

1	2	3	4	5	$\Sigma$	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 19 января 2019 года

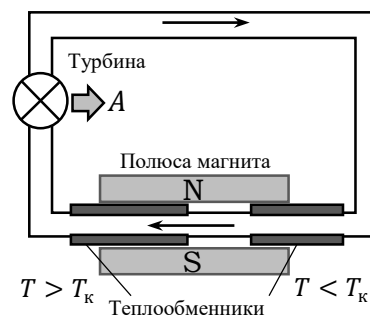
### Вариант А

**1А.** Современные железнодорожные пути укладывают без стыков, соединяя концы рельсов сварными швами. Рельсы прочно закреплены на шпалах, вкопанных в гравий. При  $t_1 = +30^\circ\text{C}$  натяжение в рельсах равно нулю. Найти силу, необходимую для удерживания шпалы неподвижно в грунте на криволинейном участке пути с радиусом поворота  $R = 350$  м при понижении температуры до  $t_2 = -30^\circ\text{C}$ . Расстояние между шпалами  $d = 50$  см. Характеристики рельсов: плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>, погонная масса рельса  $m = 65$  кг/м.

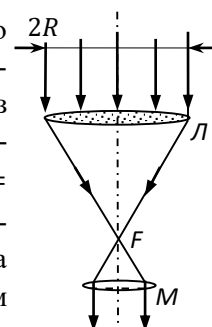
**2А.** В опыте по демонстрации окологривических состояний нагревается запаянная ампула, заполненная жидким эфиром и его парами. В начальном состоянии при температуре  $T_0$  жидкость занимает 60 % объёма ампулы, а её плотность  $\rho_{\text{ж}}(T_0) = 0,42$  г/см<sup>3</sup>. При нагревании жидкость заполняет всю ампулу, а её плотность при этом уменьшается до  $\rho_{\text{ж}}(T') = 0,28$  г/см<sup>3</sup>. Найти величину  $T_0$ , если критическая температура эфира  $T_{\text{кр}} = 467$  К, критическая плотность  $\rho_{\text{кр}} = 0,265$  г/см<sup>3</sup>. Считать, что и в жидком и в газообразном состояниях эфир описывается моделью Ван-дер-Ваальса.

*Указание:* использовать приведённое уравнение Ван-дер-Ваальса.

**3А.** На замкнутый контур, в котором может циркулировать ферромагнитная жидкость (ФМЖ), надет постоянный магнит (см. рис.). Вблизи магнита создан перепад температур, так что с одной его стороны температура ниже точки Кюри (температуры фазового перехода между ферромагнитным и парамагнитным состояниями), а с другой – выше. Область перехода соответствует центру магнита, где напряжённость поля  $H = 100$  Э. Пренебрегая потерями на вязкость, оценить установившуюся скорость течения  $v$ , если работа турбины в расчёте на единицу объёма жидкости равна  $A = \beta v$ , где  $\beta = 10^6$  г/(см<sup>2</sup> · с). Восприимчивость ФМЖ в ферромагнитном состоянии считать постоянной:  $\chi = 200$  (ед. СГС).



**4А.** Нобелевская премия по физике 2018 г. присуждена А. Эшкину за создание «лазерного пинцета» – устройства, позволяющего удерживать и перемещать прозрачные микроскопические объекты с помощью света. Параллельный пучок света от лазера проходит через собирающую линзу  $L$  и падает на микрочастицу  $M$ , которую можно также считать собирающей линзой. Точка  $F$  – из общих фокус (см. рис.). Интенсивность света в пучке  $I = 1$  мВт/см<sup>2</sup>, радиус пучка  $R = 1$  см, фокусное расстояние линзы  $L$  равно  $F = 10$  см. Пренебрегая дифракционными эффектами, найти величину и направление действующей на микрочастицу силы  $f$ , обусловленной преломлением света. За какое время под действием только этой силы частица сместится на расстояние порядка своего размера  $\ell \sim 10$  мкм, если её масса  $m \sim 1$  нг? Поглощением и отражением света на поверхностях линз пренебречь.



**5А.** Для  $\alpha$ -распада чётно-чётных ядер период полураспада  $T_{1/2}$  (в секундах) зависит от энергии  $\alpha$ -частицы  $E_\alpha$  (в МэВ) и заряда дочернего ядра  $Z$  по закону Гейгера–Нэттола:  $\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{E_\alpha}} - 51,37$ . Рассматривая модель, в которой  $\alpha$ -частица находится в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями, найти отношение периодов полураспада ядер  $^{238}_{92}\text{U}$  и  $^{238}_{94}\text{Pu}$ , если при распаде ядра плутония  $E_\alpha^{\text{Pu}} = 5,50$  МэВ. Ядро считать однородно заряженным шаром радиуса  $R = 0,855A^{1/3}$  фм, где  $A$  – массовое число ядра;  $\alpha$ -частицу – точечным зарядом; плотность вероятности нахождения  $\alpha$ -частицы в ядре – постоянной.

1	2	3	4	5	$\Sigma$	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

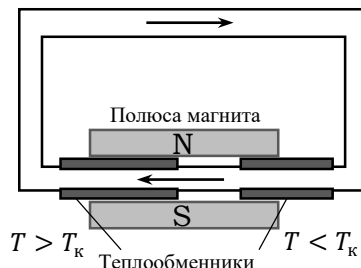
письменная часть 19 января 2019 года

### Вариант Б

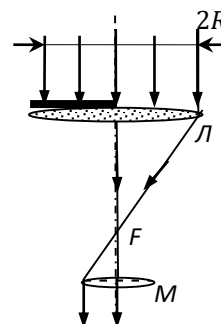
**1Б.** Современные железнодорожные пути укладывают без стыков, соединяя концы рельсов сварными швами. Рельсы прочно прикреплены к шпалам, вкопанным в гравий. При температуре  $t_1 = +30^\circ\text{C}$  напряжение в рельсах отсутствует, а при понижении температуры рельсы оказываются в натянутом состоянии. Каждая шпала способна выдержать без смещения горизонтальное усилие до  $F_{\max} = 5\text{ кН}$ , а при большем усилии «ползёт», так что сопротивление грунта остаётся равным  $F_{\max}$ . Найти смещение  $\Delta l$  конца длинного прямолинейного участка пути при  $t_2 = -30^\circ\text{C}$ . Характеристики материала рельсов: плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ К}^{-1}$ . Погонная масса рельса  $m = 65\text{ кг/м}$ , расстояние между шпалами  $d = 50\text{ см}$ .

**2Б.** В опыте по демонстрации околоскритических состояний нагревается запаянная ампула, заполненная жидким эфиром и его парами. В начальном состоянии жидкость занимает 30 % объёма ампулы, а её плотность  $\rho_{\text{ж}}(T_0) = 0,4\text{ г/см}^3$ . При нагревании граница раздела «жидкость–пар» опустилась и исчезла, так что в пробирке остался только пар. При этом плотность жидкости приблизилась к  $\rho_{\text{ж}}(T) = 0,285\text{ г/см}^3$ , а плотность пара возросла втрое:  $\rho_{\text{п}}(T) = 3\rho_{\text{п}}(T_0)$ . Найти температуру  $T$  системы в этот момент. Критическая температура эфира  $T_{\text{кр}} = 467\text{ К}$ , критическая плотность  $\rho_{\text{кр}} = 0,265\text{ г/см}^3$ . Считать, что и в жидком и в газообразном состояниях эфир описывается моделью Ван-дер-Ваальса.  
*Указание:* использовать приведённое уравнение Ван-дер-Ваальса.

**3Б.** На замкнутый контур из цилиндрических трубок, в котором может циркулировать ферромагнитная жидкость (ФМЖ), надет постоянный магнит (см. рис.). Вблизи магнита создан перепад температур, так что с одной его стороны температура ниже точки Кюри (температуры фазового перехода между ферромагнитным и парамагнитным состояниями), а с другой – выше. Область перехода соответствует центру магнита, где напряжённость поля  $H = 100\text{ Э}$ . Считая течение ламинарным, оценить установившуюся скорость ФМЖ, имеющей вязкость  $\eta = 10\text{ г/(см} \cdot \text{с)}$ . Длина контура  $L = 1\text{ м}$ , сечение трубки  $S = 1\text{ см}^2$ . Восприимчивость ФМЖ в ферромагнитном состоянии считать постоянной:  $\chi = 200$  (ед. СГС).



**4Б.** Нобелевская премия по физике 2018 г. присуждена А. Эшкину за создание «лазерного пинцета» – устройства, позволяющего удерживать и перемещать прозрачные микроскопические объекты с помощью света. Параллельный пучок света от лазера проходит через собирающую линзу  $L$  и затем падает на микрочастицу  $M$ , которую можно также читать собирающей линзой. Точка  $F$  – их общий фокус (см. рис.). Интенсивность света в пучке  $I = 1\text{ мВт/см}^2$ , радиус пучка  $R = 1\text{ см}$ , фокусное расстояние линзы  $L$  равно  $F = 10\text{ см}$ . Для создания поперечной к направлению пучка силы  $f_{\perp}$ , действующей на частицу, левая половина линзы  $L$  перекрывается диафрагмой. Пренебрегая дифракционными эффектами, найти величину и направление  $f_{\perp}$ , обусловленной преломлением света. За какое время под действием только этой силы частица сместится на расстояние порядка своего размера  $\ell \sim 30\text{ мкм}$ , если её масса  $m \sim 10\text{ нг}$ ? Поглощением и отражением света на поверхностях линз пренебречь.



**5Б.** Для  $\alpha$ -распада чётно-чётных ядер период полураспада  $T_{1/2}$  (в секундах) зависит от энергии  $\alpha$ -частицы  $E_{\alpha}$  (в МэВ) и заряда дочернего ядра  $Z$  по закону Гейгера–Нэттола:  $\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{E_{\alpha}}} - 51,37$ . Используя капельную модель ядра, найти период полураспада ядра тория  ${}^{226}_{90}\text{Th}$ , если для ядра радия  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$   $T_{1/2} = 1600\text{ лет}$ . Для кулоновского и симметричного коэффициентов в формуле Вайцеккера принять значения  $C_{\text{кул}} = 0,71\text{ МэВ}$  и  $C_{\text{сим}} = 23,7\text{ МэВ}$ .

1	2	3	4	5	$\Sigma$	Оценка

Фамилия И.О.	№ группы

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

письменная часть 19 января 2019 года

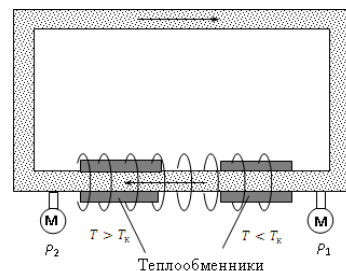
### Вариант В

**1В.** Современные железнодорожные пути укладывают без стыков, соединяя концы рельсов сварными швами. Рельсы прочно прикреплены к шпалам, вкопанным в гравий. При температуре  $t_1 = +30^\circ\text{C}$  напряжение в рельсах отсутствует, а при понижении температуры рельсы оказываются в натянутом состоянии. Каждая шпала способна выдержать без смещения горизонтальное усилие до  $F_{\max} = 5 \text{ кН}$ , а при большем усилии «ползёт», так что сопротивление грунта остаётся равным  $F_{\max}$ . При понижении температуры до  $t_2 = -30^\circ\text{C}$  в одном месте прямолинейного пути сварные швы лопнули. Найти величину  $\Delta l$  образовавшегося зазора. Расстояние между шпалами  $d = 50 \text{ см}$ . Характеристики рельсов: плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ , погонная масса рельса  $m = 65 \text{ кг/м}$ .

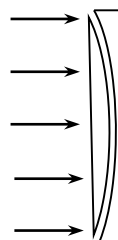
**2В.** Эфир в запаянной ампуле охлаждается из критического состояния. При некоторой температуре 50 % объёма ампулы заполняет жидкий эфир, а 50% – его пары. Плотность жидкости в этом состоянии  $\rho_{\text{ж}}(T) = 1,9\rho_{\text{кр}}$ , где  $\rho_{\text{кр}}$  – критическая плотность эфира. Определить температуру  $T$ , если критическая температура  $T_{\text{кр}} = 467 \text{ К}$ . Считать, что и в жидком и в газообразном состояниях эфир описывается моделью Ван-дер-Ваальса.

Указание: использовать приведённое уравнение Ван-дер-Ваальса.

**3В.** На замкнутый контур из немагнитной трубки постоянного сечения, в котором может циркулировать ферромагнитная жидкость (ФМЖ), надет соленоид (см. рис.). Вблизи соленоида создан перепад температур, так что с одной его стороны температура ниже точки Кюри (температуры фазового перехода между ферромагнитным и парамагнитным состояниями), а с другой – выше. Область перехода соответствует центру соленоида, где напряжённость поля  $H_0$ . Для измерения давления в циркулирующей жидкости по разные стороны от соленоида установлены манометры М. Разность показаний манометров оказалась равной  $\Delta P = 1,8 \text{ атм}$ . Оцените  $H_0$ , если расстояние между манометрами  $l = 20 \text{ см}$ , а длина всего контура  $L = 1 \text{ м}$ . Восприимчивость ФМЖ в ферромагнитном состоянии считать постоянной:  $\chi = 200$  (ед. СГС). Считать, что магнитное поле в местах установки манометров отсутствует.



**4В.** Тонкая стеклянная плоскопараллельная пластинка в форме диска диаметром  $d = 4 \text{ см}$  разрезана на собирающую и рассеивающую линзы (см. рис.) с фокусными расстояниями  $F = \pm 10 \text{ см}$  и одинаковыми массами  $m = 10 \text{ г}$ . Линзы раздвинули так, что между ними образовался зазор постоянной толщины  $\delta = 1 \text{ мм}$ . Система облучается параллельным пучком лазерного излучения интенсивностью  $I = 10 \text{ Вт/см}^2$ . Найти величину и знак эффективной силы  $f$  взаимодействия между линзами, возникающей из-за преломления света. За какое время под действием этой силы линзы сместятся друг относительно друга на расстояние  $\delta$ ? На поверхности линз нанесено просветляющее покрытие, потерями в стекле пренебречь.



**5В.** Для  $\alpha$ -распада чётно-чётных ядер период полураспада  $T_{1/2}$  (в секундах) зависит от энергии  $\alpha$ -частицы  $E_\alpha$  (в МэВ) и заряда дочернего ядра  $Z$  по закону Гейгера–Нэттола:  $\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{E_\alpha}} - 51,37$ . Для  $\alpha$ -распадов ядер тория  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  и урана  ${}^{232}_{92}\text{U}$  периоды полураспада составляют  $T_{1/2}^{\text{Th}} = 14,05 \cdot 10^9 \text{ лет}$  и  $T_{1/2}^{\text{U}} = 68,9 \text{ лет}$ . Рассматривая модель, в которой  $\alpha$ -частица находится в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями, найти радиус  $R$  этих ядер, считая его одинаковым для обоих ядер. Плотность вероятности нахождения  $\alpha$ -частицы в ядре считать постоянной,  $\alpha$ -частицу -- точечным зарядом.

# Решения письменной части ГКЭ по физике 2019

## Вариант А

**1А.** (Холин Д.И.) Относительное сокращение ненапряженного вначале рельса при изменении температуры составит

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha(t_1 - t_2) = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 7,2 \cdot 10^{-4}.$$

Поскольку рельс прочно прикреплен к шпалам, то в результате сила растяжения рельса составит

$$T = ES\varepsilon = E\varepsilon \frac{Sl\rho}{l\rho} = E\varepsilon \frac{m}{l\rho} = E \frac{m_l}{\rho} \alpha(t_1 - t_2) = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

При радиусе закругления пути  $R$  на отрезок рельса между двумя шпалами, должна действовать поперечная сила, направленная к центру поворота

$$F_{\perp} = T \frac{d}{R} = 1,2 \cdot 10^6 \frac{0,5}{350} \cong 1,7 \cdot 10^3 \text{ Н или } 170 \text{ кгс}.$$

Поскольку рельсов два, то окончательно  $F = 2F_{\perp} = 340 \text{ кгс}$ . Следовательно, крепление рельсов к шпалам должно с запасом выдерживать такую нагрузку.

**2А.** (Овчинкин В.А.) Запишем закон сохранения массы для вещества в пробирке

$$0,6\rho_{\text{ж}}(T) + 0,4\rho_{\text{п}}(T) = \rho_{\text{ж}}(T').$$

Отсюда получаем

$$0,6 + 0,4 \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{\rho_{\text{ж}}(T')}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{0,28}{0,42} = \frac{2}{3} \text{ или } \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) / \frac{2}{5} = \frac{1}{6}.$$

Приведенные объемы жидкости и пара будут равны

$$\varphi_{\text{ж}}(T) = \frac{V_{\text{ж}}}{V_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{0,265}{0,42} = 0,63, \quad \varphi_{\text{п}}(T) = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{п}}(T)} \frac{\rho_{\text{ж}}(T)}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{\rho_{\text{ж}}(T)}{\rho_{\text{п}}(T)} \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{ж}}(T)} = 6 \cdot 0,63 = 3,78.$$

Уравнение соответственных состояний для газа Ван дер Ваальса имеет вид

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi_{\text{п,ж}}^2} \right) \left( \varphi_{\text{п,ж}} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau, \text{ где } \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}; \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}.$$

Записывая его для жидкости и пара, получим систему уравнений

$$\left( \pi + \frac{3}{0,63^2} \right) \left( 0,63 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau = \left( \pi + \frac{3}{3,78^2} \right) \left( 3,78 - \frac{1}{3} \right)$$

Из этой системы находим:  $\pi = 0,482$ ,  $\tau = \frac{3}{8}(0,482 + 7,56) \cdot 0,297 = 0,894$ ,  $T = \tau T_{\text{кр}} = 418 \text{ К}$ .

**3А.** (Кубышкин А.В.) Магнитное поле постоянного магнита максимально в центре и спадает по краям.

Градиент поля направлен от теплообменников к центру магнита. Пусть справа на расстоянии  $x$  от центра поле равно  $h(x)$ . Тогда элемент объема  $\delta V$  холодной ФМЖ приобретет магнитный момент  $\mu(x) = \delta V \chi h(x)$ .

На такой квазиупругий диполь будет действовать втягивающая в магнит сила

$$F(x) = \mu(x) \frac{dh(x)}{dx} = \delta V \chi h(x) \frac{dh(x)}{dx} \quad (\text{силой, действующей на элемент горячей жидкости, мы}$$

пренебрегаем, т.к. восприимчивость парамагнетика мала  $\chi \ll 1$ ). Поэтому при втягивании ФМЖ в область высокого магнитного поля будет совершаться работа

$$A_m = \int_{-\infty}^0 F(x) dx = \delta V \chi \int_{-\infty}^0 h(x) \frac{dh(x)}{dx} dx = \delta V \chi \int_0^H h dh = \delta V \frac{\chi H^2}{2}.$$

Суммируя по всем элементам, получаем протекший объем жидкости  $V$ . Приравнявая  $A_m$  и  $A$ , получаем

$$v = \frac{\chi H^2}{2\beta} = 1 \text{ см/с}.$$

*Второе решение.* При перемещении объема жидкости  $\delta V$  разность давлений магнитного поля со стороны горячей и холодной областей совершит работу (магнитная проницаемость парамагнетика принята равной 1)

$$A_m = (P_x - P_r) \delta V = \left( \frac{\mu H^2}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta V = \frac{H^2}{8\pi} (\mu - 1) \delta V = \delta V \frac{\chi H^2}{2}.$$

P.S. Подобное устройство предназначено для арктических исследований, где необходимо иметь резервный источник энергии, не содержащий химических аккумуляторов либо углеводородного топлива. В условиях Арктики нагревателем может быть нагретый Солнцем лед или вода в полынье. Это означает, что точка Кюри ФМЖ должна быть  $< 273 \text{ К}$ , но выше температуры окружающей среды.

**4А.** (Гуденко А.В.) Рассчитаем вначале силу, действующую на фокусирующую линзу  $L$ . Сила, действующая на собирающую линзу  $L$ , равна полному изменению импульса фотонов, падающих на линзу в единицу времени. Импульс изменяется из-за преломления света в стекле. При этом происходит изменение только направления движения фотонов без изменения величины их импульсов. Уменьшение составляющей импульса вдоль оптической оси для фотонов, падающих за секунду на кольцо радиуса  $r$  толщиной  $dr$ , равна действующей на это кольцо силе:

$$df = (I/c) (1 - \cos\theta) 2\pi r dr \approx (I/c) \pi r \theta^2 dr \approx (I/c) (\pi r^3 / F^2) dr.$$

Полная сила, действующая на собирающую линзу:

$$f = \int (I/c) (\pi r^3 / c F^2) dr = \pi I R^4 / 4 c F^2.$$

Эта сила направлена вниз.

Так как фокусы линзы и частицы совпадают, то при выходе из системы «линза-частица», пучок вновь распространяется параллельно оптической оси, а значит в результате преломления на частице  $M$  импульс фотонов восстанавливается. Следовательно, сила, действующая на частицу  $M$ , по величине равна  $f$ , но направлена вверх, в сторону собирающей линзы. Таким образом, со стороны света на частицу  $M$  действует сила:

$$f = \pi I R^4 / (4 c F^2) = 3,14 \cdot 10 \cdot 1^4 / (4 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^2) = 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ дн}.$$

Эта сила втягивает частицу в поле лазерного излучения. В этом заключается принцип работы «лазерного пинцета». Ускорение частицы под действием этой силы:  $a = f/m = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2 = 26 \text{ мкм/с}^2$ . Это означает, что под действием этой силы на расстояния порядка своих собственных размеров частица переместится за время порядка одной секунды:  $t \sim (2\ell/a)^{1/2} \sim 1 \text{ с}$ .

**5А. (Морозов А.И.)** Т.к. туннелирование является изоэнергетическим процессом, энергия альфа-частицы на бесконечности равна энергии частицы в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями. Поскольку массовое число у обоих ядер одинаково, то вклад сильного взаимодействия в потенциальную энергию взаимодействия  $\alpha$ -частицы с ядром для двух ядер будет одинаковым. Одинаковым, вследствие равенства плотностей вероятности, будет и вклад кинетической энергии. Вся разница будет связана с различным вкладом отталкивательного кулоновского потенциала – потенциала однородно заряженного шара радиуса  $R$

$$\Delta E = \langle U_{\text{кул}}(Z) \rangle - \langle U_{\text{кул}}(Z-2) \rangle = \frac{\int w \left( \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) dV}{\int w dV} [2e^2(Z - (Z-2))].$$

Здесь  $w = \text{const}$  – плотность вероятности обнаружить альфа-частицу в произвольной точке ядра.

Вычисляя интегралы, получаем  $\Delta E = \frac{24e^2}{5R} = 1,30 \text{ МэВ}$ . Т.о.  $E_\alpha(Z=92) = E_\alpha(Z=94) - \Delta E = 5,50 - 1,30 = 4,20$

МэВ. Подставляя числа в формулу Гейгера-Нэттола, получаем

$$\lg \frac{T_{1/2}^{\text{U}}}{T_{1/2}^{\text{Pu}}} = 9,54 \left( \frac{90^{0,6}}{\sqrt{4,20}} - \frac{92^{0,6}}{\sqrt{5,50}} \right) = 7,93 \quad \text{или} \quad T_{1/2}^{\text{U}} / T_{1/2}^{\text{Pu}} = 8,4 \cdot 10^7.$$

Экспериментальное значение - в  $5,1 \cdot 10^8$  раз.

*Указание к 5-м задачам:* в силу необходимости вычисления степенных функций ставить полный балл за правильный порядок величины и близкую к правильной первую значащую цифру.

## Вариант Б

**1Б. (Холин Д.И.)** Вычисление относительной деформации и силы натяжения рельса приведено в решении 1А. Так как сила, действующая на шпалы возле свободного конца, превышает максимальную, то они будут смещаться вместе с укорачиванием рельса до тех пор, пока сила не станет вновь равна максимальной. Найдем количество шпал, достаточное, чтобы сдержать найденное усилие без смещения. С учетом двух рельсов, искомое количество шпал будет равно:  $N = 2T / F = 480$ . Поскольку механическая деформация будет линейно нарастать от свободного конца плети, то ее максимальная величина, равная  $\varepsilon_{\text{max}}$ , будет достигнута на расстоянии  $l = Nd = 240 \text{ м}$  (на т.н. «дышащем участке»). В

силу линейности закона изменения деформации  $\varepsilon(x) = \frac{x}{l} \varepsilon_{\text{max}}$  смещение свободного конца плети составит:

$$\Delta x = \int_0^l \frac{x}{l} \varepsilon_{\text{max}} dx = \varepsilon_{\text{max}} l / 2 = 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 240 / 2 = 8,6 \text{ см}.$$

**2Б. (Овчинкин В.А.)** Запишем закон сохранения массы для вещества в пробирке

$$0,3 \rho_{\text{ж}}(T_0) + 0,7 \rho_{\text{п}}(T_0) = \rho_{\text{п}}(T).$$

Отсюда получаем

$$0,3 \frac{\rho_{\text{ж}}(T_0)}{\rho_{\text{п}}(T)} + 0,7 \frac{\rho_{\text{п}}(T_0)}{\rho_{\text{п}}(T)} = 1 \quad \text{или} \quad 0,3 \cdot \frac{0,4}{\rho_{\text{п}}(T)} + 0,7 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad \text{откуда} \quad \rho_{\text{п}}(T) = 0,156 \text{ г/см}^3.$$

Приведенные объемы жидкости и пара

$$\varphi_{\text{ж}}(T) = \frac{V_{\text{ж}}}{V_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{0,265}{0,285} = 0,93, \quad \varphi_{\text{п}}(T) = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{п}}(T)} = \frac{0,265}{0,156} = 1,7.$$

Уравнение соответственных состояний для газа Ван дер Ваальса имеет вид

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi_{\text{п,ж}}^2} \right) \left( \varphi_{\text{п,ж}} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau, \quad \text{где } \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}; \quad \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}.$$

Записывая его для жидкости и пара, получим систему уравнений

$$\left( \pi + \frac{3}{0,93^2} \right) \left( 0,93 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau = \left( \pi + \frac{3}{1,7^2} \right) \left( 1,7 - \frac{1}{3} \right)$$

Решая эту систему, находим:  $\pi = 0,857$ ,  $\tau = \frac{3}{8} \cdot (0,857 + 3,47) \cdot 0,6 = 0,973$ ,  $T = \tau T_{\text{кр}} = 455 \text{ К}$ .

**3Б.** (Кубышкин А.В.) Согласно решению задачи 1А, разность давлений магнитного поля, заставляющая ФМЖ непрерывно циркулировать, есть  $\Delta P = A_{\text{м}} / \delta V = \chi H^2 / 2$ . Подставляя эту разность давлений в формулу Пуазейля, получим объемный расход ( $R$  – радиус трубки,  $S = \pi R^2$ )

$$Q = vS = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \frac{\chi H^2}{2},$$

откуда средняя скорость циркуляции равна

$$v = \frac{S}{8\pi\eta L} \frac{\chi H^2}{2}.$$

Подстановка чисел дает ответ:  $v = 40 \text{ см/с}$ .

P.S. Сравнение с ответом задачи 3А показывает, что вязкость коллоидной ФМЖ (в сотни раз больше вязкости воды!) не приводит к значительным энергетическим потерям, по крайней мере, на прямолинейных участках контура.

**4Б.** (Гуденко А.В.) Рассчитаем вначале поперечную силу, действующую на фокусирующую линзу  $L$ . По величине поперечная составляющая силы, действующая на собирающую линзу  $L$ , равна суммарному поперечному импульсу фотонов, выходящих из линзы в единицу времени. Импульс в поперечном к лучу направлении появляется из-за несимметричного преломления света в линзе. При этом происходит изменение только направления движения фотонов без изменения величины их импульсов. Поперечная к оси составляющая импульса для фотонов, падающих за секунду на элементарную площадку  $dS = r d\varphi dr$ , равна действующей на эту площадку силе:

$$df_{\perp} = (I/c) \cos\varphi \sin\theta dS \approx (I/c) \cos\varphi (r/F) r d\varphi dr = (I/c) \cos\varphi (r^2/F) d\varphi dr.$$

Полная поперечная сила, действующая на линзу ( $\varphi$  изменяется от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ ):

$$f_{\perp} = \int \int (I/c) \cos\varphi d\varphi (r^2/F) dr = 2IR^3/3cF.$$

Эта сила направлена вправо.

Так как фокусы линзы и частицы совпадают, то при выходе из системы «линза-частица», пучок вновь распространяется параллельно оптической оси, а, значит, в результате преломления на частице  $M$

импульс фотонов восстанавливается. Следовательно, сила, действующая на частицу  $M$ , по величине равна  $f$ , но направлена влево.

Таким образом, со стороны света на частицу  $M$  действует поперечная сила:

$$f_{\perp} = 2IR^3/3cF = 2 \cdot 10 \cdot 1^3 / (3 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10) \approx 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ дн.}$$

Эта сила позволяет перемещать частицу влево (или удерживать её при внешнем воздействии, например, в потоке жидкости). В этом заключается принцип работы «лазерного пинцета».

Ускорение частицы:  $a = f_{\perp}/m = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2 = 22 \text{ мкм/с}^2$ . Это означает, что под действием этой силы на расстояния порядка своих собственных размеров частица переместится за время порядка одной-двух секунд:  $t \sim (2\ell/a)^{1/2} \sim 1,6 \text{ с.}$

**5Б.** (Гуденко С.В., Раевский А.О.) По заданному период полураспада, находим энергию  $\alpha$ -частицы при распаде ядра радия

$$E_{\alpha}^{\text{Ra}} = [9,54 \cdot Z^{0,6} (\lg T_{1/2}^{\text{Ra}} + 51,37)]^2 = \{9,54 \cdot 86^{0,6} [\lg(1600 \cdot 3,156 \cdot 10^7) + 51,37]\}^2 = 4,95 \text{ МэВ.}$$

Поскольку дочернее ядро примерно в 60 раз тяжелее альфа-частицы то можно считать, что кинетическая энергия альфа-частицы равна дефекту масс реакции. Выражая дефект масс через энергии связи частиц, для кинетической энергии альфа-частицы получим:

$$E_{\alpha} = E_{\text{св}}(A-4, Z) + E_{\text{св}}(4, 2) - E_{\text{св}}(A-4, Z+2).$$

Так как у ядер радия и тория одинаковые массовые числа, то объемный, поверхностный и учитывающий четность числа нуклонов члены в формуле Вайцзеккера будут одинаковы для материнских и дочерних ядер этих элементов. Разница в величинах кинетической энергии альфа-частиц будет обусловлена отличием только кулоновских и симметричных членов для этих ядер ( $Z_{\text{Th}} = 90$  и  $Z_{\text{Ra}} = 88$  – заряды исходных (материнских) ядер

$$E_{\alpha}^{\text{Th}} - E_{\alpha}^{\text{Ra}} = C_{\text{кул}} [(Z_{\text{Th}}^2 - Z_{\text{Ra}}^2) A^{-1/3} - ((Z_{\text{Th}} - 2)^2 - (Z_{\text{Ra}} - 2)^2) (A-4)^{-1/3}] + \\ + C_{\text{сим}} [(A-2Z_{\text{Th}})^2 - (A-2Z_{\text{Ra}})^2] [A^{-1} - (A-4)^{-1}] = 1,42 \text{ МэВ}$$

Здесь  $Z_{\text{Th}} = 90$  и  $Z_{\text{Ra}} = 88$  – заряды исходных (материнских) ядер и мы учли, что разница числа нейтронов и протонов  $A-2Z$  одинакова для материнского и дочернего ядер.

Подставляя значения величин, получаем для энергии альфа-частицы тория  $E_{\alpha}^{\text{Th}} = 4,95 + 1,42 = 6,37$  МэВ, а затем из формулы Гейгера-Нэттола находим период полураспада ядра тория:

$$\lg T_{1/2}^{\text{Th}} = \frac{9,54 \cdot 88^{0,6}}{\sqrt{6,37}} - 51,37 \cong 4,11 \text{ или } T_{1/2}^{\text{Th}} \cong 13000 \text{ с или } 216,7 \text{ мин.}$$

Экспериментальное значение – 30, 9 мин.

## Вариант В

**1В.** (Холин Д.И.) Сила натяжения и деформация рельса вычисляется аналогично решению задачи 1А:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha(t_1 - t_2) = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 7,2 \cdot 10^{-4}, \quad T = E \frac{m_l}{\rho} \alpha(t_1 - t_2) = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Количество шпал на «дышащем участке» вычисляем аналогично решению задачи 1Б:

$$N = 2T / F = 480 \text{ шт.}$$



Ширину зазора вычисляем, как удвоенное смещение конца рельса в решении задачи 1Б:

$$\delta = 2\Delta x = \varepsilon Nd = 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 480 \cdot 50 \cong 17,3 \text{ см.}$$

**2В.** (Овчинкин В.А.) Запишем при данной температуре закон сохранения массы для вещества в пробирке

$$0,5\rho_{\text{ж}}(T) + 0,5\rho_{\text{п}}(T) = \rho_{\text{кр}}.$$

Отсюда получаем

$$0,5 \frac{\rho_{\text{ж}}(T)}{\rho_{\text{кр}}} + 0,5 \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{кр}}} = 1 \text{ или } 0,5 \cdot 1,9 + 0,5 \cdot \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{кр}}} = 1, \text{ откуда } \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{кр}}} = 0,1.$$

Приведенные объемы жидкости и пара

$$\varphi_{\text{ж}}(T) = \frac{V_{\text{ж}}}{V_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{1}{1,9} = 0,526, \quad \varphi_{\text{п}}(T) = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{п}}(T)} = 10.$$

Уравнение соответственных состояний для газа Ван дер Ваальса имеет вид

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi_{\text{п,ж}}^2} \right) \left( \varphi_{\text{п,ж}} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau, \text{ где } \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}; \quad \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}.$$

Записывая его для жидкости и пара, получим систему уравнений

$$\left( \pi + \frac{3}{0,526^2} \right) \left( 0,526 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau = \left( \pi + \frac{3}{10^2} \right) \left( 10 - \frac{1}{3} \right)$$

Решая эту систему, находим:  $\pi = 0,19$ ,  $\tau = \frac{3}{8} \cdot (0,19 + 0,03) \cdot 9,67 = 0,798$ ,  $T = \tau T_{\text{кр}} = 373 \text{ К.}$

**3В.** (Кубышкин А.В.) Разность давлений между холодным и горячим концами соленоида подсчитана в решении задачи 3А, (второе решение)  $P_{\text{х}} - P_{\text{г}} = \chi H_0^2 / 2$ . Эта разность давлений играет роль «насоса».

Поскольку давление спадает равномерно вдоль трубки, то разность показаний манометров есть

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \chi H_0^2 (1 - l/L) / 2 = 0,4 \chi H_0^2.$$

Скорость жидкости одинакова по всему контуру, поэтому в разность показаний манометров она вклад не дает. Окончательно

$$H_0 = \sqrt{2,5 \Delta P / \chi} \cong \sqrt{2,25 \cdot 10^4} = 150 \text{ Э.}$$

**4В.** (Гуденко А.В.) Сила, действующая на собирающую линзу, равна полному изменению импульса фотонов, падающих на линзу в единицу времени. Импульс изменяется из-за преломления света в стекле. При этом происходит изменение только направления движения фотонов без изменения величины их импульсов. Уменьшение составляющей импульса вдоль оптической оси для фотонов, падающих за секунду на кольцо радиуса  $r$  толщиной  $dr$ , равна действующей на это кольцо силе:

$$df = (I/c) (1 - \cos \theta) 2\pi r dr \approx (I/c) \pi r \theta^2 dr \approx (I/c) (\pi r^3 / F^2) dr.$$

Полная сила, действующая на собирающую линзу:

$$f = \int (I/c) (\pi r^3 / F^2) dr = \pi I R^4 / (4c F^2) = 3,14 \cdot 10^8 \cdot 2^4 / (4 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^2) \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ дн.}$$

Очевидно, что при выходе из системы линз, представляющей собой плоскопараллельную пластинку, пучок вновь распространяется параллельно оптической оси, а, значит, рассеивающая линза восстанавливает импульс фотонов. Следовательно, сила, действующая на рассеивающую линзу, по величине равна  $f$ , но направлена в сторону собирающей линзы. Ускорение каждой линзы  $a=f/m$ , пройденный путь  $\ell=\delta/2$ . Отсюда время

$$t = (2\delta/a)^{1/2} = (m\delta/f)^{1/2} = (10 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-4})^{1/2} = 50 \text{ с.}$$

**5В.** (Гуденко С.В., Морозов А.И..) При помощи закона Гейгера-Нэттола находим энергии  $\alpha$ -частиц при распаде ядер тория и урана:  $E_{\alpha}^{\text{Th}} = 4.12 \text{ МэВ}$ ,  $E_{\alpha}^{\text{U}} = 5.47 \text{ МэВ}$ . Разница энергий  $\alpha$ -частиц  $\Delta E_{\alpha} = 1.35 \text{ МэВ}$  в ядрах с одинаковым числом нуклонов обусловлена различием в зарядах ядер

$$\Delta E_{\alpha} = \frac{ze^2(Z-(Z-2)) \int_0^R w \left( \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) 4\pi r^2 dr}{\int_0^R w 4\pi r^2 dr} = \frac{24e^2}{5R}.$$

где  $w$  – вероятность нахождения  $\alpha$ -частицы в ядре,  $z = 2$  и  $Z$  – заряды  $\alpha$ -частиц и дочернего ядра (см. решение 5А).

Отсюда

$$R = \frac{24e^2}{5\Delta E_{\alpha}} = \frac{e^2 24\hbar c}{\hbar c 5\Delta E_{\alpha}} = \frac{24 \cdot 1.97 \cdot 10^{-5}}{137 \cdot 5 \cdot 1.35 \cdot 10^6} = 5.1 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

*Максимум за каждую задачу – 2 балла. Итоговая оценка по 10-балльной шкале – сумма всех баллов, округленная в большую сторону*

**Сбор преподавателей для обсуждения задач, результатов письменной части экзамена и для организационных объявлений 24 января 2019 года в 8-45 в Главной Физической аудитории**