



ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

Корибут А.В.

МФТИ 2022

Оглавление

1	7 сентября 2022	5
1.1	Краткий набор сведений из дифференциальной геометрии и линейной алгебры	5
1.1	Многообразия, скаляры, векторы, ковекторы и тензоры	5
1.2	Связь между векторами и ковекторами	9
1.3	Резюме	10
1.2	Преобразования Лоренца	11
2	14 сентября 2022	14
2.1	Про выбор знаков	14
2.2	Переход в движущуюся систему отсчета	15
2.3	Группа $O(3, 1)$	16
2.4	Сложение скоростей	18
2.5	Сокращение длины	18
2.6	Замедление времени	19
2.7	Изменение направления	19
2.8	4-скорость	19
2.9	4-импульс	22
3	21 сентября 2022	23
3.1	Волновое уравнение и эффект Доплера	23
3.2	Принцип наименьшего действия	26
3.3	Функция Лагранжа релятивистской частицы	27
3.4	Теорема Нётер	28
4	28 сентября 2022	31
4.1	Упругие столкновения (рассеяния) частиц	31
4.2	Неупругие столкновения (рассеяния) частиц	34
4.3	Взаимодействие заряженной релятивистской частицы с электромагнитным полем	36
5	5 октября 2022	39
5.1	Функции Лагранжа и Гамильтона для частицы в электромагнитном поле	39
5.2	Калибровочные преобразования	40
5.3	Уравнения Эйлера-Лагранжа для полей	41
5.4	Действие и уравнения движения для электромагнитного поля	43
5.5	Калибровки и степени свободы	46

6	12 октября 2022	48
6.1	Инварианты поля, 4-вектор тока	48
6.2	Калибровочная инвариантность, совместность и уравнение непрерывности .	50
6.3	Скалярная электродинамика	51
7	19 октября 2022	56
7.1	Теорема Нётер для полевых систем	56
1.1	Глобальные внутренние (цветные) симметрии	57
1.2	Общий случай	58
1.3	Трансляционная инвариантность. Тензор энергии-импульса	61
8	26 октября 2022	63
8.1	Тензор энергии-импульса скалярного поля	63
8.2	Тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля	64
8.3	Электромагнитное поле с внешними токами	66
8.4	Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и точечной частицы .	67
9	2 ноября 2022	70
9.1	Электростатика	70
9.2	Функция Грина уравнения Пуассона	71
2.1	Мультипольное разложение	73
2.2	Симметрии и тензор квадрупольного момента	75
9.3	Потенциальная энергия зарядов во внешнем поле	77
10	9 ноября 2022	79
10.1	Магнитостатика	79
10.2	Магнитное поле системы токов на больших расстояниях	81
10.3	Теорема Лармора	82
10.4	Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле	83
11	16 ноября 2022	85
11.1	Свободное электромагнитное поле	85
11.2	Свойства плоских электромагнитных волн	86
11.3	Тензор поляризации	87
11.4	Неоднородное уравнение Максвелла и запаздывающая функция Грина . . .	90
12	23 ноября 2022	94
12.1	Потенциалы Лиенара-Вихерта	94
12.2	Напряженности \vec{E} и \vec{H} из запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта . .	96
2.1	Словарик производных	96
2.2	Вычисление напряженностей	96
12.3	Дипольное приближение	99
13	30 ноября 2022	102
13.1	Синхротронное излучение	102
1.1	Мощность	102
1.2	Угловое и спектральное распределения	104

13.2	Излучение в мультипольном приближении	106
14	7 декабря 2022	110
14.1	Радиационное трение	110
1.1	Проблемы с силой радиационного трения	111
14.2	Естественная ширина спектральной линии	112
14.3	Границы применимости классической электродинамики	114
14.4	Рассеяние электромагнитных волн зарядами	115

Лекция 1

7 сентября 2022

Lec1

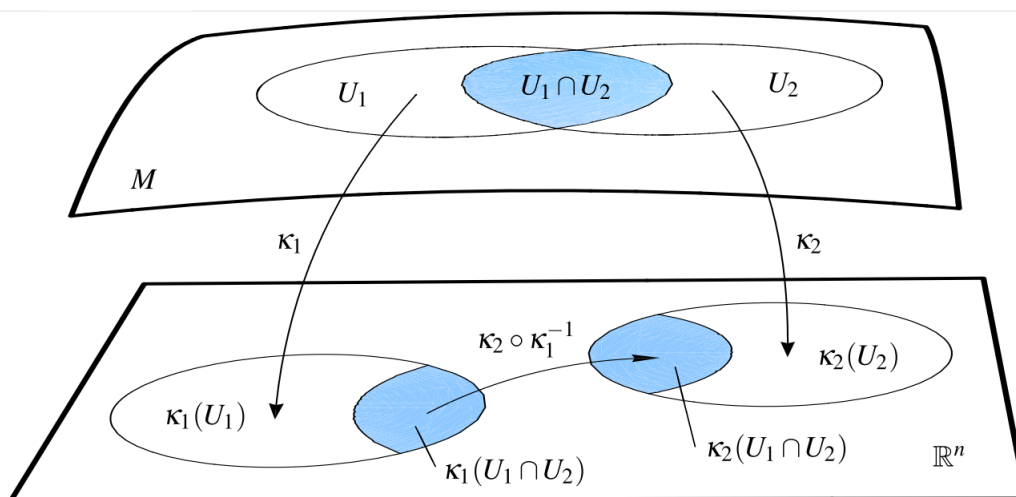
1.1 Краткий набор сведений из дифференциальной геометрии и линейной алгебры

1.1 Многообразия, скаляры, векторы, ковекторы и тензоры

Основным объектом изучения дифференциальной геометрии являются **Многообразия**. **Гладким многообразием** называется хаусдорфово топологическое пространство¹ со счетной базой локально гомеоморфное \mathbb{R}^n . Последнее означает, что для любой точки $m \in M$ существует окрестность U , содержащая m , и отображение $\kappa : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Отображение κ , также называемое **картой**, является гомеоморфизмом на образе $\kappa(U)$. Если два множества $U_{1,2} \in M$ имеют ненулевое пересечение и с каждым U_1 и U_2 связаны соответственно гомеоморфизмы κ_1 и κ_2 , то отображения

$$\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

должны быть класса C^∞ .



Отображения типа $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ и $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$ неоднократно встречались вам в курсе математического анализа. Если на множестве $\kappa_1(U_1 \cap U_2)$ ввести координаты x^μ $\mu = 1, 2, \dots, n$, а на

¹Для любых двух различных точек существуют их окрестности, которые не пересекаются.

множестве $\kappa_2(U_1 \cap U_2) - x'^\mu$, то отображение, например, $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ выражает x в терминах x'^2 , т.е. является обычной заменой координат.

Изучать многообразия сами по себе не представляет большого интереса. На многообразиях можно определить, например, скалярные функции

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

На практике же никто не изучает функции на абстрактном топологическом пространстве M , потому что в этом случае придется жертвовать таким понятием как дифференцирование, например. Можно из f определить обычную скалярную функцию из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}

$$\phi(x) := f(\kappa_1^{-1}(x)), \quad x \in \kappa_1(U_1) \quad (1.1.3)$$

Такие функции ϕ называют **локальным представителем** скалярного отображения f на множестве $\kappa_1(U_1)$. На множестве $\kappa_2(U_2)$ у отображения f будет уже другой локальный представитель

$$\phi'(x') := f(\kappa_2^{-1}(x')), \quad x' \in \kappa_2(U_2). \quad (1.1.4)$$

Если же рассмотреть какую-нибудь точку $m \in U_1 \cap U_2$ такую, что $\kappa_1(m) = x$ и $\kappa_2(m) = x'$, то очевидно должна быть следующая связь между локальными представителями

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (1.1.5)$$

Часто это формулу записывают в следующем виде

$$\phi'(x') = \phi(x(x')). \quad (1.1.6) \quad \boxed{\text{scalar}}$$

Последняя формула также должна быть знакомой. Это формула преобразований скалярного поля при замене координат. Например, чтобы найти функцию, известную в декартовых координатах $\phi(x, y, z)$, в сферических координатах, то нужно просто выразить x, y, z через радиус и сферические углы, т.е.

$$\phi'(r, \theta, \varphi) = \phi(r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta). \quad (1.1.7)$$

Кроме одиночных скалярных функций можно рассмотреть их набор $\phi^i(x)$ $i = 1, \dots, N$, тем не менее закон преобразований локальных представителей будет выглядеть аналогично (1.1.6). Однако в формулах, например, приведенных в задавальнике, можно найти такой закон преобразования для векторных полей

$$V'^\mu(x') = \sum_{\nu} \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} V^\nu(x(x')). \quad (1.1.8) \quad \boxed{\text{preVec}}$$

Для краткости принята следующая конвенция, так называемое **правило Эйнштейна**: по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование. Т.е. выражение, например, $A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho}$ следует понимать как

$$A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho} \equiv \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\rho} A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho}. \quad (1.1.9)$$

²Отображение $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ это набор из n функций $x^\mu(x'^1, \dots, x'^n)$. Далее для краткости будем писать $x^\mu(x')$ или $x'^\mu(x)$ для обратного преобразования.

В этом свете формула (1.1.8) переписывается как

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} V^\nu(x(x')). \quad (1.1.10) \quad \boxed{\text{Vec}}$$

Обращаю ваше внимание на то, что в правиле Эйнштейна один из пары повторяющихся индексов пишется сверху, а другой снизу. Смысл этого дополнения к правилу суммирования по повторяющимся индексам будет ясен ниже.

Чтобы понять природу такого необычного закона преобразования (1.1.10) (появление матрицы Якоби $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$) следует понять в каком же множестве принимают значения векторные поля, т.е.

$$V : M \rightarrow ??? \quad (1.1.11) \quad \boxed{\text{VecField}}$$

Рассмотрим множество кривых, т.е. отображений

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \quad (1.1.12) \quad \boxed{\text{curve}}$$

таких что $\gamma(0) = m$. Обозначим это множество $K_m(M)$. Будем считать, что две кривые γ_1 и γ_2 из $K_m(M)$ эквивалентны $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2(t)) \right|_{t=0}. \quad (1.1.13)$$

Здесь κ карта на многообразии, отображающая окрестность точки m в область в \mathbb{R}^n . Множество классов эквивалентности называют **касательным пространством** в точке m

$$T_m M := K_m(M) / \sim. \quad (1.1.14)$$

Данное определение весьма абстрактно, в курсе дифференциальной геометрии доказывается, что $T_m M$ изоморфно \mathbb{R}^n . Для любой кривой $\tilde{\gamma}$ из класса эквивалентности $[\gamma]$ определим отображение

$$d\kappa : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.15)$$

по правилу

$$d\kappa([\gamma]) := \left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}, \quad \tilde{\gamma} \in [\gamma]. \quad (1.1.16)$$

Это отображение по построению инъективно, также можно доказать, что это отображение сюръективно. Последнее является довольно простым упражнением, попробуйте это сделать самостоятельно.

Как и ранее точка m может принадлежать сразу двум окрестностям U_1 и U_2 . В этом случае у нас есть пара отображений $d\kappa_1$ и $d\kappa_2$, и связь между ними дается формулой

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}, \quad \tilde{\gamma} \in [\gamma]. \quad (1.1.17)$$

Дифференцируя правую часть как сложную функцию, получим

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \frac{d\kappa_1(\kappa_2^{-1}(\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))))}{d\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))} \left. \frac{d}{dt}(\kappa_2 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}. \quad (1.1.18)$$

Записанная здесь схематично производная $\frac{d\kappa_1(\kappa_2^{-1}(\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))))}{d\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))}$ – это и есть матрица Якоби, которая появляется в формуле (1.1.10). Теперь мы можем дать определение тому, что

же такие векторные поля. **Векторное поле** каждой точке m на многообразии ставит в соответствие вектор из касательного пространства $T_m M$. Обращаю внимание, что в каждой точке m свое! касательное пространство $T_m M$. В этом смысле дать векторному полю определение типа (1.1.11) принципиально невозможно (если не вводить дополнительно понятие касательного расслоения). Как и в случае скалярного поля мы не будем работать с функциями на абстрактном топологическом пространстве, с помощью карт κ и $d\kappa$ мы можем ввести локального представителя. Формула (1.1.10) показывает как переходить от представителя к представителю при замене карт.

Из курса линейной алгебры известно, что по любому линейному пространству V можно построить двойственное пространство V^* . Также известно, что замена базиса в V индуцирует замену базиса в V^* , кроме того, преобразование в V^* должно быть обратным по отношению к преобразованию, совершаемому в V .

Аналогично векторным полям можно ввести ковекторные поля. **Ковекторное поле** каждой точке m на многообразии ставит в соответствие вектор из кокасательного пространства $T_m^* M$, где $T_m^* M$ пространство двойственное к $T_m M$. Ковекторные поля традиционно пишут с нижним индексом, а их закон преобразования, как и следует из того, что выше, дается выражением

$$W'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu(x')}{\partial x'^\mu} W_\nu(x(x')). \quad (1.1.19) \quad \boxed{\text{Covec}}$$

У понятий векторного и ковекторного полей существует естественное обобщение. Тензором ранга (p, q) называется отображение, которое точке m ставит в соответствие элемент из $\underbrace{T_m M \otimes \dots \otimes T_m M}_p \otimes \underbrace{T_m^* M \otimes \dots \otimes T_m^* M}_q$. В этом смысле векторные и ковекторные поля

— это тензоры ранга $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Закон преобразования тензорных полей ранга (p, q) при переходе от одной карты (с координатами x) к другой (с координатами x') дается формулой

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\rho_1 \dots \rho_q}(x(x')). \quad (1.1.20) \quad \boxed{\text{Tensor}}$$

Теперь поясним, почему если индексы совпадают, то один индекс пишется сверху, а другой снизу. Рассмотрим произведение векторного поля V^μ на ковекторное поле W_μ

$$V^\mu(x) W_\mu(x). \quad (1.1.21) \quad \boxed{\text{Contr}}$$

Покажем, что при переходе к другим координатам $x'(x)$ такая свертка (1.1.21) преобразуется как скалярное поле (1.1.6). Действительно

$$\begin{aligned} V'^\mu(x') W'_\mu(x') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V^\lambda(x(x')) W_\rho(x(x')) = \delta^\rho_\lambda V^\lambda(x(x')) W_\rho(x(x')) = \\ &= V^\lambda(x(x')) W_\lambda(x(x')). \end{aligned} \quad (1.1.22) \quad \boxed{\text{newScalar}}$$

Здесь был использован факт, который должен быть известен из курса математического анализа: матрицы Якоби для прямого и обратного преобразования являются взаимно обратными. Последний факт в компонентах соответствующих матриц Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = \delta^\rho_\lambda. \quad (1.1.23)$$

Т.е. если индексы свернуты так, что один из них верхний, а другой нижний, то при замене координат «о преобразованиях этих индексов» можно забыть: не нужно писать соответствующие матрицы Якоби, поскольку они являются обратными друг к другу, следовательно сокращаются и пропадают из формулы для преобразования.

1.2 Связь между векторами и ковекторами

В курсе линейной алгебры доказывалось, что линейное пространство V и ему двойственное V^* изоморфны. Нас интересует как по вектору $v \in V$ построить линейный функционал $v^* \in V^*$. Для этого существует каноническая процедура, которая справедлива даже в том случае, когда пространство V - бесконечномерное пространство функций (так называемая теорема Риса, которая по всей строгости будет сформулирована и доказана в курсе функционального анализа).

Если пространство V помимо структуры линейного пространства наделено также скалярным произведением, т.е. задана невырожденная билинейная форма $(\bullet, \bullet)^3$, то по вектору v можно построить линейный функционал как

$$(v, \bullet) \in V^*. \quad (1.1.24) \quad \boxed{\text{Riesz}}$$

Т.е. чтобы вычислить значение такого линейного функционала на каком-нибудь векторе $u \in V$ нужно вычислить (v, u) . В наших индексных обозначениях вектор v однозначно определяется своими координатами v^μ ⁴, а чтобы задать билинейную форму, достаточно задать матрицу Грама $g_{\mu\nu}$, которую далее будем называть **метрикой**. Тогда, согласно (1.1.24), координаты v_ν^* ковектора $v^* \in V^*$ даются формулой

$$v_\nu^* = g_{\mu\nu} v^\mu. \quad (1.1.25) \quad \boxed{g}$$

Данное определение гарантирует, что ковекторы будут преобразовываться обратным преобразованием по отношению к векторам (вспомните, как при замене базиса преобразуются билинейные формы, и покажите этот факт).

Поскольку что называть вектором, а что ковектором – это всего лишь конвенция (пространства V и V^* изоморфны), то должен быть и обратный аналогичный способ, т.е. как по ковектору построить вектор. Для этого нам нужна метрика (матрица Грама) в V^* , которую будем обозначать $G^{\mu\nu}$. Так по ковектору v^* построим вектор $v \in V$ согласно правилу

$$v^\mu = G^{\mu\nu} v_\nu^*. \quad (1.1.26) \quad \boxed{G}$$

Опять же прямым вычислением можно проверить, что закон преобразования будет верным.

Теперь рассмотрим цепочку отображений

$$V \xrightarrow{g} V^* \xrightarrow{G} V, \quad (1.1.27)$$

где отображения g и G даются соответственно формулами (1.1.25) и (1.1.26). Нам бы хотелось, чтобы композиция $G \circ g$ была тождественным отображением. Найдем, исходя из

³Положительную определенность мы требовать не будем.

⁴Есть соглашение, что координаты векторов пишем с верхним индексом, а координаты ковекторов с нижним.

этого, как должны быть связаны матрицы $g_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$

$$G \circ g = \text{Id} \iff v^\mu = G^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} v^\lambda \implies G^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (1.1.28)$$

т.е. матрицы $G^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ должны быть взаимно обратными. В дифференциальной геометрии принята конвенция обозначать обратную к матрице $g_{\mu\nu}$ той же самой буквой, но с индексами сверху $g^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu. \quad (1.1.29)$$

В нашем случае пространствами V и V^* являются $T_m M$ и $T_m^* M$ соответственно. Т.е. матрица $g_{\mu\nu}$ должна быть определена в каждой точке многообразия⁵. Пусть у нас есть тензор ранга $(0, 2)$, который преобразуется согласно (1.1.20), т.е.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}(x(x')). \quad (1.1.30) \quad \boxed{\text{metric}}$$

Убедитесь, что если координаты векторов преобразуются по формуле (1.1.10), то метрика относительно таких преобразований преобразуется как билинейная форма! Прямым вычислением можно показать, что построенное ковекторное поле $V_\mu(x)$ по векторному полю $V^\mu(x)$ согласно правилу (1.1.25) действительно преобразуется как ковектор. В самом деле

$$\begin{aligned} V'_\mu(x') &= g'_{\mu\nu}(x') V'^\nu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}(x(x')) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} V^\sigma(x(x')) = \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\lambda}(x(x')) V^\lambda(x(x')). \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

Т.е. поднимая или опуская индексы с помощью метрики (иногда говорят «жонглируя индексами»), мы получаем объекты с другими законами преобразований при переходе от одной карты к другой.

1.3 Резюме

Главным для нас будет являться закон преобразований тензоров при переходе к другой карте (системе отсчета)

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\lambda_n}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\rho_1 \dots \rho_m}(x(x')). \quad (1.1.32) \quad \boxed{\text{Tensor1}}$$

Также любой ковариантный индекс можно преобразовать в контрвариантный и наоборот

$$V_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x) V^\nu(x), \quad W^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x) W_\nu(x). \quad (1.1.33)$$

При этом метрика с верхними индексами является обратной к метрике с нижними, т.е.

$$g_{\mu\rho}(x) g^{\rho\nu}(x) = \delta_\mu^\nu. \quad (1.1.34)$$

⁵Следует отметить, что не все многообразия допускают существование такого объекта

Далее в течение семестра мы будем изучать многообразие $M = \mathbb{R}^4$, а преобразования координат будем рассматривать лишь линейные. В качестве метрики $g_{\mu\nu}$ будем рассматриваться только метрика Минковского

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.1.35) \quad \boxed{\text{Mink}}$$

У внимательного читателя может возникнуть вопрос, а в какой карте задана эта самая метрика Минковского? Ведь даже при линейной замене координат (1.1.30) она будет меняться. Мы ограничим все возможные линейные замены координат на те, которые оставляют метрику Минковского инвариантной, эти преобразования называют **преобразованиями Лоренца**.

В СТО и ОТО принято нумеровать координаты с нуля, т.е. греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3.

1.2 Преобразования Лоренца

Рассмотрим общие линейные преобразования координат

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} + a^{\mu}. \quad (1.2.1) \quad \boxed{\text{Poincare}}$$

Здесь Λ^{μ}_{ν} – некоторая обратимая матрица, свойства которой нам предстоит выяснить. Подставляя преобразование (1.2.1) в (1.1.30) и требуя инвариантность метрики, мы получим

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.2.2) \quad \boxed{0}$$

При получении этого выражения мы использовали

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\rho}. \quad (1.2.3)$$

Формулу (1.2.2) в матричных обозначениях можно записать в виде

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.2.4)$$

Найдем частное решение уравнения (1.2.2). Будем его искать в виде

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.5) \quad \boxed{\text{ansatz}}$$

Несмотря на то что (1.2.2) это система из 16-ти уравнений, оказывается, что некоторые из них сразу же выполнены, если подставить туда (1.2.5). Нетривиальными являются лишь следующие из них

$$\begin{cases} \eta_{00} = \Lambda^{\rho}_0 \Lambda^{\sigma}_0 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{01} = \Lambda^{\rho}_0 \Lambda^{\sigma}_1 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{10} = \Lambda^{\rho}_1 \Lambda^{\sigma}_0 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{11} = \Lambda^{\rho}_1 \Lambda^{\sigma}_1 \eta_{\rho\sigma}. \end{cases} \quad (1.2.6) \quad \boxed{\text{Lor}}$$

Настоятельно рекомендуется проверить, что остальные уравнения действительно выполнены! Раскроем явно одну из сумм, скрытую за правилом суммирования по повторяющимся индексам

$$\begin{aligned}\Lambda^\rho{}_0\Lambda^\sigma{}_0\eta_{\rho\sigma} &= \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0\eta_{00} + \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0\eta_{11} + \Lambda^2{}_0\Lambda^2{}_0\eta_{22} + \Lambda^3{}_0\Lambda^3{}_0\eta_{33} = \\ &= \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 - \Lambda^2{}_0\Lambda^2{}_0 - \Lambda^3{}_0\Lambda^3{}_0. \quad (1.2.7)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что элементы $\eta_{\rho\sigma}$ отличны от нуля, только когда $\rho = \sigma$. Т.е. слагаемые типа $\Lambda^2{}_0\Lambda^3{}_0\eta_{23}$ формально присутствуют в сумме, но из-за того, что $\eta_{23} = 0$, они равны нулю. Второй строчкой были подставлены конкретные значения для компонент метрики Минковского. Оказывается, что предыдущую формулу можно еще упростить, если вспомнить, что некоторые элементы Λ равны нулю. В итоге останется лишь

$$\Lambda^\rho{}_0\Lambda^\sigma{}_0\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0. \quad (1.2.8)$$

Упрощая аналогичным образом другие уравнения системы (1.2.6), мы ее можем привести к виду

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 = 1, \\ \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = 0, \\ \Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_0 = 0, \\ \Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_1 = -1. \end{cases} \quad (1.2.9) \quad \boxed{1234}$$

Очевидно, что второе и третье уравнения этой системы тождественны, а первое и четвертое уравнения описывают гиперболы. Ровно как окружность удобно параметризовать углом, также и гиперболы удобно параметризовать «гиперболическим углом». Решение первого уравнения имеет вид

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = \pm \sinh \phi. \quad (1.2.10) \quad \boxed{\phi}$$

Аналогично решение четвертого уравнения

$$\Lambda^1{}_1 = \pm \cosh \psi, \quad \Lambda^0{}_1 = \pm \sinh \psi \quad (1.2.11)$$

Несмотря на то что существует целых 16 различных способов выбора знаков, далеко не все из них отвечают «разным» преобразованиям. Поясним, что имеется ввиду. Параметр ϕ принимает любые значения из \mathbb{R} , если выбрать в (1.2.10) расстановку знаков типа

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = -\sinh \phi, \quad (1.2.12)$$

то мы всегда можем перейти от параметра ϕ к $\phi' = -\phi$ и в терминах ϕ' уже получим

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi', \quad \Lambda^1{}_0 = +\sinh \phi' \quad (1.2.13)$$

В этом свете существенным является выбор знаков только лишь перед гиперболическими косинусами, поскольку изменить эти знаки простым переопределением угла не выйдет. Далее мы разберем одну из возможных расстановок знаков, которая наиболее важна в физических приложениях (об этом позже)

$$\Lambda^0{}_0 = \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = \sinh \phi, \quad \Lambda^1{}_1 = \cosh \psi, \quad \Lambda^0{}_1 = \sinh \psi. \quad (1.2.14)$$

Второе уравнение (1.2.9) накладывает связь на параметры ϕ и ψ . После подстановки получим

$$\sinh \psi \cosh \phi - \sinh \phi \cosh \psi = \sinh(\psi - \phi) = 0 \implies \phi = \psi. \quad (1.2.15)$$

Таким образом, мы нашли однопараметрическое семейство преобразований

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.16) \quad \boxed{\text{TrueLoren}}$$

сохраняющих метрику Минковского. Такого рода преобразования описывают переход в движущуюся систему отсчета.

Лекция 2

14 сентября 2022

Lec2

2.1 Про выбор знаков

В прошлой лекции мы рассмотрели частный выбор знаков перед гиперболическими косинусами, в этой же давайте проанализируем все возможные варианты, т.е. рассмотрим матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \pm \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \mp \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Здесь в первой матрице знаки перед гиперболическими косинусами совпадают, а у во второй различны. Уравнение 2 системы (1.2.9) пока не наложено. Если потребовать, чтобы оно было выполнено, то это дает следующие соотношения для ϕ и ψ для первой и второй матрицы соответственно

$$\phi = \psi, \phi = -\psi. \quad (2.1.2)$$

Сами матрицы приобретают вид

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \pm \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \mp \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Lorentz12

Мы не просто так разделили случаи совпадающих и различающихся знаков. Определитель первой матрицы равен $+1$, а второй -1 . Т.е. матрицы второго типа описывают отражения. Следует заметить, что не все преобразования, которые сохраняют метрику Минковского и как следствие интервал, являются симметриями природы. Уравнения теории слабых взаимодействий, например, не инвариантны относительно преобразований типа отражений¹. Не все преобразования первого типа также являются для нас удовлетворительными. Мы хотим, чтобы причинно связанные события происходили в одном и том же порядке в любой системе отсчета. Пусть событие 1 произошло в момент времени 0 в начале координат,

¹Кроме того, данный факт был обнаружен экспериментально. Если кто-то испытывает трудности с поиском вопроса по выбору при подготовке к ГОСу по физике, то поищите «нарушение четности в слабых взаимодействиях», на Youtube хватает роликов с доступным объяснением.

тогда если событие 2 происходит спустя время t и вызвано событием 1, то в пространстве оно может быть локализовано только лишь внутри шара радиуса ct . Здесь мы явно использовали то, что сигналы распространяются с конечной скоростью, и максимально возможная скорость - это скорость света c . Оказывается, что необходимо и достаточно потребовать

$$\Lambda^0_0 \geq 1, \quad (2.1.4) \quad \boxed{\text{Ortho}}$$

чтобы направление времени не менялось, т.е. чтобы причинно связанные события следовали в одном и том же порядке в любой системе отсчета. Условие (2.1.4) называют условием **ортохронности** преобразований, а сами преобразования, решающие (1.2.2) с единичным детерминантом и (2.1.4), - **собственной ортохронной группой Лоренца** $SO_+(1, 3)$.

Рассмотрим простой пример. Пусть события 1 и 2 даются в пространстве времени следующими координатами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ct \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Будем считать, что событие 1 предшествует событию 2, т.е. $t > 0$. При переходе в другую систему отсчета координаты первого события очевидно не изменятся, а второго после преобразования первой матрицей из (2.1.3) приобретут вид

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi ct + \sinh \phi x \\ \sinh \phi ct \pm \cosh \phi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Видно, что если события причинно связаны, т.е. $x \leq ct$, то при выборе знака минус перед гиперболическим косинусом в (2.1.3) мы получим, что в другой системе координат событие 2 предшествовало событию 1, что противоречит здравому смыслу (если вы, конечно, не снимаете фантастический фильм). Также видно, что при выборе знака $+$ перед гиперболическим косинусом события всегда будут происходить в том же порядке, что и в исходной системе координат. Таким образом, преобразование, полученное на прошлой лекции (1.2.16), является единственным удовлетворительным решением системы (1.2.2) с точки зрения физических требований в рамках анзаца (1.2.5).

Удобным критерием для того, чтобы узнать причинно связаны события или нет, является знак квадрата **интервала**.

$$s^2 := (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.1.7) \quad \boxed{\text{interval}}$$

Если события причинно связаны, то $s^2 \geq 0$. Интервал с $s^2 > 0$ называют **временеподобным**, $s^2 = 0$ - **светоподобным**, а $s^2 < 0$ - **пространственноподобным**.

2.2 Переход в движущуюся систему отсчета

На прошлой лекции было анонсировано, что такие преобразования описывают переход в подвижную систему отсчета, давайте теперь это докажем. Пусть в исходной системе

отсчета некоторый объект движется со скоростью v вдоль оси x , тогда его координаты в пространстве времени могут быть заданы в виде

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Выполнив преобразование (1.2.16), мы видим, что в новой системе отсчета координаты объекта даются выражением

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi ct + \sinh \phi vt \\ \sinh \phi ct + \cosh \phi vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Из этого выражения, конкретно из второй строчки, видно, что можно выбрать гиперболический угол ϕ таким образом, чтобы в новых координатах объект покоился. Найдём явную связь между скоростью и гиперболическим углом

$$\sinh \phi ct + \cosh \phi vt = 0 \implies \tanh \phi = -\frac{v}{c}. \quad (2.2.3) \quad \boxed{\tanh}$$

С помощью тождеств для гиперболических функций получим

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh \phi = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c}. \quad (2.2.4)$$

В релятивистской физике приняты следующие стандартные обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.2.5)$$

В этих обозначениях переход в систему отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью v вдоль оси x , дается матрицей

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6) \quad \boxed{\text{LorX}}$$

2.3 Группа $O(3, 1)$

Покажем, что матрицы, решающие (1.2.2), образуют группу. На лекции это было проделано на языке матричного умножения, здесь же приведем доказательство в индексных обозначениях. Пусть матрица $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ также решает (1.2.2), т.е.

$$\tilde{\Lambda}^\rho{}_\mu \tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.3.1)$$

Покажем, что произведение $\Lambda^\mu_\rho \tilde{\Lambda}^\rho_\nu$ также решает (1.2.2). Действительно,

$$\Lambda^\rho_\xi \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \Lambda^\sigma_\zeta \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \eta_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \underbrace{\Lambda^\rho_\xi \Lambda^\sigma_\zeta \eta_{\rho\sigma}}_{\eta_{\xi\zeta}} = \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \eta_{\xi\zeta} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.3.2)$$

Очевидно, что в группе есть единица, которая отвечает тождественному преобразованию δ^μ_ν . Покажем, что для любого Λ^μ_ν , решающего (1.2.2), существует обратный. Для этого домножим уравнение (1.2.2) слева и справа на $\eta^{\mu\xi}$, уравнение после этого приобретет вид

$$\eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} = \delta^\xi_\nu \quad (2.3.3)$$

Здесь при преобразовании правой части мы воспользовались (1.1.35). Выражение в левой части просто перегруппируем

$$(\eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma}) \Lambda^\sigma_\nu = \delta^\xi_\nu. \quad (2.3.4)$$

Отсюда немедленно следует, что обратная матрица к Λ^σ_ν дается формулой

$$(\Lambda^{-1})^\xi_\sigma = \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.5)$$

L-1down

На лекции было совершенно справедливо замечено, что для того, чтобы были выполнены все аксиомы группы, нужно, чтобы и обратный элемент решал (1.2.2). Чтобы в этом убедиться, сперва покажем, что матрицы, решающие (1.2.2), также решают

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma}. \quad (2.3.6)$$

0*

Умножая уравнение справа и слева на $\eta_{\rho\xi}$, мы получим

$$\Lambda^\sigma_\nu (\eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\xi}) = \delta^\sigma_\xi. \quad (2.3.7)$$

0**

Обращаю ваше внимание, что (2.3.7) – это переписывание (2.3.6) в другой форме! В этом смысле уравнения (2.3.6) и (2.3.7) обладают идентичным набором решений. Из уравнения (2.3.7) видно

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\xi = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\xi} \quad (2.3.8)$$

L-1up

Выражения (2.3.5) и (2.3.8) идентичны с точностью до переобозначения индексов. Итого, уравнение (1.2.2) мы смогли переписать в виде (2.3.5), а уравнение (2.3.6) – в виде (2.3.8), но уравнения (2.3.5) и (2.3.8) тождественны, следовательно тождественны и уравнения (1.2.2) и (2.3.6). В этом смысле нам не важно проверять, решают ли обратные элементы (1.2.2) или (2.3.6). Подставим для разнообразия в левую часть уравнения (2.3.6)

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\gamma} &= \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\gamma} = \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\lambda} = \\ &= \eta^{\mu\xi} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\lambda} = \eta^{\mu\xi} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\alpha} = \eta^{\xi\beta}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

В итоге мы доказали, что матрицы, решающие (1.2.2), образуют группу, эту группу называют **группой псевдоортогональных преобразований** и обозначают $O(1,3)$.

2.4 Сложение скоростей

В общем случае закон композиции в группе $O(1, 3)$ или $SO_+(1, 3)$ весьма сложен. Например, композиция переходов в движущиеся системы отсчета со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 уже **НЕ** является просто переходом в подвижную систему отсчета с какой-нибудь новой скоростью $\vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2$. Тем не менее, если скорости сонаправлены, то результат композиции – это снова переход в движущуюся систему координат с какой-то новой скоростью. Действительно, рассмотрим произведение преобразований типа (1.2.16) с разными ϕ_1 и ϕ_2

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & \sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & \sinh \phi_2 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_2 & \cosh \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1 + \phi_2) & \sinh(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_1 + \phi_2) & \cosh(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Напомним, что скорость подвижной системы отсчета – это гиперболический тангенс соответствующего угла (2.2.3), тогда имеем

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \implies v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (2.4.2) \quad \boxed{\text{Vel}}$$

2.5 Сокращение длины

Одним из классических эффектов специальной теории относительности является сокращение длины. Предположим, что мимо нас пролетает стержень со скоростью v , направленной вдоль стержня. Мы **одновременно!** (для простоты в момент времени $t = 0$) измерим положения концов стержня в покоящейся системе отсчета. Координаты событий (измерений) в пространстве времени даются формулами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.1)$$

Тогда координаты этих же измерений в системе покоя стержня даются формулами

$$\begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\gamma x_1 \\ \gamma x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -\beta\gamma x_2 \\ \gamma x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Длина стержня в его системе покоя – это разница $x'_2 - x'_1 = \ell_0$, она связана формулой с одновременными результатами измерений в системе, в которой стержень движется

$$\ell_0 = \gamma \ell \implies \ell = \gamma^{-1} \ell_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ell_0. \quad (2.5.3)$$

²Речь идет о так называемом Вигнеровском повороте (вращении) или прецессии Томаса.

2.6 Замедление времени

Самостоятельно. Разобрано во втором томе ЛЛ.

2.7 Изменение направления

Пусть в вагоне летит камень так, что его мировая линия (годограф в пространстве времени) дается выражением

$$\begin{pmatrix} ct \\ u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.1)$$

В системе отсчета, в которой вагон движется со скоростью V , мировая линия брошенного камня даётся выражением

$$\begin{pmatrix} ct' \\ u'_x t' \\ u'_y t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct + \beta\gamma u_x t \\ \beta\gamma ct + \gamma u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.2)$$

В итоге имеем систему уравнений, из которой легко находим скорость камня в системе отсчета относительно, которой вагон движется

$$u'_x = \frac{u_x + V}{1 + \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x V}{c^2}}. \quad (2.7.3) \quad \boxed{\text{direction}}$$

Заметим, что первая формула в точности совпадает с релятивистским законом сложения скоростей (2.4.2).

В качестве интересного примера рассмотрим фотон вместо камня. Скорости u_x и u_y даются выражениями

$$u_x = c \cos \theta, \quad u_y = c \sin \theta. \quad (2.7.4) \quad \boxed{\text{photon}}$$

Рекомендую проверить, что модуль скорости фотона в штрихованной системе отсчета также будет равен c . Подставив (2.7.4) в (2.7.3), мы найдем, как изменится угол

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (2.7.5) \quad \boxed{\text{aberration}}$$

Эту формулу также называют формулой **абберации света**. Из формулы (2.7.5) следует, что если в летящей ракете светить фонариком перпендикулярно движению, то для наблюдателя на земле луч будет отклонен в направлении движения ракеты. Чем больше скорость, тем сильнее будет отклонение. Данный эффект называют **эффектом прожектора**.

2.8 4-скорость

В предыдущей секции мы вывели закон преобразования скорости при переходе в движущуюся систему отсчета (2.7.3). Данный закон преобразования является нелинейным, что

не очень-то удобно для практических вычислений. Оказывается, можно ввести обобщение обычной скорости, так называемую **4-скорость**, которая преобразуется линейно при переходе в другую систему отсчета.

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (2.8.1)$$

Здесь мы предполагаем, что координаты частицы в пространстве времени однозначно задаются функцией $x^\mu(s)$ (см. например (1.1.12)). Под s понимается следующее

$$\begin{aligned} s(t) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sqrt{(c(t_i - t_{i-1}))^2 - (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 - (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 - (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}. \end{aligned} \quad (2.8.2) \quad \boxed{\text{S}}$$

Здесь $\{t_i\}_{i=0}^N$ разбиение временного отрезка $[t_0, t]$ ³

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N, \quad (2.8.3)$$

где $t_N = t$, а t_0 – некоторый начальный момент времени⁴. Преобразования Лоренца сохраняют интервал (2.1.7), т.е.

$$ds = ds'. \quad (2.8.4)$$

С другой стороны, при линейных преобразованиях

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.8.5)$$

дифференциал координаты преобразуется линейно

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (2.8.6)$$

Отсюда мы видим, что четыре-скорость преобразуется как вектор (1.1.10), т.е.

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (2.8.7)$$

Теперь неплохо бы получить связь с привычной обычной скоростью. Мы вправе параметризовать кривую любым удобным параметром, это необязательно должен быть интервал (что-то вроде натуральной параметризации длиной). Пусть кривая параметризована временем, т.е. у нас задана функция $x^\mu(t)$, и тогда, чтобы найти 4-скорость, нам нужно вычислить

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (2.8.8) \quad \boxed{\text{pre4Vel}}$$

Очевидно, что для частиц, двигающихся медленнее скорости света, интервал является монотонной функцией времени

$$s(t') - s(t) = \sqrt{(c(t' - t))^2 - (x(t') - x(t))^2 - (y(t') - y(t))^2 - (z(t') - z(t))^2}. \quad (2.8.9) \quad \boxed{\text{s(t)}}$$

³При $N \rightarrow \infty$ диаметр разбиения $\max_j(t_j - t_{j-1})$ стремится к нулю.

⁴Вспомните соответствующие теоремы о длине кривых из курса математического анализа.

Здесь мы предполагаем, что моменты времени t и t' близки друг к другу. Из (2.8.9) видно, что при любом движении частицы существует обратная функция $t(s)$ ⁵. Предположим, что $t' = t + \delta t$ и приведем выражение (2.8.9) к виду

$$s(t + \delta t) - s(t) = \sqrt{(c\delta t)^2 - (v_x\delta t)^2 - (v_y\delta t)^2 - (v_z\delta t)^2} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (2.8.10)$$

А далее к виду

$$s(t + \delta t) - s(t) = c\delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (2.8.11)$$

Отсюда просто по определению производной имеем

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.12) \quad \boxed{\text{derivativ}}$$

Мы не просто так не дифференцировали (2.8.2)(или (2.8.9)) «в лоб», а действовали по определению производной. Прямой способ куда более громоздкий, но замечу, что мы просто вычислили производную от (2.8.2), перешли от параметризации кривой интервалом к параметризацией временем. Подставим эту производную в (2.8.8) и получим

$$u^\mu = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.8.13)$$

В компонентах четыре-скорость имеет вид

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix}. \quad (2.8.14)$$

Вычислим, как говорят на жаргоне, квадрат четыре-скорости

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1. \quad (2.8.15)$$

Несмотря на то что четыре-скорость, как мы показали, преобразуется как вектор (1.1.10), квадрат 4-скорости инвариантен при переходе в другую систему отсчета и всегда равен единице. Заметим, что для частиц, двигающихся со скоростью света (фотон, глюон, гравитон), понятие 4-скорости не определено, так как изменение интервала между любыми точками в пространстве времени на траектории таких частиц тождественно равно нулю. Последнее ни в коем случае не означает, что для безмассовых частиц нельзя определить понятие мировой линии.

⁵Будем считать, что траектория частицы такова, что эта функция дифференцируема.

2.9 4-импульс

Аналогично обобщению скорости до 4-скорости можно обобщить понятие импульса. **Четыре-импульсом** массивной! частицы называют

$$p^\mu := m c u^\mu . \quad (2.9.1)$$

В компонентах это выражение выглядит следующим образом

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m v_x \\ \gamma m v_y \\ \gamma m v_z \end{pmatrix} . \quad (2.9.2)$$

Энергией релятивистской частицы называют $c p^0$ компоненту 4-импульса

$$E := \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.9.3) \quad \boxed{\text{Energy}}$$

Импульсом релятивистской частицы называют p^i компоненты 4-импульса $i = 1, 2, 3$

$$\vec{p} := \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.9.4) \quad \boxed{\text{Momentum}}$$

Пока мы просто называли какие-то выражения энергией и импульсом, позже с помощью теоремы Нётер покажем, что эти величины сохраняются. Квадрат 4-импульса равен

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 . \quad (2.9.5) \quad \boxed{\text{mass}}$$

Хотя для безмассовых частиц не существует 4-скорости, 4-импульс для них ввести можно. Определим 4-импульс безмассовой частицы

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ E \frac{e_x}{c} \\ E \frac{e_y}{c} \\ E \frac{e_z}{c} \end{pmatrix} . \quad (2.9.6)$$

Здесь E – энергия безмассовой частицы, \vec{e} – некоторый единичный трехмерный вектор, указывающий направление движения. Квадрат 4-импульса для безмассовых частиц равен нулю

$$\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 , \quad (2.9.7)$$

что согласуется с (2.9.5).

Лекция 3

21 сентября 2022

Лес3

3.1 Волновое уравнение и эффект Доплера

Из курса общей физики вам должно быть известно, что распространение возмущений описывается **волновым уравнением**

$$\left(\frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(t, x, y, z) = 0. \quad (3.1.1) \quad \text{Wave}$$

Здесь под $u(t, x, y, z)$ может пониматься любая функция, характеризующая возмущение. Это может быть отклонение натянутой струны, продольное относительное смещение стержня, напряженность электрического поля у электромагнитной волны (об этом будет в подробностях позже). Константа v – это скорость распространения этого самого возмущения. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай, когда функция u зависит только от t и x

$$u(t, x, y, z) \implies u(t, x). \quad (3.1.2)$$

В этом случае исходное уравнение упрощается до

$$\left(\frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0. \quad (3.1.3)$$

Общее решение такого уравнения можно записать в виде

$$u(t, x) = u_R(x - vt) + u_L(x + vt), \quad (3.1.4)$$

где первая функция описывает движение некоторого профиля $u_R(x)$ вправо, а $u_L(x)$ – соответственно влево. Далее нас будут интересовать возмущения, которые распространяются со скоростью света, т.е. $v = c$. В этом случае уравнение (3.1.1) можно записать в более компактной форме

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} u(x) = 0. \quad (3.1.5) \quad \text{Wave1}$$

Поскольку оператор, действующий на функцию $u(x)$, очень часто встречается в релятивистской физике, то для него принято следующее сокращенное обозначение

$$\square := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (3.1.6)$$

кроме того, для производных также приняты сокращенные обозначения

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.1.7)$$

Для простоты будем предполагать, что $u(x)$ – это скаляр, т.е. преобразуется по закону (1.1.6) при замене координат. Покажем, что уравнение (3.1.5) является Лоренц-инвариантным, последнее означает, что если $u(x)$ решало уравнение (3.1.5), то $u'(x')$, построенное по формуле (1.1.6), решает уравнение

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} u'(x') = 0. \quad (3.1.8)$$

Действительно, пусть x' и x связаны преобразованием Лоренца

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu, \quad (3.1.9) \quad \boxed{\text{waveL}}$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} u(x(x')) &= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = \\ &= \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Здесь мы использовали правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} u(x(x')) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} u(x(x')). \quad (3.1.11)$$

Уравнение называют Лоренц-инвариантным, если преобразования Лоренца переводят решение в решение. Волновое уравнение является простейшим примером такого типа уравнений. В курсе уравнений математической физики вам докажут, что уравнения такого типа (дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами) решаются преобразованием Фурье. Представим искомую функцию $u(x)$ в виде интеграла

$$u(x) = \int d^4k e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{u}(k), \quad \int d^4k := \int dk^0 \int dk^1 \int dk^2 \int dk^3. \quad (3.1.12)$$

Подставляя искомую функцию в такой форме, мы видим, что производные будут действовать лишь на экспоненту

$$\partial_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} = ik_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (3.1.13)$$

Продифференцировав экспоненту дважды, мы имеем

$$\square u(x) = - \int d^4k e^{ik_\sigma x^\sigma} \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tilde{u}(k) = 0. \quad (3.1.14)$$

Такого рода выражения являются типичными при решении дифференциальных уравнений преобразованием Фурье. Поскольку экспоненты образуют базис в пространстве функций, то справедливо следующее

$$\int d^4k e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{F}(k) = 0 \implies \tilde{F}(k) = 0. \quad (3.1.15)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому. В нашем случае соответствующее алгебраическое уравнение имеет вид

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tilde{u}(k) = 0. \quad (3.1.16)$$

Общим решением такого уравнения является функция $\tilde{u}(k)$, которая принимает любые значения для k , принадлежащих поверхности $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$, и равна нулю в противном случае. Кратко это можно записать с помощью дельта-функции Дирака

$$\tilde{u}(k) = \delta(\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu) \tilde{v}(k). \quad (3.1.17)$$

Здесь $\tilde{v}(k)$ уже полностью произвольная функция. Про дельта-функцию от сложного аргумента вам расскажут на семинаре в рамках задачи 5. Общее решение уравнения (3.1.5) имеет вид

$$u(x) = \int d^4 k e^{ik_\sigma x^\sigma} \delta(\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu) \tilde{v}(k). \quad (3.1.18)$$

Дельта-функция в этом интеграле из всего \mathbb{R}^4 оставляет только поверхность $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$.

Рассмотрим отдельно подынтегральное выражение

$$e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{v}(k). \quad (3.1.19)$$

portion

Здесь мы предполагаем, что k уже принадлежит упомянутой поверхности. За временную эволюцию, а значит и за частоту, отвечает только экспонента

$$e^{ik_0 ct + \dots} \tilde{v}(k). \quad (3.1.20)$$

Откуда очевидно, что $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Сам вектор k_μ называют **4-волновым вектором**. В компонентах он записывается в виде

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (3.1.21)$$

где \vec{e} – единичный вектор. Легко проверить, что такой 4-вектор автоматически удовлетворяет условию $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$. Посмотрим, как изменится вклад (3.1.19) при переходе в другую систему отсчета (3.1.9).

$$e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{v}(k) \implies \exp\{ik_\sigma \Lambda^\sigma{}_\nu x'^\nu\} \tilde{v}(k) = \exp\{ik'_\nu x'^\nu\} \tilde{v}(k). \quad (3.1.22)$$

Отсюда видно, что k_μ действительно преобразуется как 4-вектор (1.1.19). Рассмотрим в качестве примера

$$k_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k'_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Lambda^\nu{}_\mu k_\nu = \begin{pmatrix} \gamma \frac{\omega}{c} (1 + \beta) \\ -\gamma \frac{\omega}{c} (1 + \beta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

В этих преобразованиях мы использовали $\Lambda^\mu{}_\nu$ из (2.2.6), т.е. x' – это система отсчета, которая движется относительно системы x против оси Ox со скоростью $c\beta$. Отсюда мы находим связь между частотами

$$\omega' = \omega \gamma (1 + \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (3.1.24)$$

Dopler

Обратим внимание, что 4-волновой вектор выбран так, что волна распространяется в направлении оси Ox . В этом свете формула (3.1.24) предсказывает известный результат, что частота для наблюдателя в системе x' увеличивается. Данный эффект называют **эффектом Доплера**.

3.2 Принцип наименьшего действия

astAction

Действием называют функционал от траектории $q^I(t)$, который выражается с помощью интеграла от функции Лагранжа

$$S[q^I(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I(t), \dot{q}^I(t), t). \quad (3.2.1) \quad \text{action}$$

Принцип наименьшего действия гласит, что уравнения движения можно получить приравняв первую вариационную производную к нулю. Здесь индекс I нумерует все степени свободы, которые есть в системе.

Напомним, что называют вариацией функционала. Пусть задан функционал $\mathcal{F}[f(x)]$, его вариацией называют

$$\delta\mathcal{F} := \mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)]. \quad (3.2.2)$$

Чтобы найти вариационную производную $\frac{\delta\mathcal{F}[f]}{\delta f(x)}$ ¹ (далее для краткости будем писать просто $\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}$), необходимо представить вариацию функционала в виде

$$\mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)] = \int dx \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} \delta f + \mathcal{O}(\delta f^2). \quad (3.2.3)$$

Обратите внимание, что несмотря на природу исходного функционала слагаемое с вариационной производной должно быть представлено через интеграл! Рассмотрим пример не самого тривиального функционала

$$\mathcal{F}[f(x)] = f(a). \quad (3.2.4)$$

Вариация такого функционала равна

$$\mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)] = \delta f(a). \quad (3.2.5)$$

Слагаемое в правой части необходимо представить через интеграл

$$\delta f(a) = \int dx \delta(x - a) \delta f(x) \implies \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} = \delta(x - a). \quad (3.2.6)$$

Вернемся к функционалу (3.2.1). Оказывается, что интересными с физической точки зрения являются системы, которые не зависят явно от времени, т.е.

$$L(q^I(t), \dot{q}^I(t), t) \implies L(q^I(t), \dot{q}^I(t)). \quad (3.2.7) \quad \text{No_t}$$

¹Которая также является функционалом! x для этого функционала является просто параметром.

Вычислим вариационную производную этого функционала

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I + \delta q^I, \dot{q}^I + \delta \dot{q}^I) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I, \dot{q}^I) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^I} \delta q^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \delta \dot{q}^I \right] + \dots = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) \right] \delta q^I + \mathcal{O}((\delta q^I)^2). \quad (3.2.8)\end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям второе слагаемое в квадратных скобках. Приравняв первую вариационную производную нулю, мы получим **уравнения Эйлера-Лагранжа**

$$\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0. \quad (3.2.9) \quad \boxed{\text{ELeq}}$$

3.3 Функция Лагранжа релятивистской частицы

Действие должно быть инвариантно относительно замены координат, поскольку каждой траектории оно ставит в соответствие просто число, которое, очевидно, к замене координат никак не может быть чувствительно. Простейшим таким функционалом является

$$S[x^\mu(s)] = \alpha \int ds, \quad (3.3.1)$$

где α – пока неопределенная константа. Как правило, мы редко встречаемся с кривыми, которые заданы с помощью натуральной параметризации. Для любой допустимой параметризации $x^\mu(\lambda)$ имеется следующая связь

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = ds. \quad (3.3.2) \quad \boxed{\text{parametr}}$$

Чтобы выделить из действия функцию Лагранжа, нам нужно представить действие через интеграл по времени, т.е. для нас $\lambda = t$. В итоге имеем

$$\alpha \int ds = \alpha \int c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (3.3.3) \quad \boxed{\text{Sguess}}$$

Чтобы найти константу α , мы воспользуемся **принципом соответствия**. Мы не пытаемся построить какую-то принципиально новую динамику частицы, а хотим обобщить динамику Ньютона на случай больших скоростей, т.е. действие для релятивистской частицы должно переходить в действие частицы из классической механики

$$\int \frac{mv^2}{2} dt \quad (3.3.4)$$

в пределе малых скоростей. Разложим (3.3.3) в ряд по скорости (обратите внимание, что из-за того что $v < c$, то мы всегда остаемся в круге сходимости)

$$\alpha c \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \alpha c \int \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(v^4) \right) dt. \quad (3.3.5)$$

Приравнивая соответствующие слагаемые, мы получим значение константы α

$$-\alpha c \frac{v^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2} \implies \alpha = -mc. \quad (3.3.6)$$

В итоге мы получаем **функцию Лагранжа** для *свободной массивной! релятивистской частицы*

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.3.7) \quad \text{Lparticle}$$

и действие

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.3.8) \quad \text{Sparticle}$$

Как и в классической механике, переходя от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона, мы построим канонические импульсы и функцию Гамильтона:

$$\vec{p} := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.3.9) \quad \text{canonM}$$

$$H := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(p)}{c^2}}}. \quad (3.3.10) \quad \text{Lewis}$$

Обращаю ваше внимание, что эти выражения в точности совпадают с выражениями для импульса и энергии массивной релятивистской частицы, введенными как соответствующие компоненты 4-импульса (2.9.4) (2.9.3). Из уравнений Гамильтона сразу же следует, что импульс сохраняется

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = 0 \implies \vec{p} = \text{Const}. \quad (3.3.11) \quad \text{ConsM}$$

Также в силу того, что полная и частная производные по времени от функции Гамильтона совпадают, а последняя равна нулю, то сохраняется и функция Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies H = \text{Const}. \quad (3.3.12) \quad \text{ConsE}$$

Здесь внимательный читатель заметит, что для использования уравнений Гамильтона нужно сперва полностью перейти к Гамильтонову формализму, т.е. выразить \dot{q} через канонический импульс (3.3.9) и координату в функции Лагранжа и т.д. Тем не менее, из формулы (3.3.9) видно, что \dot{q} выражается только через канонический импульс. В этом свете законы сохранения (3.3.11), (3.3.12) верны.

Далее с помощью теоремы Нётер мы покажем, что полученные только что законы сохранения импульса (3.3.11) и энергии (3.3.12) являются следствием того, что функция Лагранжа обладает определенными симметриями.

3.4 Теорема Нётер

Теорема Нётер гласит, что любым **непрерывным** симметриям² действия (или функ-

²Ниже речь идет о так называемых **глобальных симметриях**, т.е. о преобразованиях действия, оставляющих его инвариантным, которые параметризуются числами, а не функциями, зависящими, например, от времени.

ции Лагранжа) соответствуют законы сохранения³. Пусть, например, функция Лагранжа $L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I)$ инвариантна относительно пространственных сдвигов

$$L(\vec{q}^I + \vec{a}, \dot{\vec{q}}^I) = L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I). \quad (3.4.1)$$

Здесь \vec{q}^I – это радиус-вектор I -ой частицы. Такого рода симметрии отнюдь не являются экзотическими. Потенциальная энергия взаимодействия между парой частиц зависит только от разности их координат, таким образом, если к каждой координате мы добавим константу \vec{a} , то потенциальная энергия от этого не изменится.

Посмотрим, какой закон сохранения следует из этой симметрии

$$\int dt L(\vec{q}^I + \vec{a}, \dot{\vec{q}}^I) - \int dt L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I) = \int dt \sum_I \frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0. \quad (3.4.2)$$

Воспользовавшись уравнениями движения (3.2.9), мы приведем выражение к виду

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0 \quad (3.4.3)$$

Это должно быть выполнено для любых \vec{a} , в том числе и для бесконечно малых. Тогда верно

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) = 0 \implies \sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} = \text{Const}. \quad (3.4.4) \quad \boxed{\text{Nmomenta}}$$

Таким образом мы получили закон сохранения импульса, который является следствием однородности пространства.

Выясним теперь, к чему приводит однородность по времени. Функция Лагранжа пусть и сложным образом (через координаты $\vec{q}^I(t)$ и скорости $\dot{\vec{q}}^I(t)$) является функцией времени. Если сдвинуть время на небольшое число ε , то функция Лагранжа с одной стороны переходит в

$$L(t + \varepsilon) = L(t) + \varepsilon \frac{dL}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.4.5) \quad \boxed{\text{full}}$$

Теперь же вспомним, что функция Лагранжа зависит от времени через координаты и скорости

$$L(\vec{q}^I(t + \varepsilon), \dot{\vec{q}}^I(t + \varepsilon)) = L(\vec{q}^I(t), \dot{\vec{q}}^I(t)) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \dot{\vec{q}}^I \varepsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.4.6) \quad \boxed{\text{partial}}$$

Приравнявая (3.4.5) и (3.4.6) и оставляя только слагаемые первого порядка по ε , мы получим

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \dot{\vec{q}}^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I = \frac{dL}{dt}. \quad (3.4.7)$$

Первое слагаемое в левой части можно преобразовать при использовании уравнений движения (3.2.9)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) \dot{\vec{q}}^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I = \frac{dL}{dt}. \quad (3.4.8)$$

³Теорема Нетер может быть применена к любым системам: не важно, являются они релятивистскими или нет. Необходимым условием является то, что уравнения движения такой системы могут быть получены через принцип наименьшего действия (см. раздел 3.2).

Всё это выражение можно переписать как полную производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \dot{\vec{q}}^I - L \right) = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \dot{\vec{q}}^I - L = \text{Const}. \quad (3.4.9) \quad \boxed{\text{Nenergy}}$$

Таким образом, из однородности времени следует закон сохранения энергии. Заметим, что этот закон сохранения является следствием того, что функция Лагранжа не содержит явной зависимости от времени (см. (3.2.7)). Подчеркнем, что в законах сохранения (3.4.4), (3.4.9) траектория $\vec{q}^I(t)$ должна решать уравнения движения (3.2.9).

Лекция 4

28 сентября 2022

Lec4

4.1 Упругие столкновения (рассеяния) частиц

Упругими столкновениями называют столкновения, при которых не меняется количество и сорт частиц, т.е. если столкнулись, например, электрон с фотоном (эффект Комптона), то разлетелись снова же электрон и фотон. Оказывается, что действие для релятивистских систем (в том числе и полевых) схематично имеет следующий вид

$$S_{full} = S_{free} + S_{int}, \quad (4.1.1) \quad \text{Sfull}$$

где S_{free} – действие для свободных частиц (полей), а S_{int} – вклад, отвечающий за взаимодействие. В качестве иллюстративного примера рассмотрим систему из двух частиц, для которых свободное действие совпадает с (3.3.8), а вид взаимодействия мы конкретизировать не будем, но потребуем, чтобы взаимодействие уважало однородность пространства (см. раздел про теорему Нётер). В итоге наша функция Лагранжа имеет вид

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = -m_1 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - m_2 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} + L_{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2). \quad (4.1.2) \quad \text{fullL}$$

Ниже мы продемонстрируем, как работает теорема Нётер на практике. Напомним, что для выполнения соответствующих законов сохранения необходимо, чтобы траектории частиц (конфигурации полей) решали уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = 0. \quad (4.1.3)$$

По нашему предположению взаимодействие устроено так, что верно

$$L_{int}(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = L_{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (4.1.4) \quad \text{symmetry}$$

где \vec{a} – произвольный постоянный вектор. Из (4.1.2) видно, что такой же симметрией обладает и полная функция Лагранжа. Рассмотрим изменения действия при сдвиге координат обеих частиц на постоянный вектор \vec{a}

$$\begin{aligned} S[\vec{r}_1(t) + \vec{a}, \vec{r}_2(t) + \vec{a}] - S[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = \\ &= \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = Const, \quad (4.1.6) \quad \boxed{\text{Noether}}$$

т.е. сумма импульсов сохраняется. Пока что, соотношение (4.1.6) это просто следствие теоремы Нётер и пользоваться им в практических вычислениях не выйдет, поскольку нужен конкретный вид функции Лагранжа для взаимодействия. Тем не менее, каким бы не было слагаемое L_{int} справедливо следующее

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \vec{f}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = \frac{m_2 \vec{v}_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} + \vec{f}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (4.1.7) \quad \boxed{\text{mom}}$$

где слагаемые $\vec{f}_{1,2} = \frac{\partial L_{int}}{\partial \vec{v}_{1,2}}$ появляются из-за взаимодействия между частицами. Задача о рассеении частиц ставится следующим образом (см. Рис. 4.1):

- Изначально имеются две (или более) свободные частицы, т.е. частицы расположены настолько далеко друг от друга, что слагаемые $\vec{f}_{1,2}$ пренебрежимо малы. Обычно принимают, что это происходит в момент времени $-\infty$
- Затем по мере сближения слагаемые со взаимодействием становятся существенными. Если бы это было не так, то частицы просто бы пролетали сквозь друга друга.
- Наконец частицы разлетаются на большие расстояния так, что взаимодействием снова можно пренебречь, момент времени $+\infty$.

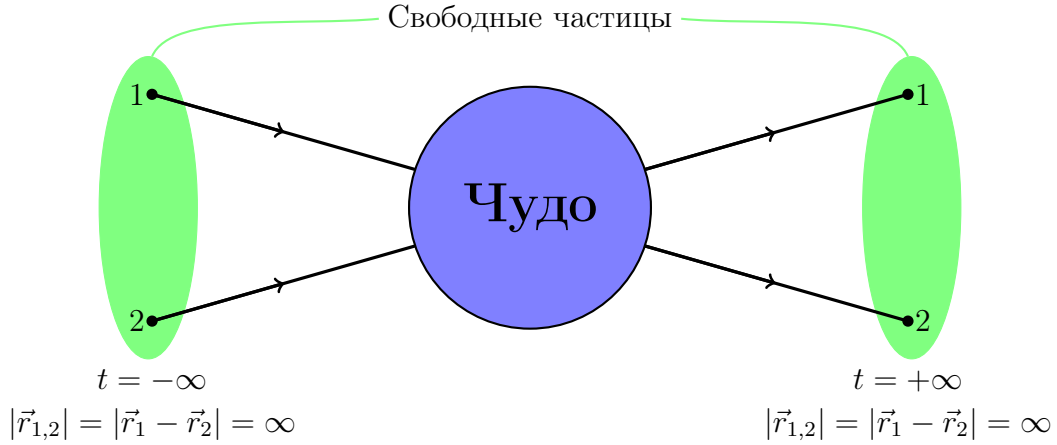


Рис. 4.1: Рассеяние частиц

Условие (4.1.6) справедливо в любой момент времени, но только в $-\infty$ или $+\infty$ импульсы

совпадают с импульсами свободных частиц (по нашему предположению)¹

$$\left(\frac{m_1 \vec{v}(t)_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=-\infty} = \left(\frac{m_1 \vec{v}_1(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.8) \quad \boxed{\text{mo}}$$

Аналогичное утверждение можно сделать и про энергии. Из теоремы Нётер (3.4.9) следует

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} \vec{v}_2 - L = \text{Const}. \quad (4.1.9)$$

Т.е. если слагаемое L_{int} устроено таким образом, что на большом расстоянии частиц друг от друга оно стремится к нулю, то верно

$$\left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=-\infty} = \left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.10) \quad \boxed{\text{en}}$$

Обратим внимание, что в (4.1.8) и (4.1.10) написано, что сохраняется 4-импульс. В более компактной форме с обобщением на случай произвольного числа частиц это можно записать в следующем виде

$$(p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.11) \quad \boxed{\text{4momenta}}$$

Последнее мы будем называть **законом сохранения 4-импульса системы частиц**. Несмотря на то что (4.1.11) это лишь объединение (4.1.7) и (4.1.10), именно вид (4.1.11) оказывается более удобным с практической точки зрения. При переходе в другую систему отсчета с помощью преобразования Лоренца (4.1.11) изменится следующим образом

$$\Lambda^\mu{}_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = \Lambda^\mu{}_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \quad (4.1.12)$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu$ – матрица преобразования Лоренца. В частности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (p_1^\rho + p_2^\rho + \dots) \Big|_{t=-\infty} (p_1^\sigma + p_2^\sigma + \dots) \Big|_{t=-\infty} = \\ = \eta_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho \tilde{\Lambda}^\nu{}_\sigma (p_1^\rho + p_2^\rho + \dots) \Big|_{t=+\infty} (p_1^\sigma + p_2^\sigma + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \end{aligned} \quad (4.1.13) \quad \boxed{\text{invariant}}$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu$ и $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ – матрицы преобразований Лоренца, которые в общем случае могут быть различными. Лоренц-инвариантные свертки в левой и правой частях (4.1.13) называют **эффективной массой системы**.

Несмотря на то что выражения (4.1.11) и (4.1.13) были получены в предположении, что рассматриваемые частицы массивны, оказывается, что они справедливы и в том случае, когда некоторые из частиц безмассовы².

¹Заметим, что не все взаимодействия допускают подобное. Например, *сильное взаимодействие* между кварками устроено так, что с увеличением расстояния между ними энергия взаимодействия также возрастает. В этом свете изучать рассеяния кварков по предложенной здесь схеме бессмысленно.

²Обоснование этого утверждения выходит за рамки настоящего курса, его строгое обоснование дается в рамках Квантовой Теории Поля.

4.2 Неупругие столкновения (рассеяния) частиц

Неупругими столкновениями будем называть столкновения, при которых изменяется количество или сорт частиц. Постановка задачи аналогичная: сперва были невзаимодействующие частицы, которые сблизилсь, а затем разлетелись на бесконечность, где снова могут считаться невзаимодействующими. В итоге полный 4-импульс снова сохраняется, но выражение (4.1.11) следует изменить на

$$(p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = (p_1'^\mu + p_2'^\mu + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \quad (4.2.1) \quad \boxed{4\text{momenta}1}$$

где штрихами мы хотим подчеркнуть, что в правой части равенства следует рассматривать 4-импульсы других! частиц, набор которых может полностью отличаться от исходного. Как и в случае упругих столкновений, некоторые из частиц могут быть безмассовыми. Из (4.2.1) следует, что сохраняется нулевая компонента 4-импульса, ответственная за энергию, последнее можно записать формулой

$$\sum_{i=1}^N (m_i c^2 + T_i) = \sum_{\alpha=1}^N (m'_\alpha c^2 + T'_\alpha), \quad (4.2.2)$$

где мы явно разделили полную энергию частиц на кинетическую и энергию покоя. **Дефектом массы** называют следующую разность

$$\Delta m = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{\alpha=1}^N m'_\alpha \quad (4.2.3)$$

В теоретическом и экспериментальном исследовании неупругих столкновений важным является понятие **порога реакции** – это минимальная кинетическая энергия одной! из частиц, необходимая для того, чтобы произошла конкретная реакция. Поясним смысл определения на примере, допустим, нас интересует реакция

$$1 + 2 \rightarrow a + b + c, \quad (4.2.4) \quad \boxed{\text{Gap}}$$

где импульс и энергии, например, частицы 2 заданы. Тогда порогом реакции будем называть минимальную кинетическую энергии частицы 1 для того, чтобы эта реакция произошла. Обращаю ваше внимание на то, что порогом называют кинетическую энергию **одной!** частицы, т.е. если бы рассматривали процесс

$$1 + 2 + 3 + \dots + N \rightarrow a + b + c + \dots + z, \quad (4.2.5) \quad \boxed{\text{GapN}}$$

то задача ставилась бы, например, так: импульсы и энергии частиц $2, \dots, N$ заданы (есть конкретная экспериментальная установка, которая производит частицы с заданными энергиями и импульсами), какой должна быть минимальная кинетическая энергия частицы 1, чтобы произошла реакция (4.2.5)?

Вернемся к реакции (4.2.4), именно эти процессы (изначально две сталкивающиеся частицы) исследуются в физике высоких энергий (Процессы типа (4.2.5) невероятно сложны

для изучения с экспериментальной точки зрения). Пусть эксперимент устроен так, что частица 2 покоится, т.е. соответствующий ей 4-импульс равен

$$p_2^\mu = \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.6) \quad \boxed{\text{mom2}}$$

На нее налетает частица 1, которая имеет 4-импульс

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.7) \quad \boxed{\text{mom1}}$$

Никаких других выделенных направлений, кроме направления движения частицы 1, нет, поэтому такой выбор ничуть не уменьшает общности. Обратим внимание, что 4-импульсы (4.2.6) и (4.2.7) заданы в лабораторной системе отсчета. Энергия E_1 будет минимальной, если в системе центра инерции (центра масс) частицы a, b, c будут покоиться, т.е. 4-импульс системы в системе центра инерции равен

$$p_a^\mu + p_b^\mu + p_c^\mu = \begin{pmatrix} m_a c + m_b c + m_c c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Перейдем в систему центра инерции для импульсов $p_1^\mu + p_2^\mu$ с помощью преобразования Лоренца (2.2.6)

$$\Lambda^\mu{}_\nu(p_1^\nu + p_2^\nu) = \begin{pmatrix} \gamma \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) - \beta \gamma p_1 \\ -\beta \gamma \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) + \gamma p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.9) \quad \boxed{\text{MassCenter}}$$

Напомним, что в классической механике в системе центра инерции полный импульс равен нулю, а в релятивистской механике равными нулю должны быть пространственные компоненты 4-импульса. Из второй строчки (4.2.9) находим релятивистские факторы β и γ

$$\beta = \frac{p_1}{\frac{E_1}{c} + m_2 c}, \quad \gamma = \frac{\frac{E_1}{c} + m_2 c}{\sqrt{\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2}}. \quad (4.2.10)$$

Обратим внимание, что выражение $\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2$ является релятивистским инвариантом (см. (4.1.13)). Оно совпадает с квадратом 4-импульса

$$\eta_{\mu\nu}(p_1^\mu + p_2^\mu)(p_1^\nu + p_2^\nu) = \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2, \quad (4.2.11)$$

а следовательно должно быть равно

$$\eta_{\mu\nu}(p_a^\mu + p_b^\mu + p_c^\mu)(p_a^\nu + p_b^\nu + p_c^\nu) = (m_a c + m_b c + m_c c)^2. \quad (4.2.12)$$

Приравнивая энергии в системе центра инерции до и после реакции, мы получим

$$\frac{\frac{E_1}{c} + m_2 c}{m_a c + m_b c + m_c c} \left(\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) - \frac{p_1^2}{\frac{E_1}{c} + m_2 c} \right) = m_a c + m_b c + m_c c. \quad (4.2.13)$$

Приводя подобные слагаемые, приведем последнее выражение к виду

$$E_1 = \frac{(m_a c + m_b c + m_c c)^2 - (m_1 c)^2 - (m_2 c)^2}{2m_2}. \quad (4.2.14)$$

Напомним, что порогом реакции называют минимальную **кинетическую** энергию частицы, которая связана с полной энергией формулой

$$E_1 = m_1 c^2 + T_1. \quad (4.2.15)$$

Откуда мы находим порог реакции (4.2.4), в случае когда частица 2 покоится

$$T_1 = \frac{(m_a c + m_b c + m_c c)^2 - (m_1 c + m_2 c)^2}{2m_2}. \quad (4.2.16)$$

4.3 Взаимодействие заряженной релятивистской частицы с электромагнитным полем

EMpartInt

По аналогии с (4.1.1) мы попытаемся построить динамику частицы во внешнем электромагнитном поле. Сперва мы напишем простейший вариант взаимодействия частицы с 4-векторным полем $A_\mu(x)$, а потом заметим, что полученных результат можно интерпретировать как взаимодействие с электрическим и магнитным полями. Самый простой из возможных вариантов действия, включающих внешнее 4-векторное поле, имеет вид

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} ds. \quad (4.3.1)$$

action_pa

Найдем уравнения движения из принципа наименьшего действия, причем будем рассматривать свободное и взаимодействующее слагаемые по очереди:

- δS_{free}

$$\begin{aligned} S_{free}[x^\mu + \delta x^\mu] - S_{free}[x^\mu] &= \\ &= -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{d\lambda}} d\lambda + mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Здесь мы считаем, что траектория частицы в пространстве времени параметризована λ . Предыдущее выражение также можно представить в виде

$$\delta S_{free} = -mc \int \frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}}{\sqrt{\eta_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}}} d\lambda + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.3)$$

Используя (3.3.2), мы можем перейти от параметризации λ к натуральной параметризации интервалом

$$\delta S_{free} = -mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d\delta x^\nu}{ds} ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.4)$$

Чтобы найти вариационную производную, нам нужно, чтобы в слагаемое линейное по δx^μ входила сама функция, а не ее производная. Этого можно добиться, проинтегрировав последнее выражение по частям

$$\delta S_{free} = mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.5)$$

Величину $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ по аналогии с 4-скоростью называют **4-ускорением**. Если бы у нас не было взаимодействия с векторным полем A_μ , то уравнения движения частицы были бы эквивалентны $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$, что является релятивистским аналогом динамики Ньютона для свободной частицы.

- Теперь рассмотрим вариацию слагаемого, ответственного за взаимодействие δS_{int}

$$\begin{aligned} S_{int}[x^\mu + \delta x^\mu] - S_{int}[x^\mu] &= -\frac{e}{c} \int A_\mu(x + \delta x) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{ds} ds + \frac{e}{c} \int A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{ds} ds = \\ &= -\frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds - \frac{e}{c} \int A_\mu(x) \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Чтобы преобразовать второе слагаемое к правильному виду, его нужно проинтегрировать по частям. Для этого вспомним, что поле $A_\mu(x(s))$ также является функцией интервала

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \int A_\mu(x(s)) \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds &= -\frac{e}{c} \int \frac{d}{ds} (A_\mu(x(s))) \delta x^\mu ds = -\frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu ds = \\ &= -\frac{e}{c} \int \partial_\mu A_\nu(x) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

В итоге для вариации δS_{int} имеем

$$\delta S_{int} = -\frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.8)$$

В дальнейшем нам будет часто встречаться комбинация $\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$, которую принято обозначать

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.3.9)$$

Maxwell

В литературе нет какого-то единого правила о названии этого антисимметричного тензора, вы можете встретить множество вариантов: **тензор Фарадея**, **тензор Максвелла**, **тензор электромагнитного поля** и т.д.

Теперь из вариации полного действия

$$\delta S = mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.10)$$

Приравнявая первую вариационную производную нулю, мы получим уравнения движения релятивистской частицы, взаимодействующей с векторным полем

$$mc \frac{du_\nu}{ds} = -\frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\mu \iff mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (4.3.11) \quad \boxed{\text{part_in_E}}$$

Чтобы это уравнение описывало взаимодействие с электромагнитным полем, нам нужно конкретизировать вид $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.12) \quad \boxed{\text{EH}}$$

Оказывается, что если поля \vec{E} и \vec{H} решают уравнения Максвелла, то по тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ можно восстановить **4-векторный потенциал** A_μ (часто также используется термин **4-потенциал**)

$$A_\mu(x) = - \int_0^1 d\lambda \lambda x^\nu F_{\mu\nu}(\lambda x), \quad (4.3.13) \quad \boxed{\text{Schwinger}}$$

т.е. то самое 4-векторное поле, с которого мы начали анализ. Вам предлагается в этом убедиться, решив задачу 16 (похожая задача будет в контрольной работе).

Ниже приведем, как выглядит уравнение (4.3.11) в компонентах

$$\frac{dE}{dt} = e(\vec{E}, \vec{v}) \iff \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e(\vec{E}, \vec{v}), \quad (4.3.14)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \iff \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}], \quad (4.3.15) \quad \boxed{\text{LorentzFo}}$$

где для перехода от производной по s к производной по t мы использовали (2.8.12).

Лекция 5

5 октября 2022

Lec5

5.1 Функции Лагранжа и Гамильтона для частицы в электромагнитном поле

Чтобы получить функцию Лагранжа, нам нужно переписать действие (4.3.1), как интеграл по времени. 4-потенциал A^μ в компонентах имеет вид

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (5.1.1) \quad \text{4potentia}$$

где ϕ и $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ – это скалярный и векторный потенциалы, которые вам должны быть знакомы из курса общей физики. Покажем, что из (5.1.1) следует уже знакомое вам выражение, например, для электрического поля. Для этого нам нужно вычислить F_{0i} ($i = 1, 2, 3$) компоненты тензора электромагнитного поля, которые равны

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \implies \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.1.2) \quad \text{Efield}$$

С помощью (2.8.12) мы можем представить действие в виде

$$S[x] = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{A}, \vec{v}) \right) \right) dt. \quad (5.1.3)$$

Отсюда функция Лагранжа для частицы во внешнем электромагнитном поле равна

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left(\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} (\vec{A}(\vec{r}, t), \vec{v}) \right). \quad (5.1.4) \quad \text{Lagr}$$

Далее следуя канонической процедуре, мы найдем импульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (5.1.5) \quad \text{p+A}$$

и «функцию Гамильтона»

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (5.1.6) \quad \text{Noether_E}$$

Чтобы последнее выражение стало настоящей функцией Гамильтона, необходимо выразить в последнем выражении скорости \vec{v} через канонический импульс \vec{P} и координаты \vec{r} . Из последнего выражения видно, что полное выражение $\vec{v}(\vec{P}, \vec{r})$ нам не нужно, а нужно лишь выразить гамма-фактор, который из (5.1.5) равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{m^2 c^2 + (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}}{mc}. \quad (5.1.7)$$

Теперь мы можем выписать функцию Гамильтона

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t))^2} + e\phi(\vec{r}, t). \quad (5.1.8) \quad \text{HamPP}$$

Обратите внимание на то, что в отличие от (3.3.10) полученная здесь функция Гамильтона уже зависит от координат и кроме того зависит от времени! Т.е. в общем случае выражение (5.1.6) уже НЕ является сохраняющейся величиной (см. раздел про теорему Нётер)! Выражение будет интегралом движения только в том случае, если поля не зависят от времени, т.е.

$$\phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi(\vec{r}), \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}). \quad (5.1.9)$$

Мы получим аналог закона сохранения энергии для нестационарных систем (когда поля содержат зависимость от времени), когда будем обсуждать теорему Нётер для полей, и получим так называемый тензор энергии-импульса.

5.2 Калибровочные преобразования

gaugeTr

На прошлой лекции был введен тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (4.3.9) и, решив задачу 16, предлагалось убедиться, что по $F_{\mu\nu}$ можно восстановить 4-потенциал A_μ . Эта процедура не является однозначной! Т.е. двум разным A_μ и A'_μ может соответствовать один и тот же тензор электромагнитного поля. Действительно, рассмотрим преобразование, которое далее будем называть **калибровочным**¹

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad (5.2.1) \quad \text{gauge}$$

где f – произвольная скалярная функция. Проверим, что тензоры электромагнитного поля, построенные по A_μ и по A'_μ , совпадают

$$F_{\mu\nu}(A') = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f = F_{\mu\nu}(A) + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) f = F_{\mu\nu}(A). \quad (5.2.2)$$

¹Обращаю ваше внимание на то, что в разных калибровочных теориях свои калибровочные преобразования. Преобразование (5.2.1) присуще электродинамике, о калибровочных преобразованиях в лиане-ризованной гравитации вы можете узнать, решив задачу 17.

Здесь мы воспользовались тем, что частные производные коммутируют. В случае топологически тривиального многообразия, которым является изучаемое в настоящем курсе \mathbb{R}^4 , калибровочное преобразование (5.2.1) описывает весь! произвол в определении 4-потенциала. Т.е. если у вас есть два 4-потенциала, которым соответствуют одинаковые поля \vec{E}, \vec{H} (совпадают тензоры электромагнитного поля), то 4-потенциалы отличаются на 4-градиент некоторой скалярной функции. Математически последнее означает, что на

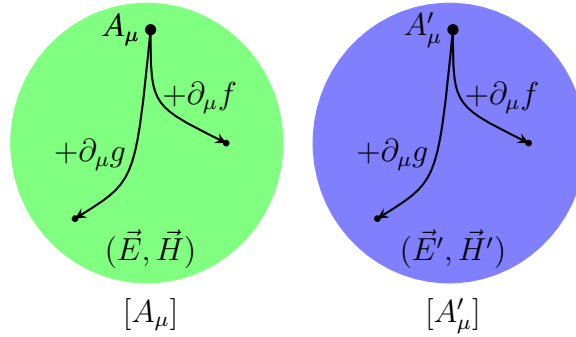


Рис. 5.1: Классы эквивалентности 4-потенциалов

4-потенциалах можно ввести отношение эквивалентности. Будем считать, что $A_{1\mu}$ эквивалентен $A_{2\mu}$, если существует скалярная функция f такая, что $A_{1\mu} = A_{2\mu} + \partial_\mu f$. В этом свете за физические явления (т.е. за поля \vec{E} и \vec{H}) отвечают не сами 4-потенциалы A_μ , а их классы эквивалентности $[A_\mu]$ (см. Рис. 5.1).

5.3 Уравнения Эйлера-Лагранжа для полей

В курсе теоретической механики рассматривались механические системы с конечным числом степеней свободы

$$q_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.3.1) \quad \text{mechanics}$$

Когда у нас есть поле, например, скалярное

$$\phi(\vec{r}, t), \quad (5.3.2) \quad \text{field}$$

то на \vec{r} следует смотреть, как на аналог индекса i в (5.3.1), который теперь принимает континуальное множество значений. На замену понятия функции Лагранжа приходит **плотность функции Лагранжа**, которую также часто называют **Лагранжианом**

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x, t). \quad (5.3.3)$$

Пусть $\Phi^\Upsilon(x)$ – это весь набор полей в теории (поле Хиггса, фотоны, глюоны и т.д.), которые нумерует индекс Υ

$$\Phi^\Upsilon(x) = \{\phi, A^\mu, A^{j\mu}, \dots\}. \quad (5.3.4)$$

Т.е., например, $\Phi^1 = \phi$, $\Phi^2 = A^0$ и т.д. Конкретный способ занумеровать поля будет совершенно не важен для дальнейшего анализа. Ниже мы подразумеваем правило Эйнштейна

и для индекса Υ , чтобы не загромождать формулы ненужными суммами. Оказывается, что все успешные (в том числе квантовые) теории поля устроены так, что в Лагранжиан входят только сами поля и **первые!** (по модулю интегрирования по частям) их производные. Так устроена, например, самая точная из когда-либо построенных теорий – квантовая электродинамика (до сих пор не было обнаружено никакого расхождения между теоретическими расчетами и экспериментальными данными). Действие для нашей полевой системы будет иметь вид²

$$S[\Phi^\Upsilon] = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \quad (5.3.5) \quad \text{PhiUps}$$

Рассмотрим вариацию действия

$$\begin{aligned} S[\Phi^\Upsilon + \delta\Phi^\Upsilon] - S[\Phi^\Upsilon] &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\mu \delta\Phi^\Upsilon \right) + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2). \end{aligned} \quad (5.3.6) \quad \text{VER}$$

Здесь мы использовали правило Лейбница

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\mu \delta\Phi^\Upsilon. \quad (5.3.7)$$

Далее мы покажем, что *граничное* слагаемое

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) \quad (5.3.8) \quad \text{boundary}$$

равно нулю. В курсе математического анализа вы познакомились с теоремами: Ньютона-Лейбница, Стокса, Остроградского-Гаусса. Все они являются частным случаем более общей теоремы Стокса, которая справедлива в любой размерности

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (5.3.9) \quad \text{Stokes}$$

где ω – дифференциальная форма ранга $\dim M - 1$. Формулировку и доказательство можно найти в учебниках по дифференциальной геометрии, которые здесь приведены не будут. Тем не менее, уместна следующая интуитивная аналогия с трехмерным случаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \operatorname{div} \vec{V} = \int_{S_2^\infty} (d\vec{S}, \vec{V}), \quad (5.3.10)$$

где в правой части интегрирование ведется по поверхности сферы бесконечного радиуса. Похожая ситуация будет происходить и в четырехмерном случае, где придется интегрировать по бесконечно удаленной сфере S_3 . Когда мы рассматривали частицы, то в качестве вариации δq мы рассматривали функции такие, что $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (так называемая

²Далее мы будем работать в системе единиц $\hbar = c = 1$.

вариация с закрепленными концами). Аналогом этого требования для полей является равенство нулю $\delta\Phi^\Upsilon$ на бесконечно удаленной сфере S_3 , а следовательно граничное слагаемое (5.3.8) равно нулю. Заметим также, что не только вариации $\delta\Phi^\Upsilon$ должны обращаться в нуль на бесконечно удаленной сфере, но и сами поля Φ^Υ должны убывать на пространственной бесконечности потому, что в противном случае интеграл (5.3.5) разойдется. В итоге вариацию (5.3.6) мы можем привести к виду

$$S[\Phi^\Upsilon + \delta\Phi^\Upsilon] - S[\Phi^\Upsilon] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2). \quad (5.3.11)$$

Отсюда, приравнивая первую вариационную производную нулю, мы находим **уравнения Эйлера-Лагранжа для полей**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} = 0. \quad (5.3.12) \quad \boxed{\text{EL_fields}}$$

5.4 Действие и уравнения движения для электромагнитного поля

На прошлой лекции мы вывели уравнения движения для частицы во внешнем! электромагнитном поле, т.е. мы считали, что рассматриваемая нами заряженная частица никак не влияет на поле, в которое она помещена. Такая система, естественно, является идеализацией. В этом разделе мы выведем динамические уравнения на поля. По аналогии со всеми предыдущими случаями мы будем получать эти уравнения из принципа наименьшего действия. В электродинамике к действию предъявляют следующие требования:

- Лоренц-инвариантность,
- В Лагранжиан не должны входить производные полей старше 2 (по модулю интегрирования по частям),
- Калибровочная инвариантность.

Первое требование очевидно. Второе вытекает из того, что мы знаем, как выглядят уравнения Максвелла (именно их мы и хотим получить), а они содержат лишь первые производные полей \vec{E} и \vec{H} (т.е. вторые производные от 4-потенциала A_μ . См. (4.3.9) и (4.3.12)) Последнее же требование калибровочной инвариантности до сих пор остается научной загадкой, почему-то природа выбирает именно такие (калибровочные) теории. Взяв за основу принцип калибровочной инвариантности, Салам и Вайнберг построили Стандартную Модель – теорию, описывающую электрослабые и сильные взаимодействия, которая прекрасно согласуется с современными экспериментальными данными.

Ранее мы уже нашли один калибровочно-инвариантный объект – тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (4.3.9). Именно из этих объектов мы будем строить действие для электромагнитного поля, рассмотрим два типа сверток

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}. \quad (5.4.1) \quad \boxed{\text{candide}}$$

Любые другие комбинации $F_{\mu\nu}$ будут содержать старшие производные, а значит мы точно не получим из них уравнения Максвелла. Второй вариант из (5.4.1) является полной производной, т.е.

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = 4\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu \partial_\rho A_\lambda). \quad (5.4.2)$$

Следовательно, интеграл от него может быть переписан как интеграл по границе (5.3.9) и не приводит к нетривиальным уравнениям движения.

Рассмотрим в качестве действия для свободного электромагнитного поля следующее выражение

$$S_{EM\ free}[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.4.3) \quad \boxed{\text{EMfree}}$$

Получим из (5.3.12) уравнения движения, которые следуют из такого действия. Заметим, что наше действие зависит только от производных полей, следовательно, первое слагаемое (5.3.12) равно нулю. Вычислим второе

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda))}{\partial\partial_\xi A_\zeta} &= \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\delta_\mu^\xi\delta_\nu^\zeta - \delta_\mu^\zeta\delta_\nu^\xi)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) + \\ &+ \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\delta_\lambda^\xi\delta_\rho^\zeta - \delta_\lambda^\zeta\delta_\rho^\xi) = 4F^{\xi\zeta}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

В итоге из (5.3.12) мы получаем уравнения движения для свободного электромагнитного поля

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.5) \quad \boxed{\text{Mfree}}$$

В действие (5.4.3) можно добавить взаимодействие с внешним 4-током

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (5.4.6) \quad \boxed{\text{current}}$$

который подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \iff \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0. \quad (5.4.7) \quad \boxed{\text{contin}}$$

Само действие приобретет вид

$$S_{EM}[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x A_\mu J^\mu. \quad (5.4.8) \quad \boxed{\text{EMint}}$$

Проверьте самостоятельно, что это действие является калибровочно инвариантным, и выполнено это в силу уравнения непрерывности (5.4.7). Из него следуют уравнения движения

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (5.4.9) \quad \boxed{4\text{Maxwell}}$$

Воспользовавшись явным видом $F^{\mu\nu}$ (4.3.12), мы получим уравнение, которое соответствует, например, $\nu = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = J^0 \iff \partial_1 E_x + \partial_2 E_y + \partial_3 E_z = \rho \iff \text{div}\vec{E} = \rho. \quad (5.4.10)$$

Это одно из уравнений Максвелла! Тем не менее, в (5.4.9) записано всего 4 уравнения, а из курса Общей Физики вам должно быть известно, что уравнения Максвелла – это 8 уравнений (каждое векторное считается за 3), которые в СГС имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (5.4.11) \quad \text{Max1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.4.12) \quad \text{Max2}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (5.4.13) \quad \text{Max3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.4.14) \quad \text{Max4}$$

Проверьте, что при $\nu = 1, 2, 3$ получающиеся уравнения совпадают с (5.4.12). Недостающие 4 уравнения, которые совпадают с (5.4.13), (5.4.14), в терминах тензора электромагнитного поля имеют следующий вид

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.15) \quad \text{4Maxwell12}$$

Здесь выражение в правой части полностью антисимметрично по индексам μ, ν, ρ , и после простой комбинаторики очевидно, что в (5.4.15) записано всего 4 уравнения. Чтобы выписать эти уравнения явно, вводится **дуальный** (по Ходжу) **тензор электромагнитного поля**

$$(\star F)^{\mu\nu} \equiv \tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \quad (5.4.16)$$

который имеет следующий вид в компонентах

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.17) \quad \text{HE}$$

Уравнения (5.4.15) в терминах дуального тензора электромагнитного поля могут быть записаны в более компактной форме

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.18) \quad \text{4Maxwell13}$$

При $\nu = 0$ эти уравнения сводятся к (5.4.13), а при $\nu = 1, 2, 3$ к (5.4.14) (проверьте!).

Уравнения (5.4.15) (или (5.4.18)) и (5.4.9) называют соответственно **первой и второй парой уравнений Максвелла в четырёхмерной ковариантной формулировке**.

Обратим внимание, что уравнения (5.4.15) не были получены из принципа наименьшего действия. Так откуда же они взялись? Оказывается, что если выразить тензор электромагнитного поля через 4-потенциал (4.3.9), то уравнения (5.4.15) является тождеством

$$\partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv 0. \quad (5.4.19)$$

В курсе дифференциальной геометрии доказывается лемма (лемма Пуанкаре), которая утверждает, что если антисимметричный тензор подчиняется условию (5.4.15), то он может быть (локально) представлен в виде (4.3.9) (вам понадобится условие (5.4.15) при

решении задачи 16). Другими словами, уравнения Максвелла устроены таким образом, что могут быть переформулированы в терминах 4-потенциала. Достоинством этой переформулировки, помимо очевидной Лоренц-ковариантности, является то, что нам нужно решить всего 4 уравнения (5.4.9) (уравнения (5.4.15) решены автоматически), а не 8 исходных уравнений (5.4.11)-(5.4.14). Кроме того, вы столкнетесь с большими трудностями в попытках написать действие для электромагнитного поля в терминах полей \vec{E} и \vec{H} , а без последнего не выйдет перейти к Гамильтоновой формулировке и как следствие к квантовой версии.

5.5 Калибровки и степени свободы

gaugeFix

Мы выяснили, что от полей \vec{E} и \vec{H} можно перейти к более фундаментальному объекту – 4-потенциалу A_μ и для решения задачи об конфигурации электромагнитного поля нужно решить уравнения (5.4.9). Тем не менее, нам уже известно, что решив (5.4.9), мы не найдем 4-потенциал однозначным образом, а лишь с точностью до калибровочных преобразований (5.2.1). Было бы здорово перейти от формулировки в терминах 4-потенциала A_μ к формулировке в терминах соответствующих классов эквивалентности $[A_\mu]$ (см. раздел 5.2). Для этого на 4-потенциал накладывают условия (чаще всего это алгебраические или дифференциальные условия), которые бы исключали возможность изменить выражение для 4-потенциала с помощью калибровочного преобразования (5.2.1). Эту процедуру называют **наложением** или **фиксацией калибровки**. Заметим, что никто не пытается накладывать какие-либо условия на 4-потенциал, после того как уравнения (5.4.9) уже были решены. На практике калибровку фиксируют еще до того, как приступили к решению уравнений Максвелла. Тонкое место заключается в том, что нужно наложить такие условия $G(A_\mu) = 0$, фиксирующие калибровку, чтобы множество решений этих условий включало в себя и решение уравнений Максвелла (5.4.9)³. Условия $G(A_\mu)$, наложение которых приводит к тому, что у уравнений Максвелла (5.4.9) для 4-потенциала существует лишь единственное решение, называют **истинными** или **физическими калибровками**. Тут есть плохая новость: зафиксировать калибровку, сохраняя при этом явную Лоренц-ковариантность, принципиально невозможно (теорема Померанчука). Тем не менее, накладывая Лоренц-ковариантные условия, можно сузить класс скалярных функций, участвующих в калибровочном преобразовании.

Одним из таких условий является популярное **условие Лоренца**⁴

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.5.1) \quad \text{Lorentz}$$

Найдем **остаточный калибровочный произвол**, т.е. скалярные функции f из (5.2.1), которые не «испортят» (5.5.1), но изменят выражения для 4-потенциала. Выполним калибровочное преобразование для потенциала A_μ , удовлетворяющего (5.5.1), с некоторой скалярной функцией f и потребуем, чтобы условие (5.5.1) было выполнено и для преоб-

³Имеется ввиду, что от 4-потенциала можно потребовать, например, $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Это условие очевидно фиксирует произвол в калибровочные преобразования, но описать все многообразие электромагнитных явлений таким 4-потенциалом не выйдет.

⁴Очень часто это выражение называют калибровкой Лоренца, но калибровкой оно, естественно, не является.

разованного 4-потенциала

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0 \implies \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \implies \square f = 0. \quad (5.5.2) \quad \text{gaugeAmb}$$

Повторим еще раз то же самое, но немного другими словами. Что же мы пытались сделать? Наложив условие (5.5.1), мы хотели исключить возможность менять выражения для 4-потенциала калибровочными преобразованиями (5.2.1). Оказалось, что по полю A_μ мы калибровочным преобразованием смогли построить другое поле A'_μ , которое также решает (5.5.1). Но из всех возможных скалярных функций только решения волнового уравнения не «портят» условие Лоренца (см. (5.5.2)). Если угодно, то шарик из рисунка 5.1 стал меньше, но все еще не стал точкой.

Из-за того что 4-потенциал подвержен калибровочным преобразованиям, то очевидно, чтобы задать электромагнитное поле, нужно меньшее число функций, чем 4. Найдем, какое количество функций однозначно определяют электромагнитное поле в пустоте. Нам нужно решить уравнение (5.4.5), которое с учетом условия Лоренца переходит в

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \implies \square A^\nu = 0. \quad (5.5.3)$$

Мы уже решали такие уравнения, когда изучали эффект Доплера, поэтому сразу выпишем решение

$$A_\mu(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) \tilde{A}_\mu(k). \quad (5.5.4)$$

Здесь функции $\tilde{A}_\mu(k)$ пока произвольны. Условие Лоренца частично ограничивает эту свободу

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \iff \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) k^\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0 \implies k^\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0. \quad (5.5.5)$$

Т.е. функции $\tilde{A}(k)$ должны удовлетворять так называемому условию **4-поперечности**. Из исходного набора в четыре произвольные функции осталось три. Остаточный калибровочный произвол при наложенном условии Лоренца – это функции, решающие волновое уравнение

$$f(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) \tilde{f}(k). \quad (5.5.6)$$

Здесь $\tilde{f}(k)$ – произвольная функция. Выполнив калибровочное преобразование с такой функцией, мы можем полностью исключить одну из компонент 4-потенциала, обычно выбирают временную. Действительно,

$$A_0(x) + \partial_0 f(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) (\tilde{A}_0(k) + ik_0 \tilde{f}(k)) = 0 \quad \text{if} \quad \tilde{A}_0(k) + ik_0 \tilde{f}(k) = 0. \quad (5.5.7)$$

Поскольку $\tilde{f}(k)$ может быть выбрана любой, то может быть выбрана и такой, чтобы решать уравнение выше.

В итоге на свободное электромагнитное поле могут быть наложены два условия:

$$A_0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (5.5.8)$$

Второе условие является следствием условия Лоренца после обнуления временной компоненты 4-потенциала. Т.е. из четырех исходных степеней свободы остались только две, которые и соответствуют двум поляризациям электромагнитной волны.

Лекция 6

12 октября 2022

Lec6

6.1 Инварианты поля, 4-вектор тока

На предыдущей лекции мы рассмотрели два кандидата на роль Лагранжиана для свободного электромагнитного поля (5.4.1). Несмотря на то что лишь один из них приводил к нетривиальным уравнениям движения, оба являются скалярами по отношению к преобразованиям собственной ортохронной группы Лоренца¹ (см. Лекцию 2). Если воспользоваться явным представлением через \vec{E} и \vec{H} для $F^{\mu\nu}$ (4.3.12) и $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (5.4.17), то мы получим

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2(x) - \vec{H}^2(x)), \quad \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4(\vec{E}(x), \vec{H}(x)). \quad (6.1.1) \quad \text{invEH}$$

В случае однородных стационарных полей зависимость от координат пространства времени естественно тривиализуется. В этом случае из формул (6.1.1) можно узнать, существует ли система отсчета, в которой полностью отсутствует поле \vec{E} или \vec{H} , например. Чтобы найти скорость этой системы отсчета, полезны следующие формулы для преобразования полей при переходе в движущуюся систему отсчета

$$\vec{E}' = (\vec{E}, \vec{n})\vec{n} + \frac{[\vec{n}, [\vec{E}, \vec{n}]] + [\vec{v}, \vec{H}]}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad (6.1.2) \quad \text{Eprime}$$

$$\vec{H}' = (\vec{H}, \vec{n})\vec{n} + \frac{[\vec{n}, [\vec{H}, \vec{n}]] - [\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad (6.1.3) \quad \text{Hprime}$$

где $\vec{n} = \vec{v}/|\vec{v}|$ и $c = 1$. Сами формулы (6.1.2) и (6.1.3) следуют из закона преобразования тензора электромагнитного поля при переходе в другую систему отсчета (см. (1.1.20))

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}, \quad (6.1.4) \quad \text{Ftensor}$$

а матрицы бустов для произвольного направления скорости вы найдете, решив задачу 1. Закон преобразования (6.1.4) можно также получить из закона преобразования 4-потенциала (1.1.10) при переходе в другую систему отсчета и правила дифференцирования сложной функции (для преобразования производных).

¹Не только скаляры являются инвариантами. Например, δ^μ_ν также является инвариантом! В этом свете можно также рассмотреть формулу $F^{\mu\rho}\tilde{F}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu(\vec{E}, \vec{H})$.

Также на предыдущей лекции был введен 4-вектор тока (5.4.6). Его закон преобразования просто постулировался. Функция плотности заряда для точечной частицы может быть представлена в виде

$$\rho(t, \vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad (6.1.5)$$

где e – величина заряда точечной частицы, $\vec{r}_0(t)$ – функция, определяющая ее траекторию движения. Заметим, что выражение

$$\rho(t, \vec{r}) d^3x \quad (6.1.6)$$

является инвариантом относительно преобразований Лоренца, поскольку заряд частицы не может зависеть от выбора системы отсчета. Умножим предыдущее выражение на $dx^\mu(t)$, где $x^\mu(t)$ – функция, описывающая положение частицы в пространстве времени, в итоге получим

$$\rho(t, \vec{r}) d^3x dx^\mu(t). \quad (6.1.7)$$

Последнее выражение по построению является 4-вектором. Его также можно представить в виде

$$\rho(t, \vec{r}) dt d^3x \frac{dx^\mu(t)}{dt}, \quad (6.1.8)$$

где мера интегрирования $dt d^3x$ является Лоренц-инвариантной, так как преобразуется умножением на модуль Якобиана, который равен единице для преобразований Лоренца. Следовательно величина $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$ является 4-вектором относительно преобразований Лоренца, которую далее будем называть **4-вектором плотности тока**

$$J^\mu := \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (6.1.9)$$

Все предыдущие рассуждения без труда обобщаются на случай нескольких частиц просто сложением 4-векторов плотностей тока для каждой из частиц.

На предыдущей лекции мы требовали от 4-вектора плотности тока (далее будем писать просто 4-тока для краткости), чтобы он был решением уравнения непрерывности. В качестве несложного домашнего упражнения предлагается проверить, что 4-ток одной точечной частицы

$$J^\mu = \begin{pmatrix} e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \\ e\dot{\vec{r}}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \end{pmatrix} \quad (6.1.10)$$

pointCur

удовлетворяет уравнению непрерывности (5.4.7).

Мы считаем, что компоненты 4-тока на границе обращаются в ноль, т.е. в нашу Вселенную откуда-нибудь извне не поступают заряженные частицы и их нет на границе нашей Вселенной. Последнее дает возможность утверждать, что заряд всей Вселенной есть величина постоянная (и конечная). Его можно вычислить по формуле

$$Q := \int d^3x J^0. \quad (6.1.11)$$

Qconserved

Покажем, что это действительная сохраняющаяся величина в силу уравнения непрерывности

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 J^0 = - \int d^3x \partial_i J^i \equiv - \int d^3x \operatorname{div} \vec{J} = - \int_{S_2^\infty} (d\vec{S}, \vec{J}) = 0. \quad (6.1.12)$$

Последнее равенство справедливо в силу нашего предположения о том, что заряженные частицы не приходят в нашу Вселенную, т.е. $\vec{j}|_{S_2^\infty} = 0$. По этой причине 4-ток, удовлетворяющий $\partial_\mu J^\mu$, часто называют **сохраняющимся**, так как из него следуют законы сохранения. По этой же причине уравнение (5.4.7) также называют **условием сохранения**.

6.2 Калибровочная инвариантность, совместность и уравнение непрерывности

На предыдущей лекции мы строили действие для электромагнитного поля, требуя от него помимо прочего еще и калибровочную инвариантность. Покажем, что слагаемое

$$S_{EM\,int}[A_\mu] = - \int d^4x A_\mu J^\mu, \quad (6.2.1)$$

отвечающее за взаимодействие электромагнитного поля с внешним источником, является калибровочно инвариантным. Выполним калибровочное преобразование (5.2.1), тогда эта часть действия, соответственно, преобразуется в

$$S_{EM\,int}[A_\mu + \partial_\mu f] = - \int d^4x A_\mu J^\mu - \int d^4x \partial_\mu f J^\mu. \quad (6.2.2)$$

Требование калибровочной инвариантности заключается в том, чтобы второе слагаемое обращалось в ноль. Если внешний 4-ток подчинен уравнению непрерывности, то это слагаемое можно представить как полную производную и проинтегрировать по частям

$$- \int d^4x \partial_\mu f J^\mu = - \int d^4x \partial_\mu (f J^\mu) = - \int_{\partial M} d\Sigma^\mu f J_\mu = 0, \quad (6.2.3)$$

где предполагается, что $J^\mu|_{\partial M} = 0$. Таким образом, требование калибровочной инвариантности действия фактически накладывает на внешний ток условие сохранения (5.4.7).

Сохранение тока является необходимым условием того, чтобы уравнения Максвелла (5.4.9) были разрешимы. Покажем, что если условие (5.4.7) не выполнено, то уравнения (5.4.9) противоречивы. Действительно, если на уравнения подействовать производной ∂_ν и выполнить свертку по индексу ν , то получим

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu. \quad (6.2.4)$$

Здесь левая часть равна нулю, как свертка симметричного тензора $\partial_\nu \partial_\mu$ с антисимметричным $F^{\mu\nu}$. В итоге мы имеем следствие из уравнений Максвелла

$$0 = \partial_\nu J^\nu. \quad (6.2.5)$$

Т.е. для того, чтобы у уравнений Максвелла (5.4.9) существовало решение, условие сохранения 4-тока (5.4.7) является **необходимым**.

Таким образом, потребовав калибровочную инвариантность действия, мы получили непротиворечивые уравнения движения. Ниже на примере так называемой скалярной электродинамики мы покажем, как из требования калибровочной инвариантности может быть построено совместное взаимодействие (т.е. непротиворечивые уравнения движения) между комплексным скалярным полем и электромагнитным полем.

6.3 Скалярная электродинамика

Все наблюдаемые частицы являются возбуждениями квантовых полей. В этом свете построить электромагнитное взаимодействие с внешним сохраняющимся током недостаточно. Этот 4-ток также должен быть сам устроен из полей. Простейшей (иногда ее называют игрушечной) моделью, в которой можно построить такое взаимодействие, является скалярная электродинамика – теория, описывающая взаимодействие комплексного скалярного поля с электромагнитным. Строить эту теорию мы будем методом проб и ошибок. Как и во все предыдущие разы начнем со свободной теории

$$S_{free}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.1) \quad \boxed{\text{freeAfree}}$$

Здесь первое слагаемое описывает свободное электромагнитное поле, а второе свободное комплексное скалярное поле. Получим уравнения движения, которые следуют из такого действия

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta A_\nu} = 0 \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (6.3.2) \quad \boxed{\text{Afree}}$$

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta \bar{\phi}} = 0 \iff \square \phi = 0, \quad (6.3.3) \quad \boxed{\text{Phifree}}$$

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta \phi} = 0 \iff \square \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.4) \quad \boxed{\text{barPhifree}}$$

Обращаю ваше внимание на то, что нет такого понятия, как *вариационная производная функционала по комплекснозначному полю*. Рассматриваемое здесь комплексное скалярное поле следует понимать как два вещественных

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x), \quad \phi_{1,2}(x) \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) \in \mathbb{C}. \quad (6.3.5)$$

Следуя канонам вариационного исчисления, надо было бы рассматривать вариационные производные $\frac{\delta S_{free}}{\delta \phi_{1,2}} = 0$, считая поля ϕ_1 и ϕ_2 независимыми. Тем не менее, те же уравнения движения можно получить если рассматривать поля ϕ и $\bar{\phi}$, как независимые и как бы вещественнозначные. Здесь уместна аналогия с тем, как вводится производная по комплексному аргументу функции в ТФКП.

Из вида уравнений (6.3.2)-(6.3.4) видно, что действие (6.3.1) описывает три независимых поля: векторное поле A_μ и скалярные поля ϕ и $\bar{\phi}$. Помимо симметрии относительно калибровочных преобразований (5.2.1) действие (6.3.1) также очевидно инвариантно относительно преобразований

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad \bar{\phi}(x) \rightarrow \bar{\phi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\phi}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6.3.6) \quad \boxed{\text{global}}$$

Подчеркнем, что здесь α – это просто константа. Такого рода симметрии, параметры которых не являются функциями пространства времени, называют **глобальными**. Тем не менее, это симметрия действия с некоторым непрерывным параметром, а по теореме Нётер такой симметрии должны отвечать законы сохранения. Соответствующий сохраняющийся 4-ток имеет вид

$$J^\mu = \bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.7) \quad \boxed{\text{U(1)}}$$

Систематическая процедура, которая позволяет получать сохраняющиеся токи из симметрий полевых систем, будет изложена на следующей лекции. Пока лишь убедимся, что этот 4-ток сохраняющийся в силу уравнений движения

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi + \bar{\phi} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \phi \partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = \bar{\phi} \square \phi - \phi \square \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.8)$$

По аналогии с (5.4.8) попробуем построить действие для взаимодействующей теории в виде

$$S_{guess}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - A_\mu (\bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}) \right). \quad (6.3.9) \quad \boxed{\text{Sguessed}}$$

Из этого действия будут уже следовать другие уравнения движения

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta A_\nu} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\phi} \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \bar{\phi}, \quad (6.3.10) \quad \boxed{\text{Aguess}}$$

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta \bar{\phi}} \iff \square \phi + \partial_\mu (A^\mu \phi) + A_\mu \partial^\mu \phi = 0, \quad (6.3.11) \quad \boxed{\text{fguess}}$$

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta \phi} \iff \square \bar{\phi} - \partial_\mu (A^\mu \bar{\phi}) - A_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.12) \quad \boxed{\text{barfguess}}$$

Проверим, сохраняется ли ток из правой части (6.3.10) в силу уравнений (6.3.11) и (6.3.12)

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}) &= \bar{\phi} \square \phi - \phi \square \bar{\phi} = -\bar{\phi} (\partial_\mu (A^\mu \phi) + A_\mu \partial^\mu \phi) - \phi (\partial_\mu (A^\mu \bar{\phi}) + A_\mu \partial^\mu \bar{\phi}) = \\ &= -2\partial_\mu (\phi \bar{\phi} A^\mu) \neq 0. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Т.е. наша догадка (6.3.9) приводит к потенциально противоречивым уравнениям.

Решить задачу о взаимодействии комплексного скалярного поля и электромагнитного можно, если сделать глобальную симметрию (6.3.6) локальной, т.е. теперь будем рассматривать преобразования

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad \bar{\phi}(x) \rightarrow \bar{\phi}'(x) = e^{-i\alpha(x)} \bar{\phi}(x). \quad (6.3.14) \quad \boxed{\text{local}}$$

Такие преобразования уже не являются симметриями действия (6.3.1). Действительно, вычислим производную от преобразованного поля

$$\partial_\mu (\phi(x) e^{i\alpha(x)}) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \phi(x) + i \partial_\mu (\alpha(x)) \phi(x)). \quad (6.3.15)$$

Для постоянной функции α справедливо следующее

$$\partial_\mu (e^{i\alpha} \phi(x)) = e^{i\alpha} \partial_\mu \phi(x). \quad (6.3.16)$$

Мы хотим сохранить это свойство, но уже для функции $\alpha(x)$, зависящей от точки пространства времени. Добиться этого можно, если перейти от обычной частной производной ∂_μ к так называемой **ковариантной (длинной) производной** \mathcal{D}_μ , от которой мы будем требовать следующее

$$\mathcal{D}'_\mu \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \phi(x). \quad (6.3.17) \quad \boxed{\text{covariant}}$$

Обратите внимание, что и сама ковариантная производная меняется при преобразованиях поля, на которое действует. Определяется она следующим образом

$$\mathcal{D}_\mu \phi(x) := \partial_\mu \phi(x) - iA_\mu(x)\phi(x). \quad (6.3.18) \quad \boxed{\text{covDef}}$$

Для того чтобы свойство (6.3.17) было выполнено, нужно потребовать, чтобы поле A_μ преобразовывалось по правилу

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha. \quad (6.3.19) \quad \boxed{\text{alpha}}$$

Т.е. поле A_μ должно преобразовываться, как и положено калибровочному полю (5.2.1). Только теперь скалярная функция для калибровочного преобразования должна совпадать с функцией, которая участвует в преобразованиях полей ϕ и $\bar{\phi}$. Проверим, что свойство (6.3.17) выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu \phi' &= \partial_\mu \phi' - iA'_\mu \phi' = e^{i\alpha}(\partial_\mu \phi + i\partial_\mu \alpha \phi) - i(A_\mu + \partial_\mu \alpha)e^{i\alpha} \phi = e^{i\alpha}(\partial_\mu \phi - iA_\mu \phi) = \\ &= e^{i\alpha} \mathcal{D}_\mu \phi. \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

Аналогично (6.3.18) определим действие ковариантной производной на поле $\bar{\phi}$

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\phi} := \partial_\mu \bar{\phi} + iA_\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.21)$$

Обращаю ваше внимание, что ковариантная производная «знает», на что она действует. Для таким образом определенной ковариантной производной справедливо соотношение, аналогичное (6.3.17)

$$\mathcal{D}'_\mu \bar{\phi}' = e^{-i\alpha} \mathcal{D}_\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.22)$$

С помощью ковариантных производных выпишем действие

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}^\mu \bar{\phi} \right), \quad (6.3.23) \quad \boxed{\text{ScalarQED}}$$

которое инвариантно относительно локальных (калибровочных) преобразований

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}' = e^{-i\alpha} \bar{\phi}. \quad (6.3.24)$$

Если раскрыть выражение для ковариантных производных, то действие имеет вид

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi - iA_\mu \phi)(\partial^\mu \bar{\phi} + iA_\mu \bar{\phi}) \right). \quad (6.3.25)$$

Из этого действия получаются следующие уравнения движения

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta A_\nu} = 0 \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = -i(\bar{\phi}(\partial^\nu \phi - iA^\nu \phi) - \phi(\partial^\nu \bar{\phi} + iA^\nu \bar{\phi})) \equiv -i(\bar{\phi} \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \bar{\phi}), \quad (6.3.26) \quad \boxed{\text{Afull}}$$

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta \bar{\phi}} = 0 \iff (\partial_\mu - iA_\mu)(\partial^\mu - iA^\mu)\phi \equiv \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = 0, \quad (6.3.27)$$

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta \phi} = 0 \iff (\partial_\mu + iA_\mu)(\partial^\mu + iA^\mu)\bar{\phi} \equiv \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.28)$$

Проверим наконец, что ток в правой части (6.3.26) сохраняется в силу этих уравнений движения

$$\begin{aligned}\partial_\nu(\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi}) &= \partial_\nu\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}\partial_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\partial_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - \partial_\nu\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \\ &= (\partial_\nu + iA_\nu)\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}(\partial_\nu - iA_\nu)\mathcal{D}^\nu\phi - \phi(\partial_\nu + iA_\nu)\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - (\partial_\nu - iA_\nu)\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \\ &= \mathcal{D}_\nu\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - \mathcal{D}_\nu\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \bar{\phi}\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = 0. \quad (6.3.29)\end{aligned}$$

Таким образом, локализуя симметрию, т.е. разрешая параметрам преобразований быть функциями пространства времени, мы получили совместные уравнения движения.

Несмотря на то что, с одной стороны, скалярная электродинамика проще спинорной в смысле релятивистских законов преобразования полей, с другой же стороны, она сложнее в смысле квантового анализа.

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} + \underbrace{iA_\mu(\bar{\phi}\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\bar{\phi})}_{cubic} + \underbrace{A_\mu A^\mu\phi\bar{\phi}}_{quartic} \right). \quad (6.3.30)$$

В скалярной электродинамике помимо кубических вершин, которые есть и в спинорной, присутствуют еще и четвертичные. Т.е. при вычислении рассеяния электрона на фотоне (эффект Комптона) в древесном приближении вклад дадут уже две диаграммы вместо одной, как в спинорной электродинамике.

Ниже еще раз опишем процедуру, которая приводит к совместным взаимодействиям полей материи и калибровочных полей спина 1:

- Мы начинаем с действия для свободных полей материи, которое уже обладает некоторыми глобальными симметриями. Например, скалярных N скалярных полей

$$\int d^4x \frac{1}{2}\delta_{IJ}\partial_\mu\phi^I\partial^\mu\phi^J, \quad I, J = 1, \dots, N. \quad (6.3.31)$$

Это действие очевидно инвариантно относительно глобальных преобразований типа

$$\phi^I \rightarrow \phi'^I = \mathbf{O}^I{}_J \phi^J, \quad (6.3.32) \quad \boxed{\mathbf{O}(N)}$$

где $\mathbf{O}^I{}_J$ – матрица ортогонального преобразования в N измерениях, т.е. матрица, принадлежащая группе $O(N)$.

- Далее мы локализуем эту $O(N)$ симметрию, разрешая матрицам $\mathbf{O}^I{}_J$ теперь быть функциями пространства времени

$$\mathbf{O}^I{}_J \rightarrow \mathbf{O}^I{}_J(x). \quad (6.3.33)$$

Чтобы эти новые локальные преобразования были симметриями действия, нужно перейти от обычной частной производной к ковариантной

$$\mathcal{D}_\mu\phi^I = \partial_\mu\phi^I - iA_\mu{}^I{}_J\phi^J, \quad (6.3.34)$$

где в отличие от скалярной электродинамики калибровочное поле $A_\mu{}^I{}_J$ уже является матричнозначным. Выведите для него закон преобразования, аналогичный (6.3.19), исходя из того, что должно быть выполнено

$$\mathcal{D}'_\mu\phi'^I = \mathbf{O}^I{}_J(x)\mathcal{D}_\mu\phi^J. \quad (6.3.35)$$

Таким образом, имеем действие для скалярных полей, которое инвариантно уже относительно локальных преобразований $\phi^I \rightarrow \phi'^I = \mathcal{O}^I_J(x)\phi^J$

$$\int d^4x \frac{1}{2} \delta_{IJ} \mathcal{D}_\mu \phi^I \mathcal{D}^\mu \phi^J. \quad (6.3.36)$$

- Осталось к получившемуся действию добавить часть, ответственную за динамику калибровочного поля $A_\mu^I{}_J$. Для этого вводится тензор $F_{\mu\nu}^I{}_J$, который является обобщением формулы (4.3.9)

$$F_{\mu\nu}^I{}_J := \partial_\mu A_\nu^I{}_J - \partial_\nu A_\mu^I{}_J - i A_\mu^I{}_K A_\nu^K{}_J + i A_\nu^I{}_K A_\mu^K{}_J \quad (6.3.37)$$

(заинтересованного читателя отправляем к специализированной литературе, где обсуждаются теории Янга-Миллса. Например, Славнов, Фаддеев «Введение в квантовую теорию калибровочных полей»). И аналогично скалярной электродинамике действие для модели из N скалярных полей, взаимодействующих с калибровочным полем спина 1, имеет вид

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I{}_J F^{\mu\nu J}{}_I + \frac{1}{2} \delta_{IJ} \mathcal{D}_\mu \phi^I \mathcal{D}^\mu \phi^J \right). \quad (6.3.38)$$

По описанной выше схеме строится сильное взаимодействие между кварками, которое инвариантно относительно локальной $SU(3)$ симметрии. Т.е. в преобразованиях типа (6.3.32) соответствующие матрицы принадлежат группе специальных унитарных матриц размерности 3×3 .

Лекция 7

19 октября 2022

7.1 Теорема Нётер для полевых систем

В предыдущей лекции было показано, что токи, удовлетворяющие условию сохранения (5.4.7), позволяют выписать сохраняющиеся во времени заряды (6.1.11). У формул (5.4.7) и (6.1.11) существует естественное обобщение

$$\partial_\mu J^\mu_A = 0, \quad (7.1.1)$$

$$Q_A := \int d^3x J^0_A, \quad (7.1.2)$$

где индекс A отвечает конкретной симметрии действия. Например, теории, которые мы рассматриваем, обладают трансляционной симметрией по времени и по трем пространственным координатам. Каждой из этих симметрий будет соответствовать *свой* сохраняющийся ток и *свои* сохраняющиеся заряды.

Мы будем рассматривать следующие инфинитезимальные! преобразования симметрий

$$\tilde{\delta}x^\mu = x'^\mu - x^\mu, \quad (7.1.3) \quad \boxed{\text{dx}}$$

$$\tilde{\delta}\Phi^\Upsilon = \Phi'^\Upsilon(x') - \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.4) \quad \boxed{\text{dPhi}}$$

Здесь x' и x – это координаты одной и той же точки на многообразии, но в разных картах. Под Φ'^Υ мы понимаем любые преобразования над полями, которые являются симметрией действия. Если действие рассматриваемой полевой системы устроено, как (5.3.5), то преобразования (7.1.3) и (7.1.4) исчерпывают все возможные преобразования, которые могут являться симметрией действия. Мы также будем различать **полную вариацию функции** $\tilde{\delta}\Phi^\Upsilon(x')$ и **вариацию формы функции** $\delta\Phi^\Upsilon(x)$, которая определяется как

$$\delta\Phi^\Upsilon(x) := \Phi'^\Upsilon(x) - \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.5) \quad \boxed{\text{dForm}}$$

Если действие обладает симметрией типа (7.1.3), (7.1.4), то выполнено следующее

$$\tilde{\delta}S[\Phi^\Upsilon] := \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L} \left(\Phi'^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi'^\Upsilon(x') \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x) \right) = 0, \quad (7.1.6) \quad \boxed{\text{deltaS}}$$

где Σ – произвольная область в \mathbb{R}^4 , а Σ' получается из нее преобразованием координат (7.1.3). Именно это в литературе понимается, когда говорят о симметрии полевого действия. Доказательство теоремы Нётер конструктивно, т.е. мы в явном виде получим сохраняющийся ток, отвечающий конкретной симметрии. Для этого разность (7.1.6) будет приведена к виду

$$\int_{\Sigma} d^4x \partial_{\nu} J^{\nu}(\Phi^{\Upsilon}, \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}) = 0 \implies \partial_{\nu} J^{\nu}(\Phi^{\Upsilon}, \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}) = 0. \quad (7.1.7) \quad \text{currentN}$$

Последнее следствие верно в силу произвольности области Σ .

Несмотря на то что выражения (7.1.3) и (7.1.4) внешне напоминают вариации, которые использовались при получении уравнений движения (см. раздел 5.3), они ими **НЕ** являются! Про вариации полей при получении уравнений движений мы предполагали, что они обращаются в ноль на границе нашего многообразия, инфинитезимальные преобразования симметрии (7.1.4) таким свойством априори не обладают. Кроме того, интегрирование ведется по произвольной области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$, поэтому при получении (7.1.7) мы не вправе отбрасывать граничные слагаемые.

1.1 Глобальные внутренние (цветные) симметрии

Перед тем как рассмотреть общий случай преобразований (7.1.3), (7.1.4) мы рассмотрим сперва так называемые внутренние симметрии, которые также называют цветными или изотопическими. Это симметрии, которые не связаны с преобразованием координат, т.е.

$$\tilde{\delta}x = 0, \quad (7.1.8) \quad \text{Predx}$$

а преобразования полей упрощаются до вариации формы функции

$$\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x') \rightarrow \delta\Phi^{\Upsilon}(x) = \Phi'^{\Upsilon}(x) - \Phi^{\Upsilon}(x). \quad (7.1.9) \quad \text{PredPhi}$$

Важное отличие вариаций $\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}$ от $\delta\Phi^{\Upsilon}$ заключается в том, что только последняя коммутирует с дифференцированием, потому что вообще не вовлекает какую-либо замену координат (подробнее об этом будет позже).

Пусть действие симметрично относительно (7.1.8), (7.1.9), тогда, подставив преобразования в (7.1.6), мы получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \delta\Phi^{\Upsilon}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta\Phi^{\Upsilon}(x) \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^{\Upsilon}} \delta\Phi^{\Upsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\mu} \delta\Phi^{\Upsilon} \right). \end{aligned} \quad (7.1.10) \quad \text{Variation}$$

Еще раз подчеркнем, что несмотря на очевидное сходство (5.3.6) и (7.1.10) смысл $\delta\Phi^{\Upsilon}$, входящего в выражения, разный. В (5.3.6) это были все возможные локальные изменения полей, которые обращались в ноль на границе многообразия, в (7.1.10) $\delta\Phi^{\Upsilon}$ – это инфинитезимальные преобразования симметрии действия, которые вовсе не обязаны равняться

нулю на границе многообразия. Кроме того, в (5.3.6) интегрирование велось по всему \mathbb{R}^4 , а в (7.1.10) по произвольной области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$. Законы сохранения, следующие из теоремы Нётер, выполнены только на уравнениях движения (5.3.12). Воспользовавшись ими, мы приведем (7.1.10) к виду

$$\int_{\Sigma} d^4x \left(\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \right) \delta \Phi^{\Upsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\mu} \delta \Phi^{\Upsilon} \right) = \int_{\Sigma} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \delta \Phi^{\Upsilon} \right) = 0 \quad (7.1.11)$$

Т.е. если действие обладает симметрией типа (7.1.8), (7.1.9), то из этой симметрии следует сохраняющийся ток

$$\mathfrak{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \delta \Phi^{\Upsilon}. \quad (7.1.12) \quad \text{colorCurr}$$

В качестве иллюстративного примера к полученному результату рассмотрим безмассовое комплексное скалярное поле из предыдущей лекции

$$\int d^4x \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \bar{\phi}. \quad (7.1.13)$$

Это действие, в смысле (7.1.6), обладает симметрией относительно преобразования полей (6.3.6). Инфинитезимальная версия этих преобразований имеет вид

$$\delta \phi(x) = i\alpha \phi(x), \quad \delta \bar{\phi}(x) = -i\alpha \bar{\phi}(x), \quad (7.1.14) \quad \text{complex}$$

а соответствующие производные Лагранжиана

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} = \partial^{\mu} \bar{\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\phi}} = \partial^{\mu} \phi. \quad (7.1.15)$$

Подставив полученные результаты в (7.1.12), мы получим сохраняющийся ток, отвечающий симметрии (6.3.6)

$$\mathfrak{J}^{\mu} = i\alpha (\phi \partial^{\mu} \bar{\phi} - \bar{\phi} \partial^{\mu} \phi). \quad (7.1.16)$$

Здесь α – инфинитезимальный постоянный (в том смысле, что не является функцией пространства времени) параметр симметрии, на который можно сократить. В литературе вы встретите, как правило, уже сокращенное выражение, в которое не входят параметры симметрии

$$J^{\mu} = -i(\bar{\phi} \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \bar{\phi}). \quad (7.1.17)$$

Это выражение совпадает с (6.3.7), введенным на прошлой лекции. Однако на прошлой лекции мы проверяли, что этот ток сохраняется в силу уравнений движения. Сейчас же в этом нет необходимости, ток, построенный в этой лекции, является сохраняющимся по построению.

1.2 Общий случай

Рассмотрим общий случай преобразований (7.1.3), (7.1.4), которые являются симметрией действия в смысле (7.1.6). Обращаю ваше внимание, что когда в преобразование симметрии вовлечены еще и замены координат, то

$$\partial_{\mu} \tilde{\delta} \Phi^{\Upsilon}(x) \neq \tilde{\delta} \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}(x). \quad (7.1.18)$$

В этом смысле преобразованный Лагранжиан нельзя! представить в виде

$$\mathcal{L}\left(\Phi'^{\Upsilon}(x'), \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \Phi'^{\Upsilon}(x')\right) \neq \mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right). \quad (7.1.19) \quad \boxed{\text{guessL}}$$

Поясним подробнее, что имеется ввиду. Вся трудность возникает из слагаемого с производной, и мы хотим узнать, какой вид имеет малая добавка к этому слагаемому после выполнения преобразований (7.1.3), (7.1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \Phi'^{\Upsilon}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ &= \frac{\partial(x'^{\nu} - \tilde{\delta}x^{\nu})}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \left(\delta_{\mu}^{\nu} - \frac{\partial \tilde{\delta}x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) - \underbrace{\frac{\partial \tilde{\delta}x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Phi^{\Upsilon}(x)}_{\text{connection}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x). \end{aligned} \quad (7.1.20) \quad \boxed{\text{connection}}$$

Напоминаю, что мы работаем только с инфинитезимальными преобразованиями: сохранены слагаемые только нулевого и первого порядков. Как мы видим из (7.1.20), честный подсчет приращения аргумента Лагранжиана, связанного с производными полей, будет отличен от наивной догадки (7.1.19). Можно систематически учитывать эту добавку, но на практике действуют иначе: в преобразованном действии

$$\int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi'^{\Upsilon}(x'), \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \Phi'^{\Upsilon}(x')\right) \quad (7.1.21) \quad \boxed{\text{Str}}$$

переходят от координат x' к координатам x . Последнее позволяет свести полную вариацию полей (7.1.4) к вариации формы (7.1.5), а для последней уже справедливо

$$\mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \delta\Phi^{\Upsilon}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta\Phi^{\Upsilon}(x)\right) \quad (7.1.22)$$

поскольку в это не вовлечена замена координат.

Выполним переход к другим координатам. Для этого нам также надо преобразовать интеграл

$$\int_{\Sigma'} d^4x' = \int_{\Sigma} d^4x \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right|, \quad (7.1.23)$$

где Якобиан с точностью до первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| &= \left| \frac{\partial(x^{\mu} + \tilde{\delta}x^{\mu})}{\partial x^{\nu}} \right| = \left| \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \tilde{\delta}x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \left(\delta_{\mu_0}^0 + \frac{\partial \tilde{\delta}x^0}{\partial x^{\mu_0}} \right) \dots \left(\delta_{\mu_3}^3 + \frac{\partial \tilde{\delta}x^3}{\partial x^{\mu_3}} \right) = \\ &= \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \delta_{\mu_0}^0 \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \delta_{\mu_3}^3 + \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \frac{\partial \tilde{\delta}x^0}{\partial x^{\mu_0}} \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \delta_{\mu_3}^3 + \dots + \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \delta_{\mu_0}^0 \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \frac{\partial \tilde{\delta}x^3}{\partial x^{\mu_3}} = \\ &= 1 + \frac{\partial \tilde{\delta}x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned} \quad (7.1.24)$$

Лагранжиан, пусть и через поля и их производные, но является скалярной функцией пространства времени, и перейти к координатам x можно по формуле

$$\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x + \tilde{\delta}x) = \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (7.1.25)$$

В итоге преобразованное действие (7.1.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left(1 + \frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\mu}\right) \left[\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Сохраняя лишь слагаемые первого порядка, мы его перепишем, как

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi^\Upsilon(x')\right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left[\mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\mu} + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu\right) \mathcal{L}\left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x)\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

Если рассматриваемые преобразования являются симметрией действия (7.1.6), то должно быть выполнено следующее

$$\int_{\Sigma} d^4x \left[\mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) - \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) + \partial_\mu (\tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon)) \right] = 0 \quad (7.1.28)$$

Поскольку часть, связанная с вариацией формы, уже рассматривалась в предыдущем разделе, то приведем лишь окончательный ответ

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta \Phi^\Upsilon + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \right) = 0 \implies \\ & \implies \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta \Phi^\Upsilon + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

GenCurrent

Напоминаю, что последнее следствие верно в силу произвольности области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$. Теперь нам осталось перейти от вариации формы $\delta \Phi^\Upsilon$ к полной вариации, потому что, как правило, именно эти преобразования известны, а вариация формы является лишь вспомогательным инструментом доказательства. Связь между ними из (7.1.4) и (7.1.5) дается формулой

$$\tilde{\delta} \Phi^\Upsilon(x) = \Phi^\Upsilon(x') - \Phi^\Upsilon(x) = \Phi^\Upsilon(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \Phi^\Upsilon(x) - \Phi^\Upsilon(x) = \delta \Phi^\Upsilon(x) + \tilde{\delta}x^\mu \partial_\mu \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.30)$$

После этой подстановки выражение для тока, отвечающего симметрии (7.1.3), (7.1.4), запишем в виде

$$\mathfrak{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} (\tilde{\delta} \Phi^\Upsilon - \tilde{\delta}x^\nu \partial_\nu \Phi^\Upsilon) + \tilde{\delta}x^\mu \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \quad (7.1.31)$$

Слагаемые в этом выражении целесообразно перегруппировать и представить выражение в форме

$$\mathfrak{J}^\mu = \tilde{\delta}x^\nu \left(\delta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\nu \Phi^\Upsilon \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \tilde{\delta} \Phi^\Upsilon. \quad (7.1.32) \quad \text{NcurrentG}$$

Слагаемое в скобках называют **каноническим тензором энергии-импульса**

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu := \delta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\nu \Phi^\Upsilon. \quad (7.1.33) \quad \text{Tcan}$$

Далее мы покажем, что именно этот ток отвечает законам сохранения, связанным с трансляционной инвариантностью пространства времени.

Обращаю ваше внимание на одну тонкость. В выводе сохраняющегося тока по симметрии (7.1.3), (7.1.4) мы использовали уравнения движения, но сами преобразования симметрии должны быть симметриями действия и для полевых конфигураций, которые не дают экстремальность действия¹. В этом смысле в теоретической физике высоких энергий вводят понятия **off-shell** и **on-shell** симметрий, первые являются симметриями для произвольных полевых конфигураций, а вторые – только на уравнениях движения. В контексте этой терминологии мы исследовали off-shell симметрии.

В выводе (7.1.32) мы нигде не уточняли, рассматриваются ли глобальные или локальные симметрии. Напоминаю, что отличие заключается в том, что для первых параметры преобразований не являются функциями пространства времени, в отличие от вторых. Формула (7.1.32) справедлива для любых!

1.3 Трансляционная инвариантность. Тензор энергии-импульса

В предыдущем разделе был рассмотрен случай общих преобразований, которые вообще могут быть симметриями действия. Здесь же мы остановимся на преобразованиях, которые связаны исключительно с заменой координат. В частности, рассмотрим только трансляции, т.е. в качестве (7.1.3) у нас будут выступать

$$\tilde{\delta}x^\mu = Const. \quad (7.1.34) \quad \text{translati}$$

Также мы будем рассматривать преобразования полей (7.1.4), индуцированные исключительно заменой координат (см. формулы (1.1.6), (1.1.10), (1.1.19)). Поскольку мы рассматриваем только постоянные сдвиги (7.1.34), то все матрицы перехода из формул (1.1.10), (1.1.19), (1.1.20) равны единичным

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (x^\mu + \tilde{\delta}x^\mu)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde{\delta}x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \dots = \delta_\nu^\mu, \quad (7.1.35)$$

и у полей преобразуется только аргумент: например, для векторного поля $A^\mu(x)$ справедливо следующее

$$\tilde{\delta}A^\mu(x) = \delta_\nu^\mu A^\nu(x(x')) - A^\mu(x) = A^\mu(x(x')) - A^\mu(x) = 0. \quad (7.1.36)$$

¹В суперсимметричных теориях бывает, что уравнения движения обладают инвариантностью относительно преобразований суперсимметрии, а действие, из которого они были получены, – нет.

Аналогичное верно для тензоров любого ранга и даже спинорных полей. Т.е. для любого набора полей теории, если выполняются исключительно постоянные трансляции, выполнено

$$\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x) = 0. \quad (7.1.37) \quad \boxed{\text{scalar2}}$$

Для этой симметрии ((7.1.34) и (7.1.37)) Нётеровский ток (7.1.32) приобретает вид

$$\mathfrak{J}^{\mu} = \tilde{\delta}x^{\nu} \left(\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\nu} \Phi^{\Upsilon} \right), \quad (7.1.38)$$

который сохраняется при любых значения $\tilde{\delta}x^{\nu}$, а следовательно мы имеем 4 условия сохранения и 4 соответствующих им заряда

$$\partial_{\mu} T_{can}{}^{\mu}{}_{\nu} = 0, \quad Q_{\nu} = \int d^3x T^0{}_{\nu}. \quad (7.1.39) \quad \boxed{\text{conserve}}$$

Далее мы покажем, что заряд Q_0 отвечает энергии рассматриваемой полевой системы, а $Q_{1,2,3}$ – импульсу, отсюда и название тензора, по которому они были получены.

Лекция 8

26 октября 2022

8.1 Тензор энергии-импульса скалярного поля

аларField

На предыдущей лекции мы получили так называемый канонический тензор энергии-импульса, который является сохраняющимся током, отвечающим трансляционной инвариантности действия. Ниже на примере скалярного поля мы оправдаем его название. Действие для свободного вещественного скалярного поля имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (8.1.1)$$

Подставив соответствующие производные в (7.1.33), мы получим

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (8.1.2)$$

Если метрикой поднять индекс ν , то получим

$$T_{can}{}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi. \quad (8.1.3) \quad \text{TcanUP}$$

Из этого выражения видно, что тензор энергии-импульса для скалярного поля является симметричным (относительно перестановки индексов $\mu \leftrightarrow \nu$). Только для скалярных полей процедура получения тензора энергии-импульса через теорему Нётер приводит к симметричному выражению! Ниже мы увидим, что канонический тензор энергии-импульса для электромагнитного поля уже не является симметричным. Рассмотрим $T_{can}{}^{00}$ компоненту

$$T_{can}{}^{00} = \frac{1}{2} (\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi - m^2 \phi^2) - \dot{\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{2} ((\dot{\phi})^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2), \quad (8.1.4)$$

где было использовано следующее сокращенное обозначение

$$(\nabla \phi)^2 := \partial_1 \phi \partial_1 \phi + \partial_2 \phi \partial_2 \phi + \partial_3 \phi \partial_3 \phi. \quad (8.1.5) \quad \text{Tcan00}$$

Вычислим теперь плотность функции Гамильтона (Гамильтониан) для свободного вещественного скалярного поля. По аналогии с механикой Гамильтониан определяется по формуле

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (8.1.6)$$

Прямое вычисление дает следующее выражение

$$\mathcal{H} = (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}((\dot{\phi})^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2). \quad (8.1.7) \quad \boxed{\text{Ham}}$$

Обращаю ваше внимание, что получившееся выражение является положительным, как и ожидалось для плотности функции Гамильтона, кроме того, оно с точностью до общего множителя совпадает с T_{can}^{00} (8.1.5). Это сходство оправдывает название тензора, определенного в (7.1.33), потому как его 00 компонента совпадает с Гамильтонианом, т.е. описывает плотность энергии полевой системы¹. Желющие могут также убедиться в том, что T_{can}^{0i} компоненты отвечают плотностям переносимого полевой системой импульса (см., например, Боголюбов, Ширков «Квантовые поля»).

8.2 Тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля

Мы не просто так рассмотрели сперва простой пример со скалярным полем. Гамильтонов анализ электродинамики является весьма нетривиальной задачей из-за наличия калибровочной инвариантности. В частности, если вычислить канонический импульс, отвечающий A_0 , то получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0 A_0} = 0. \quad (8.2.1)$$

Т.е. электродинамика является системой со связью. Разрешить эту связь, сохраняя при этом явную лоренц-ковариантность, к сожалению, невозможно (см. раздел 5.5 про фиксацию калибровки).

Вычислим по формуле (7.1.33) канонический тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля

$$T_{can}^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{1}{4}\delta_{\nu}^{\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho}\partial_{\nu}A_{\rho}. \quad (8.2.2) \quad \boxed{\text{EMcan}}$$

Если поднять индекс ν

$$T_{can}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho}\partial^{\nu}A_{\rho}, \quad (8.2.3)$$

то получившийся тензор не является симметричным. Его симметричность нужна для построения совместного взаимодействия света с гравитационным полем. Тем не менее, для нас куда важнее, что получившееся выражение не является калибровочно инвариантным, поскольку зависит не только от $F_{\mu\nu}$, но и от A_{μ} . Как мы выяснили в предыдущем разделе, T_{can}^{00} отвечает плотности энергии поля, а это измеримая в эксперименте величина, которая должна быть калибровочно инвариантной!

Определяющим свойством тензора энергии-импульса является то, что он сохраняющий ток $\partial_{\mu}T_{can}^{\mu}{}_{\nu} = 0$, по которому потом могут быть построены сохраняющиеся во времени заряды (интегралы движения). Само выражение для тензора энергии-импульса

¹Подобные прямые аналогии справедливы только для скалярного поля, но мы будем пользоваться и для других полей. Имеется ввиду, что T_{can}^{00} не обязательно является плотностью энергии для произвольной полевой системы.

можно модернизировать, не нарушая при этом условие сохранения. Действительно, если к $T_{can}{}^\mu{}_\nu$ добавить тривиально сохраняющиеся слагаемые

$$\partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu, \quad U^{\mu\rho}{}_\nu = -U^{\rho\mu}{}_\nu, \quad (8.2.4) \quad \text{improv}$$

то условие сохранения не нарушится

$$\partial_\mu (T_{can}{}^\mu{}_\nu + \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu) = \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \partial_\mu \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu = 0, \quad (8.2.5)$$

где на последнем шаге мы воспользовались антисимметричностью $U^{\mu\rho}{}_\nu$ ² по верхним индексам (8.2.4). Т.е. добавки типа (8.2.4) меняют выражение для сохраняющихся токов, но тривиально сохраняются. В этом свете тензором энергии-импульса в литературе называют не только выражение (7.1.33), но и все производные из него, полученные добавлением слагаемых типа (8.2.4). Подчеркнем, что когда говорится о **каноническом** тензоре энергии-импульса, то под этим всегда понимают выражение (7.1.33), которое в случае свободного электромагнитного поля равно (8.2.2). В литературе по теории поля доказывается, что если рассматриваемая полевая система обладает лоренц-инвариантностью, то подобного рода добавками всегда можно перейти от канонического тензора энергии-импульса к симметричному³. Рассмотрим добавку

$$U^{\mu\rho}{}_\nu = -F^{\mu\rho} A_\nu, \quad (8.2.6)$$

тогда

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu - \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = -\frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho (F^{\mu\rho} A_\nu). \quad (8.2.7) \quad \text{preTensor}$$

Напоминаю, что условие сохранения для тока (7.1.39) верно только в том случае, когда поля решают уравнения движения, которые для свободной электродинамики имеют вид $\partial_\rho F^{\mu\rho} = 0$. Последнее позволяет представить (8.2.7) в виде

$$T_{can}{}^\mu{}_\nu - \partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = -\frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho} F_{\nu\rho}. \quad (8.2.8) \quad \text{preTensor}$$

Получившееся выражение является калибровочно инвариантным! Определим тензор энергии импульса для свободного электромагнитного поля в виде

$$T_{EM}{}^\mu{}_\nu := \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F_{\nu\rho}. \quad (8.2.9) \quad \text{EMtensor}$$

Это выражение отличается от (8.2.8) общим знаком, который очевидно никак не влияет на условие сохранения, сделано это для того, чтобы $T_{EM}{}^{00}$ отвечало плотности энергии, а не минус плотности энергии (см. раздел 8.1 про скалярное поле). Если в выражении (8.2.9) поднять индекс ν

$$T_{EM}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho, \quad (8.2.10)$$

²Мне неизвестно какое-то общепринятое название для $U^{\mu\rho}{}_\nu$ в русскоязычной литературе. В ОТФ ФИАН их называют *импрувментами*.

³В литературе по теории гравитации также приводится так называемая процедура Розенфельда, которая сразу приводит в симметричному выражению для тензора энергии-импульса, но которая требует модификации действия. Действие в этой процедуре должно быть инвариантно относительно произвольных гладких замен координат (диффеоморфизмов).

то легко видеть, что получившееся выражение симметрично по индексам μ и ν .

Если рассмотреть конкретные компоненты, в частности

$$T_{EM}^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad T_{EM}^{i0} = [\vec{E}, \vec{H}]^i, \quad (8.2.11)$$

то можно узнать уже знакомые вам из курса Общей Физики выражения для плотности энергии электромагнитного поля и вектора Умова-Пойнтинга соответственно

$$W = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (8.2.12) \quad \boxed{\text{WS}}$$

Условие сохранения $\partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu}$ для $\nu = 0$ имеет вид

$$\partial_\mu T_{EM}^{\mu 0} = 0 \implies \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0. \quad (8.2.13)$$

Последнее уравнение называют **уравнением баланса энергии в отсутствии внешних токов (источников)**.

8.3 Электромагнитное поле с внешними токами

Действие для системы, которую мы будем рассматривать, имеет вид

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \right), \quad (8.3.1)$$

т.е. Лагранжиан уже НЕ является только функцией полей и их производных, но имеет еще и явную зависимость от координат пространства времени

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \underline{J_\mu(x)}). \quad (8.3.2)$$

Появление такой зависимости обусловлено тем, что мы рассматриваем незамкнутую систему. Можно было бы проделать вывод тензора энергии-импульса с учетом этой явной зависимости (см., например, Ицксон, Зюбер «Квантовая теория поля» Том 1). Мы же поступим иначе: мы возьмем тензор энергии-импульса для электромагнитного поля (8.2.9) и продифференцируем его с учетом того, что поля уже подчиняются не свободным уравнениям, а $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$. Естественно, действуя таким образом, мы не получим ноль, но найдем слагаемое, которое стоит добавить для того, чтобы условие сохранения снова было выполнено.

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(\frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} \right) = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} - J^\rho F_{\nu\rho} - F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - J^\rho F_{\nu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\nu\mu} - J^\rho F_{\nu\rho} = \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\rho} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) - J^\rho F_{\nu\rho} = -J^\rho F_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Здесь мы использовали то, что выполнена первая пара уравнений Максвелла. Таким образом, в присутствии внешнего тока выполняется следующий закон сохранения

$$\partial_\mu T_{EM}{}^\mu{}_\nu + J^\rho F_{\nu\rho} = 0. \quad (8.3.4)$$

Если подставить явный вид тензора электромагнитного поля через \vec{E} и \vec{H} (4.3.12) и выражение для тока (5.4.6), то $\nu = 0$ компонента этого уравнения может быть представлена в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + (\vec{j}, \vec{E}) = 0. \quad (8.3.5)$$

Последнее уравнение называют **уравнением баланса энергии с внешними источниками**.

8.4 Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и точечной частицы

Пусть траектория частицы в пространстве времени задается некоторой функцией $y^\mu(s)$, тогда для системы «электромагнитное поле и заряженная частица» можно представить в виде

$$S[A_\mu, y^\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m \int ds - e \int A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} ds. \quad (8.4.1) \quad \boxed{\text{S}_0}$$

Это действие можно эквивалентно переписать в виде

$$S[A_\mu, y^\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x \int ds \left(m + e \int A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} \right) \delta^{(4)}(x - y(s)), \quad (8.4.2) \quad \boxed{\text{S}_1}$$

где дельта-функцию следует понимать как

$$\delta^{(4)}(x - y(s)) := \delta(x^0 - y^0(s)) \delta(x^1 - y^1(s)) \delta(x^2 - y^2(s)) \delta(x^3 - y^3(s)). \quad (8.4.3)$$

Если во втором слагаемом (8.4.2) выполнить сперва интеграл по x , то очевидно, что (8.4.1) и (8.4.2) совпадают. Действие (8.4.2) инвариантно относительно трансляций

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu, \quad y^\mu \rightarrow y^\mu - a^\mu, \quad (8.4.4) \quad \boxed{\text{symm}}$$

где a^μ – произвольный постоянных вектор в пространстве времени.

Несмотря на то что действие инвариантно только относительно постоянных трансляций, т.е. вектор a^μ не является функцией пространства времени, на практике полезен следующий технический прием для нахождения сохраняющегося тока, который может быть применен для любых глобальных симметрий действия: будем считать, что параметр симметрии (в нашем случае вектор a^μ) является функцией пространства времени, тогда разность преобразованного (с учетом того, что параметр является функцией пространства времени) и непреобразованного действий будет иметь вид

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu (\varepsilon(x)) J^\mu, \quad (8.4.5)$$

где $\varepsilon(x)$ – это параметр глобальной симметрии, который мы фиктивно сделали функцией пространства времени. Такой вид вариации неизбежно получится потому, что действие по предположению инвариантно для постоянных параметров. Затем после интегрирования по частям получим

$$\delta S = - \int d^4x \varepsilon(x) \partial_\mu J^\mu, \quad (8.4.6) \quad \text{Rcurrent}$$

после чего, вспомнив, что параметры должны быть константами, получаем сохраняющиеся токи $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Поскольку мы уже знаем чему равна вариация действия для электромагнитного поля при преобразованиях (8.4.4), то заново новым способом ее выводить не будем (учтите, что из (8.4.4) следует, что $\tilde{\delta}x^\mu = -a^\mu$), а остановимся лишь на части, связанной с частицей. Вариация действия (8.4.2) относительно преобразования (8.4.4) равна

$$\begin{aligned} \delta S[A_\mu, y^\mu] = & - \int d^4x a^\nu(x) \partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \\ & + \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)), \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

где $T_{can}{}^\mu{}_\nu$ дается формулой (8.2.2). Далее будем рассматривать только часть действия, связанного с частицей. Сама эта вариация была получена следующим образом. Просто по определению нам нужно рассмотреть следующую разность

$$\begin{aligned} \delta S_{part.} = & \int d^4x \int ds \left[-m \sqrt{\frac{d(y^\mu - a^\mu)}{ds} \frac{d(y^\nu - a^\nu)}{ds}} \eta_{\mu\nu} - e A_\mu(y - a) \frac{d(y^\mu - a^\mu)}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)) - \\ & - \int d^4x \int ds \left[-m \sqrt{\frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}} \eta_{\mu\nu} - e A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)). \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Оставляя лишь слагаемые с первой степенью по a^μ , мы можем привести эту разность к виду

$$\delta S_{part.} = \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.9)$$

Обращаю ваше внимание на схожесть полученной формулы и выражений из раздела 4.3, где на месте a^μ была вариация траектории частицы в пространстве времени δx^μ . Мы хотим привести соответствующее выражение к виду (8.4.6). Обращаю ваше внимание, что при интегрировании по частям нужно дифференцировать еще и дельта-функцию, производная которой по s равна

$$\frac{d}{ds} \delta^{(4)}(x - y(s)) = \frac{dy^\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.10)$$

После череды упрощений нам удалось привести вариацию части действия, связанного с

частицей, к виду

$$\begin{aligned}\delta S_{particle} &= \int d^4x \int ds \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{da_\mu}{ds} + e a^\nu \partial_\nu A_\mu(y) \frac{dy^\mu}{ds} + A_\mu(y) \frac{da^\mu}{ds} \right] \delta^{(4)}(x - y(s)) = \\ &= \int d^4x \int ds a_\mu \left(m \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} - e F^{\mu\nu} \frac{dy_\nu}{ds} \right) \delta^{(4)}(x - y(s)) + \\ &\quad + \int d^4x \int ds a^\mu \left(m \frac{dy_\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + e A_\mu \frac{dy^\nu}{ds} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.11)\end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как мы предполагаем, что траектория частицы удовлетворяет уравнениям движения (4.3.11).

В итоге полную вариацию действия можно представить в виде

$$\delta S = \int d^4x a^\nu(x) \left(-\partial_\mu T_{can}{}^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) \left[m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy_\nu}{ds} + e A_\nu \frac{dy^\mu}{ds} \right] \right). \quad (8.4.12)$$

Теперь вспомним, что мы рассматриваем только постоянные трансляции, так как только они являются симметриями действия, и сразу же получим сохраняющийся ток

$$T_{can}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) \left(m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + e A^\nu \frac{dy^\mu}{ds} \right), \quad (8.4.13)$$

который является каноническим тензором энергии-импульса для системы: электромагнитное поле и заряженная частица. Полученное выражение не является симметричным по индексам μ, ν и не является калибровочно инвариантным. Тем не менее, его можно сделать калибровочно инвариантным и симметричным с помощью добавки

$$\partial_\rho U^{\mu\rho}{}_\nu = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A_\nu). \quad (8.4.14)$$

Калибровочно инвариантный тензор энергии-импульса для заряженной частицы и электромагнитного поля имеет вид

$$T_{EM+part.}{}^{\mu\nu} := \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}. \quad (8.4.15) \quad \boxed{\text{gaugeInv}}$$

Здесь мы воспользовались тем, что электромагнитное поле решает уравнения Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, и ток равен (6.1.10), который можно эквивалентно представить в виде

$$J^\mu = e \frac{dy^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}(s)) \Big|_{t=y^0(s)} = e \int ds \frac{dy^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - y(s)). \quad (8.4.16) \quad \boxed{4\text{Current}}$$

Обращаем внимание, что несмотря на то что рассматривалась взаимодействующая система, тензор энергии-импульса состоит из двух независимых вкладов, которые отвечают свободному электромагнитному полю и свободной частице

$$T_{part.}{}^{\mu\nu} := \int ds \delta^{(4)}(x - y(s)) m \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}. \quad (8.4.17)$$

Лекция 9

2 ноября 2022

9.1 Электростатика

Рассмотрим вторую пару уравнений Максвелла в системе СГС

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad J^\nu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (9.1.1)$$

которая после наложения условия Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ ¹ приобретает вид (см. раздел 5.5)

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (9.1.2) \quad \text{LorGauge}$$

В **электростатике** отсутствуют токи, т.е. $\vec{j} = 0$, и в силу уравнения непрерывности плотности не зависят от времени

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (9.1.3)$$

Уравнения (9.1.2) после разделения временных пространственных компонент имеют вид

$$\square A^0 = 4\pi\rho, \quad \square A^i = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1.4)$$

Очевидно, что $A^i = 0$ является частным решением для пространственных компонент уравнения (9.1.2). Условие Лоренца при этом накладывает ограничения на зависимость A^0 от времени

$$\partial_0 A^0 + \text{div} \vec{A} = 0 \implies \partial_0 A^0 = 0. \quad (9.1.5)$$

Т.е. $A^0 = \phi$ компонента 4-потенциала не зависит от времени. С учетом этого для нахождения полей в электростатике остается решить уравнение

$$\Delta \phi = -4\pi\rho, \quad (9.1.6) \quad \text{Puasson}$$

которое также называют **уравнением Пуассона**.

¹В каждой конкретной задаче из соображений удобства накладывают соответствующие условия, (частично) фиксирующие калибровку. В электростатике таким условием является условие Лоренца, в магнитостатике – калибровка Кулона.

9.2 Функция Грина уравнения Пуассона

Уравнение на функцию Грина для уравнения Пуассона имеет вид

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (9.2.1) \quad \text{Green}$$

здесь обозначение Δ_x означает, что оператор Лапласа действует только на \vec{x} аргумент функции $G(\vec{x}, \vec{y})$. Обращаю ваше внимание, что в литературе нет какой-либо унифицированной договоренности относительно коэффициентов в правой части (9.2.1) перед дельта-функцией, поэтому, прежде чем использовать выражение из какого-либо учебника, обязательно посмотрите, как устроена правая часть уравнения (9.2.1).

Прежде чем непосредственно приступить к решению (9.2.1), выясним, чем же так хорош формализм функции Грина. Предположим, что мы каким-то образом решили (9.2.1) и нашли $G(\vec{x}, \vec{y})$, тогда решение уравнения Пуассона с произвольной правой частью может быть записано в виде

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}). \quad (9.2.2) \quad \text{GreenCont.}$$

Действительно, подставим это выражение в уравнение Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\vec{x}) &= \Delta \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \int d^3y \Delta G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \\ &= -4\pi \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}) = -4\pi \rho(\vec{x}). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Т.е. решив однажды уравнение (9.2.1), мы можем для произвольной правой части выписать решение в виде (9.2.2). Но тут стоит также отметить, что функция Грина из уравнения (9.2.1) не определяется однозначно: к ней всегда можно добавить решение однородного уравнения. Добавление решений однородного уравнения позволяет учитывать специфические граничные условия. Далее нас будут интересовать «физические» граничные условия, т.е. $\phi(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0$, последнее не приводит к противоречию, поскольку мы считаем, что нет зарядов на пространственной бесконечности $\rho(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0$.

Приступим наконец к решению (9.2.1). Воспользуемся однородностью пространства, т.е. тем, что выражение для функции Грина должно быть инвариантно относительно преобразований вида

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a} \quad \vec{y} \rightarrow \vec{y} + \vec{a}. \quad (9.2.4)$$

Эта симметрия позволяет перейти от общего выражения к

$$G(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow G(\vec{x} - \vec{y}). \quad (9.2.5)$$

Уравнение (9.2.1) – это уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, которое может быть решено преобразованием Фурье. Фурье-образы функции Грина и дельта-функции имеют следующий вид

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \tilde{G}(\vec{k}), \quad (9.2.6) \quad \text{GreenF}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (9.2.7) \quad \text{deltaF}$$

Подставляя (9.2.6) и (9.2.7) в уравнение (9.2.1), мы получим

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} (-\vec{k}^2) \tilde{G}(\vec{k}) = -4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \iff \vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 4\pi. \quad (9.2.8)$$

Откуда находим, что фурье-образ для функции Грина равен

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2}. \quad (9.2.9) \quad \text{GreenMom}$$

Обращаю ваше внимание, что полученное выражение зависит только от модуля \vec{k} . Следствием какой симметрии является такая зависимость? Теперь используя (9.2.6), мы получим выражение для функции Грина в координатном пространстве (выражение (9.2.9) часто называют представлением функции Грина в импульсном пространстве)

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = 4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2}. \quad (9.2.10)$$

Для краткости введем обозначение

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}, \quad (9.2.11)$$

а сам интеграл будем вычислять, перейдя в сферические координаты в k -пространстве. Ось z в этом пространстве направим вдоль вектора \vec{r} , тогда интеграл примет вид

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{y}) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2} = \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\xi e^{ikr\xi} = \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} = \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k}. \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

Последний интеграл не расходится в окрестности $k = 0$, и мы можем его эквивалентно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k + i\delta}, \quad (9.2.13)$$

а этот интеграл может быть вычислен с помощью уже известной вам теоремы Коши о вычетах. Для дальнейшего удобства разобьем этот интеграл на два слагаемых

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k + i\delta} - \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} \right], \quad (9.2.14)$$

Чтобы воспользоваться теоремой Коши о вычетах, нам необходим **замкнутый** контур!, для того чтобы замкнуть его удобным образом, воспользуемся леммой Жордана. У нас $r > 0$, следовательно в первом интеграле контур следует замыкать в верхней полуплоскости (см. Рис 9.1), так как в этом случае интеграл вдоль добавленного замыкания будет равен нулю, а во втором интеграле контур следует замкнуть в нижней полуплоскости. Таким образом, мы имеем

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\oint_{\Gamma_1} dk \frac{e^{ikr}}{k + i\delta} - \oint_{\Gamma_2} dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} \right], \quad (9.2.15)$$

где контуры Γ_1, Γ_2 изображены на рисунке 9.1. Контур Γ_1 не охватывает никаких полюсов, поэтому по теореме Коши о вычетах соответствующий интеграл равен нулю. В области, охватываемой контуром Γ_2 , есть полюс первого порядка. В итоге получаем

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_2} dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\delta} = \frac{1}{2\pi ir} \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi i e^{-\delta r} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (9.2.16) \quad \text{Coulomb}$$

Полученное выражение должно быть вам знакомо, поскольку это потенциал в точке \vec{x} единичного положительного заряда, находящегося в точке \vec{y} . Теперь вернемся к формуле

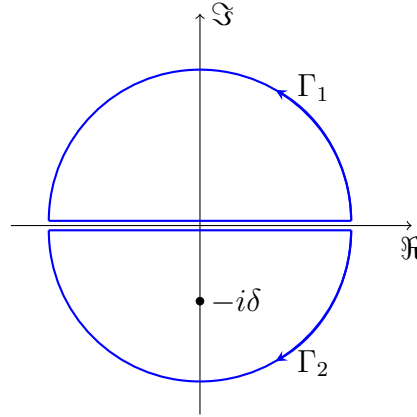


Рис. 9.1: Контура Γ_1 и Γ_2 и расположение полюса

contours

(9.2.2). Мы считаем, что заряды расположены в некоторой компактной области, поэтому при стремлении $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ потенциал обращается в ноль, что соответствует нашим «физическим» граничным условиям, и никакой модификации (9.2.16) решениями однородного уравнения не требуется.

Для системы точечных зарядов, плотность которой задается формулой

$$\rho(\vec{R}) = \sum_J e_J \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{r}_J), \quad (9.2.17)$$

где e_J – это величина точечного заряда, а \vec{r}_J – его радиус-вектор, потенциал будет очевидно равен

$$\phi(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{|\vec{R} - \vec{r}_J|}. \quad (9.2.18) \quad \text{potential}$$

Далее мы будем изучать поведение потенциала при больших \vec{R} , в случае, когда заряды локализованы в некоторой малой области пространства.

2.1 Мультипольное разложение

Multipole

В этом разделе мы изучим различные приближения формулы (9.2.18), которые оказываются важны в практических приложениях. Для удобства поместим начало координат внутри компактной области, в которой сосредоточены заряды (см. рисунок 9.2). Считая,

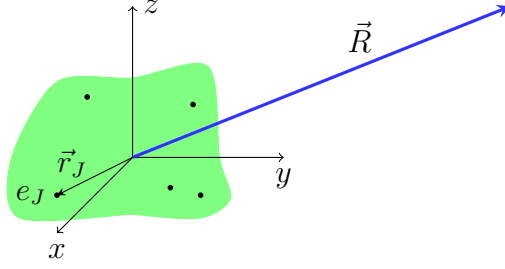


Рис. 9.2: Система координат и пространственное расположение зарядов

charges

что точка, в которой мы хотим вычислить потенциал, сильно удалена от системы зарядов, т.е. $|\vec{r}_J| \ll |\vec{R}|$, мы можем представить (9.2.18) в виде

$$\phi(\vec{R}) = \underbrace{\sum_J \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{точечный заряд}} - \underbrace{\sum_J r_{Ji} \frac{\partial}{\partial R_i} \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{диполь}} + \underbrace{\sum_J \frac{1}{2} r_{Ji} r_{Jj} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \frac{e_J}{|\vec{R}|}}_{\text{квадруполь}} + \dots \quad (9.2.19)$$

phiTaylor

Чтобы представить каждое из слагаемых явно, нам нужно вычислить соответствующие производные

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{R}|} = \partial_i \frac{1}{\sqrt{R_k R_k}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}} 2R_i = -\frac{1}{(R_k R_k)} \frac{R_i}{\sqrt{R_k R_k}}. \quad (9.2.20)$$

В векторных обозначениях последнее равенство можно записать в виде

$$\nabla \frac{1}{|\vec{R}|} = -\frac{\vec{n}}{|\vec{R}|^2}. \quad (9.2.21)$$

nablaR

где единичный вектор нормали определен каноническим образом $\vec{n} = \vec{R}/|\vec{R}|$. Вторые производные от $\frac{1}{R}$ соответственно равны

$$\partial_j \partial_i \frac{1}{|\vec{R}|} = \partial_j \left(-\frac{1}{(R_k R_k)} \frac{R_i}{\sqrt{R_k R_k}} \right) = 3 \frac{R_i R_j}{(R_k R_k)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.2.22)$$

Дипольным моментом системы зарядов называется вектор

$$d_i := \sum_J q_J r_{Ji}. \quad (9.2.23)$$

dipole

В этих обозначениях дипольный вклад в формуле (9.2.19) можно записать в виде

$$\phi_{dipole}(\vec{R}) = \frac{(\vec{d}, \vec{n})}{R^2}. \quad (9.2.24)$$

dipolePhi

В аналогичном виде

$$\phi_{multipole} = \frac{1}{n!} \frac{O_{i_1 \dots i_n} n_{i_1} \dots n_{i_n}}{R^{n+1}} \quad (9.2.25)$$

multipole

мы хотим! представить все мультипольные порядки разложения. Удобство такого представления заключается в том, что мы явно выделяем некоторые характеристики системы зарядов, мультипольные моменты $O_{i_1 \dots i_n}$, которые вообще не зависят от того, в какой точке мы собираемся вычислять потенциал ($\partial_{\vec{R}} O_{i_1 \dots i_n} = 0$). Продолжая разложение (9.2.19), можно убедиться в том, что любой порядок можно привести к виду (9.2.25). Пока вклад, отвечающий квадрупольному слагаемому,

$$\phi_{quad}(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{2} r_{Ji} r_{Jj} \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{(R_k R_k)^{\frac{3}{2}}}, \quad (9.2.26) \quad \text{preQuad}$$

не имеет вида типа (9.2.25). Тем не менее, его можно эквивалентно переписать в виде

$$\phi_{quad}(\vec{R}) = \sum_J \frac{e_J}{2R^3} (3r_{Ji} r_{Jj} - |\vec{r}_J|^2 \delta_{ij}) n_i n_j. \quad (9.2.27)$$

Появившийся в этом представлении симметричный бесследовый тензор второго ранга

$$D_{ij} := \sum_J e_J (3r_{Ji} r_{Jj} - |\vec{r}_J|^2 \delta_{ij}) \quad (9.2.28) \quad \text{Quad}$$

называют **квадрупольным моментом** системы зарядов.

Используя новые определения, разложение потенциала можно записать в виде

$$\phi(\vec{R}) = \frac{Q}{R} + \frac{(\vec{d}, \vec{n})}{R^2} + \frac{D_{ij} n_i n_j}{2R^3} + \dots, \quad (9.2.29)$$

где $Q = \sum_J e_J$ – полный заряд системы.

2.2 Симметрии и тензор квадрупольного момента

Для произвольной фигуры тензор квадрупольного момента определяется пятью независимыми компонентами: 6 из симметрии и минус 1 из бесследовости. Для фигур, обладаю-

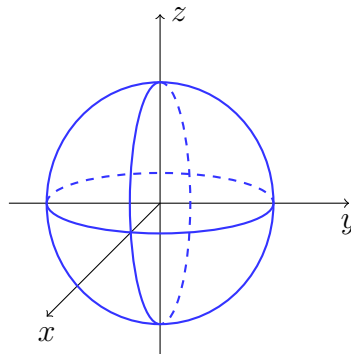


Рис. 9.3: Равномерно заряженный эллипсоид

ellipse

щих симметриями, количество компонент, определяющих тензор квадрупольного момента меньше. Рассмотрим в качестве примера однородно заряженный эллипсоид из задания

(см. рисунок 9.3). Эта фигура очевидно симметрична при поворотах на π вокруг любой из осей. Посмотрим к каким ограничения на компоненты тензора квадрупольного момента это приводит. Матрица поворота на π вокруг оси z имеет вид

$$A_{z,\pi}^j{}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.30)$$

Тензор квадрупольного момента после такой замены координат будет иметь вид

$$D'_{ij} = A_i^m A_j^n D_{mn} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & -D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9.2.31)$$

Поскольку тензор квадрупольного момента при такой замене не меняется $D'_{ij} = D_{ij}$ из-за симметрии фигуры, то имеем следующие ограничения на компоненты тензора, следующие из этой симметрии,

$$D_{xz} = 0, \quad D_{yz} = 0. \quad (9.2.32) \quad \boxed{\text{PIz}}$$

Аналогично из симметрии при повороте на π относительно оси x

$$A_{x,\pi}^j{}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.2.33)$$

получим, что

$$D_{xy} = 0, \quad D_{xz} = 0. \quad (9.2.34) \quad \boxed{\text{PIx}}$$

Очевидно, что симметрия относительно вращения на π вокруг оси y не приводит к новым ограничениям относительно (9.2.32), (9.2.34). Этот факт совсем не удивителен так как композиция поворотов на π относительно осей z и x дает поворот на π относительно y , т.е.

$$A_{z,\pi}^j{}_i A_{x,\pi}^m{}_j = A_{y,\pi}^m{}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.35)$$

Таким образом, для фигуры, симметричной относительно поворотов на π , тензор квадрупольного момента диагонален

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9.2.36)$$

Может поставить обратный вопрос: допустим тензор квадрупольного момента диагонален следует ли отсюда, что фигура обладает упомянутыми симметриями? Ответ – нет. Самостоятельно придумайте контрпример.

9.3 Потенциальная энергия зарядов во внешнем поле

Мы уже получали, как выглядит функция Гамильтона для точечной частицы во внешнем электромагнитном поле (5.1.8). В случае электростатики формула упрощается до

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{P}^2} + e\phi(\vec{r}), \quad (9.3.1)$$

последнее слагаемое которой мы будем называть **потенциальной энергией взаимодействия частицы с внешним полем**². Если же рассматривается некоторая система зарядов, то потенциальная энергия взаимодействия с внешним полем имеет вид

$$U := \sum_J e_J \phi(\vec{r}_J), \quad (9.3.2) \quad \boxed{\text{potEnergy}}$$

где потенциал ϕ отвечает исключительно внешнему полю, как если бы зарядов вообще не было.

Как и в разделе (2.1), мы поместим начало координат внутрь системы зарядов и будем считать, что заряды расположены близко к началу координат. Здесь уместно сказать о различии разложения (9.2.19) и разложения, которое будет проделано ниже. Здесь мы считаем, что расстояния r_J малы по сравнению с расстоянием, на котором значительно меняется потенциал внешнего электростатического поля³.

Выполним разложение формулы (9.3.2) с учетом малости r_J

$$U = \sum_J e_J \phi(0) + \sum_J e_J r_{Ji} \partial_i \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \frac{1}{2} \sum_J e_J r_{Ji} r_{Jj} \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \dots \quad (9.3.3)$$

Если воспользоваться тем, что $\delta^{ij} \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0}$, т.е. в центре нашей системы координат нет зарядов (а если мы вдруг случайно и попали в точечный заряд, то центр всегда можно чуть-чуть сместить), то предыдущую формулу для потенциальной энергии можно эквивалентно переписать в виде

$$U = \sum_J e_J \phi(0) + \sum_J e_J r_{Ji} \partial_i \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \frac{1}{6} \sum_J e_J (3r_{Ji} r_{Jj} - \delta_{ij} r_J^2) \partial_i \partial_j \phi(\vec{R}) \Big|_{\vec{R}=0} + \dots \quad (9.3.4)$$

Если воспользоваться определениями дипольного и квадрупольного моментов (9.2.23), (9.2.28) и связью напряженности электрического поля с потенциалом (5.1.2) для случая электростатики ($\vec{A} = 0$), то формулу для потенциальной энергии системы зарядов во внешнем поле можно представить в виде

$$U = Q\phi(0) - (\vec{d}, \vec{E}_0) + \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial^2 \phi(\vec{R})}{\partial R_i \partial R_j} \Big|_{\vec{R}=0} + \dots, \quad (9.3.5) \quad \boxed{\text{Uel}}$$

где \vec{E}_0 – это значение напряженности внешнего электрического поля в начале координат.

²Аналогично можно выделить потенциальную энергию взаимодействия с внешним полем и из Лагранжевой формулировки, что будет проделано позже для магнитостатики.

³Подобного рода формулировки часто появляются в физике, и уже в каждой конкретной задаче нужно определять, что же является характерным расстоянием, на котором значительно меняется потенциал.

В случае, когда внешнее поле создается диполем, то потенциальная энергия взаимодействия другого диполя с этим полем равна

$$U_{d-d} = -(\vec{d}_2, \vec{E}_1), \quad (9.3.6)$$

где \vec{E}_1 – это поле, создаваемое «внешним» диполем \vec{d}_1 в точке, где находится диполь \vec{d}_2 . Напряженность этого поля можно вычислить, взяв градиент от (9.2.24)

$$(\vec{E}_1)_i = -\partial_i \left(\frac{d_k R_k}{R^3} \right) = \frac{3d_k n_k n_i - d_i}{R^3} \iff \vec{E} = \frac{3(\vec{d}, \vec{n})\vec{n} - \vec{d}}{R^3}. \quad (9.3.7) \quad \boxed{\text{Edipole}}$$

А **потенциальная энергия диполь-дипольного взаимодействия** соответственно равна

$$U_{d-d} = \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2)R^2 - 3(\vec{d}_1, \vec{R})(\vec{d}_2, \vec{R})}{R^5}. \quad (9.3.8)$$

Обратим внимание, что формула симметрична относительно перестановки диполей 1 и 2, т.е. совершенно не важно, какой из них считать «внешним».

Лекция 10

9 ноября 2022

Lec10

10.1 Магнитостатика

Задача в магнитостатике становится по аналогии с электростатикой. Ранее у нас были где-то статично! расположены заряды и мы искали электрическое поле, создаваемое такой системой. При этом нас вообще не интересовал вопрос о том почему заряды именно так расположены и почему они не двигаются. В магнитостатике у нас заряды движутся, но при этом совершают исключительно финитное движение (см. рисунок 10.1). Мы не собираемся отвечать на вопрос «Почему они так движутся?» (представьте, что кто-то или что-то их вращает), нас интересует лишь какое магнитное поле будет создаваться таким образом движущимися зарядами.

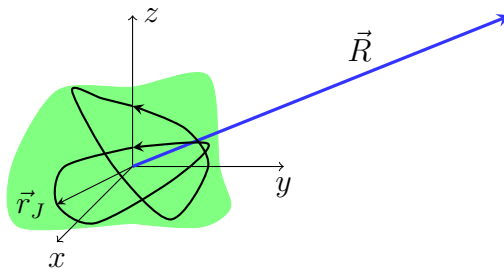


Рис. 10.1: Система координат и пространственное расположение токов

currents

Рассмотрим следующие уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (10.1.1)$$

Считая движение зарядов, т.е. функции \vec{j} периодическими (и как следствие сами поля), мы можем выполнить усреднение по времени

$$\operatorname{div} \langle \vec{H} \rangle = 0, \quad \operatorname{rot} \langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.2)$$

Здесь под обозначение $\langle \vec{B} \rangle$ для любого вектора \vec{B} понимается

$$\langle \vec{B} \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{B}. \quad (10.1.3) \quad \text{AvDef}$$

Среднее значение производных от функций, изменяющихся в конечных пределах, равны нулю

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\vec{E}(T) - \vec{E}(0)) = 0. \quad (10.1.4) \quad \text{AvDer}$$

Таким образом, после усреднения имеем следующие уравнения на поля

$$\text{div} \langle \vec{H} \rangle = 0, \quad \text{rot} \langle \vec{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.5) \quad \text{preMagnet}$$

Первое уравнение позволяет выразить напряженность магнитного поля в терминах вектор-потенциала \vec{A} (пока мы не накладывали никаких условий, фиксирующих калибровку)

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (10.1.6)$$

Подставив это представление в левую часть второго уравнения (10.1.5), мы получим

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m \langle A_n \rangle = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m \langle A_n \rangle = (\text{grad} \text{div} \langle \vec{A} \rangle - \Delta \langle \vec{A} \rangle)_i. \quad (10.1.7)$$

Если воспользоваться калибровочным произволом и наложить на вектор-потенциал условие бездивергентности $\text{div} \langle \vec{A} \rangle = 0$, которое называют **калибровкой Кулона** и которое всегда может быть наложено, то уравнения на поля примут вид

$$\Delta \langle \vec{A} \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle. \quad (10.1.8) \quad \text{Magn}$$

Это уравнение, также называемое **уравнением магнитостатики**, аналогично уравнению Пуассона (9.1.6), а следовательно может быть решено таким же способом. Решение этого уравнения для токов $\langle \vec{j} \rangle$, локализованных в компактной области пространства, имеет вид

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\langle \vec{j} \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (10.1.9) \quad \text{Apotential}$$

Обращаю внимание на важное отличие уравнений магнитостатики от уравнений электростатики. В магнитостатике на векторный потенциал кроме уравнения (10.1.8) также наложена калибровка Кулона $\text{div} \langle \vec{A} \rangle = 0$. Проверим, что частное решение (10.1.9) не нарушает это калибровочное условие. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{div} \langle \vec{A} \rangle &= \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\langle j \rangle_i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \langle j \rangle_i(\vec{y}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial}{\partial y^i} \langle j \rangle_i(\vec{y}) = 0, \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

где мы проинтегрировали по частям. Последнее равенство выполнено в силу уравнения непрерывности

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle \text{div} \vec{j} \rangle = \langle \text{div} \vec{j} \rangle = \text{div} \langle \vec{j} \rangle = 0. \quad (10.1.11)$$

Вычислив ротор от (10.1.9), мы найдем магнитное поле, создаваемое токами $\langle \vec{j} \rangle$

$$(\text{rot} \langle \vec{A} \rangle)_i = \frac{1}{c} \int d^3 y \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\langle j_k \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c} \int d^3 y \frac{\epsilon_{ijk} (x - y)_j \langle j_k \rangle(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (10.1.12)$$

В векторной форме это соотношение можно переписать в виде

$$\langle \vec{H} \rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\langle \vec{j} \rangle(\vec{y}), \vec{x} - \vec{y}]}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d^3 y. \quad (10.1.13)$$

Эту формулу, позволяющую найти напряженность магнитного поля через токи, называют **законом Био-Савара-Лапласа**.

10.2 Магнитное поле системы токов на больших расстояниях

Рассмотрим в качестве системы токов движущиеся заряды

$$\vec{j}(\vec{y}, t) = \sum_J e_J \frac{d\vec{r}_J}{dt} \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)). \quad (10.2.1) \quad \text{PointCurrent}$$

Среднее (по времени) значение плотности тока равно

$$\langle \vec{j} \rangle(\vec{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_J e_J \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)). \quad (10.2.2) \quad \text{goodAverage}$$

Эта формула приведена потому, что литературе (даже в ЛЛ) можно встретить вот такую формулу для плотности тока системы точечных частиц в случае финитного движения

$$\vec{j}(\vec{y}, t) = \sum_J e_J \frac{d\vec{r}_J}{dt}, \quad (10.2.3)$$

и усреднение по времени приводит к непониманию, так как формально это интеграл от полной производной и равен нулю

$$\left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} = 0. \quad (10.2.4) \quad \text{vAverage}$$

Все противоречия уходят, если держать в уме дельта-функцию (или явно писать), локализирующую точечную частицу, и понимать усреднение в смысле (10.2.2).

Система токов (10.2.1) согласно (10.1.9) дает следующее значение вектор-потенциала

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3 y \frac{1}{|\vec{R} - \vec{y}|} \sum_J e_J \langle \vec{v}_J \delta(\vec{y} - \vec{r}_J(t)) \rangle = \sum_J \frac{e_J}{c} \left\langle \frac{\vec{v}_J}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} \right\rangle. \quad (10.2.5) \quad \text{AfullMagnetic}$$

Далее, как и в случае электростатики, мы будем считать, что $|\vec{r}_J| \ll |\vec{R}|$ (см. рисунок 10.1), но в отличие от электростатики мы ограничимся только первым порядком разложения

$$\frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} = \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{R}|} - (\vec{r}_J, \nabla) \frac{1}{|\vec{R}|} + \dots \right) = \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{R}|} + \frac{(\vec{r}_J, \vec{R})}{|\vec{R}|^3} + \dots \right), \quad (10.2.6)$$

где мы использовали (9.2.21). Усреднее по времени даст

$$\left\langle \frac{d\vec{r}_J(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_J(t)|} \right\rangle = \frac{1}{|\vec{R}|} \left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} \right\rangle + \frac{1}{|\vec{R}|^3} \left\langle \frac{d\vec{r}_J}{dt} (\vec{r}_J, \vec{R}) \right\rangle + \dots \quad (10.2.7)$$

Первое слагаемое равно нулю (см. (10.2.4)), а второе может быть эквивалентно переписано в несколько иной форме. Из-за усреднения по времени мы можем добавлять любые полные производные никак не изменяя результат усреднения. Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) = \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) + \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R}), \quad (10.2.8)$$

с его помощью мы можем представить искомое $\langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{R}) - \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R})) \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{R} - \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{R})) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle [[\vec{r}_J, \vec{v}_J], \vec{R}] \rangle. \end{aligned} \quad (10.2.9) \quad \boxed{\text{trick}}$$

Введем вектор

$$\vec{\mathfrak{m}} := \sum_J \frac{e_J}{2c} \langle [\vec{r}_J, \vec{v}_J] \rangle, \quad (10.2.10)$$

который будем называть **магнитным (дипольным) моментом системы токов**. В терминах $\vec{\mathfrak{m}}$ вектор-потенциал (10.2.5) с точностью до первого порядка запишется в виде

$$\langle \vec{A} \rangle(\vec{R}) = \frac{[\vec{\mathfrak{m}}, \vec{R}]}{|\vec{R}|^3}. \quad (10.2.11) \quad \boxed{\text{Adipole}}$$

Вычислим магнитное поле, создаваемое вектор-потенциалом (10.2.11),

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \mathfrak{m}_m R_n \frac{1}{R^3} &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \mathfrak{m}_m \partial_j \left(\frac{R_n}{R^3} \right) = \mathfrak{m}_i \partial_n \left(\frac{R_n}{R^3} \right) - (\mathfrak{m}_j \partial_j) \left(\frac{R_i}{R^3} \right) = \\ &= \mathfrak{m}_i \left(\frac{3}{R^3} - 3 \frac{R_n R_n}{R^5} \right) - \mathfrak{m}_j \left(\frac{\delta_{ij}}{R^3} - 3 \frac{R_i R_j}{R^5} \right) = -\frac{\mathfrak{m}_i}{R^3} + 3 \frac{\mathfrak{m}_j n_j n_i}{R^3}. \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

Последнюю формулу можно переписать в векторных обозначениях

$$\vec{H}_{\mathfrak{m}} = \frac{3(\vec{\mathfrak{m}}, \vec{n})\vec{n} - \vec{\mathfrak{m}}}{R^3}, \quad (10.2.13)$$

которая аналогична (9.3.7).

10.3 Теорема Лармора

Рассмотрим поведение заряда во внешнем однородном поле. Его траектория (нерелятивистский случай) определяется следующими уравнениями движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{F}, \quad (10.3.1)$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{r}, \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right] + [\vec{r}, \vec{F}] , \quad (10.3.2) \quad \boxed{\text{dM}}$$

где \vec{M} – момент импульса рассматриваемой заряженной частицы, а \vec{F} – сила, обеспечивающая быстрое финитное движение заряда. Природа этой силы нам не важна, это может быть, например, кулоновское поле ядра атома, удерживающие на орбите электрон. Мы будем считать, что средний момент этой силы равен нулю $\langle [\vec{r}, \vec{F}] \rangle$ (это верно, например, для кулоновского поля). Как и всюду в магнитостатике нас интересуют усредненные по времени (быстрого финитного движения) величины. Мы будем считать поле \vec{H} малым, тогда после усреднения по быстрому финитному движению справедливо

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = \left\langle \left[\vec{r}, \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right] \right\rangle . \quad (10.3.3)$$

В силу ранее полученных формул (10.2.9) и однородности поля \vec{H} получим

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = [\vec{m}, \vec{H}] . \quad (10.3.4) \quad \boxed{\text{preLarmor}}$$

Воспользовавшись связью магнитного и механического моментов

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \langle \vec{M} \rangle , \quad (10.3.5)$$

которое также называют **гиромагнитным отношением**, мы можем привести уравнение движения (10.3.4) к виду

$$\frac{d\langle \vec{M} \rangle}{dt} = -\frac{eH}{2mc} [\vec{h}, \langle \vec{M} \rangle] , \quad (10.3.6) \quad \boxed{\text{Larmor}}$$

где \vec{h} – единичный вектор вдоль направления внешнего магнитного поля \vec{H} . Полученное уравнение означает, что вектор $\langle \vec{M} \rangle$ вращается (прецессирует. Вспомните соответствующие уравнения теории гироскопа) с угловой скоростью $\frac{eH}{2mc}$, которое называют **ларморовой частотой**. Само явление называют **ларморовой прецессией**.

10.4 Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле

В магнитостатике функция Лагранжа для массивной релятивистской частицы (5.1.4) упрощается до

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{v}, \vec{A}) , \quad (10.4.1)$$

где последнее слагаемое отвечает за взаимодействие с магнитным полем, которое и будем называть **энергией магнитного момента во внешнем поле**

$$U_m := -\frac{e}{c} (\vec{v}, \vec{A}) . \quad (10.4.2) \quad \boxed{\text{Um}}$$

Однородное магнитное поле \vec{H} можно задать с помощью векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}, \vec{r}] . \quad (10.4.3) \quad \boxed{\text{homH}}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\vec{H} = \text{rot} \vec{A} &\iff H_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} H_m x_n = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} H_m \delta_{jn} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \delta_{jn} H_m = \frac{1}{2} (3 - 1) H_i = H_i. \quad (10.4.4)\end{aligned}$$

Обращаю ваше внимание, что для представления (10.4.3) важно, что поле является однородным. Желаящие могут убедиться, что формула (10.4.3) является частным следствием (4.3.13) (при $\vec{E} = 0$ и для стационарного однородного поля \vec{H}), которая справедлива в случае произвольного электромагнитного поля. С помощью (10.4.3) энергию магнитного момента (10.4.2) можно представить в виде

$$U_m = \frac{e}{2c} (\vec{v}, [\vec{r}, \vec{H}]) = -\frac{e}{2c} ([\vec{r}, \vec{v}], \vec{H}) = -(\vec{m}, \vec{H}), \quad (10.4.5)$$

которая аналогична слагаемому, отвечающему за взаимодействие электрического диполя с внешним поле (9.3.5). При преобразованиях мы воспользовались свойством цикличности для смешанного произведения векторов

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = ([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}),$$

которое следует из того, что циклические перестановки индексов у символа Леви-Чивиты оставляют его инвариантным.

Лекция 11

16 ноября 2022

11.1 Свободное электромагнитное поле

Рассмотрим свободные ($J^\nu = 0$) уравнения Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (11.1.1) \quad \text{MaxFree}$$

Мы всегда можем наложить условие Лоренца (условие 4-поперечности). Действительно, пусть некоторое поле A^μ решает уравнение Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, но не удовлетворяет условию 4-поперечности $\partial_\mu A^\mu$, тогда с помощью калибровочных преобразований мы всегда можем сделать его 4-поперечным:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \implies \partial_\mu A'^\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu + \square f \implies \square f = -\partial_\mu A^\mu. \quad (11.1.2)$$

Последнее уравнение всегда может быть разрешено, что вам будет доказано в курсе уравнений математической физики. Тем не менее даже после наложения условия Лоренца мы не полностью зафиксировали калибровочный произвол, уравнение $\square f = -\partial_\mu A^\mu$ решается с точностью до решения однородного уравнения $\square f = 0$. Воспользовавшись остаточным калибровочным произволом мы можем откалибровать в ноль любую компоненту 4-потенциала (для свободных уравнений Максвелла), обычно выбирают нулевую $A^0 = 0$. После всех наложенных условий уравнения (11.1.1) примут вид

$$\square A^\nu = 0, \quad A^0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (11.1.3) \quad \text{fullFixed}$$

Обращаю ваше внимание, что условия $A^0 = 0$ и $\text{div} \vec{A} = 0$ хотя и полностью фиксируют калибровочный произвол, но не являются Лоренц-ковариантными, т.е. при переходе в другую систему отсчета в общем случае $A'^0 \neq 0$. Решая уравнения (11.1.3) с помощью Фурье-преобразования получим

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} \delta(k^2) \epsilon_\mu(k), \quad (11.1.4) \quad \text{complexS}$$

где фурье-образ $\epsilon_\mu(k)$ (который также называют поляризацией в КТП¹) также подчиняется условиям $\epsilon_0(k) = 0$ (следствие $A^0 = 0$) и $k_i \epsilon^i(k) = 0$ (следствие $\text{div} \vec{A} = 0$).

¹В квантовой электродинамике за взаимодействие электрона позитрона с фотоном отвечает слагаемое $ie\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$ в действии. Обращаю внимание, что сюда входит именно A_μ , а не поля \vec{E} и \vec{H} через тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Поэтому целесообразно рассматривать поляризацию именно этого вектора при расчете, например, процессов рассеяния.

Рассмотрим отдельный вклад $\epsilon_\mu(k)$, где импульс k_μ уже лежит на поверхности $k_\mu k^\mu = 0$ (иногда говорят, что импульсы лежат на массовой оболочке). Мы в праве выбрать любую удобную нам систему отсчета, например, такую где импульс равен

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (11.1.5)$$

Разрешая уравнения $\epsilon^0(k) = 0$ и $k_i \epsilon^i(k) = 0$, мы получим два линейнонезависимых решения

$$\epsilon_\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.6) \quad \boxed{\text{lin}}$$

Такие поляризации называют **линейными**. Можно выбрать и другой базис в этом двумерном пространстве

$$\epsilon_\mu^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\mu^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.7) \quad \boxed{\text{circ}}$$

Такие поляризации называют **круговыми**. Действительно, рассмотрим вещественную часть $\epsilon_\mu^{R,L}(k)e^{i\omega t}$ (будем смотреть на изменение в конкретной точке z)

$$\Re \{ \epsilon_\mu^{R,L} e^{i\omega t} \} = \Re \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \\ \mp \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.8)$$

Последнее очевидно описывает вращение единичного вектора в плоскости xy с постоянной угловой скоростью ω . Общим случаем является так называемая **эллиптическая** поляризация. Самостоятельно найдите базис, который бы реализовывал такое движение вектора поляризации.

На лекции студентами было сделано замечание, что не «существует» линейной поляризации, а бывает только циркулярная. Это утверждение требует пояснения. Как известно, в квантовой механике нет возможности измерить волновую функцию: в зависимости от того, какую величину мы измеряем волновая функция коллапсирует в собственное состояние оператора измеряемой величины. Измеряя проекция спина фотона, которую для безмассовых частиц часто называют спиральностью, мы получим только значения $+1$ и -1 , которым соответствуют векторы поляризации (11.1.7). Т.е. фотоны с линейной поляризацией существуют как суперпозиция (11.1.7), но при измерениях мы получим либо лево- либо правозакрученный фотон.

11.2 Свойства плоских электромагнитных волн

PlaneWave

Для полностью зафиксированного калибровочного произвола (11.1.3) решение для плоской волны, движущегося по оси z имеет вид (см. лекцию 3)

$$\vec{A}(ct - z), \quad (11.2.1) \quad \boxed{\text{partSol}}$$

где вектор \vec{A} ортогонален единичному вектору вдоль оси z в силу $\text{div} \vec{A} = 0$. Напряженности электрического и магнитного полей даются соответственно формулами

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{A}', \quad (11.2.2) \quad \text{Ерр}$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = -[\vec{e}_z, \vec{A}'], \quad (11.2.3) \quad \text{Нрр}$$

где \vec{A}' – это производная векторного поля \vec{A} по полному аргументу (см. (11.2.1)), а \vec{e}_z – единичный вектор вдоль направления z . Из формул (11.2.2), (11.2.3) и калибровки Кулона следует, что для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{e}_z являются взаимноперпендикулярными

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}_z. \quad (11.2.4)$$

Кроме того, как видно из формул (11.2.2) и (11.2.3) напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне совпадают по модулю

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (11.2.5)$$

Выбор конкретного решения (11.2.1) был продиктован исключительно наглядностью. Решение для плоской волны, распространяющейся вдоль некоторого единичного вектора \vec{e} будет иметь вид

$$\vec{A}(ct - (\vec{e}, \vec{r})). \quad (11.2.6)$$

Для этого решения также будут выполнены соотношения

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|, \quad \vec{H} = [\vec{e}, \vec{E}], \quad \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}. \quad (11.2.7)$$

Наконец найдем вектор Умова-Пойнтинга (см. (8.2.12))

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, [\vec{e}, \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \vec{e}. \quad (11.2.8)$$

11.3 Тензор поляризации

Следует заметить, что все рассматриваемые поля в настоящем курсе вещественные, поэтому, например, на решение (11.1.4) следует наложить соответствующие условия вещественности. Тем не менее, на практике очень удобно рассматривать комплексные поля и потом брать от них вещественную часть. Это связано с тем, что в таком подходе можно общим множителем выделить эволюцию по времени в виде комплексной экспоненты $e^{i\omega t}$, а поляризация волны будет задаваться пусть и комплексным, но константным вектором.

Далее вспомогательные комплекснозначные векторы мы будем обозначать

$$\vec{E}, \vec{H} \in \mathbb{C}^3. \quad (11.3.1)$$

Их вещественные части соответствуют наблюдаемым напряженностям электрического и магнитного полей

$$\vec{E} = \Re\{\vec{E}\} = \frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2}, \quad \vec{H} = \Re\{\vec{H}\} = \frac{\vec{H} + \vec{H}^*}{2}. \quad (11.3.2) \quad \text{LLhalhs}$$

Обратите внимание на появившиеся в знаменателях двойки. Именно таким образом они возникают в соответствующих формулах ЛЛ. Рассматривая электромагнитные волны часто говорят лишь о напряженности электрического поля поскольку воздействие на пробный заряд магнитного поля в $\frac{v}{c}$ раз меньше (см. (4.3.15))

Напряженность плоской электромагнитной волны имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i(\vec{k}, \vec{r})}. \quad (11.3.3)$$

Как правило приборы регистрируют величину квадратичную по \vec{E} , например, интенсивность (определение будет дано ниже). Рассмотрим общее квадратичное по \vec{E} выражение

$$E_i E_j = \frac{E_i + E_i^*}{2} \frac{E_j + E_j^*}{2}. \quad (11.3.4)$$

Без уменьшения общности можем считать, что прибор, с помощью которого проводятся измерения расположен в начале координат, т.е. $\vec{r} = 0$. С учетом этого замечания предыдущую формулу можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_i E_j &= \frac{1}{4} (E_{0i} e^{i\omega t} + E_{0i}^* e^{-i\omega t}) (E_{0j} e^{i\omega t} + E_{0j}^* e^{-i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (E_{0i} E_{0j} e^{2i\omega t} + E_{0i} E_{0j}^* + E_{0i}^* E_{0j} + E_{0i}^* E_{0j}^* e^{-2i\omega t}). \end{aligned} \quad (11.3.5) \quad \text{prePolar}$$

Приборы не регистрируют мгновенное значение $E_i E_j$, а измеряется лишь усредненная по времени величина (см. (10.1.3))

$$\langle E_i E_j \rangle = \frac{1}{4} (E_{0i} E_{0j}^* + E_{0i}^* E_{0j}) \quad (11.3.6) \quad \text{prePolar2}$$

остальные слагаемые обращаются в ноль после усреднения по времени. Как видно из (11.3.6) произвольная квадратичная форма $\langle E_i E_j \rangle$ для электромагнитной волны однозначно определяется в терминах тензора

$$J_{ij} := E_{0i} E_{0j}^*. \quad (11.3.7)$$

Нас интересуют исключительно поляризоционные свойства, т.е. только направления векторов \vec{E}_0 и \vec{E}_0^* , а не их абсолютные значения. Для этого вводят **тензор поляризации**

$$\rho_{ij} := \frac{J_{ij}}{J_{kk}} \equiv \frac{E_{0i} E_{0j}^*}{E_{0k} E_{0k}^*}, \quad (11.3.8) \quad \text{PolarDef}$$

где в знаменателе стоит след тензора J_{ij} (след J_{kk} – вещественен). Определенный таким образом тензор поляризации обладает следующими свойствами

$$\rho_{ii} = 1, \quad \rho_{ij}^* = \rho_{ji}. \quad (11.3.9)$$

Рассмотрим некоторые примеры:

- Для **линейно поляризованного света** вектор \vec{E}_0 вещественен (см. (11.1.6)). Пусть \vec{e} – единичный вектор вдоль \vec{E}_0 , который ортогонален волновому вектору $\vec{e} \perp \vec{k}$. Таким образом тензор поляризации для линейно поляризованного света имеет вид

$$\rho_{ij}^{lin.} = e_i e_j. \quad (11.3.10) \quad \text{pLin}$$

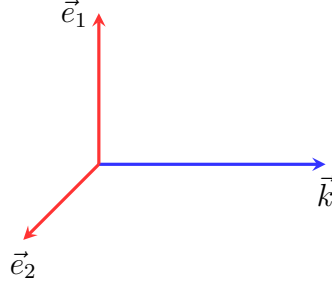


Рис. 11.1: Волновой вектор \vec{k} и лежащие в перпендикулярной ему плоскости взаимноортогональные векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2

Polar

- Для **циркулярно поляризованного света** вектор \vec{E}_0 комплексный (см. (11.1.7)). Рассмотрим пару ортогональных векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , которые ортогональны волновому вектору \vec{k} (см. рисунок 11.1). Векторы \vec{E}_0 для лево- или правозакрученного света могут быть соответственно представлены в виде

$$\vec{E}_0^L = |\vec{E}_0| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad \vec{E}_0^R = |\vec{E}_0| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - i\vec{e}_2). \quad (11.3.11)$$

Подставляя полученные выражения в формулу для тензора поляризации мы получим

$$\rho_{ij}^{circ.L} = \frac{1}{2} (e_{1i} + ie_{2i})(e_{1j} - ie_{2j}) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j})}_{\text{проектор}} - i \underbrace{(e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i})}_{\text{антисимметрично}} \right). \quad (11.3.12)$$

Для $\rho_{ij}^{circ.R}$ справедливо аналогичное выражение, которое может быть получено комплексным сопряжением, т.е. $\rho_{ij}^{circ.R} = (\rho_{ij}^{circ.L})^*$. Выделенное слагаемое $e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j}$ является проектором на подпространство ортогональное волновому вектору (продумайте) и может быть представлено в виде

$$e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (11.3.13)$$

Второе слагаемое $e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i}$ антисимметрично по индексам $i \leftrightarrow j$ и может быть эквивалентно представлено в виде

$$e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i} = e_{1m}e_{2n}(\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}) = e_{1m}e_{2n} \epsilon_{pmn} \epsilon_{pij} = \epsilon_{pij} \frac{k_p}{k}. \quad (11.3.14)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{k}/|\vec{k}|$ (см. рисунок 11.1). Таким образом тензор поляризации для циркулярно поляризованного света имеет вид

$$\rho_{ij}^{circ.L} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} - i \epsilon_{ijp} \frac{k_p}{k} \right), \quad (11.3.15) \quad \text{pCircL}$$

$$\rho_{ij}^{circ.R} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + i \epsilon_{ijp} \frac{k_p}{k} \right). \quad (11.3.16) \quad \text{pCircR}$$

- Для естественно поляризованного света вещественный вектор \vec{E}_0 нужно усреднить по всем направлениям, ортогональным волновому вектору. Поскольку эта задача уже решалась в первом задании, то сразу выпишем ответ

$$\rho_{ij}^{nat.} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (11.3.17) \quad \boxed{\text{pNat}}$$

Обратим внимание на то, что ЛЛ рассматривается двумерный тензор поляризации $\rho_{\alpha\beta}$ в плоскости, ортогональной волновому вектору, т.е. индексы принимают лишь два значения. Такое представление не совсем удобно для решения задачи о рассеянии электромагнитных волн на зарядах (см. лекцию 14).

11.4 Неоднородное уравнение Максвелла и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим теперь уравнение Максвелла в присутствии внешних источников, с наложенным на 4-потенциал условием Лоренца, оно имеет вид

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (11.4.1) \quad \boxed{\text{WaveInh}}$$

Условие Лоренца позволило свести вторую пару уравнений Максвелла (5.4.9) к набору из 4-х волновых уравнений. Обращаю ваше внимание на тонкое место: решение уравнения (11.4.1) априори не является решением уравнений Максвелла (5.4.9). Чтобы решить уравнения Максвелла нужно решить систему! (см. аналогичное обсуждение в лекции 10)

$$\begin{cases} \square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \\ \partial_\mu A^\mu = 0. \end{cases} \quad (11.4.2) \quad \boxed{\text{MaxLor}}$$

Сосредоточимся пока на первом уравнение этой системы, чтобы его решить нам нужно найти функцию Грина волнового уравнения, которая удовлетворяет уравнению

$$\square_x G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (11.4.3) \quad \boxed{\text{WavGreen}}$$

С ее помощью решение первого уравнения системы (11.4.2) можно записать в виде

$$A^\nu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y G(x, y) J^\nu(y). \quad (11.4.4) \quad \boxed{\text{almost}}$$

По этой формуле мы можем найти поле $A^\nu(x)$ по заданной функции источников $J^\nu(y)$. Тем не менее, если на функцию $G(x, y)$ не наложено никаких ограничений, то для нахождения поля в момент времени x^0 нам нужно знать функции источников как во все предшествующие моменты времени $y^0 < x^0$, так и во все последующие $y^0 > x^0$. Т.е. без наложения ограничений на функцию Грина поле A^ν в момент времени x^0 «знает» о том, как будут вести себя поля источников в будущем, последнее естественно нарушает фундаментальный принцип причинности. Чтобы избежать подобных парадоксов мы будем искать решение

уравнения (11.4.3) такое, чтобы $G(x, y) = 0$ при $x^0 - y^0 < 0$, такую функцию Грина будем называть **запаздывающей**.

Решать уравнение (11.4.3) мы будем с помощью преобразования Фурье

$$G(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}, \quad (11.4.5) \quad \boxed{\text{gREPR}}$$

$$\delta^{(4)}(x - y) := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}. \quad (11.4.6)$$

После подстановки этих выражений в (11.4.3) мы получим следующее алгебраическое уравнение на $\tilde{G}(k)$

$$-k_\mu k^\mu \tilde{G}(k) = 1 \implies \tilde{G}(k) = -\frac{1}{k_\mu k^\mu} = -\frac{1}{k^2}. \quad (11.4.7) \quad \boxed{\text{Green4Mom}}$$

Следует обратить внимание на важное отличие функции Грина волнового уравнения от функции Грина уравнения Пуассона, для которого получилось схожее уравнение на фурье-образ (9.2.9). Для уравнения Пуассона соответствующий знаменатель обращался в ноль лишь в одной единственной точке из-за положительной определенности Евклидова скалярного произведения, в отличие от (11.4.7), где выражение сингулярно на поверхности (световом конусе). Последнее приводит к тому, что после подстановки (11.4.7) в (11.4.5) соответствующий интеграл расходится. Эта расходимость ни в коем случае не является патологией волнового уравнения, просто соответствующий интеграл необходимо доопределить (подробности и справедливость такого рода доопределений вам будет изложена в курсе уравнений математической физики).

Сам интеграл имеет вид

$$G(x, y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{k^2} = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}, \vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0^2 - \vec{k}^2}. \quad (11.4.8) \quad \boxed{\text{genG}}$$

Рассмотрим отдельно интеграл по k_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0^2 - \vec{k}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{2|\vec{k}|} \left(\frac{1}{k_0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k_0 + |\vec{k}|} \right). \quad (11.4.9)$$

Для решения проблемы с расходимостями нужно каким-то образом обойти полюса $k_0 = \pm|\vec{k}|$. Всего существует 4 способа, но нас интересует только такой, при котором функция Грина обращается в ноль для $x^0 - y^0 < 0$. Для этого выберем обход таким образом, чтобы ни один из этих полюсов не охватывался контуром после его замыкания по лемме Жордана в случае $x^0 - y^0 < 0$. При $x^0 - y^0 < 0$ из-за экспоненты контур следует замыкать в нижней полуплоскости – контур Γ_2 , соответствующий обход полюсов изображен на рисунке 11.2. Нетривиальный вклад будет только при $x^0 - y^0 > 0$, когда контур необходимо замыкать в верхней полуплоскости – контур Γ_1 . Интеграл по контуру Γ_1 равен

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{2|\vec{k}|} \left(\frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0 - |\vec{k}|} - \frac{e^{ik_0(x^0 - y^0)}}{k_0 + |\vec{k}|} \right) = \frac{i}{2|\vec{k}|} (e^{i|\vec{k}|(x^0 - y^0)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0 - y^0)}). \quad (11.4.10)$$

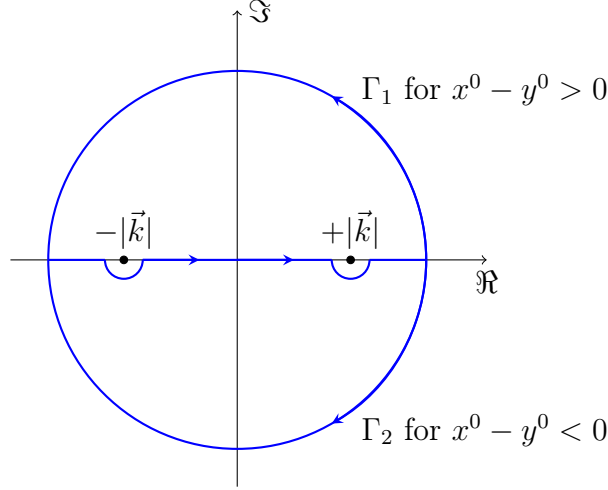


Рис. 11.2: Правила обхода полюсов для запаздывающей функции Грина.

contours2

После вычисления интеграла по k_0 мы имеем следующее выражение для функции Грина

$$G_{ret}(x, y) = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}, \vec{x} - \vec{y})} \theta(x^0 - y^0) \frac{i}{2|\vec{k}|} (e^{i|\vec{k}|(x^0 - y^0)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0 - y^0)}) . \quad (11.4.11)$$

Здесь мы добавили индекс *ret* (от англ. retarded) поскольку из-за правила обхода полюсов мы получили тетта-функцию, определяемую как

$$\theta(\tau) := \begin{cases} 1 & \text{for } \tau > 0 \\ 0 & \text{for } \tau < 0 \end{cases} , \quad (11.4.12)$$

которая эффективно обеспечивает причинность (запаздывание) функции Грина. Для вычисления интеграла $\int d^3 \vec{k}$ перейдем в сферические координаты (ось z в импульсном пространстве направлена вдоль вектора $\vec{x} - \vec{y}$)

$$\begin{aligned} G_{ret}(x, y) &= \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi k \theta(x^0 - y^0) e^{ik|\vec{x} - \vec{y}| \cos \theta} (e^{ik(x^0 - y^0)} - e^{-ik(x^0 - y^0)}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty dk (e^{ik|\vec{x} - \vec{y}|} - e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}) (e^{ik(x^0 - y^0)} - e^{-ik(x^0 - y^0)}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty dk (e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} + e^{-ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} - e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))} - e^{-ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi) |\vec{x} - \vec{y}|} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} (e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| + (x^0 - y^0))} - e^{ik(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0))}) = \\ &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{2(2\pi) |\vec{x} - \vec{y}|} (\delta(x^0 - y^0 + |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)) = \\ &= \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} . \quad (11.4.13) \end{aligned}$$

Здесь в последней строчке мы воспользовались тем, что $\theta(x^0 - y^0)\delta(x^0 - y^0 + |\vec{x} - \vec{y}|) = 0$, так как из-за тета-функции аргумент дельта-функции всегда положителен и никогда не равен нулю. Таким образом, мы получили, что **запаздывающая функция Грина волнового уравнения** равна²

$$G_{ret}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = \frac{\delta(ct - ct' - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{4\pi c |\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right). \quad (11.4.14) \quad \boxed{\text{Gret}}$$

Тем, кто сомневается в законности доопределений расходящихся интегралов рекомендуется прямой проверкой убедиться, что (11.4.14) действительно решает уравнение (11.4.3).

Покажем наконец, что выражение (11.4.4) также решает второе уравнение системы (11.4.2). Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_\nu A^\nu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y \frac{\partial}{\partial x^\nu} G_{ret}(x - y) J^\nu(y) = -\frac{4\pi}{c} \int d^4y \frac{\partial}{\partial y^\nu} (G_{ret}(x - y)) J^\nu(y) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y G_{ret}(x - y) \frac{\partial}{\partial y^\nu} J^\nu(y) = 0. \end{aligned} \quad (11.4.15)$$

Здесь мы явно воспользовались тем, что функция Грина зависит лишь от разности $x^\mu - y^\mu$ и после интегрирования по частям воспользовались уравнением непрерывности $\partial_\mu J^\mu = 0$. Выражения для скалярного и векторного потенциалов соответственно могут быть записаны в виде

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int d^3\vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c |\vec{r} - \vec{x}|} c\rho(\vec{x}, \tau) = \int d^3\vec{x} \frac{\rho\left(\vec{x}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad (11.4.16) \quad \boxed{\text{phiRet}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int d^3\vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c |\vec{r} - \vec{x}|} \vec{j}(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x} \frac{\vec{j}\left(\vec{x}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad (11.4.17) \quad \boxed{\text{ARet}}$$

где в каждом случае для получения последнего выражения было выполнено тривиальное интегрирование по τ .

²В физике также рассматривают еще, например, опережающую G_{adv} и фейнмановскую G_F , которые соответствуют другим способам обхода полюсов. Несмотря на то что причинной в смысле уравнения (11.4.3) является только G_{ret} появление в выражениях КТП G_F отнюдь не означает, что где-то нарушена причинность.

Лекция 12

23 ноября 2022

12.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Рассмотрим одну! частицу, двигающуюся с релятивистской скоростью. Плотность заряда и плотность тока соответственно равны¹

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e\dot{\vec{r}}_0(t)\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \quad (12.1.1) \quad \text{rho_\&_j}$$

С помощью запаздывающей функции Грина (11.4.14) мы можем найти скалярный и векторный потенциалы. Подставив плотность точечной частицы (12.1.1) в (11.4.16) и выполняя тривиальное интегрирование по \vec{x} , мы получим

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int d\tau \int d^3\vec{x} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c|\vec{r} - \vec{x}|} ce\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_0(\tau)) = \\ &= \int d\tau \frac{e\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}. \end{aligned} \quad (12.1.2) \quad \text{preLV}$$

Здесь аргумент дельта-функции – сложная функция от τ . Пусть t' – это решение уравнения

$$t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} = 0. \quad (12.1.3) \quad \text{retEq}$$

Если частица движется медленнее скорости света, то у этого уравнения **единственное** решение (продумайте!). Время t' называют **запаздывающим временем** или **временем запаздывания**. Физический смысл запаздывающего времени состоит в следующем. Пусть известна траектория частицы как функция времени, нас интересует потенциал в точке \vec{r} в момент времени t . Время $(t - t')$ – это время, за которое свет из точки $\vec{r}_0(t')$ дойдет до точки наблюдения \vec{r} (см. рисунок 12.1). Используя (12.1.3), мы можем преобразовать дельта-функцию

$$\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right) = \frac{\delta(\tau - t')}{\left|\frac{\partial}{\partial \tau}\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right)\right|_{\tau=t'}} = \frac{\delta(\tau - t')}{1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'), -\dot{\vec{r}}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}}. \quad (12.1.4) \quad \text{deltaTr}$$

¹Плотности заряда и тока можно представить и в явно Лоренц-ковариантной форме (8.4.16), но данное представление не совсем удобно для дальнейшего анализа полей \vec{E} и \vec{H} .

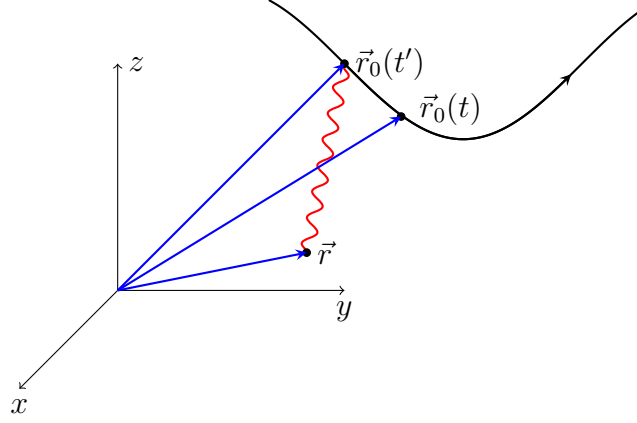


Рис. 12.1: Иллюстрацию к запаздывающему времени. Поле в точке \vec{r} в момент времени t определяется свойствами траектории частицы в момент времени t' .

RetTime

В дальнейшем будем использовать сокращенные обозначения из ЛЛ

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t'), \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}, \quad \vec{v}(t') = \dot{\vec{r}}_0(t'). \quad (12.1.5)$$

В новых терминах выражение (12.1.4) принимает вид

$$\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}\right) = \frac{\delta(\tau - t')}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.1.6)$$

Подставляя в таком виде дельта-функцию в (12.1.2) и выполняя оставшееся интегрирование по τ , мы получим

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau \frac{e\delta(\tau - t')}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} = \frac{e}{R\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}. \quad (12.1.7) \quad \text{phiLV}$$

Действуя аналогичным образом, мы получим выражение для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d\tau \frac{e\dot{\vec{r}}_0(\tau) \delta(\tau - t')}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} = \frac{e\vec{v}}{cR\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}. \quad (12.1.8) \quad \text{ALV}$$

Выражения (12.1.7), (12.1.8) называют **(запаздывающими) потенциалами Лиенара-Вихерта**. Выражения для скалярного и векторного потенциалов (12.1.7) и (12.1.8) могут быть объединены в 4-потенциал и представлены в явно Лоренц-ковариантном виде

$$A^\mu = e \frac{u^\mu}{\mathcal{R}_\nu u^\nu}, \quad (12.1.9) \quad \text{relLV}$$

где 4-вектор \mathcal{R}_ν определяется как

$$\mathcal{R}^\nu = \begin{pmatrix} c(t - t') \\ \vec{r} - \vec{r}_0(t') \end{pmatrix}. \quad (12.1.10) \quad \text{calR}$$

Настоятельно рекомендую проверить, что из (12.1.9) действительно получаются выражения (12.1.7), (12.1.8)!

12.2 Напряженности \vec{E} и \vec{H} из запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта

2.1 Словарик производных

Напряженности полей через потенциалы даются выражениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad (12.2.1) \quad \boxed{\text{EHLV}}$$

но выражения для потенциалов (12.1.7), (12.1.8) определяются с помощью неявно заданной функции $t'(\vec{r}, t)$ через уравнение (12.1.3).

Продифференцируем уравнение (12.1.3) по t и выразим производную $\partial t' / \partial t$

$$1 - \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{(\vec{R}, -\vec{v})}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.2.2) \quad \boxed{\text{pt_prime}}$$

Также для вычисления напряженностей нам нужно знать градиент $\nabla t'$. Снова продифференцируем уравнение (12.1.3)

$$-\partial_i t' - \frac{1}{c} \frac{R_j (\delta_{ij} - v_j \partial_i t')}{R} = 0 \implies \partial_i t' = -\frac{n_i}{c - n_j v_j} \iff \nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c - (\vec{n}, \vec{v})}. \quad (12.2.3)$$

Используя формулы для производных запаздывающего времени, вычислим производные по времени от \vec{R} и R

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{v}}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}, \quad (12.2.4)$$

и пространственные производные

$$\partial_i R_j = \delta_{ij} - v_j \partial_i t' = \delta_{ij} + \frac{n_i v_j}{c - n_k v_k}, \quad \partial_i R = n_i + \frac{n_i n_j v_j}{c - n_k v_k} \iff \nabla R = \frac{\vec{n}}{1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}. \quad (12.2.5)$$

2.2 Вычисление напряженностей

Вычислим напряженность, отвечающую потенциалам (12.1.7) и (12.1.8).

- Вычислим градиент скалярного потенциала

$$\begin{aligned} \partial_i \phi &= \partial_i \left(\frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)} \right) = -\frac{e}{R^2} \frac{R_i}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} - \frac{e}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \partial_i \left(-\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right) = \\ &= -\frac{e R_i}{R^3 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} + \frac{e}{c R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \partial_i \left(\frac{R_j v_j}{R} \right) = \\ &= \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)^2} \left[-\frac{R_i}{R^2} + \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{R} \left(\delta_{ij} + \frac{n_i v_j}{c - (\vec{n}, \vec{v})} \right) v_j - \frac{R_j v_j}{R^2} \frac{n_i}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R_j v_j}{R} \frac{n_i}{c - (\vec{n}, \vec{v})} \right\} \right]. \quad (12.2.6) \end{aligned}$$

Здесь для ускорения мы ввели следующее обозначение

$$\vec{w} := \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}(t')}{\partial t'}, \quad (12.2.7)$$

т.е. это производная скорости по запаздывающему времени. Далее будем использовать векторные обозначения. Градиент скалярного потенциала в векторных обозначениях соответственно равен

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \\ &= \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[-\frac{\vec{n}}{R} + \frac{\vec{v}}{cR} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\vec{n}}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \frac{\vec{n}}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} - \frac{(\vec{n}, \vec{w})}{c^2} \frac{\vec{n}}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] = \\ &= \frac{e\vec{v}}{cR^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} - \frac{e\vec{n}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] - \\ &\quad - \frac{e(\vec{n}, \vec{w})\vec{n}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3}. \quad (12.2.8) \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получим окончательное выражение в виде

$$\nabla \phi = \frac{e\vec{v}}{cR^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} - \frac{e\vec{n} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e(\vec{n}, \vec{w})\vec{n}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \quad (12.2.9) \quad \boxed{\text{gradPhi}}$$

- Вычислим производную по времени векторного потенциала

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{e\vec{w}}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} + \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} + \\ &+ \frac{e\vec{v}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left\{ \frac{-v^2}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{(\vec{n}, \vec{w})}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{(\vec{n}, \vec{v})^2}{R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right\} = \\ &= \frac{e}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n}, \vec{w})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] + \\ &+ \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} + \frac{\left(\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right]. \quad (12.2.10) \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получим окончательное выражение в виде

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{cR \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n}, \vec{w})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)} \right] + \frac{e\vec{v}}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \left[\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (12.2.11) \quad \boxed{\text{partA}}$$

Подставляя найденные производные (12.2.9) и (12.2.11) в (12.2.1), мы получим

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} + \frac{e\vec{n}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \frac{e(\vec{n},\vec{w})\vec{n}}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \\
&\quad - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n},\vec{w})}{c\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] - \frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right] = \\
&= -\frac{e\vec{v}}{cR^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[1 + \frac{\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}}{\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} - \frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] + \frac{e\vec{n}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \\
&\quad + \frac{e\vec{n}(\vec{n},\vec{w})}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^2} \left[\vec{w} + \frac{\vec{v}(\vec{n},\vec{w})}{c\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)} \right] = \\
&= \frac{e\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} - \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[-\vec{n}(\vec{n},\vec{w}) + \vec{w} - \vec{w}\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c} + \frac{\vec{v}}{c}(\vec{n},\vec{w}) \right]. \quad (12.2.12)
\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно переписать через двойное векторное произведение

$$\begin{aligned}
&\left(-\underbrace{\vec{n}}_c(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{w}}_b) + \underbrace{\vec{w}}_b(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{n}}_c) \right) + \frac{1}{c} \left(\underbrace{\vec{v}}_b(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{w}}_c) - \underbrace{\vec{w}}_c(\underbrace{\vec{n}}_a, \underbrace{\vec{v}}_b) \right) = \\
&= -[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{w}]] + \left[\vec{n}, \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right] = -\left[\vec{n}, \left[\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right]. \quad (12.2.13)
\end{aligned}$$

В итоге имеем следующее выражение для напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \frac{e\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} + \frac{e}{c^2R\left(1-\frac{(\vec{n},\vec{v})}{c}\right)^3} \left[\vec{n}, \left[\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}, \vec{w} \right] \right]. \quad (12.2.14) \quad \boxed{\text{E}_{LV}}$$

Аналогично, используя вторую формулу (12.2.1), мы получим выражения для напряженности магнитного поля. Оказывается, что магнитное поле всюду перпендикулярно электрическому и дается простым выражением в терминах (12.2.14)

$$\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E} \right]. \quad (12.2.15) \quad \boxed{\text{H}_{LV}}$$

Выражение для напряженности электрического поля и как следствие (12.2.15) для магнитного поля состоит из двух типов слагаемых: пропорциональных $1/R$ и пропорциональных $1/R^2$. Слагаемые первого типа, как будет видно ниже, отвечают за излучение электромагнитных волн, а расстояния (большие значения R), на которых эти слагаемые дают доминирующий вклад в напряженность, называют **волновой зоной**. Слагаемые

второго типа зависят только от скорости частицы и отвечает полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Они дают доминирующий вклад на малых расстояниях, так называемая **квазистационарная зона**. Несмотря на огромную важность излучения квазистационарные поля также находят применение в нашей повседневной жизни. В частности квазистационарные поля используются в технологии передачи информации NFC (Near Field Communication).

12.3 Дипольное приближение

ip_approx

Выражения (12.2.14) и (12.2.15) – это точные решения уравнений Максвелла с источником (12.1.1). Далее мы будем последовательно упрощать формулы рассматривая различные приближения.

Рассмотрим приближение медленно движущейся частицы, т.е.

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (12.3.1) \quad \text{nonRel}$$

и будем интересоваться полем, отвечающему излучению электромагнитных волн. Напряженность электрического поля в этом случае дается выражением

$$\vec{E}\Big|_{v/c \ll 1} \approx \frac{e [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{w}]]}{c^2 R} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}]]}{c^2 R} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{R}{c})]]}{c^2 R}. \quad (12.3.2) \quad \text{preDipole}$$

Здесь мы воспользовались определением дипольного момента $\vec{d} = e\vec{r}_0$. Обращаю ваше внимание, что в этой формуле \vec{n} отнюдь не единичный направляющий вектор в точку наблюдения как это было, например, в мультипольном разложении электростатики.

Будем считать, что заряд совершает финитное периодическое движение в окрестности начала координат и улетает от начала координат не более чем на a , а модуль радиус-вектора в точку наблюдения r много больше a

$$\frac{a}{r} \ll 1. \quad (12.3.3) \quad \text{large_dis}$$

В этом случае для R справедливо разложение

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = r \left(1 + \frac{(\vec{r}, \vec{r}_0(t'))}{r^2} + \dots \right). \quad (12.3.4)$$

В **дипольном приближении** мы ограничиваемся лишь первым слагаемым, т.е.

$$R_{dipole} \approx |\vec{r}|. \quad (12.3.5) \quad \text{R_dipole}$$

В таком приближении в формулу (12.3.2) можно упростить до

$$\vec{E}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} = \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c})]]}{c^2 r}, \quad (12.3.6) \quad \text{preDipole}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$ – единичный направляющий вектор в точку наблюдения.

Мы не просто так оставили аргумент дипольного момента нетронутым. Несмотря на то что в дипольном приближении справедливо (12.3.5) следует все же очень аккуратно применять его когда дело касается временных аргументов. Рассмотрим входящий в (12.3.6) дипольный момент, из-за малости $|\vec{r}_0|/|\vec{r}| \ll 1$ аргумент можно представить в виде

$$\vec{d} \left(t - \frac{r}{c} + \underbrace{\frac{(\vec{n}, \vec{r}_0)}{c}} + \dots \right). \quad (12.3.7) \quad \text{dipArg}$$

Пренебрегать выделенным слагаемым на основании его сравнения с r/c не имеет никакого смысла! Мы рассматриваем периодическое движение, поэтому из r/c , например, можно вычесть полные периоды и выделенная добавка может уже оказаться того же порядка, что и r/c . Выделенное в (12.3.7) выражение следует сравнивать с периодом T функции $\vec{d}(t)$ и пренебречь им можно в случае

$$\frac{a}{c} \ll T \iff a \ll cT \implies a \ll \lambda. \quad (12.3.8) \quad \text{lambda}$$

Следует заметить, что это ограничение и есть малость скорости частицы (12.3.1). Действительно, удаление частицы от начала координат a можно представить как $a = vT$, тогда из (12.3.8) имеем

$$\frac{vT}{c} \ll T \implies \frac{v}{c} \ll 1. \quad (12.3.9)$$

В итоге формулу (12.3.6) можно упростить до

$$\vec{E} \Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} \approx \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(t - \frac{r}{c})]]}{c^2 r}. \quad (12.3.10) \quad \text{E_dip}$$

Еще раз обращаю ваше внимание, что аргумент дипольного момента был упрощен НЕ в силу (12.3.5), а в силу (12.3.8).

На самом деле кроме неравенств (12.3.3) и (12.3.8) неявно предполагается также что выполнено

$$r \gg \lambda. \quad (12.3.11)$$

Если бы λ было наибольшим масштабом, то из двух слагаемых (12.2.14) большим бы уже было квазистационарное. Действительно, предположим, что дипольный момент меняется по гармоническому закону

$$\ddot{\vec{d}} = -\omega^2 \vec{d}, \quad (12.3.12)$$

тогда в нерелятивистском пределе имеем

$$\vec{E} \Big|_{v/c \ll 1} \approx \frac{e\vec{n}}{r^2} - \frac{\omega^2 [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{d}]]}{c^2 r} \approx \frac{e\vec{n}}{r^2} - \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{d}]]}{\lambda^2 r}, \quad \frac{1}{r^2} \gg \frac{a}{\lambda^2 r} \text{ при } \lambda \gg r \gg a. \quad (12.3.13)$$

Таким образом имеем цепочку неравенств на параметры

$$r \gg \lambda \gg a, \quad (12.3.14)$$

в силу которых справедлива формула (12.3.10) для напряженности электрического поля в **волновой зоне** в **дипольном приближении**.

Используя формулу (12.2.15), найдем в дипольном приближении напряженность магнитного поля

$$\vec{H}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} \approx -\frac{[\vec{n}, \ddot{\vec{d}}]}{c^2 r} \quad (12.3.15)$$

и вектор Умова-Пойнтинга

$$\vec{S}\Big|_{a/r \ll 1, v/c \ll 1} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{\vec{n} (\ddot{\vec{d}}^2 - (\vec{n}, \ddot{\vec{d}})^2)}{4\pi c^3 r^2}. \quad (12.3.16)$$

Далее для краткости мы не будем уточнять в каких предположениях была получена формула. **Интенсивностью** будем называть мощность переносимую электромагнитной волной. В частности в телесный угол $d\Omega$ бесконечно удаленной сферы в единицу времени будет уноситься энергия

$$\frac{dI}{d\Omega} = (\vec{S}, \vec{n}) r^2 d\Omega = \frac{\ddot{\vec{d}}^2 - (\vec{n}, \ddot{\vec{d}})^2}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}]^2}{4\pi c^3}. \quad (12.3.17)$$

dif_inten

Эту формулу называют **дифференциальной интенсивностью дипольного излучения**. Саму формулу также можно представить графически в виде так называемой диаграммы направленности (см. рисунок 12.2). **Полная интенсивность дипольного из-**

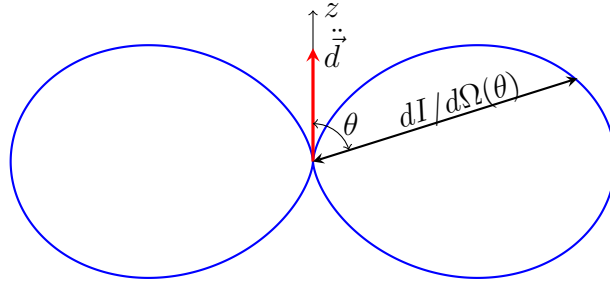


Рис. 12.2: Сечение диаграммы направленности для дипольного излучения.

dipDir

лучения равна интегралу по телесному углу от дифференциальной

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega. \quad (12.3.18)$$

Вычислять полную интенсивность будем в сферических координатах, направив ось z вдоль вектора $\ddot{\vec{d}}$. Имеем

$$I = \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\ddot{\vec{d}}^2 (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3} \frac{4}{3} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}^2. \quad (12.3.19)$$

int_inten

Несмотря на то что формула для интенсивности была получена с учетом ряда предположений, для некоторых движений она является точной! Например, если частица в момент времени t' покоилась в начале координат, то формулы (12.3.17) и (12.3.19) дают «честные» выражения для дифференциальной и полной интенсивностей соответственно.

Лекция 13

30 ноября 2022

13.1 Синхротронное излучение

1.1 Мощность

Рассмотрим движение релятивистского электрона по окружности. Из формулы (12.2.14) мы знаем, что напряженности электрического и магнитного полей в **лабораторной системе отсчета**, отвечающие излучению, равны

$$\vec{E}_{\text{изл.}}(\vec{r}, t) = \frac{e [\vec{n}, [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}), \vec{w}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \bigg|_{t'}, \quad \vec{H}_{\text{изл.}} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (13.1.1)$$

Вектор Умова-Пойнтинга для такой полевой конфигурации равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{изл.}}^2 \vec{n}. \quad (13.1.2)$$

Следовательно в единицу **лабораторного** времени, в телесный угол $d\Omega$ уносится следующее количество энергии

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left(\frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}), \vec{w}]]}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^3} \right)^2 d\Omega dt. \quad (13.1.3) \quad \boxed{\text{rel_int}}$$

Далее будем рассматривать потери энергии в единицах запаздывающего времени t' (см. (12.2.2))

$$dt = \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) dt'. \quad (13.1.4) \quad \boxed{\text{t_t_prime}}$$

Таким образом за единицу запаздывающего времени через телесный угол $d\Omega$ уносится

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|[\vec{n}, [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}), \vec{w}]]|^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^5} d\Omega. \quad (13.1.5)$$

Рассмотрим **мгновенно сопутствующую систему отсчета** K' , т.е. систему отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится. В этой системе отсчета легко вычислить полную потерю энергии в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int d\Omega \left(\vec{w}^2 - (\vec{n}, \vec{w})^2 \right) = \frac{e^2}{4\pi c^3} 2\pi \vec{w}^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 - \cos^2\theta) = \frac{2e^2 \vec{w}^2}{3c^3}. \quad (13.1.6) \quad \boxed{\text{lose1}}$$

Последняя формула совпадает с полной интенсивность дипольного излучения (см. (12.3.19)), но является при этом точным! результатом (см. также обсуждении после (12.3.19)). В силу симметрий распределения дипольного излучения (см. рисунок 12.2) импульс электромагнитным полем не уносится, т.е. изменение 4-импульса частицы за время dt' в системе K' имеет вид

$$dP^\mu = \begin{pmatrix} -d\mathcal{E}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.1.7)$$

При переходе в другую систему отсчета, например, в лабораторную мы получим

$$d\tilde{P}^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu dP^\nu = \begin{pmatrix} -\gamma d\mathcal{E}/c \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} \quad (13.1.8) \quad \boxed{\text{diez}}$$

Здесь $\#$ – некоторые выражения, являющиеся линейными комбинациями $d\mathcal{E}$ и элементов матрицы $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$, явный вид которых не важен для дальнейшего анализа. Аналогично для координат частицы в пространстве времени имеем

$$dx'^\mu = \begin{pmatrix} c dt' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.1.9)$$

где пространственные компоненты равны нулю, так как по нашему предположению в момент времени t' частица покоится. При переходе в другую систему отсчета мы получим

$$d\tilde{x}'^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu dx'^\nu = \begin{pmatrix} \gamma c dt' \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}. \quad (13.1.10)$$

Здесь аналогично (13.1.8) $\#$ – линейные комбинации dt' и элементов матрицы $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$, явный вид которых не важен. Таким образом мы имеем, что отношение, которое далее будем называть **мощностью синхротронного излучения**,

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\tilde{t}'} = \frac{\gamma d\mathcal{E}}{\gamma dt'} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = W \quad (13.1.11)$$

является релятивистским инвариантом! Т.е. потеря энергии частицы на излучение в единицу запаздывающего времени может быть вычислена в любой системе отсчета. Эту величину можно также представить в явно Лоренц-инвариантной форме, которую называют **формулой Лармора**¹, с помощью 4-ускорения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2c}{3} w^\mu w_\mu, \quad (13.1.12)$$

само 4-ускорение в терминах трехмерных величин даётся формулой

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \left(\frac{\gamma^4}{c^3} (\vec{v}, \vec{w}) \right) \cdot \quad (13.1.13)$$

Также в приложениях полезна формула для скалярного квадрата 4-ускорения

$$w_\mu w^\mu = -\frac{\gamma^6}{c^4} \left(\vec{w}^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{w}]^2 \right). \quad (13.1.14)$$

Призываю вас не путать мощность синхротронного излучения с интенсивностью, которую зафиксирует наблюдатель в лаборатории. Не следует думать, что различия обусловлены тем, что где-то не сохраняется энергия: сколько частица излучила – столько зарегистрирует прибор! Различие обусловлено крайне нетривиальной связью запаздывающего времени с лабораторным через уравнение (12.1.3). Также стоит отметить, что в отличие от мощности интенсивность синхротронного излучения НЕ является релятивистским инвариантом и вычисляется по формуле

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \frac{|\vec{n}, [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}), \vec{w}]]|^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^6} d\Omega. \quad (13.1.15)$$

Кажущееся незначительным изменение степени в знаменателе в сравнении с (13.1.6), сильно затрудняют вычисление на практике.

1.2 Угловое и спектральное распределения

Если в формуле (13.1.3) явно раскрыть квадрат, то получим следующее выражение для дифференциальной интенсивности синхротронного излучения

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{2(\vec{n}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})}{c \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^5} + \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\vec{n}, \vec{w})^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^6} \right] d\Omega. \quad (13.1.16) \quad \boxed{\text{true_int}}$$

Излучение углового распределения синхротронного излучения в общем случае является сложной задачей и выходит за рамки настоящего курса. Мы же рассмотрим предел ультрарелятивистских частиц, т.е.

$$1 - \frac{v}{c} \ll 1. \quad (13.1.17)$$

¹Формулу (13.1.6) для потерь излучения в единицу запаздывающего времени в сопутствующей системе отсчета K' через трехмерное ускорение в литературе также называют формулой Лармора.

В этом случае следует обратить внимание на знаменатели в формуле (13.1.16): интенсивность будет значительной если знаменатель близок к нулю, т.е.

$$\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \sim 0 \iff 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \sim 0. \quad (13.1.18)$$

Здесь θ – угол между векторами \vec{n} и \vec{v} . Раскладывая косинус в ряд получим

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \sim 0 \implies \theta \sim \sqrt{1 - \frac{v}{c}}. \quad (13.1.19)$$

Исключительно из соображений красоты² последнее соотношение также может быть представлено в форме

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (13.1.20)$$

Таким образом основная часть синхротронного излучения ультрарелятивистской частицы приходится в узкий конус раствора $1/\gamma$ в направлении скорости частицы (см. рисунок 13.1).

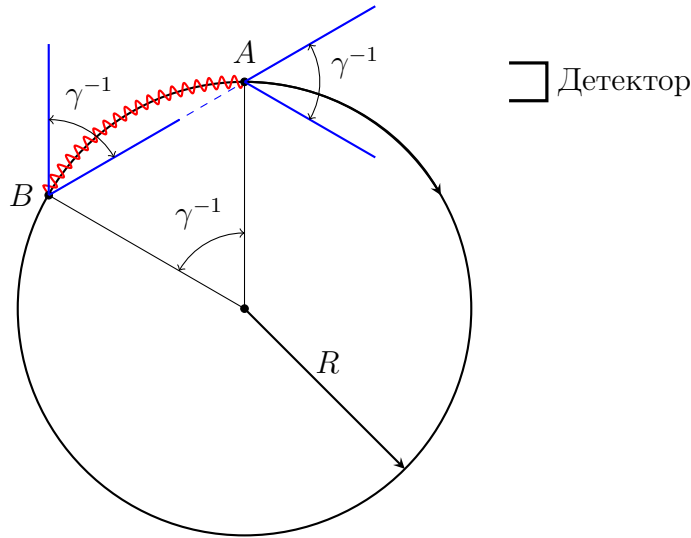


Рис. 13.1: Иллюстрацию к синхротронному излучению ультрарелятивистской частицы. Излучение в точке A будет состоять (сформировано) из электромагнитных волн, излученных при движении частице по дуге $BA = R/\gamma$, которую называют **длиной формирования излучения** или **длиной когерентности**.

synchr

Ответ на вопрос о спектральном распределении также содержится в формуле (13.1.16) и в литературе вы можете найти спектр синхротронного излучения, который выражается через спец. функции. Мы же попытаемся ответить на вопрос качественно. Из-за того, что частица «светит» в узкий конус, то детектор будет регистрировать короткие импульсы, длина которых в единицах **запаздывающего времени** равна

$$\Delta t' = \frac{R}{\gamma v}. \quad (13.1.21) \quad \text{delta1}$$

²Общий множитель $\sqrt{2}$ естественно не существует при грубой оценке.

Наблюдатель в лаборатории согласно (13.1.4) зарегистрирует длительность

$$\Delta t = \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \Delta t' \approx \gamma^{-2} \Delta t'. \quad (13.1.22) \quad \text{delta2}$$

Таким образом с учетом (13.1.21) и (13.1.22) мы можем оценить длительность принимаемых детектором импульсов как

$$\Delta t \approx \gamma^{-2} \Delta t' \approx \gamma^{-3} \frac{R}{v} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_0}, \quad (13.1.23)$$

где ω_0 – угловая частота обращения электрона по кольцу синхротрона.

На основании длительности сигнала мы можем сделать вывод о ширине спектра

$$\Delta \omega \Delta t \sim 1 \implies \Delta \omega = \gamma^3 \omega_0. \quad (13.1.24)$$

Без вывода, который при желании можно найти в специализированной литературе (например в 4-м томе ЛЛ), мы будем предполагать, что мощность растёт с частотой в диапазоне $(0, \Delta \omega)$ после чего мощность резко падает. В этом свете $\Delta \omega$ совпадает с максимумом мощности синхротронного излучения

$$\omega_{\text{синх.}} \approx \gamma^3 \omega_0. \quad (13.1.25)$$

13.2 Излучение в мультипольном приближении

В разделе 12.3 предыдущей лекции было изучено дипольное приближение, где напряженности электрического и магнитного полей получались в предположении

$$r \gg \lambda \gg a. \quad (13.2.1) \quad \text{inEq}$$

Напомним, что рассматриваемая нами система совершала финитное периодическое движение в окрестности начала координат. В дипольном приближении мы оставляли лишь нулевые слагаемые при разложении в ряд Тейлора. При изучении мультипольного приближения мы по прежнему остаемся в рамках неравенств (13.2.1). Также мы считаем, что модуль радиус-вектора из начала координат в точку наблюдения очень большой и будем пренебрегать всеми поправками в сравнении с ним, т.е. выражение для векторного потенциала (см. (11.4.17)) может быть представлено в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{4\pi}{c} \frac{1}{r} \int d^3 \vec{x} \int d\tau \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right)}{4\pi c} \vec{j}(\vec{x}, \tau). \quad (13.2.2) \quad \text{ARet_dist}$$

Напоминаю, что предел большого расстояния до точки наблюдения не позволяет упростить аргумент дельта-функции, соответствующие поправки следует сравнивать с периодом (или длиной волны, см. (12.3.8)). В дипольном приближении мы пренебрегали размерами системы a (характерное удаление зарядов от начала координат) в сравнении с длиной волны λ , в мультипольном разложении, изучаемом здесь, мы сохраним слагаемые первого порядка. Формула для векторного потенциала (13.2.2) с учетом этого дополнительного предположения может быть представлена в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty, \lambda \gg a} \approx \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{c}\right) \vec{j}(\vec{x}, \tau). \quad (13.2.3) \quad \text{Aquad}$$

Раскладывая дельта-функцию по малому параметру $\frac{(\vec{x}, \vec{n})}{c}$, мы получаем³

$$\begin{aligned} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c}\right) &= \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) + \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) = \\ &= \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right). \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

Мы будем рассматривать для простоты системы точечных зарядов с плотностью тока

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_J(t)). \quad (13.2.5)$$

Подставляя разложение дельта-функции и явное выражение для плотности тока в (13.2.3), мы получим

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \left[\delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \right] \vec{j}(\vec{x}, \tau) = \\ &= \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)) - \\ &\quad - \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)) = \\ &= \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) - \frac{1}{cr} \int d\vec{x} \int d\tau \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right) \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) \delta(\vec{x} - \vec{r}_J(\tau)). \end{aligned} \quad (13.2.6) \quad \text{preQuadRa}$$

Здесь $A_{dipole}(\vec{r}, t)$ – векторный потенциал в дипольном приближении

$$A_{dipole}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\dot{\vec{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}. \quad (13.2.7) \quad \text{Adipole1}$$

В последнем слагаемом (13.2.6) выполним интегрирование по \vec{x}

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2 r} \int d\tau \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(\tau) (\vec{n}, \vec{r}_J(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(\tau - \left[t - \frac{r}{c}\right]\right). \quad (13.2.8)$$

Здесь мы воспользовались четностью дельта-функции. Далее выполним интегрирование по τ

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{dipole}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_J e_J \dot{\vec{r}}_J(t') (\vec{n} \cdot \vec{r}_J(t')), \quad t' = t - \frac{r}{c}. \quad (13.2.9) \quad \text{preQuad2}$$

Полезна следующая формула интеграла от производной дельта-функции (доказывается интегрированием по частям в предположении, что $f(x)$ обладает конечным носителем)

$$\int dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (13.2.10)$$

³Подобное разложение для обобщенной функции выглядит немного стремно, но все же справедливо после вычисления интеграла по τ . Можно было бы сразу вычислить интеграл по τ в формуле (13.2.3) и затем раскладывать временной аргумент функции $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и получить такой же ответ.

Если переписать (13.2.9) явно, то получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_J e_J \vec{v}_J \left(t - \frac{r}{c} \right) \left(\vec{r}_J \left(t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right), \quad (13.2.11) \quad \text{A_Quad}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный вектор из начала координат в точку наблюдения. Второе слагаемое (13.2.11) преобразуем по формуле

$$\vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{v}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{r}_J(\vec{v}_J, \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_J(\vec{r}_J, \vec{n}) + \frac{1}{2} [\vec{r}_J, \vec{v}_J], \vec{n}. \quad (13.2.12)$$

Подставив это представление в (13.2.11), мы получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_J e_J \vec{r}_J(\vec{n}, \vec{r}_J) + \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}}, \vec{n}], \quad (13.2.13) \quad \text{Aprev}$$

где магнитный дипольный момент равен

$$\vec{m} = \sum_J \frac{e_J}{2c} [\vec{r}_J, \vec{v}_J]. \quad (13.2.14)$$

Пока что вплоть до формулы (13.2.13) мы не вводили никакого разделения на квазистационарную часть поля и волновую, т.е. вычисляя по формулам (12.2.1) напряженности полей мы получим как поля излучения так и квазистационарные поля. Далее нас будет интересовать только волновая зона, в этой зоне мы можем считать поля плоскими волнами, распространяющимся вдоль вектора \vec{n} (см. раздел 11.2). Для плоских волн справедливо соотношение между полями \vec{E} и \vec{H}

$$\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}], \quad (13.2.15)$$

но напряженности магнитного поля однозначно определяется только векторным потенциалом $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, следовательно и напряженность электрического поля может быть однозначно восстановлена по векторному потенциалу. По векторному потенциалу «с временным аргументом $\left(t - \frac{r}{c} \right)$ »⁴ напряженности могут быть найдены по формулам

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{n} \right], \quad \vec{E} = \frac{1}{c} \left[\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{n} \right], \vec{n} \right]. \quad (13.2.16) \quad \text{EHwave}$$

В свете этих соотношений мы можем добавить к выражению для потенциала слагаемые пропорциональные \vec{n} никак не изменив при этом поля в **волновой** зоне⁵. Таким образом мы можем представить векторный потенциал для полей в волновой зоне в виде

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR} + \frac{1}{6c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_J e_J [3\vec{r}_J(\vec{n}, \vec{r}_J) - \vec{n} r_J^2] + \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}} \times \vec{n}]. \quad (13.2.17) \quad \text{Ares}$$

⁴Здесь имеется ввиду следующее. Легко видеть, что выражением (13.2.11) не является только лишь функцией $F\left(t - \frac{r}{c}\right)$ (см. раздел 11.2), но, тем не менее, при дифференцировании потенциала для нахождения напряженности полей в **волновой зоне** мы будем дифференцировать только функции, зависящие от $(t - r/c)$. Пространственные производные от $1/r$ дадут квазистационарные поля.

⁵Напоминаю, что при получении решений уравнений Максвелла (11.4.16) и (11.4.17) на потенциалы было наложено условие Лоренца. Как известно (см. раздел 5.5) условие Лоренца не фиксирует полностью калибровочный произвол. Подумайте можно ли реализовать добавление слагаемого пропорционального \vec{n} калибровочным преобразованием от функций вида $\frac{f(t-r/c)}{r}$, которые решают волновое уравнение?

Если ввести вспомогательное обозначение

$$D_i = D_{ij}n_j, \quad (13.2.18)$$

где D_{ij} – тензор квадрупольного момента (см. раздел 2.1), то, оставляя лишь слагаемые, которые отвечают излучению, мы после всех дифференцирований окончательно получим

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ [\ddot{d}, \vec{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{\vec{D}}, \vec{n}] + [[\ddot{\vec{m}}, \vec{n}], n] \right\}, \quad (13.2.19) \quad \boxed{\text{H_mult}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ [[\ddot{d}, \vec{n}], n] + \frac{1}{6c} [[\ddot{\vec{D}}, \vec{n}], \vec{n}] - [\ddot{\vec{m}}, \vec{n}] \right\}. \quad (13.2.20) \quad \boxed{\text{E_mult}}$$

Несмотря на то что в формулах (13.2.19), (13.2.20) четко разделяются различные вклады, в формулах для дифференциальной интенсивности они перемешиваются, т.е. появляются слагаемые, содержащие, например, квадрупольный момент и магнитный дипольный момент. Ввиду этого вы не найдете в литературе формулы, например, для дифференциальной интенсивности квадрупольного излучения. Тем не менее при вычислении полной интенсивности оказывается, что вклады, отвечающие диполлю, квадруполлю и магнитному диполлю, разделяются. Для того, чтобы в этом убедиться самостоятельно вам понадобятся результаты упражнений по усреднению на единичной сфере

$$\langle n_i \rangle = 0, \quad \langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_k \rangle = 0, \quad \langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (13.2.21) \quad \boxed{\text{delta}}$$

Полная интенсивность излучения с учетом квадрупольного и магнитно-дипольного вкладов дается выражением

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 + \frac{\ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ij}}{180c^5} + \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{m}}^2. \quad (13.2.22) \quad \boxed{\text{Intensity}}$$

Лекция 14

7 декабря 2022

Lec14

14.1 Радиационное трение

Для решения задачи о движении частицы в электромагнитном поле нужно решить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \\ mc \frac{du^\mu}{ds} = e F^\mu{}_\nu u^\nu, \end{cases} \quad (14.1.1) \quad \text{F+p}$$

где плотность тока для точечной частицы дается выражением

$$J_{part.}^\nu(y) = e \int ds \frac{du^\nu}{ds} \delta^{(4)}(y - x(s)). \quad (14.1.2)$$

Решение системы (14.1.1) является очень сложной задачей и единственное (по модулю преобразований Лоренца) точное решение – это покоящаяся частица с кулоновским электрическим полем. Тем не менее задачу можно решить приближенно. Далее мы будем рассматривать нерелятивистский случай и обратную реакцию поля будет учитывать в виде дополнительной силы \vec{F}_{rad}

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{F}_{rad}. \quad (14.1.3)$$

Двигаясь в электромагнитном поле частица будет излучать электромагнитные волны, полная интенсивность такого излучения в дипольном приближении равна

$$I_d = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}. \quad (14.1.4) \quad \text{lose}$$

Приравняем потери на излучение электромагнитных волн мощности сил радиационного трения \vec{F}_{rad}

$$(\vec{F}_{rad}, \vec{v}) = -\frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} = -\frac{2e^2\dot{\vec{v}}^2}{3c^3} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\vec{v}, \dot{\vec{v}}) + \frac{2e^2}{3c^3} (\vec{v}, \ddot{\vec{v}}). \quad (14.1.5) \quad \text{Frad1}$$

То, что интенсивность дипольного излучения не представляется в виде мощности некоторой силы совсем не удвительно, ведь формула (14.1.4) описывает потери связанные исключительно с излучением электромагнитных волн, но как мы знаем движущийся заряд создает не только поле, соответствующее электромагнитным волнам (см (12.2.14), (12.2.15)).

Тем не менее, формула (14.1.5) позволяет утверждать, что сила радиационного трения может быть представлена в форме

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} + \vec{X}. \quad (14.1.6) \quad \text{RadGuess}$$

В более строгом выводе, который вы можете найти в ЛЛ, доказывается, что добавка $\vec{X} = 0$. Аргумент в поддержку последнего утверждения можно получить усреднением по времени выражения (14.1.5)

$$\langle (\vec{F}_{rad}, \vec{v}) \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \langle (\ddot{\vec{v}}, \vec{v}) \rangle. \quad (14.1.7)$$

Последнее позволяет утверждать, что в квазистационарном случае обратное воздействие электромагнитного поля дается выражением (14.1.6), в котором $\vec{X} = 0$. Таким образом **Лоренцева сила радиационного трения** равна

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}, \quad (14.1.8)$$

а уравнения движения частицы с учетом обратного воздействия поля приобретают вид

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\dot{\vec{r}}, \vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (14.1.9) \quad \text{perturb}$$

1.1 Проблемы с силой радиационного трения

Сила радиационного трения действует на любую заряженную! частицу. Рассмотрим следующее уравнение движения

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} + m\tau_0 \ddot{\vec{v}}, \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (14.1.10) \quad \text{ext}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ – внешняя сила, которая не обязательно должна быть электромагнитной как в уравнении (14.1.9). В отсутствии внешних сил уравнение (14.1.10) кроме ожидаемого свободного движения $\vec{v} = \text{Const}$ допускает еще и «самоускоряющееся» решение $\dot{\vec{v}} = \dot{v}_0 e^{t/\tau_0}$. Появление таких решений связано с появлением третьей производной в уравнениях, из-за

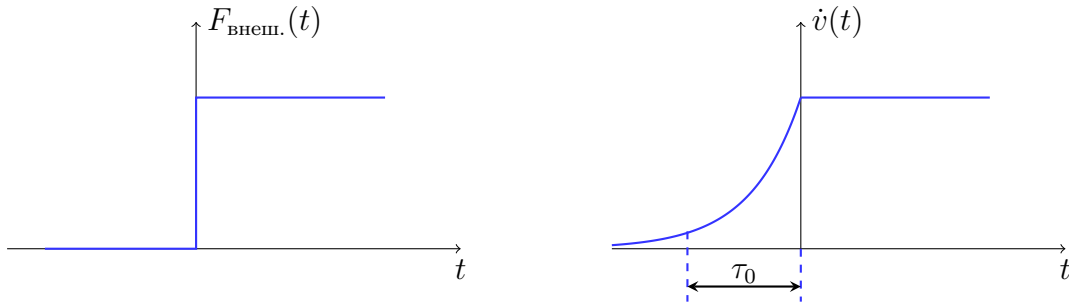


Рис. 14.1: Предускорение классического заряда

preAcc

чего решение больше не определяется однозначно начальными положениями и скоростями. Чтобы получать разумные результаты, необходимо учитывать граничные условия и уравнение (14.1.10) заменить интегродифференциальным уравнением, которое включает эти условия (в частности, условие $\dot{\vec{v}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если в этом пределе $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ обращается в нуль). Таким образом, можно записать следующее уравнение:

$$m\dot{\vec{v}} = \int_0^\infty ds e^{-s} \vec{F}_{\text{внеш.}}(t + \tau_0 s). \quad (14.1.11)$$

В этом уравнении быстро растущие решения исключены, но возникает новое нежелательное свойство, а именно предускорение. Если $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ равно нулю при отрицательных t (см. рисунок 14.1), то $\dot{\vec{v}}$ не равно нулю, и начинает увеличиваться в более ранние моменты времени порядка τ_0 ($\sim 10^{-24}$ с в случае электрона); это время, за которое свет проходит расстояние, равное электромагнитному (классическому) радиусу.

14.2 Естественная ширина спектральной линии

lineBroad

Учет силы радиационного трения позволяет качественно объяснить некоторые наблюдаемые эффекты. Рассмотрим заряд в осцилляторном потенциале

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (14.2.1)$$

Будем решать это уравнение по теории возмущений, считая силу радиационного трения малой поправкой к уравнениям движения. В нулевом приближении

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}. \quad (14.2.2)$$

На таких траекториях вклад от силы радиационного трения равен

$$\frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d}{dt} \ddot{\vec{r}} = -\frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2 \dot{\vec{r}} \equiv -\gamma \dot{\vec{r}}. \quad (14.2.3)$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений уравнение на траекторию заряда имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0. \quad (14.2.4)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде¹

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}. \quad (14.2.5)$$

Характеристическое уравнение на частоту имеет вид

$$-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2 = 0 \iff \left(\omega - \frac{i\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}. \quad (14.2.6)$$

¹Здесь мы используем обозначения раздела 11.3, где комплексные величины обозначаются \mathbf{a} , а их вещественные части a .

Поскольку мы решаем уравнения движения в рамках теории возмущений, то нас интересует лишь линейная по γ поправка к частоте

$$\omega \simeq \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}. \quad (14.2.7)$$

Решение уравнений движения в первом порядке имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t}. \quad (14.2.8)$$

В нерелятивистском пределе излучательная часть электрического поля равна

$$\vec{E}_{\text{изл.}} = \frac{e}{c^2 R} [\vec{n}, [\vec{n}, \ddot{\vec{r}}]] \sim e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t}. \quad (14.2.9)$$

Фурье образ для такой зависимости от времени

$$\vec{E}_{\text{изл.}, \omega} = \int_0^\infty d\omega \vec{E}_{\text{изл.}}(t) e^{-i\omega t} \sim \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}. \quad (14.2.10)$$

Интенсивность излучения на частоте ω соответственно равна

$$I_\omega \sim |\vec{E}_{\text{изл.}, \omega}|^2 \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (14.2.11)$$

Из-за присутствия радиационного трения, т.е. $\gamma \neq 0$, выражение более не сингулярно при $\omega = \omega_0$ (график изображен на рисунке 14.2). Величину γ по этой причине называют **естественной шириной спектральной линии**. Следует заметить, что не только радиаци-

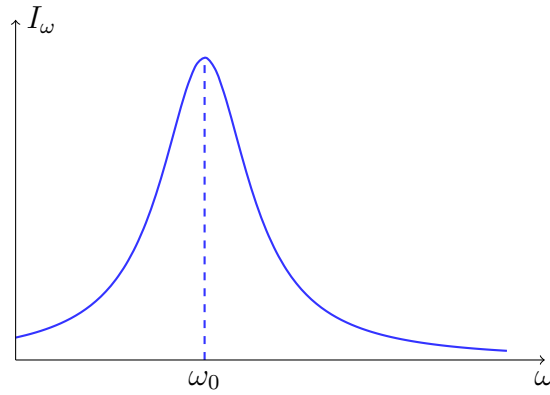


Рис. 14.2: Спектральная интенсивность излучения

LorGraph

онное трение ответственно за уширение спектральных линий, другие эффект, например, столкновения и тепловое движение дают поправки того же порядка, что и радиационное трение. Тем не менее, учет всех эффектов приводит к такой же форме зависимости, что изображена на рисунке 14.2.

14.3 Границы применимости классической электродинамики

Найдем границы применимости приближения (14.1.9). Пусть траектория частицы задается следующим рядом

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t) + \dots, \quad (14.3.1)$$

где нулевое приближение траектории по радиационному трению подчиняется уравнению

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}_0, \vec{H}]. \quad (14.3.2) \quad \text{zero0rd}$$

В первом порядке по радиационному трению уравнение движения частицы имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}_1, \vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}_0. \quad (14.3.3) \quad \text{first0rd}$$

Продифференцировав уравнение (14.3.2) по времени, мы получим

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\vec{v}}_0, \vec{H}] + \frac{e}{mc}[\vec{v}_0, \dot{\vec{H}}]. \quad (14.3.4)$$

Рассмотрим мгновенно сопутствующую систему отсчета и подставим выражение для $\dot{\vec{v}}_0$, которое следует из уравнения (14.3.2)

$$\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3(mc^2)^2}[\vec{E}, \vec{H}]. \quad (14.3.5) \quad \text{fr}$$

В мгновенно сопутствующей системе отсчета на частицу действует только сила $e\vec{E}$ (см. уравнение (14.3.2)), которая должна быть много больше выражения (14.3.5) для применения теории возмущений

$$\frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3(mc^2)^2}[\vec{E}, \vec{H}] \ll e\vec{E}. \quad (14.3.6)$$

Для стационарных полей очевидно должно быть выполнено неравенство

$$\frac{e^3 H}{m^2 c^4} \ll 1. \quad (14.3.7) \quad \text{constr1}$$

Для очень быстро меняющегося, например, по гармоническому закону электрического поля должно быть выполнено неравенство

$$\frac{e^2 \omega}{mc^3} \ll 1 \iff \frac{e^2}{mc^2} \ll \frac{c}{\omega} \sim \lambda. \quad (14.3.8) \quad \text{constr2}$$

Здесь ω – частота изменения электрического поля. Выражение $e^2/(mc^2)$ называют **классическим радиусом электрона**²

$$r_e := \frac{e^2}{mc^2}. \quad (14.3.9) \quad \text{classicRa}$$

²В литературе вы можете найти множество спекуляций, оправдывающих такое название, но едва ли они вас убедят. Эту величину почему-то так называли.

Ограничение (14.3.8) по сути говорит, что длина волны внешнего поля должна быть много больше классических радиусов частиц (чтобы это не значило).

Говоря о применимости **классической** электродинамики не следует только сравнивать значения полей и характерные расстояния с величинами, на которых существенный вклад дают эффекты **квантовой электродинамики**. Рассмотрение зарядов как точечных частиц само по себе приводит к противоречиям – электростатическая энергия точечного электрона бесконечна! Расходимость в нуле можно устранить, если ввести так называемое жесткое обрезание *классическим радиусом* (формула (14.3.9) в этом контексте появляется в следствии равенства инертной массы электрона его электростатической энергии). Тем не менее расстояния, на которых существенными становятся квантовые эффекты существенно больше (14.3.9). Характерным таким расстоянием является комптоновская длина волны для электрона

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad (14.3.10)$$

которая сильно больше классического радиуса электрона

$$\frac{\lambda}{r_e} \equiv \frac{1}{\alpha} \simeq 137. \quad (14.3.11)$$

14.4 Рассеяние электромагнитных волн зарядами

Важной характеристикой любого процесса рассеяния является **сечение**

$$\sigma := \frac{\text{вероятность процесса в ед. времени}}{\text{плотность потока налетающих частиц}}. \quad (14.4.1) \quad \boxed{\text{sigma}}$$

Данное определение универсально и может быть применено к любым процессам рассеяния: света (фотонов) на электронах, электронов на электронах, горошин на арбузах и т.д.

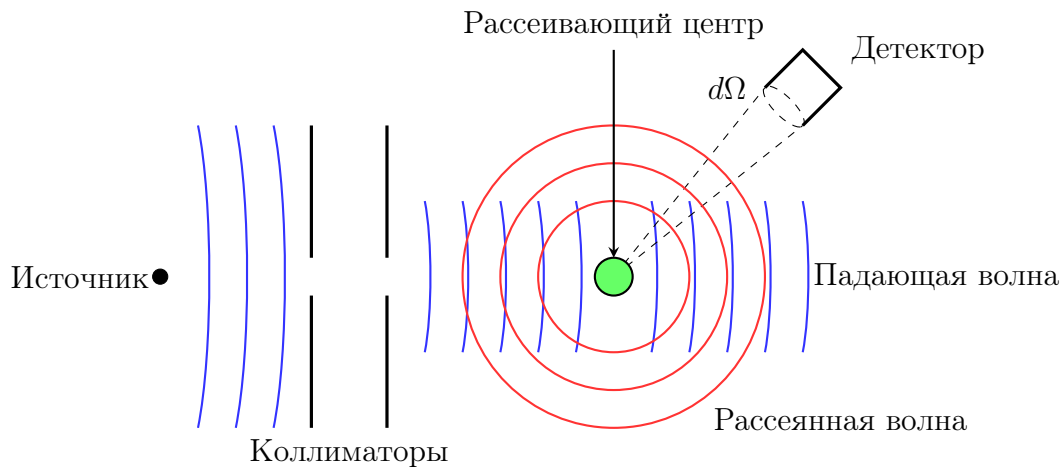


Рис. 14.3: Рассеяние электромагнитных волн зарядами

EMscat

Нас будет интересовать процесс рассеяния света на зарядах. На рассеивающий центр у нас будут налетать фотоны, поэтому в качестве плотности потока налетающих частиц

из знаменателя формулы (14.4.1) у нас выступает вектор Умова-Пойнтинга. В единицу времени мы также будем регистрировать фотоны, которые попали в детектор, который виден под некоторым телесным углом $d\Omega$ (см. рисунок 14.3). Для такого процесса дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\vec{S}|} \frac{dI}{d\Omega}. \quad (14.4.2) \quad \text{diffSigma}$$

Рассмотрим заряд, находящийся в изотропном гармоническом потенциале, на который налетает плоская электромагнитная волна³

$$\vec{E} = \Re\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i(\vec{k}, \vec{r})}\}. \quad (14.4.3) \quad \text{inWave}$$

Мы будем считать, что длина падающей волны много больше характерных смещений нашего заряда, поэтому слагаемым $i(\vec{k}, \vec{r})$ в показателе экспоненты можно пренебречь. Уравнения движения заряда с учетом упомянутых приближений имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (14.4.4)$$

Как и в разделе 14.2 мы будем считать эффект радиационного трения мало поправкой, тогда в первом приближении уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (14.4.5)$$

Частное решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$\vec{r}(t) = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (14.4.6)$$

Излучение, создаваемое таким образом движущимся зарядом, найдем в дипольном приближении

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2}{m} \frac{\omega^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (14.4.7) \quad \text{cDipole}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{d}}, \vec{n}|^2}{8\pi c^3} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} |\vec{E}_0, \vec{n}|^2. \quad (14.4.8) \quad \text{cInten}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится раскрыть модуль векторного произведения

$$|\vec{E}_0, \vec{n}|^2 = \epsilon_{ijk} E_{0j} n_k \epsilon_{ipq} E_{0p}^* n_q = (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) E_{0j} n_k E_{0p}^* n_q = (\delta_{ij} - n_i n_j) E_{0i} E_{0j}^*, \quad (14.4.9)$$

где мы учли, что вектор \vec{n} – единичный. Модуль вектора Умова-Пойнтинга для электромагнитной волны (14.4.3) в терминах комплексных векторов поляризации \vec{E}_0 (после усреднения по времени) равен

$$|\vec{S}| = \frac{c}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*). \quad (14.4.10) \quad \text{cPoint}$$

³Здесь также используются обозначения раздела 11.3. Именно из-за комплексности вектора дипольного момента \vec{d} (14.4.7) и вектора \vec{E}_0 в формулах (14.4.8) и (14.4.10) фигурирует коэффициент $\frac{1}{8\pi}$ вместо привычных $\frac{1}{4\pi}$ (см. (11.3.2)).

Подставляя полученные результаты в формулу для дифференциального сечения (14.4.2), мы получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\mathbf{E}_{0i} \mathbf{E}_{0j}^*}{(\vec{\mathbf{E}}_0, \vec{\mathbf{E}}_0^*)}. \quad (14.4.11)$$

Последний множитель в этой формуле совпадает с тензором поляризации (11.3.8). Подставляя различные выражения для тензоров поляризации (11.3.10), (11.3.15), (11.3.16) и (11.3.17), мы получим соответственно:

- **Дифференциальное сечение рассеяния для линейно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{lin.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - (\vec{n}, \vec{e})^2), \quad (14.4.12)$$

где $\vec{e} = \vec{\mathbf{E}}_0 / |\vec{\mathbf{E}}_0|$ – вещественный единичный вектор поляризации;

- **Дифференциальное сечение рассеяния для циркулярно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{circ.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\vec{n}, \vec{k})^2}{k^2} \right), \quad (14.4.13)$$

где \vec{k} – волновой вектор;

- **Дифференциальное сечение рассеяния для естественно поляризованного света**

$$\frac{d\sigma_{nat.}}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\vec{n}, \vec{k})^2}{k^2} \right). \quad (14.4.14)$$

Полное сечения рассеяния получается интегрирование дифференциального

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (14.4.15)$$

Вычислим, например, полное сечение рассеяния для линейно поляризованного света

$$\begin{aligned} \sigma_{lin.} &= \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - \cos^2 \theta) = \\ &= r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} 2\pi \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (14.4.16)$$

Оказывается, что полное сечение не зависит от поляризации падающей волны, т.е. для всех случаев

$$\sigma_{lin.} = \sigma_{circ.} = \sigma_{nat.} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (14.4.17)$$

Из полученного результата легко найти сечение рассеяния на свободном заряде ($\omega_0 = \gamma = 0$)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (14.4.18)$$

которое также называют **Томсоновским сечением рассеяния**.

Fine dell'Opera