0-1-1. Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?

$\lambda_{max1} = 2$ мкм

$\lambda_{max2} = 1$ мкм

$\frac{R_2^*}{R_1^*}$ – ?

З-н Вина: $\lambda_{max} T = const$

$$\lambda_{max1} T_1 = \lambda_{max2} T_2 \;\hookrightarrow\; \frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}} \quad (1)$$

З-н Стефана-Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4 \;\hookrightarrow\; \boxed{\frac{R_2^*}{R_1^*} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \overset{(1)}{=} \left(\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}}\right)^4 = 2^4 = 16}$$ ← Ответ

0-1-2. Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна $1{,}3 \cdot 10^7$ К.

$T = 1{,}3 \cdot 10^7 K$

P – ?

Давление равновесного теплового излучения:

$$\boxed{P = \frac{\rho}{3} = \frac{aT^4}{3} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 3 \cdot 10^{10}} (1{,}3 \cdot 10^7)^4 = 7{,}2 \cdot 10^{13} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \approx 7{,}2 \cdot 10^7 \text{атм}}$$

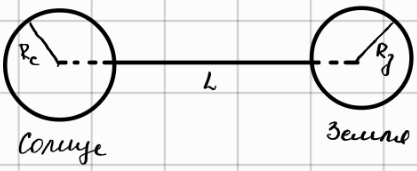
Ответ

1.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_C = 0{,}01$ рад и температуры земной поверхности ($T_З \simeq 300$ K).

$\alpha_c = 0{,}01$

$T_З = 300 K$

T_c – ?



Будем считать, что Земля – АЧТ

Полный поток световой энергии от Солнца:

$$\Phi_{полн} = \sigma T_c^4 \cdot 4\pi R_c^2 \quad (1)$$

Поток световой энергии, падающий на Землю:

$$\Phi = \Phi_{полн} \cdot \frac{\pi R_З^2}{4\pi L^2} \overset{(1)}{=} \frac{\sigma T_c^4 \cdot 4\pi R_c^2 R_З^2}{4L^2} = \sigma T_c^4 \underbrace{\left(\frac{R_c}{L}\right)^2}_{\left(\frac{\alpha_c}{2}\right)^2} \pi R_З^2 = \left(\frac{\alpha_c}{2}\right)^2 \sigma T_c^4 \pi R_З^2 \quad (2)$$

Для стационарного случая:

$$\Phi = \sigma T_З^4 4\pi R_З^2 \quad (3)$$

Из (2), (3): $\left(\frac{\alpha_c}{2}\right)^2 \sigma T_c^4 \pi R_З^2 = \sigma T_З^4 4\pi R_З^2 \;\hookrightarrow\; \boxed{T_c = \frac{2T_З}{\sqrt{\alpha_c}} = \frac{2 \cdot 300}{\sqrt{0{,}01}} = 6000 K}$ ← Ответ

1.32. Оценить, до какой максимальной температуры может разогреться в космосе сферический кусочек металлического урана-238 массой $m = 4$ г за счет естественной радиоактивности, считая, что продукты распада не покидают его. Плотность урана $\rho = 18{,}7$ г/см^3, период спонтанного деления $T_{1/2}^{сд} = 10^{16}$ лет, характеристики α-распада: $T_{1/2}^{\alpha} = 10^9$ лет, $\mathcal{E}_\alpha = 4{,}2$ МэВ. Влиянием солнечной радиации и космических лучей пренебречь.

Т.к. $T_{1/2}^{сд} \gg T_{1/2}^{\alpha}$, то наибольшее тепловыделение происходит из-за α-распада:

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + \alpha + \mathcal{E}_\alpha$$

Число α-распадов за 1с: $\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \frac{\ln 2 \cdot N}{T_{1/2}^{\alpha}} \quad (1)$

$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{\alpha}}$

$m = \frac{\mu}{N_A} \underbrace{N}_{\text{число ядер урана}} \quad \to \quad N = \frac{m N_A}{\mu} \quad (2)$

Выделяемая мощность при α-распаде:

$$\dot{Q} = \left|\frac{dN}{dt}\right| \mathcal{E}_\alpha \overset{(1),(2)}{=} \frac{\ln 2 \cdot m N_A \mathcal{E}_\alpha}{T^\alpha_{1/2}\, \mu} \quad (3)$$

Находим радиус шарика: $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = m \to r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$ (4)

Площадь поверхности шарика: $S = 4\pi r^2 \overset{(4)}{=} 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$ (5)

В установившемся режиме (считаем урановый шарик АЧТ):

$$\dot{Q} = S\sigma T^4 \quad (6)$$

Из (3),(6): $\frac{\ln 2 \cdot m N_A \mathcal{E}_\alpha}{T^\alpha_{1/2}\, \mu} = S\sigma T^4$, где $S = 4\pi\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3} = 4\cdot 3{,}14\left(\frac{3\cdot 4}{4\cdot 3{,}14\cdot 18{,}7}\right)^{2/3} = 1{,}73\ см^2$

$$\to \boxed{T = \left(\frac{\ln 2}{T^\alpha_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{\mu} \cdot \frac{\mathcal{E}_\alpha}{S\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{0{,}7}{10^9 \cdot 3{,}16\cdot 10^7} \cdot \frac{4\cdot 6\cdot 10^{23}}{238} \cdot \frac{4{,}2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-6}}{1{,}73\cdot 5{,}67\cdot 10^{-5}}\right)^{1/4} \approx 11{,}1\ K}$$ ← Ответ

1.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 K на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \mathrm{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

$\frac{\Delta U}{U} = 0{,}05$

$T = 1500\ K$

$\lambda = 500\ нм$

$\frac{\Delta E(\omega)}{E(\omega)}$ — ?

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{hc}{kT\lambda} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{10}}{1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 1500\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}} = 19{,}2 \gg 1 \to \rho(\omega) \sim e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

$$\frac{\Delta E(\omega)}{E(\omega)} = \frac{\Delta\rho(\omega)}{\rho(\omega)} = \frac{\hbar\omega}{kT}\cdot\frac{\Delta T}{T} \quad (1)$$

$\exists$ вся мощность P, выделяемая током в нити, отводится только излучением, тогда: $P = \frac{U^2}{R} \sim T^4 \to 2\frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta R}{R} = 4\frac{\Delta T}{T}$ (2)

R ← сопротивление нити

1) $\exists\ R = \mathrm{const} \to$ из (2): $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta U}{U}$ (3)

(3) → (1): $\boxed{\frac{\Delta E(\omega)}{E(\omega)} = \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta U}{U} = \frac{19{,}2}{2}\cdot 0{,}05 = 0{,}48}$ ← Ответ

2) $\exists\ R \sim T$:

$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta T}{T}$ (4); (4) → (2): $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5}\frac{\Delta U}{U}$ (5)

(5) → (1): $\boxed{\frac{\Delta E(\omega)}{E(\omega)} = \frac{2}{5}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta U}{U} = \frac{2}{5}\cdot 19{,}2\cdot 0{,}05 = 0{,}38}$ ← Ответ

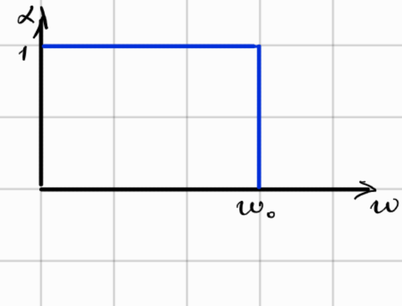
1.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leqslant \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствии других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T. Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ K. Граничная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_Б = 300$ K.

$\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \le \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$

$T^* = 300\ K$

$\Theta = \frac{\hbar\omega_0}{k} = 300\ K$

T — ?



W - мощность, выделяемая внутренним источником энергии

S - площадь поверхности тела

В установившемся режиме:

$$W = S\int_0^\infty R(\omega)\, d\omega \quad (1)$$

По з-ну Кирхгофа: $R(\omega) = \alpha(\omega) R^*(\omega)$ (2)

(2) => (1): $W = S\int_0^\infty \alpha(\omega)\underbrace{R^*(\omega)}_{=\frac{c\rho(\omega)}{4}}d\omega = \frac{Sc}{4}\int_0^\infty \alpha(\omega)\rho(\omega)d\omega = \frac{Sc}{4}\int_0^{\omega_0}\rho(\omega)d\omega$ (3)

Предположим, что $kT \gg \hbar\omega_0$, тогда: $\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} \simeq \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT$ (4)

(4) => (3): $W = \frac{Sc\,kT}{4\pi^2c^3}\int_0^{\omega_0}\omega^2 d\omega = \frac{S\omega_0^3kT}{12\pi^2c^2}$ (5)

Для такого же тела с $\alpha(\omega) = 1$ (АЧТ) в установившемся режиме: $W = S\sigma T^{*4}$ (6)

Из (5), (6): $S\sigma T^{*4} = \frac{S\omega_0^3kT}{12\pi^2c^2}$ ↳ $\boxed{T = \frac{12\pi^2c^2\sigma T^{*4}}{\omega_0^3k}} = \frac{12\pi^2c^2T^{*4}}{\omega_0^3k}\cdot\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3} = \frac{\pi^4k^3T^{*4}}{5\hbar^3\omega_0^3} =$

$\sigma = \frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}$ $\Theta = \frac{\hbar\omega_0}{k}$

$= \frac{\pi^4}{5}\cdot\frac{T^{*4}}{\Theta^3} = \frac{3{,}14^4}{5}\cdot\frac{(300)^4}{(300)^3} \simeq \boxed{5845\,K}$ ↳ наше предположение, что $kT \gg \hbar\omega_0$ верно)

Ответ

Т1. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°С. В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше $\lambda_0 = 20\,000$ Å; б) с длиной волны более $\lambda_0 = 20\,000$ Å. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$..

Дано	Решение
$T_з = 288\,K$ $\lambda_0 = 20000$ Å $t' = 0{,}95t = \frac{19}{20}t$ а) $\lambda < \lambda_0$ ($\omega > \omega_0$) б) $\lambda > \lambda_0$ ($\omega < \omega_0$) $T_з' = ?$	$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^{10}}{20000\cdot 10^{-8}} = 9{,}4\cdot 10^{14}c^{-1}$

По з-ну смещения Вина:

Солнце $\omega_{max\,c} = \frac{2{,}8\,kT_c}{\hbar} = \frac{2{,}8\cdot 1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 6000}{1{,}05\cdot 10^{-27}} = 2{,}2\cdot 10^{15}c^{-1} \gg \omega_0$

Земля $\omega_{max\,з} = \frac{2{,}8\,kT_з}{\hbar} = \frac{2{,}8\cdot 1{,}38\cdot 10^{-16}\,288}{1{,}05\cdot 10^{-27}} = 1{,}1\cdot 10^{-14}c^{-1} \ll \omega_0$

Поток световой энергии, падающий на Землю от Солнца:

$\Phi_c = \int_0^\infty t(\omega)\frac{c\rho_{Tc}(\omega)}{4}d\omega\cdot\frac{4\pi R_c^2}{4\pi L^2}\pi R_з^2 \simeq t_2\sigma T_c^4\frac{\pi R_c^2R_з^2}{L^2}$ (1)

расстояние от Земли до Солнца

пропускание при $\omega > \omega_0$

Поток световой энергии от Земли: $\Phi_з \simeq t_1\sigma T_з^4 4\pi R_з^2$ (2)

пропускание при $\omega < \omega_0$

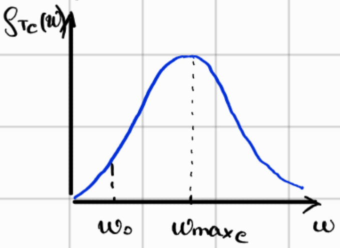
$\Phi_c = \Phi_з \xrightarrow{(1),(2)} t_2\sigma T_c^4\frac{\pi R_c^2R_з^2}{L^2} = t_1\sigma T_з^4 4\pi R_з^2$ ↳ $t_2T_c^4\frac{R_c^2}{L^2} = t_1 4T_з^4$ (3)

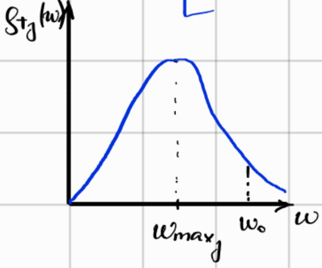
а) Аналогично (3): $\underbrace{t_2'}_{=\frac{19}{20}t_2}T_c^4\frac{R_c^2}{L^2} = t_1 4T_з'^4$ (4)

Из (3), (4): $\frac{19}{20} = \left(\frac{T_з'}{T_з}\right)^4$ ↳ $\boxed{T_з' = \sqrt[4]{\frac{19}{20}}T_з} = \sqrt[4]{\frac{19}{20}}\,288 \simeq \boxed{284K}$ ← Ответ

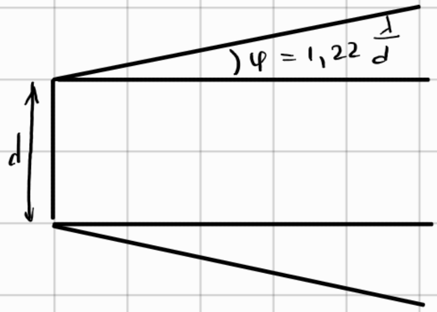
б) Аналогично (3): $t_2T_c^4\frac{R_c^2}{L^2} = \underbrace{t_1'}_{=\frac{19}{20}t_1}\cdot 4T_з'^4$ (5)

Из (3),(5): $1 = \frac{19}{20}\left(\frac{T_J'}{T_J}\right)^4 \hookrightarrow \boxed{T_J' = \sqrt[4]{\frac{20}{19}}\, T_J \approx 292\ K}$ ← Ответ





1.50*. Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $\mathcal{E} = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а немонохроматичность — длительностью импульса.



$$j_\lambda = \frac{\mathcal{E}}{S\tau} = \frac{4\mathcal{E}}{\pi d^2 \tau} = \frac{4\mathcal{E}\Delta\omega}{\pi d^2 \cdot 2\pi} = \frac{2\mathcal{E}\Delta\omega}{\pi^2 d^2}$$

$$\tau\Delta\omega \approx 2\pi \hookrightarrow \tau \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

яркость

$$B_\lambda = \frac{j_\lambda}{d\Omega\, \underbrace{\cos\varphi}_{1\approx}\, d\omega} = \frac{j_\lambda}{d\Omega\, d\omega} = \frac{j_\lambda}{\Delta\Omega\,\Delta\omega}$$

спектр. яркость, т.е на единицу спектра

$$\Delta\Omega = 2\pi(1-\cos\varphi) = 2\pi\cdot\frac{\varphi^2}{2} = \pi\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2$$

$$B_\lambda = \frac{2\mathcal{E}\Delta\omega}{\pi^2 d^2}\,\frac{1}{\pi\frac{\lambda^2}{d^2}\Delta\omega} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^3\lambda^2}$$

$$\begin{cases} j = \pi B \\ j = \frac{c\rho}{4} \end{cases} \hookrightarrow B = \frac{c\rho}{4\pi} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{kT}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 = \frac{k}{4\pi^3}\,\frac{T}{c^2}\,\omega^2 = \frac{kT}{\pi\lambda^2}$$

ф-ла Рэлея для ρ
(т.к. энергия $\mathcal{E}$ соот. темп. $\frac{\mathcal{E}}{k} \approx 10^{23} K$, т.е. $\hbar\omega \ll kT$)

По условию $B = B_\lambda$: $\frac{2\mathcal{E}}{\pi^3\lambda^2} = \frac{kT}{\pi\lambda^2} \hookrightarrow \boxed{T = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^2 k} = \frac{2\cdot 10^7}{10\cdot 1{,}38\cdot 10^{22}} = 1{,}45\cdot 10^{22}\,K}$

Ответ