т.е. выражение для векторного потенциала (см. (11.4.17)) может быть представлено в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{4\pi}{c} \frac{1}{r} \int d^3 \vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c} \vec{j}(\vec{x}, \tau). \quad (13.2.2) \quad \boxed{\text{ARet_dist}}$$

Напоминаю, что предел большого расстояния до точки наблюдения не позволяет упростить аргумент дельта-функции, соответствующие поправки следует сравнивать с периодом (или длиной волны, см. (12.3.8)). В дипольном приближении мы пренебрегали размерами системы a (характерное удаление зарядов от начала координат) в сравнении с длиной волны λ , в мультипольном разложении, изучаемом здесь, мы сохраним слагаемые первого порядка. Формула для векторного потенциала (13.2.2) с учетом этого дополнительного предположения может быть представлена в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty, \lambda \gg a} \approx \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{c}\right) \vec{j}(\vec{x}, \tau). \quad (13.2.3) \quad \boxed{\text{Aquad}}$$

Раскладывая дельта-функцию по малому параметру $\frac{(\vec{x}, \vec{n})}{c}$, мы получаем³

$$\begin{aligned} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c}\right) &= \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) + \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) = \\ &= \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right). \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

Мы будем рассматривать для простоты системы точечных зарядов с плотностью тока

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_J(t)). \quad (13.2.5)$$

Подставляя разложение дельта-функции и явное выражение для плотности тока в (13.2.3), мы получим

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \left[\delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \right] \vec{j}(\vec{x}, \tau) = \\ &= \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)) - \\ &\quad - \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)) = \\ &= \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) - \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)). \end{aligned} \quad (13.2.6) \quad \text{preQuadRa}$$

Здесь $A_{dipole}(\vec{r}, t)$ – векторный потенциал в дипольном приближении

$$A_{dipole}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\dot{\vec{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}. \quad (13.2.7) \quad \text{Adipole1}$$

В последнем слагаемом (13.2.6) выполним интегрирование по \vec{x}

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2 r} \int d\tau \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) (\vec{n} \cdot \vec{r}_J(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(\tau - \left[t - \frac{r}{c}\right]\right). \quad (13.2.8)$$

Здесь мы воспользовались четностью дельта-функции. Далее выполним интегрирование по τ

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(t') (\vec{n} \cdot \vec{r}_J(t')), \quad t' = t - \frac{r}{c}. \quad (13.2.9) \quad \text{preQuad2}$$

Полезна следующая формула интеграла от производной дельта-функции (доказывается интегрированием по частям в предположении, что $f(x)$ обладает конечным носителем)

$$\int dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (13.2.10)$$

³Подобное разложение для обобщенной функции выглядит немного стремно, но все же справедливо после вычисления интеграла по τ . Можно было бы сразу вычислить интеграл по τ в формуле (13.2.3) и затем раскладывать временной аргумент функции $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и получить такой же ответ.

Если переписать (13.2.9) явно, то получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c} \right) \left(\vec{r}_J \left(t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right), \quad (13.2.11) \quad \text{A_Quad}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный вектор из начала координат в точку наблюдения. Второе слагаемое (13.2.11) преобразуем по формуле

$$\vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) + \frac{1}{2} [\vec{r}_J, \vec{v}_J], \vec{n}. \quad (13.2.12)$$

Подставив это представление в (13.2.11), мы получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_J e_J \vec{r}_J(\vec{n}, \vec{r}_J) + \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}}, \vec{n}], \quad (13.2.13) \quad \text{Aprev}$$

где магнитный дипольный момент равен

$$\vec{m} = \sum_J \frac{e_J}{2c} [\vec{r}_J, \vec{v}_J]. \quad (13.2.14)$$

Пока что вплоть до формулы (13.2.13) мы не вводили никакого разделения на квазистационарную часть поля и волновую, т.е. вычисляя по формулам (12.2.1) напряженности полей мы получим как поля излучения так и квазистационарные поля. Далее нас будет интересовать только волновая зона, в этой зоне мы можем считать поля плоскими волнами, распространяющимся вдоль вектора \vec{n} (см. раздел 11.2). Для плоских волн справедливо соотношение между полями \vec{E} и \vec{H}

$$\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}], \quad (13.2.15)$$

но напряженности магнитного поля однозначно определяется только векторным потенциалом $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, следовательно и напряженность электрического поля может быть однозначно восстановлена по векторному потенциалу. По векторному потенциалу «с временным аргументом $\left(t - \frac{r}{c} \right)$ »⁴ напряженности могут быть найдены по формулам

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{n} \right], \quad \vec{E} = \frac{1}{c} \left[\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{n} \right], \vec{n} \right]. \quad (13.2.16) \quad \text{EHwave}$$

В свете этих соотношений мы можем добавить к выражению для потенциала слагаемые пропорциональные \vec{n} никак не изменив при этом поля в **волновой** зоне⁵. Таким образом мы можем представить векторный потенциал для полей в волновой зоне в виде

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR} + \frac{1}{6c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_J e_J \left[3\vec{r}_J(\vec{n}, \vec{r}_J) - \vec{n} r_J^2 \right] + \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}} \times \vec{n}]. \quad (13.2.17) \quad \text{Ares}$$

⁴Здесь имеется ввиду следующее. Легко видеть, что выражением (13.2.11) не является только лишь функцией $F\left(t - \frac{r}{c}\right)$ (см. раздел 11.2), но, тем не менее, при дифференцировании потенциала для нахождения напряженности полей в **волновой зоне** мы будем дифференцировать только функции, зависящие от $(t - r/c)$. Пространственные производные от $1/r$ дадут квазистационарные поля.

⁵Напоминаю, что при получении решений уравнений Максвелла (11.4.16) и (11.4.17) на потенциалы было наложено условие Лоренца. Как известно (см. раздел 5.5) условие Лоренца не фиксирует полностью калибровочный произвол. Подумайте можно ли реализовать добавление слагаемого пропорционального \vec{n} калибровочным преобразованием от функций вида $\frac{f(t-r/c)}{r}$, которые решают волновое уравнение?

Если ввести вспомогательное обозначение

$$D_i = D_{ij}n_j, \quad (13.2.18)$$

где D_{ij} – тензор квадрупольного момента (см. раздел 2.1), то, оставляя лишь слагаемые, которые отвечают излучению, мы после всех дифференцирований окончательно получим

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ [\ddot{d}, \vec{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{\vec{D}}, \vec{n}] + [[\ddot{\vec{m}}, \vec{n}], n] \right\}, \quad (13.2.19) \quad \boxed{\text{H_mult}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ [[\ddot{d}, \vec{n}], n] + \frac{1}{6c} [[\ddot{\vec{D}}, \vec{n}], \vec{n}] - [\ddot{\vec{m}}, \vec{n}] \right\}. \quad (13.2.20) \quad \boxed{\text{E_mult}}$$

Несмотря на то что в формулах (13.2.19), (13.2.20) четко разделяются различные вклады, в формулах для дифференциальной интенсивности они перемешиваются, т.е. появляются слагаемые, содержащие, например, квадрупольный момент и магнитный дипольный момент. Ввиду этого вы не найдете в литературе формулы, например, для дифференциальной интенсивности квадрупольного излучения. Тем не менее при вычислении полной интенсивности оказывается, что вклады, отвечающие диполлю, квадруполлю и магнитному диполлю, разделяются. Для того, чтобы в этом убедиться самостоятельно вам понадобятся результаты упражнений по усреднению на единичной сфере

$$\langle n_i \rangle = 0, \quad \langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_k \rangle = 0, \quad \langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (13.2.21) \quad \boxed{\text{delta}}$$

Полная интенсивность излучения с учетом квадрупольного и магнитно-дипольного вкладов дается выражением

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 + \frac{\ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ij}}{180c^5} + \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{m}}^2. \quad (13.2.22) \quad \boxed{\text{Intensity}}$$

Лекция 14

7 декабря 2022

Lec14

14.1 Радиационное трение

Для решения задачи о движении частицы в электромагнитном поле нужно решить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \\ mc \frac{du^\mu}{ds} = e F^\mu{}_\nu u^\nu, \end{cases} \quad (14.1.1) \quad \text{F+p}$$

где плотность тока для точечной частицы дается выражением

$$J_{part.}^\nu(y) = e \int ds \frac{du^\nu}{ds} \delta^{(4)}(y - x(s)). \quad (14.1.2)$$

Решение системы (14.1.1) является очень сложной задачей и единственное (по модулю преобразований Лоренца) точное решение – это покоящаяся частица с кулоновским электрическим полем. Тем не менее задачу можно решить приближенно. Далее мы будем рассматривать нерелятивистский случай и обратную реакцию поля будет учитывать в виде дополнительной силы \vec{F}_{rad}

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{F}_{rad}. \quad (14.1.3)$$

Двигаясь в электромагнитном поле частица будет излучать электромагнитные волны, полная интенсивность такого излучения в дипольном приближении равна

$$I_d = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}. \quad (14.1.4) \quad \text{lose}$$

Приравняем потери на излучение электромагнитных волн мощности сил радиационного трения \vec{F}_{rad}

$$(\vec{F}_{rad}, \vec{v}) = -\frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} = -\frac{2e^2\dot{\vec{v}}^2}{3c^3} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\vec{v}, \dot{\vec{v}}) + \frac{2e^2}{3c^3} (\vec{v}, \ddot{\vec{v}}). \quad (14.1.5) \quad \text{Frad1}$$

То, что интенсивность дипольного излучения не представляется в виде мощности некоторой силы совсем не удвительно, ведь формула (14.1.4) описывает потери связанные исключительно с излучением электромагнитных волн, но как мы знаем движущийся заряд создает не только поле, соответствующее электромагнитным волнам (см (12.2.14), (12.2.15)).

Тем не менее, формула (14.1.5) позволяет утверждать, что сила радиационного трения может быть представлена в форме

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} + \vec{X}. \quad (14.1.6) \quad \text{RadGuess}$$

В более строгом выводе, который вы можете найти в ЛЛ, доказывается, что добавка $\vec{X} = 0$. Аргумент в поддержку последнего утверждения можно получить усреднением по времени выражения (14.1.5)

$$\langle (\vec{F}_{rad}, \vec{v}) \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \langle (\ddot{\vec{v}}, \vec{v}) \rangle. \quad (14.1.7)$$

Последнее позволяет утверждать, что в квазистационарном случае обратное воздействие электромагнитного поля дается выражением (14.1.6), в котором $\vec{X} = 0$. Таким образом **Лоренцева сила радиационного трения** равна

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}, \quad (14.1.8)$$

а уравнения движения частицы с учетом обратного воздействия поля приобретают вид

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\dot{\vec{r}}, \vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (14.1.9) \quad \text{perturb}$$

1.1 Проблемы с силой радиационного трения

Сила радиационного трения действует на любую заряженную! частицу. Рассмотрим следующее уравнение движения

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} + m\tau_0 \ddot{\vec{v}}, \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (14.1.10) \quad \text{ext}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ – внешняя сила, которая не обязательно должна быть электромагнитной как в уравнении (14.1.9). В отсутствии внешних сил уравнение (14.1.10) кроме ожидаемого свободного движения $\vec{v} = \text{Const}$ допускает еще и «самоускоряющееся» решение $\dot{\vec{v}} = \dot{v}_0 e^{t/\tau_0}$. Появление таких решений связано с появлением третьей производной в уравнениях, из-за

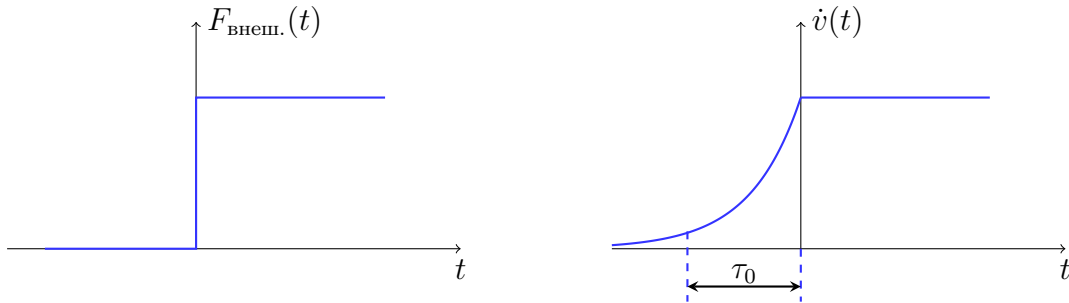


Рис. 14.1: Предускорение классического заряда

preAcc

чего решение больше не определяется однозначно начальными положениями и скоростями. Чтобы получать разумные результаты, необходимо учитывать граничные условия и уравнение (14.1.10) заменить интегродифференциальным уравнением, которое включает эти условия (в частности, условие $\dot{\vec{v}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если в этом пределе $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ обращается в нуль). Таким образом, можно записать следующее уравнение:

$$m\dot{\vec{v}} = \int_0^\infty ds e^{-s} \vec{F}_{\text{внеш.}}(t + \tau_0 s). \quad (14.1.11)$$

В этом уравнении быстро растущие решения исключены, но возникает новое нежелательное свойство, а именно предускорение. Если $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ равно нулю при отрицательных t (см. рисунок 14.1), то $\dot{\vec{v}}$ не равно нулю, и начинает увеличиваться в более ранние моменты времени порядка τ_0 ($\sim 10^{-24}$ с в случае электрона); это время, за которое свет проходит расстояние, равное электромагнитному (классическому) радиусу.

14.2 Естественная ширина спектральной линии

lineBroad

Учет силы радиационного трения позволяет качественно объяснить некоторые наблюдаемые эффекты. Рассмотрим заряд в осцилляторном потенциале

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (14.2.1)$$

Будем решать это уравнение по теории возмущений, считая силу радиационного трения малой поправкой к уравнениям движения. В нулевом приближении

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}. \quad (14.2.2)$$

На таких траекториях вклад от силы радиационного трения равен

$$\frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d}{dt} \ddot{\vec{r}} = -\frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 \dot{\vec{r}} \equiv -\gamma \dot{\vec{r}}. \quad (14.2.3)$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений уравнение на траекторию заряда имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0. \quad (14.2.4)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде¹

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}. \quad (14.2.5)$$

Характеристическое уравнение на частоту имеет вид

$$-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2 = 0 \iff \left(\omega - \frac{i\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}. \quad (14.2.6)$$

¹Здесь мы используем обозначения раздела 11.3, где комплексные величины обозначаются \mathbf{a} , а их вещественные части a .

Поскольку мы решаем уравнения движения в рамках теории возмущений, то нас интересует лишь линейная по γ поправка к частоте

$$\omega \simeq \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}. \quad (14.2.7)$$

Решение уравнений движения в первом порядке имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t}. \quad (14.2.8)$$

В нерелятивистском пределе излучательная часть электрического поля равна

$$\vec{E}_{\text{изл.}} = \frac{e}{c^2 R} [\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{r}}]] \sim e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t}. \quad (14.2.9)$$

Фурье образ для такой зависимости от времени

$$\vec{E}_{\text{изл. } \omega} = \int_0^\infty d\omega \vec{E}_{\text{изл.}}(t) e^{-i\omega t} \sim \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}. \quad (14.2.10)$$

Интенсивность излучения на частоте ω соответственно равна

$$I_\omega \sim |\vec{E}_{\text{изл. } \omega}|^2 \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (14.2.11)$$

Из-за присутствия радиационного трения, т.е. $\gamma \neq 0$, выражение более не сингулярно при $\omega = \omega_0$ (график изображен на рисунке 14.2). Величину γ по этой причине называют **естественной шириной спектральной линии**. Следует заметить, что не только радиаци-

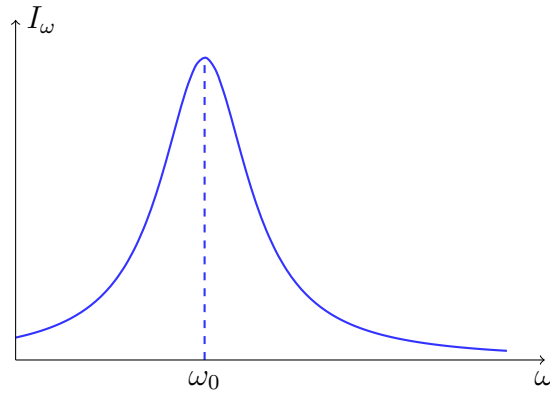


Рис. 14.2: Спектральная интенсивность излучения

LorGraph

онное трение ответственно за уширение спектральных линий, другие эффект, например, столкновения и тепловое движение дают поправки того же порядка, что и радиационное трение. Тем не менее, учет всех эффектов приводит к такой же форме зависимости, что изображена на рисунке 14.2.

14.3 Границы применимости классической электродинамики

Найдем границы применимости приближения (14.1.9). Пусть траектория частицы задается следующим рядом

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t) + \dots, \quad (14.3.1)$$

где нулевое приближение траектории по радиационному трению подчиняется уравнению

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}_0, \vec{H}]. \quad (14.3.2) \quad \text{zero0rd}$$

В первом порядке по радиационному трению уравнение движения частицы имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}_1, \vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}_0. \quad (14.3.3) \quad \text{first0rd}$$

Продифференцировав уравнение (14.3.2) по времени, мы получим

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\vec{v}}_0, \vec{H}] + \frac{e}{mc}[\vec{v}_0, \dot{\vec{H}}]. \quad (14.3.4)$$

Рассмотрим мгновенно сопутствующую систему отсчета и подставим выражение для $\dot{\vec{v}}_0$, которое следует из уравнения (14.3.2)

$$\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3(mc^2)^2}[\vec{E}, \vec{H}]. \quad (14.3.5) \quad \text{fr}$$

В мгновенно сопутствующей системе отсчета на частицу действует только сила $e\vec{E}$ (см. уравнение (14.3.2)), которая должна быть много больше выражения (14.3.5) для применения теории возмущений

$$\frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3(mc^2)^2}[\vec{E}, \vec{H}] \ll e\vec{E}. \quad (14.3.6)$$

Для стационарных полей очевидно должно быть выполнено неравенство

$$\frac{e^3 H}{m^2 c^4} \ll 1. \quad (14.3.7) \quad \text{constr1}$$

Для очень быстро меняющегося, например, по гармоническому закону электрического поля должно быть выполнено неравенство

$$\frac{e^2 \omega}{mc^3} \ll 1 \iff \frac{e^2}{mc^2} \ll \frac{c}{\omega} \sim \lambda. \quad (14.3.8) \quad \text{constr2}$$

Здесь ω – частота изменения электрического поля. Выражение $e^2/(mc^2)$ называют **классическим радиусом электрона**²

$$r_e := \frac{e^2}{mc^2}. \quad (14.3.9) \quad \text{classicRa}$$

²В литературе вы можете найти множество спекуляций, оправдывающих такое название, но едва ли они вас убедят. Эту величину почему-то так называли.

Ограничение (14.3.8) по сути говорит, что длина волны внешнего поля должна быть много больше классических радиусов частиц (чтобы это не значило).

Говоря о применимости **классической** электродинамики не следует только сравнивать значения полей и характерные расстояния с величинами, на которых существенный вклад дают эффекты **квантовой электродинамики**. Рассмотрение зарядов как точечных частиц само по себе приводит к противоречиям – электростатическая энергия точечного электрона бесконечна! Расходимость в нуле можно устранить, если ввести так называемое жесткое обрезание *классическим радиусом* (формула (14.3.9) в этом контексте появляется в следствии равенства инертной массы электрона его электростатической энергии). Тем не менее расстояния, на которых существенными становятся квантовые эффекты существенно больше (14.3.9). Характерным таким расстоянием является комптоновская длина волны для электрона

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad (14.3.10)$$

которая сильно больше классического радиуса электрона

$$\frac{\lambda}{r_e} \equiv \frac{1}{\alpha} \simeq 137. \quad (14.3.11)$$

14.4 Рассеяние электромагнитных волн зарядами

Важной характеристикой любого процесса рассеяния является **сечение**

$$\sigma := \frac{\text{вероятность процесса в ед. времени}}{\text{плотность потока налетающих частиц}}. \quad (14.4.1) \quad \boxed{\text{sigma}}$$

Данное определение универсально и может быть применено к любым процессам рассеяния: света (фотонов) на электронах, электронов на электронах, горошин на арбузах и т.д.

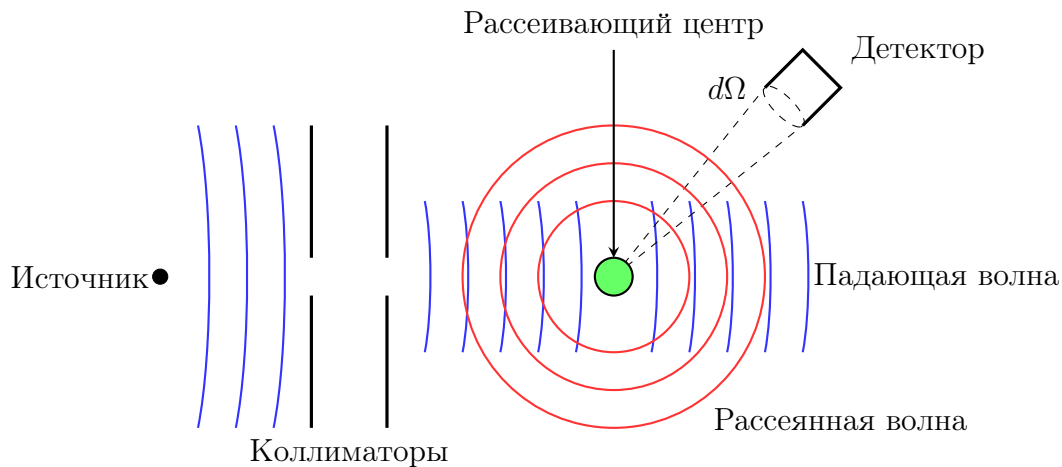


Рис. 14.3: Рассеяние электромагнитных волн зарядами

EMscat

Нас будет интересовать процесс рассеяния света на зарядах. На рассеивающий центр у нас будут налетать фотоны, поэтому в качестве плотности потока налетающих частиц

из знаменателя формулы (14.4.1) у нас выступает вектор Умова-Пойнтинга. В единицу времени мы также будем регистрировать фотоны, которые попали в детектор, который виден под некоторым телесным углом $d\Omega$ (см. рисунок 14.3). Для такого процесса дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\vec{S}|} \frac{dI}{d\Omega}. \quad (14.4.2) \quad \text{diffSigma}$$

Рассмотрим заряд, находящийся в изотропном гармоническом потенциале, на который налетает плоская электромагнитная волна³

$$\vec{E} = \Re\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i(\vec{k}, \vec{r})}\}. \quad (14.4.3) \quad \text{inWave}$$

Мы будем считать, что длина падающей волны много больше характерных смещений нашего заряда, поэтому слагаемым $i(\vec{k}, \vec{r})$ в показателе экспоненты можно пренебречь. Уравнения движения заряда с учетом упомянутых приближений имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (14.4.4)$$

Как и в разделе 14.2 мы будем считать эффект радиационного трения мало поправкой, тогда в первом приближении уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (14.4.5)$$

Частное решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$\vec{r}(t) = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (14.4.6)$$

Излучение, создаваемое таким образом движущимся зарядом, найдем в дипольном приближении

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2}{m} \frac{\omega^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (14.4.7) \quad \text{cDipole}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{d}}, \vec{n}|^2}{8\pi c^3} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \left| [\vec{E}_0, \vec{n}] \right|^2. \quad (14.4.8) \quad \text{cInten}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится раскрыть модуль векторного произведения

$$\left| [\vec{E}_0, \vec{n}] \right|^2 = \epsilon_{ijk} E_{0j} n_k \epsilon_{ipq} E_{0p} n_q = (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) E_{0j} n_k E_{0p} n_q = (\delta_{ij} - n_i n_j) E_{0i} E_{0j}, \quad (14.4.9)$$

где мы учли, что вектор \vec{n} – единичный. Модуль вектора Умова-Пойнтинга для электромагнитной волны (14.4.3) в терминах комплексных векторов поляризации \vec{E}_0 (после усреднения по времени) равен

$$|\vec{S}| = \frac{c}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*). \quad (14.4.10) \quad \text{cPoint}$$

³Здесь также используются обозначения раздела 11.3. Именно из-за комплексности вектора дипольного момента \vec{d} (14.4.7) и вектора \vec{E}_0 в формулах (14.4.8) и (14.4.10) фигурирует коэффициент $\frac{1}{8\pi}$ вместо привычных $\frac{1}{4\pi}$ (см. (11.3.2)).

Подставляя полученные результаты в формулу для дифференциального сечения (14.4.2), мы получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\mathbf{E}_{0i} \mathbf{E}_{0j}^*}{(\vec{\mathbf{E}}_0, \vec{\mathbf{E}}_0^*)}. \quad (14.4.11)$$

Последний множитель в этой формуле совпадает с тензором поляризации (11.3.8). Подставляя различные выражения для тензоров поляризации (11.3.10), (11.3.15), (11.3.16) и (11.3.17), мы получим соответственно:

- **Дифференциальное сечение рассеяния для линейно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{lin.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - (\vec{n}, \vec{e})^2), \quad (14.4.12)$$

где $\vec{e} = \vec{\mathbf{E}}_0 / |\vec{\mathbf{E}}_0|$ – вещественный единичный вектор поляризации;

- **Дифференциальное сечение рассеяния для циркулярно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{circ.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\vec{n}, \vec{k})^2}{k^2} \right), \quad (14.4.13)$$

где \vec{k} – волновой вектор;

- **Дифференциальное сечение рассеяния для естественно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{nat.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\vec{n}, \vec{k})^2}{k^2} \right). \quad (14.4.14)$$

Полное сечения рассеяния получается интегрирование дифференциального

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (14.4.15)$$

Вычислим, например, полное сечение рассеяния для линейно поляризованного света

$$\begin{aligned} \sigma_{lin.} &= \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - \cos^2 \theta) = \\ &= r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} 2\pi \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (14.4.16)$$

Оказывается, что полное сечение не зависит от поляризации падающей волны, т.е. для всех случаев

$$\sigma_{lin.} = \sigma_{circ.} = \sigma_{nat.} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (14.4.17)$$

Из полученного результата легко найти сечение рассеяния на свободном заряде ($\omega_0 = \gamma = 0$)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (14.4.18)$$

которое также называют **Томсоновским сечением рассеяния**.

Fine dell'Opera