



ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

Корибут А.В.

МФТИ 2022

Оглавление

1	7 сентября 2022	5
1.1	Краткий набор сведений из дифференциальной геометрии и линейной алгебры	5
1.1	Многообразия, скаляры, векторы, ковекторы и тензоры	5
1.2	Связь между векторами и ковекторами	9
1.3	Резюме	10
1.2	Преобразования Лоренца	11
2	14 сентября 2022	14
2.1	Про выбор знаков	14
2.2	Переход в движущуюся систему отсчета	15
2.3	Группа $O(3, 1)$	16
2.4	Сложение скоростей	18
2.5	Сокращение длины	18
2.6	Замедление времени	19
2.7	Изменение направления	19
2.8	4-скорость	19
2.9	4-импульс	22
3	21 сентября 2022	23
3.1	Волновое уравнение и эффект Доплера	23
3.2	Принцип наименьшего действия	26
3.3	Функция Лагранжа релятивистской частицы	27
3.4	Теорема Нётер	28
4	28 сентября 2022	31
4.1	Упругие столкновения (рассеяния) частиц	31
4.2	Неупругие столкновения (рассеяния) частиц	34
4.3	Взаимодействие заряженной релятивистской частицы с электромагнитным полем	36
5	5 октября 2022	39
5.1	Функции Лагранжа и Гамильтона для частицы в электромагнитном поле . .	39
5.2	Калибровочные преобразования	40
5.3	Уравнения Эйлера-Лагранжа для полей	41
5.4	Действие и уравнения движения для электромагнитного поля	43
5.5	Калибровки и степени свободы	46

6	12 октября 2022	48
6.1	Инварианты поля, 4-вектор тока	48
6.2	Калибровочная инвариантность, совместность и уравнение непрерывности .	50
6.3	Скалярная электродинамика	51
7	19 октября 2022	56
7.1	Теорема Нётер для полевых систем	56
1.1	Глобальные внутренние (цветные) симметрии	57
1.2	Общий случай	58
1.3	Трансляционная инвариантность. Тензор энергии-импульса	61
8	26 октября 2022	63
8.1	Тензор энергии-импульса скалярного поля	63
8.2	Тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля	64
8.3	Электромагнитное поле с внешними токами	66
8.4	Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и точечной частицы .	67
9	2 ноября 2022	70
9.1	Электростатика	70
9.2	Функция Грина уравнения Пуассона	71
2.1	Мультипольное разложение	73
2.2	Симметрии и тензор квадрупольного момента	75
9.3	Потенциальная энергия зарядов во внешнем поле	77
10	9 ноября 2022	79
10.1	Магнитостатика	79
10.2	Магнитное поле системы токов на больших расстояниях	81
10.3	Теорема Лармора	82
10.4	Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле	83
11	16 ноября 2022	85
11.1	Свободное электромагнитное поле	85
11.2	Свойства плоских электромагнитных волн	86
11.3	Тензор поляризации	87
11.4	Неоднородное уравнение Максвелла и запаздывающая функция Грина . . .	90
12	23 ноября 2022	94
12.1	Потенциалы Лиенара-Вихерта	94
12.2	Напряженности \vec{E} и \vec{H} из запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта . .	96
2.1	Словарик производных	96
2.2	Вычисление напряженностей	96
12.3	Дипольное приближение	99
13	30 ноября 2022	102
13.1	Синхротронное излучение	102
1.1	Мощность	102
1.2	Угловое и спектральное распределения	104

13.2	Излучение в мультипольном приближении	106
14	7 декабря 2022	110
14.1	Радиационное трение	110
1.1	Проблемы с силой радиационного трения	111
14.2	Естественная ширина спектральной линии	112
14.3	Границы применимости классической электродинамики	114
14.4	Рассеяние электромагнитных волн зарядами	115

Лекция 1

7 сентября 2022

Lec1

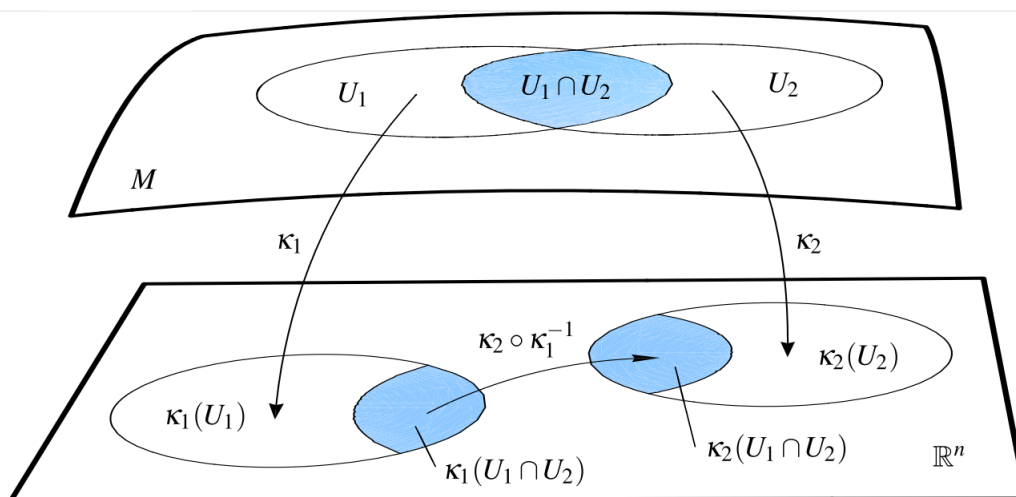
1.1 Краткий набор сведений из дифференциальной геометрии и линейной алгебры

1.1 Многообразия, скаляры, векторы, ковекторы и тензоры

Основным объектом изучения дифференциальной геометрии являются **Многообразия**. **Гладким многообразием** называется хаусдорфово топологическое пространство¹ со счетной базой локально гомеоморфное \mathbb{R}^n . Последнее означает, что для любой точки $m \in M$ существует окрестность U , содержащая m , и отображение $\kappa : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Отображение κ , также называемое **картой**, является гомеоморфизмом на образе $\kappa(U)$. Если два множества $U_{1,2} \in M$ имеют ненулевое пересечение и с каждым U_1 и U_2 связаны соответственно гомеоморфизмы κ_1 и κ_2 , то отображения

$$\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

должны быть класса C^∞ .



Отображения типа $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ и $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$ неоднократно встречались вам в курсе математического анализа. Если на множестве $\kappa_1(U_1 \cap U_2)$ ввести координаты x^μ $\mu = 1, 2, \dots, n$, а на

¹Для любых двух различных точек существуют их окрестности, которые не пересекаются.

множестве $\kappa_2(U_1 \cap U_2) - x'^\mu$, то отображение, например, $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ выражает x в терминах x'^2 , т.е. является обычной заменой координат.

Изучать многообразия сами по себе не представляет большого интереса. На многообразиях можно определить, например, скалярные функции

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

На практике же никто не изучает функции на абстрактном топологическом пространстве M , потому что в этом случае придется жертвовать таким понятием как дифференцирование, например. Можно из f определить обычную скалярную функцию из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}

$$\phi(x) := f(\kappa_1^{-1}(x)), \quad x \in \kappa_1(U_1) \quad (1.1.3)$$

Такие функции ϕ называют **локальным представителем** скалярного отображения f на множестве $\kappa_1(U_1)$. На множестве $\kappa_2(U_2)$ у отображения f будет уже другой локальный представитель

$$\phi'(x') := f(\kappa_2^{-1}(x')), \quad x' \in \kappa_2(U_2). \quad (1.1.4)$$

Если же рассмотреть какую-нибудь точку $m \in U_1 \cap U_2$ такую, что $\kappa_1(m) = x$ и $\kappa_2(m) = x'$, то очевидно должна быть следующая связь между локальными представителями

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (1.1.5)$$

Часто это формулу записывают в следующем виде

$$\phi'(x') = \phi(x(x')). \quad (1.1.6) \quad \boxed{\text{scalar}}$$

Последняя формула также должна быть знакомой. Это формула преобразований скалярного поля при замене координат. Например, чтобы найти функцию, известную в декартовых координатах $\phi(x, y, z)$, в сферических координатах, то нужно просто выразить x, y, z через радиус и сферические углы, т.е.

$$\phi'(r, \theta, \varphi) = \phi(r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta). \quad (1.1.7)$$

Кроме одиночных скалярных функций можно рассмотреть их набор $\phi^i(x)$ $i = 1, \dots, N$, тем не менее закон преобразований локальных представителей будет выглядеть аналогично (1.1.6). Однако в формулах, например, приведенных в задавальнике, можно найти такой закон преобразования для векторных полей

$$V'^\mu(x') = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} V^\nu(x(x')). \quad (1.1.8) \quad \boxed{\text{preVec}}$$

Для краткости принята следующая конвенция, так называемое **правило Эйнштейна**: по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование. Т.е. выражение, например, $A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho}$ следует понимать как

$$A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho} \equiv \sum_\mu \sum_\nu \sum_\rho A^{\mu\nu\rho} B_\mu C_{\nu\rho}. \quad (1.1.9)$$

²Отображение $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ это набор из n функций $x^\mu(x'^1, \dots, x'^n)$. Далее для краткости будем писать $x^\mu(x')$ или $x'^\mu(x)$ для обратного преобразования.

В этом свете формула (1.1.8) переписывается как

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} V^\nu(x(x')). \quad (1.1.10) \quad \boxed{\text{Vec}}$$

Обращаю ваше внимание на то, что в правиле Эйнштейна один из пары повторяющихся индексов пишется сверху, а другой снизу. Смысл этого дополнения к правилу суммирования по повторяющимся индексам будет ясен ниже.

Чтобы понять природу такого необычного закона преобразования (1.1.10) (появление матрицы Якоби $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$) следует понять в каком же множестве принимают значения векторные поля, т.е.

$$V : M \rightarrow ??? \quad (1.1.11) \quad \boxed{\text{VecField}}$$

Рассмотрим множество кривых, т.е. отображений

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \quad (1.1.12) \quad \boxed{\text{curve}}$$

таких что $\gamma(0) = m$. Обозначим это множество $K_m(M)$. Будем считать, что две кривые γ_1 и γ_2 из $K_m(M)$ эквивалентны $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2(t)) \right|_{t=0}. \quad (1.1.13)$$

Здесь κ карта на многообразии, отображающая окрестность точки m в область в \mathbb{R}^n . Множество классов эквивалентности называют **касательным пространством** в точке m

$$T_m M := K_m(M) / \sim. \quad (1.1.14)$$

Данное определение весьма абстрактно, в курсе дифференциальной геометрии доказывается, что $T_m M$ изоморфно \mathbb{R}^n . Для любой кривой $\tilde{\gamma}$ из класса эквивалентности $[\gamma]$ определим отображение

$$d\kappa : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.15)$$

по правилу

$$d\kappa([\gamma]) := \left. \frac{d}{dt}(\kappa \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}, \quad \tilde{\gamma} \in [\gamma]. \quad (1.1.16)$$

Это отображение по построению инъективно, также можно доказать, что это отображение сюръективно. Последнее является довольно простым упражнением, попробуйте это сделать самостоятельно.

Как и ранее точка m может принадлежать сразу двум окрестностям U_1 и U_2 . В этом случае у нас есть пара отображений $d\kappa_1$ и $d\kappa_2$, и связь между ними дается формулой

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}, \quad \tilde{\gamma} \in [\gamma]. \quad (1.1.17)$$

Дифференцируя правую часть как сложную функцию, получим

$$\left. \frac{d}{dt}(\kappa_1 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \frac{d\kappa_1(\kappa_2^{-1}(\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))))}{d\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))} \left. \frac{d}{dt}(\kappa_2 \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}. \quad (1.1.18)$$

Записанная здесь схематично производная $\frac{d\kappa_1(\kappa_2^{-1}(\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))))}{d\kappa_2(\tilde{\gamma}(t))}$ – это и есть матрица Якоби, которая появляется в формуле (1.1.10). Теперь мы можем дать определение тому, что

же такие векторные поля. **Векторное поле** каждой точке m на многообразии ставит в соответствие вектор из касательного пространства $T_m M$. Обращаю внимание, что в каждой точке m свое! касательное пространство $T_m M$. В этом смысле дать векторному полю определение типа (1.1.11) принципиально невозможно (если не вводить дополнительно понятие касательного расслоения). Как и в случае скалярного поля мы не будем работать с функциями на абстрактном топологическом пространстве, с помощью карт κ и $d\kappa$ мы можем ввести локального представителя. Формула (1.1.10) показывает как переходить от представителя к представителю при замене карт.

Из курса линейной алгебры известно, что по любому линейному пространству V можно построить двойственное пространство V^* . Также известно, что замена базиса в V индуцирует замену базиса в V^* , кроме того, преобразование в V^* должно быть обратным по отношению к преобразованию, совершаемому в V .

Аналогично векторным полям можно ввести ковекторные поля. **Ковекторное поле** каждой точке m на многообразии ставит в соответствие вектор из кокасательного пространства $T_m^* M$, где $T_m^* M$ пространство двойственное к $T_m M$. Ковекторные поля традиционно пишут с нижним индексом, а их закон преобразования, как и следует из того, что выше, дается выражением

$$W'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu(x')}{\partial x'^\mu} W_\nu(x(x')). \quad (1.1.19) \quad \boxed{\text{Covec}}$$

У понятий векторного и ковекторного полей существует естественное обобщение. Тензором ранга (p, q) называется отображение, которое точке m ставит в соответствие элемент из $\underbrace{T_m M \otimes \dots \otimes T_m M}_p \otimes \underbrace{T_m^* M \otimes \dots \otimes T_m^* M}_q$. В этом смысле векторные и ковекторные поля

– это тензоры ранга $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Закон преобразования тензорных полей ранга (p, q) при переходе от одной карты (с координатами x) к другой (с координатами x') дается формулой

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\rho_1 \dots \rho_q}(x(x')). \quad (1.1.20) \quad \boxed{\text{Tensor}}$$

Теперь поясним, почему если индексы совпадают, то один индекс пишется сверху, а другой снизу. Рассмотрим произведение векторного поля V^μ на ковекторное поле W_μ

$$V^\mu(x) W_\mu(x). \quad (1.1.21) \quad \boxed{\text{Contr}}$$

Покажем, что при переходе к другим координатам $x'(x)$ такая свертка (1.1.21) преобразуется как скалярное поле (1.1.6). Действительно

$$\begin{aligned} V'^\mu(x') W'_\mu(x') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V^\lambda(x(x')) W_\rho(x(x')) = \delta^\rho_\lambda V^\lambda(x(x')) W_\rho(x(x')) = \\ &= V^\lambda(x(x')) W_\lambda(x(x')). \end{aligned} \quad (1.1.22) \quad \boxed{\text{newScalar}}$$

Здесь был использован факт, который должен быть известен из курса математического анализа: матрицы Якоби для прямого и обратного преобразования являются взаимно обратными. Последний факт в компонентах соответствующих матриц Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = \delta^\rho_\lambda. \quad (1.1.23)$$

Т.е. если индексы свернуты так, что один из них верхний, а другой нижний, то при замене координат «о преобразованиях этих индексов» можно забыть: не нужно писать соответствующие матрицы Якоби, поскольку они являются обратными друг к другу, следовательно сокращаются и пропадают из формулы для преобразования.

1.2 Связь между векторами и ковекторами

В курсе линейной алгебры доказывалось, что линейное пространство V и ему двойственное V^* изоморфны. Нас интересует как по вектору $v \in V$ построить линейный функционал $v^* \in V^*$. Для этого существует каноническая процедура, которая справедлива даже в том случае, когда пространство V - бесконечномерное пространство функций (так называемая теорема Риса, которая по всей строгости будет сформулирована и доказана в курсе функционального анализа).

Если пространство V помимо структуры линейного пространства наделено также скалярным произведением, т.е. задана невырожденная билинейная форма $(\bullet, \bullet)^3$, то по вектору v можно построить линейный функционал как

$$(v, \bullet) \in V^*. \quad (1.1.24) \quad \boxed{\text{Riesz}}$$

Т.е. чтобы вычислить значение такого линейного функционала на каком-нибудь векторе $u \in V$ нужно вычислить (v, u) . В наших индексных обозначениях вектор v однозначно определяется своими координатами v^μ ⁴, а чтобы задать билинейную форму, достаточно задать матрицу Грама $g_{\mu\nu}$, которую далее будем называть **метрикой**. Тогда, согласно (1.1.24), координаты v_ν^* ковектора $v^* \in V^*$ даются формулой

$$v_\nu^* = g_{\mu\nu} v^\mu. \quad (1.1.25) \quad \boxed{g}$$

Данное определение гарантирует, что ковекторы будут преобразовываться обратным преобразованием по отношению к векторам (вспомните, как при замене базиса преобразуются билинейные формы, и покажите этот факт).

Поскольку что называть вектором, а что ковектором – это всего лишь конвенция (пространства V и V^* изоморфны), то должен быть и обратный аналогичный способ, т.е. как по ковектору построить вектор. Для этого нам нужна метрика (матрица Грама) в V^* , которую будем обозначать $G^{\mu\nu}$. Так по ковектору v^* построим вектор $v \in V$ согласно правилу

$$v^\mu = G^{\mu\nu} v_\nu^*. \quad (1.1.26) \quad \boxed{G}$$

Опять же прямым вычислением можно проверить, что закон преобразования будет верным.

Теперь рассмотрим цепочку отображений

$$V \xrightarrow{g} V^* \xrightarrow{G} V, \quad (1.1.27)$$

где отображения g и G даются соответственно формулами (1.1.25) и (1.1.26). Нам бы хотелось, чтобы композиция $G \circ g$ была тождественным отображением. Найдем, исходя из

³Положительную определенность мы требовать не будем.

⁴Есть соглашение, что координаты векторов пишем с верхним индексом, а координаты ковекторов с нижним.

этого, как должны быть связаны матрицы $g_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$

$$G \circ g = \text{Id} \iff v^\mu = G^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} v^\lambda \implies G^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (1.1.28)$$

т.е. матрицы $G^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ должны быть взаимно обратными. В дифференциальной геометрии принята конвенция обозначать обратную к матрице $g_{\mu\nu}$ той же самой буквой, но с индексами сверху $g^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu. \quad (1.1.29)$$

В нашем случае пространствами V и V^* являются $T_m M$ и $T_m^* M$ соответственно. Т.е. матрица $g_{\mu\nu}$ должна быть определена в каждой точке многообразия⁵. Пусть у нас есть тензор ранга $(0, 2)$, который преобразуется согласно (1.1.20), т.е.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}(x(x')). \quad (1.1.30) \quad \boxed{\text{metric}}$$

Убедитесь, что если координаты векторов преобразуются по формуле (1.1.10), то метрика относительно таких преобразований преобразуется как билинейная форма! Прямым вычислением можно показать, что построенное ковекторное поле $V_\mu(x)$ по векторному полю $V^\mu(x)$ согласно правилу (1.1.25) действительно преобразуется как ковектор. В самом деле

$$\begin{aligned} V'_\mu(x') &= g'_{\mu\nu}(x') V'^\nu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}(x(x')) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} V^\sigma(x(x')) = \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\lambda}(x(x')) V^\lambda(x(x')). \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

Т.е. поднимая или опуская индексы с помощью метрики (иногда говорят «жонглируя индексами»), мы получаем объекты с другими законами преобразований при переходе от одной карты к другой.

1.3 Резюме

Главным для нас будет являться закон преобразований тензоров при переходе к другой карте (системе отсчета)

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\lambda_n}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\rho_1 \dots \rho_m}(x(x')). \quad (1.1.32) \quad \boxed{\text{Tensor1}}$$

Также любой ковариантный индекс можно преобразовать в контрвариантный и наоборот

$$V_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x) V^\nu(x), \quad W^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x) W_\nu(x). \quad (1.1.33)$$

При этом метрика с верхними индексами является обратной к метрике с нижними, т.е.

$$g_{\mu\rho}(x) g^{\rho\nu}(x) = \delta_\mu^\nu. \quad (1.1.34)$$

⁵Следует отметить, что не все многообразия допускают существование такого объекта

Далее в течение семестра мы будем изучать многообразие $M = \mathbb{R}^4$, а преобразования координат будем рассматривать лишь линейные. В качестве метрики $g_{\mu\nu}$ будем рассматриваться только метрика Минковского

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.1.35) \quad \boxed{\text{Mink}}$$

У внимательного читателя может возникнуть вопрос, а в какой карте задана эта самая метрика Минковского? Ведь даже при линейной замене координат (1.1.30) она будет меняться. Мы ограничим все возможные линейные замены координат на те, которые оставляют метрику Минковского инвариантной, эти преобразования называют **преобразованиями Лоренца**.

В СТО и ОТО принято нумеровать координаты с нуля, т.е. греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3.

1.2 Преобразования Лоренца

Рассмотрим общие линейные преобразования координат

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} + a^{\mu}. \quad (1.2.1) \quad \boxed{\text{Poincare}}$$

Здесь Λ^{μ}_{ν} – некоторая обратимая матрица, свойства которой нам предстоит выяснить. Подставляя преобразование (1.2.1) в (1.1.30) и требуя инвариантность метрики, мы получим

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.2.2) \quad \boxed{0}$$

При получении этого выражения мы использовали

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\rho}_{\mu}. \quad (1.2.3)$$

Формулу (1.2.2) в матричных обозначениях можно записать в виде

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.2.4)$$

Найдем частное решение уравнения (1.2.2). Будем его искать в виде

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.5) \quad \boxed{\text{ansatz}}$$

Несмотря на то что (1.2.2) это система из 16-ти уравнений, оказывается, что некоторые из них сразу же выполнены, если подставить туда (1.2.5). Нетривиальными являются лишь следующие из них

$$\begin{cases} \eta_{00} = \Lambda^{\rho}_0 \Lambda^{\sigma}_0 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{01} = \Lambda^{\rho}_0 \Lambda^{\sigma}_1 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{10} = \Lambda^{\rho}_1 \Lambda^{\sigma}_0 \eta_{\rho\sigma}, \\ \eta_{11} = \Lambda^{\rho}_1 \Lambda^{\sigma}_1 \eta_{\rho\sigma}. \end{cases} \quad (1.2.6) \quad \boxed{\text{Lor}}$$

Настоятельно рекомендуется проверить, что остальные уравнения действительно выполнены! Раскроем явно одну из сумм, скрытую за правилом суммирования по повторяющимся индексам

$$\begin{aligned}\Lambda^\rho{}_0\Lambda^\sigma{}_0\eta_{\rho\sigma} &= \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0\eta_{00} + \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0\eta_{11} + \Lambda^2{}_0\Lambda^2{}_0\eta_{22} + \Lambda^3{}_0\Lambda^3{}_0\eta_{33} = \\ &= \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 - \Lambda^2{}_0\Lambda^2{}_0 - \Lambda^3{}_0\Lambda^3{}_0. \quad (1.2.7)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что элементы $\eta_{\rho\sigma}$ отличны от нуля, только когда $\rho = \sigma$. Т.е. слагаемые типа $\Lambda^2{}_0\Lambda^3{}_0\eta_{23}$ формально присутствуют в сумме, но из-за того, что $\eta_{23} = 0$, они равны нулю. Второй строчкой были подставлены конкретные значения для компонент метрики Минковского. Оказывается, что предыдущую формулу можно еще упростить, если вспомнить, что некоторые элементы Λ равны нулю. В итоге останется лишь

$$\Lambda^\rho{}_0\Lambda^\sigma{}_0\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0. \quad (1.2.8)$$

Упрощая аналогичным образом другие уравнения системы (1.2.6), мы ее можем привести к виду

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 = 1, \\ \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = 0, \\ \Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_0 = 0, \\ \Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_1 = -1. \end{cases} \quad (1.2.9) \quad \boxed{1234}$$

Очевидно, что второе и третье уравнения этой системы тождественны, а первое и четвертое уравнения описывают гиперболы. Ровно как окружность удобно параметризовать углом, также и гиперболы удобно параметризовать «гиперболическим углом». Решение первого уравнения имеет вид

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = \pm \sinh \phi. \quad (1.2.10) \quad \boxed{\phi}$$

Аналогично решение четвертого уравнения

$$\Lambda^1{}_1 = \pm \cosh \psi, \quad \Lambda^0{}_1 = \pm \sinh \psi \quad (1.2.11)$$

Несмотря на то что существует целых 16 различных способов выбора знаков, далеко не все из них отвечают «разным» преобразованиям. Поясним, что имеется ввиду. Параметр ϕ принимает любые значения из \mathbb{R} , если выбрать в (1.2.10) расстановку знаков типа

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = -\sinh \phi, \quad (1.2.12)$$

то мы всегда можем перейти от параметра ϕ к $\phi' = -\phi$ и в терминах ϕ' уже получим

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh \phi', \quad \Lambda^1{}_0 = +\sinh \phi' \quad (1.2.13)$$

В этом свете существенным является выбор знаков только лишь перед гиперболическими косинусами, поскольку изменить эти знаки простым переопределением угла не выйдет. Далее мы разберем одну из возможных расстановок знаков, которая наиболее важна в физических приложениях (об этом позже)

$$\Lambda^0{}_0 = \cosh \phi, \quad \Lambda^1{}_0 = \sinh \phi, \quad \Lambda^1{}_1 = \cosh \psi, \quad \Lambda^0{}_1 = \sinh \psi. \quad (1.2.14)$$

Второе уравнение (1.2.9) накладывает связь на параметры ϕ и ψ . После подстановки получим

$$\sinh \psi \cosh \phi - \sinh \phi \cosh \psi = \sinh(\psi - \phi) = 0 \implies \phi = \psi. \quad (1.2.15)$$

Таким образом, мы нашли однопараметрическое семейство преобразований

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.16) \quad \boxed{\text{TrueLoren}}$$

сохраняющих метрику Минковского. Такого рода преобразования описывают переход в движущуюся систему отсчета.

Лекция 2

14 сентября 2022

Lec2

2.1 Про выбор знаков

В прошлой лекции мы рассмотрели частный выбор знаков перед гиперболическими косинусами, в этой же давайте проанализируем все возможные варианты, т.е. рассмотрим матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \pm \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \mp \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Здесь в первой матрице знаки перед гиперболическими косинусами совпадают, а у во второй различны. Уравнение 2 системы (1.2.9) пока не наложено. Если потребовать, чтобы оно было выполнено, то это дает следующие соотношения для ϕ и ψ для первой и второй матрицы соответственно

$$\phi = \psi, \phi = -\psi. \quad (2.1.2)$$

Сами матрицы приобретают вид

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \pm \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \mp \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Lorentz12

Мы не просто так разделили случаи совпадающих и различающихся знаков. Определитель первой матрицы равен $+1$, а второй -1 . Т.е. матрицы второго типа описывают отражения. Следует заметить, что не все преобразования, которые сохраняют метрику Минковского и как следствие интервал, являются симметриями природы. Уравнения теории слабых взаимодействий, например, не инвариантны относительно преобразований типа отражений¹. Не все преобразования первого типа также являются для нас удовлетворительными. Мы хотим, чтобы причинно связанные события происходили в одном и том же порядке в любой системе отсчета. Пусть событие 1 произошло в момент времени 0 в начале координат,

¹Кроме того, данный факт был обнаружен экспериментально. Если кто-то испытывает трудности с поиском вопроса по выбору при подготовке к ГОСу по физике, то поищите «нарушение четности в слабых взаимодействиях», на Youtube хватает роликов с доступным объяснением.

тогда если событие 2 происходит спустя время t и вызвано событием 1, то в пространстве оно может быть локализовано только лишь внутри шара радиуса ct . Здесь мы явно использовали то, что сигналы распространяются с конечной скоростью, и максимально возможная скорость - это скорость света c . Оказывается, что необходимо и достаточно потребовать

$$\Lambda^0_0 \geq 1, \quad (2.1.4) \quad \boxed{\text{Ortho}}$$

чтобы направление времени не менялось, т.е. чтобы причинно связанные события следовали в одном и том же порядке в любой системе отсчета. Условие (2.1.4) называют условием **ортохронности** преобразований, а сами преобразования, решающие (1.2.2) с единичным детерминантом и (2.1.4), - **собственной ортохронной группой Лоренца** $SO_+(1, 3)$.

Рассмотрим простой пример. Пусть события 1 и 2 даются в пространстве времени следующими координатами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ct \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Будем считать, что событие 1 предшествует событию 2, т.е. $t > 0$. При переходе в другую систему отсчета координаты первого события очевидно не изменятся, а второго после преобразования первой матрицей из (2.1.3) приобретут вид

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \phi ct + \sinh \phi x \\ \sinh \phi ct \pm \cosh \phi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Видно, что если события причинно связаны, т.е. $x \leq ct$, то при выборе знака минус перед гиперболическим косинусом в (2.1.3) мы получим, что в другой системе координат событие 2 предшествовало событию 1, что противоречит здравому смыслу (если вы, конечно, не снимаете фантастический фильм). Также видно, что при выборе знака $+$ перед гиперболическим косинусом события всегда будут происходить в том же порядке, что и в исходной системе координат. Таким образом, преобразование, полученное на прошлой лекции (1.2.16), является единственным удовлетворительным решением системы (1.2.2) с точки зрения физических требований в рамках анзаца (1.2.5).

Удобным критерием для того, чтобы узнать причинно связаны события или нет, является знак квадрата **интервала**.

$$s^2 := (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.1.7) \quad \boxed{\text{interval}}$$

Если события причинно связаны, то $s^2 \geq 0$. Интервал с $s^2 > 0$ называют **временеподобным**, $s^2 = 0$ - **светоподобным**, а $s^2 < 0$ - **пространственноподобным**.

2.2 Переход в движущуюся систему отсчета

На прошлой лекции было анонсировано, что такие преобразования описывают переход в подвижную систему отсчета, давайте теперь это докажем. Пусть в исходной системе

отсчета некоторый объект движется со скоростью v вдоль оси x , тогда его координаты в пространстве времени могут быть заданы в виде

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Выполнив преобразование (1.2.16), мы видим, что в новой системе отсчета координаты объекта даются выражением

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi ct + \sinh \phi vt \\ \sinh \phi ct + \cosh \phi vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Из этого выражения, конкретно из второй строчки, видно, что можно выбрать гиперболический угол ϕ таким образом, чтобы в новых координатах объект покоился. Найдем явную связь между скоростью и гиперболическим углом

$$\sinh \phi ct + \cosh \phi vt = 0 \implies \tanh \phi = -\frac{v}{c}. \quad (2.2.3) \quad \boxed{\tanh}$$

С помощью тождеств для гиперболических функций получим

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh \phi = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c}. \quad (2.2.4)$$

В релятивистской физике приняты следующие стандартные обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.2.5)$$

В этих обозначениях переход в систему отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью v вдоль оси x , дается матрицей

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6) \quad \boxed{\text{LorX}}$$

2.3 Группа $O(3, 1)$

Покажем, что матрицы, решающие (1.2.2), образуют группу. На лекции это было проделано на языке матричного умножения, здесь же приведем доказательство в индексных обозначениях. Пусть матрица $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ также решает (1.2.2), т.е.

$$\tilde{\Lambda}^\rho{}_\mu \tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.3.1)$$

Покажем, что произведение $\Lambda^\mu_\rho \tilde{\Lambda}^\rho_\nu$ также решает (1.2.2). Действительно,

$$\Lambda^\rho_\xi \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \Lambda^\sigma_\zeta \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \eta_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \underbrace{\Lambda^\rho_\xi \Lambda^\sigma_\zeta \eta_{\rho\sigma}}_{\eta_{\xi\zeta}} = \tilde{\Lambda}^\xi_\mu \tilde{\Lambda}^\zeta_\nu \eta_{\xi\zeta} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.3.2)$$

Очевидно, что в группе есть единица, которая отвечает тождественному преобразованию δ^μ_ν . Покажем, что для любого Λ^μ_ν , решающего (1.2.2), существует обратный. Для этого домножим уравнение (1.2.2) слева и справа на $\eta^{\mu\xi}$, уравнение после этого приобретет вид

$$\eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} = \delta^\xi_\nu \quad (2.3.3)$$

Здесь при преобразовании правой части мы воспользовались (1.1.35). Выражение в левой части просто перегруппируем

$$(\eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma}) \Lambda^\sigma_\nu = \delta^\xi_\nu. \quad (2.3.4)$$

Отсюда немедленно следует, что обратная матрица к Λ^σ_ν дается формулой

$$(\Lambda^{-1})^\xi_\sigma = \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.5)$$

L-1down

На лекции было совершенно справедливо замечено, что для того, чтобы были выполнены все аксиомы группы, нужно, чтобы и обратный элемент решал (1.2.2). Чтобы в этом убедиться, сперва покажем, что матрицы, решающие (1.2.2), также решают

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma}. \quad (2.3.6)$$

0*

Умножая уравнение справа и слева на $\eta_{\rho\xi}$, мы получим

$$\Lambda^\sigma_\nu (\eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\xi}) = \delta^\sigma_\xi. \quad (2.3.7)$$

0**

Обращаю ваше внимание, что (2.3.7) – это переписывание (2.3.6) в другой форме! В этом смысле уравнения (2.3.6) и (2.3.7) обладают идентичным набором решений. Из уравнения (2.3.7) видно

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\xi = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\xi} \quad (2.3.8)$$

L-1up

Выражения (2.3.5) и (2.3.8) идентичны с точностью до переобозначения индексов. Итого, уравнение (1.2.2) мы смогли переписать в виде (2.3.5), а уравнение (2.3.6) – в виде (2.3.8), но уравнения (2.3.5) и (2.3.8) тождественны, следовательно тождественны и уравнения (1.2.2) и (2.3.6). В этом смысле нам не важно проверять, решают ли обратные элементы (1.2.2) или (2.3.6). Подставим для разнообразия в левую часть уравнения (2.3.6)

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\gamma} &= \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\gamma} = \eta^{\mu\xi} \Lambda^\rho_\mu \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\lambda} = \\ &= \eta^{\mu\xi} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\lambda_\alpha \eta_{\rho\lambda} = \eta^{\mu\xi} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\alpha} = \eta^{\xi\beta}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

В итоге мы доказали, что матрицы, решающие (1.2.2), образуют группу, эту группу называют **группой псевдоортогональных преобразований** и обозначают $O(1,3)$.

2.4 Сложение скоростей

В общем случае закон композиции в группе $O(1, 3)$ или $SO_+(1, 3)$ весьма сложен. Например, композиция переходов в движущиеся системы отсчета со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 уже **НЕ** является просто переходом в подвижную систему отсчета с какой-нибудь новой скоростью $\vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2$. Тем не менее, если скорости сонаправлены, то результат композиции – это снова переход в движущуюся систему координат с какой-то новой скоростью. Действительно, рассмотрим произведение преобразований типа (1.2.16) с разными ϕ_1 и ϕ_2

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & \sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & \sinh \phi_2 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_2 & \cosh \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1 + \phi_2) & \sinh(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_1 + \phi_2) & \cosh(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Напомним, что скорость подвижной системы отсчета – это гиперболический тангенс соответствующего угла (2.2.3), тогда имеем

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \implies v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (2.4.2) \quad \boxed{\text{Vel}}$$

2.5 Сокращение длины

Одним из классических эффектов специальной теории относительности является сокращение длины. Предположим, что мимо нас пролетает стержень со скоростью v , направленной вдоль стержня. Мы **одновременно!** (для простоты в момент времени $t = 0$) измерим положения концов стержня в покоящейся системе отсчета. Координаты событий (измерений) в пространстве времени даются формулами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.1)$$

Тогда координаты этих же измерений в системе покоя стержня даются формулами

$$\begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\gamma x_1 \\ \gamma x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -\beta\gamma x_2 \\ \gamma x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Длина стержня в его системе покоя – это разница $x'_2 - x'_1 = \ell_0$, она связана формулой с одновременными результатами измерений в системе, в которой стержень движется

$$\ell_0 = \gamma \ell \implies \ell = \gamma^{-1} \ell_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ell_0. \quad (2.5.3)$$

²Речь идет о так называемом Вигнеровском повороте (вращении) или прецессии Томаса.

2.6 Замедление времени

Самостоятельно. Разобрано во втором томе ЛЛ.

2.7 Изменение направления

Пусть в вагоне летит камень так, что его мировая линия (годограф в пространстве времени) дается выражением

$$\begin{pmatrix} ct \\ u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.1)$$

В системе отсчета, в которой вагон движется со скоростью V , мировая линия брошенного камня даётся выражением

$$\begin{pmatrix} ct' \\ u'_x t' \\ u'_y t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct + \beta\gamma u_x t \\ \beta\gamma ct + \gamma u_x t \\ u_y t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.2)$$

В итоге имеем систему уравнений, из которой легко находим скорость камня в системе отсчета относительно, которой вагон движется

$$u'_x = \frac{u_x + V}{1 + \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x V}{c^2}}. \quad (2.7.3) \quad \boxed{\text{direction}}$$

Заметим, что первая формула в точности совпадает с релятивистским законом сложения скоростей (2.4.2).

В качестве интересного примера рассмотрим фотон вместо камня. Скорости u_x и u_y даются выражениями

$$u_x = c \cos \theta, \quad u_y = c \sin \theta. \quad (2.7.4) \quad \boxed{\text{photon}}$$

Рекомендую проверить, что модуль скорости фотона в штрихованной системе отсчета также будет равен c . Подставив (2.7.4) в (2.7.3), мы найдем, как изменится угол

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (2.7.5) \quad \boxed{\text{aberration}}$$

Эту формулу также называют формулой **абберации света**. Из формулы (2.7.5) следует, что если в летящей ракете светить фонариком перпендикулярно движению, то для наблюдателя на земле луч будет отклонен в направлении движения ракеты. Чем больше скорость, тем сильнее будет отклонение. Данный эффект называют **эффектом прожектора**.

2.8 4-скорость

В предыдущей секции мы вывели закон преобразования скорости при переходе в движущуюся систему отсчета (2.7.3). Данный закон преобразования является нелинейным, что

не очень-то удобно для практических вычислений. Оказывается, можно ввести обобщение обычной скорости, так называемую **4-скорость**, которая преобразуется линейно при переходе в другую систему отсчета.

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (2.8.1)$$

Здесь мы предполагаем, что координаты частицы в пространстве времени однозначно задаются функцией $x^\mu(s)$ (см. например (1.1.12)). Под s понимается следующее

$$\begin{aligned} s(t) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sqrt{(c(t_i - t_{i-1}))^2 - (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 - (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 - (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}. \end{aligned} \quad (2.8.2) \quad \boxed{\text{S}}$$

Здесь $\{t_i\}_{i=0}^N$ разбиение временного отрезка $[t_0, t]$ ³

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N, \quad (2.8.3)$$

где $t_N = t$, а t_0 – некоторый начальный момент времени⁴. Преобразования Лоренца сохраняют интервал (2.1.7), т.е.

$$ds = ds'. \quad (2.8.4)$$

С другой стороны, при линейных преобразованиях

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.8.5)$$

дифференциал координаты преобразуется линейно

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (2.8.6)$$

Отсюда мы видим, что четыре-скорость преобразуется как вектор (1.1.10), т.е.

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (2.8.7)$$

Теперь неплохо бы получить связь с привычной обычной скоростью. Мы вправе параметризовать кривую любым удобным параметром, это необязательно должен быть интервал (что-то вроде натуральной параметризации длиной). Пусть кривая параметризована временем, т.е. у нас задана функция $x^\mu(t)$, и тогда, чтобы найти 4-скорость, нам нужно вычислить

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (2.8.8) \quad \boxed{\text{pre4Vel}}$$

Очевидно, что для частиц, двигающихся медленнее скорости света, интервал является монотонной функцией времени

$$s(t') - s(t) = \sqrt{(c(t' - t))^2 - (x(t') - x(t))^2 - (y(t') - y(t))^2 - (z(t') - z(t))^2}. \quad (2.8.9) \quad \boxed{\text{s(t)}}$$

³При $N \rightarrow \infty$ диаметр разбиения $\max_j(t_j - t_{j-1})$ стремится к нулю.

⁴Вспомните соответствующие теоремы о длине кривых из курса математического анализа.

Здесь мы предполагаем, что моменты времени t и t' близки друг к другу. Из (2.8.9) видно, что при любом движении частицы существует обратная функция $t(s)$ ⁵. Предположим, что $t' = t + \delta t$ и приведем выражение (2.8.9) к виду

$$s(t + \delta t) - s(t) = \sqrt{(c\delta t)^2 - (v_x\delta t)^2 - (v_y\delta t)^2 - (v_z\delta t)^2} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (2.8.10)$$

А далее к виду

$$s(t + \delta t) - s(t) = c\delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (2.8.11)$$

Отсюда просто по определению производной имеем

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.12) \quad \boxed{\text{derivativ}}$$

Мы не просто так не дифференцировали (2.8.2)(или (2.8.9)) «в лоб», а действовали по определению производной. Прямой способ куда более громоздкий, но замечу, что мы просто вычислили производную от (2.8.2), перешли от параметризации кривой интервалом к параметризацией временем. Подставим эту производную в (2.8.8) и получим

$$u^\mu = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.8.13)$$

В компонентах четыре-скорость имеет вид

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix}. \quad (2.8.14)$$

Вычислим, как говорят на жаргоне, квадрат четыре-скорости

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1. \quad (2.8.15)$$

Несмотря на то что четыре-скорость, как мы показали, преобразуется как вектор (1.1.10), квадрат 4-скорости инвариантен при переходе в другую систему отсчета и всегда равен единице. Заметим, что для частиц, двигающихся со скоростью света (фотон, глюон, гравитон), понятие 4-скорости не определено, так как изменение интервала между любыми точками в пространстве времени на траектории таких частиц тождественно равно нулю. Последнее ни в коем случае не означает, что для безмассовых частиц нельзя определить понятие мировой линии.

⁵Будем считать, что траектория частицы такова, что эта функция дифференцируема.

2.9 4-импульс

Аналогично обобщению скорости до 4-скорости можно обобщить понятие импульса. **Четыре-импульсом** массивной! частицы называют

$$p^\mu := m c u^\mu . \quad (2.9.1)$$

В компонентах это выражение выглядит следующим образом

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m v_x \\ \gamma m v_y \\ \gamma m v_z \end{pmatrix} . \quad (2.9.2)$$

Энергией релятивистской частицы называют $c p^0$ компоненту 4-импульса

$$E := \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.9.3) \quad \boxed{\text{Energy}}$$

Импульсом релятивистской частицы называют p^i компоненты 4-импульса $i = 1, 2, 3$

$$\vec{p} := \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.9.4) \quad \boxed{\text{Momentum}}$$

Пока мы просто называли какие-то выражения энергией и импульсом, позже с помощью теоремы Нётер покажем, что эти величины сохраняются. Квадрат 4-импульса равен

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 . \quad (2.9.5) \quad \boxed{\text{mass}}$$

Хотя для безмассовых частиц не существует 4-скорости, 4-импульс для них ввести можно. Определим 4-импульс безмассовой частицы

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ E \frac{e_x}{c} \\ E \frac{e_y}{c} \\ E \frac{e_z}{c} \end{pmatrix} . \quad (2.9.6)$$

Здесь E – энергия безмассовой частицы, \vec{e} – некоторый единичный трехмерный вектор, указывающий направление движения. Квадрат 4-импульса для безмассовых частиц равен нулю

$$\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 , \quad (2.9.7)$$

что согласуется с (2.9.5).

Лекция 3

21 сентября 2022

Лес3

3.1 Волновое уравнение и эффект Доплера

Из курса общей физики вам должно быть известно, что распространение возмущений описывается **волновым уравнением**

$$\left(\frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(t, x, y, z) = 0. \quad (3.1.1) \quad \text{Wave}$$

Здесь под $u(t, x, y, z)$ может пониматься любая функция, характеризующая возмущение. Это может быть отклонение натянутой струны, продольное относительное смещение стержня, напряженность электрического поля у электромагнитной волны (об этом будет в подробностях позже). Константа v – это скорость распространения этого самого возмущения. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай, когда функция u зависит только от t и x

$$u(t, x, y, z) \implies u(t, x). \quad (3.1.2)$$

В этом случае исходное уравнение упрощается до

$$\left(\frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0. \quad (3.1.3)$$

Общее решение такого уравнения можно записать в виде

$$u(t, x) = u_R(x - vt) + u_L(x + vt), \quad (3.1.4)$$

где первая функция описывает движение некоторого профиля $u_R(x)$ вправо, а $u_L(x)$ – соответственно влево. Далее нас будут интересовать возмущения, которые распространяются со скоростью света, т.е. $v = c$. В этом случае уравнение (3.1.1) можно записать в более компактной форме

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} u(x) = 0. \quad (3.1.5) \quad \text{Wave1}$$

Поскольку оператор, действующий на функцию $u(x)$, очень часто встречается в релятивистской физике, то для него принято следующее сокращенное обозначение

$$\square := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (3.1.6)$$

кроме того, для производных также приняты сокращенные обозначения

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.1.7)$$

Для простоты будем предполагать, что $u(x)$ – это скаляр, т.е. преобразуется по закону (1.1.6) при замене координат. Покажем, что уравнение (3.1.5) является Лоренц-инвариантным, последнее означает, что если $u(x)$ решало уравнение (3.1.5), то $u'(x')$, построенное по формуле (1.1.6), решает уравнение

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} u'(x') = 0. \quad (3.1.8)$$

Действительно, пусть x' и x связаны преобразованием Лоренца

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu, \quad (3.1.9) \quad \boxed{\text{waveL}}$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} u(x(x')) &= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = \\ &= \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} u(x(x')) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Здесь мы использовали правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} u(x(x')) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} u(x(x')). \quad (3.1.11)$$

Уравнение называют Лоренц-инвариантным, если преобразования Лоренца переводят решение в решение. Волновое уравнение является простейшим примером такого типа уравнений. В курсе уравнений математической физики вам докажут, что уравнения такого типа (дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами) решаются преобразованием Фурье. Представим искомую функцию $u(x)$ в виде интеграла

$$u(x) = \int d^4k e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{u}(k), \quad \int d^4k := \int dk^0 \int dk^1 \int dk^2 \int dk^3. \quad (3.1.12)$$

Подставляя искомую функцию в такой форме, мы видим, что производные будут действовать лишь на экспоненту

$$\partial_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} = ik_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (3.1.13)$$

Продифференцировав экспоненту дважды, мы имеем

$$\square u(x) = - \int d^4k e^{ik_\sigma x^\sigma} \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tilde{u}(k) = 0. \quad (3.1.14)$$

Такого рода выражения являются типичными при решении дифференциальных уравнений преобразованием Фурье. Поскольку экспоненты образуют базис в пространстве функций, то справедливо следующее

$$\int d^4k e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{F}(k) = 0 \implies \tilde{F}(k) = 0. \quad (3.1.15)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому. В нашем случае соответствующее алгебраическое уравнение имеет вид

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tilde{u}(k) = 0. \quad (3.1.16)$$

Общим решением такого уравнения является функция $\tilde{u}(k)$, которая принимает любые значения для k , принадлежащих поверхности $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$, и равна нулю в противном случае. Кратко это можно записать с помощью дельта-функции Дирака

$$\tilde{u}(k) = \delta(\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu) \tilde{v}(k). \quad (3.1.17)$$

Здесь $\tilde{v}(k)$ уже полностью произвольная функция. Про дельта-функцию от сложного аргумента вам расскажут на семинаре в рамках задачи 5. Общее решение уравнения (3.1.5) имеет вид

$$u(x) = \int d^4 k e^{ik_\sigma x^\sigma} \delta(\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu) \tilde{v}(k). \quad (3.1.18)$$

Дельта-функция в этом интеграле из всего \mathbb{R}^4 оставляет только поверхность $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$.

Рассмотрим отдельно подынтегральное выражение

$$e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{v}(k). \quad (3.1.19)$$

portion

Здесь мы предполагаем, что k уже принадлежит упомянутой поверхности. За временную эволюцию, а значит и за частоту, отвечает только экспонента

$$e^{ik_0 ct + \dots} \tilde{v}(k). \quad (3.1.20)$$

Откуда очевидно, что $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Сам вектор k_μ называют **4-волновым вектором**. В компонентах он записывается в виде

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (3.1.21)$$

где \vec{e} – единичный вектор. Легко проверить, что такой 4-вектор автоматически удовлетворяет условию $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$. Посмотрим, как изменится вклад (3.1.19) при переходе в другую систему отсчета (3.1.9).

$$e^{ik_\sigma x^\sigma} \tilde{v}(k) \implies \exp\{ik_\sigma \Lambda^\sigma{}_\nu x'^\nu\} \tilde{v}(k) = \exp\{ik'_\nu x'^\nu\} \tilde{v}(k). \quad (3.1.22)$$

Отсюда видно, что k_μ действительно преобразуется как 4-вектор (1.1.19). Рассмотрим в качестве примера

$$k_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k'_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Lambda^\nu{}_\mu k_\nu = \begin{pmatrix} \gamma \frac{\omega}{c} (1 + \beta) \\ -\gamma \frac{\omega}{c} (1 + \beta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

В этих преобразованиях мы использовали $\Lambda^\mu{}_\nu$ из (2.2.6), т.е. x' – это система отсчета, которая движется относительно системы x против оси Ox со скоростью $c\beta$. Отсюда мы находим связь между частотами

$$\omega' = \omega \gamma (1 + \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (3.1.24)$$

Dopler

Обратим внимание, что 4-волновой вектор выбран так, что волна распространяется в направлении оси Ox . В этом свете формула (3.1.24) предсказывает известный результат, что частота для наблюдателя в системе x' увеличивается. Данный эффект называют **эффектом Доплера**.

3.2 Принцип наименьшего действия

astAction

Действием называют функционал от траектории $q^I(t)$, который выражается с помощью интеграла от функции Лагранжа

$$S[q^I(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I(t), \dot{q}^I(t), t). \quad (3.2.1) \quad \text{action}$$

Принцип наименьшего действия гласит, что уравнения движения можно получить приравняв первую вариационную производную к нулю. Здесь индекс I нумерует все степени свободы, которые есть в системе.

Напомним, что называют вариацией функционала. Пусть задан функционал $\mathcal{F}[f(x)]$, его вариацией называют

$$\delta\mathcal{F} := \mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)]. \quad (3.2.2)$$

Чтобы найти вариационную производную $\frac{\delta\mathcal{F}[f]}{\delta f(x)}$ ¹ (далее для краткости будем писать просто $\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}$), необходимо представить вариацию функционала в виде

$$\mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)] = \int dx \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} \delta f + \mathcal{O}(\delta f^2). \quad (3.2.3)$$

Обратите внимание, что несмотря на природу исходного функционала слагаемое с вариационной производной должно быть представлено через интеграл! Рассмотрим пример не самого тривиального функционала

$$\mathcal{F}[f(x)] = f(a). \quad (3.2.4)$$

Вариация такого функционала равна

$$\mathcal{F}[f(x) + \delta f(x)] - \mathcal{F}[f(x)] = \delta f(a). \quad (3.2.5)$$

Слагаемое в правой части необходимо представить через интеграл

$$\delta f(a) = \int dx \delta(x - a) \delta f(x) \implies \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} = \delta(x - a). \quad (3.2.6)$$

Вернемся к функционалу (3.2.1). Оказывается, что интересными с физической точки зрения являются системы, которые не зависят явно от времени, т.е.

$$L(q^I(t), \dot{q}^I(t), t) \implies L(q^I(t), \dot{q}^I(t)). \quad (3.2.7) \quad \text{No_t}$$

¹Которая также является функционалом! x для этого функционала является просто параметром.

Вычислим вариационную производную этого функционала

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I + \delta q^I, \dot{q}^I + \delta \dot{q}^I) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I, \dot{q}^I) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^I} \delta q^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \delta \dot{q}^I \right] + \dots = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) \right] \delta q^I + \mathcal{O}((\delta q^I)^2). \quad (3.2.8)\end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям второе слагаемое в квадратных скобках. Приравняв первую вариационную производную нулю, мы получим **уравнения Эйлера-Лагранжа**

$$\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0. \quad (3.2.9) \quad \boxed{\text{ELeq}}$$

3.3 Функция Лагранжа релятивистской частицы

Действие должно быть инвариантно относительно замены координат, поскольку каждой траектории оно ставит в соответствие просто число, которое, очевидно, к замене координат никак не может быть чувствительно. Простейшим таким функционалом является

$$S[x^\mu(s)] = \alpha \int ds, \quad (3.3.1)$$

где α – пока неопределенная константа. Как правило, мы редко встречаемся с кривыми, которые заданы с помощью натуральной параметризации. Для любой допустимой параметризации $x^\mu(\lambda)$ имеется следующая связь

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = ds. \quad (3.3.2) \quad \boxed{\text{parametr}}$$

Чтобы выделить из действия функцию Лагранжа, нам нужно представить действие через интеграл по времени, т.е. для нас $\lambda = t$. В итоге имеем

$$\alpha \int ds = \alpha \int c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (3.3.3) \quad \boxed{\text{Sguess}}$$

Чтобы найти константу α , мы воспользуемся **принципом соответствия**. Мы не пытаемся построить какую-то принципиально новую динамику частицы, а хотим обобщить динамику Ньютона на случай больших скоростей, т.е. действие для релятивистской частицы должно переходить в действие частицы из классической механики

$$\int \frac{mv^2}{2} dt \quad (3.3.4)$$

в пределе малых скоростей. Разложим (3.3.3) в ряд по скорости (обратите внимание, что из-за того что $v < c$, то мы всегда остаемся в круге сходимости)

$$\alpha c \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \alpha c \int \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(v^4) \right) dt. \quad (3.3.5)$$

Приравнивая соответствующие слагаемые, мы получим значение константы α

$$-\alpha c \frac{v^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2} \implies \alpha = -mc. \quad (3.3.6)$$

В итоге мы получаем **функцию Лагранжа** для *свободной массивной! релятивистской частицы*

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.3.7) \quad \text{Lparticle}$$

и действие

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.3.8) \quad \text{Sparticle}$$

Как и в классической механике, переходя от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона, мы построим канонические импульсы и функцию Гамильтона:

$$\vec{p} := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.3.9) \quad \text{canonM}$$

$$H := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(p)}{c^2}}}. \quad (3.3.10) \quad \text{Lewis}$$

Обращаю ваше внимание, что эти выражения в точности совпадают с выражениями для импульса и энергии массивной релятивистской частицы, введенными как соответствующие компоненты 4-импульса (2.9.4) (2.9.3). Из уравнений Гамильтона сразу же следует, что импульс сохраняется

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = 0 \implies \vec{p} = \text{Const}. \quad (3.3.11) \quad \text{ConsM}$$

Также в силу того, что полная и частная производные по времени от функции Гамильтона совпадают, а последняя равна нулю, то сохраняется и функция Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies H = \text{Const}. \quad (3.3.12) \quad \text{ConsE}$$

Здесь внимательный читатель заметит, что для использования уравнений Гамильтона нужно сперва полностью перейти к Гамильтонову формализму, т.е. выразить \dot{q} через канонический импульс (3.3.9) и координату в функции Лагранжа и т.д. Тем не менее, из формулы (3.3.9) видно, что \dot{q} выражается только через канонический импульс. В этом свете законы сохранения (3.3.11), (3.3.12) верны.

Далее с помощью теоремы Нётер мы покажем, что полученные только что законы сохранения импульса (3.3.11) и энергии (3.3.12) являются следствием того, что функция Лагранжа обладает определенными симметриями.

3.4 Теорема Нётер

Теорема Нётер гласит, что любым **непрерывным** симметриям² действия (или функ-

²Ниже речь идет о так называемых **глобальных симметриях**, т.е. о преобразованиях действия, оставляющих его инвариантным, которые параметризуются числами, а не функциями, зависящими, например, от времени.

ции Лагранжа) соответствуют законы сохранения³. Пусть, например, функция Лагранжа $L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I)$ инвариантна относительно пространственных сдвигов

$$L(\vec{q}^I + \vec{a}, \dot{\vec{q}}^I) = L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I). \quad (3.4.1)$$

Здесь \vec{q}^I – это радиус-вектор I -ой частицы. Такого рода симметрии отнюдь не являются экзотическими. Потенциальная энергия взаимодействия между парой частиц зависит только от разности их координат, таким образом, если к каждой координате мы добавим константу \vec{a} , то потенциальная энергия от этого не изменится.

Посмотрим, какой закон сохранения следует из этой симметрии

$$\int dt L(\vec{q}^I + \vec{a}, \dot{\vec{q}}^I) - \int dt L(\vec{q}^I, \dot{\vec{q}}^I) = \int dt \sum_I \frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0. \quad (3.4.2)$$

Воспользовавшись уравнениями движения (3.2.9), мы приведем выражение к виду

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0 \quad (3.4.3)$$

Это должно быть выполнено для любых \vec{a} , в том числе и для бесконечно малых. Тогда верно

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) = 0 \implies \sum_I \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} = \text{Const}. \quad (3.4.4) \quad \boxed{\text{Nmomenta}}$$

Таким образом мы получили закон сохранения импульса, который является следствием однородности пространства.

Выясним теперь, к чему приводит однородность по времени. Функция Лагранжа пусть и сложным образом (через координаты $\vec{q}^I(t)$ и скорости $\dot{\vec{q}}^I(t)$) является функцией времени. Если сдвинуть время на небольшое число ε , то функция Лагранжа с одной стороны переходит в

$$L(t + \varepsilon) = L(t) + \varepsilon \frac{dL}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.4.5) \quad \boxed{\text{full}}$$

Теперь же вспомним, что функция Лагранжа зависит от времени через координаты и скорости

$$L(\vec{q}^I(t + \varepsilon), \dot{\vec{q}}^I(t + \varepsilon)) = L(\vec{q}^I(t), \dot{\vec{q}}^I(t)) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \dot{\vec{q}}^I \varepsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.4.6) \quad \boxed{\text{partial}}$$

Приравнявая (3.4.5) и (3.4.6) и оставляя только слагаемые первого порядка по ε , мы получим

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}^I} \dot{\vec{q}}^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I = \frac{dL}{dt}. \quad (3.4.7)$$

Первое слагаемое в левой части можно преобразовать при использовании уравнений движения (3.2.9)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \right) \dot{\vec{q}}^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^I} \ddot{\vec{q}}^I = \frac{dL}{dt}. \quad (3.4.8)$$

³Теорема Нетер может быть применена к любым системам: не важно, являются они релятивистскими или нет. Необходимым условием является то, что уравнения движения такой системы могут быть получены через принцип наименьшего действия (см. раздел 3.2).

Всё это выражение можно переписать как полную производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \dot{q}^I - L \right) = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \dot{q}^I - L = \text{Const}. \quad (3.4.9) \quad \boxed{\text{Nenergy}}$$

Таким образом, из однородности времени следует закон сохранения энергии. Заметим, что этот закон сохранения является следствием того, что функция Лагранжа не содержит явной зависимости от времени (см. (3.2.7)). Подчеркнем, что в законах сохранения (3.4.4), (3.4.9) траектория $\vec{q}^I(t)$ должна решать уравнения движения (3.2.9).

Лекция 4

28 сентября 2022

Lec4

4.1 Упругие столкновения (рассеяния) частиц

Упругими столкновениями называют столкновения, при которых не меняется количество и сорт частиц, т.е. если столкнулись, например, электрон с фотоном (эффект Комптона), то разлетелись снова же электрон и фотон. Оказывается, что действие для релятивистских систем (в том числе и полевых) схематично имеет следующий вид

$$S_{full} = S_{free} + S_{int}, \quad (4.1.1) \quad \text{Sfull}$$

где S_{free} – действие для свободных частиц (полей), а S_{int} – вклад, отвечающий за взаимодействие. В качестве иллюстративного примера рассмотрим систему из двух частиц, для которых свободное действие совпадает с (3.3.8), а вид взаимодействия мы конкретизировать не будем, но потребуем, чтобы взаимодействие уважало однородность пространства (см. раздел про теорему Нётер). В итоге наша функция Лагранжа имеет вид

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = -m_1 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - m_2 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} + L_{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2). \quad (4.1.2) \quad \text{fullL}$$

Ниже мы продемонстрируем, как работает теорема Нётер на практике. Напомним, что для выполнения соответствующих законов сохранения необходимо, чтобы траектории частиц (конфигурации полей) решали уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = 0. \quad (4.1.3)$$

По нашему предположению взаимодействие устроено так, что верно

$$L_{int}(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = L_{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (4.1.4) \quad \text{symmetry}$$

где \vec{a} – произвольный постоянный вектор. Из (4.1.2) видно, что такой же симметрией обладает и полная функция Лагранжа. Рассмотрим изменения действия при сдвиге координат обеих частиц на постоянный вектор \vec{a}

$$\begin{aligned} S[\vec{r}_1(t) + \vec{a}, \vec{r}_2(t) + \vec{a}] - S[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = \\ &= \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} \right) \vec{a} + \mathcal{O}(\vec{a}^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = Const, \quad (4.1.6) \quad \boxed{\text{Noether}}$$

т.е. сумма импульсов сохраняется. Пока что, соотношение (4.1.6) это просто следствие теоремы Нётер и пользоваться им в практических вычислениях не выйдет, поскольку нужен конкретный вид функции Лагранжа для взаимодействия. Тем не менее, каким бы не было слагаемое L_{int} справедливо следующее

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \vec{f}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = \frac{m_2 \vec{v}_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} + \vec{f}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (4.1.7) \quad \boxed{\text{mom}}$$

где слагаемые $\vec{f}_{1,2} = \frac{\partial L_{int}}{\partial \vec{v}_{1,2}}$ появляются из-за взаимодействия между частицами. Задача о рассеении частиц ставится следующим образом (см. Рис. 4.1):

- Изначально имеются две (или более) свободные частицы, т.е. частицы расположены настолько далеко друг от друга, что слагаемые $\vec{f}_{1,2}$ пренебрежимо малы. Обычно принимают, что это происходит в момент времени $-\infty$
- Затем по мере сближения слагаемые со взаимодействием становятся существенными. Если бы это было не так, то частицы просто бы пролетали сквозь друга друга.
- Наконец частицы разлетаются на большие расстояния так, что взаимодействием снова можно пренебречь, момент времени $+\infty$.

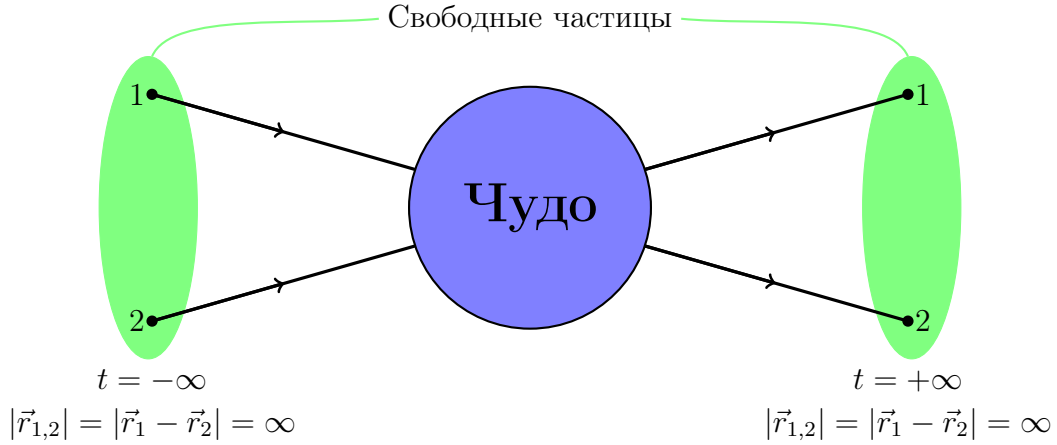


Рис. 4.1: Рассеяние частиц

Условие (4.1.6) справедливо в любой момент времени, но только в $-\infty$ или $+\infty$ импульсы

совпадают с импульсами свободных частиц (по нашему предположению)¹

$$\left(\frac{m_1 \vec{v}(t)_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=-\infty} = \left(\frac{m_1 \vec{v}_1(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.8) \quad \boxed{\text{mo}}$$

Аналогичное утверждение можно сделать и про энергии. Из теоремы Нётер (3.4.9) следует

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} \vec{v}_2 - L = \text{Const}. \quad (4.1.9)$$

Т.е. если слагаемое L_{int} устроено таким образом, что на большом расстоянии частиц друг от друга оно стремится к нулю, то верно

$$\left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=-\infty} = \left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.10) \quad \boxed{\text{en}}$$

Обратим внимание, что в (4.1.8) и (4.1.10) написано, что сохраняется 4-импульс. В более компактной форме с обобщением на случай произвольного числа частиц это можно записать в следующем виде

$$(p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=+\infty}. \quad (4.1.11) \quad \boxed{\text{4momenta}}$$

Последнее мы будем называть **законом сохранения 4-импульса системы частиц**. Несмотря на то что (4.1.11) это лишь объединение (4.1.7) и (4.1.10), именно вид (4.1.11) оказывается более удобным с практической точки зрения. При переходе в другую систему отсчета с помощью преобразования Лоренца (4.1.11) изменится следующим образом

$$\Lambda^\mu{}_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = \Lambda^\mu{}_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \quad (4.1.12)$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu$ – матрица преобразования Лоренца. В частности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (p_1^\rho + p_2^\rho + \dots) \Big|_{t=-\infty} (p_1^\sigma + p_2^\sigma + \dots) \Big|_{t=-\infty} = \\ = \eta_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho \tilde{\Lambda}^\nu{}_\sigma (p_1^\rho + p_2^\rho + \dots) \Big|_{t=+\infty} (p_1^\sigma + p_2^\sigma + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \end{aligned} \quad (4.1.13) \quad \boxed{\text{invariant}}$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu$ и $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ – матрицы преобразований Лоренца, которые в общем случае могут быть различными. Лоренц-инвариантные свертки в левой и правой частях (4.1.13) называют **эффективной массой системы**.

Несмотря на то что выражения (4.1.11) и (4.1.13) были получены в предположении, что рассматриваемые частицы массивны, оказывается, что они справедливы и в том случае, когда некоторые из частиц безмассовы².

¹Заметим, что не все взаимодействия допускают подобное. Например, *сильное взаимодействие* между кварками устроено так, что с увеличением расстояния между ними энергия взаимодействия также возрастает. В этом свете изучать рассеяния кварков по предложенной здесь схеме бессмысленно.

²Обоснование этого утверждения выходит за рамки настоящего курса, его строгое обоснование дается в рамках Квантовой Теории Поля.

4.2 Неупругие столкновения (рассеяния) частиц

Неупругими столкновениями будем называть столкновения, при которых изменяется количество или сорт частиц. Постановка задачи аналогичная: сперва были невзаимодействующие частицы, которые сблизилсь, а затем разлетелись на бесконечность, где снова могут считаться невзаимодействующими. В итоге полный 4-импульс снова сохраняется, но выражение (4.1.11) следует изменить на

$$(p_1^\mu + p_2^\mu + \dots) \Big|_{t=-\infty} = (p_1'^\mu + p_2'^\mu + \dots) \Big|_{t=+\infty}, \quad (4.2.1) \quad \boxed{4\text{momenta}1}$$

где штрихами мы хотим подчеркнуть, что в правой части равенства следует рассматривать 4-импульсы других! частиц, набор которых может полностью отличаться от исходного. Как и в случае упругих столкновений, некоторые из частиц могут быть безмассовыми. Из (4.2.1) следует, что сохраняется нулевая компонента 4-импульса, ответственная за энергию, последнее можно записать формулой

$$\sum_{i=1}^N (m_i c^2 + T_i) = \sum_{\alpha=1}^N (m'_\alpha c^2 + T'_\alpha), \quad (4.2.2)$$

где мы явно разделили полную энергию частиц на кинетическую и энергию покоя. **Дефектом массы** называют следующую разность

$$\Delta m = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{\alpha=1}^N m'_\alpha \quad (4.2.3)$$

В теоретическом и экспериментальном исследовании неупругих столкновений важным является понятие **порога реакции** – это минимальная кинетическая энергия одной! из частиц, необходимая для того, чтобы произошла конкретная реакция. Поясним смысл определения на примере, допустим, нас интересует реакция

$$1 + 2 \rightarrow a + b + c, \quad (4.2.4) \quad \boxed{\text{Gap}}$$

где импульс и энергии, например, частицы 2 заданы. Тогда порогом реакции будем называть минимальную кинетическую энергии частицы 1 для того, чтобы эта реакция произошла. Обращаю ваше внимание на то, что порогом называют кинетическую энергию **одной!** частицы, т.е. если бы рассматривали процесс

$$1 + 2 + 3 + \dots + N \rightarrow a + b + c + \dots + z, \quad (4.2.5) \quad \boxed{\text{GapN}}$$

то задача ставилась бы, например, так: импульсы и энергии частиц $2, \dots, N$ заданы (есть конкретная экспериментальная установка, которая производит частицы с заданными энергиями и импульсами), какой должна быть минимальная кинетическая энергия частицы 1, чтобы произошла реакция (4.2.5)?

Вернемся к реакции (4.2.4), именно эти процессы (изначально две сталкивающиеся частицы) исследуются в физике высоких энергий (Процессы типа (4.2.5) невероятно сложны

для изучения с экспериментальной точки зрения). Пусть эксперимент устроен так, что частица 2 покоится, т.е. соответствующий ей 4-импульс равен

$$p_2^\mu = \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.6) \quad \boxed{\text{mom2}}$$

На нее налетает частица 1, которая имеет 4-импульс

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.7) \quad \boxed{\text{mom1}}$$

Никаких других выделенных направлений, кроме направления движения частицы 1, нет, поэтому такой выбор ничуть не уменьшает общности. Обратим внимание, что 4-импульсы (4.2.6) и (4.2.7) заданы в лабораторной системе отсчета. Энергия E_1 будет минимальной, если в системе центра инерции (центра масс) частицы a, b, c будут покоиться, т.е. 4-импульс системы в системе центра инерции равен

$$p_a^\mu + p_b^\mu + p_c^\mu = \begin{pmatrix} m_a c + m_b c + m_c c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Перейдем в систему центра инерции для импульсов $p_1^\mu + p_2^\mu$ с помощью преобразования Лоренца (2.2.6)

$$\Lambda^\mu{}_\nu(p_1^\nu + p_2^\nu) = \begin{pmatrix} \gamma \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) - \beta \gamma p_1 \\ -\beta \gamma \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) + \gamma p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.9) \quad \boxed{\text{MassCenter}}$$

Напомним, что в классической механике в системе центра инерции полный импульс равен нулю, а в релятивистской механике равными нулю должны быть пространственные компоненты 4-импульса. Из второй строчки (4.2.9) находим релятивистские факторы β и γ

$$\beta = \frac{p_1}{\frac{E_1}{c} + m_2 c}, \quad \gamma = \frac{\frac{E_1}{c} + m_2 c}{\sqrt{\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2}}. \quad (4.2.10)$$

Обратим внимание, что выражение $\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2$ является релятивистским инвариантом (см. (4.1.13)). Оно совпадает с квадратом 4-импульса

$$\eta_{\mu\nu}(p_1^\mu + p_2^\mu)(p_1^\nu + p_2^\nu) = \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2, \quad (4.2.11)$$

а следовательно должно быть равно

$$\eta_{\mu\nu}(p_a^\mu + p_b^\mu + p_c^\mu)(p_a^\nu + p_b^\nu + p_c^\nu) = (m_a c + m_b c + m_c c)^2. \quad (4.2.12)$$

Приравнивая энергии в системе центра инерции до и после реакции, мы получим

$$\frac{\frac{E_1}{c} + m_2 c}{m_a c + m_b c + m_c c} \left(\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right) - \frac{p_1^2}{\frac{E_1}{c} + m_2 c} \right) = m_a c + m_b c + m_c c. \quad (4.2.13)$$

Приводя подобные слагаемые, приведем последнее выражение к виду

$$E_1 = \frac{(m_a c + m_b c + m_c c)^2 - (m_1 c)^2 - (m_2 c)^2}{2m_2}. \quad (4.2.14)$$

Напомним, что порогом реакции называют минимальную **кинетическую** энергию частицы, которая связана с полной энергией формулой

$$E_1 = m_1 c^2 + T_1. \quad (4.2.15)$$

Откуда мы находим порог реакции (4.2.4), в случае когда частица 2 покоится

$$T_1 = \frac{(m_a c + m_b c + m_c c)^2 - (m_1 c + m_2 c)^2}{2m_2}. \quad (4.2.16)$$

4.3 Взаимодействие заряженной релятивистской частицы с электромагнитным полем

EMpartInt

По аналогии с (4.1.1) мы попытаемся построить динамику частицы во внешнем электромагнитном поле. Сперва мы напишем простейший вариант взаимодействия частицы с 4-векторным полем $A_\mu(x)$, а потом заметим, что полученных результат можно интерпретировать как взаимодействие с электрическим и магнитным полями. Самый простой из возможных вариантов действия, включающих внешнее 4-векторное поле, имеет вид

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} ds. \quad (4.3.1)$$

action_pa

Найдем уравнения движения из принципа наименьшего действия, причем будем рассматривать свободное и взаимодействующее слагаемые по очереди:

- δS_{free}

$$\begin{aligned} S_{free}[x^\mu + \delta x^\mu] - S_{free}[x^\mu] &= \\ &= -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{d\lambda}} d\lambda + mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Здесь мы считаем, что траектория частицы в пространстве времени параметризована λ . Предыдущее выражение также можно представить в виде

$$\delta S_{free} = -mc \int \frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}}{\sqrt{\eta_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}}} d\lambda + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.3)$$

Используя (3.3.2), мы можем перейти от параметризации λ к натуральной параметризации интервалом

$$\delta S_{free} = -mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d\delta x^\nu}{ds} ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.4)$$

Чтобы найти вариационную производную, нам нужно, чтобы в слагаемое линейное по δx^μ входила сама функция, а не ее производная. Этого можно добиться, проинтегрировав последнее выражение по частям

$$\delta S_{free} = mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.5)$$

Величину $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ по аналогии с 4-скоростью называют **4-ускорением**. Если бы у нас не было взаимодействия с векторным полем A_μ , то уравнения движения частицы были бы эквивалентны $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$, что является релятивистским аналогом динамики Ньютона для свободной частицы.

- Теперь рассмотрим вариацию слагаемого, ответственного за взаимодействие δS_{int}

$$\begin{aligned} S_{int}[x^\mu + \delta x^\mu] - S_{int}[x^\mu] &= -\frac{e}{c} \int A_\mu(x + \delta x) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{ds} ds + \frac{e}{c} \int A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{ds} ds = \\ &= -\frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds - \frac{e}{c} \int A_\mu(x) \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Чтобы преобразовать второе слагаемое к правильному виду, его нужно проинтегрировать по частям. Для этого вспомним, что поле $A_\mu(x(s))$ также является функцией интервала

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \int A_\mu(x(s)) \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds &= -\frac{e}{c} \int \frac{d}{ds} (A_\mu(x(s))) \delta x^\mu ds = -\frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu ds = \\ &= -\frac{e}{c} \int \partial_\mu A_\nu(x) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

В итоге для вариации δS_{int} имеем

$$\delta S_{int} = -\frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.8)$$

В дальнейшем нам будет часто встречаться комбинация $\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$, которую принято обозначать

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.3.9)$$

Maxwell

В литературе нет какого-то единого правила о названии этого антисимметричного тензора, вы можете встретить множество вариантов: **тензор Фарадея**, **тензор Максвелла**, **тензор электромагнитного поля** и т.д.

Теперь из вариации полного действия

$$\delta S = mc \int \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)) \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu ds + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2). \quad (4.3.10)$$

Приравнявая первую вариационную производную нулю, мы получим уравнения движения релятивистской частицы, взаимодействующей с векторным полем

$$mc \frac{du_\nu}{ds} = -\frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\mu \iff mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (4.3.11) \quad \boxed{\text{part_in_E}}$$

Чтобы это уравнение описывало взаимодействие с электромагнитным полем, нам нужно конкретизировать вид $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.12) \quad \boxed{\text{EH}}$$

Оказывается, что если поля \vec{E} и \vec{H} решают уравнения Максвелла, то по тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ можно восстановить **4-векторный потенциал** A_μ (часто также используется термин **4-потенциал**)

$$A_\mu(x) = - \int_0^1 d\lambda \lambda x^\nu F_{\mu\nu}(\lambda x), \quad (4.3.13) \quad \boxed{\text{Schwinger}}$$

т.е. то самое 4-векторное поле, с которого мы начали анализ. Вам предлагается в этом убедиться, решив задачу 16 (похожая задача будет в контрольной работе).

Ниже приведем, как выглядит уравнение (4.3.11) в компонентах

$$\frac{dE}{dt} = e(\vec{E}, \vec{v}) \iff \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e(\vec{E}, \vec{v}), \quad (4.3.14)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \iff \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}], \quad (4.3.15) \quad \boxed{\text{LorentzFo}}$$

где для перехода от производной по s к производной по t мы использовали (2.8.12).

Лекция 5

5 октября 2022

Lec5

5.1 Функции Лагранжа и Гамильтона для частицы в электромагнитном поле

Чтобы получить функцию Лагранжа, нам нужно переписать действие (4.3.1), как интеграл по времени. 4-потенциал A^μ в компонентах имеет вид

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (5.1.1) \quad \text{4potential}$$

где ϕ и $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ – это скалярный и векторный потенциалы, которые вам должны быть знакомы из курса общей физики. Покажем, что из (5.1.1) следует уже знакомое вам выражение, например, для электрического поля. Для этого нам нужно вычислить F_{0i} ($i = 1, 2, 3$) компоненты тензора электромагнитного поля, которые равны

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \implies \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.1.2) \quad \text{Efield}$$

С помощью (2.8.12) мы можем представить действие в виде

$$S[x] = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{A}, \vec{v}) \right) \right) dt. \quad (5.1.3)$$

Отсюда функция Лагранжа для частицы во внешнем электромагнитном поле равна

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left(\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} (\vec{A}(\vec{r}, t), \vec{v}) \right). \quad (5.1.4) \quad \text{Lagr}$$

Далее следуя канонической процедуре, мы найдем импульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (5.1.5) \quad \text{p+A}$$

и «функцию Гамильтона»

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (5.1.6) \quad \text{Noether_E}$$

Чтобы последнее выражение стало настоящей функцией Гамильтона, необходимо выразить в последнем выражении скорости \vec{v} через канонический импульс \vec{P} и координаты \vec{r} . Из последнего выражения видно, что полное выражение $\vec{v}(\vec{P}, \vec{r})$ нам не нужно, а нужно лишь выразить гамма-фактор, который из (5.1.5) равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{m^2 c^2 + (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}}{mc}. \quad (5.1.7)$$

Теперь мы можем выписать функцию Гамильтона

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t))^2} + e\phi(\vec{r}, t). \quad (5.1.8) \quad \text{HamPP}$$

Обратите внимание на то, что в отличие от (3.3.10) полученная здесь функция Гамильтона уже зависит от координат и кроме того зависит от времени! Т.е. в общем случае выражение (5.1.6) уже НЕ является сохраняющейся величиной (см. раздел про теорему Нётер)! Выражение будет интегралом движения только в том случае, если поля не зависят от времени, т.е.

$$\phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi(\vec{r}), \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}). \quad (5.1.9)$$

Мы получим аналог закона сохранения энергии для нестационарных систем (когда поля содержат зависимость от времени), когда будем обсуждать теорему Нётер для полей, и получим так называемый тензор энергии-импульса.

5.2 Калибровочные преобразования

gaugeTr

На прошлой лекции был введен тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (4.3.9) и, решив задачу 16, предлагалось убедиться, что по $F_{\mu\nu}$ можно восстановить 4-потенциал A_μ . Эта процедура не является однозначной! Т.е. двум разным A_μ и A'_μ может соответствовать один и тот же тензор электромагнитного поля. Действительно, рассмотрим преобразование, которое далее будем называть **калибровочным**¹

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad (5.2.1) \quad \text{gauge}$$

где f – произвольная скалярная функция. Проверим, что тензоры электромагнитного поля, построенные по A_μ и по A'_μ , совпадают

$$F_{\mu\nu}(A') = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f = F_{\mu\nu}(A) + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) f = F_{\mu\nu}(A). \quad (5.2.2)$$

¹Обращаю ваше внимание на то, что в разных калибровочных теориях свои калибровочные преобразования. Преобразование (5.2.1) присуще электродинамике, о калибровочных преобразованиях в лиане-ризованной гравитации вы можете узнать, решив задачу 17.

Здесь мы воспользовались тем, что частные производные коммутируют. В случае топологически тривиального многообразия, которым является изучаемое в настоящем курсе \mathbb{R}^4 , калибровочное преобразование (5.2.1) описывает весь! произвол в определении 4-потенциала. Т.е. если у вас есть два 4-потенциала, которым соответствуют одинаковые поля \vec{E}, \vec{H} (совпадают тензоры электромагнитного поля), то 4-потенциалы отличаются на 4-градиент некоторой скалярной функции. Математически последнее означает, что на

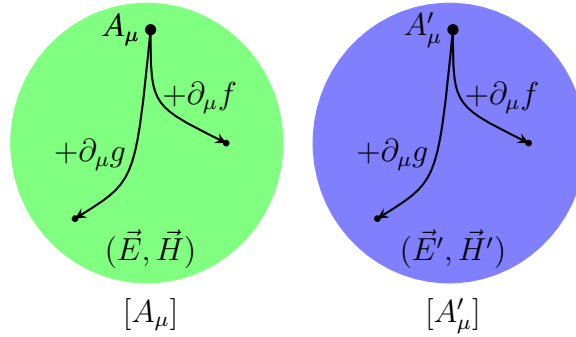


Рис. 5.1: Классы эквивалентности 4-потенциалов

4-потенциалах можно ввести отношение эквивалентности. Будем считать, что $A_{1\mu}$ эквивалентен $A_{2\mu}$, если существует скалярная функция f такая, что $A_{1\mu} = A_{2\mu} + \partial_\mu f$. В этом свете за физические явления (т.е. за поля \vec{E} и \vec{H}) отвечают не сами 4-потенциалы A_μ , а их классы эквивалентности $[A_\mu]$ (см. Рис. 5.1).

5.3 Уравнения Эйлера-Лагранжа для полей

В курсе теоретической механики рассматривались механические системы с конечным числом степеней свободы

$$q_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.3.1) \quad \text{mechanics}$$

Когда у нас есть поле, например, скалярное

$$\phi(\vec{r}, t), \quad (5.3.2) \quad \text{field}$$

то на \vec{r} следует смотреть, как на аналог индекса i в (5.3.1), который теперь принимает континуальное множество значений. На замену понятия функции Лагранжа приходит **плотность функции Лагранжа**, которую также часто называют **Лагранжианом**

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x, t). \quad (5.3.3)$$

Пусть $\Phi^\Upsilon(x)$ – это весь набор полей в теории (поле Хиггса, фотоны, глюоны и т.д.), которые нумерует индекс Υ

$$\Phi^\Upsilon(x) = \{\phi, A^\mu, A^{j\mu}, \dots\}. \quad (5.3.4)$$

Т.е., например, $\Phi^1 = \phi$, $\Phi^2 = A^0$ и т.д. Конкретный способ занумеровать поля будет совершенно не важен для дальнейшего анализа. Ниже мы подразумеваем правило Эйнштейна

и для индекса Υ , чтобы не загромождать формулы ненужными суммами. Оказывается, что все успешные (в том числе квантовые) теории поля устроены так, что в Лагранжиан входят только сами поля и **первые!** (по модулю интегрирования по частям) их производные. Так устроена, например, самая точная из когда-либо построенных теорий – квантовая электродинамика (до сих пор не было обнаружено никакого расхождения между теоретическими расчетами и экспериментальными данными). Действие для нашей полевой системы будет иметь вид²

$$S[\Phi^\Upsilon] = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^\Upsilon, \partial_\mu \Phi^\Upsilon) \quad (5.3.5) \quad \text{PhiUps}$$

Рассмотрим вариацию действия

$$\begin{aligned} S[\Phi^\Upsilon + \delta\Phi^\Upsilon] - S[\Phi^\Upsilon] &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\mu \delta\Phi^\Upsilon \right) + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2). \end{aligned} \quad (5.3.6) \quad \text{VER}$$

Здесь мы использовали правило Лейбница

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \partial_\mu \delta\Phi^\Upsilon. \quad (5.3.7)$$

Далее мы покажем, что *граничное* слагаемое

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \delta\Phi^\Upsilon \right) \quad (5.3.8) \quad \text{boundary}$$

равно нулю. В курсе математического анализа вы познакомились с теоремами: Ньютона-Лейбница, Стокса, Остроградского-Гаусса. Все они являются частным случаем более общей теоремы Стокса, которая справедлива в любой размерности

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (5.3.9) \quad \text{Stokes}$$

где ω – дифференциальная форма ранга $\dim M - 1$. Формулировку и доказательство можно найти в учебниках по дифференциальной геометрии, которые здесь приведены не будут. Тем не менее, уместна следующая интуитивная аналогия с трехмерным случаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \operatorname{div} \vec{V} = \int_{S_2^\infty} (d\vec{S}, \vec{V}), \quad (5.3.10)$$

где в правой части интегрирование ведется по поверхности сферы бесконечного радиуса. Похожая ситуация будет происходить и в четырехмерном случае, где придется интегрировать по бесконечно удаленной сфере S_3 . Когда мы рассматривали частицы, то в качестве вариации δq мы рассматривали функции такие, что $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (так называемая

²Далее мы будем работать в системе единиц $\hbar = c = 1$.

вариация с закрепленными концами). Аналогом этого требования для полей является равенство нулю $\delta\Phi^\Upsilon$ на бесконечно удаленной сфере S_3 , а следовательно граничное слагаемое (5.3.8) равно нулю. Заметим также, что не только вариации $\delta\Phi^\Upsilon$ должны обращаться в нуль на бесконечно удаленной сфере, но и сами поля Φ^Υ должны убывать на пространственной бесконечности потому, что в противном случае интеграл (5.3.5) разойдется. В итоге вариацию (5.3.6) мы можем привести к виду

$$S[\Phi^\Upsilon + \delta\Phi^\Upsilon] - S[\Phi^\Upsilon] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} \right) \delta\Phi^\Upsilon + \mathcal{O}((\Phi^\Upsilon)^2). \quad (5.3.11)$$

Отсюда, приравнивая первую вариационную производную нулю, мы находим **уравнения Эйлера-Лагранжа для полей**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\Upsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^\Upsilon} = 0. \quad (5.3.12) \quad \boxed{\text{EL_fields}}$$

5.4 Действие и уравнения движения для электромагнитного поля

На прошлой лекции мы вывели уравнения движения для частицы во внешнем! электромагнитном поле, т.е. мы считали, что рассматриваемая нами заряженная частица никак не влияет на поле, в которое она помещена. Такая система, естественно, является идеализацией. В этом разделе мы выведем динамические уравнения на поля. По аналогии со всеми предыдущими случаями мы будем получать эти уравнения из принципа наименьшего действия. В электродинамике к действию предъявляют следующие требования:

- Лоренц-инвариантность,
- В Лагранжиан не должны входить производные полей старше 2 (по модулю интегрирования по частям),
- Калибровочная инвариантность.

Первое требование очевидно. Второе вытекает из того, что мы знаем, как выглядят уравнения Максвелла (именно их мы и хотим получить), а они содержат лишь первые производные полей \vec{E} и \vec{H} (т.е. вторые производные от 4-потенциала A_μ . См. (4.3.9) и (4.3.12)) Последнее же требование калибровочной инвариантности до сих пор остается научной загадкой, почему-то природа выбирает именно такие (калибровочные) теории. Взяв за основу принцип калибровочной инвариантности, Салам и Вайнберг построили Стандартную Модель – теорию, описывающую электрослабые и сильные взаимодействия, которая прекрасно согласуется с современными экспериментальными данными.

Ранее мы уже нашли один калибровочно-инвариантный объект – тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (4.3.9). Именно из этих объектов мы будем строить действие для электромагнитного поля, рассмотрим два типа сверток

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}. \quad (5.4.1) \quad \boxed{\text{candide}}$$

Любые другие комбинации $F_{\mu\nu}$ будут содержать старшие производные, а значит мы точно не получим из них уравнения Максвелла. Второй вариант из (5.4.1) является полной производной, т.е.

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = 4\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu \partial_\rho A_\lambda). \quad (5.4.2)$$

Следовательно, интеграл от него может быть переписан как интеграл по границе (5.3.9) и не приводит к нетривиальным уравнениям движения.

Рассмотрим в качестве действия для свободного электромагнитного поля следующее выражение

$$S_{EM\ free}[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.4.3) \quad \boxed{\text{EMfree}}$$

Получим из (5.3.12) уравнения движения, которые следуют из такого действия. Заметим, что наше действие зависит только от производных полей, следовательно, первое слагаемое (5.3.12) равно нулю. Вычислим второе

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda))}{\partial\partial_\xi A_\zeta} &= \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\delta_\mu^\xi\delta_\nu^\zeta - \delta_\mu^\zeta\delta_\nu^\xi)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) + \\ &+ \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\delta_\lambda^\xi\delta_\rho^\zeta - \delta_\lambda^\zeta\delta_\rho^\xi) = 4F^{\xi\zeta}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

В итоге из (5.3.12) мы получаем уравнения движения для свободного электромагнитного поля

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.5) \quad \boxed{\text{Mfree}}$$

В действие (5.4.3) можно добавить взаимодействие с внешним 4-током

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (5.4.6) \quad \boxed{\text{current}}$$

который подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \iff \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0. \quad (5.4.7) \quad \boxed{\text{contin}}$$

Само действие приобретет вид

$$S_{EM}[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x A_\mu J^\mu. \quad (5.4.8) \quad \boxed{\text{EMint}}$$

Проверьте самостоятельно, что это действие является калибровочно инвариантным, и выполнено это в силу уравнения непрерывности (5.4.7). Из него следуют уравнения движения

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (5.4.9) \quad \boxed{4\text{Maxwell}}$$

Воспользовавшись явным видом $F^{\mu\nu}$ (4.3.12), мы получим уравнение, которое соответствует, например, $\nu = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = J^0 \iff \partial_1 E_x + \partial_2 E_y + \partial_3 E_z = \rho \iff \text{div}\vec{E} = \rho. \quad (5.4.10)$$

Это одно из уравнений Максвелла! Тем не менее, в (5.4.9) записано всего 4 уравнения, а из курса Общей Физики вам должно быть известно, что уравнения Максвелла – это 8 уравнений (каждое векторное считается за 3), которые в СГС имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (5.4.11) \quad \boxed{\text{Max1}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.4.12) \quad \boxed{\text{Max2}}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (5.4.13) \quad \boxed{\text{Max3}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.4.14) \quad \boxed{\text{Max4}}$$

Проверьте, что при $\nu = 1, 2, 3$ получающиеся уравнения совпадают с (5.4.12). Недостающие 4 уравнения, которые совпадают с (5.4.13), (5.4.14), в терминах тензора электромагнитного поля имеют следующий вид

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.15) \quad \boxed{4\text{Maxwell12}}$$

Здесь выражение в правой части полностью антисимметрично по индексам μ, ν, ρ , и после простой комбинаторики очевидно, что в (5.4.15) записано всего 4 уравнения. Чтобы выписать эти уравнения явно, вводится **дуальный** (по Ходжу) **тензор электромагнитного поля**

$$(\star F)^{\mu\nu} \equiv \tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \quad (5.4.16)$$

который имеет следующий вид в компонентах

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.17) \quad \boxed{\text{HE}}$$

Уравнения (5.4.15) в терминах дуального тензора электромагнитного поля могут быть записаны в более компактной форме

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.18) \quad \boxed{4\text{Maxwell13}}$$

При $\nu = 0$ эти уравнения сводятся к (5.4.13), а при $\nu = 1, 2, 3$ к (5.4.14) (проверьте!).

Уравнения (5.4.15) (или (5.4.18)) и (5.4.9) называют соответственно **первой и второй парой уравнений Максвелла в четырёхмерной ковариантной формулировке**.

Обратим внимание, что уравнения (5.4.15) не были получены из принципа наименьшего действия. Так откуда же они взялись? Оказывается, что если выразить тензор электромагнитного поля через 4-потенциал (4.3.9), то уравнения (5.4.15) является тождеством

$$\partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv 0. \quad (5.4.19)$$

В курсе дифференциальной геометрии доказывается лемма (лемма Пуанкаре), которая утверждает, что если антисимметричный тензор подчиняется условию (5.4.15), то он может быть (локально) представлен в виде (4.3.9) (вам понадобится условие (5.4.15) при

решении задачи 16). Другими словами, уравнения Максвелла устроены таким образом, что могут быть переформулированы в терминах 4-потенциала. Достоинством этой переформулировки, помимо очевидной Лоренц-ковариантности, является то, что нам нужно решить всего 4 уравнения (5.4.9) (уравнения (5.4.15) решены автоматически), а не 8 исходных уравнений (5.4.11)-(5.4.14). Кроме того, вы столкнетесь с большими трудностями в попытках написать действие для электромагнитного поля в терминах полей \vec{E} и \vec{H} , а без последнего не выйдет перейти к Гамильтоновой формулировке и как следствие к квантовой версии.

5.5 Калибровки и степени свободы

gaugeFix

Мы выяснили, что от полей \vec{E} и \vec{H} можно перейти к более фундаментальному объекту – 4-потенциалу A_μ и для решения задачи об конфигурации электромагнитного поля нужно решить уравнения (5.4.9). Тем не менее, нам уже известно, что решив (5.4.9), мы не найдем 4-потенциал однозначным образом, а лишь с точностью до калибровочных преобразований (5.2.1). Было бы здорово перейти от формулировки в терминах 4-потенциала A_μ к формулировке в терминах соответствующих классов эквивалентности $[A_\mu]$ (см. раздел 5.2). Для этого на 4-потенциал накладывают условия (чаще всего это алгебраические или дифференциальные условия), которые бы исключали возможность изменить выражение для 4-потенциала с помощью калибровочного преобразования (5.2.1). Эту процедуру называют **наложением** или **фиксацией калибровки**. Заметим, что никто не пытается накладывать какие-либо условия на 4-потенциал, после того как уравнения (5.4.9) уже были решены. На практике калибровку фиксируют еще до того, как приступили к решению уравнений Максвелла. Тонкое место заключается в том, что нужно наложить такие условия $G(A_\mu) = 0$, фиксирующие калибровку, чтобы множество решений этих условий включало в себя и решение уравнений Максвелла (5.4.9)³. Условия $G(A_\mu)$, наложение которых приводит к тому, что у уравнений Максвелла (5.4.9) для 4-потенциала существует лишь единственное решение, называют **истинными** или **физическими калибровками**. Тут есть плохая новость: зафиксировать калибровку, сохраняя при этом явную Лоренц-ковариантность, принципиально невозможно (теорема Померанчука). Тем не менее, накладывая Лоренц-ковариантные условия, можно сузить класс скалярных функций, участвующих в калибровочном преобразовании.

Одним из таких условий является популярное **условие Лоренца**⁴

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.5.1) \quad \text{Lorentz}$$

Найдем **остаточный калибровочный произвол**, т.е. скалярные функции f из (5.2.1), которые не «испортят» (5.5.1), но изменят выражения для 4-потенциала. Выполним калибровочное преобразование для потенциала A_μ , удовлетворяющего (5.5.1), с некоторой скалярной функцией f и потребуем, чтобы условие (5.5.1) было выполнено и для преоб-

³Имеется ввиду, что от 4-потенциала можно потребовать, например, $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Это условие очевидно фиксирует произвол в калибровочные преобразования, но описать все многообразие электромагнитных явлений таким 4-потенциалом не выйдет.

⁴Очень часто это выражение называют калибровкой Лоренца, но калибровкой оно, естественно, не является.

разованного 4-потенциала

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0 \implies \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \implies \square f = 0. \quad (5.5.2) \quad \text{gaugeAmb}$$

Повторим еще раз то же самое, но немного другими словами. Что же мы пытались сделать? Наложив условие (5.5.1), мы хотели исключить возможность менять выражения для 4-потенциала калибровочными преобразованиями (5.2.1). Оказалось, что по полю A_μ мы калибровочным преобразованием смогли построить другое поле A'_μ , которое также решает (5.5.1). Но из всех возможных скалярных функций только решения волнового уравнения не «портят» условие Лоренца (см. (5.5.2)). Если угодно, то шарик из рисунка 5.1 стал меньше, но все еще не стал точкой.

Из-за того что 4-потенциал подвержен калибровочным преобразованиям, то очевидно, чтобы задать электромагнитное поле, нужно меньшее число функций, чем 4. Найдем, какое количество функций однозначно определяют электромагнитное поле в пустоте. Нам нужно решить уравнение (5.4.5), которое с учетом условия Лоренца переходит в

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \implies \square A^\nu = 0. \quad (5.5.3)$$

Мы уже решали такие уравнения, когда изучали эффект Доплера, поэтому сразу выпишем решение

$$A_\mu(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) \tilde{A}_\mu(k). \quad (5.5.4)$$

Здесь функции $\tilde{A}_\mu(k)$ пока произвольны. Условие Лоренца частично ограничивает эту свободу

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \iff \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) k^\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0 \implies k^\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0. \quad (5.5.5)$$

Т.е. функции $\tilde{A}(k)$ должны удовлетворять так называемому условию **4-поперечности**. Из исходного набора в четыре произвольные функции осталось три. Остаточный калибровочный произвол при наложенном условии Лоренца – это функции, решающие волновое уравнение

$$f(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) \tilde{f}(k). \quad (5.5.6)$$

Здесь $\tilde{f}(k)$ – произвольная функция. Выполнив калибровочное преобразование с такой функцией, мы можем полностью исключить одну из компонент 4-потенциала, обычно выбирают временную. Действительно,

$$A_0(x) + \partial_0 f(x) = \int d^4k e^{ik_\rho x^\rho} \delta(k^2) (\tilde{A}_0(k) + ik_0 \tilde{f}(k)) = 0 \quad \text{if} \quad \tilde{A}_0(k) + ik_0 \tilde{f}(k) = 0. \quad (5.5.7)$$

Поскольку $\tilde{f}(k)$ может быть выбрана любой, то может быть выбрана и такой, чтобы решать уравнение выше.

В итоге на свободное электромагнитное поле могут быть наложены два условия:

$$A_0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (5.5.8)$$

Второе условие является следствием условия Лоренца после обнуления временной компоненты 4-потенциала. Т.е. из четырех исходных степеней свободы остались только две, которые и соответствуют двум поляризациям электромагнитной волны.

Лекция 6

12 октября 2022

Lec6

6.1 Инварианты поля, 4-вектор тока

На предыдущей лекции мы рассмотрели два кандидата на роль Лагранжиана для свободного электромагнитного поля (5.4.1). Несмотря на то что лишь один из них приводил к нетривиальным уравнениям движения, оба являются скалярами по отношению к преобразованиям собственной ортохронной группы Лоренца¹ (см. Лекцию 2). Если воспользоваться явным представлением через \vec{E} и \vec{H} для $F^{\mu\nu}$ (4.3.12) и $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (5.4.17), то мы получим

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2(x) - \vec{H}^2(x)), \quad \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4(\vec{E}(x), \vec{H}(x)). \quad (6.1.1) \quad \text{invEH}$$

В случае однородных стационарных полей зависимость от координат пространства времени естественно тривиализуется. В этом случае из формул (6.1.1) можно узнать, существует ли система отсчета, в которой полностью отсутствует поле \vec{E} или \vec{H} , например. Чтобы найти скорость этой системы отсчета, полезны следующие формулы для преобразования полей при переходе в движущуюся систему отсчета

$$\vec{E}' = (\vec{E}, \vec{n})\vec{n} + \frac{[\vec{n}, [\vec{E}, \vec{n}]] + [\vec{v}, \vec{H}]}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad (6.1.2) \quad \text{Eprime}$$

$$\vec{H}' = (\vec{H}, \vec{n})\vec{n} + \frac{[\vec{n}, [\vec{H}, \vec{n}]] - [\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad (6.1.3) \quad \text{Hprime}$$

где $\vec{n} = \vec{v}/|\vec{v}|$ и $c = 1$. Сами формулы (6.1.2) и (6.1.3) следуют из закона преобразования тензора электромагнитного поля при переходе в другую систему отсчета (см. (1.1.20))

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}, \quad (6.1.4) \quad \text{Ftensor}$$

а матрицы бустов для произвольного направления скорости вы найдете, решив задачу 1. Закон преобразования (6.1.4) можно также получить из закона преобразования 4-потенциала (1.1.10) при переходе в другую систему отсчета и правила дифференцирования сложной функции (для преобразования производных).

¹Не только скаляры являются инвариантами. Например, δ^μ_ν также является инвариантом! В этом свете можно также рассмотреть формулу $F^{\mu\rho}\tilde{F}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu(\vec{E}, \vec{H})$.

Также на предыдущей лекции был введен 4-вектор тока (5.4.6). Его закон преобразования просто постулировался. Функция плотности заряда для точечной частицы может быть представлена в виде

$$\rho(t, \vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad (6.1.5)$$

где e – величина заряда точечной частицы, $\vec{r}_0(t)$ – функция, определяющая ее траекторию движения. Заметим, что выражение

$$\rho(t, \vec{r}) d^3x \quad (6.1.6)$$

является инвариантом относительно преобразований Лоренца, поскольку заряд частицы не может зависеть от выбора системы отсчета. Умножим предыдущее выражение на $dx^\mu(t)$, где $x^\mu(t)$ – функция, описывающая положение частицы в пространстве времени, в итоге получим

$$\rho(t, \vec{r}) d^3x dx^\mu(t). \quad (6.1.7)$$

Последнее выражение по построению является 4-вектором. Его также можно представить в виде

$$\rho(t, \vec{r}) dt d^3x \frac{dx^\mu(t)}{dt}, \quad (6.1.8)$$

где мера интегрирования $dt d^3x$ является Лоренц-инвариантной, так как преобразуется умножением на модуль Якобиана, который равен единице для преобразований Лоренца. Следовательно величина $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$ является 4-вектором относительно преобразований Лоренца, которую далее будем называть **4-вектором плотности тока**

$$J^\mu := \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (6.1.9)$$

Все предыдущие рассуждения без труда обобщаются на случай нескольких частиц просто сложением 4-векторов плотностей тока для каждой из частиц.

На предыдущей лекции мы требовали от 4-вектора плотности тока (далее будем писать просто 4-тока для краткости), чтобы он был решением уравнения непрерывности. В качестве несложного домашнего упражнения предлагается проверить, что 4-ток одной точечной частицы

$$J^\mu = \begin{pmatrix} e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \\ e\dot{\vec{r}}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \end{pmatrix} \quad (6.1.10)$$

pointCurr

удовлетворяет уравнению непрерывности (5.4.7).

Мы считаем, что компоненты 4-тока на границе обращаются в ноль, т.е. в нашу Вселенную откуда-нибудь извне не поступают заряженные частицы и их нет на границе нашей Вселенной. Последнее дает возможность утверждать, что заряд всей Вселенной есть величина постоянная (и конечная). Его можно вычислить по формуле

$$Q := \int d^3x J^0. \quad (6.1.11)$$

Qconserved

Покажем, что это действительная сохраняющаяся величина в силу уравнения непрерывности

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 J^0 = - \int d^3x \partial_i J^i \equiv - \int d^3x \operatorname{div} \vec{J} = - \int_{S_2^\infty} (d\vec{S}, \vec{J}) = 0. \quad (6.1.12)$$

Последнее равенство справедливо в силу нашего предположения о том, что заряженные частицы не приходят в нашу Вселенную, т.е. $\vec{j}|_{S_2^\infty} = 0$. По этой причине 4-ток, удовлетворяющий $\partial_\mu J^\mu$, часто называют **сохраняющимся**, так как из него следуют законы сохранения. По этой же причине уравнение (5.4.7) также называют **условием сохранения**.

6.2 Калибровочная инвариантность, совместность и уравнение непрерывности

На предыдущей лекции мы строили действие для электромагнитного поля, требуя от него помимо прочего еще и калибровочную инвариантность. Покажем, что слагаемое

$$S_{EM\,int}[A_\mu] = - \int d^4x A_\mu J^\mu, \quad (6.2.1)$$

отвечающее за взаимодействие электромагнитного поля с внешним источником, является калибровочно инвариантным. Выполним калибровочное преобразование (5.2.1), тогда эта часть действия, соответственно, преобразуется в

$$S_{EM\,int}[A_\mu + \partial_\mu f] = - \int d^4x A_\mu J^\mu - \int d^4x \partial_\mu f J^\mu. \quad (6.2.2)$$

Требование калибровочной инвариантности заключается в том, чтобы второе слагаемое обращалось в ноль. Если внешний 4-ток подчинен уравнению непрерывности, то это слагаемое можно представить как полную производную и проинтегрировать по частям

$$- \int d^4x \partial_\mu f J^\mu = - \int d^4x \partial_\mu (f J^\mu) = - \int_{\partial M} d\Sigma^\mu f J_\mu = 0, \quad (6.2.3)$$

где предполагается, что $J^\mu|_{\partial M} = 0$. Таким образом, требование калибровочной инвариантности действия фактически накладывает на внешний ток условие сохранения (5.4.7).

Сохранение тока является необходимым условием того, чтобы уравнения Максвелла (5.4.9) были разрешимы. Покажем, что если условие (5.4.7) не выполнено, то уравнения (5.4.9) противоречивы. Действительно, если на уравнения подействовать производной ∂_ν и выполнить свертку по индексу ν , то получим

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu. \quad (6.2.4)$$

Здесь левая часть равна нулю, как свертка симметричного тензора $\partial_\nu \partial_\mu$ с антисимметричным $F^{\mu\nu}$. В итоге мы имеем следствие из уравнений Максвелла

$$0 = \partial_\nu J^\nu. \quad (6.2.5)$$

Т.е. для того, чтобы у уравнений Максвелла (5.4.9) существовало решение, условие сохранения 4-тока (5.4.7) является **необходимым**.

Таким образом, потребовав калибровочную инвариантность действия, мы получили непротиворечивые уравнения движения. Ниже на примере так называемой скалярной электродинамики мы покажем, как из требования калибровочной инвариантности может быть построено совместное взаимодействие (т.е. непротиворечивые уравнения движения) между комплексным скалярным полем и электромагнитным полем.

6.3 Скалярная электродинамика

Все наблюдаемые частицы являются возбуждениями квантовых полей. В этом свете построить электромагнитное взаимодействие с внешним сохраняющимся током недостаточно. Этот 4-ток также должен быть сам устроен из полей. Простейшей (иногда ее называют игрушечной) моделью, в которой можно построить такое взаимодействие, является скалярная электродинамика – теория, описывающая взаимодействие комплексного скалярного поля с электромагнитным. Строить эту теорию мы будем методом проб и ошибок. Как и во все предыдущие разы начнем со свободной теории

$$S_{free}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.1) \quad \text{freeAfree}$$

Здесь первое слагаемое описывает свободное электромагнитное поле, а второе свободное комплексное скалярное поле. Получим уравнения движения, которые следуют из такого действия

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta A_\nu} = 0 \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (6.3.2) \quad \text{Afree}$$

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta \bar{\phi}} = 0 \iff \square \phi = 0, \quad (6.3.3) \quad \text{Phifree}$$

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta \phi} = 0 \iff \square \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.4) \quad \text{barPhifree}$$

Обращаю ваше внимание на то, что нет такого понятия, как *вариационная производная функционала по комплекснозначному полю*. Рассматриваемое здесь комплексное скалярное поле следует понимать как два вещественных

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x), \quad \phi_{1,2}(x) \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) \in \mathbb{C}. \quad (6.3.5)$$

Следуя канонам вариационного исчисления, надо было бы рассматривать вариационные производные $\frac{\delta S_{free}}{\delta \phi_{1,2}} = 0$, считая поля ϕ_1 и ϕ_2 независимыми. Тем не менее, те же уравнения движения можно получить если рассматривать поля ϕ и $\bar{\phi}$, как независимые и как бы вещественнозначные. Здесь уместна аналогия с тем, как вводится производная по комплексному аргументу функции в ТФКП.

Из вида уравнений (6.3.2)-(6.3.4) видно, что действие (6.3.1) описывает три независимых поля: векторное поле A_μ и скалярные поля ϕ и $\bar{\phi}$. Помимо симметрии относительно калибровочных преобразований (5.2.1) действие (6.3.1) также очевидно инвариантно относительно преобразований

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad \bar{\phi}(x) \rightarrow \bar{\phi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\phi}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6.3.6) \quad \text{global}$$

Подчеркнем, что здесь α – это просто константа. Такого рода симметрии, параметры которых не являются функциями пространства времени, называют **глобальными**. Тем не менее, это симметрия действия с некоторым непрерывным параметром, а по теореме Нётер такой симметрии должны отвечать законы сохранения. Соответствующий сохраняющийся 4-ток имеет вид

$$J^\mu = \bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.7) \quad \text{U(1)}$$

Систематическая процедура, которая позволяет получать сохраняющиеся токи из симметрий полевых систем, будет изложена на следующей лекции. Пока лишь убедимся, что этот 4-ток сохраняющийся в силу уравнений движения

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi + \bar{\phi} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \phi \partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = \bar{\phi} \square \phi - \phi \square \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.8)$$

По аналогии с (5.4.8) попробуем построить действие для взаимодействующей теории в виде

$$S_{guess}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - A_\mu (\bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}) \right). \quad (6.3.9) \quad \boxed{\text{Sguessed}}$$

Из этого действия будут уже следовать другие уравнения движения

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta A_\nu} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\phi} \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \bar{\phi}, \quad (6.3.10) \quad \boxed{\text{Aguess}}$$

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta \bar{\phi}} \iff \square \phi + \partial_\mu (A^\mu \phi) + A_\mu \partial^\mu \phi = 0, \quad (6.3.11) \quad \boxed{\text{fguess}}$$

$$\frac{\delta S_{guess}}{\delta \phi} \iff \square \bar{\phi} - \partial_\mu (A^\mu \bar{\phi}) - A_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.12) \quad \boxed{\text{barfguess}}$$

Проверим, сохраняется ли ток из правой части (6.3.10) в силу уравнений (6.3.11) и (6.3.12)

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi}) &= \bar{\phi} \square \phi - \phi \square \bar{\phi} = -\bar{\phi} (\partial_\mu (A^\mu \phi) + A_\mu \partial^\mu \phi) - \phi (\partial_\mu (A^\mu \bar{\phi}) + A_\mu \partial^\mu \bar{\phi}) = \\ &= -2\partial_\mu (\phi \bar{\phi} A^\mu) \neq 0. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Т.е. наша догадка (6.3.9) приводит к потенциально противоречивым уравнениям.

Решить задачу о взаимодействии комплексного скалярного поля и электромагнитного можно, если сделать глобальную симметрию (6.3.6) локальной, т.е. теперь будем рассматривать преобразования

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad \bar{\phi}(x) \rightarrow \bar{\phi}'(x) = e^{-i\alpha(x)} \bar{\phi}(x). \quad (6.3.14) \quad \boxed{\text{local}}$$

Такие преобразования уже не являются симметриями действия (6.3.1). Действительно, вычислим производную от преобразованного поля

$$\partial_\mu (\phi(x) e^{i\alpha(x)}) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \phi(x) + i \partial_\mu (\alpha(x)) \phi(x)). \quad (6.3.15)$$

Для постоянной функции α справедливо следующее

$$\partial_\mu (e^{i\alpha} \phi(x)) = e^{i\alpha} \partial_\mu \phi(x). \quad (6.3.16)$$

Мы хотим сохранить это свойство, но уже для функции $\alpha(x)$, зависящей от точки пространства времени. Добиться этого можно, если перейти от обычной частной производной ∂_μ к так называемой **ковариантной (длинной) производной** \mathcal{D}_μ , от которой мы будем требовать следующее

$$\mathcal{D}'_\mu \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \phi(x). \quad (6.3.17) \quad \boxed{\text{covariant}}$$

Обратите внимание, что и сама ковариантная производная меняется при преобразованиях поля, на которое действует. Определяется она следующим образом

$$\mathcal{D}_\mu \phi(x) := \partial_\mu \phi(x) - iA_\mu(x)\phi(x). \quad (6.3.18) \quad \boxed{\text{covDef}}$$

Для того чтобы свойство (6.3.17) было выполнено, нужно потребовать, чтобы поле A_μ преобразовывалось по правилу

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha. \quad (6.3.19) \quad \boxed{\text{alpha}}$$

Т.е. поле A_μ должно преобразовываться, как и положено калибровочному полю (5.2.1). Только теперь скалярная функция для калибровочного преобразования должна совпадать с функцией, которая участвует в преобразованиях полей ϕ и $\bar{\phi}$. Проверим, что свойство (6.3.17) выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu \phi' &= \partial_\mu \phi' - iA'_\mu \phi' = e^{i\alpha}(\partial_\mu \phi + i\partial_\mu \alpha \phi) - i(A_\mu + \partial_\mu \alpha)e^{i\alpha} \phi = e^{i\alpha}(\partial_\mu \phi - iA_\mu \phi) = \\ &= e^{i\alpha} \mathcal{D}_\mu \phi. \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

Аналогично (6.3.18) определим действие ковариантной производной на поле $\bar{\phi}$

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\phi} := \partial_\mu \bar{\phi} + iA_\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.21)$$

Обращаю ваше внимание, что ковариантная производная «знает», на что она действует. Для таким образом определенной ковариантной производной справедливо соотношение, аналогичное (6.3.17)

$$\mathcal{D}'_\mu \bar{\phi}' = e^{-i\alpha} \mathcal{D}_\mu \bar{\phi}. \quad (6.3.22)$$

С помощью ковариантных производных выпишем действие

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}^\mu \bar{\phi} \right), \quad (6.3.23) \quad \boxed{\text{ScalarQED}}$$

которое инвариантно относительно локальных (калибровочных) преобразований

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}' = e^{-i\alpha} \bar{\phi}. \quad (6.3.24)$$

Если раскрыть выражение для ковариантных производных, то действие имеет вид

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi - iA_\mu \phi)(\partial^\mu \bar{\phi} + iA_\mu \bar{\phi}) \right). \quad (6.3.25)$$

Из этого действия получаются следующие уравнения движения

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta A_\nu} = 0 \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = -i(\bar{\phi}(\partial^\nu \phi - iA^\nu \phi) - \phi(\partial^\nu \bar{\phi} + iA^\nu \bar{\phi})) \equiv -i(\bar{\phi} \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \bar{\phi}), \quad (6.3.26) \quad \boxed{\text{Afull}}$$

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta \bar{\phi}} = 0 \iff (\partial_\mu - iA_\mu)(\partial^\mu - iA^\mu) \phi \equiv \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = 0, \quad (6.3.27)$$

$$\frac{\delta S_{full}}{\delta \phi} = 0 \iff (\partial_\mu + iA_\mu)(\partial^\mu + iA^\mu) \bar{\phi} \equiv \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \bar{\phi} = 0. \quad (6.3.28)$$

Проверим наконец, что ток в правой части (6.3.26) сохраняется в силу этих уравнений движения

$$\begin{aligned}\partial_\nu(\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi}) &= \partial_\nu\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}\partial_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\partial_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - \partial_\nu\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \\ &= (\partial_\nu + iA_\nu)\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}(\partial_\nu - iA_\nu)\mathcal{D}^\nu\phi - \phi(\partial_\nu + iA_\nu)\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - (\partial_\nu - iA_\nu)\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \\ &= \mathcal{D}_\nu\bar{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi + \bar{\phi}\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} - \mathcal{D}_\nu\phi\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = \bar{\phi}\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}^\nu\bar{\phi} = 0. \quad (6.3.29)\end{aligned}$$

Таким образом, локализуя симметрию, т.е. разрешая параметрам преобразований быть функциями пространства времени, мы получили совместные уравнения движения.

Несмотря на то что, с одной стороны, скалярная электродинамика проще спинорной в смысле релятивистских законов преобразования полей, с другой же стороны, она сложнее в смысле квантового анализа.

$$S_{full}[A_\mu, \phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} + \underbrace{iA_\mu(\bar{\phi}\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\bar{\phi})}_{cubic} + \underbrace{A_\mu A^\mu\phi\bar{\phi}}_{quartic} \right). \quad (6.3.30)$$

В скалярной электродинамике помимо кубических вершин, которые есть и в спинорной, присутствуют еще и четвертичные. Т.е. при вычислении рассеяния электрона на фотоне (эффект Комптона) в древесном приближении вклад дадут уже две диаграммы вместо одной, как в спинорной электродинамике.

Ниже еще раз опишем процедуру, которая приводит к совместным взаимодействиям полей материи и калибровочных полей спина 1:

- Мы начинаем с действия для свободных полей материи, которое уже обладает некоторыми глобальными симметриями. Например, скалярных N скалярных полей

$$\int d^4x \frac{1}{2}\delta_{IJ}\partial_\mu\phi^I\partial^\mu\phi^J, \quad I, J = 1, \dots, N. \quad (6.3.31)$$

Это действие очевидно инвариантно относительно глобальных преобразований типа

$$\phi^I \rightarrow \phi'^I = \mathbf{O}^I{}_J\phi^J, \quad (6.3.32) \quad \boxed{\mathbf{O}(N)}$$

где $\mathbf{O}^I{}_J$ – матрица ортогонального преобразования в N измерениях, т.е. матрица, принадлежащая группе $O(N)$.

- Далее мы локализуем эту $O(N)$ симметрию, разрешая матрицам $\mathbf{O}^I{}_J$ теперь быть функциями пространства времени

$$\mathbf{O}^I{}_J \rightarrow \mathbf{O}^I{}_J(x). \quad (6.3.33)$$

Чтобы эти новые локальные преобразования были симметриями действия, нужно перейти от обычной частной производной к ковариантной

$$\mathcal{D}_\mu\phi^I = \partial_\mu\phi^I - iA_\mu{}^I{}_J\phi^J, \quad (6.3.34)$$

где в отличие от скалярной электродинамики калибровочное поле $A_\mu{}^I{}_J$ уже является матричнозначным. Выведите для него закон преобразования, аналогичный (6.3.19), исходя из того, что должно быть выполнено

$$\mathcal{D}'_\mu\phi'^I = \mathbf{O}^I{}_J(x)\mathcal{D}_\mu\phi^J. \quad (6.3.35)$$

Таким образом, имеем действие для скалярных полей, которое инвариантно уже относительно локальных преобразований $\phi^I \rightarrow \phi'^I = \mathcal{O}^I_J(x)\phi^J$

$$\int d^4x \frac{1}{2} \delta_{IJ} \mathcal{D}_\mu \phi^I \mathcal{D}^\mu \phi^J. \quad (6.3.36)$$

- Осталось к получившемуся действию добавить часть, ответственную за динамику калибровочного поля $A_\mu^I{}_J$. Для этого вводится тензор $F_{\mu\nu}^I{}_J$, который является обобщением формулы (4.3.9)

$$F_{\mu\nu}^I{}_J := \partial_\mu A_\nu^I{}_J - \partial_\nu A_\mu^I{}_J - i A_\mu^I{}_K A_\nu^K{}_J + i A_\nu^I{}_K A_\mu^K{}_J \quad (6.3.37)$$

(заинтересованного читателя отправляем к специализированной литературе, где обсуждаются теории Янга-Миллса. Например, Славнов, Фаддеев «Введение в квантовую теорию калибровочных полей»). И аналогично скалярной электродинамике действие для модели из N скалярных полей, взаимодействующих с калибровочным полем спина 1, имеет вид

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I{}_J F^{\mu\nu J}{}_I + \frac{1}{2} \delta_{IJ} \mathcal{D}_\mu \phi^I \mathcal{D}^\mu \phi^J \right). \quad (6.3.38)$$

По описанной выше схеме строится сильное взаимодействие между кварками, которое инвариантно относительно локальной $SU(3)$ симметрии. Т.е. в преобразованиях типа (6.3.32) соответствующие матрицы принадлежат группе специальных унитарных матриц размерности 3×3 .

Лекция 7

19 октября 2022

7.1 Теорема Нётер для полевых систем

В предыдущей лекции было показано, что токи, удовлетворяющие условию сохранения (5.4.7), позволяют выписать сохраняющиеся во времени заряды (6.1.11). У формул (5.4.7) и (6.1.11) существует естественное обобщение

$$\partial_\mu J^\mu_A = 0, \quad (7.1.1)$$

$$Q_A := \int d^3x J^0_A, \quad (7.1.2)$$

где индекс A отвечает конкретной симметрии действия. Например, теории, которые мы рассматриваем, обладают трансляционной симметрией по времени и по трем пространственным координатам. Каждой из этих симметрий будет соответствовать *свой* сохраняющийся ток и *свои* сохраняющиеся заряды.

Мы будем рассматривать следующие инфинитезимальные! преобразования симметрий

$$\tilde{\delta}x^\mu = x'^\mu - x^\mu, \quad (7.1.3) \quad \boxed{\text{d}x}$$

$$\tilde{\delta}\Phi^\Upsilon = \Phi'^\Upsilon(x') - \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.4) \quad \boxed{\text{d}\Phi^\Upsilon}$$

Здесь x' и x – это координаты одной и той же точки на многообразии, но в разных картах. Под Φ'^Υ мы понимаем любые преобразования над полями, которые являются симметрией действия. Если действие рассматриваемой полевой системы устроено, как (5.3.5), то преобразования (7.1.3) и (7.1.4) исчерпывают все возможные преобразования, которые могут являться симметрией действия. Мы также будем различать **полную вариацию функции** $\tilde{\delta}\Phi^\Upsilon(x')$ и **вариацию формы функции** $\delta\Phi^\Upsilon(x)$, которая определяется как

$$\delta\Phi^\Upsilon(x) := \Phi'^\Upsilon(x) - \Phi^\Upsilon(x). \quad (7.1.5) \quad \boxed{\text{d}\Phi^\Upsilon}$$

Если действие обладает симметрией типа (7.1.3), (7.1.4), то выполнено следующее

$$\tilde{\delta}S[\Phi^\Upsilon] := \int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L} \left(\Phi'^\Upsilon(x'), \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi'^\Upsilon(x') \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^\Upsilon(x), \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^\Upsilon(x) \right) = 0, \quad (7.1.6) \quad \boxed{\text{delta}S}$$

где Σ – произвольная область в \mathbb{R}^4 , а Σ' получается из нее преобразованием координат (7.1.3). Именно это в литературе понимается, когда говорят о симметрии полевого действия. Доказательство теоремы Нётер конструктивно, т.е. мы в явном виде получим сохраняющийся ток, отвечающий конкретной симметрии. Для этого разность (7.1.6) будет приведена к виду

$$\int_{\Sigma} d^4x \partial_{\nu} J^{\nu}(\Phi^{\Upsilon}, \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}) = 0 \implies \partial_{\nu} J^{\nu}(\Phi^{\Upsilon}, \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}) = 0. \quad (7.1.7) \quad \text{currentN}$$

Последнее следствие верно в силу произвольности области Σ .

Несмотря на то что выражения (7.1.3) и (7.1.4) внешне напоминают вариации, которые использовались при получении уравнений движения (см. раздел 5.3), они ими **НЕ** являются! Про вариации полей при получении уравнений движений мы предполагали, что они обращаются в ноль на границе нашего многообразия, инфинитезимальные преобразования симметрии (7.1.4) таким свойством априори не обладают. Кроме того, интегрирование ведется по произвольной области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$, поэтому при получении (7.1.7) мы не вправе отбрасывать граничные слагаемые.

1.1 Глобальные внутренние (цветные) симметрии

Перед тем как рассмотреть общий случай преобразований (7.1.3), (7.1.4) мы рассмотрим сперва так называемые внутренние симметрии, которые также называют цветными или изотопическими. Это симметрии, которые не связаны с преобразованием координат, т.е.

$$\tilde{\delta}x = 0, \quad (7.1.8) \quad \text{Predx}$$

а преобразования полей упрощаются до вариации формы функции

$$\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x') \rightarrow \delta\Phi^{\Upsilon}(x) = \Phi'^{\Upsilon}(x) - \Phi^{\Upsilon}(x). \quad (7.1.9) \quad \text{PredPhi}$$

Важное отличие вариаций $\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}$ от $\delta\Phi^{\Upsilon}$ заключается в том, что только последняя коммутирует с дифференцированием, потому что вообще не вовлекает какую-либо замену координат (подробнее об этом будет позже).

Пусть действие симметрично относительно (7.1.8), (7.1.9), тогда, подставив преобразования в (7.1.6), мы получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \delta\Phi^{\Upsilon}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta\Phi^{\Upsilon}(x) \right) - \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L} \left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Phi^{\Upsilon}(x) \right) = \\ & = \int_{\Sigma} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^{\Upsilon}} \delta\Phi^{\Upsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\mu} \delta\Phi^{\Upsilon} \right). \end{aligned} \quad (7.1.10) \quad \text{Variation}$$

Еще раз подчеркнем, что несмотря на очевидное сходство (5.3.6) и (7.1.10) смысл $\delta\Phi^{\Upsilon}$, входящего в выражения, разный. В (5.3.6) это были все возможные локальные изменения полей, которые обращались в ноль на границе многообразия, в (7.1.10) $\delta\Phi^{\Upsilon}$ – это инфинитезимальные преобразования симметрии действия, которые вовсе не обязаны равняться

нулю на границе многообразия. Кроме того, в (5.3.6) интегрирование велось по всему \mathbb{R}^4 , а в (7.1.10) по произвольной области $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$. Законы сохранения, следующие из теоремы Нётер, выполнены только на уравнениях движения (5.3.12). Воспользовавшись ими, мы приведем (7.1.10) к виду

$$\int_{\Sigma} d^4x \left(\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \right) \delta \Phi^{\Upsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \partial_{\mu} \delta \Phi^{\Upsilon} \right) = \int_{\Sigma} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \delta \Phi^{\Upsilon} \right) = 0 \quad (7.1.11)$$

Т.е. если действие обладает симметрией типа (7.1.8), (7.1.9), то из этой симметрии следует сохраняющийся ток

$$\mathfrak{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}} \delta \Phi^{\Upsilon}. \quad (7.1.12) \quad \text{colorCurr}$$

В качестве иллюстративного примера к полученному результату рассмотрим безмассовое комплексное скалярное поле из предыдущей лекции

$$\int d^4x \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \bar{\phi}. \quad (7.1.13)$$

Это действие, в смысле (7.1.6), обладает симметрией относительно преобразования полей (6.3.6). Инфинитезимальная версия этих преобразований имеет вид

$$\delta \phi(x) = i\alpha \phi(x), \quad \delta \bar{\phi}(x) = -i\alpha \bar{\phi}(x), \quad (7.1.14) \quad \text{complex}$$

а соответствующие производные Лагранжиана

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} = \partial^{\mu} \bar{\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\phi}} = \partial^{\mu} \phi. \quad (7.1.15)$$

Подставив полученные результаты в (7.1.12), мы получим сохраняющийся ток, отвечающий симметрии (6.3.6)

$$\mathfrak{J}^{\mu} = i\alpha (\phi \partial^{\mu} \bar{\phi} - \bar{\phi} \partial^{\mu} \phi). \quad (7.1.16)$$

Здесь α – инфинитезимальный постоянный (в том смысле, что не является функцией пространства времени) параметр симметрии, на который можно сократить. В литературе вы встретите, как правило, уже сокращенное выражение, в которое не входят параметры симметрии

$$J^{\mu} = -i(\bar{\phi} \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \bar{\phi}). \quad (7.1.17)$$

Это выражение совпадает с (6.3.7), введенным на прошлой лекции. Однако на прошлой лекции мы проверяли, что этот ток сохраняется в силу уравнений движения. Сейчас же в этом нет необходимости, ток, построенный в этой лекции, является сохраняющимся по построению.

1.2 Общий случай

Рассмотрим общий случай преобразований (7.1.3), (7.1.4), которые являются симметрией действия в смысле (7.1.6). Обращаю ваше внимание, что когда в преобразование симметрии вовлечены еще и замены координат, то

$$\partial_{\mu} \tilde{\delta} \Phi^{\Upsilon}(x) \neq \tilde{\delta} \partial_{\mu} \Phi^{\Upsilon}(x). \quad (7.1.18)$$

В этом смысле преобразованный Лагранжиан нельзя! представить в виде

$$\mathcal{L}\left(\Phi'^{\Upsilon}(x'), \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\Phi'^{\Upsilon}(x')\right) \neq \mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right). \quad (7.1.19) \quad \boxed{\text{guessL}}$$

Поясним подробнее, что имеется ввиду. Вся трудность возникает из слагаемого с производной, и мы хотим узнать, какой вид имеет малая добавка к этому слагаемому после выполнения преобразований (7.1.3), (7.1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\Phi'^{\Upsilon}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \\ &= \frac{\partial(x'^{\nu} - \tilde{\delta}x^{\nu})}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \left(\delta_{\mu}^{\nu} - \frac{\partial\tilde{\delta}x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Phi^{\Upsilon}(x) - \underbrace{\frac{\partial\tilde{\delta}x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Phi^{\Upsilon}(x)}_{\text{connection}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\tilde{\delta}\Phi^{\Upsilon}(x). \quad (7.1.20) \quad \boxed{\text{connection}} \end{aligned}$$

Напоминаю, что мы работаем только с инфинитезимальными преобразованиями: сохранены слагаемые только нулевого и первого порядков. Как мы видим из (7.1.20), честный подсчет приращения аргумента Лагранжиана, связанного с производными полей, будет отличен от наивной догадки (7.1.19). Можно систематически учитывать эту добавку, но на практике действуют иначе: в преобразованном действии

$$\int_{\Sigma'} d^4x' \mathcal{L}\left(\Phi'^{\Upsilon}(x'), \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\Phi'^{\Upsilon}(x')\right) \quad (7.1.21) \quad \boxed{\text{Str}}$$

переходят от координат x' к координатам x . Последнее позволяет свести полную вариацию полей (7.1.4) к вариации формы (7.1.5), а для последней уже справедливо

$$\mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Phi^{\Upsilon}(x)\right) = \mathcal{L}\left(\Phi^{\Upsilon}(x) + \delta\Phi^{\Upsilon}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Phi^{\Upsilon}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta\Phi^{\Upsilon}(x)\right) \quad (7.1.22)$$

поскольку в это не вовлечена замена координат.

Выполним переход к другим координатам. Для этого нам также надо преобразовать интеграл

$$\int_{\Sigma'} d^4x' = \int_{\Sigma} d^4x \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right|, \quad (7.1.23)$$

где Якобиан с точностью до первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| &= \left| \frac{\partial(x^{\mu} + \tilde{\delta}x^{\mu})}{\partial x^{\nu}} \right| = \left| \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial\tilde{\delta}x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \left(\delta_{\mu_0}^0 + \frac{\partial\tilde{\delta}x^0}{\partial x^{\mu_0}} \right) \dots \left(\delta_{\mu_3}^3 + \frac{\partial\tilde{\delta}x^3}{\partial x^{\mu_3}} \right) = \\ &= \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \delta_{\mu_0}^0 \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \delta_{\mu_3}^3 + \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \frac{\partial\tilde{\delta}x^0}{\partial x^{\mu_0}} \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \delta_{\mu_3}^3 + \dots + \epsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \delta_{\mu_0}^0 \delta_{\mu_1}^1 \delta_{\mu_2}^2 \frac{\partial\tilde{\delta}x^3}{\partial x^{\mu_3}} = \\ &= 1 + \frac{\partial\tilde{\delta}x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (7.1.24) \end{aligned}$$