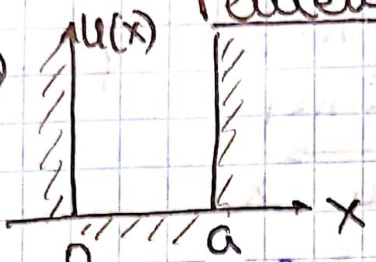
Неделя 5. Потенц. ямы. Квазиклас. приближение.

Д-5-1 Дано:
$\ell \to \ell/2$
$n=1$
Найти: A – ?

Решение

①



одномер. пот. яма

$$U(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,a)\\ \infty, & x\le 0,\ x\ge a\end{cases}$$

УШ в яме

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + 0\psi = E\psi$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0,\quad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx. \qquad (\text{Вне ямы } \psi = 0)$$

$$\psi(0)=0 \Rightarrow B=0,\quad \psi(a)=0 \Rightarrow A\sin ka = 0$$

$$k_n a = \pi n,\ n=1,2,\dots$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2}$$ – энергия частицы в 1мерн. пот. яме

// отсюда из $\int_0^a \psi^*\psi\,dx = 1 = A^2\int_0^a \sin^2 kx\,dx = \frac{A^2}{2k}ka = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A=\sqrt{2/a} \Rightarrow \boxed{\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\cdot e^{-i/\hbar E_n t}}$$ – ВФ част. в сост. с E_n //

②

$$A = E_1\left(\frac{\ell}{2}\right) - E_1(\ell) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{4}{\ell^2}-\frac{1}{\ell^2}\right) = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}$$ //

A – работа на сжатие ямы

E_1 – кин. энергии частицы в ямах $\ell/2$ и ℓ
$(E = E_k + \underbrace{U}_{0})$

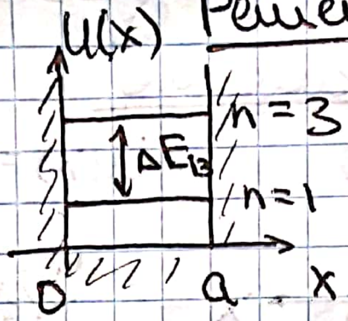
Сканировано с CamScanner

0-5-2 Дано:

$a = 3\,\text{Å}$

$\Delta E_{13} = 5\,эВ$

$m - ?$



Решение

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

$$\Delta E_{13} = E_3 - E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(3^2 - 1^2) = \frac{4\pi^2\hbar^2}{ma^2} = \frac{h^2}{ma^2}$$

$$m = \frac{h^2}{a^2 \cdot \Delta E_{13}} = \frac{(4,135\cdot10^{-15})^2\ эВ^2\cdot с^2}{5\,эВ\cdot(3\cdot10^{-10})^2\ м^2}\cdot 1,6\cdot10^{-19}$$

$$\frac{эВ\cdot с^2}{м^2}$$

$$\frac{Дж\cdot с^2}{м^2} = кг$$

$m \approx 6\cdot10^{-30}$ кг

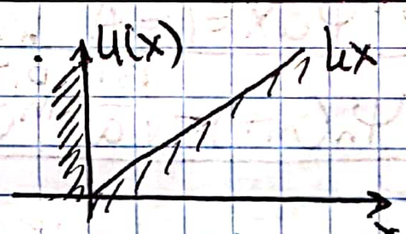
3.5 Дано:

m, k

$\psi(x) = xe^{-ax}$

$E_1 = (\bar{E})_{min}$

Найти: $E_1 - ?$



$\psi(x) = 0 \quad \psi(x) = xe^{-ax}$

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ kx, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{+\infty} \psi^* \hat{H} \psi\, dx}{\int_0^{+\infty} \psi^* \psi\, dx} \quad \begin{matrix} = I_1 \\ = I_2 \end{matrix}$$

для нормир.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = \frac{1}{2} \\ n!, & n > 0 \text{ целые} \end{cases}$$

1) $$\int_0^{+\infty} \psi^* \psi\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2ax} dx = \left| y = 2ax \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{4a^2} e^{-y} \cdot \frac{dy}{2a} = \frac{1}{8a^3} \cdot 2! = \frac{1}{4a^3} = I_2$$

2) $\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^3}{2m}\Psi'' + \underbrace{kx}_{U}\Psi$

$\Psi = xe^{-ax}$

$\Psi'' = (e^{-ax} - axe^{-ax})' = -ae^{-ax} - ae^{-ax} + a^2xe^{-ax} =$

$= -2ae^{-ax} + a^2xe^{-ax}$

$I_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-ax}\cdot\left(\frac{\hbar^2}{\cancel{2}m}\cdot\cancel{2}ae^{-ax} - \frac{\hbar^2a^2}{2m}xe^{-ax} + kx^2e^{-ax}\right)dx =$

$= \frac{\hbar^2a}{m}\int_0^{+\infty} xe^{-2ax}dx - \frac{\hbar^2a^2}{2m}\int_0^{+\infty} x^2e^{-2ax}dx + k\int_0^{+\infty} x^3e^{-2ax}dx$

$= \frac{\hbar^2a}{m}\cdot\frac{1}{4a^2}\cdot 1! - \frac{\hbar^2\cancel{a^2}}{\cancel{2}m}\cdot\frac{1}{8a^3}\cdot\cancel{2} + k\cdot\frac{1}{16a^4}\cdot 6 =$

$= \frac{\hbar^2}{4ma} - \frac{\hbar^2}{8ma} + \frac{3k^2}{8a^4} = \frac{\hbar^2}{8ma} + \frac{3k}{8a^4}$

3) $\overline{E} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\hbar^2}{8ma} + \frac{3k}{8a^4}\right)4a^3$

$$\boxed{\overline{E} = \frac{\hbar^2a^2}{2m} + \frac{3k}{2a}}$$

4) $E_1 = (\overline{E})_{min}$

$\frac{d\overline{E}}{da} = \frac{\hbar^2a_1}{m} - \frac{3}{2}\frac{k}{a_1^2} = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt[3]{\frac{3km}{2\hbar^2}}$

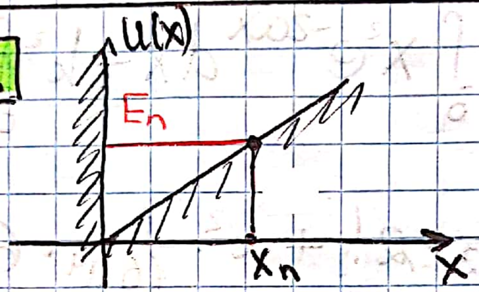
5) $E_1 = \overline{E}(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt[3]{\frac{9k^2m^2}{4\hbar^4}} + \frac{3k}{2}\sqrt[3]{\frac{2\hbar^2}{3km}} =$

$$= \sqrt[3]{\frac{\hbar^6}{8m^3}\cdot\frac{9k^2m^2}{4\hbar^4}} + \sqrt[3]{\frac{27k^3}{8}\cdot\frac{2\hbar^2}{3km}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{32}\cdot\frac{\hbar^2k^2}{m}} + \sqrt[3]{\frac{9}{4}\cdot\frac{k^2\hbar^2}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\cdot\frac{\hbar^2k^2}{m}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5/3}\cdot\sqrt[3]{\frac{\hbar^2k^2}{m}}$$

3.6.



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x<0 \\ kx, & x>0 \end{cases}$$

$n \gg 1$, m

$E_n - ?$

<u>Решение</u>

1) В квазиклосс. приближении ($n \gg 1$) вып. у-н Бора-Зоммерфельда

$$\underbrace{\oint \vec{p}\, d\vec{l}}_{\text{по финит. траектории частицы } l} = nh$$

2) Частица с энергией E_n двиг. по финит. траектории вдоль оси x в пределах $x \in (0, x_n]$, $kx_n = E_n$

3) В квазиклас. прибл.

$$E_{кин} = \frac{p_x^2}{2m} = E_n - U = E_n - kx$$

$$p_x = \sqrt{2m(E_n - kx)} = \sqrt{2mk(x_n - x)}$$

4) Тогда

$$nh = 2\int_0^{x_n} \sqrt{2mk(x_n-x)}\,dx = |y = x_n - x| =$$

$$= 2\int_{x_n}^{0} \sqrt{2mk}\, y^{1/2}\cdot(-1)\,dy = 2\sqrt{2mk}\,\frac{x_n^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow nh = 4\frac{\sqrt{2mk}}{3}\cdot\sqrt{\frac{E_n^3}{k^3}} = 4\sqrt{\frac{2mE_n^3}{9k^2}}$$

$$E_n = \sqrt[3]{\frac{n^2h^2\cdot 9k^2}{32m}} = \sqrt[3]{\frac{9k^2h^2}{32m}}\, n^{2/3}$$

$\boxed{3.14}$ Дано:

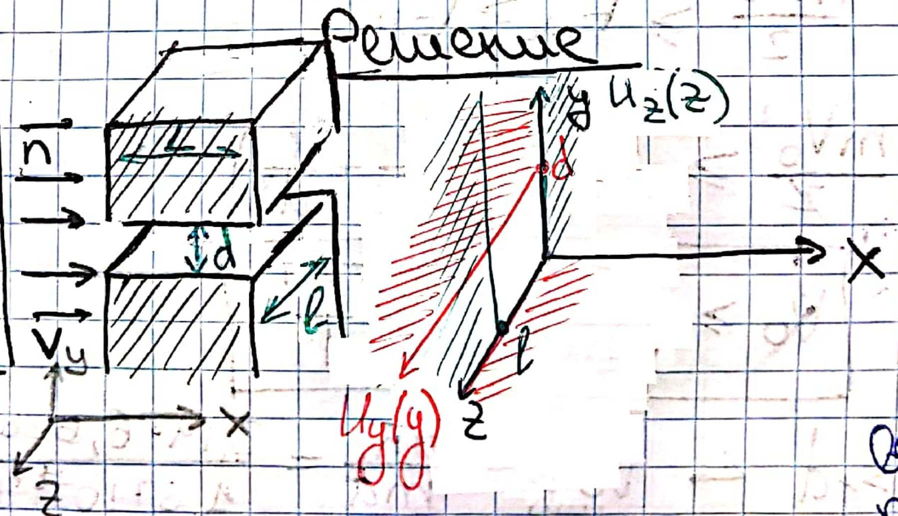
$L, d = 10^{-3}$ см

$l \gg d$, $L \gg l$

V_{min} — ?

$d \times d$ — ?

Решение



1) Стенки канала непрониц. $\Rightarrow$ n движется в 2мер. ∞ пот. яме. (т.к. внутри канала на него не действ. никакой $U(\vec{r})$, а $W_{вне\ канала} = 0$

Вер-ть обнаруж. n внутри стенки $\Downarrow$ $\Psi = 0$ $\Downarrow$ $U = \infty$

2) Энергия n в 1мер. пот. яме длины a

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда полная энергия n в 2мер.пот.яме

$$E_{nk} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{k^2}{d^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots$$

3) Свобод. n налетает на 2D яму:

$$\text{ЗСЭ: } \underbrace{\frac{mV_0^2}{2}}_{\text{нач энергия } n} = \underbrace{E_{nk}}_{\text{энергия в яме}} + \underbrace{\frac{mV^2}{2}}_{\text{энергия после ямы}}$$

⇒ условие на V_0 для прохождения ямы:

$$\frac{mV_0^2}{2} \geq E_{nk} \geq E_{11}$$

$$\frac{mV_0^2}{\cancel{2}} \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{\cancel{2}m}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{d^2}\right)$$

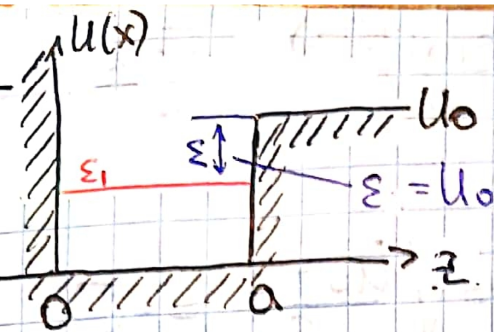
$$\boxed{V_0 \geq \frac{\pi\hbar}{m}\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{d^2}}}$$

4) $l \gg d \;\hookrightarrow\; V_{min} = \frac{\pi\hbar}{md} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{кг} \cdot 10^{-5}\,\text{м}} \approx$

≈ 2 см/с //

5) $l = d \;\hookrightarrow\; V_{min} = \frac{\sqrt{2}\,\pi\hbar}{md} \approx 3$ см/с //

3.21



$\varepsilon = U_0 - \varepsilon_1$ – энергия адсорбции

$a = 6\,\text{Å}, \quad \varepsilon = 1\,\text{K}$

$\varphi \operatorname{ctg}\varphi = -1{,}21 \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$U_0 - ?, \ \langle z \rangle - ?$

(для $n=1$)

(1) УШ в I и II:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I: } \psi'' + k^2\psi = 0, \quad k = \sqrt{\dfrac{2m\varepsilon_1}{\hbar^2}} \\ \text{II: } \psi'' - \text{æ}^2\psi = 0, \quad \text{æ} = \sqrt{\dfrac{2m(U_0-\varepsilon_1)}{\hbar^2}} = \sqrt{\dfrac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A\sin kz + \tilde{A}\cos kz \\ \psi_2 = Be^{-\text{æ}z} + \tilde{B}e^{\text{æ}z}. \end{cases}$$

С учетом $\psi(0) = 0, \ \psi(+\infty) = 0$

$$\begin{cases} \psi_1 = A\sin kz \\ \psi_2 = Be^{-\text{æ}z} \end{cases}$$

Сшивка $\begin{cases} \psi_1(a) = \psi_2(a) \\ \psi_1'(a) = \psi_2'(a) \end{cases}$ $\begin{cases} A\sin ka = Be^{-\text{æ}a} & (1) \\ Ak\cos ka = -\text{æ}Be^{-\text{æ}a} & (2) \end{cases}$

$\frac{(2)}{(1)}: k\operatorname{ctg} ka = -\text{æ}$

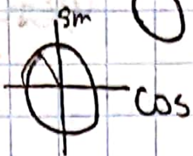
H: e, p $\quad m_H = m_p$ $(m_e \ll m_p)$

$$ka\cdot\operatorname{ctg} ka = -\text{æ}a = -\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}\cdot a =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{кг}\cdot 1\,\text{K}\cdot \overbrace{1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{K}}}^{k_Б}}}{1{,}054\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}}\cdot 6\cdot 10^{-10}\,\text{м} =$$

$$= -1{,}21 \Rightarrow ka = 2\pi/3$$

2) $ka = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow tg\,ka = \frac{\sin(2\pi/3)}{\cos(2\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$



$$tg\,ka = -\frac{k}{æ} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} = -\sqrt{\frac{U_0 - \varepsilon}{\varepsilon}} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{U_0}{\varepsilon} - 1 = 3 \Rightarrow U_0 = 4\varepsilon = 4k.$$

②

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \psi^* \hat{z} \psi\, dz}{\int_0^{+\infty} \psi^* \psi\, dz.} = \left| \hat{z} = z - \text{опр коорд} \right.$$

$$= \frac{\overbrace{\int_0^a A^2 \sin^2 kz \cdot z\,dz}^{I_1} + \overbrace{\int_a^{+\infty} B^2 e^{-2æz} \cdot z\,dz}^{I_2}}{\underbrace{\int_0^a A^2 \sin^2 kz\,dz}_{I_3} + \underbrace{\int_a^{+\infty} B^2 e^{-2æz}\,dz}_{I_4}}$$

- $I_1 = \int_0^a A^2 \sin^2 kz \cdot z\,dz$

$$\int x \sin^2 x\,dx = \left| \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2} x (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x \cos 2x\,dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx & \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x & \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \right] =$$

Сканировано с CamScanner

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + c$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8} + c$$

$$\underline{I_1} = \left| kz = x \right| = A^2 \int_0^{ka=2\pi/3} \frac{x}{k}\sin^2 x \cdot \frac{dx}{k} =$$

$$= \frac{A^2}{k^2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}\right)\Big|_0^{2\pi/3} =$$

$$= \frac{A^2}{k^2}\left(\frac{4\pi^2}{9\cdot 4} - \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{A^2}{k^2}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{2\pi}{12}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\right) \approx \underline{1{,}74\frac{A^2}{k^2}}$$

$$\cdot\ \underline{I_3} = \int_0^a A^2 \sin^2 kz\, dz = \left| kz = x \right| = A^2 \int_0^{2\pi/3} \sin^2 x \cdot \frac{dx}{k} =$$

$$= \frac{A^2}{k}\cdot\int_0^{2\pi/3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{A^2}{k}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi/3} =$$

$$= \frac{A^2}{k}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx \underline{1{,}26\frac{A^2}{k}}$$

$$\cdot\ I_2 = B^2\int_a^{+\infty} z e^{-2æz}\, dz = \begin{vmatrix} u = z & dv = e^{-2æz} \\ du = dz & v = -\frac{1}{2æ}e^{-2æz} \end{vmatrix} =$$

$$= B^2\left(-\frac{z}{2æ}e^{-2æz}\Big|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty}\frac{1}{2æ}e^{-2æz}\,dz\right) =$$

$$= B^2\left(\frac{a}{2æ}e^{-2æa} + \frac{1}{4æ^2}\cdot e^{-2æa}\right) = \left(Be^{-æa}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2æ} + \frac{1}{4æ^2}\right)$$

• Из сшивки $Be^{-\text{æ}a} = A\sin ka = \frac{\sqrt{3}}{2}A$.

• $k\,ctg\,ka = -\text{æ} \Rightarrow \text{æ} = -k\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = k/\sqrt{3}$

$$\underline{I_2} = \frac{3}{4}A^2\left(\frac{a}{2\frac{k}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{4\cdot\frac{k^2}{3}}\right) = \left| ka = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{2\pi}{3k} \right| =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{A^2}{k^2}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3\cdot 2} + \frac{3}{4}\right) = \underline{1{,}92\frac{A^3}{k^2}}$$

$$\bullet\ \underline{I_4} = B^2\int_a^{+\infty} e^{-2\text{æ}z}dz = \frac{B^2}{-2\text{æ}}e^{-2\text{æ}z}\Big|_a^{+\infty} =$$

$$= B^2 e^{-2\text{æ}a}\cdot\frac{1}{2\text{æ}} = \frac{3}{4}A^2\cdot\frac{1}{2\text{æ}} =$$

$$= \frac{3}{4}A^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2k} = \underline{0{,}65\frac{A^3}{k}}$$

$ka = 2\pi/3$

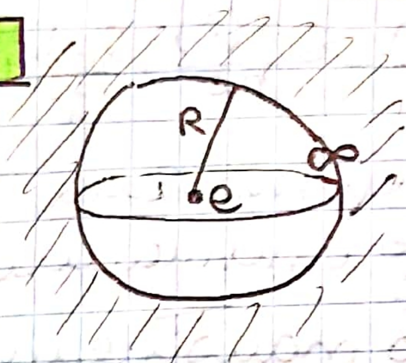
Значит,

$$\langle z\rangle = \frac{1{,}74\frac{A^2}{k^2} + 1{,}92\frac{A^3}{k^2}}{1{,}26\frac{A^3}{k} + 0{,}65\frac{A^3}{k}} = 1{,}91\cdot\frac{1}{k} = 1{,}91\cdot\frac{3a}{2\pi} =$$

$$= 5{,}5\,\text{Å}$$

$\int z$

3.28



сфери. пот. яма

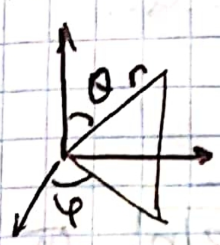
$\sigma = 0{,}35$ дин/см.

$E = E_1$. $R - ?$

Решение

① Стац. УШ: $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \overset{0}{U}\Psi = E\Psi$.

② Лапласиан в сферич. коорд. (r, θ, φ)



$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

В сфер. симм. случае $\Psi = \Psi(r) \longleftrightarrow$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{d^2\Psi}{dr^2} + 2r\frac{d\Psi}{dr}\right) = \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr}.$$

③ Тогда в яме

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = 0.$$

Найдем $\boxed{\Psi(r) = \xi(r)/r}$

$$\Psi'_r = \frac{\xi'(r)}{r} - \frac{\xi(r)}{r^2}$$

$$\Psi''_{rr} = \frac{\xi''(r)}{r} - \frac{\xi'(r)}{r^2} - \frac{\xi'(r)}{r^2} + \frac{2\xi(r)}{r^3}$$

Сканировано с CamScanner

$$\frac{\xi''(r)}{r}-\cancel{\frac{2\xi'(r)}{r^2}}+\cancel{\frac{2\xi(r)}{r^3}}+\cancel{\frac{2\xi'(r)}{r^2}}-\cancel{\frac{2\xi(r)}{r^3}}+\frac{2mE}{\hbar^2}\frac{\xi}{r}=0$$

$$\xi''_{rr}+\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{=k^2}\xi=0$$ – 1мер. пот. яма с ∞ стенками

см. 0.5.1.

$$\boxed{E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2}n^2}$$ – энергия в такой яме

$$\xi_n(r)=\sqrt{\frac{2}{R}}\sin\left(\frac{\pi n}{R}r\right)$$ – ВФ 1мер. пот. ямы с ∞ стен.

радиус ямы

Значит, в сфер. яме

$$\boxed{\Psi_n(r)=\frac{\sqrt{2/R}}{r}\sin\left(\frac{\pi n}{R}r\right)}$$

④ По усл. $n=1 \Rightarrow E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2}$

⑤ Полная энергия системы состоит из энергии эл-на E_1 и поверх. энергии на границе пузыря

$$G=\sigma S=\sigma\cdot 4\pi R^2$$

$$W=E_1+G=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2}+\sigma\cdot 4\pi R^2$$

Система устойчива при min энергии ⇔

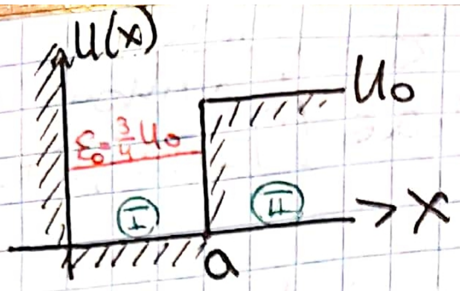
$$\Leftrightarrow \frac{dW}{dR}=0=-\frac{\cancel{2}\pi^2\hbar^2}{\cancel{2}mR^3}+4\pi\sigma\cdot 2R$$

$$\Leftrightarrow R=\sqrt[4]{\frac{\pi\hbar^2}{8m\sigma}}=\sqrt[4]{\frac{3{,}14\cdot(1{,}054\cdot10^{-27})^2\,эрг^2с^2}{8\cdot 9\cdot10^{-28}\,г\cdot 0{,}35\,\frac{дин}{см}}}=2\cdot10^{-7}\,см=20\,Å$$

СГСЭ

Сканировано с CamScanner

3.49



$\frac{a}{a_{\text{max}}}$ — ? сжатая, в яме исчезли уровни

Решение

① УШ: I: $\psi'' + k^2\psi = 0$ II: $\psi'' - \varkappa^2\psi = 0$

$k = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}$ $\varkappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - \varepsilon)}{\hbar^2}}$

$\psi_1 = A\sin kx + \tilde{A}\cos kx$ $\psi_2 = Be^{-\varkappa x} + \tilde{B}e^{\varkappa x}$

$\psi_1(0) = 0 \Rightarrow$ $\psi_2(\infty) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi_1 = A\sin kx$ $\Rightarrow \psi_2 = Be^{-\varkappa x}$

Сшивка $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $\psi_1'(a) = \psi_2'(a)$

$$\begin{cases} A\sin ka = Be^{-\varkappa a} \\ Ak\cos ka = -B\varkappa e^{-\varkappa a} \end{cases} \Rightarrow k\,\mathrm{ctg}\,ka = -\varkappa$$

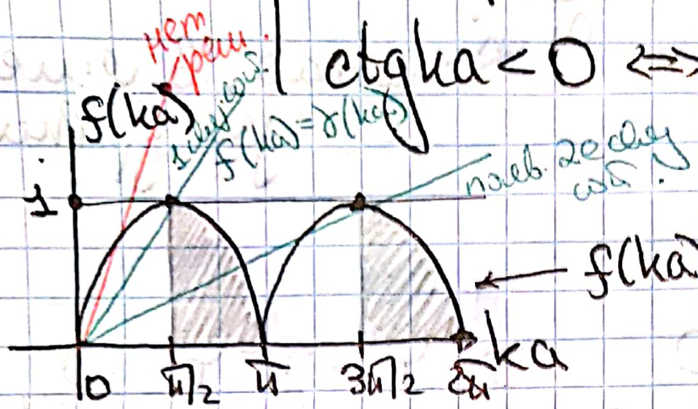
$$\boxed{\mathrm{ctg}\,ka = -\frac{\varkappa}{k} < 0}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 ka = \frac{1}{\sin^2 ka} = \frac{\varkappa^2}{k^2} + 1 = \frac{U_0 - \varepsilon}{\varepsilon} + 1 = \frac{U_0}{\varepsilon}$$

$$|\sin ka| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{U_0}} = \sqrt{\frac{k^2\hbar^2}{2mU_0}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}}}_{\gamma} ka.$$

Сканировано с CamScanner

Значит, $\begin{cases} |\sin ka| = \gamma ka, & \gamma = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} \\ \operatorname{ctg} ka < 0 \Leftrightarrow ka \in (\pi/2 + \pi n, \pi + \pi n) \end{cases}$



(в яме)

Для сущ. связ. состояния нужно ≥ 1 решения данной системы.

Из графика видно, что решения пропадают при условии:

$\begin{cases} \gamma \cdot ka = 1 \\ ka = \pi/2 \end{cases}$

$\dfrac{\hbar^2}{2mU_0a^2} \cdot \dfrac{\pi^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \overset{\text{максимальная}}{\downarrow} U_0a^2 \geq \dfrac{\hbar^2\pi^2}{8m}$ условие $\exists$ связ. уровней в яме

$a_{min} = \sqrt{\dfrac{\hbar^2\pi^2}{8mU_0}}$ – мин. ширина ямы, при кот. $\exists$ связ. сост. при т. глубине U_0.

② Начальная мощность ямы:

$$\varepsilon_0 = \frac{3}{4}U_0.$$

$$\operatorname{ctg} ka = -\frac{\varkappa}{k} = -\sqrt{\frac{U_0 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$ka = \frac{2\pi}{3}$$

$$k^2a^2 = \frac{2m\varepsilon_0}{\hbar^2}a^2 = \frac{2m\cdot\frac{3}{4}U_0}{\hbar^2}a^2 = \frac{4\pi^2}{9}$$

$$\Rightarrow U_0 a^2 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{27m} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8\pi^2\hbar^2}{27mU_0}}$$

③ $$\frac{a}{a_{min}} = \sqrt{\frac{8\pi^2\hbar^2}{27mU_0}\cdot\frac{8mU_0}{\pi^2\hbar^2}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}54$$