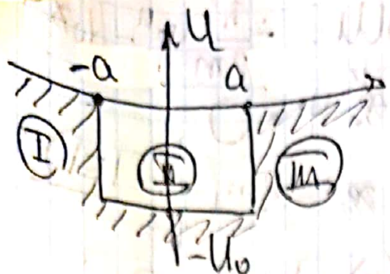
25



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+U(x)\psi=E\psi$$

I, III: $\psi''-k_1^2\psi=0$

$$k_1=\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

II: $\psi''+k_2^2\psi_2=0$

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(U_0-|E|)}}{\hbar}$$

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A_1e^{k_1x}, & x<-a\\ \psi_2(x)=A_2\cos k_2x+B_2\sin k_2x, & x\in(-a,a)\\ \psi_3(x)=B_3e^{-k_1x}, & x>a\end{cases}$$

Т.к. яма симм., то $[\hat H,\hat I]=0 \Rightarrow$ ВФ будут либо чет, либо неч. $\Rightarrow$ задача разб. на 2 случая

1) чет. $\psi(-x)=\psi(x)$

$\psi_2(x)=A\cos k_2x$, $\psi_3=Be^{-k_1x}$ (все симм $\Rightarrow \not\exists\ x<0$)

Из сшивки $\left(\begin{matrix}\psi_3(a)=\psi_2(a)\\ \psi_3'(a)=\psi_2'(a)\end{matrix}\right)$ $\begin{cases}A\cos k_2a=Be^{-k_1a}\\ -k_2A\sin k_2a=-k_1Be^{-k_1a}\end{cases}$

$\operatorname{tg}k_2a=\frac{k_1}{k_2}>0$, $\cos^2k_2a=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2k_2a}$

получаем
$$k_2a\in[\pi n,\pi/2+\pi n]$$
$$|\cos k_2a|=\underbrace{\frac{1}{k_0a}}_{\gamma}\cdot k_2a,\quad k_0=\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}.$$

2) $\psi(x)=-\psi(-x)$ для неч. $\psi_2(x)=A\sin k_2x$, $\psi_1=-Be^{k_1x}$, $\psi_3=Be^{-k_1x}$

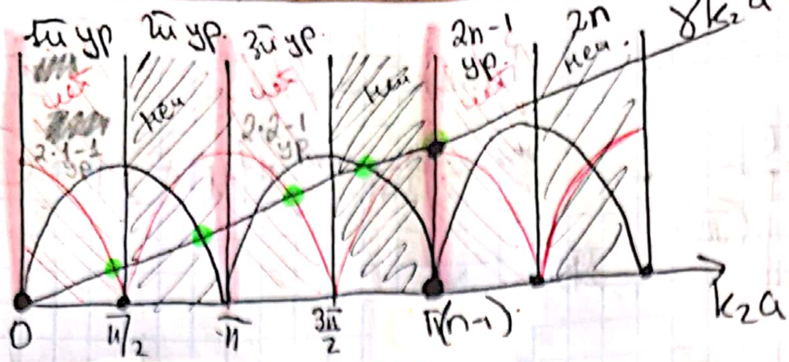
из сшивки
$$k_2a\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi n,\pi+\pi n\right)$$
$$|\sin k_2a|=\underbrace{\frac{1}{k_0a}}_{\gamma}\cdot k_2a$$

$A\sin k_2a=Be^{-k_1a}$

$Ak_2\cos k_2a=-Bk_1e^{-k_1a}$

$\operatorname{ctg}k_2a=-\frac{k_1}{k_2}<0$

$\sin^2k_2a=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2k_2a}=\left(\frac{k_2a}{k_0a}\right)^2$



– чет $|\cos k_2 a| = \delta k_2 a$

– неч. $|\sin k_2 a| = \delta k_2 a$

$$\delta = \frac{1}{k_0 a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} a} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0}\, a}$$

• Только возьми $(2n-1)$ уровень ← чет.

$$k_2 a = \pi(n-1)$$

$$\delta k_2 a = 1$$

$$\delta = \frac{1}{k_2 a} = \frac{1}{\pi(n-1)} \overset{n \gg 1}{\approx} \frac{1}{\pi n}.$$

• энергия 2 уровня – 1й неч. уровень.

$$k_2 a \in [\pi/2; \pi)$$

$$\sin k_2 a = \delta k_2 a \ll 1 \quad \text{т.к. } \delta \ll 1,\ k_2 a < \pi$$

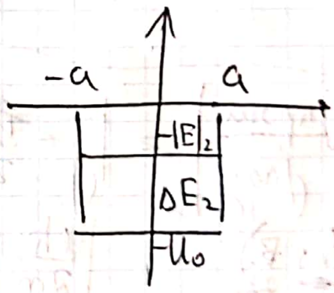
$$\| \quad \sin(\pi - k_2 a)$$

$$\pi - k_2 a \approx \delta k_2 a$$

$$\pi = (\delta + 1) k_2 a$$

$$k_2 a = \frac{\pi}{\delta + 1}$$

$$k_2 = \frac{\pi}{a(\delta+1)}$$



ΔE_2 или

$$k_2^2 = \frac{2m(U_0 - |E|_2)}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{a^2(\delta+1)^2}$$

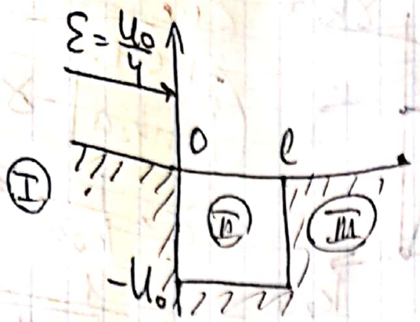
$$\Delta E_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2(\delta+1)^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2\left(1 + \frac{1}{\pi n}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(1 - \frac{2}{\pi n}\right)$$

Rem в условии ширина ямы a, а не $2a$ ⇒

$$\Rightarrow \Delta E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(a/2)^2}\left(1 - \frac{2}{\pi n}\right)$$

3б



R_{max} — ?

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (U - E)\psi = 0$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

I $\quad \psi'' + k_1^2\psi = 0 \qquad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

II $\quad \psi'' + k_2^2\psi = 0 \qquad k_2^2 = \frac{2m(U_0+\varepsilon)}{\hbar^2}$

$$\begin{cases} \psi_1 = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}, & x<0 \\ \psi_2 = c_1e^{ik_2x} + c_2e^{-ik_2x}, & x\in(0,\ell) \\ \psi_3 = de^{ik_1x}, & x>\ell \end{cases}$$

ушива $\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \psi_2(\ell) = \psi_3(\ell) \\ \psi_2'(\ell) = \psi_3'(\ell) \end{cases}$

$$\begin{cases} 1+r = c_1+c_2 \\ k_1(1-r) = k_2(c_1-c_2) \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} c_1e^{ik_2\ell} + c_2e^{-ik_2\ell} = de^{ik_1\ell} \\ k_2(c_1e^{ik_2\ell} - c_2e^{-ik_2\ell}) = k_1de^{ik_1\ell} \end{cases} \quad (2)$$

$$D = \left|\frac{j_{прош}}{j_{пад}}\right| = \left|\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi)\right| = \left|\frac{\frac{i\hbar}{2m}(-ik_2d^2 - ik_2d^2)}{\frac{i\hbar}{m}\cdot k_1}\right| = \frac{k_2}{k_1}|d|^2$$

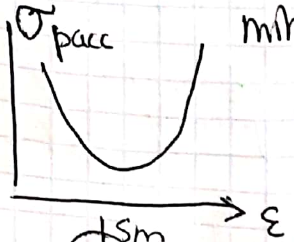
прох-ф (по E)

Из лаб. работи 1.3

$$D = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 k_2\ell}$$

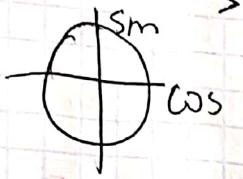
~~D → max min (⇒ R → max) при sin~~

• Для эффекта Рамзауэра известно, что



min рассеяния электронов
(R_{min}, D_{max})

~~D_{max} при~~



min расс. при $\sin k_2 \tilde{l} = 0$
D_{max}

$k_2 \tilde{l} = \pi n$

$\tilde{l}_n = \frac{\pi n}{k_2}$ — ширина ямы, отв. Рамзауэру

• Из условия максимума отраж — при $l = \frac{\tilde{l}_n + \tilde{l}_{n+1}}{2} =$

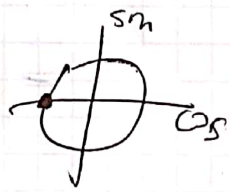
$= \frac{\pi}{k_2} \frac{n+n+1}{2} = \frac{\pi}{k_2} \frac{(2n+1)}{2} =$ $\Big| k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 + \frac{U_0}{4})}}{\hbar} =$

$= \frac{\pi \hbar}{\sqrt{\frac{5}{2} m U_0^2}} \cdot (n + \frac{1}{2})$ // $= \frac{\sqrt{2mU_0^2 \cdot 5/4}}{\hbar} = \frac{\sqrt{5/2\, mU_0^2}}{\hbar}$

• $R = \frac{|j_{отр}|}{|j_{пад}|} = \frac{\left|\frac{i\hbar}{2m}(r^2 ik_1 + r^2 ik_1)\right|}{|\hbar k_1/m|} = |r|^2$

Найдём r^2 из (1) и (2)

(2): $k_2 \cdot \frac{c_1 e^{ik_2 l} - c_2 e^{-ik_2 l}}{c_1 e^{ik_2 l} + c_2 e^{-ik_2 l}} = k_1$



$k_2 \cdot \frac{c_1 e^{2ik_2 l} - c_2}{c_1 e^{2ik_2 l} + c_2} = k_1$

$e^{2ik_2 l} = \cos(2k_2 l) + i\sin(2k_2 l) = \left| 2k_2 l = 2\pi(n + \frac{1}{2}) = 2\pi n + \pi \right|$

$= -1$

$\frac{-c_1 - c_2}{-c_1 + c_2} = \frac{k_1}{k_2}$ $\cancel{= \frac{1}{\sqrt5}}$

$\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} = \frac{k_1}{k_2}$

$\cancel{\sqrt5 c_1 + \sqrt5 c_2 = c_1 - c_2}$

$\cancel{(\sqrt5 - 1) c_1 = -c_2 (1 + \sqrt5)}$

$\cancel{c_1 = -c_2 \cdot \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5 - 1} = -c_2 \cdot \frac{(\sqrt5+1)^2}{4}}$

(1) $k_1 \cdot \frac{1-r}{1+r} = k_2 \cdot \frac{c_1-c_2}{c_1+c_2} = k_2 \cdot \frac{k_2}{k_1}$

$$\frac{c_1+c_2}{c_1-c_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = 5$$

$$1-r = 5+5r$$

$$-6r = 4$$

$$r = -2/3$$

при отр. от опт. более плот. среды фаза волны меняет

$\cancel{R_{max} = r^2 = 4/9}$

$R_{max} = 4/9$

Rem Чу лаб. 1.3 $\quad D = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 k_2 l}$

$\Rightarrow D_{min} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)^2} =$ (при $\sin k_2 l = \pm 1$, $k_2 l = \frac{\pi}{2}+\pi n$)

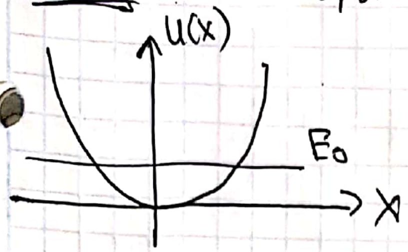
$= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt5}-\sqrt5\right)^2}$ ③

$$\left(\frac{1}{\sqrt5}-\sqrt5\right)^2 = \frac{1}{5}+5-2 = 3+\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

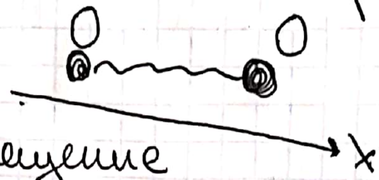
③ $\frac{1}{1+\frac{4}{5}} = \frac{5}{9}$

$R_{max} = 1 - D_{min} = 4/9$

1A $\hbar\omega = 0{,}2$ эВ $\qquad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ кол.



$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ – энергия нул. колеб.



1) Среднеквадратичное смещение атомов O: $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} = ans$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2. \quad \text{∢ гарм. кол.}$$

$$x = a\cos\omega t \Rightarrow \langle x\rangle = \langle a\cos\omega t\rangle = 0$$

$$\langle x^2\rangle = \langle a^2\cos^2\omega t\rangle = a^2/2.$$

$$\Rightarrow \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle$$

прив. масса

2) $$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \bar{T}_0 + \bar{U}_0 \underset{\text{Th Вириала}}{=} 2\bar{T}_0 = \cancel{2}\cdot\frac{\mu\omega^2\langle x^2\rangle}{\cancel{2}}, \quad \mu = \frac{m_0}{2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\mu\omega^2} = \frac{\hbar\omega}{2\mu\hbar^2\omega^2}\cdot\hbar^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\cdot\frac{\hbar^2}{2\mu}$$

$$= \frac{1}{0{,}2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{Дж}}\cdot\frac{(1{,}054\cdot10^{-34})^2\,\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot16\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\,\text{кг}}$$

$$= 1{,}3\cdot10^{-23}\ \text{м}^2$$

$$ans = \sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} = 3{,}6\cdot10^{-12}\ \text{м}. \approx 0{,}04\ \text{Å}$$

Rem можно было сказать, что $\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \simeq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle(\Delta p)^2\rangle}, \quad \langle(\Delta p)^2\rangle = \langle p^2\rangle = 2\mu\bar{T} = 2\mu\cdot\frac{\hbar\omega/2}{2} = \mu\hbar\omega/2$$