Механика

9.48

Условие

На шероховатой дорске на расстоянии l от её правого конца находится сполшной цилиндр. Доску начинают двигать с ускорением a_0 влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр цилиндра в тот момент, когда он будет находится над краем доски? Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

Решение

В системе координат, связанной с доской, на цилиндр действует сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a_0}$:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = FR = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt} \\ ma = ma_0 - F \end{cases}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2}{3}a_0 \quad \text{в силу отсутствия проскальзывания}$$

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v = \sqrt{2al} = 2\sqrt{\frac{a_0 l}{3}}$$

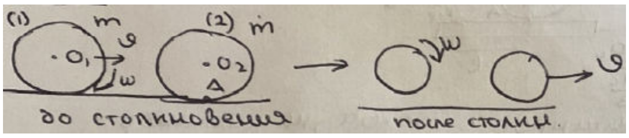
Ответ: $v = 2\sqrt{\frac{a_0 l}{3}}$.

9.79

Условие

Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящейся такой же бильярдный шар, причём линия центров паларрельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдёт в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдёт в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного лвижения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Решение



1) ЗСМИ для (1) относительно O_1: $I_{O_1}\omega = I_{O_1}\omega' + mv'R$. При условии $\omega = \frac{v}{R}$, $\omega' = \frac{v'}{R}$ получаем

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{v}{R} = \frac{2}{5}mR^2\frac{v'}{R} + mRv' = \frac{7}{5}mRv' \Rightarrow v' = \frac{2}{7}v$$

2)ЗСМИ для (2) относительно A: $mvR = I_{O_2}\omega_2 + mRu' = \frac{7}{5}mRu' \Rightarrow u' = \frac{5}{7}v$ Учитывая, что по условию вращательная энергия не передаётся, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \quad v^2 = v'^2 + u^2$$

$$mv = mv' + mu \quad v^2 = v'^2 + u^2 \quad v = v' + u \Rightarrow 0 = 2v'u \Rightarrow v' = 0 \Rightarrow u = v$$

3)

$$K_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mv^2$$

$$K_{конеч} = \frac{7}{10}m(v'^2 + u'^2) = \frac{7}{10}v^2\left(\frac{4+25}{49}\right)m = \frac{29}{70}mv^2$$

$$\frac{Q}{K_0} = \frac{v^2 - v'^2 - u'^2}{v^2} = 1 - \frac{v'^2 + u'^2}{v^2} = 1 - \frac{29}{49} = \frac{20}{49}.$$

Ответ: $\frac{Q}{K_0} = 1 - \frac{v'^2 + u'^2}{v^2} = \frac{20}{49}$

9.93

Условие

Шар массой $M = 1000$г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 500$м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью $v = 3$м/с. Определить скорость пули V после ее вылета из шара, если масса пули $m = 10$г. Трением качения пренебречь.

Решение

Закон сохранения момента импульса относительно точки на поверхности:

$$m(V_0 - V)R = I\omega + MvR = (7/5)MvR$$

Ответ: $V = V_0 - (7/5)\frac{M}{m}$

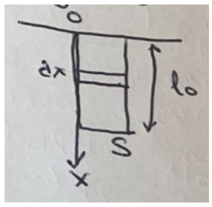
13.5

Условие

Определить относительное удлинение $\Delta l/l$ тонкого стержня, подвешенного за один конец, под влиянием собственного веса, если скорость звука в тонкон стержне $v_{зв} = 3140$м/с. Начальная длина стержня $l_0 = 2$м.

0.0.1 Решение

Скорость распространения упругой волны



$$v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Сила, действующая на элемент dx

$$F(x) = mg\frac{l_0 - x}{l_0}$$

Для dx можно записать закон Гука. Его удлинение обозначим как $d(\Delta l)$

$$\frac{d(\Delta l)}{dx} = d\varepsilon$$

$$\frac{F(x)}{S} = Ed\varepsilon = \frac{mg(l_0 - x)}{l_0 S}$$

$$\frac{d(\Delta l)}{dx} = \frac{mg(l_0)}{l_0 SE} = \frac{mg(l_0 - x)}{V\rho v_{зв}^2} = \frac{g}{v_{зв}^2}(l_0 - x)$$

$$\Delta l = \frac{g}{v_{зв}^2}\int_0^{l_0}(l_0 - x)dx = \frac{gl_0^2}{2v_{зв}^2}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{gl_0}{2v_{зв}^2} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot (3140)^2} = 10^{-6}$$

Ответ: $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{gl_0}{2v_{зв}^2} = 10^{-6}$

13.39

Условие:

Два одинаковых стальных бруска длиной $l = 10$ см ($\rho = 7,8$ г/см^3, $E = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см^2) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет $T_y = 200$ Н/мм^2?

Решение:

После соударения по ним побегут волны, со скоростью $v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. За волнами вещество стержня становится неподвижным. Давление возрастает до $P = \rho v_{зв} v$. Максимальное сжатие: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{v_{зв}}$. Так как на конце стержня напряжение равно нулю, то после выхода волны на торец начинается разгрузка стержня. По стержню со скоростью $v_{зв}$ распространяется прцесс снятия давления и возникновения движения вещества в свободный конец. Когда волна дойдёт до точки соприкосновения стержней, они начнут расходиться (т. е. закончится время соприкосновения). Тогда

$$t_{соуд} = \frac{2l}{v_{зв}} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{12}}{7,8}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

Неупругие явления возникнут при

$$\varepsilon = \frac{T_y}{E} = \frac{v}{v_{зв}} \Rightarrow v = \frac{T_y}{E}v_{зв} \approx 5 \text{ м/с}$$

Ответ: $t_{соуд} \approx 4 \cdot 10^{-5}$ с; $v \approx 5$ м/с

Термодинамика

8.45

Условие

Опредеоить среднеквадратичную угловую скорость вращения молекулы азота в воздухе при нормальных условиях(прим. ред. $T = 273,15\,K$, $p = 101,325$ кПа). Расстояние между ядрами в молекуле N_2 равно $r = 1,1$ Å.

Решение

N_2 — двухтомный газ $\Rightarrow E_{вр} = kT$. $I = 2 \cdot M_N\left(\frac{r}{2}\right)^2$.

$$\frac{I\overline{\omega^2}}{2} = \frac{M_N r^2}{2}\frac{\overline{\omega^2}}{2} = E_{вр} = kT \Rightarrow \overline{\omega} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{kT}{M_N}} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{RT}{\mu_N}} = \frac{2}{1,1 \cdot 10^{-10}}\sqrt{\frac{8,3 \cdot 273,2}{14 \cdot 10^{-3}}} \approx 7,3 \cdot 10^{12} \text{ рад/с}$$

Ответ: $\overline{\omega} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{RT}{\mu_N}} \approx 7,3 \cdot 10^{12}$ рад/с.

8.56

Условие

Вычислить молярную теплоёмкость идеального газа, в котором каждая молекула кроме трёх поступательных степеней свободы имеет два внутренних дискретных уровня энергии $\mathscr{E}_1 = 0$ и $\mathscr{E}_2 = \varepsilon$. Температура газа такова, что $kT = \varepsilon$. Вращение молекул не учитывать.

Решение

Воспользуемся распределением Больцмана по дискретным степеням свободы и найдём с помощью него среднюю энергию дискретного уровня: $\overline{\mathscr{E}} = \frac{\sum \mathscr{E}_i \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_i}{kT}\right]}{\sum \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_i}{kT}\right]}$ В нашем случае(обозначаем энергию дискретной степени свободы как $\mathscr{E}_d$):

$$\mathscr{E}_{пост} + \langle\mathscr{E}_d\rangle = \frac{3}{2}kT + \frac{\varepsilon\exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT}\right] + 0 \cdot \exp\left[-\frac{0}{kT}\right]}{\exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{0}{kT}\right]} = \frac{3}{2}kT + \frac{\varepsilon\exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT}\right]}{1 + \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT}\right]} = \frac{3}{2}kT + \frac{kT}{1+e} = kT\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1+e}\right)$$

Выражение выше определеет энергию одной молекулы. Чтобы перейти к молю, нужно домножить на число Авогадро. Сделаем это и продифференцируем по T, чтобы найти теплоёмкость:

$$C_\nu = N_A\frac{d\mathscr{E}}{dT} = \frac{3}{2}R + N_A\frac{\varepsilon^2}{kT^2\left(1 + \exp\left[\frac{\varepsilon}{kT}\right]\right)^2}e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = \Big/ \varepsilon = kT \Big/ = R\left(\frac{3}{2} + \frac{e}{(1+e)^2}\right)$$

Ответ: $C_\nu = R\left(\frac{3}{2} + \frac{e}{(1+e)^2}\right)$.

8.61

Условие

Частота колебаний атомов в молекуле газообразного фтора F_2 равна $\nu = 3,42 \cdot 10^{13}$. Определить показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V$ для фтора при температере $T = 300\,K$, когда можно принимать во внимание переход молекул только на первый возбуждённый уровень колебаний.

Решение

Вероятность возбуждения разных уровней по Больцману: $P_n = A\exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]$. A нужно определить из условия $A = \left(\sum\exp\left[-\frac{nE_0}{kT}\right]\right)^{-1}$. Среднее зачение энергии:

$$\langle\mathscr{E}\rangle = \sum P_n E_n = E_0\frac{\sum n\exp\left[-\frac{nE_0}{kT}\right]}{\sum\exp\left[-\frac{nE_0}{kT}\right]} \Rightarrow \langle\mathscr{E}\rangle = \frac{E_0}{\exp\left[\frac{E_0}{kT}\right] - 1} = \frac{h\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1}$$

Теперь можем вычислить обе молярные колебательные теплоёмкости:

$$C_{кол} = N_A\frac{d\langle\mathscr{E}\rangle}{dT} = kN_A e^{\frac{h\nu}{kT}}\left(\frac{h\nu}{kT\left(\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1\right)}\right)^2 \approx \Big/ h\nu \gg kT \Big/ \approx R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]$$

Значит, учитывая также поступательные и вращательные степени свободы, получим

$$C_p = C_{\text{кол}} + \frac{7}{2}R \quad C_V = C_{\text{кол}} + \frac{5}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{\frac{7}{2} + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]}{\frac{5}{2} + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]}$$

Ответ: показатель адиабаты равен $\gamma = \frac{\frac{7}{2}+\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]}{\frac{5}{2}+\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]}$.

10.14

Условие

Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами радиусами R_1 и R_2, заполненном проводящим тепло однородным веществом если температуры обеих сфер постоянны и равны t_1 и t_2.

Информация по теплопроводности

Стационарный случай: $j = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$ $\varkappa = \frac{1}{3}\lambda\overline{v}\rho C_V$, где $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$ — длина свободного пробега, C_V — удельная теплоёмкость изохороного процесса, ρ — плотность газа.
Нестационарный случай: $[j(x) - j(x+dx)]\,dt \cdot S = -\frac{\partial j}{\partial x}dxdt \cdot S = \rho S dx C_V dT \Rightarrow \rho C_V\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$. Значит, можно записать следующие уравнения теплопроводности:

$$\text{Общий случай: } \rho C_V\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q(x)$$

$$\text{Сферическая симметрия: } \rho C_V\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r)$$

$$\text{Цилиндрическая симметрия: } \rho C_V\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r)$$

Решение

Для сферической симметрии в стационарном случае сохраняется поток через единицу площади:

$$Q = 4\pi r^2 j = -4\pi r^2\varkappa\frac{dT}{dr} = \text{const} \Rightarrow dT = -\frac{Q}{4\pi\varkappa}\frac{dr}{r^2}$$

Тогда температуру на концентрической сфере радиуса $r > R_1$ можно выразить как $T = t_1 - \frac{Q}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$, а значит и $t_2 - t_1 = -\frac{Q}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Выражая отсюда $\varkappa$, получим

$$T(r) = \frac{t_1 - t_2}{R_2 - R_1}R_1R_2\frac{1}{r} - \frac{t_1R_1 - t_2R_2}{R_2 - R_1}$$

В случае, если симметрия цилиндрическая, справедливы следующие арвенства:

$$Q = 2\pi r j = -2\pi r\varkappa\frac{dT}{dr} \quad T = t_1 - \frac{Q}{2\pi\varkappa}\ln\frac{r}{R_1}$$

Ответ: $T(r) = \frac{t_1-t_2}{R_2-R_1}R_1R_2\frac{1}{r} - \frac{t_1R_1-t_2R_2}{R_2-R_1}$.

10.78

Условие

Стеклянный сосуд с толщиной стенок $l = 5$ мм и объёмом $V = 1$ л наполнен азотом и окружён вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиусом $a = 0,1$ мм. Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во ввремени концентрация молекул газа в сосуде? Определеить время τ, по истечении которого давление в сосуде уменьшится в e раз, если температура поддерживается постоянной и равной $T = 300\,K$.

Решение

Рассмотрим течение сильно разреженного газа по трубке радиуса a и длины l. Поток молекул через трубку определяется разностью независязих друг от друга потоков, входящих в трубку с разных сторон(течение Кнудсена) $j = c\frac{a}{l}(j_1 - j_2)$, где $c = \frac{8}{3}$, если рассматривать протекание как диффузию. Тогда $j = \frac{1}{S}\frac{dN}{dt} = n\frac{v_{\text{ср}}}{4}$. Из теории диффузии $j = -D\frac{dn}{dx} = \Big/ D = \frac{1}{3}\lambda V \Big/ = -\frac{1}{3}\lambda V\frac{dn}{dx}$. Также мы знаем, что $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ и $\lambda = 2a$. Подставляя всё это, получим, что

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\frac{n_1 - n_2}{l} = \frac{2}{3}\pi a^3 v_{\text{ср}}\frac{n_1 - n_2}{l}$$

В нашем случае

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{2}{3}\pi a^3 v_{\text{ср}}\frac{n}{l} = \frac{d(nV)}{dt} \Rightarrow n = n_0e^{-\frac{t}{\tau}}\tau = \frac{3Vl}{2\pi a^3 v_{\text{ср}}} = \frac{3Vl}{2\pi a^3}\sqrt{\frac{\pi\mu_{N_2}}{8RT}} =$$

$$= \frac{3\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{-3}}{2\cdot3,14\cdot10^{-12}}\cdot\sqrt{\frac{3,14\cdot28\cdot10^{-3}}{8\cdot8,31\cdot300}} \approx 5014\,\text{с}$$

Ответ: $\tau = \frac{3Vl}{2\pi a^3}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \approx 5014$ с; $n = n_0e^{-t/\tau}$.

10.106

Условие

Найти время испарения воды из трубки длиной $l = 10$ см, запаянной с одного конца. Температура $t = 27\,^\circ$C. Первоначально вода заполняла трубку наполовину; относительная влажность воздуха 50%. Давление насыщенных паров при температуре 27 °C равно P

н=20 Тор. длина свободного пробега λ в системе воздух–пар порядка 10^{-15} см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

Решение

Возникает градиент концентрации, из-за чего возникает поток по з-ну Фика: $j_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}$. Будем обозначать n' — концентрацию, где влажность воздуха равна 50%. Там же возьмём и 0 по оси x. А n'' — над поверхностью(насыщенный пар).

$$j_x = -\frac{1}{3}\lambda v_{\text{ср}}\frac{n' - n''}{x} \quad p_{\text{н}} = n''kt \quad p = \varphi p_{\text{н}} = n'kt \text{— парциальное давление}$$

$$n'' - n' = \frac{p_{\text{н}}}{kT}(1 - \varphi) = \frac{p_{\text{н}}}{2kT} \quad j_x = \frac{\lambda v_{\text{ср}}p_{\text{н}}}{2kTx}$$

С этой глубины x должен испариться слой dx

$$dN = dm\frac{N_A}{\mu} = \rho Sdx\frac{N_A}{\mu} = j_xSdt \text{ — по определению потока}$$

$$\int_0^{t_{\text{исп}}} dt = \frac{\rho N_A}{\mu j_x}dx = \frac{6\rho N_AkT}{\mu\lambda v_{\text{ср}}p_{\text{н}}}\int_{l/2}^{l} xdx$$

$$t_{\text{исп}} = \frac{6\rho N_AkT}{\mu\lambda v_{\text{ср}}p_{\text{н}}}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{8}\right) = \frac{9}{4}\frac{\rho RTl^2}{\lambda v_{\text{ср}}p_{\text{н}}\mu}$$

Ответ: $t_{\text{исп}} = \frac{9}{4}\frac{\rho RTl^2}{\lambda v_{\text{ср}}p_{\text{н}}\mu} \approx 227$ дней.

Электричество и магнетизм

1.10

Условие

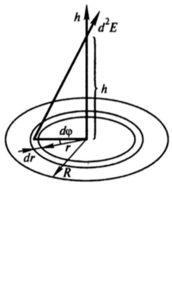
Диск радисом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии h от диска, на перпендикуляре, проходящем через центр диска.

Решение

Обозначим расстояние до диска h. На элементе колечка площадью $rd\varphi dr$, который можно считать точечным, находится заряд, равный $\sigma d\varphi dr$, который создает напряженность поля на расстоянии h от поверхности диска на оси симметрии

$$d^2E = \sigma rd\varphi\frac{dr}{h^2 + r^2}$$

Симметрия относительно оси h, интегрируем по углу φ, учитывая, что сумма составляющих перпендикулярных оси h, равна нулю, и складывать надо только составляющие поля вдоль оси h



$$dE = 2\pi\sigma rdr\frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

Интегрируя это выражение по r, получаем

$$E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{h}{(h^2 + r^2)^{1/2}}\right)$$

Ответ: $E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{h}{(h^2+r^2)^{1/2}}\right)$

1.14

Условие

Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии l друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+\varkappa$ и $-\varkappa$. Определить напряженность поля E на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии.

Решение

Теорема Гаусса:

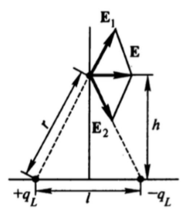
$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q$$

Поле вокруг цилиндрического тела с погонной плотностью заряда $\varkappa$

$$E = 2\frac{\varkappa}{r}$$

Для наших проводов

$$E = 8\frac{\varkappa l}{l^2 + 4h^2}$$



Ответ: $E = 8\frac{\varkappa l}{l^2+4h^2}$

2.11

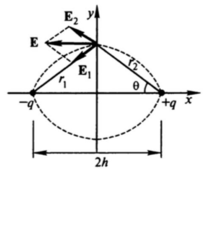
Условие

Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности бесконечной металлической плоскости. Заряд находится на расстоянии h от плоскости.

Решение

Формулы для потенциала и напряженности поля, создаваемого зарядом q

$$\varphi = \frac{q}{r}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Решаем методом изображений. Заряды на плоскости распределятся так, как будто симметрично исходному заряду q находится заряд $-q$. Картина поля симметрична относительно оси x. По формуле для потенциала, на плоскости, проходящей через ось y и перпендикулярной оси x, потенциал равен 0. По формуле для напряженности, в плоскости нулевого потенциала напряженность поля перпендикулярна этой плоскости. Изменение напряженности поля вдоль оси y (линии нулевого потенциала)

$$E = 2q\frac{\cos^3\theta}{h^2}$$

Записывая теорему Гаусса, получаем $E = 4\pi\sigma$, и поэтому

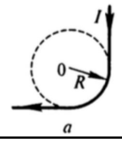
$$\sigma = -q\frac{\cos^3\theta}{2\pi h^2}$$

Ответ: В исходных обозначениях $\sigma = -q\frac{\cos^3\theta}{2\pi h^2}$

5.3

Условие

Электрический ток I протекает по проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найти значение магнитной индукции B в вакууме в центре O окружности радиусом R.



Решение

Для прямого провода поле на расстоянии R

$$H = \frac{2I}{cR}$$

Для кругового витка радиуса R поле

$$H = \frac{2\pi I}{cR}$$

Рассмотрим суперпозицию четырех таких проводов и найдем поле в центре, а затем разделим на 4

$$H = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi I}{cR} + 4\frac{2I}{cR}\right) = 2\frac{1}{c}\frac{1}{R}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$$

Ответ: $H = 2\frac{1}{c}\frac{1}{R}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$

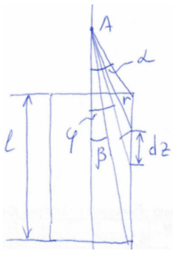
5.5

Условие

Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A, из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β. Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l, и по нему течет ток I.

Решение

Обозначим R радиус соленоида, остальные обозначения - на картинке. Магнитное поле на оси кругового тока:



$$B = \frac{1}{c}\frac{2\pi R^2 I}{r^3}$$

$$r d\varphi = dz \sin\varphi; \quad dz = \frac{r d\varphi}{\sin\varphi}$$

Круговой ток на длине dz

$$dI = IN\frac{dz}{l} = \frac{INr d\varphi}{l\sin\varphi}$$

Магнитное поле на оси от кругового тока dI

$$dB = \frac{1}{c}\frac{2\pi R^2}{r^3}\frac{INr d\varphi}{l\sin\varphi} = \frac{2\pi IN\sin\varphi d\varphi}{cl}$$

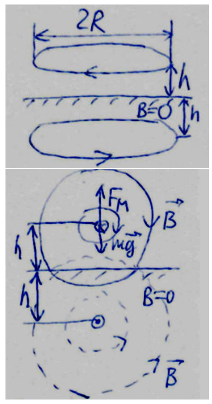
$$B = \frac{2\pi IN}{cl}\int_{\beta}^{\alpha}\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{c}\left(\frac{N}{l}\right)I(\cos\beta - \cos\alpha)$$

Ответ: $B = \frac{2}{cl}I(\cos\beta-\cos\alpha)$

6.35

Условие

Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщиной $h = 5$мм лежит тонкое серхпроводящее кольцо радиусом $R = 10$см, по которому течет постоянный ток I. При каком токе I кольцо начнем парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1$г?



Решение

Решаем методом изображений, образом будет такое же кольцо, но ток в обратном направлении. Так как $h \ll R$, то можно провести расчет для прямого тока длиной $l = 2\pi R$ с плоскостью (изображение - прямой ток в другую сторону).

$$B = \frac{2I}{c(2h)} = \frac{I}{ch}$$

$$F_M = \frac{IlB}{c} = \frac{I^2 l}{c^2 h} = \frac{2\pi R I^2}{c^2 h}$$

$$mg = F_M = \frac{2\pi R I^2}{c^2 h} \Rightarrow I \geqslant \sqrt{\frac{mgc^2 h}{2\pi R}} = c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}}$$

$$I = 3\cdot 10^{10}\sqrt{\frac{1\cdot 10^3\cdot 0.5}{2\cdot 3.14\cdot 10}} = 8.4\cdot 10^{10}\ \text{СГС} = 28\ \text{А}$$

Ответ: $I = c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8.4\cdot 10^{10}$ СГС

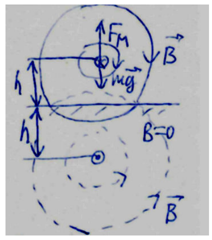
6.37

Условие

Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течет ток $I = 10$А. Найти также силу f, действующую на единицу длины провода.

Решение

1) Решаем методом изображений, изображением будет провод с током в обратную сторону. Поле от тока I



$$B = \frac{2I}{cr} = \frac{2I\sin\alpha}{ch}$$

По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$H_{\parallel}(x)l = B_{\parallel}(x)l = \frac{4\pi}{c}i(x)l; \quad i(x) = \frac{c}{4\pi}B_{\parallel}(x) = \frac{c}{4\pi}2B\sin\alpha$$

$$i(x) = \frac{c}{4\pi}\frac{2I}{ch}\sin^2\alpha = \frac{I}{\pi h}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)^2 = \frac{Ih}{\pi(x^2+h^2)}$$

2)

$$F_M = \frac{IlB}{c} = \frac{I^2 l}{c^2 h}$$

$$f = \frac{F_M}{l} = \frac{I^2}{c^2 h} = \frac{(10\cdot 3\cdot 10^9)^2}{(3\cdot 10^10)^2\cdot 1} = 1\ \frac{\text{дин}}{\text{см}}$$

Ответ: $i(x) = \frac{Ih}{\pi(x^2+h^2)}$, $f = \frac{I^2}{c^2 h} = 1\ \frac{\text{дин}}{\text{см}}$

Оптика

1.5

Условие

С помощью токной собирающей стеклянной линзцы с показателем преломления $n = 3/2$ получено действительное изображение предмета на расстоянии 10 см от линзы. После того как предмет и линзу погрузили в воду, не изменяя расстояния между ними, изображение получилось на расстоянии 60 см от линзы. Найти фокусное расстояние f линзы, если показатель преломления воды равен $n' = 4/3$.

Решение

Нам потребуется формула линзы в общем случае:

$$\frac{n_0}{f} = (n-n_0)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{(n-n_0)d}{nR_1R_2}\right)$$

где n — показатель преломления материала линзы, n_0 — показатель преломления среды, R_1 и R_2 - радиусы кривизны поверхностей линзы, а d — толщина линзы вдоль ГОО. Так как геометрия линзы не меняется, то формулу можно записать как

$$\frac{1}{f} = (n-1)\alpha \quad \frac{n'}{f'} = (n-n')\alpha$$

Подставляя показатели преломления, получаем

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\alpha \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{8}\alpha \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{4}\frac{1}{f}$$

Вычтя формулы токной линзы, получим $\frac{3}{4}\frac{1}{f} = \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \Rightarrow f = \frac{3}{4}\frac{l_1 l_2}{l_2 - l_1} = \frac{3}{4}\frac{60\cdot 10}{60-10} = 9$ см
Ответ: $f = 9$ см.

1.45

Условие

Найти фокусное расстояние f и положения главных плоскостей двояковыпуклой толстой линзы, для которой $n = 1,5$, $R_1 = 10$ см, $R_2 = 4$ см, $d = 2$ см.

Решение

Воспользуемся формулой линзы, записанной в предыдущей задаче:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{0,5\cdot 2}{1,5\cdot 10\cdot 4}\right) = \frac{1}{6}\ \text{см}^{-1} \Rightarrow f = 6\ \text{см}$$

Расстояние до главных плоскостей толстой линзы можно вычислить по формулам

$$h_1 = -\frac{dR_2}{n(R_2-R_1)+(n-1)d} = 1\ \text{см} \quad h_2 = \frac{R_2}{R_1}h_1 = 0,4\ \text{см}$$

Ответ: $f = 6$ см; $h_1 = -\frac{dR_2}{n(R_2-R_1)+(n-1)d} = 1$ см и $h_2 = \frac{R_2}{R_1} = 0,4$ см.

7.59

Условие

Определить минимальное разрешаемое расстояние δ микроскопа при наилучших условияъ освешения для: 1) безыммерсионного объектива с числовой апертурой $a = 0,9$; 2) того же объектива с масляной иммерсией(n=1,6). Длина волны при визуальных наблюдениях $\lambda = 550$ нм.

Решение

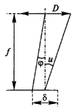


Рис. 1: Рисунок

Числовая апертура $a = n\sin u$, где u — апертура или апертурный угол, под которым видна диафрагма(в данном случае объектив) из точки предмета, лежащей на оптической оси. Для повышения числовой апертуры применяют иммерсию, т. е. жидкость с возможно высоким показателем преломления, заполняющую пространство между покровным стеклом над рассматриваемым предметом и объективом. Получаем

$$\varphi = \delta/f = 1,22\lambda/(nD) = 1,22\lambda/(2nf\sin u) \Rightarrow \delta = 0,61\lambda/(n\sin u)$$

По условию числовая апертура при $n = 1$ равна $0,9$, т.е. $\sin u = 0,9$. Поэтому в первом случае $\delta = 0,3$ мкм, а во втором $\delta = 0,19$ мкм. $\theta \approx 1,22\lambda/D$.

Квантовая физика

5.16

Условие:

Дальний инфракрасный спектр молекулы HBr, обусловенный переходами между соседними вращательными уорвнями молекул, состоит из рядя линий, отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 17\ \text{см}^{-1}$. Найти расстояние между молекулами в HBr.

Решение:

Приведённая масса молекулы HBr:

$$\mu = \frac{80\cdot 1}{80+1}m_p \approx m_p$$

Момент инерции молекулы HBr:

$$I = \mu d^2 = m_p d^2.$$

Энергия вращательных уровней:

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} \approx \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_p d^2}.$$

$$E_{l+1} - E_l = \frac{\hbar^2}{2I}\left[(l+1)(l+2) - l(l+1)\right] = \frac{\hbar^2}{I}(l+1)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_{min} &= \frac{\hbar^2}{I} \approx \frac{\hbar^2}{m_p d^2} \\ \Delta E_{min} &= \Delta\left(\frac{hc}{\lambda}\right) = hc\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{m_p d^2} = 2\pi\hbar c\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m_p c\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}}$$

$$d \approx \sqrt{\frac{1,05\cdot 10^{-27}}{2\cdot 3,14\cdot 1,66\cdot 10^{-24}\cdot 3\cdot 10^{10}\cdot 17}} \approx 1,4\cdot 10^{-8}\ \text{см}.$$

Ответ: $1,4\cdot 10^{-8}$ см.

5.25

Условие:

В угарном газе CO из-за возбуждения колебаний молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4,61$ мкм. Определить амплитуду A_0 нулевых колебаний молекулы CO. Оценить температуру, при которой амплитуда темповых колебаний превзойдёт A_0.

Решение:

В основном состоянии осцилятора ($n = 0$):

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\varkappa A_0^2}{2} \Rightarrow \varkappa = \frac{\hbar\omega}{A_0^2}. \tag{1}$$

$$\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} = \frac{12 \cdot 16}{12 + 16} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 11,4 \cdot 10^{-24} \text{ г}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}}$$

$$\varkappa = \mu\omega^2 \tag{2}$$

Из (1) и (2):

$$\frac{\hbar\omega}{A_0^2} = \mu\omega^2 \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega\mu}} = \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2\pi c\mu}} \approx \sqrt{\frac{1,05 \cdot 10^{-27} \cdot 4,61 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 11,4 \cdot 10^{-24}}} \approx 4,74 \cdot 10^{-10} \text{ см}$$

$A > A_0$, если $kT \gtrsim \hbar\omega$, т. е. молекула начинает переходить из основного ($n = 0$) на следующие колебательные уровни:

$$kT \gtrsim \hbar\omega \Rightarrow T \gtrsim \frac{\hbar\omega}{k} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda k} = \frac{hc}{\lambda k} \approx \frac{6.63 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4,61 \cdot 10^{-4} \cdot 1,38 \cdot 10^{-16}} \approx 3100 \ K$$

Ответ: $A_0 \approx 4,74 \cdot 10^{-10}$ см; $T \gtrsim 3100$ К.

6.66

Условие:

Образец тефлона (полиимера с химческой формулой $(CF_2)_n$, где n – целое число) массой 50 г намагничивается в магнитном поле $B = 20$ кГс при температуре $T = 0,05$ К. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора $^{19}_{9}F$ (спин ядра $I = 1/2$) в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса $L = 24,2 \cdot 10^{-6}$ эрг · г (аналог эффекта Эйнштейна–де Гааза в ферромагнетиках). Определить величину магнитного момента ядра фтора.

Решение:

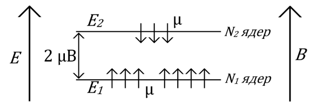
Число молей тефлона:

$$\nu_{\text{теф}} = \frac{m}{\mu_{\text{теф}}} = \frac{50}{n(12 + 2 \cdot 19)} = \frac{1}{n}.$$

Полное число атомов фтора:

$$N_0 = 2n \cdot \nu_{\text{теф}} \cdot N_A = \frac{2n}{n} N_A = 2N_A.$$

Так как спин ядра $I = 1/2$, то получаются два уровня ($I_z = +1/2$ и $I_z = -1/2$; ось $z \parallel \vec{B}$)



$$\begin{cases} E_1 = E_0 - \mu B \\ E_2 = E_0 + \mu B \end{cases} \quad \begin{cases} N_2 = N_1 \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = N_1 \exp\left(-\frac{2\mu B}{kT}\right) \\ N_0 = N_1 + N_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = N_0 \frac{\exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right)} \\ N_2 = N_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right)} \end{cases} \Rightarrow \Delta N = N_1 - N_2 = N_0 \frac{\exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right) + 1} \approx N_0 \frac{\frac{2\mu B}{kT}}{2 + \frac{2\mu B}{kT}} \approx N_0 \frac{\mu B}{kT}$$

После выключения поля намагниченность образца равна нулю, следовательно, $\frac{\Delta N}{2}$ ядер изменят направление спина $\Rightarrow$ образец получил момент импульса

$$L = \frac{\Delta N}{2}\hbar = \frac{\mu B \hbar}{2kT} N_0 = \frac{\mu B \hbar N_A}{kT} \Rightarrow \mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 13.25 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс} = 2,62\mu_{\text{яд}},$$

где $\mu_{\text{яд}} = 5,05 \cdot 10^{-24}$ – ядерный магнетон Бора.

Ответ: $\mu = 2,62\mu_{\text{яд}} = 13.25 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс

6.68

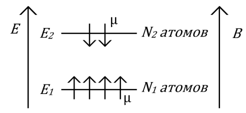
Условие:

Образование молекул водорода происходит только в том случае, если спины двух сталкивающихся атомов антипараллельны. В натсоящее время предпренимаются попытки хранения атомарного водорода при низких температурах в сильных магнитных полях. Оценить степень деполяризации α атомароного водорода, определяемую отношением числа атоммов с антипараллельными спинами к их поному числу при температуре $T = 1$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл.

Решение:

В магнитном поле получаются два уровня:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 - \mu B \\ E_2 = E_0 + \mu B \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_2 = N_1 \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = N_1 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right) \\ N_1 + N_2 = N_0 \text{ (полное число атомов водорода)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = N_0 \frac{\exp\left(\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2\mu_B B}{kT}\right)} \\ N_2 = N_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2\mu_B B}{kT}\right)} \end{cases}$$

Так как $N_2 < N_1$, то число атомов с антипараллельными спинами равно $2N_2$. Тогда

$$\alpha = \frac{2N_2}{N_0} = \frac{2}{1 + \exp\left(\frac{2\mu_B B}{kT}\right)} \approx 2\exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right) \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

Ответ: $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$

6.78

Условие:

Возбуждённое состояние атома гелия $1s^1 2s^1$ может иметь полный спин электронной оболочки S как 1 (ортогелий), так и 0 (парагелий). Энергии полной ионизации этих состояний $W_{\text{орто}} = 59,2$ эВ и $W_{\text{пара}} = 58,4$ эВ. Кроме энергии взаимодействия с ядром, в эти энергии вносят вклад не зависящая от полного спина часть энергии кулоновского отталктвания электронов $\mathscr{E}_K$ и зависящая о полного спина часть, называемая энергией обменного взаимодействия, $V = -\frac{A}{2}(1 + 4\langle \mathbf{s_1 s_2} \rangle)$, где A – константа, $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ – спины электронов ($\mathbf{S} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}$), а угловые скобки означают усреднение по направлениям спинов. Найти A и $\mathscr{E}_K$ счиатя, что оба электрона находятся в поле ядра с $Z = 2$, т. е. не учитывая экранировку поля ядра электронами.

Решение:

Энергия атома гелия равна:

$$-W = \mathscr{E}_{\text{яд}} + \mathscr{E}_K + V = \mathscr{E}_{\text{яд}} + \mathscr{E}_K - -\frac{A}{2}(1 + 4\langle \mathbf{s_1 s_2} \rangle),$$

где $\mathscr{E}_{\text{яд}}$ – энергия взаимодействия электронов сдром без учёта экранировки.

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{s_1} + \mathbf{s_2})^2 = 2\mathbf{s_1 s_2} + \mathbf{s_1}^2 + \mathbf{s_2}^2 \Rightarrow \mathbf{s_1 s_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{s_1} - \mathbf{s_2})$$

Вычисляя среднее значение операторов для каждого состояния (которые в нашем случае совпадают со своим собственными значениями), получим

$$\langle \mathbf{s_1 s_2} \rangle = \frac{1}{2} S(S+1) - s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1)]$$

Для ортогелия ($S = 1$):

$$\langle \mathbf{s_1 s_2} \rangle = \frac{1}{2}\left[1 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{4} \Rightarrow -W_{\text{орто}} = \mathscr{E}_{\text{яд}} + \mathscr{E}_K - A.$$

Для парагелия ($S = 0$):

$$\langle \mathbf{s_1 s_2} \rangle = \frac{1}{2}\left[0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right] = -\frac{3}{4} \Rightarrow -W_{\text{пара}} = \mathscr{E}_{\text{яд}} + \mathscr{E}_K + A.$$

Тогда

$$A = \frac{W_{\text{орто}} - W_{\text{пара}}}{2} = \frac{59,2 - 58,4}{2} = 0,4,$$

$$-W_{\text{орто}} - W_{\text{пара}} = 2\mathscr{E}_{\text{яд}} + 2\mathscr{E}_K$$

$$\mathscr{E}_{\text{яд}} = -R_1 Z^2 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{5}{4} \cdot 4R_1 = -5R_1 = 5 \cdot 13,6 = -68 \text{ эВ}$$

$$\mathscr{E}_K = -\frac{W_{\text{орто}} + W_{\text{пара}}}{2} - \mathscr{E}_{\text{яд}} = -\frac{59,2 + 58,4}{2} + 68 = -9,2$$

Ответ: $A = 0,4$ эВ; $\mathscr{E}_K = 9,2$ эВ.