
ЛЕКЦИЯ 1

ФОТОЭФФЕКТ. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Элементарные частицы обладают **квантовыми** (волновыми) свойствами. Но фотоны (кванты электромагнитного излучения) обладают свойствами частиц тоже.

Первый семинар посвящается эффектам, в которых фотон проявляет свои **корпускулярные свойства**. Существуют два ярких эффекта, противоречащих классической волновой оптике.

1. Фотон. Фотоэффект

Первый опыт — **фотоэффект**. Катод освещается световым потоком. Цепь замыкается, возникает фототок, потому что из материала фотокатода выбрасываются электроны под действием света. Они замыкают цепь. Схема опыта представлена на рисунке (1.1)

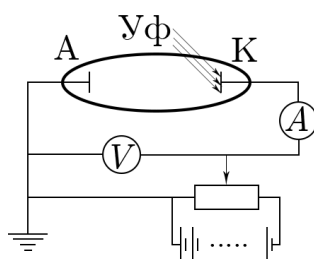


Рис. 1.1

$$V = \varphi_A - \varphi_K.$$

Экспериментально были получены такие закономерности для фототока от напряжения и для запирающего напряжения от частоты падающего света. Эти закономерности представлены на рисунке (??) и на рисунке (1.2). Как видно из графика, существует граница для напряжения, ниже которой фотоэффект не происходит. Эта граница для напряжения называется **запирающее напряжение**. Так же существует граница для

частоты падающего света, ниже которой опять фотоэффект не происходит. Эта граница для частоты падающего света называется **красная граница фотоэффекта**.

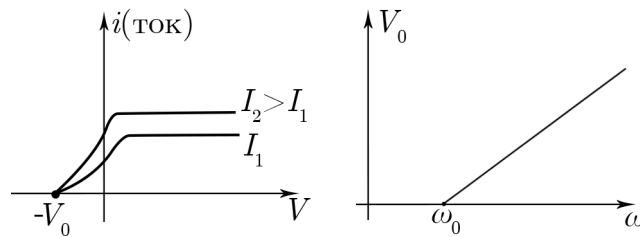


Рис. 1.2

Объяснить это исходя из того, что свет есть электромагнитная волна, никаким образом не удавалось. Но с точки зрения корпускулярных свойств света удалось.

Для этого **Эйнштейн** записал

$$\hbar\omega = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}.$$

Очевидно, что $\hbar\omega_0 = A_{\text{вых}}$, где ω_0 — красная граница фотоэффекта.

$$\Rightarrow \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \hbar(\omega - \omega_0).$$

Дальше рассмотрим электронную часть.

Теперь рассмотрим запирающую лампу. $\frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$ — кинетическая энергия, которая гасится в области электрического поля. Она равна работе электромагнитного поля по гашению.

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \hbar(\omega - \omega_0) = eV_0.$$

Но на самом деле из-за разнородности катода и анода возникает **контактная разность потенциалов**.

$$\Rightarrow \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \hbar(\omega - \omega_0) = e(V_0 + V_c).$$

Выясним, что такое контактная разность потенциалов.

Для того чтобы объяснить последнее, нарисуем диаграмму энергии фотонов. Она представлена на рисунке (1.3).

Электроны в отдельно взятом атоме занимают энергетические уровни. Когда эти атомы объединяются в кристалл, расстояние между дискретными уровнями уменьшается. Следовательно, появляется предельный уровень, которая называется **энергия Ферми**. Выше энергии Ферми не занято электронами. **Работа выхода** — энергия, затрачиваемая при выходе электронов с энергией Ферми.

В итоге, освобожденные электроны имеют разные энергии.

Задача 1.17. Фотоэффект

Какую минимальную длительность импульса фототока можно получить в вакуумном фотоэлементе, между анодом и катодом которого приложено напряжение в несколько сотен вольт, при освещении фотокатода короткими (10^{-11} с) импульсами света с длиной

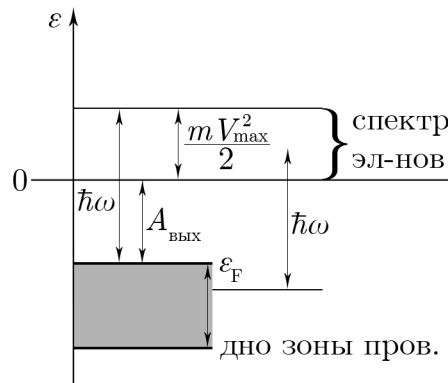


Рис. 1.3

волны $\lambda = 500$ нм. Красная граница материала фотокатода $\lambda_{кр} = 1000$ нм, напряженность поля между анодом и фотокатодом $E = 300 \frac{В}{см}$.

Решение.

Расстояние между анодом и катодом:

$$l = \frac{at_1^2}{2} = \frac{eEt_1^2}{2m} = v_m t_2 + \frac{eEt_2^2}{2m}.$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 \sqrt{1 + \frac{2mv_m}{eEt_2}},$$

$$v_m t_2 \ll \frac{eEt_2^2}{2m} \Rightarrow \frac{2mv_m}{eEt_2} \ll 1,$$

$$\Rightarrow t_1 \approx t_2 + \frac{mv_m}{eE}.$$

Запишем уравнение Эйнштейна

$$\frac{mv_m^2}{2} = \hbar(\omega - \omega_0),$$

$$v_m^2 = \frac{2\hbar}{m}(\omega - \omega_0),$$

$$\hbar\omega = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow v_m^2 = \frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right).$$

$$\text{Окончательно, } \Delta t = t_1 - t_2 = \frac{1}{eE} \sqrt{\frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}.$$

Рассмотрим картинку (1.4) чтобы установить, что такое **контактная разность потенциалов**.

На картинке изображены приведенные в контакт два материала с разными **уровнями Ферми**. После соединения энергия Ферми отвечает за химический потенциал. Условие равновесия всякой системы с переменным числом частиц есть **равенство химических потенциалов**. Начнутся перетекания электронов как в сообщающихся сосудах. На контакте возникает потенциальный барьер — это и есть контактная разность потенциалов.

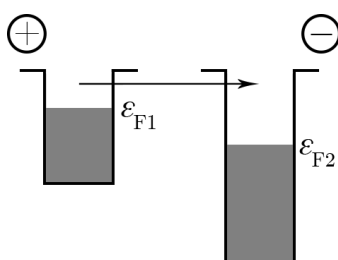


Рис. 1.4

2. Эффект Комптона

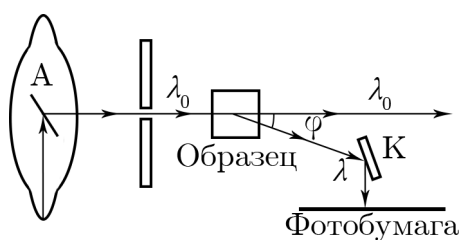


Рис. 1.5

На картинке (1.5) изображена **рентгеновская лампа**. Она осуществляет **обратный фотоэффект**. Электронами возбуждается появление гамма-квантов. Электроны вбиваются в анод и излучают электромагнитное излучение, которое вбивается в образец. Некоторые рассеиваются, и в этом случае они меняют свою длину волны, и тогда становится возможным наблюдать их на фотобумаге.

Комптон определил, что

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1 - \cos\phi).$$

Λ_e есть **комптоновская длина волны** электронов. $\Lambda_e = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см.

Объясним, почему рассеянные γ -кванты меняют длину волны. Это явление объясняется, если γ -квант считать частицей.

Реакция представлена на рисунке (1.6)

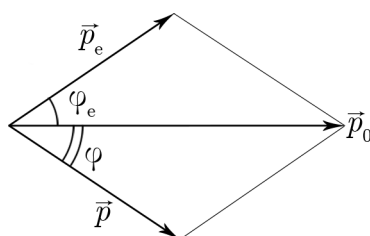


Рис. 1.6

Напишем законы сохранения.

Закон сохранения импульса выглядит следующим образом:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_e + \vec{p}.$$

Закон сохранения энергии:

$$\epsilon_{\phi_0} + mc^2 = e_{\phi} + \epsilon_e \Rightarrow \epsilon_e = \epsilon_{\phi_0} + mc^2 - e_{\phi}.$$

По теореме косинусов получаем

$$p_e^2 = p_0^2 - 2pp_0 \cos \phi + p^2.$$

Соотношение между импульсом и энергией фотона:

$$\frac{\epsilon_{\phi_0}}{c} = p_0.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\pi \frac{\hbar}{mc} (1 - \cos \phi) = \Lambda_e (1 - \cos \phi).$$

Задача 1.23. Рассеяние фотона на неподвижном электроне

Фотон рентгеновского излучения с длиной волны λ в результате комптоновского рассеяния на неподвижном свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол θ . Определить кинетическую энергию T_e и импульс p_e электрона отдачи. Дать численный ответ для $\lambda = 0,02$ нм и $\theta = 90^\circ$.

Решение.

Напомним, что

$$\lambda - \lambda_0 = \Lambda_e (1 - \cos \phi).$$

Закон сохранения энергии:

$$\epsilon_{\phi_0} + mc^2 = e_{\phi} + T_e + mc^2,$$

где T_e — кинетическая энергия частицы, а $T_e + mc^2$ — полная энергия частицы.

$$\begin{aligned} T_e = \epsilon_{\phi_0} - e_{\phi} &= \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda \lambda_0} \right) = \frac{hc \Lambda_e (1 - \cos \phi)}{\lambda_0 (\lambda_0 + \Lambda_e (1 - \cos \phi))}. \\ \Rightarrow T_e &= \frac{hc}{\lambda} \frac{\Lambda_e}{\lambda_0 + \Lambda_e}. \end{aligned}$$

Релятивистская формула для энергии электронов

$$\begin{aligned} \epsilon_e^2 &= T_e^2 + 2mc^2 T_e + m^2 c^4 = p_e^2 c^2 + m^2 c^4. \\ \Rightarrow p_e c &= \sqrt{T_e (T_e + 2mc^2)} = 8,3 \cdot 10^4 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Задача 1.32. Рассеяние фотона на электроне

С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы летящий ему навстречу фотон с длиной волны $\lambda = 0,0024$ нм не изменил свою энергию при 180° -рассеянии?

Решение.

$$\Lambda_e = \frac{h}{mc} = 0,0243 \text{ нм},$$

$$\Rightarrow \lambda \approx \Lambda_e.$$

Напишем закон сохранения энергии:

$$\hbar\omega + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \hbar\omega' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta'^2}}.$$

Следовательно, для электрона получается:

$$\beta' = \beta.$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\hbar\omega}{c} - \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\hbar\omega}{c} + \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda},$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h}{mc} \frac{1}{\lambda} = \frac{\Lambda_e}{\lambda} \approx 1,$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{1-\beta^2}. \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Задача 1.48. Испускание гамма-кванта возбуждённым ядром

Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta\epsilon = 1 \text{ МэВ}$ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100 \text{ эВ}$ и испускает γ -квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ -кванта по энергии будет равен нулю?

Решение.

Возбужденное ядро рождает γ -кванты. В этом случае наблюдается **эффект Доплера**.

В нерелятивистском случае

$$v \ll c \text{ и } \omega \approx \omega_0(1 + \frac{v}{c} \cos \theta).$$

В релятивистском случае:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta}.$$

Нужно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\epsilon = \Delta\epsilon.$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2T}{Am_p}},$$

$$m_p \approx 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ з.}$$

В системе покоя ядра выполняется:

$$p_\gamma = p_{\text{я}}.$$

$$\hbar \Delta \omega = T_{\text{яд}}^{\text{отдачи}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2}.$$

Истинная энергия излучения равна:

$$\hbar \omega = E_\gamma - T_{\text{яд}} = E_\gamma \left(1 - \frac{E_\gamma}{2mc^2}\right).$$

В лабораторной системе отсчета (ЛСО) под углом θ из-за **эффекта Доплера**:

$$\omega(\theta) = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) = \frac{E_\gamma}{\hbar} \left(1 - \frac{E_\gamma}{2mc^2}\right) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \approx \frac{E_\gamma}{\hbar} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta - \frac{E_\gamma}{2mc^2}\right).$$

Сдвига не будет наблюдаться, если $\frac{v}{c} \cos \theta = \frac{E_\gamma}{2mc^2}$.

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{E_\gamma}{v - 2mc} = \frac{E_\gamma}{2\sqrt{2Tmc^2}} \approx 0,116.$$

$$\Rightarrow \theta \approx 83.3^\circ.$$

Задача 1.50. Рассеяние нейтрино на электронах

По современным представлениям в спектре солнечных лучей нейтрино должна существовать достаточно интенсивная монохроматическая линия с энергией $\epsilon_\nu = 0,86 \text{ МэВ}$, что обусловлено идущей на Солнце реакцией ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow \nu_e$. Для регистрации нейтрино был создан детектор BOREXINO с жидким сцинтиллятором, в котором регистрируются электроны по реакции рассеяния (ν, e^-) . Какова максимальная кинетическая энергия регистрируемых электронов?

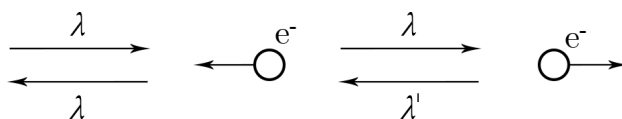
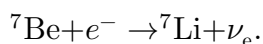


Рис. 1.7

Решение.

Реакцию схематично представлена на рисунках (??), (1.7) и (1.8)

$$\epsilon_\nu = 0.86 \text{ МэВ},$$



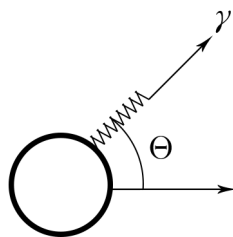


Рис. 1.8

Это эффект Комптона на нейтрино:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda^{\max},$$

$$\Delta\lambda = \Lambda_e(1 - \cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda^{\max} = \lambda' - \lambda = 2\Lambda_e.$$

Закон сохранения энергии:

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + E_e^{\max} = T_e^{\max} + mc^2,$$

$$T_e^{\max} = h(\nu - \nu') = h\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda) = E_\gamma \frac{\Delta\lambda^{\max}}{\lambda'} = E_\gamma \frac{\Delta\lambda^{\max}}{\lambda + \Delta\lambda^{\max}} = 0,663 \text{ МэВ},$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$



ЛЕКЦИЯ 2

ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1. Корпускулярно-волновой дуализм

Электромагнитное излучение при некоторых условиях обладает **корпускулярными свойствами**, а в других проявляет себя как **волна**.

Принцип дополнительности гласит: в одном и том же явлении эти два свойства (свойства волн и свойства частиц) одновременно не проявляются.

При рассмотрении фотона как частицу электромагнитного излучения, полагают, что

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}.$$

Это равенство известно еще из специальной теории относительности. Фотон не обладает массой и, следовательно, не обладает энергией покоя.

Дальше будет установлено, что

$$\mathcal{E} = \hbar\omega,$$
$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k = \frac{2\pi}{\lambda}\hbar = \frac{h}{\lambda},$$

где k — модуль волнового вектора, λ — длина волны фотона, $\lambda = \frac{h}{p}$. Это длина волны частицы с нулевой массой.

Интересен вопрос, обладают ли другие частицы (квантовые объекты) волновыми свойствами. В каких-то экспериментах частицы могут проявлять себя как волны, а в других — как частицы с энергией \mathcal{E} и импульсом \vec{p} .

Связь между энергией и импульсом называется законом дисперсии:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

Волна характеризуется частотой и волновым вектором ω и \vec{k} . Связь между ними называется также закон дисперсии:

$$\omega = kc.$$

Запишем два симметричных выражения:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega,$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Свободно распространяющейся частице (например, если частица распространяется вдоль оси x) приписывают сопровождающую её волну:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Поскольку временная часть не существенна, это можно записать и таким образом:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - \omega t)}.$$

В оптике аналогичное соотношение пишется в таком виде:

$$\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Однако в квантовой механике, в силу исторических причин, принято писать так:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Также принимается, что квадрат модуля ψ будет $\psi^* \psi$.

Задача 2.5. Идея массы фотона

В опытах при измерении расстояния между Землей и Луной ($L = 3,8 \cdot 10^5$ км) локацией её поверхности оказалось, что результаты в оптическом и радиодиапазоне ($\lambda_1 = 20$ см) не совпадают. Отличие в результатах измерений объяснялось попаданием излучения в разные точки лунной поверхности, которые могли отличаться по высоте на $\Delta L = \pm 100$ м. С другой стороны, этот результат можно интерпретировать как результат отражения фотона с ненулевой массой от ровной поверхности. Принимая это, оценить возможную верхнюю границу массы фотона m_γ (в эВ).

Решение.

Установим, есть ли дисперсия (зависимость скорости от длины волны), если $m_\gamma \neq 0$.

$$E_\gamma = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2},$$

$$v = \frac{dE_\gamma}{dp} = \frac{2pc}{2\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^4}{p^2 c^2}}}.$$

С хорошей точностью можно записать:

$$E_\gamma \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{p} \right)^2 \right) = c \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{mc\lambda}{h} \right] \right),$$

где использовалось выражение $p = \frac{h}{\lambda}$.

Далее следует, что

$$c - v = \frac{c}{2} \left(\frac{mc\lambda}{h} \right).$$

Это означает, что есть дисперсия. То есть, если учитывать, что протон имеет массу, появляется дисперсия.

Время, за которое проходят эти сигналы:

$$\frac{2L}{v_1} - \frac{2L}{v_2} = 2L \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2},$$

$$(c - v_1) - (c - v_2) = v_2 - v_1 = \frac{c^2 m^2}{2h^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2),$$

Следовательно,

$$\Delta t = 2L \frac{c^3 m^2}{2h^2 c^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = \frac{L c m^2}{h^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2).$$

Длина волны света $\sim 10^{-5}$ см, а $\lambda_1 = 20$ см, поэтому $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \approx \lambda_1^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{L c m^2 \lambda_1^2}{h^2}$.
Из ΔL можно получить условие на Δt .

$$\Delta t \lesssim \frac{4\Delta L}{c}.$$

$$m^2 \lesssim \frac{4\Delta L h^2}{L c^2 \lambda_1^2} \Rightarrow m \lesssim \frac{2h}{\lambda_1 c} \sqrt{\frac{\Delta L}{L}} \approx 10^{-41} \text{ з.}$$

2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

На самом деле, фотон не обладает массой и дисперсией. Но все реальные частицы обладают массой и дисперсией в вакууме.

Волна, сопровождающая свободно распространяющуюся частицу — это плоская волна, записываемая так:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - \epsilon t)}.$$

Функция $\psi(x)$ называется **волновой функцией**. Величины p и ϵ считаются заданными точно, а величины x и t — меняются. Волна определена для любых x и t .

Будем рассматривать, что произойдет, если волну ограничить. Поставим щель на пути частицы, тогда произойдет дифракция Фраунгофера. Если бы эти частицы не считались обычными частицами, то на экране получилась бы яркая, четкая полоса. Однако опыт показывает, что появляется дифракция Фраунгофера, то есть частица попадает на любую часть экрана. Следовательно, можно говорить о вероятности попадания в некоторую точку экрана для частицы. Волновая функция несет в себе информацию о вероятности обнаружить частицу в какой-то точке пространства. Проверка возможна с помощью опыта.

Это показано на рисунках (??) и (2.1).

Пусть θ — положение дифракционного минимума. Попытаемся описать первый ди-

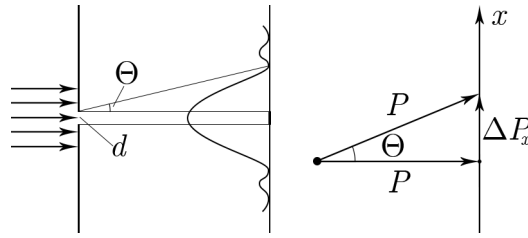


Рис. 2.1

фракционный минимум с двух позиций:

1) Волновое описание:

$$d \sin \theta = \lambda.$$

2) Корпускулярное описание.

Возникает p_x , и так как вектор \vec{p} поворачивается, то $\Delta p_x = p \sin \theta$.

Если объединить эти два описания:

$$\Delta p_x = p \sin \theta = p \frac{\lambda}{d}.$$

Запишем волну де Бройля:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - \epsilon t)}, \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

$$p = mv, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно,

$$\Delta p_x = p \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d}.$$

Также появляются минимумы, если учесть, что $\sin \theta$ может быть больше ($d \sin \theta = n\lambda$). Δp_x называется **неопределенностью в импульсе**. Тогда, поскольку, d будет порядка Δx , то $\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$. Последнее соотношение называется **соотношением неопределенностей**. Если волна встречает на своем пути препятствие, то точно такое же уравнение можно записать для E (энергии) и t (времени).

Задача 2.32. Кинетическая энергия электрона

Оценить энергию электрона, локализованного в области пространства, радиус которого $r \sim 10^{-8}$ см (атом) и $r \sim 10^{-12}$ см (атомное ядро).

Решение.

У электрона $\Delta r \sim r$, $\Delta p \sim \hbar$. Соотношение неопределенностей запишем в форме Вейля:

$$\sigma_p^2 \sigma_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Следовательно, $\Delta p \Delta r \geq \frac{\hbar^2}{2}$.

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8mr^2}.$$

1. Для атома расчет по этой формуле даёт $E_{\text{кин}} \sim 1$ эВ.
2. Для ядра $E_{\text{кин}} \sim 10^4$ эВ.

Электроны с такой энергией никогда не встречаются в ядре. Отсюда следует вывод: электроны с такими энергиями не могут быть удержаны в ядре, т. к. они не взаимодействуют сильным взаимодействием, а только через электромагнитные силы.

3. Соотношение неопределенностей для энергии и времени

Существует другое соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

Приведем рассуждения из учебника Ландау и Лившица.

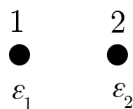


Рис. 2.2

Есть система из двух частиц. Она продемонстрирована на (2.2). Эти частицы слабо взаимодействуют друг с другом. Предположим, в некоторое время были найдены их энергии, причем значения были определены сколь угодно точно. Через время Δt снова измерили энергию, и получились значения \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 .

$$|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2)| \Delta t \sim \hbar.$$

В квантовой механике закон сохранения энергии не несет абсолютного характера, он может быть проверен с точностью $\frac{\hbar}{\Delta t}$.

Заметим также, что в формуле

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar,$$

Δp и Δx есть неопределенности в один и тот же момент времени, а в формуле для неопределенности по энергии сами энергии измерены в разные моменты времени. То есть в действительности присутствует огромная разница между физическими смыслами в двух разных соотношениях неопределенностей — для энергии и времени, и для координаты и импульса.

Задача 2.31. Кванты ядерного поля

Предполагая, что ядерные силы между нуклонами обусловлены обменом квантами ядерного поля — виртуальными пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что энергия покоя пионов $m_p c^2 \approx 140$ МэВ.

Решение.

Все взаимодействия на самом деле можно объяснить с точки зрения обменных взаимодействий. Например, электромагнитное взаимодействие есть обмен виртуальными



фотонами. Внутри ядра сильное взаимодействие обусловлено обменом квантами ядерного поля (π - мезоны).

Энергия π -мезона $\Delta\varepsilon \sim 100$ МэВ, $v \sim c$. Воспользуемся соотношением неопределенностей, записанной внутри ядра

$$\Delta\varepsilon \sim \frac{\hbar}{\Delta t},$$

или

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon}.$$

За какое-то очень маленькое время Δt возникает квант ядерного поля.

В случае, если $\varepsilon > mc^2$, то принято говорить о виртуальной частице, которая если бы могла быть реальной, то имела бы mc^2 энергии покоя.

$$R \leq \Delta c \leq \frac{h}{\Delta\varepsilon} c \sim \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Заметим, что величина $\lambda_k = \frac{\hbar}{mc} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см называется комптоновской длиной волны. То есть радиус действия этих сил меньше комптоновской длины волны этой частицы.



Задача 2.43. Соотношение неопределенностей

Оценить на основании соотношения неопределенностей радиус атома водорода в основном состоянии и энергию связи электрона в том же состоянии. Определить на основании таких же оценок размер двухатомной молекулы и энергию её основного состояния, рассматривая молекулу как одномерный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 и приведенной массой μ .

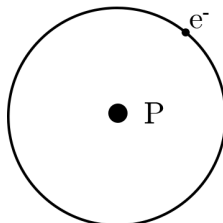


Рис. 2.3

Решение.

Запишем соотношение неопределенностей:

$$\Delta p \cdot \Delta r \sim \hbar,$$

$$\Delta p \sim p, \quad \Delta r \sim r.$$

Следовательно, полная энергия равна

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}.$$

Соотношение неопределенностей: $p \sim \frac{\hbar}{r}$, поэтому

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}.$$

Атом находится в основном состоянии, значит, в состоянии с начальной энергией. Известно, что всякая система стремится к минимуму энергии. Это называется принцип минимума энергии.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dr} = 0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{r^3} + \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow r \frac{\hbar^2}{mc^2} = 0,53 \text{ \AA}.$$

Это боровский радиус, который совпал с результатом, получаемым в боровской модели.

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Получено выражение для энергии в основном состоянии атома водорода. Заметим, что через соотношение неопределенностей случайно получен такой же результат, как и в боровской модели. Соотношение неопределенностей — это просто приближенное соотношение, которое дает близкие к правде результаты.

Вторая часть задачи.

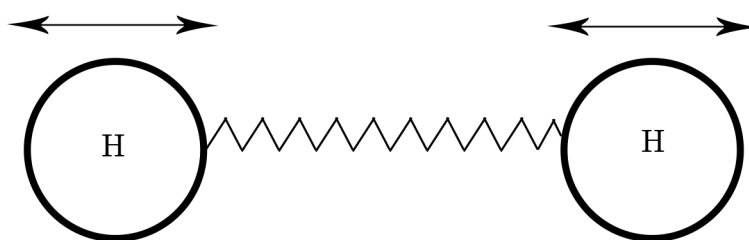


Рис. 2.4

Необходимо оценить размер двух атомной молекулы и энергию её основного состояния. При больших T возбуждаются колебательные степени свободы. Известно, что это гармонический осциллятор имеет частоту ω_0 и приведенную массу μ . Вспомним, что:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_p}{2}.$$

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{kx^2}{2}.$$

Соотношение неопределенностей в форме Вейля:

$$\overline{p^2} \cdot \overline{x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

$$E = \frac{\hbar^2}{8\mu\overline{x^2}} + \frac{k\overline{x^2}}{2} \stackrel{\text{без усреднения}}{=} \frac{\hbar^2}{8\mu\overline{x^2}} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2\overline{x^2}.$$

Условие стационарности энергии:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} = 0 &\Rightarrow \frac{dE}{d(x^2)} = 0 \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{8\mu x^4} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 &\Rightarrow x^4 = \frac{\hbar^2}{4\mu^2\omega_0^2} \Rightarrow \overline{x^2} = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \end{aligned}$$

Формула правильна. Минимальная энергия осциллятора $\frac{\hbar\omega_0}{2}$. Это энергия нулевых колебаний, она показана на рисунке (2.5).

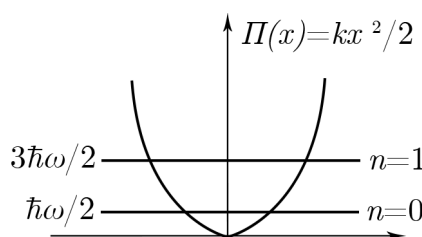


Рис. 2.5

Энергия этого осциллятора не может быть нулевой. В противном случае это означало бы, что частица лежит на дне. Но последнее предположение противоречит соотношению неопределенностей, так как частица не может быть локализована в какой-то точке пространства.

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

ЛЕКЦИЯ 3

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

1. Волновая функция

Запишем **волновую функцию** свободно распространяющейся частицы:

$$\psi(x) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Это единственная волновая функция, которая является точной. То есть точно известно, что свободно распространяющейся частице сопровождает именно такая волновая функция. Очевидно, это заданная плоская волна с вполне определенными значениями импульса и энергии. Следовательно, этой частице сопутствует волна.

Вероятность обнаружить частицу в бесконечно маленьком объеме dV равна

$$|\psi|^2 dV.$$

Для нахождения вероятности обнаружения частицы в каком-то объеме нужно проинтегрировать это выражение:

$$\int |\psi|^2 dV.$$

Кроме того, у всякой функции распределения должна быть нормировка.

$$\Rightarrow \int |\psi|^2 dV = 1.$$

Напомним, что

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi.$$

Средним значением координаты называется величина:

$$\bar{x} = \int_a^b \psi^* x \psi dx.$$

При одномерном движении нормировка имеет вид:

$$\int_a^b \psi^* \psi dx = 1.$$

Более того, среднее значение некоторой функции $u(x)$ есть:

$$\overline{u(x)} = \int_a^b \psi^* u(x) \psi dx.$$

В частности, в качестве такой функции от координаты может быть рассмотрена потенциальная энергия.

Сейчас рассмотрим задачу нахождения среднего значения импульса. Она аналогична поиску преобразования Фурье. Сразу выпишем результат:

$$\overline{p_x} = \int p_x dw(p_x).$$

2. Уравнение Шредингера

Итак, необходимо обойти то, что неизвестно $w(p_x)$. Для этого существует обходной путь. Этот путь называется **операторным методом**.

Снова запишем волновую функцию свободно распространяющейся частицы:

$$\psi(x) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{i}{\hbar} p \psi, \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi &= p \psi. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно записать в виде:

$$\hat{p} \psi = p \psi.$$

Решением этого дифференциального уравнения являются собственные значения этого оператора — те, которые разрешены, и которые при измерении могут быть получены. Следовательно,

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

В самом общем виде:

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

Продифференцируем ψ по t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{E}{\hbar} \psi,$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi.$$

Оператор полной энергии имеет вид:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Зависимость от времени проявляется в нестационарных случаях. В противоположном случае, когда от времени ничего не зависит, то есть при стационарном случае, **уравнение Шредингера** принимает вид:

$$\hat{E}\psi = E\psi.$$

Вспомним, что такое полная энергия:

$$E = T + U.$$

Запишем операторное соотношение:

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}.$$

Раньше было доказано, что:

$$\hat{U} = U.$$

Вспомним выражение для кинетической энергии из классической механики:

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

Можно сделать предположение:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

В общем случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Запишем уравнение Шредингера:

$$\hat{E}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

В стационарном случае:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi.$$

Заметим, что последнее соотношение не было выведено, а было получено из некоторых соображений.



Уравнение Шредингера дает выражение для возможных значений полной энергии, и для каждого значения энергии, вероятность ее приобрести.

$$E_1 \rightarrow |\psi_1|^2, \quad E_2 \rightarrow |\psi_2|^2, \quad \text{и так далее.}$$

В самом общем случае каждой физической величине ставится в соответствие оператор \hat{f} .

Найдем собственные значения этого оператора:

$$\hat{f}\psi = f\psi.$$

Собственные значения будут:

$$f_1, f_2, \dots$$

Вероятности обнаружить систему с данным собственным значением этого физического оператора:

$$\psi_1, \psi_2, \dots$$

Решение уравнения Шредингера — это по сути поиск волновых функций ψ_1, ψ_2 . Этим волновым функциям соответствуют данные значения этого оператора f_1, f_2 .

Физический смысл $|\psi_n|^2$ — это вероятность обнаружить значение f_n этой физической величины, то есть с какой вероятностью оно проявится при измерении.



Задача 3.2. Волновая функция частицы

Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение, имеет вид $\psi(x) = A e^{-\alpha x^2}$. Найти потенциал $U(x)$, в котором движется частица, и ее энергию ϵ , если известно, что при $x = 0$, $U(x) = 0$.

Решение.

Запишем уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi.$$

Вычислим первую и вторую производные волновой функции:

$$\psi' = -A(2\alpha)x e^{-\alpha x^2}.$$

$$\psi'' = A e^{-\alpha x^2} (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha).$$

Подставим эти выражения в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha) + U(x) = E.$$

Известно, что $u(0) = 0$.

$$\Rightarrow u(x) \big|_{x=0} = 0 \rightarrow E = \frac{\alpha \hbar^2}{m}.$$

Это выражение постоянное:

$$\Rightarrow u(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha) = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m} x^2.$$

На самом деле это гармонический осциллятор, который представлен на рисунке (3.1):

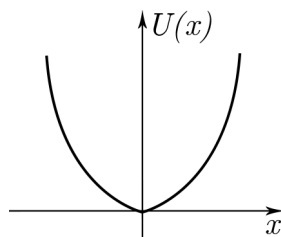


Рис. 3.1

Задача 3.4. Соотношение неопределенностей и уравнение Шредингера

Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $U(x)$, есть

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cdot x \cdot \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}, & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Оценить с помощью соотношения неопределенностей среднюю кинетическую энергию $\langle T \rangle$ частицы и сравнить с результатом точного расчета. Найти среднее значение координаты $\langle x \rangle$, а также $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию ϵ , если известно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Решение.

Задано, что:

$$U(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

$$w(x) = |\psi|^2 = A^2 x^2 e^{-\frac{2x}{a}}.$$

Это продемонстрировано на графике (3.2):

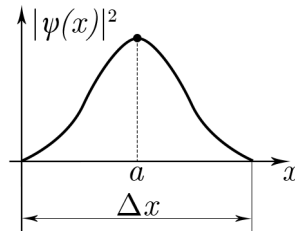


Рис. 3.2

Найдем максимум этой функции:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow x_m = a.$$

Воспользуемся соотношением неопределенностей. Оценка для неопределенности в координате будет:

$$\Delta x \simeq 2a.$$

Соотношение неопределенностей имеет вид:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \Rightarrow \Delta p_x = \frac{\hbar}{2a},$$

$$\Delta p_x \approx p_x \Rightarrow \langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

Найдем среднее значение координаты:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\infty \psi^* x \psi dx}{\int_0^\infty \psi^* \psi dx} = \frac{3}{2}a.$$

Дальше решим уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi.$$

Для энергии получим выражение:

$$E = U(x) - \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{x}{a} - 2 \right).$$

Известно, что при $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Энергия отрицательна.

$$\Rightarrow U(x) = -\frac{\hbar^2}{ma^2x}.$$

Очевидно, это кулоновский потенциал. Этот кулоновский потенциал продемонстрирован на графике (3.3).

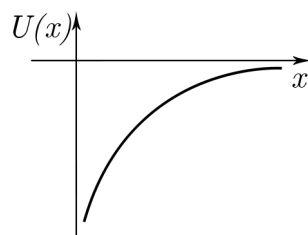


Рис. 3.3

3. Плотность потока вероятности

Из других разделов физики известны уравнения непрерывности для потока жидкости, энергии, заряда. В квантовой физике можно получить аналогичное уравнение для **потока вероятности**. Иногда принимают обозначение $\hat{E} = \hat{H}$ — гамильтониан.

Запишем уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi = \hat{H} \psi.$$

Вероятность нахождения частицы в объеме V равна:

$$\int_V |\psi|^2 dV.$$

Рассмотрим, как меняется эта вероятность по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\psi|^2 dV.$$

Это есть вероятность того, что за одну секунду частица покинет объем V . Распишем ее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\psi|^2 dV = \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) dV.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \Delta \psi - \frac{i}{\hbar} U \psi, \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{i\hbar}{2m} \Delta \psi^* + \frac{i}{\hbar} U \psi^*, \\ \Rightarrow \psi^* \psi' + (\psi \psi^*)' &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*), \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*). \end{aligned}$$

Из теории поля можно записать таким образом:

$$\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* = \operatorname{div}(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

Введем новое понятие — **вектор плотности потока вероятности**:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \\ \Rightarrow \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0. \end{aligned}$$

Задача 3.25. Барьер в виде ступеньки

Свободно движущаяся частица массой m с энергией ϵ подходит к границе раздела двух областей I и II, на которой потенциальная энергия частицы скачкообразно меняется от постоянного значения U_1 до постоянного значения U_2 . Определить коэффициенты отражения и пропускания частицы на этой границе по амплитуде (r и d) и по энергии (R и D). Исследовать случаи, когда: 1) $\epsilon > U_2$ и 2) $\epsilon < U_2$. Во втором случае определить среднюю глубину проникновения l частицы во вторую среду.

Решение.

Движение частицы продемонстрировано на картинке:

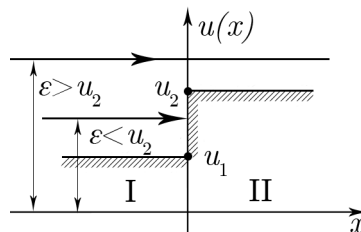


Рис. 3.4

В классическом случае, если $\epsilon > U_2$, то частица не почувствует барьера. Но для волны это не так.

Распишем случаи:

$$1) \epsilon > U_2,$$

$$2) \epsilon < U_2.$$

Рассмотрим первый случай:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (u - \epsilon)\psi = 0 \Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon - U)\psi = 0.$$

Это волновое уравнение:

$$\text{для области I : } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon - U_1),$$

$$\text{для области II : } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon - U_2).$$

Требуется конструировать решения. Очевидно, они будут гармоническими. В I области существуют падающая и отраженная волны. Будем полагать, что $r = \frac{A_{отп}}{A_{пад}}$. Присвоим $A_{пад} = 1$.

Решение в области I имеет вид:

$$\psi_1 = 1 \cdot e^{ik_1 x} + r \cdot e^{ik_1 x}.$$

Решение в области II имеет вид:

$$\psi_2 = d e^{ik_2 x}.$$

В этой задаче стационарное состояние. Из теории дифференциальных уравнений известно, что всякое дифференциальное уравнение II порядка должно иметь граничные условия.

Эти условия в данной задаче получаются из того, что $|\psi|^2$ есть плотность вероятности. Условия для плотности вероятности будут.

- 1) Конечность $\psi(x)$
- 2) Непрерывность $\psi(x)$
- 3) Гладкость $\psi(x)$
- 4) Однозначность $\psi(x)$

В данном случае однозначность выполняется.

Следовательно, условия в данном случае будут:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x} \big|_{x=0} = d e^{ik_2 x} \big|_{x=0} \Rightarrow 1 + r = d,$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow ik_1 e^{ik_1 x} + r(-ik_1) e^{-ik_1 x} \big|_{x=0} = dik_2 e^{ik_2 x} \big|_{x=0} \Rightarrow 1 + r = d.$$

Итак:

$$\begin{cases} 1 + r = d, \\ k_1(1 - r) = dk_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + r = d, \\ k_1(1 - r) = dk_2. \end{cases}$$

Ответ будет иметь вид:

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad d = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$r^2 + d^2 \neq 1.$$

Такие коэффициенты получались в интерферометре Фабри – Перо.

Плотность потока вероятности:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} = (\psi(\psi^*))' - \psi' \psi^*,$$

$$j_{nad} = \frac{i\hbar}{2m} (e^{ik_1x}(-ik_1)e^{-ik_1x} - ik_1 e^{ik_1x} e^{-ik_2x}) = \frac{\hbar k_1}{m} = \gamma.$$

В этом случае это просто скорость этой частицы.

Рассмотрим отражение:

$$j_{omp} = \frac{i\hbar}{2m} (r^2 ik_1 + r^2 (ik_1)) = -r^2 \frac{\hbar k_1}{m}.$$

Прошедшая волна имеет вид:

$$j_{прош} = d^2 \frac{\hbar k_2}{m}.$$

Физический смысл плотности потока вероятности — это вероятность частицы выйти из заданного объема за 1 секунду.

Найдем R и D :

$$R = \left| \frac{j_{omp}}{j_{nad}} \right| = d^2 = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2,$$

$$D = \left| \frac{j_{прош}}{j_{nad}} \right| = d^2 \frac{k_2}{k_1} = 4 \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Как видно, $R + D = 1$. Это так, потому что речь идет о вероятностях. Следовательно, частица либо пройдет, либо отразится.

Напомним, что $\oint (\vec{j} d\vec{S})$ есть вероятность того, что за одну секунду частица пересечет поверхность S . $\int_V |\psi|^2 dV$ — вероятность нахождения частицы в объеме V , который ограничен поверхностью S .

Поэтому возникает **уравнение непрерывности**:

$$\oint (\vec{j} d\vec{S}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (|\psi|)^2 dV.$$

Это уравнение в точности такое же, как и для заряда, и т. д.

Следующий случай $\epsilon < U_2$. В этом случае все аналогично.

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon - U_1),$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_2 - \epsilon) = \kappa^2.$$

Запишем уравнение Шредингера:

$$\psi'' - \frac{2m}{\hbar^2}(U_2)\psi = 0.$$

Это уравнение на самом деле затухающее.

$$\psi_1 = e^{ik_1x} + r e^{-ik_1x},$$

$$\psi_2 = d e^{-\kappa x}.$$

Сшивки на границах:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + r = d, \\ ik_1 - rik_1 = -d\kappa. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{aligned} 1 - r &= -d \frac{\kappa}{rk_1}, \\ d &= \frac{2k_1}{k_1 + i\kappa}. \\ |\psi_2|^2 &= dd^* e^{-2\kappa x} = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + \kappa^2} e^{-2\kappa x}. \end{aligned}$$

Глубина проникновения под барьер — это глубина, на которой $|\psi_2|^2$ падает в e раз. Найдем искомую глубину проникновения под барьер:

$$\frac{|\psi_2(0)|^2}{|\psi_2(L)|^2} = \frac{1}{e^{-2\kappa}} = e \Rightarrow e^{1-2\kappa L} = 1,$$

где L — глубина проникновения, а κ — коэффициент затухания.

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2\kappa} = \frac{h}{2\sqrt{2m(u_2 - \epsilon)}}.$$

ЛЕКЦИЯ 4

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ

Задача 3.25. Туннелирование

На прошлой лекции был рассмотрен **потенциальный барьер**.
Он представлен на (4.1).

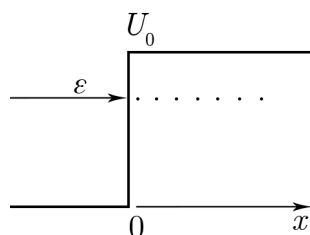


Рис. 4.1

Оказывается, частица проникает под барьер в этом случае, причем достаточно далеко, а потом, в конце концов, отражается. Причем достаточно далеко, а потом, в конце концов, отражается. То есть она живет и под барьером тоже.

Напомним, что **глубина проникновения** — это расстояние, на котором вероятность обнаружения частицы под барьером падает в e раз.

$$\psi \propto e^{-\kappa x}; \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E).$$

Глубина проникновения равна

$$L = \frac{1}{2\kappa} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}}.$$

1. Прямоугольный барьер

А теперь рассмотрим случай барьера конечной ширины.

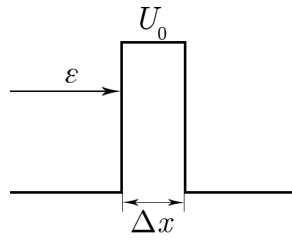


Рис. 4.2

Он представлен на (4.2).

Энергия частицы равна $\epsilon < U_0$.

Коэффициент прохождения частицы под барьером:

$$D = \frac{|\psi|_{\text{на выходе}}^2}{|\psi|_{\text{на входе}}^2}.$$

Также можно ввести вероятность прохождения под барьером за 1 раз:

$$D = e^{-\frac{\Delta x}{L}}.$$

Стоит отметить, что последняя формула почти точна, когда барьер не очень широкий.

Пусть есть некая среда. Направляем поток частиц.

Это представлено на (4.3).

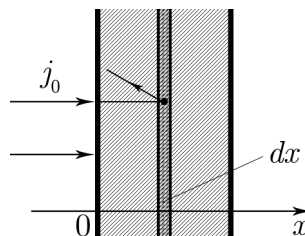


Рис. 4.3

Для **плотности потока вероятности** можем записать:

$$dj(x) = -\frac{dx}{L}j(x) \Rightarrow \frac{dj}{j} = -\frac{dx}{L} \Rightarrow \frac{j(x + \Delta x)}{j(x)} = e^{-\frac{\Delta x}{L}}.$$

Для прямоугольного барьера имеем:

$$D = D_0 \cdot \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}\Delta x\right)\right\},$$

где $D_0 \approx 1$.

Теперь рассмотрим барьер произвольной формы.

Он представлен на (4.4).

Для нахождения коэффициента прохождения нужно разбить этот барьер на малень-

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

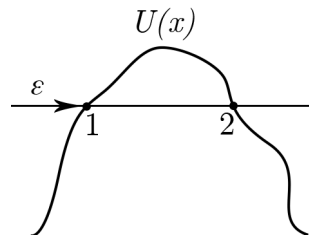


Рис. 4.4

кие прямоугольные барьеры и проинтегрировать. Тогда получим:

$$D = \exp \left\{ \left(- \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)} dx \right) \right\}.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Задача 3.34. Прямоугольный барьер

Электрон находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме и имеет энергию $\epsilon = 1,5$ эВ. Ширина ямы равна $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти высоту потенциального барьера U и его проницаемость D . За какое время τ вероятность найти частицу в яме уменьшится в два раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

Решение.

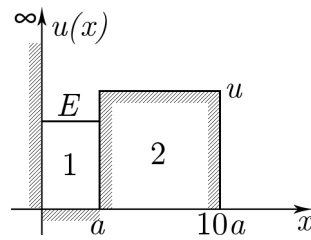


Рис. 4.5

Уравнение Шредингера в яме:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (u - \epsilon)\psi = 0,$$

где $u = 0$.

$$\psi'' + k^2\psi = 0; \quad k = \frac{\sqrt{2m\epsilon}}{\hbar}.$$

Решение имеет вид:

$$\psi_1 = A \sin kx.$$

Здесь уже учтено левое граничное условие $\psi(0) = 0$.

$$\psi_1 = A \sin kx + B \cos kx,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = B; \quad \psi_2(0) = 0 &\Rightarrow B = 0, \\ \Rightarrow \psi_1 &= A \sin kx. \end{aligned}$$

Под барьером:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (u - \epsilon)\psi = 0,$$

$$\text{т.к. } \epsilon < 0 \Rightarrow \psi'' - \kappa^2\psi = 0,$$

где $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U - \epsilon)}$.

$$\psi_2 = B e^{-\kappa x}.$$

По условию отражением от стенки $10a$ нужно пренебречь.

Нужно воспользоваться условиями **сшивки на границе**. Условия сшивки получаются из того, что для квадрата модуля волновой функции должно быть выполнено 4 условия:

- 1) Однозначность
- 2) Непрерывность
- 3) Гладкость
- 4) Конечность

В данном случае конечность и однозначность выполняются, а непрерывность и гладкость — нет.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \psi_1(a) &= \psi_2(a) \quad \Rightarrow \quad A \sin ka = B e^{-\kappa a}, \\ \psi_1'(a) &= \psi_2'(a) \quad \Rightarrow \quad Ak \cos ka = -B\kappa e^{-\kappa a}, \\ \operatorname{tg} ka &= -\frac{k}{\kappa} = -\sqrt{\frac{E}{U-E}} \quad \Rightarrow \quad U - E = \frac{E}{\operatorname{tg}^2 ka}, \\ U &= E\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 ka}\right) = \frac{E}{\sin^2 ka}, \\ k &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{2mc^2 E} = 6,27 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}, \\ k_a &= 1,27; \quad U = 1,64 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Найдем проникаемость барьера:

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} = 1,92 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}.$$

Проницаемость барьера:

$$\begin{aligned} D &= e^{-2\kappa(b-a)}, \\ b = 10a \quad \Rightarrow \quad D &= e^{-18\kappa a} = 3,2 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Требуется найти время, за которое вероятность остаться в яме упадет в 2 раза. Вероятность остаться в яме равна $1 - D$.

$$(1 - D)^{n\tau} = \frac{1}{2},$$

где $n = \frac{v}{2a}$ — частота ударов.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{v}{2a} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,22 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}, \\ \Rightarrow \quad n\tau D &= \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\ln 2}{nD} = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ с}. \end{aligned}$$

Вспомним, что такое **время жизни в яме**. Это промежуток времени, за который вероятность оказаться в яме упадет в e раз. Обозначим T — время жизни в яме.

$$n\tau D = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{nD},$$

где n — частота ударов об данный барьер.

Задача 3.40. Ядерный синтез дейтерия

В 1988 г. появилось сенсационное сообщение об осуществлении холодного ядерного синтеза дейтерия, растворенного в металлическом палладии. Можно считать, что при этом ядра дейтерия взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, если расстояние между ними r удовлетворяет условию $R_1 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см} < r \leq 5 \cdot 10^{-9} \text{ см} = R_2$. При большем расстоянии между ядрами энергия электрического отталкивания $U = 0$ за счет экранирования ядер дейтерия электронами проводимости. Определить вероятность реакции синтеза $d+d$ при столкновении дейтронов внутри палладия при комнатной температуре за счет туннельного эффекта. Считать, что реакция синтеза происходит при $r < R_1$.

Решение.

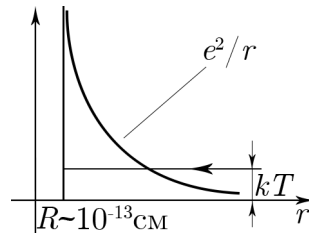


Рис. 4.6

На расстоянии $\sim R = 10^{-12} \text{ см}$ включается сильное взаимодействие. Для того, чтобы два ядра слились, нужно, чтобы одно ядро прошло через этот барьер (протуннелировал). Все это происходит при комнатной температуре.

$$\frac{e^2}{R_2} = kT = 0,025 \text{ эВ} \Rightarrow R_2 = \frac{e^2}{kT} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Кинетическая энергия дейтронов чрезвычайно маленькая.

$$\Rightarrow R_2 \geq r_2 = 10^{-9} \text{ см,}$$

$$D = \exp \left\{ \left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^{r_2} \sqrt{2\mu \left(\frac{e^2}{r} - E \right)} dr \right) \right\},$$

где $E = kT$, μ — приведенная масса, и $\mu = \frac{m_d}{2} = m_p = 1,69 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

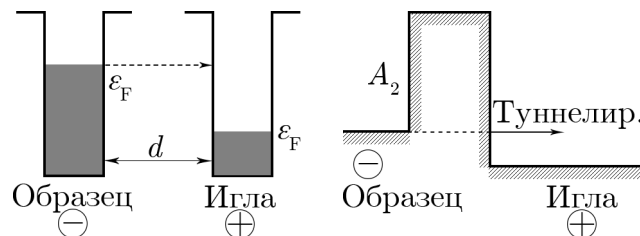
Пренебрегаем E , так как она очень маленькая по сравнению с другим слагаемым в скобке. Пределы берем от 0 до r_2 , т. к. r_1 очень маленькое, а при r_2 еще работает закон Кулона.

$$\Rightarrow D = \exp \left\{ \left(-\frac{2e}{\hbar} \int_0^{r_2} \sqrt{\frac{2\mu}{r}} dr \right) \right\} = \exp \left\{ \left(-\frac{2e \sqrt{2\mu}}{\hbar} r_2^{\frac{1}{2}} \right) \right\} = e^{-235} = 10^{-109}.$$

Следовательно, вероятность чрезмерно маленькая.

2. Туннельный микроскоп

Объясним принцип работы туннельного микроскопа.



labelfig:4:8

Рис. 4.7

Есть два различных материала — исследуемый материал и игла. Игла висит над веществом на расстоянии ангстремов. Она может смещаться вдоль по этому материалу, и при ее смещении будет происходить туннелирование электронов из иглы в образец, или наоборот. Итак, происходит туннелирование. И туннельный ток этих электронов зависит от высоты, на которой находится игла. Таким образом, можно найти рельеф плоскости.

Будем пренебрегать тем, что барьер косой, и будем рассматривать такой прямоугольный барьер:

Туннельный ток:

$$I \propto D \sim \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mA_2}d\right)\right\}.$$

Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{12,3 \text{ \AA}}{\sqrt{E(\text{эВ})}}.$$

$$I \propto D \sim \exp\left\{\left(-\sqrt{A_2}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}2d\right)\right\} = \exp\left\{\left(-\frac{\sqrt{A_2(\text{эВ})}}{12,3\text{\AA}}2d\right)\right\}.$$

Найдем, во сколько раз изменится ток, если высота барьера уменьшится на Δx :

$$\Delta I = \frac{I(d - \Delta x) - I(d)}{I(d)} = \frac{e^{-\sqrt{A}(d-\Delta x)} - e^{-\sqrt{A}d}}{e^{-\sqrt{A}d}} = e^{-\sqrt{A}\Delta x} - 1.$$

$$A = 1 \text{ эВ}.$$

$$\Delta x = 1 \text{ \AA}.$$

$$\Rightarrow \Delta I = e - 1.$$

Задача 3.11. Одномерная яма с бесконечно высокими стенками

Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m , локализованной в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна $2a$.

Решение.

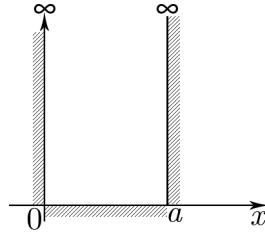


Рис. 4.8

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0, a); \\ \infty, & \text{если } x \leq 0, x \geq a; \end{cases}$$

Следовательно, проникновение под барьер невозможно.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi,$$

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0,$$

где $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$.

Из граничного условия на левой границе следует:

$$\psi(x) = A \sin kx.$$

Граничное условие на правой границе дает:

$$A \sin ka = 0 \quad (\psi(a) = 0) \Rightarrow \quad k_n a = \pi n \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{\pi}{a} n,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2.$$

Найдем A :

$$\int_0^a \psi^* \psi dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 \int_0^a \sin^2 kx dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}.$$

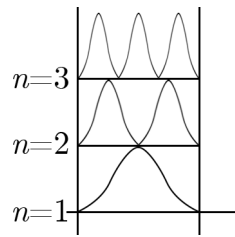


Рис. 4.9

Заметим, что $n = 0$ не может быть, потому что тогда электрон покоится на дне, и это противоречит **соотношению неопределенностей**. Следовательно, основное состояние есть $n = 1$.

Изобразим $|\psi|_n^2$. Она представлена на рисунке (4.9).

В бесконечности ($n \rightarrow \infty$) получается классический предел, то есть равновероятно можно найти частицу в любой части ямы. Число горбов растет, и сливается в одно целое. Эти де Бройлевские волны этого состояния (ψ -функции) есть стоячие волны. А условие стоячести – целое число полуволин $a = n \frac{\lambda}{2}$.

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2a}{n} = \frac{2\pi\hbar}{p_n} = \frac{2\pi}{k_n},$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{\pi}{a}n \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

ЛЕКЦИЯ 5

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

В прошлый раз рассматривалась потенциальная яма с бесконечно высокими стенками. Было показано, что в этом случае имеет место квантование. Частица, находящийся в яме с бесконечно высокими стенками, может занимать не любое положение, а только строго определенное. Есть дискретный набор уровней, на которых может находиться частица. То есть, в яме с бесконечными стенками происходит дискретизация состояний частицы. Было указано значение этой энергии, решено уравнение Шредингера в этих условиях.

Задача 3.13. Яма с бесконечными стенками, заполненная электронами

В одномерной потенциальной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить минимальное значение полной энергии ϵ_{\min} и силу давления F электронов на стенки ямы. Взаимодействием электронов пренебречь.

Решение.

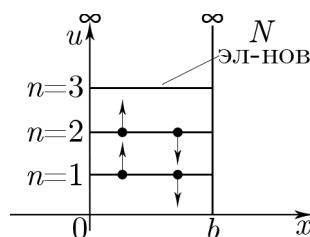


Рис. 5.1

Энергия одного электрона на n -м уровне равна:

$$\epsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} n^2.$$

На каждом энергетическом уровне могут находиться не более двух электронов.

$$\epsilon_{\min} = 2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} n^2.$$

Вспомним формулу:

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} n^2 = \frac{N(N+2)(N+1)}{24},$$

$$\epsilon_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mb^2} \frac{N(N+2)(N+1)}{24}.$$

Это есть полная энергия этих электронов.

Давление рассчитывается по формуле:

$$F = -\frac{\partial E_{\min}}{\partial b},$$

$$\Rightarrow F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mb^2} \frac{N(N+2)(N+1)}{12}.$$

Задача. Прохождение нейтронов через щель

Поток нейтронов падает на длинную щель с абсолютно отражающими стенками. При какой минимальной скорости нейтроны смогут пройти через эту щель?

Решение.

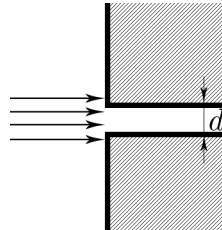


Рис. 5.2

Если бы нейтроны были частицами, они бы прошли щель без проблем. Но нейтроны — это не волны. Уместно вспомнить волновод. Как показывалось в курсе оптики, не всякая волна может войти в волновод. Поэтому, эту задачу можно решить рассматривая щель как **волновод**. Просто в квантовой физике волна совершенно другой природы, это не электромагнитная волна, а волна де Бройля. Щель для нейтронов выступает в роли ямы с бесконечными стенками. Следовательно, для нейтрона возникают уровни энергий. Следовательно, если энергия нейтрона равна энергиям этих уровней, то нейтрон в щель войдет, и там навсегда останется. То есть у него компонента скорости вдоль начального направления будет нулевая. Если энергия больше, то нейтрон пройдет через эту щель.

$$\epsilon_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} > E_1 \text{ (при } n=1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2},$$

$$\Rightarrow v \geq \frac{\pi \hbar}{md} \approx 20 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Эта задача аналогична задаче 3.14

Задача 3.33. Эффект Рамзауэра

В 1920 г. Рамзауэр обнаружил, что в сечении рассеяния σ_s медленных электронов на атомах криптона имеется глубокий минимум (резко увеличивается проникаемость атомов) при энергии $\epsilon = 0,6$ эВ. Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Считая, что для электрона потенциал атома является одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = 2,5$ эВ, оценить радиус атома криптона.

Решение.

На рисунке (??) показан график зависимости сечения рассеяния электронов от их энергии.

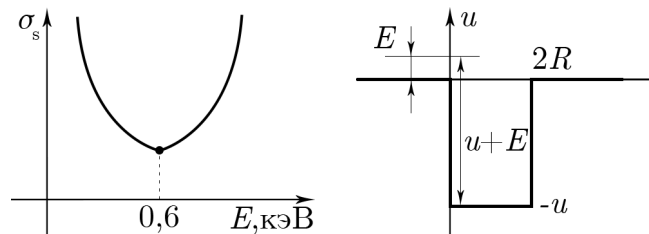


Рис. 5.3

Сечение рассеяния — это вероятность рассеяться.

Нарисуем потенциальную яму (5.3):

Энергия E маленькая по сравнению со значением потенциала.

Несмотря на то, что энергия электрона выше нулевого уровня, он может захватиться.

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U + E)},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{\sqrt{2m(U + E)}}.$$

В этой яме должно упаковываться целое число длин полуволен де Бройля. Это есть ключ к решению этой задачи.

Условие резонанса:

$$2R = \frac{\lambda}{2}.$$

Это самое минимальное значение самого основного состояния. Остальные значения нереализуемы.

Поэтому:

$$R = \frac{\lambda}{4} = \frac{h}{4\sqrt{2m(U + E)}} = 1,74 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

В экспериментах получается значение $1,98 \text{ \AA}$. Заметим, что не было решено уравнение Шредингера.

Задача 8.24. Прохождение ультрахолодных нейтронов над горизонтальной пластинкой

Ультрахолодные нейтроны выходят широким пучком из горизонтального нейтронного источника и затем движутся свободно над горизонтально расположенной пластинкой, упруго от нее отражаясь и тем самым совершая периодическое движение. Это движение в гравитационном поле квантуется, и поэтому пройдут над пластинкой только те нейтроны, у которых высота движения H соответствует разрешенной энергии. Оценить на основе правила квантования Бора – Зоммерфельда какова третья разрешенная высота

Решение.

У ультрахолодных нейтронов скорости составляют несколько $\frac{m}{c}$. Они могут накапливаться.

Движение нейтронов показана на рисунке (5.4):

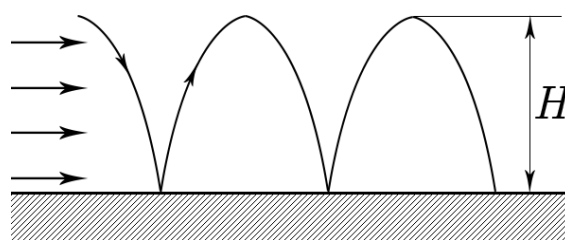


Рис. 5.4

Запишем правило квантования Бора – Зоммерфельда:

$$\oint p dz = nh,$$

Закон сохранения энергии:

$$\epsilon = mgH = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

$$\Rightarrow p^2 = 2m\epsilon - 2m^2gz \Rightarrow p = \sqrt{2m(\epsilon - mgz)},$$

$$\oint p dz = nh = 2 \int_0^H \sqrt{2m(\epsilon - mgz)} dz = \frac{4}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (mgH)^{\frac{3}{2}} = nh,$$

$$h^{\frac{3}{2}} = \frac{3nh}{4m\sqrt{2g}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{\frac{3}{2}},$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 10^{-4})^{\frac{2}{3}} = 0,034 \text{ мм}.$$

Задача 3.27. Возбуждённый электрон в одномерной яме

Электрон, находящийся в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной $a = 4 \text{ \AA}$ и глубиной $U_0 = 10 \text{ эВ}$, переведен в возбужденное состояние с энергией $\epsilon \approx 10^{-2} \text{ эВ}$ (нуль отсчета энергии — состояние покоя вне ямы). Оценить время жизни

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

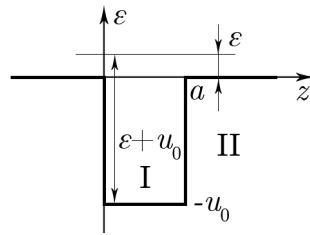


Рис. 5.5

возбужденного состояния, считая, что оно ограничивается вылетом электрона из ямы, а не переходом в основное состояние.

Решение.

Такую задачу следовало бы решить через **нестационарное уравнение Шредингера**. Но предлагают сделать оценку. Предположим, рассматриваемый электрон уже оказался в возбужденном состоянии.

Вспомним **коэффициент прохождения** над ступенькой:

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon + U_0); \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon.$$

Подставим эти значения в D :

$$D = 4 \frac{\sqrt{\epsilon(\epsilon + U_0)}}{(\sqrt{\epsilon + U_0} + \sqrt{\epsilon})^2}.$$

ϵ много меньше U_0 .

$$\Rightarrow D \approx 4\sqrt{\frac{\epsilon}{U_0}}$$

— вероятность уйти за 1 раз.

Скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2(U_0 + \epsilon)}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Частота ударов о барьер:

$$n = \frac{v}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Время жизни:

$$(1 - D)^{n\tau},$$

где $D \ll 1$.

$$n\tau D = 1,$$

$$\tau \approx \frac{1}{nD} = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \sqrt{\frac{U_0}{\epsilon}} = \frac{a}{4\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}} \approx 10^{-15} \text{ с}.$$

Задача 3.48. Прямоугольная яма с одной бесконечной стенкой

Нейтрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с шириной $a = 1,3 \cdot 10^{-13}$ см, ограниченной с одной стороны бесконечно высокой стенкой. При этом U_0 при $0 < x < a$, а при $x \geq a$ потенциал U равен постоянной конечной величине U_0 . Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что максимум волновой функции достигается вблизи границы ямы, определить энергию связи нейтрона.

Решение.

Яма показана на рисунке (5.6).

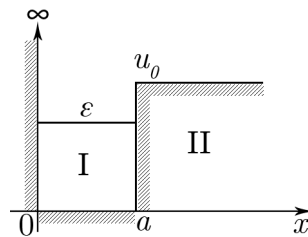


Рис. 5.6

Освобождение означает $\epsilon = U_0$.

Оказывается, что в **трехмерной яме** связанные уровни энергии есть не всегда. Это легко понять на некоторых примерах. Например, невозможно составить связанного состояния двух нейтронов. Такая конструкция не образует атом. Для образования конструкции типа атома нужны нейтрон и протон. Такая комбинация называется **дейтрон**. Дейтрон возможен.

Следовательно, в трехмерном случае существуют ямы, в которых не возможен ни один уровень. Трехмерная задача сводится к задаче той формы, которая в этой задаче представлена. В одномерном случае всегда есть уровни.

Запишем уравнение Шредингера за пределами ямы:

$$\psi'' - \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon)\psi = 0.$$

Сделаем некоторые обозначения:

$$\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon) = \kappa^2; \quad \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon = k^2.$$

Решение принимает вид:

$$\psi_I = A \sin kx,$$

$$\psi_{II} = B e^{-\kappa x}.$$

Условие сшивки:

$$A \sin ka = B e^{-\kappa a},$$

$$Ak \cos ka = -B \kappa e^{-\kappa a},$$

$$\Rightarrow k \operatorname{ctg} ka = -\kappa,$$

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{U_0}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} ka = -\frac{\kappa}{k} = \frac{\sqrt{\frac{U_0}{4}}}{\sqrt{\frac{3U_0}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ka = \frac{2\pi}{3}.$$

Мощность ямы — это $U_0 a^2$.

Начальная мощность ямы:

$$k^2 a^2 = \frac{4\pi^2}{9} = \frac{3mU_0}{2\hbar} a^2 \Rightarrow U_0 a^2 = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{27m}.$$

Частица свободна при условии $\epsilon = U$.

$$\operatorname{ctg} ka_x = 0 \Rightarrow ka_x = \frac{\pi}{2}.$$

Конечная мощность ямы:

$$U_0 a_x^2,$$

$$k^2 a_x^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{2mU_0}{\hbar^2} a_x^2 \Rightarrow U_0 a_x^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m},$$

$$\frac{a}{a_x} = 1,54.$$

Задача 3.47. Одномерная симметричная прямоугольная яма

Электрон находится в основном состоянии в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме с шириной $2a = 10 \text{ \AA}$ с потенциалом $U(\pm\infty) = 0$. Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что изменение волновой функции внутри ямы мало, определить энергию связи электрона и глубину ямы (эВ).

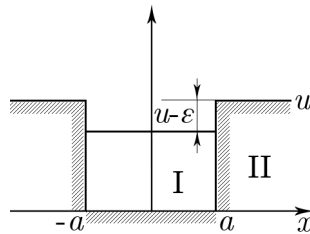


Рис. 5.7

Решение.

Относительная вероятность обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$.

$$2a = 10 \text{ \AA},$$

$$\frac{w_{\text{внутр}}}{w_{\text{вне}}} = \alpha = 0,1.$$

Энергией связи называется величина $U_0 - \epsilon$.

Считаем, что внутри ямы ψ почти константа

$$\text{I: } \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon \psi = 0,$$

$$\text{II: } \psi_1'' - \frac{2m}{\hbar^2} (U - \epsilon) \psi = 0,$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon; \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U - \epsilon).$$

Решения:

$$\text{I: } \psi_1(x) = \cos kx,$$

$$\text{II: } \psi_{\text{II}}(x) = A e^{-\kappa x}.$$

Сшивки:

$$\cos ka = A e^{-\kappa a}.$$

$$k \sin ka = A \kappa e^{-\kappa a}.$$

Получается:

$$\text{tg } ka = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{U - \epsilon}{E}},$$

$$1 + \text{tg } ka^2 = \frac{U}{E} = \frac{1}{\cos^2 ka^2}$$



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$\Rightarrow \cos ka = \sqrt{\frac{\epsilon}{U}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2mU}} = \frac{\hbar^2}{2mUa^2} ka.$$

Условие малости изменения внутри ямы:

$$ka \ll 1.$$

Из условий сшивки приближенно получаем:

$$k \cdot ka \approx \kappa A e^{-\kappa a},$$

$$1 \approx A e^{-\kappa a},$$

$$k^2 a \approx \kappa.$$

Вероятность обнаружения частицы в яме:

$$w_1 = 2 \int_0^a \psi_1^2(x) dx \approx 2a.$$

Вероятность обнаружения частицы вне ямы:

$$w_2 = 2 \int_0^\infty \psi_2^2(x) dx = 2A^2 \int_a^\infty e^{-2\kappa x} dx = \frac{A^2}{\kappa} e^{-2\kappa a},$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \alpha = \frac{2a}{\frac{A^2}{\kappa} e^{-\kappa a}},$$

$$A e^{-\kappa a} \approx 1 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{2a\kappa}{1} = 2k^2 a^2 \Rightarrow \kappa = \frac{\alpha}{2a}; \quad k^2 = \frac{\alpha}{2a^2}.$$

Итак,

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon; \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U - \epsilon),$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\alpha}{2a^2} \frac{\hbar^2}{2m} = \frac{\alpha \hbar^2}{4ma^2} = 7,63 \cdot 10^{-3} \text{ эВ},$$

$$\Rightarrow U - \epsilon = \frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{8ma^2} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ эВ},$$

$$\Rightarrow U = 8 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

Задача 3.46. Прохождение частицы над одномерной прямоугольной ямой

При прохождении нерелятивистской частицы с энергией ϵ над одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = -3\epsilon$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = \frac{9}{25}$. Определить минимально возможную глубину ямы в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны. Воспользоваться известным из оптики условием, что при отражении от оптически более плотной среды фазы отраженной и падающей волн отличаются на π .



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

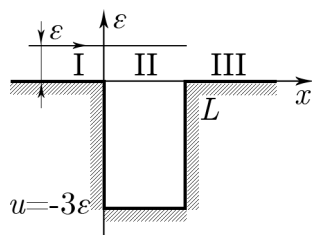


Рис. 5.8

Решение.

Воспользуемся условием из оптики, что при таком отражении фаза меняется на π . В свободном пространстве (I и III) $U = 0$.

$$\Rightarrow k_0 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\epsilon}.$$

В яме (в области II):

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(4\epsilon)} k_0.$$

$$\Rightarrow \frac{k}{k_0} = 2 = n.$$

Заметим, что это и есть показатель преломления этой среды над ямой.

Яма — это среда с показателем $n > 1$ ($n = 2$). Все рассуждения аналогичны рассуждениям в курсе оптики.

Тогда $r = -\sqrt{R} = -\frac{3}{5}$.

$$\psi_1 = 1 \cdot e^{ik_0x} + r \cdot e^{-ik_0x},$$

$$\psi_2 = a \cdot e^{ikx} + b \cdot e^{-ikx},$$

$$\psi_3 = d \cdot e^{ik_0x}.$$

Сшивки при $x = 0$:

$$1 + r = a + b,$$

$$1 - r = \frac{k}{k_0}(a - b) = 2a - 2b,$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}; \quad b = -\frac{1}{5}.$$

Сшивки при $x = L$:

$$a e^{ikL} + b e^{-ikL} = d e^{ik_0L},$$

$$a e^{ikL} - b e^{-ikL} = \frac{k}{k_0} d e^{ik_0L}.$$

Обозначим $e^{ikL} = z$.

$$\Rightarrow \frac{3z^2 - 1}{3z^2 + 1} = \frac{k}{k_0} = 2 \Rightarrow \frac{az + \frac{b}{z}}{az - \frac{b}{z}} = 2 \Rightarrow 3z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z^2 = -1,$$



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$e^{ikL} = \pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = z,$$
$$\Rightarrow kL_{\min} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad l_{\min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

ЛЕКЦИЯ 6

ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ

1. Жесткий ротатор

Двухатомная молекула является **ротатором**. Движение ротатора квантуется. Решим задачу квантового ротатора. Изобразим его на рисунке (6.1).

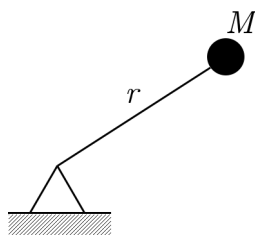


Рис. 6.1

Груз массой M , поставленный на невесомую спицу длиной r , может вращаться, описывая траектории по поверхности сферы.

Энергия груза в классике равна

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{L^2}{2Mr^2}.$$

Оператор этой энергии имеет вид

$$\hat{E} = \frac{\hat{L}^2}{2Mr^2}.$$

Запишем уравнение Шредингера:

$$\hat{E} = \frac{\hat{L}^2}{2Mr^2} \psi = E\psi.$$

Не известен оператор \hat{L}^2 , но известен оператор импульса:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

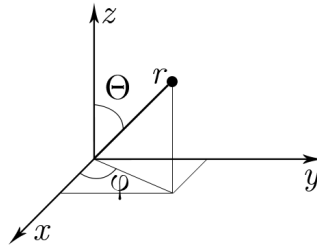


Рис. 6.2

Рассматриваются сферические координаты. Они показаны на рисунке (6.2).

Можно перейти от декартовых координат к сферическим.

В сферических координатах имеем:

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

2. Оператор проекции момента импульса на ось z

Найдем собственные значения оператора момента импульса:

$$\begin{aligned}\hat{L}_z \psi &= L_z \psi, \\ \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= L_z \psi, \\ \Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} &= -\frac{L_z}{i\hbar} d\phi.\end{aligned}$$

Собственная волновая функция равна

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{i \frac{L_z}{\hbar} \phi\right\}.$$

Так как квадрат модуля волновой функции — это функция распределения вероятностей, можно записать **необходимые условия для волновой функции**. Функция должна быть **непрерывной, конечной, гладкой и однозначной**. В данном случае все условия выполняются, кроме однозначности.

Запишем необходимое условие на однозначность:

$$\frac{L_z}{\hbar} \cdot 2\pi = m \cdot \pi \Rightarrow L_z = m\hbar,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$.

m принимает $(2l + 1)$ значения, и $m_{\max} = l$

Поймем это графически. Для этого нарисуем картину (6.3).

Ось z обозначается исходя из задачи.

Сделаем два замечания.

Первое — как видно из рисунка, проекция момента импульса всегда меньше самого значения.

Второе — если проекция момента импульса на ось z определена, то проекции на другие оси не определены. Если бы они нашлись, то это было бы нарушением **соотношения неопределенностей**.

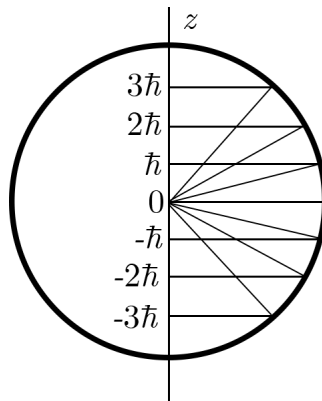


Рис. 6.3

3. Энергия ротатора

Найдем правило квантования квадрата момента импульса:

$$\overline{L^2} = \overline{L_x^2} + \overline{L_y^2} + \overline{L_z^2} = 3\overline{L_z^2} \Rightarrow \hat{L}^2 = 3\hat{L}_z^2 \Rightarrow \hat{L}_z^2 = \hbar^2 \frac{l^2 + (l-1)^2 + \dots + (-l)^2}{2l+1}.$$

Вспомним формулу для суммы ряда:

$$\begin{aligned} \sum_1^l n^2 &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}, \\ \Rightarrow \hat{L}_z^2 &= \frac{\hbar^2}{3} l(l+1), \\ E_l &= \frac{\hat{L}^2}{2Mr^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1). \end{aligned}$$

Задача 5.11. Переход между тремя последовательными уровнями энергии в двухатомной молекуле

В опытах с равными молекулами измерялись энергии перехода между тремя последовательными уровнями энергии вращательной полосы двухатомной молекулы. Найти квантовые числа l этих уровней и момент инерции I молекулы в этих случаях.

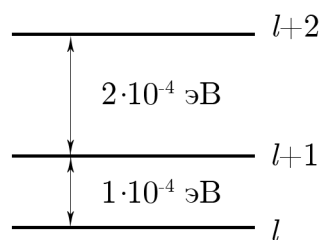


Рис. 6.4

Решение.

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

4

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{l+1} - \epsilon_l &= 1 \cdot 10^{-4}, \\
 \epsilon_{l+2} - \epsilon_{l+1} &= 2 \cdot 10^{-4}, \\
 \Rightarrow \frac{\epsilon_{l+2} - \epsilon_{l+1}}{\epsilon_{l+1} - \epsilon_l} &= 2 = \frac{(l+2)(l+3) - (l+1)(l+2)}{(l+1)(l+2) - (l)(l+1)} = \frac{l+2}{l+1} = 2, \\
 &\Rightarrow l = 0, \\
 \Delta\epsilon = 10^{-4} \text{ эВ} = \epsilon_1 - \epsilon_0 &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} = \frac{\hbar^2}{I}, \\
 \Rightarrow I &= 7 \cdot 10^{-39} \text{ э} \cdot \text{см}^2.
 \end{aligned}$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

Задача 5.13. Переход между ротационными уровнями молекул хлора

Какова максимальная длина волны СВЧ-излучения, с помощью которой можно вызвать переход между ротационными уровнями молекул хлора? Расстояние между ядрами атомов в молекуле Cl_2 равно $a = 2 \cdot 10^{-8}$ см. Относительная атомная масса изотопа хлора $A = 35$.

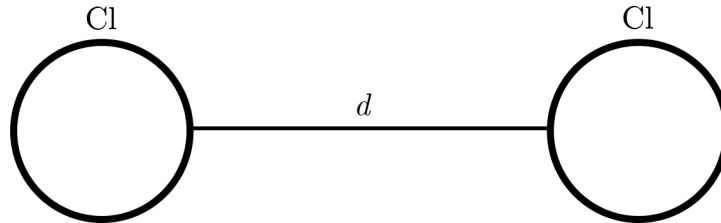


Рис. 6.5

Решение.

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1).$$

Нарисуем энергетические уровни. Это проделано на рисунке (6.6).

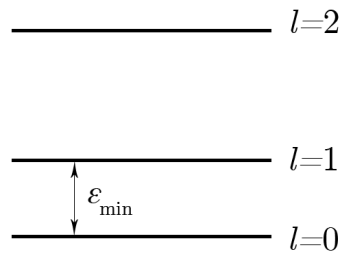


Рис. 6.6

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\epsilon_{\min}}, \quad \epsilon_{\min} = \frac{\hbar^2}{I}.$$

Момент инерции равен

$$I = \mu d^2,$$

где μ — это приведенная масса.

$$I = \frac{M}{2} d^2,$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi\hbar c M d^2}{2\hbar^2} = \frac{\pi c M d^2}{\hbar},$$

где $M = 35 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24}$ г.

$$\lambda_{\max} = 2,1 \text{ см.}$$

4. Водородоподобный атом

Потенциал в водородоподобном атоме нарисован на рисунке (6.7).

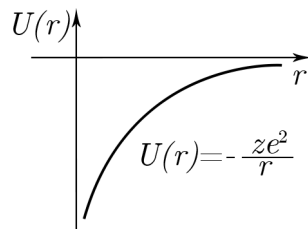


Рис. 6.7

Z (или z) — число протонов в ядре.

Запишем **уравнение Шредингера в сферических координатах** (r, θ, ϕ) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\Delta_r \psi + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \phi} \psi \right] - \frac{Z e^2}{r} \psi = E \psi.$$

Для угловой части можно записать:

$$\Delta_{\theta, \phi} \psi = -l(l+1) \psi.$$

Это было получено из

$$\hat{L}^2 \psi = L^2 \psi \hbar^2 l(l+1) \psi.$$

Тогда уравнение Шредингера записывается так:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2mr^2} l(l+1) - \frac{Z e^2}{r} \psi = E \psi.$$

Решение будет иметь вид

$$\psi_{n,l}(r, \theta, \phi) = A e^{-\kappa_n r} \cdot r^l \left(\sum_{i=0}^{n-l-1} a_{l+1+i} r^i \right) Y_{\theta, \phi}.$$

Для орбитального квантового числа l можно записать:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для κ_n можно записать:

$$\kappa_n = \frac{m^2 Z^2 e^4}{\hbar^4 n^2},$$

где n — главное квантовое число.

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = -\frac{m Z^2 e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Соответствующие радиусы будут равны:

$$r_n = \frac{m\hbar^2}{mZe^2}n^2.$$

Запишем некоторые константы.

Комптоновская длина волны электрона равна

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}.$$

Постоянная тонкой структуры (безразмерная величина) равна

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Тогда для энергии дискретных уровней и соответствующих радиусов можно записать (это проделано для атома водорода):

$$\epsilon_n = -\frac{mc^2}{2}\alpha^2\frac{1}{n^2},$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\lambda e}{\alpha}.$$

5. Электроны в атоме водорода

Рассмотрим вид волновой функции в атоме водорода.

Волновая функция основного состояния атома водорода имеет вид:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-\frac{r}{r_1}}.$$

Первая волновая функция представлена на рисунке (6.8).

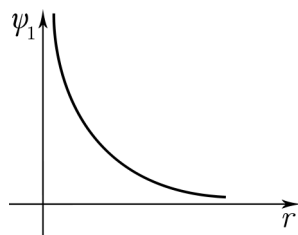


Рис. 6.8

А вероятность обнаружения электрона (квадрат модуля волновой функции) представлена на рисунке (6.9).

Как видно из рисунка, наивероятнейшее расстояние есть **боровский радиус** — первый разрешенный радиус в атоме водорода. Но это не означает, что электрон все время находится на расстоянии боровского радиуса; он даже может войти в ядро. Момент

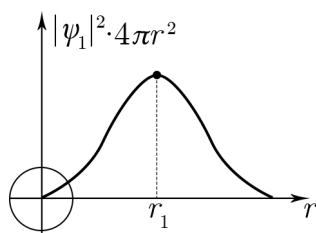


Рис. 6.9

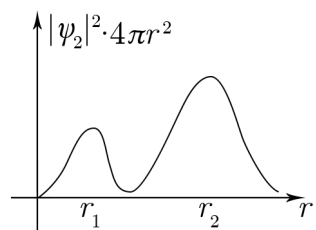


Рис. 6.10

импульса электрона в основном состоянии равен нулю. Это означает, что электрон равномерно размазан по ядру в основном состоянии.

Квадрат модуля второй волновой функции представлен на рисунке (6.10).

Задача 4.7. Среднее расстояние электрона от ядра

Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра в $1S$ -состоянии водородоподобного атома.

Решение.

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-\frac{r}{r_1}},$$

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty \psi^* r \psi 4\pi r^2 dr = \frac{1}{(\sqrt{\pi r_1^3})^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{r_1}} r^3 dr = \frac{3}{2} r_1.$$

6. Состояние электрона

Появились два квантовых числа.

Нарисуем таблицу соответствия спектроскопических обозначений к орбитальному квантовому числу:

	S	P	D	F	G
1	0	1	2	3	4

Нарисуем таблицу этих квантовых чисел и других свойств состояний

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

n	l	m_l	Состояние	Кратность вырождения	Всего состояний
1	0	0	$1S$	1	1
2	0	0	$2S$	1	4
	1	0, ± 1	$2P$	3	
3	0	0	$3S$	1	9
	1	0, ± 1	$3P$	3	
	2	0, ± 1 , ± 2	$3D$	5	

Как видно из таблицы, кратность вырождения равна n^2 . То есть в этих состояниях (на этих уровнях) энергия одинакова. На самом деле, кратность вырождения равна $2n^2$. При последних рассуждениях не был учтен спин.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Задача. Удаление наружных электронов лития

Полная энергия ионизации (работа по удалению всех трех электронов из нормального состояния на бесконечность) атома лития ${}^6_3\text{Li}$ составляет $E_{\text{иониз}} = 203,4$ эВ. Найти энергию ионизации нейтрального атома лития по превращению его в ион ${}_3\text{Li}^{2+}$. Энергия ионизации атома водорода равна $E_{\text{иониз}}(H) = 13,59$ эВ.

Решение.

Требуется найти работу по удалению двух наружных электронов из нормального состояния в бесконечность. ${}_3\text{Li}^{2+}$ — это водородоподобный атом, потому что он имеет только один электрон.

Если ионизируем Li^{++} окончательно, то энергия, затрачиваемая на это, будет равна

$$E_{\text{иониз}}(\text{Li}^{++}) = 13,59 \cdot Z^2 = 13,59 \cdot 3^2 = 122,3 \text{ эВ}.$$

Следовательно, искомая работа по удалению двух наружных электронов будет равна

$$A = 203,4 - 122,3 = 81,1 \text{ эВ}.$$

7. Переходы

Исследуем переходы в атоме водорода.

Нарисуем эти переходы. Они представлены на рисунке (6.11).

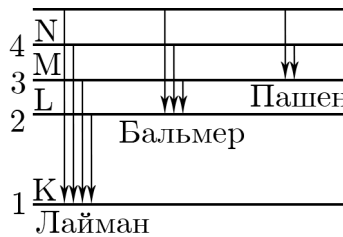


Рис. 6.11

Высоковозбужденные состояния не нарисованы. Существуют **серия Лаймана**, **серия Бальмера**, **серия Пашена**.

Запишем **формулу Бальмера**

$$\frac{1}{\lambda_{2m}} = \frac{A}{hc} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Задача. Спектры первого порядка на дифракционной решётке

В спектрах некоторых звезд наблюдаются до сорока линий водородной серии Бальмера. При каком наименьшем числе штрихов дифракционной решетки можно разрешить эти линии спектра первого порядка?

Решение.

$$\epsilon_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2},$$

где $\frac{me^4}{2\hbar^2} = R_y = 13,6 \text{ эВ}$.

$$d\epsilon_n = d\left(-\frac{R_y}{n^2}\right) = \frac{2R_y}{n^3}\Delta n = \hbar\Delta\omega,$$

при $n \gg 1$.

Энергия ионизации с $n = 2$ (работа, затрачиваемая при перемещении электрона с уровня $n = 2$ до бесконечности) равна

$$\hbar\omega = R_y \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{R_y}{4},$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\frac{2R_y}{n^3}}{\frac{R_y}{4}} = \frac{8}{n^3} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Разрешающая способность дифракционной решетки равна

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{n^3}{8} = \frac{40^3}{8} = 8000 = m \cdot N = 8000.$$

Задача 4.45. Электронный переход

В атоме гелия один из электронов замещен мюоном. Оценить энергию электронного ($3P$ - $2S$)-перехода в таком атоме.

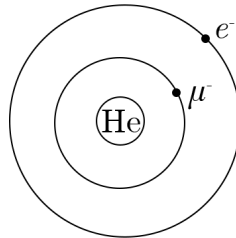


Рис. 6.12

Решение.

Мюон (μ^-) — это аналог электрона, который в 206 раз тяжелее электрона. Такой атом называется мезоатомом.

Посчитаем радиус мюона

$$r_\mu = \frac{\hbar^2}{Zm_\mu e^2} = 10^{-11} \text{ см},$$

так как $m_\mu = 206m_e$.

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R_\infty,$$

$$R_\infty = \frac{R_y}{\hbar c} = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3 c} = 109737,3 \text{ см}^{-1},$$

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

12

$$R_H = \frac{\mu e^4}{4\pi\hbar^3 c} = 109677,6 \text{ см}^{-1},$$

где $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$ — это приведенная масса.

$$\Rightarrow \epsilon_{3 \rightarrow 2} = 1,89 \text{ эВ}.$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

ЛЕКЦИЯ 7

ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА. СПИН. СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТЕРМ

1. Орбитальное движение электрона

Нарисуем картину орбитального движения электрона. Она представлена на рисунке (7.1).

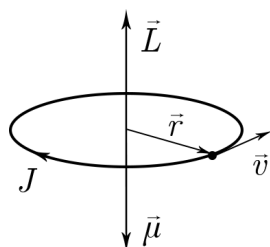


Рис. 7.1

Для момента импульса можем записать следующее соотношение:

$$\vec{L} = [\vec{r} m \vec{v}].$$

Найдем связь между моментом импульса и магнитным моментом электрона:

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c} \vec{S} = \frac{1}{c} \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 \vec{n} = -\frac{e}{2c} r v \vec{n} \frac{m}{m} = -\frac{e}{2mc} \vec{L}.$$

Запишем выражение для магнитного момента электрона через **гиромагнитное отношение** Γ :

$$\mu = -g_l \cdot \Gamma \cdot \vec{L},$$

где $g_l = 1$ — орбитальный g -фактор.

Вспомним квантование проекции момента импульса на какую-то ось z :

$$L_z = m\hbar.$$

В последней формуле m принимает значения:

$$m = 0, \pm 1, \dots \pm l.$$

Возьмем проекцию магнитного момента на ось z :

$$\mu_{lz} = -g_l \Gamma L_z = g_l \Gamma \hbar m_l.$$

Введем новую величину — **магнетон Бора**.

Она равна

$$\mu_B = \Gamma \hbar = \frac{e\hbar}{2mc} = 0,927 \cdot 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}.$$

А для проекции магнитного момента можно записать:

$$\mu_{lz} = g_l \mu_B m_l.$$

В этой формуле m принимает значения:

$$m_l = 0, \pm 1, \dots \pm l, (2l + 1) \text{ значения}.$$

2. Спин. Опыты Штерна – Герлаха

На виток с током, помещенном в неоднородное магнитное поле, действует сила. Рассматривается опыт Штерна – Герлаха. Схема этого опыта представлена на рисунке (7.2).

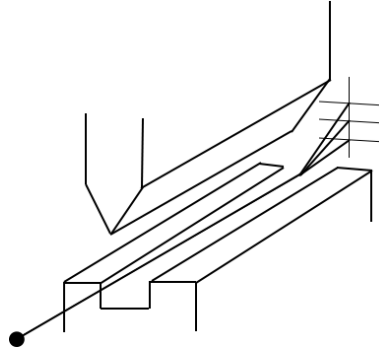


Рис. 7.2

Источник (на рисунке это точка снизу) посылает атомы. Они расщепляются. На выходе пучок расщепится на линии по значению проекции магнитного момента на ось их первоначального движения. Таким образом получится $(2l + 1)$ линий.

На опыте Штерн и Герлах получили две линии. Объяснилось это с введением нового понятия — **спина**. Спин эквивалентен собственному магнитному моменту электрона.

Введем еще одно новое понятие — **мультиплетность**.

$$\text{Мультиплетность} = 2S + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2},$$

$$m_S = \pm \frac{1}{2}, \quad m_S^{\max} = S = \frac{1}{2},$$

$$S_z = \hbar m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar,$$

$$S^2 = \hbar^2 S(S + 1).$$

Аналогичное соотношение есть для орбитального магнитного момента:

$$L^2 = \hbar^2 l(l + 1) \quad \Rightarrow \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2.$$

Получается, спин может быть направлен исключительно по или против движения. Никаких промежуточных значений нет.

Найдем соответствующий спину магнитный момент:

$$\mu_s z = g_s \mu_B m_s.$$

В эксперименте оказалось, что

$$\frac{\mu_s z}{S_z} = -\frac{e}{mc} = g_s \Gamma, \quad \Rightarrow \quad g_s = 2.$$

Запишем, чему равна сила, действующая на магнитный момент, помещенный в неоднородное магнитное поле:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \vec{\nabla}) \vec{B} \Rightarrow F_z = \mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

В этой формуле $\mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \approx 0$, потому что время пролета этой частицы через этот магнит достаточно большое, и за это время частица совершает свое прецессионное вращение в этом магнитном поле. Для прецессионного вращения имеем:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi \cdot 2mc}{eB} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

Время пролета через магнит:

$$v = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad \Rightarrow \quad t \approx 0,1 \text{ с}.$$

Задача 6.15. Опыт Штерна – Герлаха

Параллельный пучок нейтронов с энергией $T = 0,025 \text{ эВ}$ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0,1 \text{ мм}$ и затем через зазор в магните Штерна – Герлаха длиной $L = 1 \text{ м}$. Оценить значение градиента поля $\frac{dB}{dx}$, при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = 9,66 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$.

Решение.

При прохождении через коллимирующую щель происходит дифракционное уширение. А так как пучок потом расщепляется в зазоре магнита, компоненты пучка могут слиться, и тогда исчезнет расщепление.

Это представлено на рисунке (7.3). Справа — это экран, и на нем видна просто толстая полоса, а не расщепление.

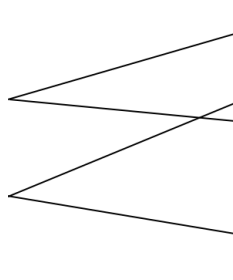


Рис. 7.3

Магнитный момент нейтрона равен

$$\mu_n = 0,966 \cdot 10^{-23} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} = \frac{\mu_B}{960}.$$

Заметим, что у нейтрона есть магнитный момент, хотя он является нейтральной частицей. Магнитный момент появляется из-за того, что нейтрон состоит из заряженных частиц. Нейтрон — частица **сильного взаимодействия**, и состоит из трех **кварков**.

Сила, действующая на нейтрон:

$$f_z = m_n \cdot a_{\perp} = \mu \frac{\partial B}{\partial z},$$

$$a_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{v_{\parallel}}.$$

Угол между компонентами скорости представлен на рисунке (7.4).

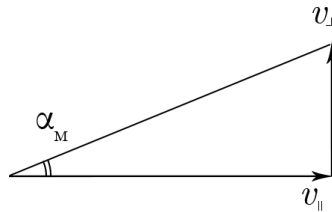


Рис. 7.4

$$f_z = m_n \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{L} = \mu \frac{dB}{dz} \Rightarrow v_{\perp} = \frac{\mu \frac{dB}{dz} L}{m v_{\parallel}}.$$

Дифракционное уширение равно

$$\alpha_{\text{диф}} \simeq \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d \sqrt{2mE}},$$

$$\alpha_{\text{магн}} = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\mu \frac{dB}{dz} L}{m v_{\parallel}^2} = \frac{h}{d \sqrt{2mE}},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{2Eh}{L \mu_n d \sqrt{2mE}} = 150 \frac{\text{Гс}}{\text{см}}.$$

3. Энергия ферромагнетика в магнитном поле

Расположим ферромагнетик в магнитном поле. Ферромагнетик висит на нитке. Он намагничен. Это представлено на рисунке (7.5).

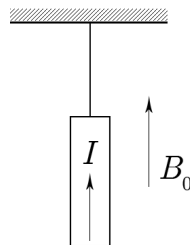


Рис. 7.5

Энергия магнитного момента в магнитном поле равна:

$$E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$



Для рассматриваемого куска железа магнитный момент равен:

$$\mu = IV,$$

где I — это намагниченность. Это есть магнитный момент единицы объема.

Если поле повернуть на 180° , то энергия поменяется:

$$\Delta E = 2\mu B.$$

Задача 6.9. Опыты Эйнштейна и де Гааза

С какой угловой скоростью ω и в каком направлении должен начать вращаться цилиндр, подвешенный магнитном поле B , направленном параллельно его оси вертикально вверх, если изменить направление поля на обратное? Считать, что цилиндр намагничивается до насыщения. Момент импульса электрона в атоме равен l , число атомов в цилиндре N , момент инерции цилиндра I .

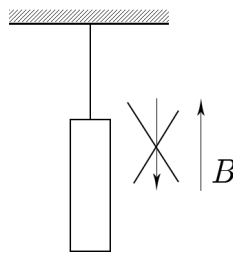


Рис. 7.6

Решение.

Момент импульса цилиндра:

$$I\omega = 2kN \Rightarrow \omega = \frac{2lN}{I}.$$

Задача 6.10. Опыты Эйнштейна и де Гааза

Какое значение для ω следует ожидать в упрощенном опыте Эйнштейна–де Гааза, если длина цилиндра $L = 1$ см, его масса $m = 1$ г, цилиндр сделан из железа и если предположить, что момент импульса каждого атома равен таковому для электрона на первой боровской орбите?



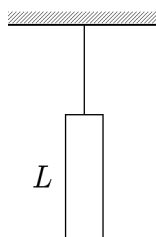


Рис. 7.7

Решение.

Момент импульса атома равен \hbar .

Момент инерции цилиндра:

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Посчитаем число атомов:

$$N = \frac{m}{A} N_A,$$

$$\omega = \frac{2N\hbar}{0,5mr^2} = \frac{4N\hbar}{mr^2} = \frac{4N_A\hbar m}{Amr^2} \cdot \frac{\pi\rho L}{\pi\rho L} = \frac{2N_A\hbar\rho L}{Am} = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

4. Сложение моментов импульса

У частицы есть собственный и орбитальный моменты. Их сумма называется **полным моментом**.

У всякой такой системы вектор \vec{J} является **интегралом движения**. Он сохраняется. А остальные векторы прецессируют вокруг него.

Если механические моменты возьмем в единицах \hbar , а магнитные моменты возьмем в единицах μ_B , то тогда длина вектора орбитального механического момента будет равна длине вектора орбитального магнитного момента. Вспомним, что $g_l = 1$ и $g_s = 2$, поэтому длина спинового магнитного момента будет вдвое больше длины спинового механического момента.

Так как \vec{J} есть интеграл движения, то все остальные векторы вращаются вокруг него, и, соответственно, $\mu_{\text{сум}} \vec{\mu}$ тоже. То есть этот вектор имеет проекцию на направление \vec{J} .

Все эти рассуждения представлены на картинке (7.8).

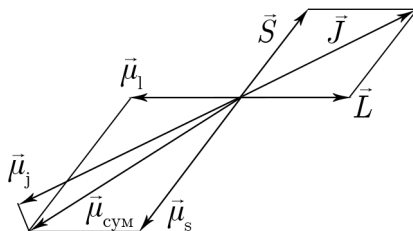


Рис. 7.8

В классическом случае для нахождения проекции нужно было просто умножить на косинус угла между этими векторами, но в квантовом случае проекция находится специальным образом — через **фактор Ланде**. На самом деле, эта проекция $\vec{\mu}_{\text{сум}}$ на направление \vec{J} и называется магнитным моментом атома.

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_j &= -g\mu_B\vec{J}, \quad \vec{\mu}_j\overline{\mu_{\text{сум}}} = -g\mu_B\vec{J}, \\ \mu_{\text{сум}}^{\rightarrow} &= \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \quad \vec{\mu}_L = g_l\mu_B\vec{L}, \\ \vec{\mu}_S &= g_s\mu_B\vec{S}, \quad (\vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S)\vec{J} = g\mu_B\vec{J}\vec{J}, \\ g_l\mu_B\vec{L}\vec{J} + g_s\mu_B\vec{S}\vec{J} &= g\mu_B\vec{J}^2, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{S} = \vec{J} - \vec{L}, \\ \overline{S^2} &= \overline{J^2} + \overline{L^2} - 2\overline{J\vec{L}}, \\ \overline{J\vec{L}} &= \frac{1}{2}(\overline{J^2} + \overline{L^2} - \overline{S^2}), \quad \overline{J\vec{S}} = \frac{1}{2}(\overline{J^2} + \overline{S^2} - \overline{L^2}).\end{aligned}$$

Средние значения в квантовой механике равны:

$$\begin{aligned}\overline{J^2} &= J(J+1), \quad \overline{L^2} = L(L+1), \quad \overline{S^2} = S(S+1), \\ \Rightarrow \quad \frac{g_l}{2}(\overline{J^2} + \overline{L^2} - \overline{S^2}) + \frac{g_s}{2}(\overline{J^2} + \overline{S^2} - \overline{L^2}) &= g\overline{J^2}, \\ g &= \frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_s - g_l}{2} \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}.\end{aligned}$$

Получим фактор Ланде для электронов в атоме

$$\begin{aligned}g_l &= 1, \quad g_s = 2, \\ \Rightarrow \quad g &= \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.\end{aligned}$$

5. Терм

Рассматриваем атом водорода. Можно характеризовать состояние атома четырьмя числами таким образом:

$$n^{2S+1}l_J.$$

Совокупность этих четырех чисел, характеризующая состояние атома, называется **терм**.

Для орбитального квантового числа можно составить таблицу соответствия со спектроскопическими обозначениями.

	S	P	D	F	G
1	0	1	2	3	4

6. Радиальное квантовое число

Вернемся к атому водорода.

n_r — радиальное квантовое число. Радиальное квантовое число показывает сколько нулей у волновой функции от нуля до бесконечности.

$$n_r = n - l - 1.$$

Максимальное значение l — это $n - 1$.

Всего состояний — $2n^2$.

n	n_r	l	m_l	s	j	Состояние	Кратность вырождения
1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1^2S_{\frac{1}{2}}$	2
2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2S_{\frac{1}{2}}$	8
	0	1	$0, \pm 1$		$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$2P_{\frac{1}{2}}, 2P_{\frac{3}{2}}$	
3	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$3S_{\frac{1}{2}}$	18
	1	1	$0, \pm 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$3P_{\frac{1}{2}}, 3P_{\frac{3}{2}}$	
	0	2	$0, \pm 1, \pm 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$	$3D_{\frac{5}{2}}, 3D_{\frac{3}{2}}$	

7. Спин-орбитальное взаимодействие

Случай, когда кратность вырождения не равна нулю, означает, что для этого значения главного квантового числа существует несколько состояний с одинаковой энергией. В действительности это не так. Объясним это. Электрон движется на своей электронной оболочке. В системе отсчета электрона протон вращается вокруг электрона. И получается, что собственный магнитный момент электрона находится в магнитном поле, порожденном движением протона вокруг электрона. Это называется **спин-орбитальным взаимодействием**.

В системе отсчета электрона возникает магнитное поле:

$$B_l = \frac{e}{cr^3}vr = \frac{ev}{cr^2}.$$

На первой боровской орбите:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{mr_1} = \frac{e^2}{m \cdot \frac{\hbar^2}{me^2}} = \frac{e^4}{\hbar^2}.$$

Таким образом, скорость электрона на первой боровской орбите равна:

$$v_1 = \frac{e^2 c}{\hbar} = \alpha c,$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ — постоянная тонкой структуры.

$$B_l = \frac{\alpha e}{r^2}.$$

Если магнитный момент находится в магнитном поле, то он может быть направлен или по полю, или против поля. И из-за этого энергия конкретного уровня с конкретным значением главного квантового числа расщепляется.

$$\Delta U_{ls} = -(\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l) = \mu_B \cdot B_l \cdot m_l.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
! Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

10

То есть происходит расщепление по квантовому числу l .

$$|\Delta U_{\text{ls}}| = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{e\alpha}{r^2} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \alpha^2.$$

$\frac{me^4}{2\hbar^2} = \epsilon_1$ — на первом (боровском) уровне.

$$\frac{\Delta U}{\epsilon_1} = \alpha^2 \approx 5 \cdot 10^{-5}.$$

Это расщепление, вызываемое спин-орбитальным взаимодействием называется **тонкой структурой**.

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

ЛЕКЦИЯ 8

АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. Квантовый осциллятор. Правила отбора

Поговорим о колебаниях молекул. Возьмем самую простую молекулу H_2 . Молекула рассматривается как осциллятор. Она показана на рисунке (8.1).

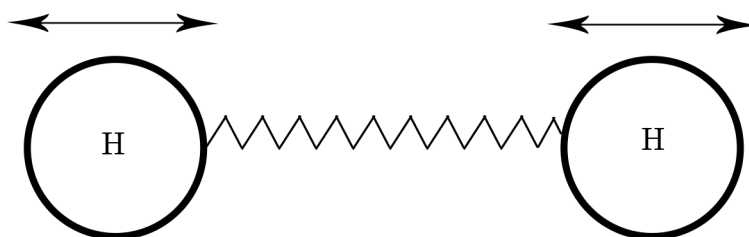


Рис. 8.1

Потенциальная энергия такой одномерной структуры равна:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

В реальных задачах нужно решать уравнение Шредингера с вышеупомянутым потенциалом. Частица находится в такой квадратичной яме.

Уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi'' + \left(\frac{kx^2}{2} - E\right)\psi = 0.$$

Это уравнение не решается в квадратурах. Решением этого уравнения занимаются в квантовой механике.

Сразу запишем ответ. Оказывается, что здесь тоже есть дискретизация уровней.

Дискретные уровни энергии определяются формулой:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

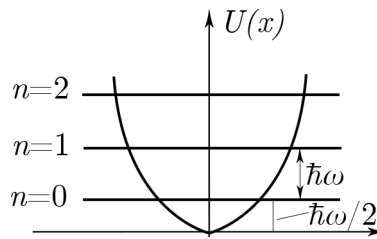


Рис. 8.2

Уровни энергии показаны на рисунке (8.2)

Основное состояние двухатомной молекулы — $\frac{\hbar\omega}{2}$, где $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$. Эта молекула совершает колебания. Такие колебания называются **нулевыми**. Двухатомные молекулы при комнатных условиях практически не колеблются, то есть только какие-то единичные молекулы находятся на высоких уровнях. Последние вносят ничтожно малый вклад в теплоемкость газа. А при увеличении t теплоемкость увеличивается из-за возбуждения этих колебательных степеней свободы.

Исследуем, как выглядит волновая функция, соответствующая какому-то уровню. На картинке (8.3) показан один из возможных вариантов.

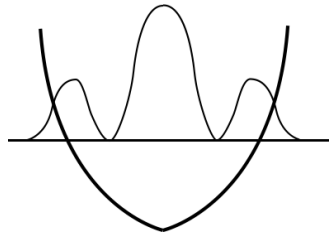


Рис. 8.3

Такие функции называются **полиномами Чебышева**. Они удовлетворяют уравнению Шредингера, и описываются особым образом.

Эти функции немного напоминают те функции, которые получаются в задаче прямоугольной ямы с бесконечно высокими стенками.

В задаче трехмерного осциллятора решения выглядят иначе. В трехмерном осцилляторе 3 независимых степеней свободы, значит, молекула может колебаться по трем независимым направлениям: $n_x + \frac{1}{2}$, $n_y + \frac{1}{2}$, $n_z + \frac{1}{2}$.

Тогда для энергии получаем:

$$E = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad \text{где } N = n_x + n_y + n_z; \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Скажем пару слов о **правилах отбора**.

Во-первых, переходы с уровня на уровень могут быть только последовательными.

Следовательно, в колебательном спектре присутствует только $\hbar\omega$. То есть уровней может быть много, а переходы только с этой энергией.

Задача 5.25. Нулевые колебания

В угарном газе CO из-за возбуждения колебаний молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4,61$ мкм. Определить амплитуду

A_0 нулевых колебаний молекулы CO. Оценить температуру, при которой амплитуда тепловых колебаний превзойдет A_0 .

Решение.

Нулевые колебания существуют всегда, независимо от температуры.

$$E = \frac{\hbar\omega}{2},$$

где E — полная энергия.

Для кинетической и потенциальной энергий можем записать:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} \Rightarrow \overline{E} = \overline{E_{\text{кин}}} + \overline{E_{\text{пот}}}.$$

Известно, что если колебания гармонические, то можно воспользоваться теоремой о равенстве кинетической и потенциальной энергий.

$$\Rightarrow \overline{E_{\text{кин}}} = \overline{E_{\text{пот}}} = \frac{\overline{\mu v^2}}{2} = \frac{\overline{\mu \omega^2 x^2}}{2},$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \overline{\mu \omega^2 x^2},$$

$$x^2 = A^2 \cos^2 \omega t \Rightarrow \overline{x^2} = A^2 \overline{\cos^2 \omega t}.$$

Так как колебания нулевые, а $\overline{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$, то

$$\Rightarrow \overline{x^2} = A_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{A_0^2}{2},$$

$$E = \overline{E} \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} = \mu \omega^2 \frac{A_0^2}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}},$$

$$\mu = \frac{m_0 m_c}{m_0 + m_c} = 11,45 \cdot 10^{-24} \text{ г},$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{\mu \cdot 2\pi c}} = 4,7 \cdot 10^{-10} \text{ см},$$

$$kT \geq \hbar\omega \Rightarrow T \geq \frac{\hbar\omega}{k} = \frac{2\pi\hbar c}{k\lambda} = 3100 \text{ К}.$$

Следовательно, область колебаний (возбужденных колебаний) молекулы лежит при достаточно высоких температурах.

Задача 5.32. Нулевые колебания. Потенциал Леннарда – Джонса

Поле, в котором движется атом жидкого гелия, хорошо описывается потенциалом Леннарда – Джонса:

$$U(r) = \phi \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

где $\phi = 232 \text{ К}$, а $r_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

Оценить энергию нулевых колебаний.

Решение.

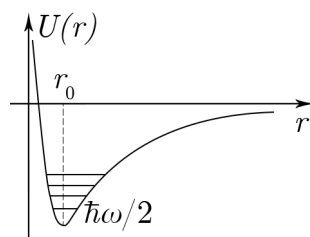


Рис. 8.4

Атом колеблется, при этом колебания длятся не долго. Атомы переходят в свободное состояние, как и у всякой жидкости. Тем не менее, эти колебания описываются неким потенциалом. Этот потенциал показан на (8.4).

Потенциальная энергия имеет минимум, и в области этой ямы можно наблюдать параболу. Значит, в этой яме есть колебательные уровни, соответственно, происходит квантование. Этот минимум смещен вниз и вправо.

Частота этих колебаний будет:

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu},$$

$$U = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow U'' = k,$$

т. е. вторая производная этого потенциала — жесткость этой связи.

Требуется найти энергию нулевых колебаний:

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow r = r_0,$$

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2}U''(r - r_0)^2,$$

$$U'' = 12\phi r_0^2 \left[\frac{13r^2}{r^{14}} - \frac{7}{r^8} \right] = \frac{72\phi}{r_0^2},$$

$$\omega^2 = \frac{U''}{M} \Rightarrow E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega = 3\hbar \frac{18\phi}{Mr_0^2} = 19,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} = 226 \text{ К}.$$

2. Типы энергии

Итак, для молекулы (атома) получаются три вида энергий:

1) Энергия, которая получается при переходе атомов от одного дискретного уровня на другой.

2) **Вращательная.**

3) **Колебательная.**

Нужно сделать оценку, выяснить, как они соотносятся.

Рассматривается водород — H_2 .

1) Энергия переходов водорода порядка Ридберга.

2) Нарисуем еще раз этот потенциал. Он продемонстрирован на рисунке (8.5).

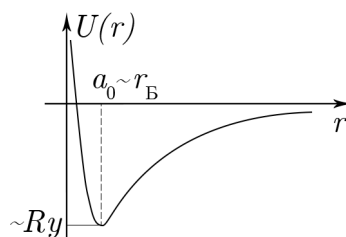


Рис. 8.5

$$\frac{kx^2}{2} \approx R_y,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{M_p}}$.

$$\Rightarrow k = \frac{2R_y}{r_B^2} \text{ (Оценка жесткости).}$$

Известно, что

$$R_y = \frac{mc^2}{2}\alpha^2, \quad r_B = \frac{A_e}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad A_e = \frac{\hbar}{mc}.$$

Вернемся к оценке жесткости:

$$k = \frac{2R_y}{r_B^2} = \frac{mc^2\alpha^2\alpha^2}{A_e^2} = \frac{\alpha^4 m^3 c^4}{\hbar^2},$$

$$\omega_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{k}{M}} \sim \sqrt{\frac{\alpha^4 m^3 c^4}{M_p \hbar^2}} \Rightarrow \hbar \omega_{\text{кол}} = \alpha^2 mc^2 \sqrt{\frac{m_e}{M_p}} \sim R_y \sqrt{\frac{m_e}{M}} \approx \frac{1}{10} R_y.$$

Значит, между внутриатомными переходами может быть 10 колебательных переходов.

3) Теперь оценим вращательные уровни. Вращательная энергия вычисляется таким образом:

$$E_{\text{вр}} = \hbar \omega_{\text{вр}} \sim \frac{\hbar b a r^2}{2M r_B^2} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{m e^2}{\hbar^2} \right)^2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{m e^2}{2\hbar^2} = \frac{m}{M} R_y = \frac{1}{1000} R_y.$$

Покажем уровни энергии в атоме водорода. Они продемонстрированы на рисунке (8.6).

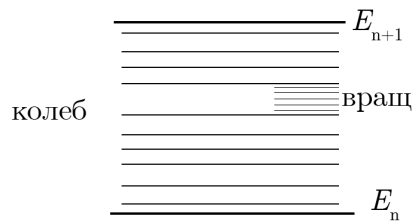


Рис. 8.6

3. Спин-орбитальное взаимодействие

Электрон в атоме водорода совершает свое орбитальное вращение. В его системе отсчета вокруг него вращается протон. Тогда электрон находится в магнитном поле, связанным с орбитальным движением протона. И в магнитном поле оказывается собственный магнитный момент этого электрона. В результате происходит расщепление этого уровня из-за того, что спин электрона может быть направлен по полю, или против поля. То есть возникает дополнительная энергия, смещающая его относительно уровня. Эта дополнительная энергия называется **спин – орбитальным взаимодействием**. За счет этого взаимодействия энергия уровня немного смещается. Значение этого смещения равно примерно $10^{-5} R_y$. Это не очень много, но измеряемо.

Запишем формулу, полученную Дираком, учитывающую спин электрона:

$$E = -Az^2 \frac{1}{n^2} - \alpha^2 \frac{Az^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right),$$

где α — **постоянная тонкой структуры**.

Следовательно, когда n и j совпадают, снимается вырождение по l (орбитальному квантовому числу).

4. Расщепление тонкой структуры

Рассмотрим атом натрия. Он показан на рисунке (8.7).

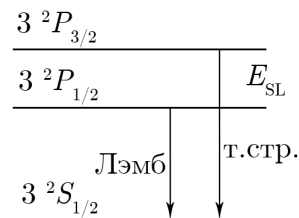


Рис. 8.7

Поскольку этот атом одноэлектронный, у него $n = 3$. Уровни оказались разными. Но по теории Дирака должны были совпасть уровни $3^2P_{\frac{1}{2}}$ и $3^2S_{\frac{1}{2}}$, поскольку n и j совпадают.

Переход с $3^2P_{\frac{3}{2}}$ на $3^2S_{\frac{1}{2}}$ называется тонкой структурой. Переход с $3^2P_{\frac{1}{2}}$ на $3^2S_{\frac{1}{2}}$ тоже существует. Он называется лэмбовский сдвиг.

Оказывается, электрон, находящийся в S -состоянии, имеет сферически симметричную конфигурацию, и в S -состоянии $l = 0$. Это может быть только в случае, когда электрон размазан сферически симметрично по оболочке. У P -электрона, находящегося выше, другая конфигурация в виде вытянутой восьмерки. Тогда электрон по-другому распределен в пространстве. S -электрон распределен по сфере и к ядру не приближается. А P -электрон меняет свое положение.

Найдем E_{SL} :

$$E_{SL} = A \langle \vec{L} \vec{S} \rangle = \frac{A}{2} (\overline{J^2} - \overline{L^2} - \overline{S^2}) = \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)],$$

$$\Rightarrow E(3^2P_{\frac{3}{2}}) = E(3^2P_{\frac{1}{2}}) + E_{SL}.$$

5. Сложные атомы

В легких атомах общий спин равен:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots$$

Суммарный орбитальный момент:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$$

Полный момент:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Тогда терм многоэлектронного атома можно записать так:

$$n^{2S+1}L_J.$$

Задача 4.50. Тонкая структура

Атом водорода находится в состоянии с энергией $\epsilon = -1,51$ эВ и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в ноль на интервале $0 < r < \infty$. Что это за состояние?

Решение.

Найдем квантовое число n :

$$n = \sqrt{\frac{R_y}{E}} = 2.$$

Радиальное квантовое число n_r равно:

$$n_r = n - l - 1.$$

Волновая функция обращается в ноль ровно столько раз, чему равно радиальное квантовое число.

Так как $n_r = 1$, то

$$n_r = n - l - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0.$$

Значит, соответствующее состояние есть $2S$.

Задача 6.14. Пучок атомов в сильном неоднородном магнитном поле

Пучок атомов ванадия ($A = 50$), находящихся в состоянии $4F_{\frac{3}{2}}$, пропускается через сильное неоднородное магнитное поле. На сколько компонент разобьется такой пучок? На какой угол разойдутся соседние компоненты пучка, если участок с неоднородным полем имеет протяженность $l = 25$ см, градиент поля в нем $\frac{dB}{dx} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{Гс}}{\text{см}}$, а скорость атомов $v = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

Решение.

$$2S + 1 = 4,$$

$$S = \frac{3}{2}; \quad L = 3; \quad J = \frac{3}{2}.$$

Подсчитаем g -фактор:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{2}{5}.$$

Магнитный момент равен:

$$\mu_B = m_J g \mu_B \quad \Rightarrow \quad m_J = \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{2}.$$

Задача 6.20. Тонкая структура

Желтый дублет Na возникает при переходе электронов $3^2P \rightarrow 3^2S$ и соответствует длинам волн $\lambda_1 = 5896 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5890 \text{ \AA}$. Найти энергетическое расстояние $\Delta\epsilon$ между соответствующими подуровнями терма 3^2P (мультиплетное расщепление). Оценить среднюю величину магнитного поля B , действующего на оптический электрон.

Решение.

Посмотрим, какие переходы возможны. Есть самопроизвольные переходы. Также существуют поглощательные переходы.

$$\Delta\epsilon = hc \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

На рисунке (8.8) показано заполнение электронами подуровней натрия.

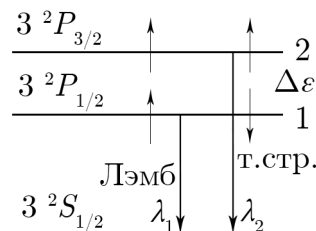


Рис. 8.8

$$\Delta\epsilon = 2\mu_B B,$$

где μ_B — это магнитный момент, а B — искомое внутреннее поле.

$$B = \frac{\Delta\epsilon}{2\mu_B} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Гс.}$$

Задача 6.50. Сверхтонкая структура

Хорошо известно, что космическое излучение на длине волны $\lambda = 21$ см обусловлено сверхтонким расщеплением основного состояния атомарного водорода. Оценить на основе этих данных величину энергетического расщепления (в эВ) $2P$ -состояния позитрония.

Решение.

Сверхтонкое расщепление — это расщепление, обусловленное взаимодействием спинового магнитного момента и магнитного момента протона. В атоме водорода ядром является протон, и в поле протона вращается электрон. Но протон имеет собственный магнитный момент. В магнитном поле протона находится электрон, и из-за этого поля электрон меняет свою энергию.

Сравниваются атом водорода и атом **позитрония** (протон и позитрон). Они показаны на рисунке (8.9).

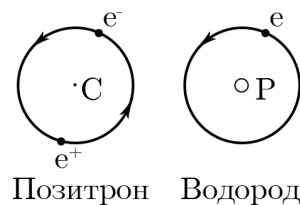


Рис. 8.9

Итак, сверхтонкое расщепление обусловлено взаимодействием собственных магнитных моментов.

Водород:

$$\mu_{e^-} = \mu_{e^+} = \mu_B,$$

$$\mu_p = 2,79\mu_B \frac{m_e}{m_p},$$

$$\Delta E = 2U_{\text{сверхтонк}} = \frac{2\mu_{\text{эл}}\mu_p}{r^3} = \hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda} = 0,59 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

Позитроний:

$$r_{\text{ноз}} \stackrel{n=2}{=} \frac{\hbar^2}{\mu_e^2} \cdot 2^2 = 8r_B,$$

где $r_B = 0,53 \text{ \AA}$.

$$\Delta E_{\text{ноз}} = 2 \frac{\mu_e^2}{r_{\text{ноз}}^3} = 2 \frac{\mu_B^2}{r_{\text{ноз}}^3},$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{\text{ноз}}}{\omega_{\text{бод}}} = \frac{\nu_{\text{ноз}}}{\nu_{\text{бод}}} = 1,285 \Rightarrow \nu_{\text{ноз}} = 1,285 \nu_{\text{бод}} \Rightarrow \Delta E_{\text{ноз}} = 0,76 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

ЛЕКЦИЯ 9

АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Задача 6.66. Аналог эффекта Эйнштейна – де Гааза в ферромагнетиках

Образец тефлона массой 50 г намагничивается в магнитном поле $B = 20$ кГс при температуре $T = 0,05$ К. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора ^{19}F в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса $L = 24,2 \cdot 10^{-6}$ эрг \cdot с. Определить величину магнитного момента ядра фтора.

Решение.

$$\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A} = \frac{1}{n}.$$

Число атомов будет:

$$N_0 = 2N_A \cdot n \cdot \frac{1}{n} = 2N_A.$$

Образец тефлона попадает в магнитное поле. Он находится во внешнем магнитном поле.

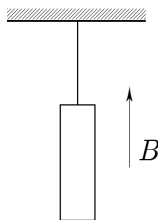


Рис. 9.1

Когда выключают поле, возникает вращательный момент импульса. Это происходит из-за того, что большое количество атомов выстраиваются по полю в этом магнитном поле, потому что в такой конфигурации они обладают меньшей энергией. Но какая-то часть этих атомов не выстроится по полю. При выключении поля все уравнивается. То есть тепловое движение распределяет эти частицы равномерно по полю и против поля.

Рассматривается двухуровневая система. Нужно выяснить, сколько атомов содержится в этом образце. При этом в условиях задачи написано, что атомы фтора определяют состояние этого образца, то есть его магнитный момент. Число ядер фтора равно $2N_A$.

Нарисуем систему уровней. Она показана на рисунке (9.2).

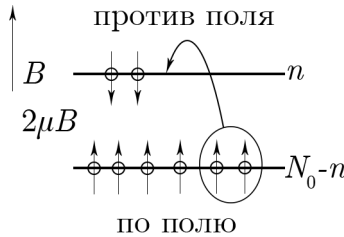


Рис. 9.2

Если есть магнитное поле, то какие-то атомы (магнитные моменты ядер) расположены по полю, а какая-то малая часть — все-таки против поля (т. к. $T \neq 0$).

Их распределение:

$$\frac{n}{N_0 - n} = \exp\left\{\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)\right\},$$

где $\Delta E = 2\mu B$ — распределение Больцмана.

$$\Rightarrow n = N_0 \frac{\exp\left\{\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)\right\}}{1 + \exp\left\{\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)\right\}}.$$

Отсюда можно найти ΔN :

$$\Delta N = (N_0 - n) - n = N_0 - 2n = N_0 \frac{1 - \exp\left\{\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)\right\}}{1 + \exp\left\{\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)\right\}}.$$

Разложим экспоненту:

$$\Delta n = \frac{N_0 \frac{\Delta E}{kT}}{2 - \frac{\Delta E}{kT}} \approx \frac{\mu B}{kT} N_0.$$

Когда выключится магнитное поле, то за счет теплового движения (температура не равна нулю) произойдет разориентация, и тогда половина частиц нижнего ряда (ориентированных по полю) перейдет на верхний. Два уровня заполнятся равномерно за счет теплового движения. То есть при снятии поля половина ΔN поменяют направление, все разориентируются. Общий момент импульса будет равен

$$L = \frac{\Delta N}{2} \cdot \hbar.$$

В верхней формуле нужно число этих частиц $\frac{\Delta N}{2}$ умножить на \hbar , так как каждое ядро имеет собственный момент импульса $\frac{\hbar}{2}$, и меняет свое направление.

$$L = \frac{\Delta N}{2} \cdot \hbar = \frac{1}{2} \frac{\mu B \hbar}{kT} N_0 = \frac{\mu B \hbar N_A}{kT},$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$\mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 13,25 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} = 2,4\mu_{\text{яд}},$$

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5,05 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}.$$

Задача 4.52. Дипольное излучение

Дана формула, определяющая интенсивность дипольного излучения:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2,$$

где d — дипольный момент излучающей системы.

Оценить время жизни первого возбужденного уровня однократно ионизованного атома гелия. Считать атом **гармоническим осциллятором**.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Решение.

Радиус боровской орбиты у водородоподобного атома:

$$r_n = \frac{r_B}{Z} n^2.$$

$$d = r_n e = e r_n e^{i\omega t}.$$

Полагаем, что r_n меняется по гармоническому закону.

$$\ddot{d} = e\omega^2 r_n = e\omega^2 \frac{r_B}{Z} n^2.$$

Это — вторая производная дипольного момента, которая и характеризует **мощность излучателя**:

$$\Rightarrow \ddot{d}^2 = \frac{e^2 \omega^4 r_B^2 n^4}{Z^2}.$$

$$\tau \sim \frac{\hbar\omega}{I} = \frac{\hbar\omega 3c^3}{2\ddot{d}^2} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{n^4} \alpha \hbar \frac{(mc^2)^2}{(\hbar\omega)^3}.$$

Требуется посчитать время жизни для атома гелия:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \Rightarrow \tau = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ с.}$$

Задача 4.46. Сложные атомы

В сложных атомах электрическое поле, в котором движется электрон, формируется как ядром, так и другими электронами. Однако в щелочных металлах с достаточной точностью можно считать, что внешний электрон движется в поле ядра с эффективным зарядом $Z_{\text{эфф}}$. Оценить величину эффективного заряда для $3P$ -электрона Na, если известно, что потенциал ионизации натрия равен $U_D = 5,1$ эВ, а длина волны его яркой желтой линии $\lambda = 589$ нм (переход $3P \rightarrow 3S$).

Решение.

Дублет (две близкие линии) рассматривается как единая линия. Нарисуем схему:

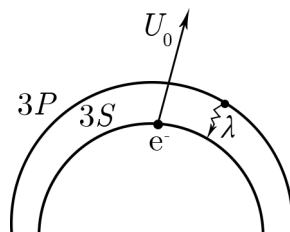


Рис. 9.3

Энергия перехода равна

$$\Delta E_{3p \rightarrow 3s} = \frac{hc}{\lambda} = 2,1 \text{ эВ.}$$

Найдем энергию $3P$ -уровня:

$$E_{3p} = U_0 - \Delta E_{3p \rightarrow 3s} = 3 \text{ эВ.}$$

С другой стороны, для энергии этого состояния можем написать:

$$E_{3p} = \frac{R_y}{3^2} \cdot Z_{\text{эф}}^2 \Rightarrow Z_{\text{эф}}^2 = \frac{3^2 E_{3p}}{R_y} = 1,985,$$

$$Z_{\text{эф}} = \sqrt{1,985} = 1,4.$$

Получен **эффективный заряд**, в поле которого находится этот единственный электрон натрия.

Задача 6.67. Атом гелия

В атоме гелия состояние 3S_1 отстоит от основного примерно на 20 эВ. Оценить в какое магнитное поле нужно поместить атом гелия, чтобы выстроить спины его электронов параллельно.

Решение.

В атоме гелия есть состояние 3S_1 , которое отстоит от основного примерно на 20 эВ. Разберем, что такое основное состояние гелия. Для этого нарисуем (9.4).



Рис. 9.4

Рассмотрим **парагелий**. На одном энергетическом уровне по **принципу Паули** могут находиться два электрона с разнонаправленными спинами. Мультиплетность этого состояния равна единице. Значит, спин равен нулю:

$$2S + 1 = 1 \Rightarrow S = 0, \quad L = 0, \quad J = 0.$$

Рассмотрим **ортогелий**. Мультиплетность:

$$2S + 1 = 3 \Rightarrow S = 1, \quad L = 0, \quad J = 1$$

По условию задачи, между этими состояниями есть разница в энергии 20 эВ. Теперь посмотрим, в какое поле это можно поместить.

$$\Delta E = 20 \text{ эВ} = 2\mu_B B,$$

где μ_B — магнитный момент электрона.

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гс.}$$

Задача 6.65. Расщепление пучка атомов через прибор типа Штерна – Герлаха

В атомах хлора, находящихся в основном состоянии $^2P_{3/2}$, один из электронов с $l_z = 1$ из $3P$ -оболочки переведен в $3D$ -оболочку. При этом полученная конфигурация обладает максимально возможными L и S и минимально возможным J . На сколько компонент расщепится пучок таких возбужденных атомов хлора, если его пропустить через прибор типа Штерна – Герлаха? Объяснить полученный результат на основе векторной модели.

Решение.

Разместим эти электроны. Это сделано на рисунке (9.5).

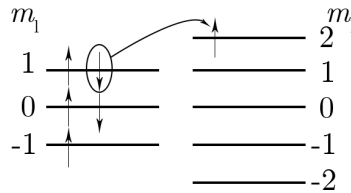


Рис. 9.5

Мультиплетность равна двум, $l = 1$ (P -состояние), $S = 1$.

В атомах хлора, находящихся в основном состоянии, один из электронов с $m_l = 1$ переведен на $3D$ оболочку. При этом полученная конфигурация обладает максимально возможными L и S и минимально возможным J .

$$S_{\max} = \frac{3}{2},$$

$$L_{\max} = 2,$$

$$J = \frac{7}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

Выше написаны все возможные варианты для J , а нужен минимальный:

$$J_{\min} = \frac{1}{2},$$

$$J > 0, \quad |L - S| \leq J \leq L + S.$$

Найдем g -фактор:

$$g = 0.$$

Это значит, что $\vec{\mu} \perp \vec{J}$.

Нарисуем на рисунке (9.6) эти векторы, пользуясь квантовым правилом сложения.

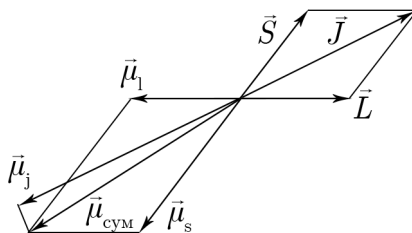


Рис. 9.6

Задача 6.80. Опыт Штерна – Герлаха

Пучок атомов, находящихся в основном состоянии, расщепляется в эксперименте типа Штерна – Герлаха на 9 компонент. Магнитный момент атома в этом состоянии равен $2,4\mu_B$. Найти орбитальный момент атома, если мультиплетность данного состояния равна 5. Момент в атомной физике — это величина его максимальной проекции.

Решение.

$$2S + 1 = 5 \Rightarrow S = 2,$$

$$2J + 1 = 9 \Rightarrow J = 4.$$

$$\mu = 2,4\mu_B = g\mu_B J,$$

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

$$2,4\mu_B = \mu_B J \left[\frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 3 - L(L+1)}{2 \cdot 4 \cdot 5} \right] \Rightarrow 2,4 = 4 \left[\frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 3 - L(L+1)}{2 \cdot 4 \cdot 5} \right].$$

$$L^2 + L - 42 = 0 \Rightarrow L = 6 \text{ или } -7.$$

Так как $L > 0$, то, следовательно, $L = 6$.

Задача 6.78. Обменное взаимодействие

Возбужденное состояние атома гелия $1s^1 2s^1$ может иметь полный спин электронной оболочки S как 1 (ортогелий), так и 0 (парагелий). Энергии полной ионизации этих состояний $W_{орто} = 59,2$ эВ и $W_{пара} = 58,4$ эВ. Кроме энергии взаимодействия с ядром, в эти энергии вносят вклад не зависящая от полного спина часть энергии кулоновского отталкивания электронов ϵ_K и зависящая от полного спина часть, называемая **энергией обменного взаимодействия**, $V = -\frac{A}{s}(1 + 2\langle s_1 s_2 \rangle)$, где A — константа, s_1, s_2 — спины электронов ($S = s_1 + s_2$), а угловые скобки означают усреднение по направлениям спинов. Найти A и ϵ_K считая, что оба электрона находятся в поле ядра с $Z = 2$, т. е. не учитывая экранировку поля ядра электронами.

Решение.

$$E_{пара} = -W_{пара} = E + E_{кул} + V_{пара},$$

$$E_{орто} = -W_{орто} = E + E_{кул} + V_{орто}.$$

Распишем V :

$$V = -\frac{A}{2} (1 + 4\vec{S}_1 \vec{S}_2),$$

$$\begin{aligned} \overline{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2} &= \overline{S_1^2} + \overline{S_2^2} + 2\overline{\vec{S}_1 \vec{S}_2}, \\ \Rightarrow 2\overline{\vec{S}_1 \vec{S}_2} &= \left(\overline{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2} - \overline{S_1^2} - \overline{S_2^2} \right) = S(S+1) - \overline{S_1^2} - \overline{S_2^2} = S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Запишем правило квантования квадрата момента импульса:

$$\overline{S_1^2} = S_1(S_1 + 1) = \frac{3}{4},$$

$$V = -\frac{A}{2} \left(1 + 4\overline{\vec{S}_1 \vec{S}_2} \right) = -A[S(S+1) - 1] = \begin{cases} -A & \text{для } \uparrow\uparrow \text{ (орто) } S = 1, \\ +A & \text{для } \uparrow\downarrow \text{ (пара) } S = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{пара} = +A, \\ V_{орто} = -A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{пара} = -W_{пара} = E + E_{кул} + A, \\ E_{орто} = -W_{орто} = E + E_{кул} - A. \end{cases}$$

$$E = -R_y Z^2 - 13,6 \frac{Z^2}{n^2} = -68 \text{ эВ}.$$

То есть -68 эВ — это энергия взаимодействия электрона с ядром.

В рассматриваемой задаче два электрона. Первый находится на первом уровне ($-R_y Z^2$). Второй находится на втором уровне $-13,6 \frac{Z^2}{n^2}$. Обе энергии отрицательные, они складываются, а экранировка по условию не учитывается.

$$A = (E_{пара} - E_{орто}) \cdot \frac{1}{2} = 0,4 \text{ эВ},$$

$$E_{кул} = \frac{E_{пара} + E_{орто}}{2} - E = -9,2 \text{ эВ}.$$

ЛЕКЦИЯ 10

ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

Задача 6.77. Схема Рассела – Салмуса

В спектрах солнечной короны наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов, поэтому их приписывали гипотетическому элементу коронию. Впоследствии выяснилось, что это в основном линии ионов железа и никеля. Среди наблюдаемых линий корония есть линии, соответствующие переходам $^1D_2 \rightarrow ^3P_2$ ($\lambda_1 = 2649 \text{ \AA}$) и $^1D_2 \rightarrow ^3P_1$ ($\lambda_2 = 3987 \text{ \AA}$) иона железа Fe^{10+} . Найти длину линии перехода $^3P_0 \rightarrow ^3P_1$ в схеме Рассела – Саундерса (LS -схема).

Решение.

D отвечает за суммарный орбитальный момент, то есть $l = 1$.

Энергия спин-орбитального взаимодействия равна

$$\epsilon_{\text{SL}} = A \langle (\vec{L}\vec{S}) \rangle,$$

где A — некая константа для иона Fe ($A < 0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению \vec{L} и \vec{S} .

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2),$$

$$\langle \vec{L}\vec{S} \rangle = \frac{1}{2}(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)),$$

$$\epsilon_{\text{SL}} = \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)].$$

Для соответствующих уровней посчитаем ϵ_{SL} :

$$^1D_2 : S = 0; L = 2; J = 2 \Rightarrow \epsilon_{\text{SL}}(^1D_2) = 0,$$

$$^3P_0 : S = 1; L = 1; J = 0 \Rightarrow \epsilon_{\text{SL}}(^3P_0) = -2A > 0,$$

так как $A < 0$.

Это понадобится для того, чтобы понять какой уровень находится выше.

$$^3P_1 : S = 1; L = 1; J = 1 \Rightarrow \epsilon_{\text{SL}}(^3P_1) = -A > 0,$$

$$^3P_2 : S = 1; L = 1; J = 2 \Rightarrow \epsilon_{\text{SL}}(^3P_2) = A < 0.$$

Соответственно, переходы будут:

$$\epsilon(^3P_0) - \epsilon(^3P_1) = -A > 0.$$

Следовательно, 3P_0 выше, чем 3P_1 .

Точно так же найдем остальные:

$$\epsilon(^3P_1) - \epsilon(^3P_2) = -2A > 0.$$

Уровень 3P_1 выше, чем 3P_2 .

Такой мультиплет называется обратным.

На рисунке (10.1) показаны все эти уровни.

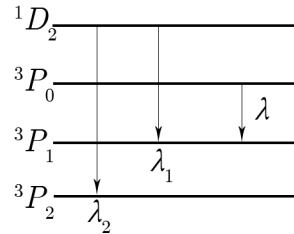


Рис. 10.1

Уровень 1D_2 выше, чем все P уровни.

Требуется найти длину волны перехода $^3P_0 \rightarrow ^3P_1$.

$\frac{hc}{\lambda}$ — энергия неизвестного перехода,

$$\frac{hc}{\lambda} = \epsilon(^3P_0) - \epsilon(^3P_1) = -A.$$

A можно выразить следующим образом:

$$\frac{hc}{\lambda} = -A = \frac{1}{2}[\epsilon(^3P_1) - \epsilon(^3P_2)],$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = \epsilon(^1D_2) - \epsilon(^3P_2),$$

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \epsilon(^1D_2) - \epsilon(^3P_1),$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}[\epsilon(^3P_1) - \epsilon(^3P_2)] = \frac{1}{2} \left[\left[\epsilon(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_1} \right] - \left[\epsilon(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_2} \right] \right],$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 15787 \text{ \AA}.$$

1. Эффект Зеемана

У каждого атома есть свое характерное магнитное поле, связанное с орбитальным движением частиц. Частицы (электроны), совершая орбитальное движение, находятся в магнитном поле. Величина этого магнитного поля оценивается $\approx 10^5$ Гс — это внутреннее поле атома. В этом поле находится соответствующий спиновый момент этого электрона, и происходит **спин-орбитальное расщепление (тонкая структура)**. То есть она существует без наложения внешнего поля. Тонкая структура снимает вырождение по L , но не снимает вырождение по J , уровни J остаются нерасщепленными.

Для того чтобы снять вырождение по J , необходимо внешнее магнитное поле. Оказывается, что можно снять это вырождение в слабом магнитном поле. Объясним это.

Слабое магнитное поле — это поле, которое меньше собственного поля, связанного с орбитальным вращением. Поле называется слабым, а соответствующий **эффект Зеемана** называется сложным. Нарисуем известные переходы натрия. Они показаны на рисунке (10.2).

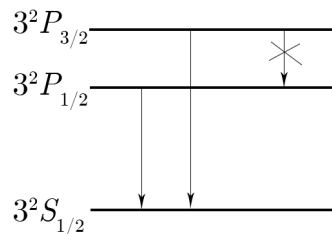


Рис. 10.2

Эта картина переходов наблюдается без внешних магнитных полей.

Теперь посмотрим на изменения в слабом магнитном поле. Наложим это поле.

Запишем энергию в виде операторов:

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}_{кул} + \hat{U}_{SL} + \hat{U}_{SB} + \hat{U}_{LB},$$

где \hat{U}_{SB} связана с влиянием спина, а \hat{U}_{LB} — есть орбитальный момент, причем так как магнитный момент находится во внешнем магнитном поле, то начнется квантование.

Магнитное поле называется слабым, если U_{SB} и U_{LB} меньше U_{SL} .

Рассмотрим эти энергии. Известно, что магнитным моментом атома называется:

$$\mu_J = -g\mu_B J,$$

где g — соответствующий g -фактор.

g_L и g_S отличаются. Спиновый g -фактор равен двум, а орбитальный g -фактор равен единице. Поэтому суммарный магнитный момент, определяемый орбитальным движением и спином, не совпадает с J по направлению.

Нужно подсчитать дополнительную магнитную энергию.

Для любого магнитного момента:

$$U_B = -(\vec{\mu}_j \cdot \vec{B}).$$

При повороте на какой-то угол по отношению к B возникает дополнительная энергия. Она равна:

$$U_B = -(\vec{\mu}_j \cdot \vec{B}) = g\mu_B(\vec{J}\vec{B}) = g\mu_B m_j B,$$

где m_j — проекция j на направление B .

$$m_j = \pm J; \pm(J-1); \pm(J-2); \dots$$

— $2J+1$ значения.

$g\mu_B m_j B$ — это и есть расщепление по энергиям, которое возникает в магнитном поле B , то есть оно снимает вырождение по J .

Это расщепление показано на рисунке (10.3)

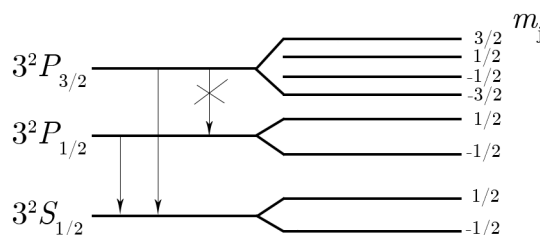


Рис. 10.3

В этом магнитном поле, которое намного меньше спин-орбитального поля, возникает 10 линий. Теперь изучим, какие переходы возможны.

Начнем с $3^2P_{\frac{1}{2}}$. Квант электромагнитной энергии излучен. Это переход из уровня на нижележащий уровень.

Атомов в веществе очень много, и каждый из них по разному возбужден. Поэтому всегда найдется очень много атомов, которые в каком-то конкретном состоянии. Понятно, что эти возбужденные атомы долго находится в этом состоянии не могут и, следовательно, они сбрасывают свое возбуждение в виде излучений соответствующего кванта энергии $\hbar\omega$. Получается, что между этими уровнями должен быть соответствующий квант энергии, который должен поменять свое состояние. Например, такой излучательный переход будет с $3^2P_{\frac{1}{2}}$ на $3^2S_{\frac{1}{2}}$ без внешнего магнитного поля. Интересно, после какие переходы будут осуществляться после расщепления внешним магнитным полем. По правилам отбора изменение Δj должно быть равно либо 0, либо ± 1 , никаких других изменений полного момента не существует. Эти переходы показаны на рисунке (10.4).

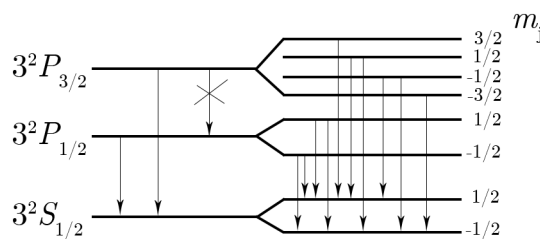


Рис. 10.4

Все эти 10 переходов возможны. Подсчитаем g -фактор этих состояний:

$$g_{\text{верх}} = \frac{4}{3}; \quad g_{\text{ниж}} = \frac{2}{3}.$$

m_J	gm_J
$\frac{3}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{3}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$	-1

Посчитаем энергию переходов:

$$E_1 - E_3 = [(E_{01}^* + g_1 m_{J_1} \mu_B B) - (E_{03} + g_3 m_{J_3} \mu_B B)] = (E_{01} - E_{03}) + (g_1 m_{J_1} - g_3 m_{J_3}) \mu_B B,$$

где E_{01} — энергия в отсутствие магнитного поля ($B = 0$).

$$\omega = \omega_0 + \frac{\mu_B B}{\hbar} (g_1 m_{J_1} - g_3 m_{J_3}).$$

Для этих двух уровней будет 6 линий перехода. Определим их. Частота (длина) волны соответствующего перехода известна (5890 Å), а у короткой — 5896 Å.

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{\mu_B B}{\hbar} (g_1 m_{J_1} - g_3 m_{J_3}) =$$

$$\omega_0 + \frac{\mu_B B}{\hbar} \left(1; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -1 \right) \text{ — дополнительная частота.}$$

Задача 6.21. Спектр поглощения

При переходе $P \rightarrow S$ из возбужденного состояния атома в основное испускается дублет $\lambda_1 = 455,1$ нм и $\lambda_2 = 458,9$ нм. Какие линии, соответствующие переходу $^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow ^2P_{\frac{3}{2}}$, будут наблюдаться в спектре поглощения газа, состоящего из таких атомов, при наложении магнитного поля 50 кГс при температуре $T = 0,5$ К?

Решение.

Данный переход $^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow ^2P_{\frac{3}{2}}$ не является излучательным, а является поглощательным.

Рассмотрим схему некоторого опыта. Он показана на картинке (10.5).

В камеру помещается кусок натрия, снизу помещается приспособление для обогрева. При нагревании натрия испаряется, возникают пары натрия, и в этих парах пропускают свет. Дальше ставят две призмы и наблюдают, как в желтой области (свет белый) возникает черный провал. Дублета не будет видно. Такой спектр и называется поглощательным.

Вернемся к задаче. Из перехода из возбужденного состояния в основное возникает дублет, известны его линии. Покажем это расщепление на рисунке (10.6).

Посмотрим на важность температуры. Рассмотрим ΔU_{LS} (спин-орбитальное взаимодействие):

$$\Delta U_{LS} = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda.$$

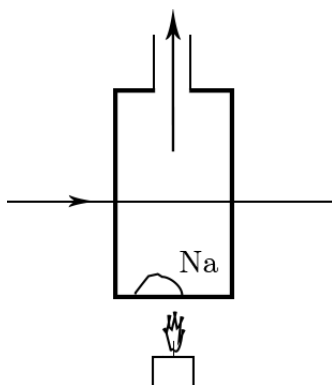


Рис. 10.5

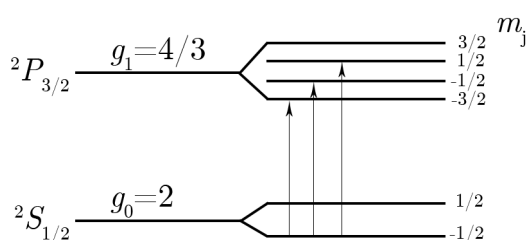


Рис. 10.6

Получим изменение в энергии:

$$\Delta U_{LS} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Теперь посчитаем

$$\mu_B B = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ эВ},$$

$$kT = 4 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \ll \mu_B B.$$

Это означает, что при температуре $T = 0,5 \text{ К}$ при наложении внешнего поля на этот газ все атомы последнего будут находиться на нижнем уровне. Если температура будет выше ($\sim 300 \text{ К}$), тогда будут заполнены оба уровня (состояния), можно будет наблюдать больше линий. Требуется исследовать линии, направленные в $^2P_{3/2}$. Получится 3 линии. Все молекулы газа при этой температуре находятся внизу, и при наложении поля возможны только эти три линии перехода.

Было показано, что $\mu_B \ll \Delta U_{LS}$. Следовательно, будет работать **сложный эффект Зеемана**, магнитное поле слабое.

Подсчитаем энергии этих состояний:

$$\begin{aligned} E_B &= \mu_B B (g m_{J_{\text{кон}}} - g m_{J_{\text{нач}}}), \\ &= \mu_B B \begin{cases} \frac{2}{3} - (-1) = \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3} \\ -2 + 1 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Простой эффект Зеемана

Теперь рассмотрим **сильное магнитное поле**. Скажем, как ставится опыт по эффекту Зеемана. Он еще классифицируется на **продольный** и **поперечный**.

Схема опытов показана на рисунке (10.7).

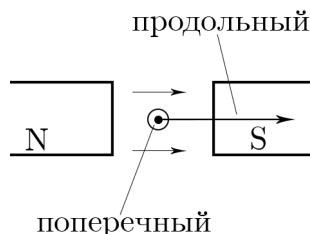


Рис. 10.7

Рассматривается только поперечный эффект. Когда магнитное поле сильное, наблюдается только 3 линии, поэтому и называется **простой эффект Зеемана**. Простота заключается в том, что наблюдается только 3 линии, а не большое множество последних. Более того, оказывается, что эти соответствующие частоты не зависят от h , то есть этот эффект можно объяснить с классических молекулярных представлений, не прибегая к квантовой механике.

Итак, простой эффект наблюдается, когда

$$B \gg B_{\text{внутр}} \quad (\text{в сильных магнитных полях}).$$

Линии, которые наблюдаются в поперечном эффекте показаны на рисунке (10.8).

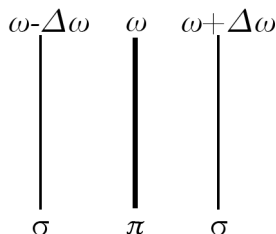


Рис. 10.8

ω — частота нерасщепленной линии. Ее интенсивность в два раза больше σ -линий. Это линии линейно-поляризованного света. Колебание в σ -линиях перпендикулярно полю B , а в π -линиях направлено по полю B .

Линии, получаемые в продольном эффекте, показаны на рисунке (10.9).

Эти две линии дают циркулярно-поляризованный свет, вращающийся в разные стороны. Третьей линии нет.

Теперь поймем, почему в поперечном эффекте возникают 3 линии в сильном магнитном поле.

Напишем, чему равен магнитный момент атома:

$$\mu = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{e\hbar}{2mc}(\vec{L} + 2\vec{S}),$$

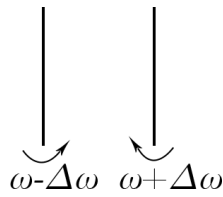


Рис. 10.9

так как g -фактор \vec{L} равен единице, а $g_S = 2$.

В сильном магнитном поле не образуется общий g . Каждый расщепляется по отдельности. μ_L отдельно, а μ_S отдельно. J не квантуется, сильное поле не позволяет объединиться в полный магнитный момент.

Энергия равна

$$E = E_0 + \mu_B B(m_L + 2m_S).$$

Запишем правила отбора:

$$\Delta m_L = \pm 1 \text{ или } 0,$$

$$\Delta m_S = 0, \text{ т. е. спин не переворачивается.}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \pm \frac{\mu_B}{\hbar} = \pm \frac{eB}{2mc}, \text{ или } 0.$$

Можно ввести ларморовскую частоту прецессии Ω_L :

$$\Omega_L = \frac{eB}{2mc}.$$

Электрон в магнитном поле вращается с частотой $\frac{eB}{mc}$.
Нарисуем 3 линии. Они показаны на рисунке (10.10).

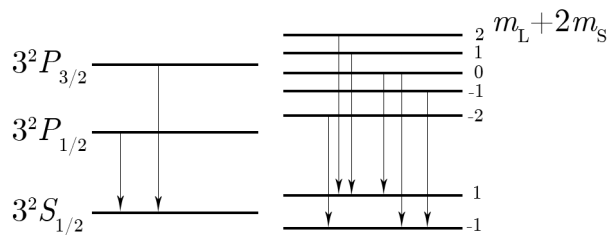


Рис. 10.10

Эти линии не расщепляются, так как дополнительная энергия много больше энергии спин-орбитального взаимодействия.

$m_L + 2m_S$ распишем в таблице:

$m_L + 2m_S$	m_L	m_S
2	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$
0	± 1	$\pm \frac{1}{2}$
-1	0	$-\frac{1}{2}$
-2	-1	$-\frac{1}{2}$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Возможные переходы изображены на рисунке (10.10). Там шесть линий. На самом деле их три, а не шесть, потому что у некоторых расстояния одинаковы (например, у первой и четвертой).

Задача 6.31. Атомарный водород в магнитном поле

Атомарный водород помещен в магнитное поле 2 Тл, много большее характерного поля атома, т. е. магнитного поля атома, действующего на электрон. Определить максимальную дополнительную энергию (в эВ), которую приобретает атом в состоянии с $n = 3$ и нарисовать картину расщепления этого уровня.

Решение.

Так как $n = 3$, то $l = n - 1 = 2$. Следовательно, m_L меняется от 2 до -2 , а m_S от $\frac{1}{2}$ до $-\frac{1}{2}$. Тогда максимальное значение $m_L + 2m_S$ равно трем.

Нарисуем таблицу:

$m_L + 2m_S$	m_L	m_S
3	2	$\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$
1	2	$-\frac{1}{2}$
0	1	$-\frac{1}{2}$
0	-1	$\frac{1}{2}$
-1	0	$-\frac{1}{2}$
-1	-2	$\frac{1}{2}$
-2	-1	$-\frac{1}{2}$
-3	-2	$-\frac{1}{2}$

Найдем ΔU :

$$\Delta U = 3\mu_B B = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

ЛЕКЦИЯ 11

МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС. ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ

1. Правила отбора

В отсутствие магнитного поля наблюдаются две линии перехода натрия.
Это продемонстрировано на рисунке (11.1).

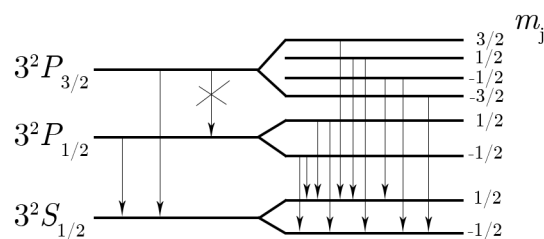


Рис. 11.1

Переход с $3P_{3/2}$ на $3P_{1/2}$ запрещен.

В противном случае, если они были реализуемы, то были бы осуществлены за счет поворота спина.

Работают правила отбора:

$$\Delta m_S = 0,$$

$$\Delta m_L = 0 ; \pm 1.$$

Но за счет изменения спинового квантового числа переход очень маловероятен, т. е. вероятность перехода с изменением спинового квантового числа в миллион раз меньше вероятности перехода без изменения спинового квантового числа. Такие переходы можно инициировать только специфическими способами. Инициация называется **магнитный резонанс**.

2. Прецессия атома в магнитном поле

Рассмотрим качественную полуклассическую модель магнитного резонанса.

\vec{J} совершает в магнитном поле прецессионное вращение. Вырождение снимается за счет квантования этого вектора \vec{J} .

Вращение \vec{J} продемонстрировано на рисунке (11.2)

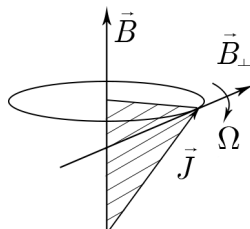


Рис. 11.2

Магнитный момент атома (ядра) есть:

$$\vec{\mu} = g\Gamma\vec{J} = g\frac{e}{2mc}\vec{J} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J},$$

где Γ — гиромагнитное отношение.

Напомним, что:

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar,$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar,$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar,$$

где J, S и L — квантовые числа

Такое вращение напоминает гироскоп со своим уравнением вращения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{L}],$$

где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость прецессии, \vec{L} — механический момент.

Атом является таким же объектом, как и гироскоп.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{J} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{J}].$$

С другой стороны,

$$\dot{\vec{J}} = [\vec{\mu} \cdot \vec{B}],$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = g\frac{\mu_B}{\hbar}[\vec{J} \cdot \vec{B}] = -[\vec{J} \cdot \vec{\Omega}],$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{B}.$$

Напомним, как ведет себя виток с током в магнитном поле \vec{B} .

Это продемонстрировано на рисунке (11.3).

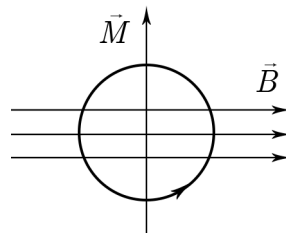


Рис. 11.3

Магнитный момент направлен на читателя. На виток действует механический момент. Из-за этого виток начинает поворачиваться, причем величина механического момента максимально в случае, когда поле лежит в плоскости витка.

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c} \vec{S},$$

$$\Rightarrow \vec{M} = [\vec{\mu} \cdot \vec{B}].$$

Из выражения для угловой скорости получаем:

$$\vec{\Omega} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{B},$$

$$\Rightarrow \hbar\Omega = g\mu_B B.$$

3. Магнитный резонанс

Была получена формула для прецессии витка в магнитном поле. Теперь займемся исследованием магнитного резонанса. То есть нужно добиться переворота спина, или переворота \vec{J} .

С классической точки зрения надо воздействовать другой внешней частотой, наложить на это поле еще какое-то переменное магнитное поле, которое заставило бы сделать вращение в другую сторону. Это можно сделать. Если воздействуем B_{\perp} , то у витка возникнет еще одна прецессия вокруг этого поля. И если ее частота будет равна Ω , то она будет называться **резонансной**. Тогда спин перевернется, и возникнет этот запрещенный переход. В конце концов, формула для резонансной частоты примет вид

$$\hbar\Omega_{рез} = g\mu_B B.$$

Задача 6.63. Электронный парамагнитный резонанс

Определить намагниченность насыщения M_0 образца металлического диспрозия (плотность $\rho = 8,55 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$) при температуре, близкой к абсолютному нулю. Полный момент иона диспрозия Dy^{3+} $J = \frac{15}{2}$, а электронный парамагнитный резонанс на ионах диспрозия наблюдается в магнитном поле $B_{рез} = 1000 \text{ Гс}$ на частоте $\nu = 1,9 \cdot 10^9 \text{ Гц}$

Решение.

У диспрозия есть f -оболочка, которая не полностью заполнена, и по существу определяет свойства этого атома диспрозия.

Намагниченность — это магнитный момент единицы объема.

Насыщение — это состояние, при котором все ионы образца ориентированы одинаково, у них магнитный момент направлен в одну сторону. Напомним, что

$$\frac{m}{A} = \frac{N_A}{N} \Rightarrow N = N_A \frac{m}{A}.$$

Концентрация есть:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{A} [\text{см}^{-3}].$$

Намагниченность:

$$M_0 = n\mu = \frac{N_A \rho}{A} \mu.$$

Магнитный момент иона есть:

$$\mu = g\mu_B I.$$

Найдем магнетон Бора:

$$\begin{aligned} \hbar\Omega_{\text{рез}} &= g\mu_B B \Rightarrow g\mu_B B = \frac{\hbar\Omega_{\text{рез}}}{B}, \\ \mu &= \frac{\hbar\Omega_{\text{рез}}}{B} \Rightarrow M_0 = \frac{N_A \rho}{A} \frac{\hbar\Omega_{\text{рез}}}{B} I = 2980 \text{ Гс}. \end{aligned}$$

Задача 6.62. Электронный парамагнитный резонанс

ЭПР обусловлен переходами между подуровнями с различными проекциями магнитного момента. Найти частоту ЭПР для солей трехвалентного празеодима в магнитном поле $B = 0,1 \text{ Тл}$. Электронная конфигурация Pr^{3+} представляет собой полностью заполненные оболочки $\text{Xe} + 4f^2$.

Решение.

Запишем **правило Хунда**:

$$j = |l - s|,$$

если заполнено меньше половины оболочки, и $j = |l + s|$, если заполнено больше половины оболочки.

Нарисуем f -оболочку празеодима. Она представлена на (11.4).

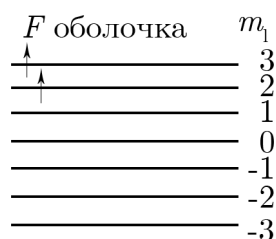


Рис. 11.4

Так как у него 7 подуровней, то для полного заполнения этих подуровней должно быть 14 электронов. Если на одном подуровне есть один электрон, то по правилу Хунда у него должно быть максимальное значение s .

В данном случае два электрона, соответственно, для квантовых чисел получается:

$$L = 3 + 2 = 5,$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$J = |L - S| = 4.$$

Для этого элемента получаем:

Мультиплетность равна $2S + 1 = 3$.

Напишем терм этого элемента:

$$^3\text{He}_4.$$

Запишем g -фактор этого состояния:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{4}{5}.$$

По правилам отбора Δm_J может быть 0, либо ± 1 , а этом случае реализуется именно случай $\Delta m_J = 1$.

$$h\nu_{\text{рез}} = g\mu_B B \Delta m_J \Rightarrow \nu_{\text{рез}} = \frac{g\mu_B B}{h} = 1,12 \cdot 10^9 \text{ Гц}.$$

Запишем электронную конфигурацию празеодима:

$$_{54}\text{Xe} + 4f^2 5s^2 + 5p^6.$$

4. Ядро

Приступим к представлениям о ядре. В ядерной физике характерные **атомные размеры** — ангстремы (10^{-8} см), характерные **ядерные размеры** — фемтометры (10^{-13} см). Если представить, что у ядра размер 1 см, то электрон вращается на расстоянии 1 км.

Вычислим радиус ядра:

$$R = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} [\text{фм}] = r_0 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} [\text{см}],$$

где r_0 принимает значения $1,2 \div 1,5$. Часто принимается нечто среднее: $r_0 = 1,3$.

Ядро $^A_Z\text{Я}$ характеризуется двумя числами, где A — число нуклонов, которое может быть только целым. Поэтому $A = Z + N$, где Z — число протонов, а N — число нейтронов. Запишем массы нуклонов:

$$p : m_p = 1,007276 \text{ а. е. м} \rightarrow 938,27 \text{ МэВ},$$

$$n : m_n = 1,008665 \text{ а. е. м} \rightarrow 939,565 \text{ МэВ}.$$

Будем считать, что $m_p \approx m_n = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г.

$$1 \text{ а. е. м} = \frac{1}{12} \cdot M_{^{12}_6\text{C}} = 931,494 \text{ МэВ} \rightarrow 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

Обратим внимание на то, что была сделана попытка свести в одно целое частицы с одинаковым зарядом. Причем приблизили на 10^{-13} см, а там возникли колоссальные кулоновские силы отталкивания. Эти кулоновские силы отталкивания чрезвычайно велики. Отсюда можно сделать вывод, что существует какая-то другая сила притяжения, которая, как показывает опыт, превосходит кулоновские силы в сотни раз. Она называется **сильным взаимодействием**. Часть исходной массы тратится на это взаимодействие, это называется **энергией связи**.

Итак,

$$E_{св} = (zm_p + Nm_n) - M(Z, A)c^2.$$

Нарисуем график приведенной энергии связи (энергии связи в расчете на один нуклон) от атомной массы. Она представлена на рисунке (11.5).

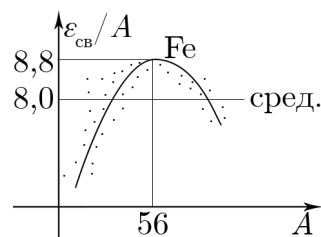


Рис. 11.5

Изотопы — это есть элементы с одним и тем же Z , но с разными A . У каждого элемента таких изотопов очень много, которые встречаются в природе и живут какое-то время жизни. Есть долгоживущие изотопы, а есть короткоживущие изотопы, которые живут меньше секунды. **Характерное ядерное время** — это время пролета со скоростью света размера ядра. Заметим, что в атомной физике характерное ядерное время меняется от 10^{-23} с до бесконечности. Например, электрон живет бесконечно, не разрушается. Протон может распасться, а нейтрон в изолированном состоянии живет примерно 10 минут.

Как видно, на графике есть максимум, который принадлежит железу и который равен $8,8 \left[\frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \right]$. Но следует понимать, что на самом деле график не четкий, а размытый из-за различий между изотопами.

Существуют **магические числа** (например, ядро гелия обладает магическим числом), при которых наблюдаются локальные максимумы. Для легких элементов выгодно синтезироваться. При слиянии легких частиц возможно выделение энергии, т. к. они находятся при возрастающей зависимости, когда еще энергия связи растет. Энергия выделяется в виде кинетической энергии результатов реакции синтеза. На спаде этой кривой выгодна реакция деления. Которое так же будет сопровождаться выделением энергии. Когда ядро разделяется, появляется избыточная энергия в виде кинетической энергии осколков деления. Эти процессы используются в ядерной энергии. Средняя энергия равна $8 \left[\frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \right]$.

5. Капельная модель ядра

Займемся вопросом, как живет ядро и как описывать его свойства. Для этого есть многочисленные ядерные модели. Будем исследовать капельную и оболочечную модели. Итак,

напишем формулу Вайцзеккера для нахождения энергии связи ядра:

$$E_{св} = \epsilon_1 \cdot A - \epsilon_2 \cdot A^{\frac{2}{3}} - \epsilon_3 \cdot \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \epsilon_4 \cdot \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \epsilon_5 \cdot \frac{\delta}{A^{\frac{3}{4}}}.$$

Объясним физический смысл этих коэффициентов.

Первый член отвечает за **объемную энергию**. Чем больше ядро, тем больше там энергии. А следующие члены являются поправками, которые получаются из того, что ядро представляется в виде капли. **У каждой капли есть поверхность**, и площадь этой поверхности есть $A^{\frac{2}{3}}$. За это отвечает второй член.

Третий член — это **кулоновская энергия**.

Четвертый член называется **изотопической дорожкой**. Обратим внимания на конкретные ядра.

У первых ядер число протонов равно числу нейтронов. Начиная с характерных изотопов хлора, у ядер появляется лишний нейтрон. Например, уран имеет целую серию изотопов. У урана-238, наиболее стабильного изотопа, порядковый номер равен 92. Как показывает опыт, все тяжелые ядра обладают избытком нейтронов; их больше, чем протонов. Эти лишние нейтроны уменьшают энергию связи. Причем, чем больше нейтронов, тем меньше энергия связи.

И наконец, последний — **спиновый член**.

Числа $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$ — это подгоночные коэффициенты. Будем пользоваться классической подгонкой. Она выглядит таким образом:

$$\epsilon_1 = 15,75 \text{ МэВ},$$

$$\epsilon_2 = 17,8 \text{ МэВ},$$

$$\epsilon_3 = 0,71 \text{ МэВ},$$

$$\epsilon_4 = 23,7 \text{ МэВ},$$

$$\epsilon_5 = 34 \text{ МэВ}.$$

На самом деле, эти коэффициенты отличаются от тех, которые представлены здесь. Но эта модель не имеет важного значения, поэтому будем пользоваться приближенными значениями.

δ принимает такие значения:

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{если } Z — \text{четное, } N — \text{четное;} \\ 0, & \text{если } Z — \text{четное, } N — \text{нечетное;} \\ -1, & \text{если } Z — \text{нечетное, } N — \text{нечетное;} \end{cases}$$

Скажем пару слов о магических числах. Они равны:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Существуют еще дважды магические числа. Например $^{208}_{82}\text{Pb}$ обладает двумя магическими числами (82 протонов, 126 нейтронов), поэтому обладает повышенной энергией связи.

Задача 7.5. Формула Вайцзеккера

С помощью формулы Вайцзеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном нечетном значении A . Выяснить, каков характер активности у ядер ^{27}Mg , ^{29}P , ^{37}K , ^{67}Cu .

Решение.

Ядра-изобары — это ядра, имеющие одинаковые A , но разные символы (разные Z). Например, $^{14}_6\text{C}$, $^{14}_7\text{N}$, $^{14}_8\text{O}$.

Легкие ядра избыток своей энергии сбрасывают в виде β -распадов — это их основной способ сброса лишней энергии. β -распад — это или излучение электрона, или излучение позитрона, или К-захват.

В данной задаче исследуется ^{27}Mg . У него 5-й член отсутствует. От Z зависят только третий и четвертый члены.

Продифференцируем энергию связи и приравняем к нулю:

$$\epsilon'_{\text{св}}(Z, A)|_Z = 0.$$

$$0 = -\epsilon_3 \cdot \frac{2Z}{A^{\frac{1}{3}}} - \epsilon_4 \cdot \frac{(A - 2Z)(-2)}{A}.$$

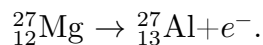
Заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары равен:

$$Z_0 = \frac{\frac{A}{2}}{1 + 0,0075A^{\frac{2}{3}}}.$$

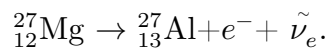
Подставим для Mg:

$$Z_0 \approx 13.$$

Магний переходит в алюминий. Он должен излучить электрон. Это называется β -минус распад.



Исследования β -распадов показали, что в одиночку электрон не может вылететь, при этом выделяется еще частица, которая называется нейтрино. То есть, правильная реакция выглядит следующим образом:



ЛЕКЦИЯ 12

ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Задача 7.14. Оболочечная модель ядра

Согласно оболочечной модели ядра нейтроны и протоны независимо заполняют потенциальную яму. Определить число нуклонов A , которые могут располагаться на трех первых ядерных оболочках, считая потенциальную яму трехмерной параболической.

Решение.

Нарисуем трехмерную параболическую яму. Она представлена на рисунке (12.1).

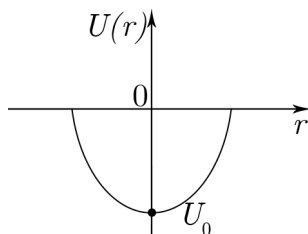


Рис. 12.1

Форма потенциала — это коллективный результат взаимодействия, то есть этот потенциал определяет не какое-то определенное внешнее поле, а создают все частицы вместе.

Запишем потенциал, в котором находятся эти протоны и нейтроны:

$$U(r) = U_0 + \frac{M\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi + U\psi = E\psi.$$

Представим, что все три координаты x , y и z являются абсолютно независимыми. Отсюда следует, что решение этого уравнения (волновая функция), которое является

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2

функцией от x , y и z , должно быть равно:

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Квадрат модуля волновой функции — это вероятность найти данную частицу в какой-то определенной точке пространства. Как известно из теории вероятности, независимые вероятности умножаются. Это было использовано здесь.

Подставим эту волновую функцию в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \cdot (X''YZ + Y''XZ + Z''XY) + UXYZ = EXYZ.$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Можно разбить последнее выражение на три уравнения:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{X''}{X} + \frac{M\omega^2 x^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{Y''}{Y} + \frac{M\omega^2 y^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{Z''}{Z} + \frac{M\omega^2 z^2}{2}\right) = E - U_0.$$

Уравнение состоит из трех частей. Каждая из них является **уравнением Шредингера одномерного осциллятора**.

$$-\frac{\hbar^2}{2M}X'' + \frac{M\omega^2 x^2}{2}X = \frac{E - U_0}{3}X.$$

Это и есть уравнение осциллятора. Решение этого уравнения есть:

$$\hbar\omega \cdot \left(n_x + \frac{1}{2}\right).$$

Уровни энергии будут эквидистантны. Просуммируем для всех координат:

$$\hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2}\right) = E - U_0,$$

$$E_N = U_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2}\right),$$

$$N = n_x + n_y + n_z.$$

Таким образом, получено решение для трехмерного гармонического осциллятора.

Согласно **оболочечной модели ядра** протоны и нейтроны создают самосогласованный потенциал, то есть каждый из этих частиц участвует в создании этого потенциала, и всякий лишний нуклон меняет вид этого потенциала. Требуется определить число нуклонов, которые могут располагаться на первых трех ядерных оболочках, считая яму трехмерной. Для легких атомов нарисованный потенциал правильный. Ниже парабола начинает искажаться, сначала превращаясь в «кастрюлю», а потом — в прямоугольную яму.

Построим таблицу для ядра.

N	n_x	n_y	n_z	Число нуклонов	Элемент
0	0	0	0	$1 \times 2 = 2 \Rightarrow Z=N=2$	${}^4_2\text{He}$ (α -частица)
1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	$3 \times 2 = 6 \Rightarrow Z=N=8$	${}^{16}_8\text{O}$
2	2 0 0 1 0 1	0 2 0 1 1 0	0 0 2 0 1 0	$6 \times 2 = 12 \Rightarrow Z=N=20$	${}^{40}_{20}\text{Ca}$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Первые три магические числа хорошо объясняются оболочечной теорией:

$$2, 8, 20.$$

А следующие не объясняются:

$$28, 50, 82, 126.$$

Если либо Z , либо N равны этим числам, то элемент обладает повышенной энергией, потому что у него получаются полностью заполненные ядерные оболочки. Оболочечная модель объяснила, почему первые три квантовые числа магические.

Задача 7.15. Трехмерный гармонический осциллятор

Простейшей оболочечной моделью ядра является трехмерный гармонический осциллятор. Считая, что потенциальная яма ядра имеет глубину $U_0 = -70$ МэВ, а $U(R_0) = 0$, где R_0 — радиус ядра, оценить энергию связи нуклона для ядра кислорода $^{16}_8\text{O}$.

Решение.

Нарисуем потенциал:

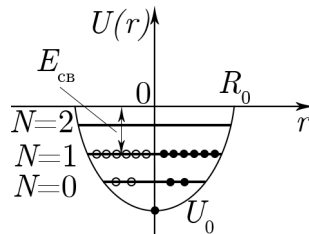


Рис. 12.2

Энергия связи — это необходимая энергия для того, чтобы вытащить (освободить) из ядра один из нуклонов. Взаимодействие между нуклонами — это **сильное взаимодействие**.

Оценим радиус ядра.

$$R = 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt[3]{A} = 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt[3]{16} = 3,3 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Потенциальная энергия трехмерного гармонического осциллятора:

$$U = U_0 + \frac{M\omega^2 r^2}{2} \text{ при } r \gg R_0,$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}}.$$

Полностью заполнены две оболочки, соответственно, со второго уровня нужно достать нуклон, тем самым совершив работу против сильного взаимодействия.

$N = 0$ и 1 полностью заполненные оболочки.

Тогда для энергии связи получается:

$$\epsilon_{св} = |U_0| - \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega = |U_0| - \frac{5}{2} \hbar \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}} \simeq 12 \text{ МэВ.}$$

1. Правила отбора

Рассмотрим правила отбора и формирование оболочек. Найдем, какой момент импульса уносит излученный γ -квант.

Существует термин — **спин фотона**. Этот термин неправильный, потому что понятие спин применяется только к массовой частице, и оно означает момент собственного вращения в его собственной системе отсчета. Фотон летит со скоростью света, и поэтому неподвижных фотонов не бывает. Не бывает такой системы отсчета, в которой фотон был бы неподвижен. Соответствующий правильный термин — спиральность. Момент импульса излученной частицы (момент собственного вращения) может быть либо по направлению движения, либо против направления движения. Следовательно, фотон будет называться либо **левоспиральным**, либо **правоспиральным**. Момент импульса обозначается буквой j . Это наглядно показано на рисунке (12.3).

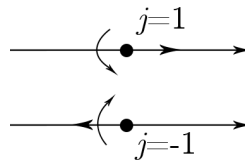


Рис. 12.3

Как известно, **дипольный момент**, меняющейся во времени, излучает. Но в ядре заряды также могут расположиться так, что возникнет квадруполь. В этом случае возникнет **квадрупольный меняющийся момент**, и из-за этого спин может быть равен 2.

Когда ядро излучает, в этом процессе должен выполняться закон сохранения момента импульса, запишем его:

$$\vec{J}_{\text{нач}} = \vec{J}_{\text{кон}} + \vec{J}_{\text{ф}}.$$

На языке квантовых чисел это будет выглядеть следующим образом:

$$|J_{\text{нач}} - J_{\text{кон}}| \ll j \ll J_{\text{нач}} + J_{\text{кон}}.$$

Рассмотрим понятие **четность**. Четность связана с зеркальным отображением, то есть переходом с положительных координат к отрицательным. Функции, как известно, бывают четные и нечетные.

При инверсии:

$$x' \rightarrow -x,$$

$$y' \rightarrow -y,$$

$$z' \rightarrow -z,$$

$$\psi(x', y', z') = p \cdot \psi(x, y, z).$$

Еще раз применим операцию четности:

$$p \cdot \psi(x', y', z') = p^2 \cdot \psi(x, y, z) = \psi(x, y, z),$$

$$p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1.$$

Следовательно, четность может быть равна ± 1 .

Определим, **какую четность может иметь фотон**. Фотоны бывают двух типов — **электрический** и **магнитный**. При электрическом излучении фотона происходит за счет изменения орбитального момента. А магнитные фотоны связаны с переворотом магнитного момента, то есть спина.

Для разных фотонов с моментом импульса j имеем:

$(-1)^j$ — электрическое EJ — поле фотона,

$(-1)^{(j+1)}$ — магнитное MJ — поле фотона.

Соответственно, фотоны могут быть E1, M1, E2, M2 и т. д.

$j = 1$ — дипольное излучение,

$j = 2$ — квадрупольное излучение,

$j = 3$ — октупольное излучение.

Случай $j = 0$ (монополь) не может быть реализован, так как электромагнитные волны поперечные, и для них не имеется никакой симметрии.

Напишем в порядке убывания вероятности появления разных фотонов.

E1, E2, M1, E3, M2.

Также должно выполняться соотношение:

$$P_{\text{нач}} \cdot P_{\text{кон}} = \begin{cases} (-1)^j - E_{\text{фот}}, \\ (-1)^{j+1} - M_{\text{фот}}. \end{cases}$$

Четность атома или ядра определяется по орбитальному моменту:

$$(-1)^{\sum l_i}.$$

Следовательно, четность полностью заполненных оболочек положительна.

Задача. Желтый дублет натрия

Желтый дублет натрия (Na) состоит из двух переходов:

$$3P_{\frac{3}{2}} (\text{мультиплетность} = 2) \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$3P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}}.$$

Найдем, какие линии будут видны на опыте, и определим тип этих фотонов.

Решение.

Первый переход:

$$3P_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| \ll j \ll \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right| \Rightarrow 1 \ll j \ll 2.$$

Следовательно, возможны два перехода:

$$j = 1 \text{ и } j = 2.$$

Проверим четность. Вспомним, чему равен орбитальный момент в разных состояниях:

$$l = 0 \text{ (} s \text{ – состояние),}$$

$$l = 1 \text{ (} p \text{ – состояние),}$$

$$l = 2 \text{ (} d \text{ – состояние),}$$

$$l = 3 \text{ (} f \text{ – состояние).}$$

В начальном состоянии один p -электрон, поэтому орбитальный момент равен 1.

$$P_{нач} \cdot P_{кон} = \begin{cases} (-1)^j, \\ (-1)^{j+1}, \end{cases}$$

$$P_{нач} \cdot P_{кон} = (-1)^1 \cdot (-1)^0 \Rightarrow -1 = (-1)^j.$$

Следовательно, так как для j возможны только 1 или 2, то $j = 1$. Если фотон электрический, то он принадлежит к типу E1.

Для магнитного фотона:

$$-1 = (-1)^{j+1}.$$

Соответственно, если фотон магнитный, то он принадлежит к типу M2. Таким образом, учитывая то, что вероятность M2 чрезмерно маленькая, из закона сохранения четности волновой функции было получено, что искомый фотон типа E1.

Посмотрим вторую линию

$$3P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \ll j \ll \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| \Rightarrow 0 \ll j \ll 1,$$

$$j = 1.$$

Из закона сохранения четности:

$$(-1)^1(-1)^0 = (-1)^j.$$

Задача 7.58. Незаполненная оболочка ядра

Нуклон из перезаполненной оболочки ядра углерода $^{17}_8\text{O}$, поглощает M1-фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Решение.

Число слева орбитального квантового числа не имеет никакого физического смысла, оно означает, что данное состояние в эксперименте наблюдалось в первый раз.

Нарисуем нейтронные и протонные ямы для $^{16}_8\text{O}$. Это сделано на рисунке (12.4).

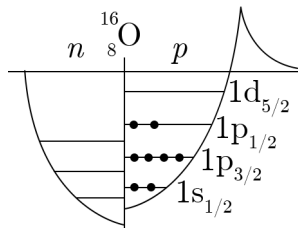


Рис. 12.4

Для протонов существует кулоновский барьер. Каждая из заряженных частиц имеет собственный спин, то есть магнитный момент. У них есть также орбитальные моменты. Вспомним из курса электричества, что два параллельных магнитных моментов притягиваются. Следовательно, если орбитальный момент и спин параллельны, то потенциальная яма уширяется, и нуклон опускается ко дну. Наоборот, когда моменты антипараллельны, то самосогласованная яма сужается, а уровень поднимается вверх.

Тогда оказывается, что уровень $P_{\frac{1}{2}}$ выше, чем $P_{\frac{3}{2}}$.

Расщепление уровней показано на рисунке (12.5).

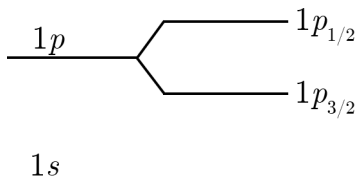


Рис. 12.5

Распишем, как связаны между собой квантовые числа N и l .

$$N \text{ и } l,$$

$$l: N, N-2, \dots, 1 (0),$$

$$N=0 \quad l=0 \quad \longrightarrow \quad 1s,$$

$$N=1 \quad l=1 \quad \longrightarrow \quad 1p,$$

$$N=2 \quad l=2, 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2s, \\ 1d, \end{cases}.$$

$$N = 3 \quad l = 3, 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 1f, \\ 2d. \end{cases}.$$

Заполним оболочки. Это проделано на рисунке (12.6).

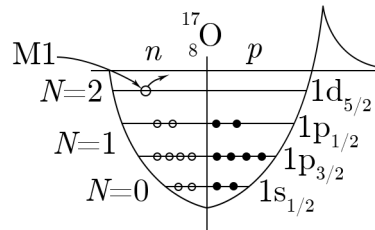


Рис. 12.6

Когда нуклон поглощает M1-фотон, он переходит на некоторый уровень выше. Найдем, куда фотон перейдет, используя все законы сохранения.

Известно, что для M1-фотона $j = 1$.

Запишем правила отбора:

$$|I_{\text{кон}} - I_{\text{нач}}| \ll j \ll I_{\text{кон}} + I_{\text{нач}}.$$

Начальное состояние — $1d_{5/2}$.

$$\Rightarrow \left| I_{\text{кон}} - \frac{5}{2} \right| \ll 1 \ll I_{\text{кон}} + \frac{5}{2}.$$

Закон сохранения четности будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\text{кон}} \cdot P_{\text{нач}} &= (-1)^{j+1}, \\ \Rightarrow (-1)^2 \cdot P_{\text{кон}} &= (-1)^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{кон}} = +1, \\ \Rightarrow l^{\text{кон}} &= 2 \text{ или } 4. \end{aligned}$$

Нужен минимальный l .

Для $I_{\text{кон}} = \frac{3}{2}$ все соотношения выполняются:

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right| \ll 1 \ll \frac{3}{2} + \frac{5}{2}.$$

Следовательно, нужный уровень есть $1d_{3/2}$.

Задача 7.64. Ядерный магнитный резонанс

В медицинской томографии внутренних органов используется метод ЯМР на протонах, входящих в состав воды, а для томографии легких — на ядрах газообразного ${}^3\text{He}$ при его вдыхании. Определить разницу между экспериментальными и теоретическими значениями магнитного момента ядра ${}^3_2\text{He}$, если сигнал резонанса наблюдается во внешнем поле $B = 1,5$ Тл на частоте $\nu = 48,75$ МГц. Спин ядра и его магнитный момент вычислять по однонуклонной оболочечной модели.

Решение.

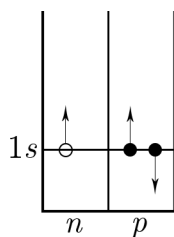


Рис. 12.7

Нарисуем яму для ${}^3_2\text{He}$.

Найдем, чему равен спин такого ядра. Спины протонов взаимоуничтожаются. Следовательно, спин такого ядра $I = \frac{1}{2}$.

Найдем магнитный момент такого ядра:

$$(\mu_{He})_{\text{теор}} = g_{sn}\mu_{яд}I,$$

где g_{sn} — спиновый g -фактор нейтрона.

Известно, что $g_{sn} = -3,82$. Так как $I = \frac{1}{2}$, то:

$$(\mu_{He})_{\text{теор}} = -1,91\mu_{яд}.$$

Из условия резонанса находим $(\mu_{He})_{\text{эксп}}$:

$$\hbar\nu_{\text{рез}} = g\mu_{яд}B \Rightarrow g\mu_{яд} = \frac{\hbar\nu_{\text{рез}}}{B} \Rightarrow (\mu_{He})_{\text{эксп}} = g\mu_{яд}I = \frac{\hbar\nu_{\text{рез}}}{B} = -2,13\mu_{яд}.$$

Найдем разницу между теоретическим и экспериментальным данными:

$$\Delta\mu_{He} = |\mu_{\text{эксп}} - \mu_{\text{теор}}| = 0,22\mu_{яд}.$$

ЛЕКЦИЯ 13

РАДИОАКТИВНОСТЬ. ЭФФЕКТ МЕССБАУЭРА. НЕЙТРОНЫ. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

На этой лекции будут рассматриваться **радиоактивность**, α -распад, β -распад и ядерные реакции.

1. Закон радиоактивного распада

Напишем закон радиоактивного распада:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ — вероятность распада в единицу времени.

Размерность $[\lambda] = c^{-1}$.

Решение уравнения радиоактивного распада есть:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Вводится величина $\tau = \frac{1}{\lambda}$ — **время жизни** данного радиоактивного ядра.

Таким образом, получается:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2. Активность

Можно ввести еще одно понятие — **период полураспада**. Вводится оно следующим образом:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \exp\left\{\left(-\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}\right)\right\} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2.$$

Так как $\ln 2 = 0,693$, то период полураспада меньше, чем время жизни.

Произведение $\lambda \cdot N$ — **удельная активность радиоактивного препарата**.

На картинке показан пример радиоактивного распада.

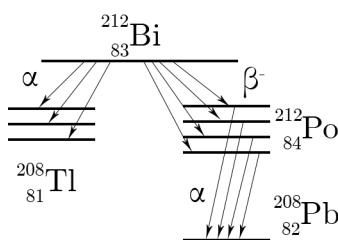


Рис. 13.1

Задача 7.32. Удельная активность

Удельное содержание изотопа ^{14}Ca , усвоенного деревом при его жизни, затем уменьшается вследствие β -распада с периодом полураспада $T_{1/2} = 5700$ лет. Определить возраст t деревянного предмета, обнаруженного при раскопках, если удельная активность ^{14}Ca этого предмета составляет 0,1 от удельной активности свежесрубленного дерева.

Решение.

Ядра $^{14}_6\text{C}$ получают из азота путем взаимодействия с космическим излучением.

λN — число ядер, распадающихся за одну секунду. Удельная активность — это активность, отнесенная к единице массы.

Известно, что:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

С другой стороны,

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{\lambda N(t)}{\lambda N_0} = 0,1 = e^{-\lambda t},$$

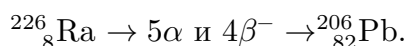
$$\ln 0,1 = -\lambda t \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,1}{\lambda} = -\frac{\ln 0,1 T_{1/2}}{\log 2} = 19000 \text{ лет}.$$

Задача 7.55. Распад

Радий-226 за счет последовательных радиоактивных распадов превращается в устойчивый изотоп свинца ^{206}Pb . Какая масса M гелия выделится за время $t = 1$ месяц из $m = 1$ г радия, находящегося в равновесии со своими продуктами распада? Период полураспада ^{226}Ra составляет $T_{1/2} = 1600$ лет.

Решение.

Реакция протекает таким образом:



Выясним, как можно найти количество альфа-распадов между Ra и Pb. Зная, что промежуточные β -распады массу не уносят, для этого нужно из 226 вычесть 206, и результат поделить на 4, так как альфа-частица состоит из 4-х нуклонов. Получается, что было осуществлено 5 альфа-распадов. Считаем, что все продукты распада находятся в равновесии.

Рассчитаем начальное число ядер:

$$N_0 = \frac{N_A m}{A} = 2,7 \cdot 10^{21}.$$

За время t распадается:

$$N(t) = N_0(1 - \exp\left(-\frac{t \log 2}{T_{\frac{1}{2}}}\right)) \approx N_0 \frac{t \log 2}{T_{\frac{1}{2}}} = 0,97 \cdot 10^{17}.$$

Отсюда масса равна:

$$M = 5N(t)m_{\alpha} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ г}.$$

3. Ядерные процессы

Ядерная реакция — это инициированный процесс, значит, нужно приложить усилия, чтобы этот процесс произошел. **Распад** — это самопроизвольный процесс, то есть нестабильные ядра сами по себе распадаются. Это делается с помощью воздействия какими-то частицами. Обычно это нейтроны, протоны, альфа-частицы. Эти частицы называются снарядами. Они падают на ядро-мишень и инициируют этот процесс. Записывается реакция таким образом:

$$a + X \rightarrow b + Y,$$

где a — снаряд, X — мишень, b — рожденная частица, Y — новое ядро.

Эта реакция записывается еще таким образом:

$$X(a, b)Y.$$

Среди всех этих реакций выделяются две чрезвычайно важные.

Первое — **упругое рассеяние**:

$$a + X \rightarrow a + X.$$

Второе — **неупругое рассеяние**:

$$a + X \rightarrow a + X^*,$$

где X^* — ядро типа X , но возбужденное.

У этого ядра есть избыток энергии, и оно в дальнейшем может сбрасывать эту энергию.

Обозначим $\frac{dN}{dt} = \dot{N}$ — число успешных событий в 1 см³ за 1 с. Размерность \dot{N} будет $[\frac{1}{\text{см}^3 \text{с}}]$. Пусть n_m — концентрация ядер мишени $[\text{см}^{-3}]$. Тогда

$$\dot{N} = \sigma j n_m,$$

где σ — сечение данной реакции (это, в действительности, есть размерная вероятность данного процесса).

Оно выражается в квадратных сантиметрах, или в барнах:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Опишем этот процесс в динамике. Выделим на глубине x отрезок dx . Из потока рассеиваются частицы (выбывают). Это проиллюстрировано на картинке (13.2).

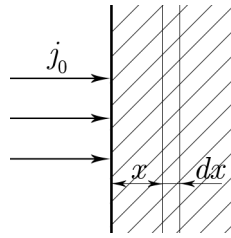


Рис. 13.2

Запишем этот факт:

$$dj = -j(x) \frac{dx}{\lambda},$$

где dj — вероятность вылететь из потока, λ — **длина свободного пробега**.

Вспомним соотношение:

$$\lambda \sigma n = 1.$$

Подставим в соотношение для dj :

$$dj = -n_m \sigma j(x) dx.$$

Тогда для $j(x)$ получаем:

$$j(x) = j_0 e^{-n_m \sigma x}.$$

Расскажем про дифференциальное сечение процесса. Производим реакцию. Она проиллюстрирована на рисунке.

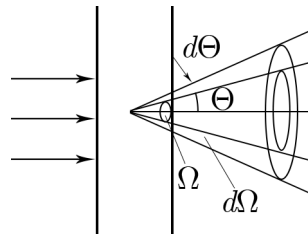


Рис. 13.3

Найдем долю частиц, уходящих в телесный угол $d\Omega$:

$$\dot{N}(\theta) = j n_m d\sigma,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) \left[\frac{\text{см}^2}{\text{стерад}} \right],$$

где $\sigma(\theta)$ — дифференциальное сечение рассеяния.

Поэтому для $\dot{N}(\theta)$ можем написать:

$$\dot{N}(\theta) = j n_m \sigma(\theta) d\Omega.$$



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Задача 8.45. Взаимодействие нейтронов с веществом

При просвечивании детали монохроматическими тепловыми нейтронами с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ на изображении было обнаружено слабое темное пятно, свидетельствующее о наличии внутри детали инородного включения. Контраст изображения (отношение интенсивностей прошедших нейтронов в области включения к соседним однородным областям) был равен 1,26. Какова должна быть длина волны нейтрона, чтобы контраст возрос до 2? Считать, что сечение взаимодействия нейтронов с веществом носит нерезонансный характер.



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Решение.

Тепловой нейтрон — это нейтрон с температурой 300 К. Значит, его энергия равна 0,025 эВ.

$$\text{Контраст} = \frac{I_{\text{прош}}}{I_{\text{сос.одн}}},$$

где через I обозначена интенсивность, $I_{\text{прош}}$ — интенсивность прошедших нейтронов, $I_{\text{сос.одн}}$ — интенсивность соседних однородных частей.

В данной задаче

$$\text{Контраст} = 1,26.$$

После прохождения нейтронов на экране видно светлое пятно. Это проиллюстрировано на картинке (13.4).

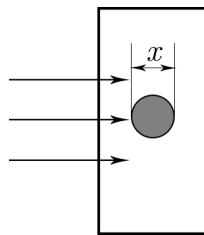


Рис. 13.4

Интенсивность потока нейтронов в разных точках разная.

Найдем необходимую длину волны нейтронов λ_2 для повышения контраста до $k = 2$.

Пусть l — размер детали.

n_1 — концентрация (плотность) ядер.

σ_1 — сечение поглощения деталей.

x — размер «включения».

n_2 — концентрация ядер этого «включения».

σ_2 — сечение поглощения в «включении».

Распишем интенсивность прошедшего потока нейтронов:

$$I_{\text{прош}} = I_0 e^{-n\sigma x},$$

где I_0 — падающий поток.

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{-n_2\sigma_2 x}{-n_1\sigma_1 x} = e^{-x(n_2\sigma_2 - n_1\sigma_1)}.$$

В случаях без резонансных явлений работает **закон Бете**.

Распишем его для нахождения сечения поглощения:

$$\sigma \propto \frac{1}{v} \propto \lambda.$$

$$\Rightarrow \frac{I'_2}{I'_1} = e^{-x(n_2\sigma'_2 - n_1\sigma'_1)} = e^{-xk(n_2\sigma_2 - n_1\sigma_1)} = 1,26^k.$$

По условию задачи:

$$\frac{I'_2}{I'_1} = 2.$$

Ясно, что

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = k = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 3 \text{ \AA}.$$

4. Эффект Мессбауэра

Известно, что возбужденный атом излучает фотон на какой-то длине волны.

Это проиллюстрировано на рисунке.

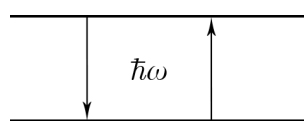


Рис. 13.5

Этот фотон легко поглощается таким же атомом. И этот атом переходит в такое же состояние, как первый возбужденный атом, и может снова излучить такой же фотон. Когда ядро излучает фотон с частотой $\hbar\omega$, происходит реакция отдачи. Значит, часть этой энергии ушла на отдачу. Другое ядро эту энергию (немного уменьшенную из-за отдачи) должно поглощать, после чего перейти в это же начальное состояние первого ядра. Но оно (второе ядро) может не попасть в это состояние из-за нехватки энергии. И это не будет резонансным поглощением. Для фотонов (в области оптики) излучение составляет всего несколько эВ. Эта энергия маленькая, и, соответственно, для атомов проблем с кинетической энергией отдачи не существует, так как ядра излучают энергии порядка несколько МэВ. Поэтому энергия отдачи получается очень большая. Следовательно, эта энергия отдачи не позволяет возбудить второе свободное ядро.

Мессбауэр показал, что существует **резонансное поглощение**, если ядра не изолированы, а входят в состав кристалла. В этом случае поглощение производится не отдельным ядром, а всей структурой ядер.

Посмотрим спектр излучения ядра.

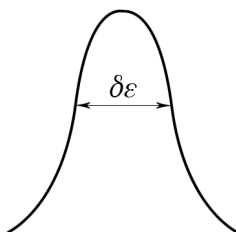


Рис. 13.6

Естественная ширина линии:

$$\delta\epsilon = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Однако, если ядро движется, то происходит уширение этой линии. В частности, эффект Доплера уширяет эту линию.

Рассмотрим ${}^{57}_{26}\text{Fe}$. Для нее время жизни равно $\tau = 10^{-7}$ с. А оценка для энергии $\delta\epsilon \approx 6 \cdot 10^{-9}$ эВ.

Посчитаем энергию отдачи. Для этого запишем закон сохранения импульса:

$$P_{\text{яд}} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Кинетическая энергия ядра отдачи:

$$T_{\text{яд}} = \frac{P_{\text{яд}}^2}{2m} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2},$$

$$\hbar\omega = 14 \text{ кэВ} \Rightarrow T_{\text{яд}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

Возбужденный уровень во всех случаях не является точным, а имеет некоторую ширину. Только основной уровень является фундаментальным (точным). Это проиллюстрировано на рисунке (13.7).

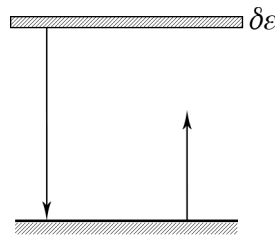


Рис. 13.7

Задача 7.51. Каскадный переход

На спектрометре высокого разрешения GAMS4 в Гренобле (Франция) у изотопа ${}^{49}\text{Ti}$ зарегистрирован каскадный переход из высоковозбужденного в основное состояние с последовательным испусканием двух γ -квантов с энергиями $\epsilon_1 = 5$ МэВ и $\epsilon_2 = 1,5$ МэВ. Прецизионные измерения формы линии ϵ_2 показали, что она имеет ширину $\Delta\epsilon = 400$ эВ. Оценить время жизни уровня с энергией ϵ_2 . Учесть, что детектор спектрометра регистрирует γ -излучение в узком телесном угле вблизи нормали к окну детектора.

Решение.

Каскадный переход проиллюстрирован на картинке (13.8).

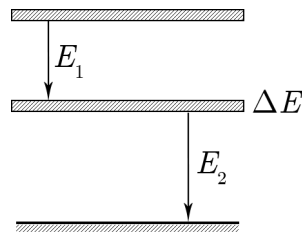


Рис. 13.8

Сначала ядро было неподвижно. После излучения оно пришло в движение. Впоследствии движущееся ядро еще раз излучает. Эгих ядер очень много.

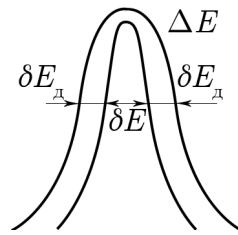


Рис. 13.9

Излучения проиллюстрированы на картинке (13.9).

ΔE — это не естественная ширина. Следовательно, нужно найти δE . С обеих сторон от δE — это доплеровское уширение.

Найдем время жизни:

$$\tau_{E_2} = \frac{\hbar}{\delta E}.$$

Найдем доплеровскую добавку.

Из закона сохранения импульса находим:

$$P_{яд} = \frac{E_1}{c}.$$

Движущееся после первого излучения ядро излучает с частотой ω_2 . Доплеровский сдвиг получаем из нерелятивистской формулы для эффекта Доплера:

$$\Delta\omega = \omega_2 \frac{v}{c}.$$

$$\Rightarrow \hbar\omega_2 = \Delta(\hbar\omega_2) = \hbar\omega_2 \frac{v}{c} = \hbar\omega_2 \frac{mv}{mc} = \hbar\omega_2 \frac{P_{яд}}{mc} = E_2 \frac{E_1}{mc^2} \delta E_{дон} = \frac{E_1 E_2}{mc^2} = 160 \text{ эВ}.$$

Найдем естественную ширину линии:

$$\delta E = \Delta E - 2\delta E_{дон} = 80 \text{ эВ}.$$

Подставим δE в формулу для времени жизни:

$$\tau_{E_2} = \frac{\hbar}{\delta E} \approx 10^{-17} \text{ с}.$$

Задача 7.10. К-захват

В 1942 г. американский физик Аллен измерил максимальную энергию ϵ_0 атомов ${}^7\text{Li}$, образующихся в результате K -захвата в ядре ${}^7\text{Be}$, и она оказалась равной 50 эВ. Оценить на основе этих данных разность масс атомов ${}^7\text{Be}$ и ${}^7\text{Li}$.

Решение.

Скажем пару слов про **К-захват**. Это случай бета-распада, когда ядро неспособно сбросить избыток энергии.

Нарисуем волновую функцию **К-электрона**.

Электрон теоретически может попасть в ядро. Когда электрон попадает в ядро, последнее поглощает его, и переходит в стабильное состояние.

Схема выглядит следующим образом:

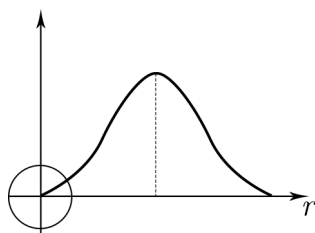


Рис. 13.10



Энергия ${}^7_3\text{Li}$ равна:

$$E_0 = 50 \text{ эВ}.$$

Требуется найти $(m_{Be} - m_{Li})c^2$.

Воспользуемся уже написанной схемой реакции.

Будем считать, что нейтрино не безмассовая частица (ультрарелятивистская):

$$P_{Li} = \sqrt{2mE_0} = p_\nu,$$

$$\frac{E_\nu}{E_0} = \frac{p_\nu c}{E_0} = \frac{\sqrt{2mc^2 E_0}}{E_0} = \sqrt{\frac{2mc^2}{E_0}} \gg 1,$$

$$m_{Be}c^2 = m_{Li}c^2 + E_0 + E_\nu \Rightarrow \Delta mc^2 = (m_{Be}c^2 - m_{Li}c^2) = E_0 + E_\nu.$$

В последней формуле E_0 можем пренебречь.

Тогда получается:

$$E_\nu^2 = p^2 c^2,$$

$$\Delta mc^2 = \sqrt{p^2 c^2} = \sqrt{2mc^2 E_0} = 0,8 \text{ МэВ}.$$

ЛЕКЦИЯ 14

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР

Задача 8.11. Энергия нейтронов

Исследование структуры жидкого или твердого ${}^3\text{He}$ с помощью пропускания нейтронов через слой вещества затруднено из-за большой величины сечения экзотермической реакции ${}^3\text{He}(n,p){}^3\text{H}$, и для нейтронов с энергией 300 К оно равно $\sigma_0 = 5400$ бн. Определить энергию нейтронов, с помощью которых можно изучать слои ${}^3\text{He}$ толщиной $d = 1$ мм, чтобы проходило не менее 10% от потока падающих нейтронов. Концентрация ядер ${}^3\text{He}$ $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Решение.

Процесс **нерезонансный**.

Запишем **закон Бете**:

$$\sigma \propto \frac{1}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Нарисуем картинку прохождения потока нейтронов через слой.

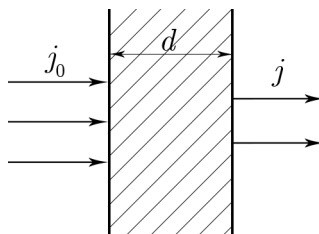


Рис. 14.1

После прохождения через слой поток нейтронов ослабляется.

Напишем формулу для отношения потоков:

$$\frac{j}{j_0} = e^{-n\sigma d},$$

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2

где σ — сечение соответствующей реакции.

Отсюда находим σ :

$$\sigma = \frac{1}{nd} \cdot \ln \frac{j}{j_0}.$$

Требуется, чтобы через этот слой проходило 10 процентов нейтронов:

$$\sigma = \ln \frac{10}{10^{22} \cdot 0,1} = 2,3 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2.$$

Исходя из закона Бете можем написать:

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2 \Rightarrow E = E_0 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2 = 0,14 \text{ эВ}.$$

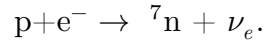
Это соответствует температуре $T = 1625 \text{ К}$.

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

Задача 8.59. К-захват

Время жизни ядра ${}_{18}^{37}\text{Ar}$ из-за К-захвата составляет $\tau_0 = 32$ суток. На основе этого факта оценить эффективное сечение σ слабого взаимодействия в реакции.



Решение.

${}_{18}^{37}\text{Ar}$ имеет 18 протонов и 19 нейтронов.

В результате слабого взаимодействия протона с электроном $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Слабое взаимодействие характеризуется малым сечением реакции. Сечение — это на самом деле есть вероятность этого процесса, выраженное в см^2 .

Нарисуем плотность вероятности **К-электрона** в атоме водорода.

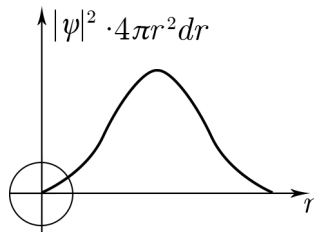


Рис. 14.2

Как видно, электрон может оказаться внутри ядра. Электрон «размазан» по ядру, а не вращается на какой-то конкретной орбите. А максимум этой вероятности находится на **боровской орбите**.

Найдем концентрацию протонов в ядре.

$$n = \frac{z}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{я}}^3} = \frac{z}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} \approx 5,3 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3}.$$

Напишем формулу для концентрации, сечения процесса и длины свободного пробега:

$$n\sigma\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{n \cdot v \cdot \tau}.$$

Это записано для одного электрона. А в данной задаче два К-электрона. Исходя из этого, длина свободного падения меняется:

$$\lambda = 2v\tau.$$

Соответственно, формула для сечения реакции меняется:

$$\sigma = \frac{1}{n \cdot 2 \cdot v \cdot \tau},$$

τ — это есть проведенное время электрона в ядре за 32 дня.

Для τ можем записать:

$$\tau = \tau_0 \frac{R_{\text{я}}^3}{r_1^3}.$$



Оценим радиусы:

$$R_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} = 4,3 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

$$r_1 = \frac{r_B}{z-1} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

В последней формуле вместо z пишется $z-1$ из-за частичной экранировки вторым электроном.

Посчитаем τ :

$$\tau = 7,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Оценим скорость электрона:

$$\frac{mv^2}{2} = R_y z - 1^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2R_y}{m}(z-1)} = 3,7 \cdot 10^9 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Вычислим σ :

$$\sigma = \frac{1}{2nv\tau} = 3,4 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2.$$

Получена правдоподобная оценка $\sigma \propto 10^{-46} \text{ см}^2$.

Задача 9.4. Эффективное сечение деления

Оценить эффективное сечение деления ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ нейтронами с энергиями 0,025 эВ (тепловые нейтроны) и 10 кэВ. Считать, что сечение деления равно сечению образования составного ядра. Ядерный потенциал аппроксимировать прямоугольной потенциальной ямой глубиной 40 МэВ.

Решение.

Характер этих явлений нерезонансный. Значит, можно воспользоваться законом Бете. Эти реакции проходят через **составное ядро**.

$$n + x \rightarrow C \rightarrow \text{деление},$$

где C — составное ядро.

Запишем дебройлевскую длину волны электрона.

$$\lambda \frac{\hbar}{\sqrt{2m\epsilon}} = 8,6 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

Посчитаем радиус урана:

$$R_U = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Видно, что:

$$\lambda \gg R_U.$$

Сечение этого процесса определяется исключительно длиной волны нейтрона.

Сечение образования составного ядра:

$$\sigma = \sigma_{\text{max}}^{\text{неупр}} \cdot D,$$

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{неупр}} = \pi \lambda^2 = \frac{\pi}{k^2}.$$

Найдем коэффициент прохождения.



Для этого нарисуем потенциальную яму. Она представлена на рисунке (14.3).

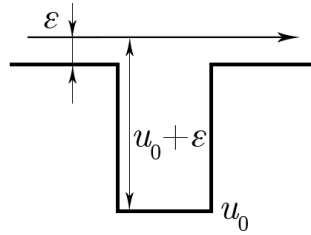


Рис. 14.3

Ранее был получен коэффициент прохождения:

$$D = \frac{4kk'}{k + k'^2},$$

где

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar}.$$

Энергия E ничтожна по сравнению с U_0 , поэтому можно принять:

$$k' = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} \gg k.$$

Отсюда следует, что:

$$D \approx \frac{4k}{k'}.$$

Подсчитаем k и k' :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 0,35 \cdot 10^9 \text{ см}^{-1},$$

$$k' = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar} = 13,9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, для коэффициента прохождения получаем оценку:

$$D \approx \frac{4k}{k'} = 10^{-4}.$$

Это есть вероятность пролетания через яму за один раз.

Тогда искомое сечение будет:

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \frac{4k}{k'} = \frac{4\pi}{kk'} = 26 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2 = 2600 \text{ бн}.$$

По условию задачи предполагается, что сечение образования составного ядра, что представляет из себя сечение захвата, равно сечению деления. Было рассчитано сечение образования составного ядра. В действительности максимальное сечение, полученное через закон Брейта–Вигнера, надо также умножить на вероятность попасть в ядро.

Причем присутствуют другие понижающие явления (центробежные барьеры, и т. д.), но эти эффекты в законе Брейта–Вигнера не учитываются.

Кстати, если система вернется к начальному состоянию после образования составного ядра (т. е. если нейтрон войдет в составное ядро, и выйдет из него), то нужно максимальное сечение умножить на D^2 вместо D , потому что нейтрон после выхода из составного ядра должен снова преодолеть этот барьер. Записывается это таким образом:

$$\sigma_n = \sigma_{\text{сост}} \cdot D^2.$$

Задача 9.5. Эффективное сечение деления

Сечение деления ^{238}U быстрыми нейтронами с энергией $\epsilon = 5$ МэВ равно $\sigma(n, f) = 0,5$ бн. Какова относительная вероятность этого нерезонансного процесса по отношению ко всем процессам, идущим через компаунд-состояние? Глубину потенциальной ямы ядра урана принять равной $U = 50$ МэВ.

Решение.

Обозначим $\sigma(n, f)$ — сечение деления нейтронами.

Помимо ^{235}U , который является актуальным для реакций деления, существует ^{238}U . В природе ^{235}U встречается в 0,7 % случаев. Поэтому уран обогащают. Это означает добывание ^{235}U (более легкие ядра) из ^{238}U .

Радиус ^{238}U :

$$R = 1,3 \cdot \sqrt[3]{238} = 8,1 \text{ фм} = 8,1 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Длина волны нейтрона:

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = 2 \text{ фм.}$$

Распишем коэффициент прохождения:

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Для нахождения коэффициента прохождения найдем k_1 и k_2 :

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + U_0)} = 16,3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1},$$

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} = 4,9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}.$$

Подсчитаем коэффициент прохождения:

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 0,71.$$

Так как радиус и длина волны нейтронов соизмеримы, то геометрическое сечение образования составного ядра рассчитывается по формуле:

$$\sigma_c = \pi(R + \lambda)^2 D = 2,3 \text{ бн.}$$

Очевидно, что

$$\frac{\Gamma_{\text{дел}}}{\Gamma_{\text{сост}}} = \frac{\sigma_{\text{дел}}}{\sigma_{\text{сост}}} \approx 0,2.$$

1. Резонансные реакции

Теперь рассмотрим резонансные явления.

Нарисуем состояния ядра.

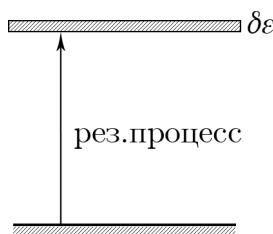


Рис. 14.4

Обычно возбужденное состояние имеет свою ширину. Эта ширина определяет время жизни в этом состоянии. Если окажется, что налетающий нейтрон, попавший в данное ядро, обладает такой энергией, которая достаточна для перевода ядра из основного состояния в возбужденное, то это будет называться **резонансным процессом**.

Для описания этих резонансных явлений удобна **формула Брейта – Вигнера** для сечения таких процессов:

$$\sigma_{a,b} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_{рез})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b,$$

где а и b — это два разных процесса.

Сечения упругих и неупругих процессов даются формулами:

$$\sigma_{упр} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{упр}^2}{(E - E_{рез})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

$$\sigma_{неупр} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{упр} \Gamma_{неупр}}{(E - E_{рез})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

где Γ — это вероятность соответствующих каналов:

$$\Gamma = \Gamma_{упр} + \Gamma_{неупр}.$$

Упругие реакции встречаются в чистом виде. А неупругие процессы сами по себе не бывают, их обязательно сопровождает упругий процесс.

В случае, когда $E = E_{рез}$, можем написать:

$$\sigma_{max}^{упр} = 4\pi \lambda^2 \sigma_{max}^{неупр} = \pi \lambda^2.$$

Задача 8.68. Распад

При облучении ядра ^{115}In нейтронами с энергией $\epsilon_n = 1,44$ эВ происходит их резонансное поглощение. Распад составного ядра происходит по двум каналам — радиационному (с испусканием γ -квантов) и упругому (с вылетом нейтрона). Полное сечение этой реакции равно $\sigma_{\text{полн}} = 2,7 \cdot 10^4$ бн. Ширина нейтронного канала распада $\Gamma_n = 1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ. Оценить среднее время жизни составного ядра относительно испускания γ -квантов, считая, что $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$. Частицы считать бесспиновыми.

Решение.

Будем считать, что $E = E_{\text{рез}}$:

$$\sigma_{n,\gamma} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_{\text{рез}})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

$$E = E_{\text{рез}} \Rightarrow \sigma_{n,\gamma} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\frac{\Gamma^2}{4}}.$$

Это соотношение можно вывести из простых соображений, рассматривая колебательный контур. В случае колебательного контура при резонансных явлениях присутствует резонансная кривая. Энергия (частота) резонирует. Процессы идентичны.

В конце концов, получается:

$$\sigma_{n,\gamma} = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}.$$

По условию $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$.

$$\Rightarrow \sigma_{n,\gamma} \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \sigma_{\text{полн}}.$$

Возможны два процесса. Требуется найти σ_γ — сечение образования составного ядра.

$$\sigma_\gamma = \sigma_c \cdot W_\gamma = \sigma_c \cdot \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_\gamma + \Gamma_n} = \sigma_c = \sigma_{\text{полн}},$$

$$\sigma_{\text{полн}} \approx \sigma_c \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \Rightarrow \Gamma_\gamma = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\sigma_{\text{полн}}}.$$

Напишем оценку для времени жизни в этом состоянии:

$$\tau_\gamma = \frac{\hbar}{\Gamma_\gamma}.$$

Можно также написать следующую оценку:

$$\tau_\gamma = \frac{\hbar}{2\Gamma_\gamma}.$$

Так как это является оценкой, то разница между этими двумя формулами для оценки для времени жизни не существенна.



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.*

Подставим Γ_γ в формулу для оценки для времени жизни в этом состоянии:

$$\tau_\gamma = \frac{\hbar}{\Gamma_\gamma} = \frac{\hbar \sigma_{\text{полн}}}{24\pi \lambda^2 \Gamma_n}.$$

Напомним, что

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\epsilon}}.$$

Время жизни:

$$\tau_\gamma = \frac{mE\sigma_{\text{полн}}}{4\pi\hbar\Gamma_n} = 4 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$$



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu*

ЛЕКЦИЯ 15

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. Типы частиц

В первой половине 20-го века были известны только следующие частицы:

$$n, \quad p, \quad e^-, \quad e^+, \quad \mu^-, \quad \nu, \quad \pi^\pm.$$

Вышеперечисленные частицы живут относительно долго.

Например, **протон** живет 10^{31} лет.

Электрон бесконечно живет.

Нейтрон — 890 секунд (примерно 15 минут).

Время жизни **мюона** — микросекунда.

В 50-х годах было открыто много новых частиц.

Эти частицы стали называться странными, потому что в отличие от первых, которые живут относительно долго, они живут очень коротко.

Помимо этих, были частицы, которые назывались **резонансами**. Точнее, это некие образования, которые живут очень маленькое время. Время их жизни называется **ядерное время**. Рассмотрим реакцию

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ p$$

В течении данной реакции **составное ядро** образовывается на какое-то время. Время жизни этого ядра — это и есть ядерное время. Оно равно 10^{-23} сек. Это время пролета частицы со скоростью света ядерного расстояния — 10^{-13} см. В течении ядерного времени живет это образование, которое называется Δ^{++} -изобара. Она в дальнейшем разваливается по **упругому каналу**.

Рассмотрим другую реакцию.

$$\pi^- + p \rightarrow \begin{cases} \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \\ n. \end{cases}$$

В этом случае может образоваться и нейтрон. Появление нейтрона в результате такого столкновения — это **неупругий канал**. Неупругий канал в отличие от упругого всегда сопровождается упругим каналом.

Эти промежуточные частицы (Дельта-изобары) назывались не частицами, а резонансами. Это на очень короткое время образуемые составные ядра, которые потом разлетаются.

Исторически при увеличении энергии в реакциях появились новые частицы, которые назывались странными. Их время жизни на много порядков превышает ядерное время. Эти частицы относятся к частицам сильного взаимодействия. В дальнейшем оказалось, что у этих частиц в составе есть странный кварк.

Есть четыре типа **фундаментальных взаимодействий** — гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Слабое взаимодействие проявляется в виде распадов частиц с участием лептонов.

Каждый тип взаимодействия сопровождается какими-то частицами. Дадим классификацию частиц.

Первый тип — это отвечающие сильному взаимодействию адроны, которые подразделяются на **барионы** и **мезоны**.

К барионам приписывается барионный заряд.

$$B = \pm 1.$$

У мезонов барионный заряд отсутствует.

$$B = 0.$$

2. Кварки. Кварковый состав частиц

Оказывается, что только **адроны** состоят из **кварков**. Барионы имеют 3 кварка. Мезоны имеют 2 кварка.

Адронами являются нейтроны, протоны, π -мезоны.

Второй тип — **лептоны**, которые проявляются прежде всего в слабом взаимодействии, и при этом принимают участие в электромагнитном и сильном взаимодействиях.

Нарисуем таблицу классификации лептонов:

I	II	III	Заряд
ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e^-	μ^-	τ^-	-1

И для всех этих частиц существуют античастицы.

Для правильного написания реакций введено квантовое число под названием лептонный заряд. Лептонных зарядов бывает три:

$$L_e, L_\mu, L_\tau.$$

Для ν_e и e^- , $L_e = 1$, и так далее.

Приведем пример реакции с мюоном. Это нестабильный лептон второго поколения.

$$\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Распишем лептонные заряды:

$$L_e : 0 = 1 - 1 + 0,$$

$$L_\mu : 1 = 0 + 0 + 1.$$

Эти равенства выполняются. Первое поколение — это поколение стабильных лептонов. Из них состоит материя. А лептоны второго и третьего поколений проявляются при столкновениях.

Дадим классификацию кварков. Они тоже бывают трех поколений. Кварк имеет барионный заряд. Он равен $\pm \frac{1}{3}$.

I	II	III	Заряд
u	c	t	$+\frac{2}{3}$
d	s	b	$-\frac{1}{3}$

Например, для нейтрона и протона барионный заряд равен единице:

$$n = (d \ d \ u),$$

$$p = (u \ u \ d).$$

У π^\pm -мезонов барионный заряд равен нулю, а электрический заряд равен ± 1 :

$$\pi^+ = (u \ \bar{d}),$$

$$\pi^- = (\bar{u} \ d).$$

У π^0 -мезона барионный и электрический заряды равны нулю:

$$\pi^0 = (u \ \bar{u}) = (d \ \bar{d}).$$

Каждый из кварков обладает спином, который равен одной второй. Тогда в одном состоянии могут оказаться три кварка со половинным спином, и суммарный спин частицы будет равен $\frac{3}{2}$. Это энергетически невыгодное образование. Чтобы разрешить эти проблемы, было введено еще одно квантовое число, которое называется **цвет**. Любой кварк может быть трех цветов.

Обозначаются они:

$$R \ Y \ B,$$

и называются, соответственно, красный, желтый, и голубой.

Комбинация $R \ Y \ B$ является белой. Комбинация $R \ \bar{R}$ тоже является белой. Частица должна быть белая.

Изолированный кварк в природе не встречается. Его искали, но все попытки были безуспешны.

Комбинация всех квантовых чисел называется аромат. Из кварков первого поколения состоят все стабильные частицы. Стабильный мир состоит из электронов и кварков u и d .

К странным частицам можно отнести Ω -гипероны, Ξ -гипероны, Λ -гипероны, K -мезоны. Распишем их составы:

$$\Omega^- = (s \ s \ s), \quad \text{странность } s = -3,$$

$$\Xi^- = (d s s), \quad \text{странность } s = -2,$$

$$\Lambda^0 = (s u d), \quad \text{странность } s = -1,$$

$$K = (s \tilde{u}), \quad \text{странность } s = -1.$$

Когда образуются странные частицы, всегда выполняется закон сохранения странности (странного заряда).

Самые вероятные переходы между разными кварками нарисованы на картинке (??).

Оказалось, что при переходе кварков существует некий посредник — W^\pm . Это **бозон**. Нарисуем 12 лучей от этого бозона, которые соответствуют разрешенным переходам.

Пример превращения:

$$n \rightarrow p + e^- + \nu_e.$$

Нарисуем это превращение на кварковом уровне. Оно продемонстрировано на рисунке (15.1).

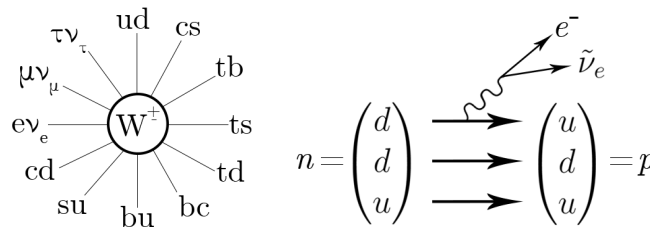


Рис. 15.1

Здесь посредник — это W^- -бозон, который распадается по лептонному каналу.

Рассмотрим превращение Λ^0 -гиперона.

Лептонный канал:

$$\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

У этого канала есть вероятность. Странность меняется на единицу.

Есть еще один канал:

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

Рассмотрим кварковые схемы этих переходов. Первый канал очень похож на превращение нейтрино.

Рассмотрим второй канал. В вакууме всегда может родиться виртуальная пара кварка и антикварка.

Нарисуем второй канал. Он продемонстрирован на рисунке (15.2).

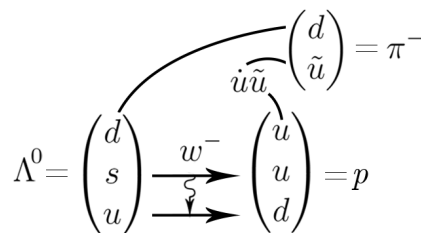


Рис. 15.2

Задача 10.73. Законы сохранения



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.*

Исходя из законов сохранения, дописать следующие реакции:

$$a) \nu_{\mu} + p \rightarrow$$

$$б) \nu_{\mu} + n \rightarrow$$

$$в) \tilde{\nu}_{\mu} + p \rightarrow$$

$$д) \tilde{\nu}_{\mu} + n \rightarrow$$

Найти отношение эффективных сечений этих реакций, нарисовать кварковые схемы реакций.



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu*

Решение.

Здесь участвует посредник — W^\pm -бозон.

а) Нарисуем схему:

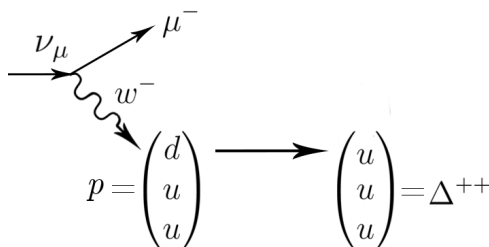


Рис. 15.3

Окончание реакции такое:

$$a) \nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}.$$

Это неосуществляемый переход из-за резонанса.

б) Нарисуем схему:

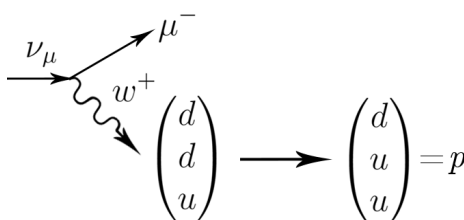


Рис. 15.4

Задача 5Б-13(из ГОСа). W-бозоны

Мюонное нейтрино, попадая в жидководородную камеру, может родить промежуточный W^+ -бозон с энергией покоя $m_W c^2 = 81$ ГэВ. При какой минимальной энергии этого нейтрино это возможно?

Решение.

Жидководородная мишень состоит из протонов. Они практически неподвижны.

Напишем эту реакцию:

$$\nu_\mu + p = \mu^- + w^+ + p.$$

Нарисуем схему реакции:

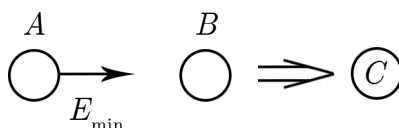


Рис. 15.5

Пороговая энергия равна:

$$E_{\text{пор}} = E^{\text{min}} = \frac{(m_C c^2)^2 - (m_A c^2)^2 - (m_B c^2)^2}{2m_B c^2}.$$

Это соотношение запишем без вывода. Вывод был дан на первом курсе.

Считаем, что энергия покоя нейтрино почти равна нулю, и ею пренебрегаем:

$$E_\nu^{\text{min}} = \frac{(m_\mu c^2 + m_\nu c^2 + m_p c^2)^2 - (m_A c^2)^2}{2m_p c^2} = 3600 \text{ ГэВ}.$$

Задача 10.85. W-бозоны

При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение W-бозонов. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Энергия покоя W-бозона $M_W c^2 = 80,6 \text{ ГэВ}$.

Решение.

Интересен вопрос, что стягивает протонов и нейтронов внутри ядра. Оказывается, причина — **обменное взаимодействие**. Они обмениваются пи-мезонами.

Аналогично, трех кварков в единое целое стягивают глюоны.

Нарисуем глюонное поле между кварком и антикварком. Оно представлено на рисунке (15.6).

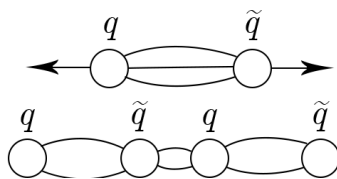


Рис. 15.6

Глюоны взаимодействуют друг с другом. Они обеспечивают цвет. При растягивании двух кварков окажется, что их разорвать нельзя.

Когда расстояние между ними достигает ядерного расстояния 10^{-13} см , возникает еще одна пара — кварк-антикварк.

Нарисуем схему столкновения в данной задаче.

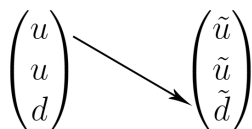


Рис. 15.7

Отсюда получаем:

$$u + \bar{d} = W^+.$$

Данная задача ультрарелятивистская, соответственно, правильна оценка:

$$E \sim pc.$$

Тогда можно записать закон сохранения.

ЛЕКЦИЯ 16

АБСОЛЮТНО ЧЁРНОЕ ТЕЛО. ФОРМУЛА ПЛАНКА

1. Абсолютно черное тело

Абсолютно черное тело — это некий вакуумированный сосуд, стенки которого держатся при какой-то конкретной температуре T . В сосуде есть **фотонный газ**. Газа фотонов не видно, если температура стенок является комнатной. Его не видно, потому что эти фотоны находятся вне оптической области спектра. Но если начнем нагревать эти стенки и дойдем до температур порядка 600 К, появится красное свечение всей внутренней поверхности этой полости. Потом оно становится все ярче, и, в конце концов, из отверстия выходит фотонный газ. Датчик фотоприемника регистрирует это излучение. Это уже будет в оптическом диапазоне. То есть эта полость всегда светит.

Абсолютно черное тело представлено на рисунке (16.1).

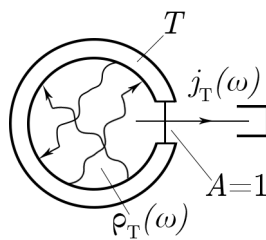


Рис. 16.1

Интересно, почему же это называют абсолютным черным телом. По тем самым причинам, что **коэффициент абсорбции**, то есть коэффициент поглощения, равен единице:

$$A = 1.$$

Следовательно, все, что попадает на абсолютно черное тело, не выходит из него. Даже если начнем светить каким-нибудь светом, все равно все излучение поглотится. Будет излучение стенок соответствующего спектра — спектра абсолютно черного излучения.

Примером абсолютного черного тела может быть открытое окно в яркий день. Проходя мимо него не получается ничего увидеть, потому что там черно. Коэффициент поглощения лучей, идущих с улицы в эту комнату равен почти единице. Именно поэтому ничего не видно.

Вводится **спектральная плотность излучения**:

$$\rho_T(\omega) \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}} \right].$$

График $\rho_T(\omega)$ от ω показан на рисунке (16.2).

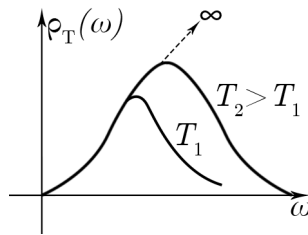


Рис. 16.2

Как видно из графика, при увеличении температуры смещается максимум спектральной плотности.

Объяснить с точки зрения классической физики чрезвычайно сложно. Попытки объяснить это с классической точки зрения приводили к явлению, которая называется **ультрафиолетовая катастрофа**. В теории, построенной Рэлеем плотность уходила на бесконечность при $\omega \rightarrow \infty$.

Ультрафиолетовая катастрофа резко противоречила опыту, а в области малых частот теория Рэля совпадала с опытом достаточно точно.

Макс Планк, в конце концов, принял революционную идею для решения этой задачи. Он предположил, что излучение стенок этой полости происходит квантами, то есть некими порциями электромагнитной энергии, которые записывались следующим образом:

$$h\nu = \hbar\omega,$$

где h и \hbar называются постоянными Планка.

Вводится еще одна величина — **спектральный поток электромагнитной энергии**:

$$j_T(\omega) \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{с}^{-1}} \right].$$

Это есть плотность потока на единицу спектрального интервала.

Найдем площадь под графиками на (16.2):

$$\rho(T) = \int_0^{\infty} \rho_T(\omega) d\omega.$$

Это есть полная, интегральная плотность излучения. Эта плотность указывает на то, сколько энергии в единице объема. Следовательно, ее размерность будет равна

$$\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right].$$

Проинтегрируем спектральный поток электромагнитной энергии:

$$j(T) = \int_0^{\infty} j_T(\omega) d\omega \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Экспериментальным путем был обнаружен закон, который впоследствии был назван **законом Стефана – Больцмана**.

$$j(T) = \sigma T^4.$$

σ — мировая константа и равна:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Потом будет обнаружено, что она является комбинацией других мировых констант — скорости света, постоянной Планка, постоянной Больцмана.

$\rho(T)$ иногда тождественно обозначают как внутреннюю энергию фотонного газа, приходящая на единицу объема, и тем самым эта величина приобретает термодинамический смысл:

$$\rho(T) = U(T).$$

Оказывается, что эти величины — $\rho(T)$ и $j(T)$ — связаны.

Установим их связь. Для этого вспомним формулу для числа ударов идеального газа за секунду на 1 см^2 :

$$z = \frac{n\bar{v}}{4} \left[\frac{\text{удар}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Это статистический результат, который получается интегрированием. Фотонный газ обладает такими же свойствами, как идеальный газ, его частицы тоже ударяются о стенку.

Запишем аналогичную формулу для фотонного газа:

$$j = \frac{\rho c}{4}.$$

Эта формула была получена заменой аналогичных величин, то есть вывода не было дано, но ее можно получить (интегрируя).

Тогда для $\rho(T)$ можно записать:

$$\rho(T) = \frac{4}{c} j(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 = a T^4.$$

Запишем, чему равна константа a :

$$a = 7,566 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{К}^4}.$$

Представим, что фотонный газ находится в равновесии. Найдём давление фотонного газа на стенку:

$$P = \frac{U}{3}.$$



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

4

Для сравнение запишем, чему равно это давление для идеального газа:

$$P = \frac{2}{3} n \overline{\left(\frac{mv^2}{2} \right)}.$$

Размерности давления и плотности энергии совпадают:

$$P = \frac{U}{3} \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right].$$

Задача 1.23. Комптоновское рассеяние

Абсолютно черное тело подвешено в вакуумной установке так, что через оптическое окно на него падает солнечный свет. Если стенки установки охладить до температуры $T_{cm1} = 77$ К, то тело будет иметь $T_1 = 275$ К. Найти температуру тела T_2 при $T_{cm2} = 295$ К. Теплопроводностью остаточных газов и подвески пренебречь.

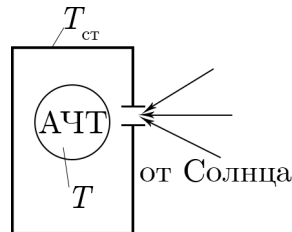


Рис. 16.3



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

Решение.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\begin{aligned} S_{\text{тело}} \sigma T_{\text{cm1}}^4 + \Phi &= S_{\text{тело}} \sigma T_1^4, \\ S_{\text{тело}} \sigma T_{\text{cm2}}^4 + \Phi &= S_{\text{тело}} \sigma T_2^4, \\ T_{\text{cm1}}^4 - T_{\text{cm2}}^4 &= T_1^4 - T_2^4, \\ \Rightarrow T_2 &= (275^4 + 295^4 - 77^4)^{\frac{1}{4}} = 340 \text{ K}. \end{aligned}$$

Задача 1.25. Эффект Комптона

Хорошо теплопроводящий шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r от центра Солнца. Найти температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн км) $R_B = 108$, $R_Z = 150$, $R_M = 228$, $R_{Ю} = 780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C = 6000$ К и радиусом $R_C = 7 \cdot 10^5$ км. Сравнить полученные величины с радиоастрономическими данными: средние температуры освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера оцениваются, соответственно, как $T_B = 735$ К, $T_Z = 275$ К, $T_M = 235$ К и $T_{Ю} = 135$ К. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?

Решение.

С поверхности Солнца этот шар виден под неким телесным углом. Это показано на рисунке (16.4).

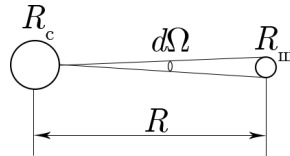


Рис. 16.4

Поскольку задан радиус шара, надо найти угол, под которым из центра Солнца виден диаметр этого шара.

$$d\Omega = \frac{S_{III}}{R^2} = \frac{\pi R_{III}^2}{R^2}.$$

Запишем соответствующие уравнения теплового баланса:

$$\begin{aligned} 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4 \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} &= 4\pi R_{III}^2 \sigma T^4, \\ \Rightarrow R_C^2 T_C^4 \frac{\pi R_{III}^2}{R^2 4\pi} &= R_{III}^2 T^4, \\ T &= T_C \sqrt{\frac{R_C}{2R}}. \end{aligned}$$

Вычислим для разных планет.

$$T_B = 340 \text{ K (735)},$$

$$T_3 = 290 \text{ K (275)},$$

$$T_M = 235 \text{ K (235)},$$

$$T_{Ю} = 130 \text{ K (135)}.$$

В скобках выше записаны реальные значения температур этих планет. Как видно, результаты достаточно близки к реальным значениям, кроме Венеры. Наибольшее расхождение оказалось у Венеры. Это расхождение имеет место из-за того, что с ее поверхности затруднен обмен энергии, потому что на ней есть огромное количество CO_2 , соответственно, на Венере есть очень плотная атмосфера, на поверхность проникнуть не просто, давление на ней огромное, а наличие углекислоты ограничивает теплообмен, и возникает парниковый эффект. В результате температура оказывается смещенный почти вдвое по отношению к той, которая получается теоретически.

2. Формула Планка

Получим формулу Планка.

Еще раз нарисуем график $\rho_T(\omega)$ от ω . Это показано на рисунке (16.5).

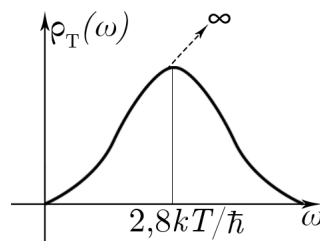


Рис. 16.5

Нужно определить эту функцию.

Рассмотрим пространство волновых чисел. Возьмем конкретные k и приращения dk в этом пространстве. Это пространство волновых чисел показано на рисунке (16.6).

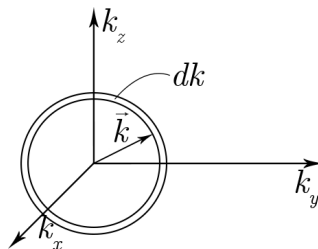


Рис. 16.6

Фотоны бывают двух поляризаций. Вычислим полное число возможных состояний, который может принять фотон при заданном значении волнового числа. На самом деле, можно говорить об импульсах, об импульсном пространстве.

Число этих состояний в слое от k до dk подсчитывается следующим образом (эта формула дается без вывода):

$$dN = 2 \frac{V dV_k}{(2\pi)^3}.$$

Рассматривается некий резонатор, в котором расположены стоячие волны, причем, столько, сколько их вмещается в данных размерах.

Формула для подсчета полного числа состояний:

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}.$$

Последнее — это число возможных состояний фотона.

$$\rho_T(\omega) d\omega = (\text{число возможных состояний}) \cdot \hbar\omega \cdot f(\omega),$$

где $f(\omega)$ — это вероятность попасть в заданный интервал.

$$V = 1 \text{ см}^3 \Rightarrow \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)}.$$

3. Исследование формулы Планка

Займемся исследованием полученной формулы. Проанализируем это выражение для больших и малых частот. А также проинтегрируем выражение, для того чтобы получить закон Стефана–Больцмана.

1) Низкие частоты:

$$\hbar\omega \ll kT.$$

Это самый крайний случай. Экспонента будет очень мала:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

Получаем закон Рэлея–Джинса:

$$\rho_T(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2.$$

Получается парабола, которая уходит на бесконечность. Это и есть ультрафиолетовая катастрофа.

Среднее значение энергии равно:

$$\bar{\epsilon} = \hbar\omega \cdot \bar{n} = \hbar\omega \frac{kT}{\hbar\omega} = kT \quad \text{— классический результат,}$$

где \bar{n} — средний номер возбужденного состояния.

2) Высокие частоты

$$\hbar\omega \gg kT.$$

Это другой крайний результат, который на графике виден сильно правее точки перегиба.

Получаем **закон Вина**:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Найдем интегральную плотность:

$$U(T) = \rho(T) = \int_0^\infty \rho_T(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Сделаем обозначение:

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = x \quad \Rightarrow \quad U(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{k^4 T^4}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

$$U(T) = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15 \hbar^3 c^3} = \frac{4\sigma}{c} T^4,$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

В силу того, что при увеличении частоты на бесконечность функция уходит в ноль, и при стремлении частоты к нулю тоже уходит к нулю, можно примерно такой же график нарисовать для длин волн. Поэтому в некоторых источниках пользуются немного другой характеристикой. Она показана на рисунке (16.7).

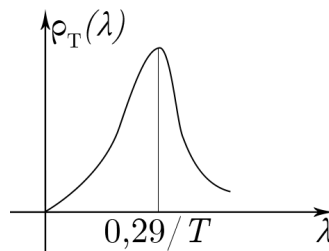


Рис. 16.7

Задача 1.22. Рассеяние рентгеновских лучей в графите

Спектр излучения космического рентгеновского источника соответствует спектру излучения абсолютно черного тела. Максимум плотности излучения $\rho(\lambda)$ наблюдается на длине волны $\lambda_{\max} = 2 \text{ \AA}$, а суммарная по спектру (интегральная) плотность потока на Земле $j = 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$. Расстояние от Земли до источника $L = 1,3 \cdot 10^4$ световых лет. Оценить диаметр источника.

Решение.

$$\sigma T^4 \cdot 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = j \cdot 4\pi L^2,$$

$$\Rightarrow D = \frac{2L}{T^2} \sqrt{\frac{j}{\sigma}},$$

$$T = \frac{0,29}{\lambda_{\max}} = 1,45 \cdot 10^7 \text{ K},$$

$$L = c\tau = 1,23 \cdot 10^{22} \text{ см},$$

$$\Rightarrow D = 15,5 \text{ км}.$$

Задача 1.38. Рассеяние электрона на фотоне

Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

Решение.

$$j = \sigma T^4.$$

Будем считать, что вся энергия в этой нити излучается.

$$N = \frac{V^2}{R} \propto T^4.$$

Сопротивление нити:

$$R \propto T,$$

$$V^2 \propto rT^4 \propto T^5,$$

$$5 \frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V}.$$

Исследуем используемую область спектра.

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = 2,5 \text{ эВ},$$

$$kT \approx 0,13 \text{ эВ} \ll \hbar\nu.$$

Получается, что это не классическая часть спектра. В задаче рассматривается случай

высоких частот.

$$kT \ll \hbar\omega,$$

$$\rho(\omega) \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$\ln \rho \propto \frac{\hbar\omega}{kT},$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{kT^2} \Delta T = \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{\Delta T}{T}.$$

$\Delta\rho$ — это объемная площадь излучения.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta j}{j}.$$

j — это плотность потока.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta j}{j} = \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V} = 40\%.$$

Требуется найти освещенность. Освещенность пропорциональна потоку энергии, которая падает на этот стол.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta E}{E}.$$

4. Индуцированное излучение

Приступаем к **индуцированному излучению**.

Рассмотрим полость с фотонным газом. Она показана на рисунке (16.8).

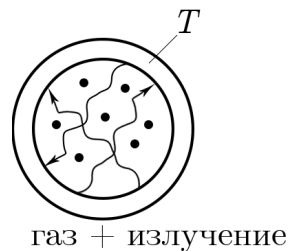


Рис. 16.8

Внутри находятся газ и излучение. Рассмотрим двухуровневую модель. То есть у этого газа возможны только два уровня энергии.

Покажем это на рисунке (16.9).

Рассматривается абсолютно черное тело. Внутри него есть любые фотоны. Какой-то фотон может перейти из нижнего уровня N_1 на верхний N_2 . Он переходит в возбужденное состояние под индуцированным воздействием. Вероятность этого перехода равна P_{12} . Других возможностей оказаться выше нет (только с помощью индуцированного излучения). То есть фотон может перейти наверх после поглощения кванта в этой системе. Для возвращения обратно существует 2 способа. Первый способ — индуцированный переход с излучением фотона. Фотон провоцирует этот переход вниз. Соответствующая

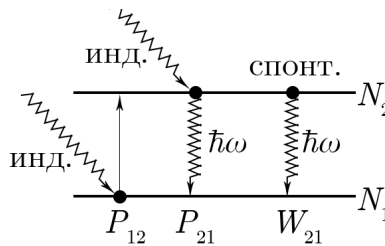


Рис. 16.9

частота — $\hbar\omega$. Переход P_{21} тоже индуцированный. Еще есть спонтанные переходы, тоже с частотой $\hbar\omega$. Вероятность спонтанного перехода будем обозначать как W_{21} .

Объясним, что такое спонтанные переходы. Атом может находиться в своем возбужденном состоянии какое-то ограниченное время в соответствии с **соотношением неопределенностей**. Слишком долго он там находиться не может. То есть он спонтанно переходит на другой уровень без внешнего воздействия.

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega.$$

Условие равновесия:

$$P_{12} = P_{21}.$$

Концентрация газа не меняется, и соответствующие плотности фотонов для таких переходов сверху вниз и снизу вверх одинаковы. То есть в газе ничего не накапливается. Переходы вверх и вниз равновероятны.

Распишем переходы вверх:

$$\begin{aligned} N_{21} &= N_{21}^{und} + N_{21}^{cn} = N_{12}, \\ N_{21} &= P_{21}N_2 + W_{21}N_2 = P_{12}N_1, \\ P_{21} &= P_{12}, \\ \Rightarrow P_{21}(N_2 - N_1) &= -W_{21}N_2 \Rightarrow 1 = \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{N_2}{N_1 - N_2} = \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{1}{\frac{N_1}{N_2} - 1}. \end{aligned}$$

Система находится в равновесии. Запишем **соотношение Больцмана**:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}, \\ 1 &= \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \\ \frac{P_{21}^{und}}{W_{21}} &= \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \bar{n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим важные **свойства индуцированного излучения**.

Фотон, который вызвал индуцированный переход, возбуждает идентичный с собой фотон. То есть первый и второй фотоны одинаковы. Во-первых, они совпадают по частоте, значит, у них одинаковая энергия. Во-вторых, они совпадают по фазе и по направлению своего движения. Эти два фотона абсолютно когерентны (фотоны индуцированного излучения), следовательно, они могут накапливаться. Эта идея и лежит в основе устройства, которое называется **лазер**.

Задача 1.57. Тепловое равновесие

Система, состоящая из атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии ϵ_1 и $\epsilon_2 > \epsilon_1$, находится в тепловом равновесии. Выразить коэффициент поглощения света $\kappa(T, \omega)$ этой системой на частоте $\omega = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\hbar}$ через его значение κ_0 при $T = 0$. Рассмотреть два предельных случая: 1) $k_B T \gg \hbar\omega$ и 2) $k_B T \ll \hbar\omega$.

Решение.

Рассмотрим эту систему качественно. Здесь обязательно должен быть *резонатор Фабри – Перо* — полупрозрачные зеркала, и внутри некая активная среда. Поймем что в этой активной среде происходит. Выберем в качестве такого объекта лазер на рубине. В такой двухуровневой системе происходит накачка. То есть осуществляется перевод молекул или атомов в возбужденное состояние, на верхний уровень. Происходит это следующим образом. Свет накачивает лазер и переводит атомы в возбужденное состояние. В дальнейшем, когда атомы соответствующих примесей переходят в возбужденное состояние, начинаются индуцированные переходы. Этих переходов очень много. Каждый из этих гамма-квантов уходит в какую-то сторону. Те, который наталкиваются на возбужденный атом, провоцируют такие же переходы, то есть появление таких же гамма-квантов. Таким образом, число таких гамма-квантов увеличивается. То есть, если на пути гамма-кванта встречается возбужденный атом, то сразу провоцируется рождение индуцированного гамма-кванта, и они начинают двигаться между двумя этими зеркалами, возбуждая переходы. Они все когерентны. В результате получается необходимое излучение.

Эта идея показана на рисунке (16.10).

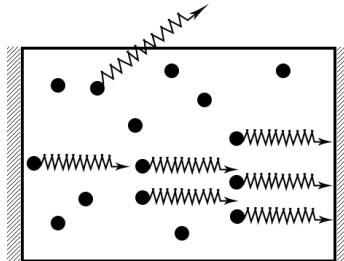


Рис. 16.10

Напомним картинку перехода с излучением. Она показана на рисунке (16.11).

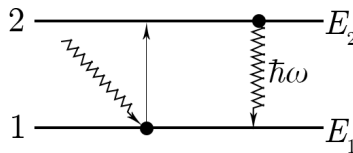


Рис. 16.11

$$j \left[\frac{\text{шт}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right] = \frac{c\rho}{4} \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{c}{4\hbar\omega} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2 \left[\exp\left\{ \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) \right\} - 1 \right]}.$$

Запишем уравнения баланса:

$$dj_{\text{ногл}} = -jdx\sigma_{12}n_1,$$

$$dj_{узл} = +jdx\sigma_{21}n_2,$$

где n_1 и n_2 — это концентрации атомов, находящихся на верхнем и нижнем уровнях.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma, \quad n_0 = n_1 + n_2,$$

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$dj = jdx(n_2 - n_1)\sigma,$$

$$k_{ногл} = \frac{-dj}{jdx} = \sigma(n_2 - n_1) \text{ [см}^{-1}\text{]},$$

$$k_{ногл} = \sigma n_1 \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right).$$

При $T = 0$ все атомы находятся в основном состоянии (n_0).

$$k_{ногл} = \sigma n_0 = \sigma(n_1 + n_2) = \sigma \left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right),$$

$$\frac{k_{ногл}(T)}{k_{ногл}(0)} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)} = \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT}.$$

Задача 1.59. Рубиновый лазер

Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало со 100%-м отражением, а другое — с коэффициентом пропускания $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $l = 12$ см. Известно, что коэффициент поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $k_n = 0,4 \text{ см}^{-1}$. Найти, какую часть атомов хрома нужно перевести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

Решение.

Переход из n_2 на n_1 . Он показан на рисунке (16.12).

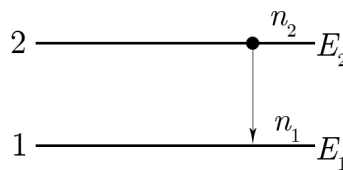


Рис. 16.12

$$n_1 + n_2 = n_0.$$

Доля поглощенных квантов равна

$$\sigma \cdot n_0 \cdot l \text{ см},$$

$$k_n = 0,4 \text{ см}^{-1} = \sigma n_0.$$

Нарисуем резонатор лазера. Он показан на рисунке (16.13).

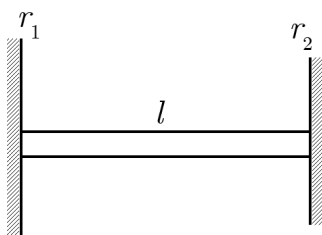


Рис. 16.13

Условие самовозбуждения:

$$\frac{j(2l)}{j(0)} = R_1 R_2 e^{\sigma(n_2 - n_1)2l} \geq 1,$$

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 0,9.$$

Запишем **Закон Бугера**:

$$j(2l) = j_0 e^{\alpha \cdot 2l},$$

$$\sigma(n_2 - n_1)2l = \ln \frac{1}{R_1 R_2}, \quad \sigma = \frac{k_n}{n_0},$$

$$\frac{n_2 - n_1}{n_0} = \frac{1}{2lk_{II}} \ln \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{96} \approx 0,011,$$

$$n_1 + n_2 = n_0, \quad n_2 - n_1 = 0,01n_0, \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_0} = 0,505.$$