1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 19 января 2018 года

Вариант **А**

1А. Космическая станция покоится относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн. км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придаёт станции скорость $V_0 = 20$ см/с, направленную от Солнца. На каком расстоянии R от Солнца станция остановится? Масса Солнца $M_\text{С} = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (потока ионизованных частиц – протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

2А. Тепловая машина работает по циклу ABCA, состоящему из изотермы AB, адиабаты BC и политропы CA с отрицательной теплоемкостью. Определить КПД тепловой машины, если её рабочее тело неизвестно, а температуры в точках A и C относятся как $T_\text{A}/T_\text{C} = 4$.

3А. На одну из поверхностей толстой плоской стеклянной пластины с показателем преломления $n_\text{ст} = 1{,}69$ нанесена тонкая плёнка прозрачного диэлектрика. Плёнка имеет минимальную толщину, обеспечивающую при нормальном падении полное просветление на длине волны $\lambda_1 = 600$ нм. Какая доля интенсивности падающего нормально света отразится от верхней поверхности пластины при длине волны $\lambda_2 = 400$ нм? Дисперсией показателя преломления в стекле и плёнке, а также многократными отражениями пренебречь.

4А. Нейтрон находится в сферической прямоугольной потенциальной яме радиусом $R = 8 \cdot 10^{-13}$ см. Определить минимальную глубину ямы U, при которой в ней существует пятый s-уровень. Найти также энергию первого уровня E_1, отсчитанную от дна такой ямы.

5А. Плоская электромагнитная волна нормально падает на тонкую проводящую пленку. Пленка изготовлена из графена, поверхностная проводимость которого $\sigma = e^2/4\hbar$. Определить коэффициенты отражения, прохождения и поглощения волны (по интенсивности). Толщина пленки много меньше длины волны.

Указание. Поверхностная проводимость есть произведение удельной проводимости на толщину пленки.

1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 19 января 2018 года

Вариант **Б**

1Б. Космическая станция покоится относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн. км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придаёт станции скорость V_0, направленную от Солнца. Каково минимальное значение V_0, при котором станция может улететь на бесконечность? Масса Солнца $M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (потока ионизованных частиц – протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

2Б. Тепловая машина работает по циклу 1→2→3→1, состоящему из политропы 1→2 с отрицательной теплоёмкостью, изотермы 2→3 и адиабаты 3→1. Определить КПД тепловой машины, если её рабочее тело неизвестно, а отношение температур $T_1/T_2 = 4$.

3Б. Одна из поверхностей толстой плоской стеклянной пластины покрыта тонкой плёнкой минимальной толщины, обеспечивающей полное просветление при нормальном падении света с длиной волны $\lambda_1 = 500$ нм. Показатель преломления стекла $n_{ст} = 1{,}69$. Какая доля интенсивности падающего нормально света с длиной волны $\lambda_2 = 250$ нм отразится? Дисперсией показателя преломления в стекле и плёнке, а также многократными отражениями пренебречь.

4Б. Электрон находится в симметричной одномерной потенциальной яме шириной $2a = 3$ нм. Определить минимальную глубину ямы U, при которой в ней существует уровень с номером $n = 12$. Найти также энергию первого уровня E_1, отсчитанную от дна такой ямы.

5Б. В вакууме расположен шар радиуса $R = 2$ см с температурой $T = 450$ К. На расстоянии $r = 4$ см от центра шара находится практически покоящийся атом цезия в основном состоянии. Найти среднее значение и направление силы, действующей на атом вследствие его поляризации электрическим полем теплового излучения. Поляризуемость атома $\alpha = 7{,}5 \times 10^{-22}$ см^3. Эффектом радиационного давления пренебречь, силу тяжести не учитывать.

1	2	3	4	5	∑	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 19 января 2018 года

Вариант **В**

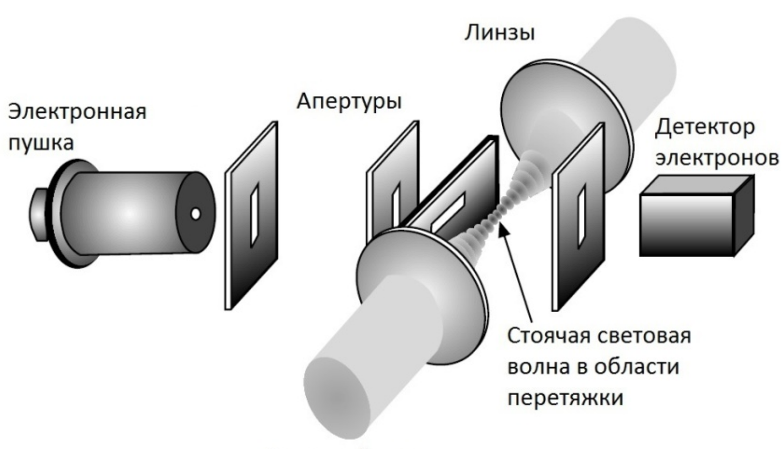
1В. Космическая станция покоится относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн. км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придаёт станции скорость $V_0 = 20$ см/с, направленную к Солнцу. На каком расстоянии R от Солнца станция остановится? Масса Солнца $M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (потока ионизованных частиц – протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

2В. Холодильная машина работает по циклу 1→2→3→1, состоящему из изотермы 1→2, адиабаты 2→3 и политропы с положительной теплоемкостью 3→1. Вычислить эффективность холодильной машины, если её рабочее тело неизвестно, а отношение температур в точках 3 и 1 равно $T_3/T_1 = 3$.

3В. Одна из поверхностей толстой плоской стеклянной пластины покрыта тонкой плёнкой минимальной толщины, обеспечивающей полное просветление при нормальном падении света с длиной волны $\lambda_1 = 500$ нм. Показатель преломления стекла $n_{ст} = 1{,}69$. Найти максимальную длину волны света, при которой данная пленка будет отражать 1,7% интенсивности падающего излучения. Дисперсией показателя преломления в стекле и плёнке, а также многократными отражениями пренебречь.

4В. Электрон находится в симметричной одномерной потенциальной яме шириной $2a = 3$ нм. Определить минимальную глубину ямы U, при которой в ней существует уровень с номером $n = 11$. Найти также энергию второго уровня E_2, отсчитанную от дна такой ямы.

5В. Излучение импульсного лазера длительностью $\tau = 10$ нс и энергией $E = 0{,}2$ Дж разделено на два когерентных луча, направленных друг против друга и сфокусированных в области перетяжки с диаметром d =125 мкм (см. рисунок). Электронный пучок с энергией $eV = 380$ эВ рассеивается на перетяжке и направление на первый дифракционный максимум составляет $\varphi = 2{,}36 \cdot 10^{-4}$ рад с направлением пучка. Считая, что эффективный потенциал рассеяния пропорционален пространственному распределению интенсивности волны, найти объемную плотность фотонов в области перетяжки.



Решения ГОС-2018 для преподавателей

Вариант А

1А (*Аникин*). Световой поток (мощность солнечного излучения, падающая на единицу площади) обратно пропорционален квадрату расстоянию от Солнца

$$\Phi = \frac{W}{4\pi R^2}, \qquad (1)$$

где $W = \sigma T_C^4 4\pi R_C^2$ – светимость Солнца, т.е. полная мощность солнечного излучения. Здесь

Условие равновесии станции

$$\frac{2\Phi S}{c} = \frac{2WS}{4\pi R_0^2 c} = \frac{GM_C m}{R_0^2}. \qquad (2)$$

Здесь S и m – площадь паруса и масса станции соответственно.

Как видно из (2), при выполнении условия $GM_C m = WS/(2\pi c)$ неподвижная станция будет находиться в равновесия на любом расстоянии от Солнца. Когда станция приобретает скорость в направлении от Солнца, то равновесие нарушится из-за влияния эффекта Доплера: частота отраженных от паруса фотонов станет меньше частоты падающих и число падающих на единицу поверхности фотонов в единицу времени уменьшится. В результате сила гравитационного притяжения превысит силу давления излучения и станция будет тормозиться.

Пусть станция движется от Солнца со скоростью V. В системе покоя станции (которую можно приближенно считать инерциальной) частота фотонов, летящих к зеркалу:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}. \qquad (3)$$

В этой системе частота отраженных фотонов такая же, а в лабораторной системе

$$\nu'' = \nu'\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \approx \nu(1 - 2V/c).$$

Этот результат можно было получить сразу, если знать, что при отражении в движущемся со скоростью V зеркале изображение движется со скоростью $2V$.

В лабораторной системе переданный станции импульс при столкновении с ней одного фотона есть $\Delta p = (h\nu + h\nu'')/c = 2h\nu(1 - V/c)/c$. Если при неподвижном зеркале время между двумя последовательными ударами фотонов равнялось t_0, то при движущемся зеркале оно станет равно $t_0' = t_0/(1 - V/c)$. Число фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, уменьшается, и сила давления становится равной $F = \Delta p \Phi' S / h\nu = 2\Phi S(1 - V/c)^2/c \cong 2\Phi S(1 - 2V/c)/c$. Уравнение движения станции с учетом отмеченного в (2) равенства сил есть

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{2WS}{4\pi mc^2}\frac{2V(t)}{R^2(t)} = -\frac{GM_C}{c}\frac{2V(t)}{R^2(t)}. \qquad (4)$$

Т.к. $dR(t) = V(t)dt$, то

$$dV = -\frac{2GM_C}{c}\frac{dR}{R^2}, \qquad (5)$$

откуда $\quad V(R) - V_0 = \frac{2GM_C}{c}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right).$

Согласно условию $V(R) = 0$. Тогда

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{cV_0R_0}{2GM_C}} = 1{,}0115R_0 \approx 50{,}57\text{млн.км.}$$

P.S. Интересно, что задача допускает точное решение в лабораторной системе координат и без предположения о малости смещения (*А.Гуденко*)

Импульс фотона до столкновения $p_0 = h\nu_0/c$, а после отражения $p = (h\nu_0/c)\,(c - V)/(c + V)$ - это соотношение точное, без всяких приближений, учитывающих малость скорости V.

Изменение импульса фотона $\Delta p = (h\nu_0/c)[(c - V)/(c + V) + 1] = 2h\nu_0/(c + V)$.

Число ударов фотонов в единицу времени: $\Delta N/\Delta t = n(r)(c - V)S = n_0(R_0/r)^2(c - V)S$.

Сила давления света: $f = \Delta p(\Delta N/\Delta t) = 2h\nu_0 n_0(R_0/r)^2 S(c - V)/(c + V) = GM_C(c - V)/(c + V)r^2$.

Сила гравитационного притяжения на расстоянии r: $f_g = GM_C/r^2$.

Тормозящая сила: $\Delta f = f_g - f = GM_C/r^2[1 - (c - V)/(c + V)] = GM_C/r^2 2V/(c + V)$.

Закон движения зеркала: $dV/dt = -2GM_C V/r^2(c + V) \rightarrow (c + V)dV = -2GM_C dr/r^2$.

После интегрирования получаем: $cV_0 + V_0^2/2 = 2GM_C(1/R_0 - 1/R)$.

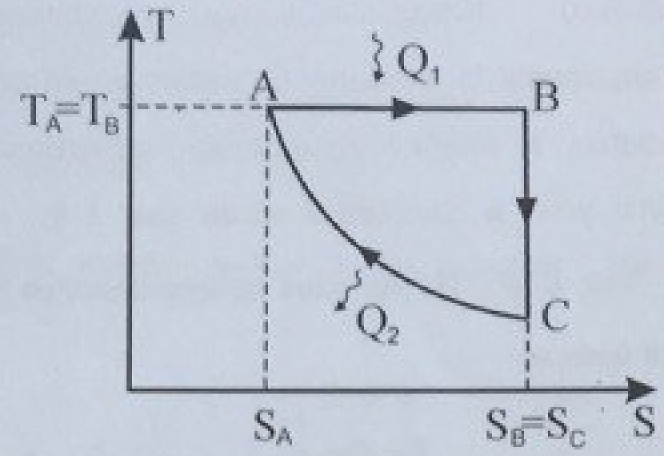
Зеркало остановится на расстоянии: $R = R_0/[1 - (cV_0 + \frac{1}{2}V_0^2)R_0/2GM_C]$.

Используя приближение $V \ll c$, получим приведенный выше ответ.

2А (*Лукьянов*). Поскольку теплоемкость $C = T\frac{\partial S}{\partial T}$, то на политропе СА изменение энтропии связано с изменением температуры выражением $S_\text{A} - S_\text{C} = \int_{T_\text{C}}^{T_\text{A}} \frac{CdT}{T} = C\ln\frac{T_\text{A}}{T_\text{C}} = -|C|\ln\frac{T_\text{A}}{T_\text{C}} < 0$. По определению КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$, где A – совершенная телом работа, Q_1 и Q_2 – подведенное и отданное количества теплоты. Как видно из рисунка, $Q_1 = T_\text{A}(S_\text{C} - S_\text{A})$, $Q_2 = C\int_{T_\text{C}}^{T_\text{A}} dT = C(T_\text{A} - T_\text{C}) = -|C|(T_\text{A} - T_\text{C}) < 0$. Следовательно, $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|C|(T_\text{A} - T_\text{C})}{T_\text{A}(S_\text{C} - S_\text{A})}$.

Подставляя сюда найденную ранее разность энтропий на политропе, получаем

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|C|(T_\text{A} - T_\text{C})}{T_\text{A}(S_\text{C} - S_\text{A})} = 1 - \frac{|C|(T_\text{A} - T_\text{C})}{T_\text{A}|C|\ln(T_\text{A}/T_\text{C})} = 1 - \frac{(T_\text{A}/T_\text{C}) - 1}{(T_\text{A}/T_\text{C})\ln(T_\text{A}/T_\text{C})} = 1 - \frac{3}{4\ln 4} \cong 0{,}46.$$



3A (*Крымский*). Минимальная толщина просветляющей плёнки определяется соотношением $2ln = \frac{\lambda_1}{2}$, т.е. $l = \frac{\lambda_1}{4n}$. При этом должны быть равны амплитуды волн, отражённых от границ раздела воздух-пленка $r_1 = \frac{n-1}{n+1}$ и пленка-стекло $r_2 = \frac{n_{ст} - n}{n_{ст} + n}$ (амплитуда падающей волны взята равной 1). Из равенства амплитуд следует, что $n_{ст} = n^2$.

Интенсивность отражённого света в пренебрежении многократными отражениями $I = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\Delta\varphi$, где амплитуды отражённых волн от плёнки и стекла при выполнении условия (1) $r_1 = r_2 = \frac{n-1}{n+1}$. Разность фаз $\Delta\varphi = 2k_2 nl = \frac{4\pi}{\lambda_2} \cdot n \cdot \frac{\lambda_1}{4n} = \pi \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Для λ_1=600нм и λ_2=400 нм $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$, откуда $I = r_1^2 + r_2^2 = 2\left(\frac{\sqrt{n_{ст}} - 1}{\sqrt{n_{ст}} + 1}\right)^2 \approx 0,034$.

4A (*А.Морозов,С.Гуденко*). Уровни энергии с нулевым орбитальным моментом в такой яме находятся из условий

$$|\sin kR| = \gamma kR, \ \mathrm{ctg} kR \le 0,$$

где $\gamma = \frac{\hbar}{R\sqrt{2mU}}$.

Условие появления уровня с номером $n \ge 1$ в указанной яме: $\sin k_n R = 1$, откуда $k_n R = \pi(n - 0,5)$ и $\gamma k_n R = 1 = \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2mU}}$. Следовательно, глубина ямы $U = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n-0,5)^2}{2mR^2}$. Для $n = 5$, получаем $U = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n-0.5)^2}{2mR^2} = 3.196 \cdot 10^6 \cdot 4.5^2 = 64.7 \ МэВ$.

Для первого уровня $\frac{\pi}{2} < k_1 R < \pi$, $\sin k_1 R = \sin(\pi - k_1 R) = \gamma k_1 R << 1$, поскольку для $n = 5$ $\gamma = \frac{2}{\pi(2n-1)} = 0.0707 << 1$ и $\gamma k_1 R = 1/4.5 = 0,22 << 1$. В первом приближении $\pi - k_1 R = \gamma k_1 R$ и $k_1 = \frac{\pi}{R(1+\gamma)}$, откуда $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mR^2 (1+\gamma)^2} = \frac{3.196 \cdot 10^6}{(1+\gamma)^2} = 2.788 \ МэВ$.

5А (*Свинцов, А.Гуденко*) Касательная по отношению к пленке компонента электрического поля волны «проникает» в пленку и создает в ней поверхностный ток, который приводит к скачку касательных к пленке компонент магнитного пол волны. Обозначим амплитуды электромагнитного поля в падающей волне как E, H; в отраженной волне – как E_r, H_r; в прошедшей волне – как E_t, H_t. Из условия непрерывности тангенциальных компонент полей на поверхности пленки имеем:

$$E - E_r = E_t, \tag{1}$$

$$H + H_r - H_t = \frac{4\pi}{c} j_S. \tag{2}$$

Поверхностная плотность тока j_S выражается через проводимость σ и тангенциальную компоненту электрического поля в пленке $E_\tau = E_t$:

$$j_S = \sigma E_t. \tag{3}$$

Поскольку в плоской электромагнитной волне $E = H$, то, вводя амплитудные коэффициенты отражения и прохождения $r = E_r / E$ и $t = E_t / E$, из (1) и (2) получим

$$r + t = 1$$

$$1 + r - t = \frac{4\pi\sigma}{c} t.$$

Из этой системы находим

$$r = \frac{2\pi\sigma / c}{1 + 2\pi\sigma / c},$$

$$t = \frac{1}{1 + 2\pi\sigma / c}.$$

Коэффициенты прохождения и отражения по мощности равны $R = \left\langle \vec{E}_r^2 \right\rangle / \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = r^2$ и $T = \left\langle \vec{E}_t^2 \right\rangle / \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = t^2$. Здесь угловые скобки обозначают усреднение по периоду колебаний электромагнитного поля.

Коэффициент поглощения равен отношению средней поглощенной мощности в пленке к средней падающей. По закону Джоуля-Ленца средняя поглощаемая в единице площади пленки мощность

$$\langle q \rangle = \left\langle \vec{j}_S \vec{E}_t \right\rangle = \sigma \left\langle \vec{E}_t^2 \right\rangle = \sigma t^2 \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle.$$

Средняя падающая мощность на единицу площади определяется усреднённым значением вектора Пойнтинга падающей волны

$$\left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle \left| \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \right| \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle.$$

Таким образом, коэффициент поглощения

$$\kappa = \frac{\langle q \rangle}{\langle |\vec{S}| \rangle} = \frac{4\pi\sigma}{c} t^2.$$

Коэффициент поглощения можно найти и по-другому. По закону сохранения энергии $R + T + \kappa = 1$, откуда

$$\kappa = 1 - r^2 - t^2 = 1 - \frac{1 + \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2} = \frac{2\frac{2\pi\sigma}{c}}{\left(1 + \frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2} = \frac{4\pi\sigma}{c} t^2.$$

Для графена:

$$T = \left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-2} = 0{,}9775\,,\ R = \left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2 T = 0{,}0001\,,\ \kappa = \pi\alpha T = 0{,}0224\,,$$

($e^2 / \hbar c \equiv \alpha \cong 1/137$ - постоянная тонкой структуры).

Вариант Б

1Б (*Аникин*). Используя формулу (4) из решения задачи 1А, запишем для ускорения станции:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{GM_C}{c}\frac{2V}{R^2} = -\frac{2GM_C}{cR^2}\frac{dR}{dt} = \frac{2GM_C}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (1)$$

Решением (1) является

$$V - V_0 = \frac{2GM_C}{c}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right). \qquad (2)$$

Минимальная скорость, при которой станция уйдет на бесконечность, находится из условий $R \to \infty$, $V = 0$. Отсюда

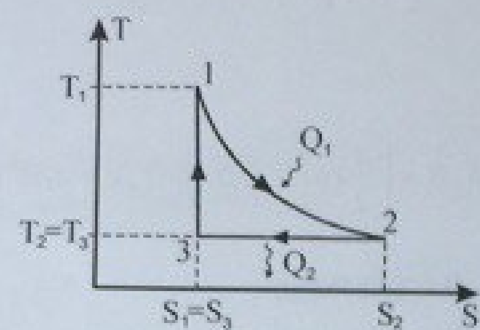
$$(V_0)_{\text{мин}} = \frac{2GM_C}{cR_0} = 17{,}8 \text{ м/с}.$$

P.S. Из точного решения получаем уравнение для скорости $cV_0 + V_0^2/2 = 2GM_C/R_0$, откуда в приближении малости скорости получаем тот же ответ.

2Б (*Лукьянов*). Поскольку теплоемкость $C = T\dfrac{\partial S}{\partial T}$, то на политропе 12 изменение энтропии связано с изменением температуры выражением $S_2 - S_1 = \displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\frac{CdT}{T} = C\ln\frac{T_2}{T_1} = -|C|\ln\frac{T_2}{T_1} > 0.$

По определению КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, где A --совершенная телом работа, Q_1 и Q_2 – подведенное и отданное количества теплоты. Как видно из рисунка, $Q_2 = T_2(S_1 - S_2) < 0$. $\qquad Q_1 = C\int\limits_{T_1}^{T_2} dT = C(T_2 - T_1) = -|C|(T_2 - T_1) > 0$. Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{T_2(S_2 - S_1)}{-|C|(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{-|C|T_2 \ln(T_2/T_1)}{-|C|(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_2 \ln(T_1/T_2)}{(T_1 - T_2)} = 1 - \frac{\ln(T_1/T_2)}{(T_1/T_2) - 1} = 1 - \frac{\ln 4}{3} = 0{,}54.$$



3Б. (*Крымский*). Согласно решению задачи 1А, здесь $\Delta\varphi = \pi\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2\pi$, откуда $I = (r_1 + r_2)^2 = 4\left(\frac{\sqrt{n_{ст}} - 1}{\sqrt{n_{ст}} + 1}\right)^2 \approx 0{,}07$.

4Б (*А.Морозов, С.Гуденко*). В симметричной потенциальной яме всем уровням с нечетными номерами ($n = 1,3,5,...$) соответствуют четные волновые функции, а всем уровням с четными номерами ($n = 2,4,6,...$) – нечетные волновые функции. Энергии уровней с четными номерами находятся из условий

$$|\sin ka| = \gamma ka\,,\ \mathrm{ctg}ka \le 0\,,$$

где $\gamma = \frac{\hbar}{a\sqrt{2mU}}$.

Условие появления уровня с номером $n = 12$ в указанной яме: $|\sin k_{12}a| = 1$, откуда $k_{12}a = \pi(6 - 0{,}5)$ и $\gamma k_{12}a = 1 = \frac{\hbar k_{12}}{\sqrt{2mU}}$. Следовательно, глубина ямы

$$U = \frac{\hbar^2 k_{12}^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2(5{,}5)^2}{2ma^2} = 5.06 \text{ эВ}.$$

Энергии уровней с нечетными номерами находятся из условий $|\cos ka| = \gamma ka$, $\mathrm{tg}ka \ge 0$. Для первого уровня $0 < k_1 a < \frac{\pi}{2}$, $\cos k_1 a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - k_1 a\right) = \gamma k_1 a << 1$, поскольку

$\gamma = 1/k_{12}a = 1/\pi(6-0{,}5) \cong 0{,}058 << 1$ и $\gamma k_1 a = 1/11 << 1$. В первом приближении $\frac{\pi}{2} - k_1 a = \gamma k_1 a$ или $k_1 = \frac{\pi}{2a(1+\gamma)}$, откуда $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2(1+\gamma)^2} \cong 0{,}037$ эВ.

5Б (*Раевский, Савров*). Атом находится в поле теплового излучения шара, т.е. в электромагнитном поле, плотность энергии которого зависит от координаты. Электрическая компонента электромагнитного поля поляризует атом, и он приобретает наведенный дипольный момент. Энергию взаимодействия этого дипольного момента с электрической компонентой поля можно записать в виде

$$U(r) = -\frac{\alpha}{2} < E^2(r,t) >,$$

где $E(r,t)$ - мгновенное значение напряженности электрического поля в месте нахождения атома, а скобки обозначают усреднение по времени.

Полученное выражение можно переписать через плотность теплового излучения в месте нахождения атома

$$\rho(r) = \frac{< E^2(r,t) >}{8\pi} + \frac{< B^2(r,t) >}{8\pi} = 2\frac{< E^2(r,t) >}{8\pi} = \frac{< E^2(r,t) >}{4\pi}.$$

Таким образом $U(r) = -2\pi\alpha\rho(r)$, а $F(r) = -|\nabla U(r)| = 2\pi\alpha\nabla\rho(r)$.

Для нахождения координатной зависимости плотности энергии воспользуемся законом сохранения энергии и стационарностью картины. Излученная за время dt с поверхности шара энергия $d\varepsilon = ISdt = \sigma T^4 4\pi R^2 dt$ должна быть равна $\rho(r)dV = \rho(r)4\pi r^2 dr$. Поскольку излучение распространяется со скоростью света, то $dr = cdt$ и $\rho(r) = \frac{\sigma T^4 R^2}{c}\frac{1}{r^2}$.

Окончательно $F(r) = -\frac{4\pi\alpha\sigma T^4 R^2}{c}\frac{1}{r^3}$.

Подставляя числа, получаем

$$F(r) = -\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 7{,}5\cdot 10^{-22}\cdot 5{,}67\cdot 10^{-5}\cdot (450)^4\cdot 4}{3\cdot 10^{10}\cdot 64} = -\ 4{,}55\cdot 10^{-26} \text{ дин}.$$

Знак «минус» перед силой означает, что атом притягивается к шару. Действительно, атом втягивается в область более сильного электрического поля.

Вариант В

1В (*Аникин*). В отличие от задачи 1А, здесь эффект Доплера приводит к росту частоты отраженных от паруса фотонов и увеличению числа ударов в единицу времени. В результате сила давления становится больше гравитационной силы, и станция замедляется. Поскольку со временем расстояние станции от Солнца уменьшается, то $dR(t) = -V(t)dt$ и уравнение (5) примет вид

$$dV = \frac{2GM_C}{c}\frac{dR}{R^2}.$$

Интегрируя его с граничными условиями $V(R_0) = V_0$ и $V(R) = 0$, получим

$$-V_0 = -\frac{2GM_C}{c}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right),$$

откуда

$$R = \frac{R_0}{1 + \dfrac{cV_0R_0}{2GM_C}} \approx 49{,}44\ \text{млн.км.}$$

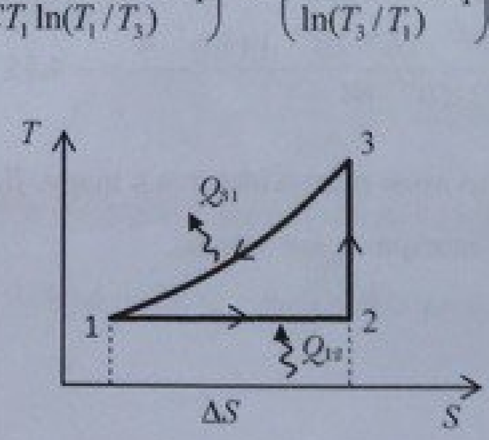
P.S.Заменив в точном решении V_0 на $-V_0$, получим, что зеркало остановится на расстоянии: $R = R_0/[1 + R_0(cV_0 - ½V_0^2)/2GM_C]$. При малых скоростях получим приведенный выше ответ.

2В (*Холин*). Эффективность холодильной машины определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_{12}}{A} = \frac{Q_{12}}{|Q_{31}| - Q_{12}} = \frac{1}{|Q_{31}|/Q_{12} - 1},$$

где (см. рисунок) подведенное тепло $Q_{12} = T_1(S_2 - S_1)$, отданное тепло $Q_{31} = C(T_1 - T_3)$, C – теплоемкость на политропе. Изменение энтропии между точками 1 и 3 политропы: $S_1 - S_3 = \int_{T_3}^{T_1} C\frac{dT}{T} = C\ln\frac{T_1}{T_3}$. Поскольку $S_3 = S_2$, то подставляя изменение энтропии в формулу для эффективности, получаем:

$$\eta = \left(\frac{C(T_1 - T_3)}{CT_1\ln(T_1/T_3)} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{T_3/T_1 - 1}{\ln(T_3/T_1)} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{2}{\ln 3} - 1\right)^{-1} = 1.22\,.$$



3B (*Раевский*). Интенсивность отраженного света (см. решение задачи 3А) $I = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\Delta\varphi = 2r_1^2(1+\cos\Delta\varphi) = 2\left(\frac{\sqrt{n_{ст}}-1}{\sqrt{n_{ст}}+1}\right)^2(1+\cos\Delta\varphi) = 0,017$. Из этого соотношения, находим $\cos\Delta\varphi = \frac{0,017}{2}\left(\frac{\sqrt{n_{ст}}+1}{\sqrt{n_{ст}}-1}\right)^2 - 1 \cong -0,5$. Т.о. $\Delta\varphi = \pi\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$.

Максимальная длина волны, удовлетворяющая этому условию, $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 750$ нм.

4B (*А.Морозов, С.Гуденко*). В симметричной потенциальной яме всем уровням с нечетными номерами ($n = 1,3,5,...$) соответствуют четные волновые функции, а всем уровням с четными номерами ($n = 2,4,6,...$) – нечетные волновые функции. Энергии уровнейс нечетными номерами находятся из условий

$|\cos ka| = \gamma ka$, $\mathrm{tg} ka \geq 0$,

где $\gamma = \frac{\hbar}{a\sqrt{2mU}}$.

Условие появления уровня с номером $n = 11$ в указанной яме: $|\cos k_{11}a| = 1$, откуда $k_{11}a = 5\pi$ и $\gamma k_{11}a = 1 = \frac{\hbar k_{11}}{\sqrt{2mU}}$. Следовательно, глубина ямы

$$U = \frac{\hbar^2 k_{11}^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2(5)^2}{2ma^2} \approx 4.2 \text{ эВ}.$$

Энергии уровней с четными номерами находится из условий $|\sin ka| = \gamma ka$, $\mathrm{ctg} ka \leq 0$. Для второго уровня $\frac{\pi}{2} < k_2 a < \pi$, $\sin k_2 a = \sin(\pi - k_2 a) = \gamma k_2 a << 1$, поскольку $\gamma = 1/k_{11}a = 1/5\pi \cong 0,064 << 1$ и $\gamma k_2 a = 1/5 << 1$. В первом приближении $\pi - k_2 a = \gamma k_2 a$ или $k_2 = \frac{\pi}{a(1+\gamma)}$, откуда

$$E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2(1+\gamma)^2} \cong 0,15 \text{ эВ}.$$

P.S. Как видно из решения, положение нижних уровней относительно дна в данной яме отличается от ямы с бесконечно высокими стенками всего на 13% (~2γ). Для оценки точности полученного в задаче приближения необходимо учесть следующий член в разложения синуса. Тогда, используя результат первого приближения, можно записать $\pi - k_2 a = \gamma k_2 a \pm \delta$, где

$\delta \cong \frac{(\gamma k_2 a)^3}{3!} \cong \frac{1}{5^3 3!} = 1.33 \cdot 10^{-3}$. Тогда $k_2 = \frac{\pi \pm \delta}{a(1+\gamma)}$, откуда видно, что относительная точность первого приближения составляет $\delta k_2 / k_2 = \frac{2\delta}{\pi} \cong 0.85 \cdot 10^{-3}$.

5В (*Кубышкин, Раевский*). В области перетяжки возникает стоячая электромагнитная волна, которая играет роль дифракционной решетки для электронных дебройлевских волн. Согласно условию, период решетки в два раза меньше длины волны лазера λ: $D = \lambda / 2$. Направление на первый максимум $\varphi \cong \lambda_{дБ} / D = 2\lambda_{дБ} / \lambda$, где $\lambda_{дБ} = h / p = h / \sqrt{2meV}$.

Вся излучаемая лазером в импульсе мощность E/τ поступает равными долями слева и справа и концентрируется в области перетяжки площадью $\pi d^2/4$. Поэтому плотность потока энергии через нее равна $I = \frac{4E}{\pi d^2 \tau}$. С другой стороны это выражение можно записать, как $I = cn\hbar\omega = nhc^2 / \lambda = nhc^2 \varphi / (2\lambda_{дБ})$. Отсюда

$$n = \frac{I\lambda}{hc^2} = \frac{4E2\lambda_{дБ}}{\pi d^2 hc^2 \tau\varphi} = \frac{8E}{\pi d^2 c^2 \tau\varphi\sqrt{2meV}}.$$

Подставляя числа, получим

$$n = \frac{8 \cdot 2 \cdot 10^6}{3{,}14 \cdot (1{,}25)^2 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{20} \cdot 10^{-8} \cdot 236 \cdot 10^{-6} \cdot (2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 380 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12})^{1/2}} = 1{,}45 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

P.S. Эффект рассеяния электронов на стоячей электромагнитной волне был теоретически предсказан в 1933 г. П.Л. Капицей и П.А.М. Дираком. В описанном эксперименте по обнаружению этого эффекта, выполненном в 2001 г. в Университете Небраска-Линкольн, при перемещении детектора параллельно перетяжке была получена дифракционная картина с двумя боковыми максимами, отстоящими от основного на 57 и 114 мкм. Поскольку детектор находился на расстоянии L=24 см от перетяжки, а длина волны лазера составляла $\lambda = 5320$ Å, то полученные значения согласуются с формулой $x_i = i\varphi L = i(2\lambda_{дБ} / \lambda)L$, $i = 1, 2, \ldots$.

Максимум за каждую задачу – 2 балла. Итоговая оценка по 10-балльной шкале – сумма всех баллов, округленная в большую сторону

Сбор преподавателей для обсуждения задач, результатов письменного экзамена и для организационных объявлений 23 января 2018 года в 8-45 в Главной Физической аудитории