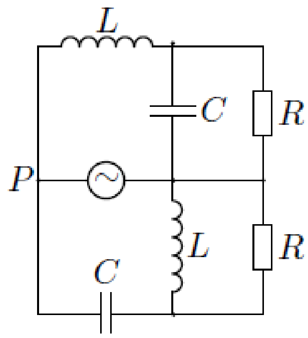
Государственный экзамен по физике

III курс *14 января 2014 года*

ВАРИАНТ А

1А. Внутри тонкой трубки нормально к оси закреплен нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при $t = 20\,℃$. Трубке сообщается скорость $v = 1$ *см/с* вдоль ее оси. Оценить мощность нагревателя q, при которой трубка будет двигаться равномерно. Сила сопротивления $F_c = \beta v$ ($\beta = 10^{-5}$ *кг/с*). Давление воздуха внутри трубки считать постоянным, силу тяжести и теплоперенос через стенку не учитывать. Изменением кинетической энергии воздуха при пересечении сеточки пренебречь. Показать, при каком условии это можно сделать.

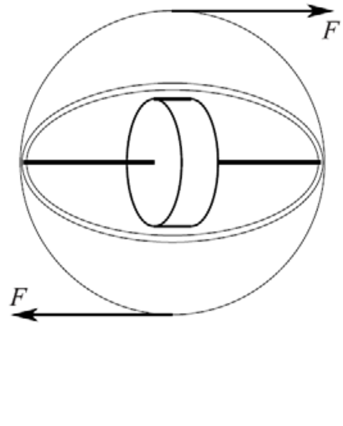
2А. На рисунке показана принципиальная схема оконечного каскада системы высококачественного воспроизведения звука (динамики изображены резисторами). Найти частоту ω_0, при которой импедансы верхней и нижней половин цепи оказываются комплексно сопряженными. Определить для этого случая комплексные амплитуды токов в точке P при амплитуде синусоидального напряжения генератора, равной U_0. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.



3А. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с линейным коэффициентом расширения $\alpha = 6\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$, студент исследовал одну из линий серии Бальмера водорода. На следующий день он исследовал ту же линию атомарного дейтерия. Оказалось, что положения линий совпали. Найти величину и знак изменения температуры в лаборатории.

4А. В октябре 2012 года элемент 116 Периодической системы получил официальное название «ливерморий» (Livermorium) в знак большого вклада ученых Ливерморской лаборатории (США) в синтез сверхтяжелых элементов. Время жизни этого ядра столь велико, что успевает образоваться одноэлектронный ион ливермория. Оценить в боровской модели энергию связи этого иона, считая электрон релятивистским.

5А. Основным элементом кистевого тренажера «Торнео» является цилиндрический маховичок, жестко насаженный на ось, которая может скользить с трением в круговом желобе, расположенном по экватору внутренней поверхности сферического корпуса. Предварительно раскрученный маховичок затем разгоняется до высоких оборотов за счет создания кистью руки приложенного к корпусу крутящего момента пары сил F. Оцените, до какой максимальной частоты вращения можно раскрутить маховичок, если сила $F \le 30$ *Н*. Диаметр маховичка $D = 3$ *см*, масса $m = 200$ *г*, радиус оси маховичка $r = 1$ *мм*, ее длина (диаметр желоба) $l = 5$ *см*.



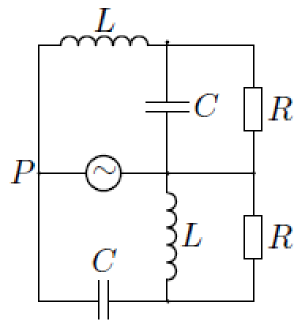
Государственный экзамен по физике

III курс *14 января 2014 года*

ВАРИАНТ Б

1Б. Внутри тонкой трубки перпендикулярно к оси закреплен нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при $t = 20\,^\circ C$. Трубке сообщается скорость $v_0 = 1$ *см/с* вдоль ее оси и она начинает разгоняться. Пренебрегая сопротивлением воздуха, оценить скорость трубки через минуту. Давление воздуха внутри трубки считать постоянным, силу тяжести и теплоперенос через стенку не учитывать. Изменением кинетической энергии воздуха при пересечении сеточки пренебречь. Показать, при каком условии это можно сделать.

2Б. На рисунке показана принципиальная схема оконечного каскада системы высококачественного воспроизведения звука (динамики изображены резисторами). Найти потребляемые динамиками электрические мощности на частоте ω_0, на которой импедансы верхней и нижней половин цепи оказываются комплексно сопряженными. Амплитуду синусоидального напряжения генератора принять равной U_0, внутренним сопротивлением генератора пренебречь.



3Б. Для повышения проводимости высокотемпературной плазмы МГД-генераторов в них добавили ионы меди. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с модулем Юнга $E = 70$ *ГПа*, изучают в оптическом диапазоне одну из линий водородоподобного иона $_{63}Cu^{28+}$. Если решетку подвергнуть небольшому продольному (поперек штрихов) сжатию, то положение линии иона изотопа меди $_{65}Cu^{28+}$ совпадет с положением линии $_{63}Cu^{28+}$ до сжатия. Найти величину напряжения сжатия.

4Б. В октябре 2012 года элемент 114 Периодической системы получил официальное название «флеровий» (Flerovium) в честь Г.Н.Флерова, под руководством которого в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ (Дубна) в течение многих лет успешно проводились работы по синтезу новых элементов. Оценить в боровской модели размер одноэлектронного иона флеровия, учитывая релятивизм электрона.

5Б. Медленно вращающееся приподнятое переднее колесо с педалями трехколесного велосипеда можно разогнать до больших скоростей, поворачивая руль на небольшой угол влево-вправо в определенные моменты времени. Оцените минимальное время разгона колеса от начальной частоты вращения $\nu_0 = 5$ *Гц* до значения $\nu = 10$ *Гц*. Считайте, что масса колеса $M = 1{,}5$ *кг* сосредоточена в его тонком ободе радиусом $R = 25$ *см*; педали, жестко связанные с осью колеса, отстоят от плоскости колеса на расстояние $r = 10$ *см* и вращаются по радиусу $r = 10$ *см*. Размах угла поворота руля составляет $\varphi = 5°$. Педали считайте точечными массами по $m = 150$ *г* каждая.

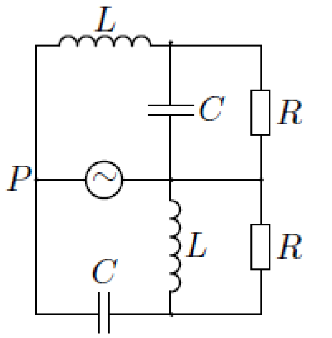
Государственный экзамен по физике

III курс *14 января 2014 года*

ВАРИАНТ В

1В. Внутри тонкой трубки нормально к оси закреплен нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при $t = 20$ °C. К нагревателю подводится мощность $q = 100$ *Вт*. Трубке сообщается скорость v вдоль ее оси и она начинает разгоняться. Оценить установившуюся скорость трубки, если сила сопротивления $F_c = \beta v^2$ ($\beta = 3{,}5\cdot 10^{-5}$ *кг/м*). Давление воздуха внутри трубки считать постоянным, силу тяжести и теплоперенос через стенку не учитывать. Изменением кинетической энергии воздуха при пересечении сеточки пренебречь. Показать, при каком условии это можно сделать.

2В. На рисунке показана принципиальная схема оконечного каскада системы высококачественного воспроизведения звука (динамики изображены резисторами). Найти частоту ω_0, на которой импедансы верхней и нижней половин цепи оказываются комплексно сопряженными. Определить для этого случая комплексные амплитуды токов через динамики при амплитуде синусоидального напряжения генератора, равной U_0. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

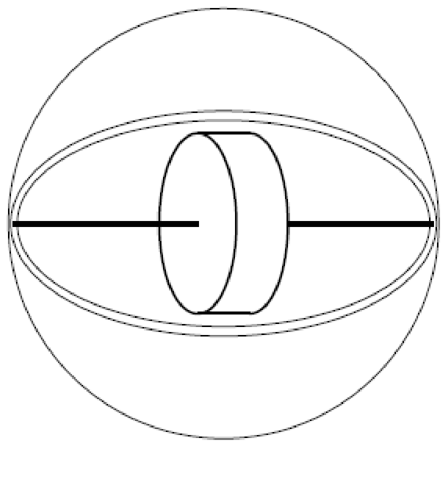


3В. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с пьезомодулем $\beta = 6\cdot 10^{-10}$ м/В, студент исследовал одну из линий серии Бальмера атома дейтерия. На следующий день он исследовал ту же линию атомарного трития, но в момент измерения решетка оказалась в однородном электрическом поле (поперек штрихов). Найти величину напряженности E возникшего электрического поля.

Указание: При обратном пьезоэффекте относительное изменение размеров кристалла $\Delta l/l = \beta E$.

4В. Оценить заряд ядра Z водородоподобного иона, начиная с которого невозможны стационарные электронные орбиты. Учесть, что для больших Z существенна релятивистская зависимость энергии от импульса.

5В. Основным элементом кистевого тренажера «Торнео» является цилиндрический маховичок, жестко насаженный на ось, которая может скользить в круговом желобе, расположенном по экватору внутренней поверхности сферического корпуса. Разогнанный до частоты вращения $\nu_0 = 200$ *Гц* маховичок при торможении прецессирует вдоль желоба с постоянной частотой $\nu_{пр} = 2$ *Гц*. Оценить время, за которое частота вращения маховичка уменьшится в 3 раза. Коэффициент трения оси маховичка о поверхность кольцевого желоба $\mu = 0{,}1$. Радиус оси маховичка $r = 1$ *мм*, ее длина (диаметр желоба) $l = 5$ *см*. Силу тяжести не учитывать.



ВАРИАНТ А

1А. `(А. Гуденко, Савров)` Найдём выражение для силы тяги, возникающей при движении трубки. В системе, связанной с двигателем, поток воздуха с небольшой скоростью продувается через трубку с нагревателем в виде сетки (кстати, это стандартная лабораторная установка для измерения теплоёмкости газов C_P при постоянном давлении). Индексом 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к входящему (холодному) и выходящему (горячему) газу соответственно. В силу постоянства потока масса газа, протекающего в единицу времени через трубку, равна $m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \rho_1 v_1 S = \rho_2 v_2 S$. Закон сохранения энергии записывается в виде: $PV_1 - PV_2 + q = U_2 - U_1 + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Покажем, что изменение кинетической энергии газа ΔK мало по сравнению с изменением внутренней энергии ΔU:

$$\Delta K \simeq mv\Delta v = mv^2\frac{\Delta v}{v} = mv^2\frac{\Delta V}{V} = mv^2\frac{\Delta T}{T} = \frac{\frac{m}{\mu}\gamma R\Delta T v^2}{\gamma RT/\mu} = \frac{m}{\mu}R\Delta T\gamma\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll \Delta U = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T.$$

Здесь $c = \sqrt{\gamma RT/\mu}$ — скорость звука. Поэтому, можно считать, что работа внешнего давления и мощность нагревателя расходуются только на изменение внутренней энергии газа:

$$PV_1 - PV_2 + q = U_2 - U_1 \quad \to \quad (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) = q.$$

Отсюда следует, что $(m/\mu)C_P\Delta T = q$ (именно это уравнение и используется в установке по измерению $C_P = \gamma R/(\gamma - 1)$). Сила тяги:

$$F_p = m\Delta v = mv\frac{\Delta v}{v} = mv\frac{\Delta T}{T} = \frac{v\mu q}{C_P T} = (\gamma - 1)\frac{vq}{c^2}.$$

Трубка будет двигаться равномерно при равенстве сил тяги и сопротивления $(\gamma-1)qv/c^2 = \beta v$, откуда мощность $q = \beta c^2/(\gamma - 1) = 10^{-5} \cdot 343^2/0{,}4 \simeq 3$ Вт.

2А. `(Крымский, Никулин)` Импедансы ветвей:

$$Z_1 = i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega CR} = \frac{R + i[\omega L + (\omega CR)^2(\omega L - 1/\omega C)]}{1 + (\omega CR)^2},$$

$$Z_2 = \frac{1}{i\omega C} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L} = \frac{R - i[(1/\omega C) - (R/\omega L)^2(\omega L - 1/\omega C)]}{1 + (R/\omega L)^2}.$$

Видно, что при $\omega L = 1/\omega C$, то есть при $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{CL}$, импедансы ветвей становятся сопряжёнными. Удобно представить их в виде $Z_{1,2} = \frac{\rho^2}{R \mp i\rho} = (Q\rho\cos\varphi)e^{\pm i\varphi}$, где $\rho = \sqrt{L/C}$, $Q = \rho/R$, $\varphi = \operatorname{arctg} Q$. Токи I_1 и I_2 в ветвях 1 и 2 даются формулой

$$I_{1,2} = \frac{U_0}{Z_{1,2}} = \frac{U_0}{Q\rho\cos\varphi}e^{\mp\varphi} = \sqrt{1 + Q^{-2}}\frac{U_0}{\rho}e^{\mp\varphi}.$$

Полный импеданс цепи $Z_0 = Z_1 Z_2/(Z_1 + Z_2) = Q\rho/2$ является действительной величиной, и ток генератора $I_0 = U_0/Z_0 = 2Q^{-1}(U_0/\rho)$ совпадает по фазе с его напряжением.

3А. `(Петров)` Условие возникновения максимума первого порядка $d\sin\theta = \lambda$. При изменении температуры решётки от T до $T + \Delta T$ и длины волны излучения от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, получаем, что $\Delta d/d + (\operatorname{ctg}\theta)\Delta\theta = \Delta\lambda/\lambda$, где $\Delta d/d = \alpha\Delta T$. Поскольку положения линий совпали, то $\Delta\theta = 0$ и $\Delta T = \Delta\lambda/\alpha\lambda$. Здесь $\Delta\lambda/\lambda$ — относительный сдвиг соответствующих линий дейтерия и водорода из-за разных приведённых масс электронов: $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\mu/\mu$. Приведённая масса одноэлектронного атома $\mu = mM/(m + M) \simeq m(1 - m/M)$. Для водорода $M = m_p$, для дейтерия $M = 2m_p$ (m — масса электрона, M — масса ядра, m_p — масса протона). Поэтому

$$\Delta\mu = \mu_{\text{D}} - \mu_{\text{H}} = m^2\left(-\frac{1}{2m_p} + \frac{1}{m_p}\right) = \frac{m^2}{2m_p} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\mu}{\mu} = -\frac{m}{2m_p}.$$

Таким образом, $\Delta T = -\dfrac{m}{\alpha 2m_p} = -\dfrac{10^5}{2 \cdot 6 \cdot 1836} = -4^\circ$.

4А. `(Петров)` Система боровских уравнений в релятивистском случае для основного состояния записывается в виде

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 - \frac{Ze^2}{r}, \quad pr = \hbar$$

Энергия E электрона как функция импульса p и расстояния r до ядра с зарядом Ze отсчитана от энергии покоя электрона mc^2. Подставляя $r = \hbar/p$ в первое уравнение, получаем

$$E(r) = \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{r^2} + m^2c^4} - mc^2 - \frac{Ze^2}{r} = mc^2\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{mrc}\right)^2} - 1 - Z\alpha\frac{\hbar}{mcr}\right] =$$

$$= mc^2\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda\!\!\!^{-}_c}{r}\right)^2} - 1 - Z\alpha\frac{\lambda\!\!\!^{-}_c}{r}\right]$$

или $E(y) = mc^2(\sqrt{1+y^2} - 1 - Z\alpha y)$, где $y = \lambda\!\!\!^{-}_c/r$. Для минимума энергии необходимо $E'(y) = 0$, откуда в минимуме $y_0 = Z\alpha/\sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$. Энергия электрона

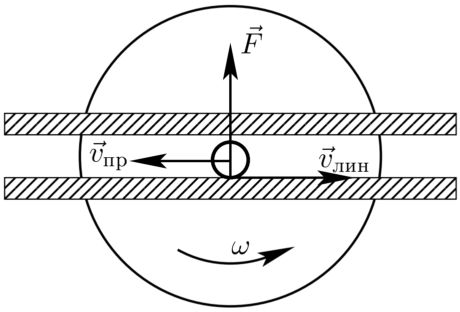
$$E(y_0) = mc^2\left(\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} - 1\right).$$

Соответственно энергия связи

$$E_0 = -E(y_0) = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right) \simeq 0{,}47mc^2 = 240 \text{ кэВ}.$$

5А. `(Савров)` Момент сил Fl, приложенный к оси маховичка, заставляет конец оси прецессировать вдоль жёлоба со скоростью

$$v_{\text{пр}} = \frac{Fl}{I\omega} \cdot \frac{l}{2},$$



где I — момент инерции маховичка, а ω — угловая скорость вращения. Относительно маховичка стенка жёлоба движется в том же направлении, что и точки на поверхности оси, прижатой к стенке жёлоба. Если скорость стенки $v_{\text{пр}}$ превышает линейную скорость точек поверхности оси $v_{\text{лин}} = \omega r$, сила трения раскручивает маховичок. В противном случае он тормозится.

Таким образом, максимальная угловая скорость вращения определяется из условия:

$$v_{\text{пр}} \geqslant v_{\text{лин}} \qquad \text{или} \qquad \frac{Fl^2}{2I\omega} \geqslant \omega r,$$

откуда

$$\omega^2_{\max} = \frac{Fl^2}{2Ir}.$$

Учитывая, что момент инерции цилиндра $I = mR^2/2$, получаем:

$$\nu_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{l}{2\pi R}\sqrt{\frac{F}{mr}} \approx 100 \text{ Гц}.$$

ВАРИАНТ Б

1Б. `(А. Гуденко)` Сила тяги (см. решение задачи 1А) $F = (\gamma - 1)qv/c^2$. По закону Ньютона $Mdv/dt = F$, или

$$M\frac{dv}{dt} = (\gamma - 1)\frac{qv}{c^2} \quad \rightarrow \quad v = v_0e^{t/\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{Mc_2}{(\gamma - 1)q} = \frac{15 \cdot 10^{-3} \cdot 343^2}{(1{,}4 - 1)100} \simeq 44 \text{ с}.$$

Искомая скорость $v = v_0e^{t/\tau} = 1 \cdot e^{60/44} \simeq 4$ см/с.

2Б. `(Крымский, Никулин)` Частота ω_0 и импедансы Z_1 и Z_2 ветвей 1 и 2 определены в решении задачи 2А. Реальные части этих импедансов равны, так что равны потребляемые динамиками электрические мощности. Полная нагрузка Z_0 на генератор является чисто активной: $Z_0 = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2) = Q\rho/2$, при этом каждый динамик потребляет среднюю мощность, равную $W_{1,2} = U_0^2/4Z_0 = U_0^2/2Q\rho = U_0^2CR/2L$.

3Б. `(Петров, А. Гуденко)` Условие возникновения максимума первого порядка $d\sin\theta = \lambda$. При изменении давления от p_0 до $p = p_0 + \Delta p$ и длины волны излучения от λ до $\lambda + d\lambda$, получаем, что $\Delta d/d + (\operatorname{ctg}\theta)\Delta\theta = \Delta\lambda/\lambda$, где $\Delta d/d = -\Delta p/E$. Поскольку положения линий совпали, то $\Delta\theta = 0$ и $-\Delta p/E = \Delta\lambda/\lambda$. Здесь $\Delta\lambda/\lambda$ — относительный сдвиг соответствующих линий иона с массовым числом $A + 2$ и иона с массовым числом A из-за разных приведённых масс: $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\mu/\mu$. Приведённая масса одноэлектронного иона

$$\mu(A) = \frac{mM}{m+M} \simeq m\left(1 - \frac{m}{M}\right) = m\left(1 - \frac{m}{Am_p}\right),$$

где m — масса электрона, M — масса ядра, m_p — масса протона. Поэтому

$$\Delta\mu = \mu(A+2) - \mu(A) = m^2\left(-\frac{1}{(A+2)m_p} + \frac{1}{Am_p}\right) = \frac{2m^2}{A(A+2)m_p}$$

и

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\mu}{\mu} = -\frac{2m}{A(A+2)m_p}.$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{E}\Delta p = -\frac{2m}{A(A+2)m_p},$$

откуда

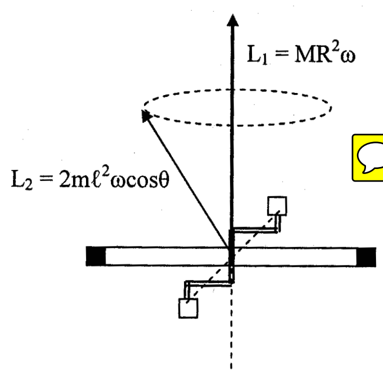
$$\Delta p = \frac{2E}{A(A+2)}\frac{m}{m_p} = \frac{2\cdot 70\cdot 10^9}{63\cdot 65\cdot 1836} \simeq 0{,}186\cdot 10^5 \text{ Па} \quad \text{или} \quad 0{,}183 \text{ атм}.$$

4Б. `(Петров)` Аналогично 4А получим

$$r_0 = \frac{\lambda_c}{Z\alpha}\sqrt{1-(Z\alpha)^2} = \frac{a_{\text{Б}}}{Z}\sqrt{1-(Z\alpha)^2} \simeq 0{,}55\frac{a_{\text{Б}}}{Z} = 4{,}9\cdot 10^{-3}a_{\text{Б}}.$$

Если релятивизм не учитывать, то размер такого иона оказывается в два раза большим.

5Б. `(А. Гуденко)` Из-за несимметричности расположения педалей относительно оси колеса, момент импульса педалей $\vec{L}_2$ не совпадает с осью вращения колеса, вдоль которой направлен момент импульса обода $\vec{L}_1 = I_1\omega = MR^2\omega$. Он образует с ним угол θ и по величине равен $L_2 = 2|\vec{l}\times m\vec{v}| = 2lmv$.



Вектор момента сил направлен вертикально вверх от плоскости рисунка. Если повернуть руль против часовой стрелки (т.е. в направлении момента сил), то будет совершена положительная работа $\Delta A = M_F\varphi$. Через полпериода надо совершить поворот по часовой стрелке, и при этом будет совершена такая же работа. Таким образом, за период обращения увеличение кинетической энергии колеса равно $2M_F\varphi$.

Под действием момента сил $\vec{M}_{F}$, возникающего во втулке колеса, вектор $\vec{L}_2$ прецессирует вокруг направления $\vec{L}_1$ с той же угловой скоростью ω согласно уравнению

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{F} = \vec{\omega} \times \vec{L}_2.$$

откуда

$$M_{F} = \omega L_2 \sin\theta = \omega 2lmv \sin\theta = 2m\omega^2 l^2 \sin\theta \cos\theta = 2m\omega^2 r^2.$$

За время dt колесо сделает $dN = \omega dt/2\pi$ оборотов и полное приращение кинетической энергии будет

$$dK = I\omega d\omega = 2M_{F}\varphi dN = 2M_{F}\varphi \frac{\omega dt}{2\pi},$$

где $I = I_1 + I_2 = MR^2 + 2mr^2$ — суммарный момент инерции колеса относительно оси вращения. Подставляя величину M_{F}, получаем $(MR^2 + 2mr^2)d\omega = 2m\omega^2 r^2 \varphi dt/\pi$ или

$$\frac{\pi}{\varphi}\left(\frac{MR^2}{2mr^2} + 1\right)\frac{d\omega}{\omega^2} = dt.$$

Интегрируя с начальным условием $\omega(t = 0) = \omega_0$, получаем

$$\frac{\pi}{\varphi}\left(\frac{MR^2}{2mr^2} + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega}\right).$$

Таким образом, удвоение угловой скорости произойдёт за время

$$t^* = \frac{\pi}{2\varphi\omega_0}\left(\frac{MR^2}{2mr^2} + 1\right) = \frac{180}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6{,}28}\left(\frac{2500 \cdot 625}{2 \cdot 150 \cdot 100} + 1\right) \simeq 30 \text{ с}.$$

ВАРИАНТ В

1В. `(А. Гуденко)` В установившемся режиме сила сопротивления $F_c = \beta v^2$ сравнивается с силой тяги $F_{\text{р}}(\gamma - 1)qv/c^2$. Поэтому

$$\beta v_{\text{уст}}^2 = (\gamma - 1)\frac{qv_{\text{уст}}}{c^2} \to v_{\text{уст}} = \frac{(\gamma - 1)q}{\beta c^2} = \frac{0{,}4 \cdot 100}{3{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 343^2} \simeq 10 \text{ м/с}.$$

2В. `(Крымский, Никулин)` Токи через динамики определяются по формулам $I_{RC} = \frac{U_0}{R}\frac{Z_C}{Z_1}$, $I_{RL} = \frac{U_0}{R}\frac{Z_L}{Z_2}$, где $Z_C = R/(1 + i\omega CR)$, $Z_L = R/(1 - iR/\omega L)$ — импедансы динамиков с шунтирующими их элементами схемы: ёмкостью C в ветви 1 и индуктивностью L в ветви 2, а импедансы Z_1, Z_2 и частота ω_0 определены в решении задачи 2А. В результате получаем: $I_{RC} = -i(U_0/\rho)$, $I_{RL} = i(U_0/\rho)$. Токи сдвинуты по фазе от напряжения генератора на углы $\mp\pi/2$.

3B. `(Петров, Раевский)` Условие возникновения максимума первого порядка $d \sin\theta = \lambda$. При изменении размеров кристалла и длины волны излучения от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, получаем, что

$$\frac{\Delta d}{d} + (\operatorname{ctg}\theta)\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad \text{где} \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} = \beta E.$$

Поскольку угловые положения линий совпали, то $\Delta\theta = 0$ и $E = \Delta\lambda/(\beta\lambda)$. Здесь $\Delta\lambda/\lambda$ — относительный сдвиг соответствующих линий трития и дейтерия из-за разных приведённых масс электронов: $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\mu/\mu$. Приведённая масса одноэлектронного атома $\mu = mM/(m+M)$. Для дейтерия $M = 2m_p$, для трития $M = 3m_p$ (m — масса электрона, M — масса ядра, m_p — масса протона). Поэтому

$$\Delta\mu = \mu_{\text{Т}} - \mu_{\text{D}} = m^2\left(\frac{1}{3m_p} - \frac{1}{2m_p}\right) = -\frac{m^2}{6m_p}, \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{m}{6m_p}.$$

Таким образом

$$E = \frac{1}{\beta}\frac{m}{6m_p} = \frac{10^{10}}{6\cdot 6\cdot 1836} \simeq 151200 \text{ В/м} \approx 1{,}5 \text{ кВ/см}.$$

4B. `(Свинцов)` Для малых энергий связи $|E_c| \ll mc^2$ радиус стационарной орбиты можно получить путём минимизации нерелятивистской полной энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r},$$

учитывая оценку импульса из соотношения неопределённостей $p = \hbar/r$. Минимизация выражения

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}$$

приводит к известному результату $R_0 = \hbar^2/me^2$ (боровский радиус) и энергии связи $E_c = -Z^2\alpha^2 mc^2/2$. Минимум полной энергии в таком случае существует всегда.

При больших Z выражение для полной энергии записывается в виде

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - Ze^2/r \simeq \sqrt{(\hbar c/r)^2 + m^2c^4} - Ze^2/r.$$

Найдём минимум этого выражения

$$\frac{dE}{dr} = \frac{Ze^2}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{(\hbar c/r)^2}{\sqrt{(\hbar c/r)^2 + m^2c^4}} = 0 \quad \to \quad (Z^2\alpha^2 - 1)(\hbar c/r)^2 = -\frac{mc^2}{\alpha^2}.$$

Это уравнение не имеет решений при $Z > 1/\alpha$, или при $Z > 137$.

Точное решение уравнения Дирака приводит к такому же результату.

5B. `(А. Гуденко, Савров)` Прецессию маховика вызывает момент сил давления N оси маховика на поверхность кольцевого желобка $M = Nl$. Уравнение прецессии $L\Omega = Nl$, где L — момент количества движения маховика, $\Omega = 2\pi\nu_{\text{пр}}$ — угловая скорость (частота) прецессии.

Сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu L\Omega/l$. Величина момента силы трения, тормозящего вращение маховика $M_{\text{тр}} = 2F_{\text{тр}}r = 2\mu L\Omega r/l$. Динамика торможения описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt} = -M_{\text{тр}} = -2\mu L\Omega r/l \quad \to \quad L = L_0 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = l/2\mu\Omega r = l/4\pi\mu\nu_{\text{пр}}r = 50/(4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1\cdot 2) \simeq 20\,\text{с}$ — характерное время, в течение которого частота вращения маховика падает в e раз, поэтому в 10 раз частота уменьшается за время $t = \tau(\ln L_0/L) = 20\ln 10 = 46$ с.

Обсуждение письменной работы 21 января в 8-45
в Главной физической аудитории