РЕШЕНИЯ ПИСЬМЕННОЙ ЧАСТИ ГОСЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ 16.01.2023

1А. (Гуденко А.В.) Так как лист тонкий, то момент силы трения между шаром и бумагой, разгоняющий и раскручивающий шар при выдёргивании листа относительно оси лежащей в плоскости стола и перпендикулярной силе равен нулю (плечо силы трения равно толщине бумаги). Это означает, что относительно этой оси момент количества движения шара L не изменяется, и, поскольку шар вначале покоился, то сразу после «соскока» шара с листа бумаги $L = 0$. При дальнейшем движении по поверхности стола L шара относительно любой оси, лежащей в плоскости стола и перпендикулярной скорости, также не изменяется и остаётся равным нулю, поскольку момент силы трения скольжения о стол относительно этой оси равен нулю. Следовательно, к моменту прекращения проскальзывания шар остановится – установившаяся скорость $v = 0$.

На пути торможения из-за трения выделяется теплота, равная кинетической энергии шара сразу после соскока шара с листа бумаги:

$$Q = E = \frac{m{v_0}^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{m{v_0}^2}{2}\left(1 + \frac{I_0\omega^2}{m{v_0}^2}\right) = \frac{m{v_0}^2}{2}\left(1 + \frac{mR^2}{I_0}\right) = \frac{m{v_0}^2}{2}\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7m{v_0}^2}{4} = \frac{7 \cdot 0{,}284 \cdot 1^2}{4} \approx 0{,}5\ \text{Дж}$$

При подсчёте кинетической энергии шара учтено, что сразу после соскока $mv_0R = I_0\omega$, т.к. $L = 0$ (здесь $I_0 = \frac{2}{5}mR^2$ момент инерции сплошного однородного шара относительно оси, проходящей через его центр).

1Б. (Гуденко А.В.) Установившаяся скорость не изменилась $v = v_0 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (см. решение А). Работа над шаром идёт на увеличение его полной кинетической энергии. Сразу после «соскока» кинетическая энергия шара ($I_0 = \frac{2}{5}mR^2; L = \frac{7}{5}mv_0R$):

$$E_0 = \frac{L^2}{2I_0} = \frac{(\frac{7}{5}mv_0R)^2}{2 \cdot \frac{2}{5}mR^2} = \frac{49mv_0^2}{20}$$

Кинетическая энергия шара, движущегося без проскальзывания со скоростью $v_0 = \omega R$:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 + \frac{I_0}{mR^2}\right) = \frac{7mv_0^2}{10}$$

Работа:

$$A = E_0 - E = \frac{\cancel{5}\,7mv_0^2}{4} = \frac{5 \cdot 0{,}284 \cdot 1^2}{4} \approx 0{,}355\ \text{Дж}$$

1В. (Гуденко А.В.) Установившаяся скорость не изменилась $v = v_0 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (см. решение А). Количество теплоты равно убыли кинетической энергии батарейки на пути установления скорости. Сразу после «соскока» кинетическая энергия батарейки ($I_0 = \frac{1}{2}mR^2; L = \frac{3}{2}mv_0R$):

$$E_0 = \frac{L^2}{2I_0} = \frac{(\frac{3}{2}mv_0R)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}mR^2} = \frac{9mv_0^2}{4}$$

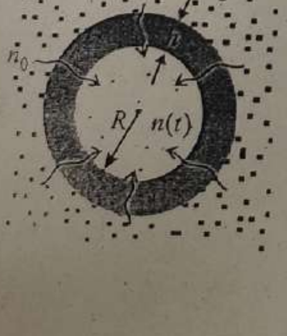
Кинетическая энергия батарейки, движущейся с установившейся скоростью $v = v_0 = \omega R$:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 + \frac{I_0}{mR^2}\right) = \frac{3mv_0^2}{4}$$

Количество теплоты:

$$Q = E_0 - E = \frac{3mv_0^2}{2} = \frac{3 \cdot 0{,}141 \cdot 1^2}{2} \approx 0{,}21\ \text{Дж}.$$

2А. (Крымский К.М.) Диффузионный поток частиц через мембрану внутрь фагоцита $J = \frac{dN}{dt} = -D\frac{dn}{dr} \cdot 4\pi R^2 \approx -D \cdot \frac{n(t) - n_0}{dr} \cdot 4\pi R^2$, где n_0 - концентрация чужеродного вещества снаружи от фагоцита, а $n(t)$ - концентрация внутри в момент времени t. Число частиц в объёме фагоцита $N \equiv N(t) = n(t) \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$, откуда с учётом сделанных приближений: $\frac{4\pi R^3}{3}\frac{dn}{dt} = -D \cdot \frac{n(t) - n_0}{h} \cdot 4\pi R^2 \rightarrow$



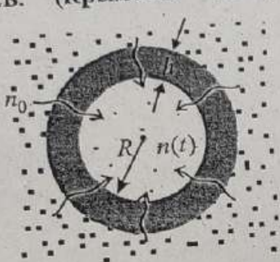
$$\frac{Rh}{3D}\frac{dn}{dt}=-\left(n(t)-n_0\right) \;\rightarrow\; -\frac{Rh}{3D}\int_0^{n(t)}\frac{dn}{n-n_0}=\int_0^t d\tilde{t} \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{n_0-n(t)}{n_0}\right)=-\frac{3D}{Rh}t,\; n(t)=n_0\left(1-e^{-t/\tau_p}\right),$$ где

$$\tau_p=\frac{Rh}{3D}.$$

По условию $n(\tau)=\frac{n_0}{2}=n_0\left(1-e^{-\tau/\tau_p}\right)$, откуда $e^{-\tau/\tau_p}=\frac{1}{2}$, и получаем

Ответ: $D=\frac{Rh}{3\tau}\ln 2=\frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-8}}{3\cdot 0{,}15}\ln 2\approx 6\cdot 10^{-10}\,\frac{\text{см}^2}{\text{с}}=0{,}06\,\frac{\text{мкм}^2}{\text{с}}$

2Б. (Крымский К.М.) Диффузионный поток частиц через мембрану внутрь фагоцита $J=\frac{dN}{dt}=-D\frac{dn}{dr}\cdot 4\pi R^2\approx -D\cdot\frac{n(t)-n_0}{dr}\cdot 4\pi R^2$, где n_0 - концентрация чужеродного вещества снаружи от фагоцита, а $n(t)$ - концентрация внутри в момент времени t. Число частиц в объёме фагоцита $N\equiv N(t)=n(t)\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$,



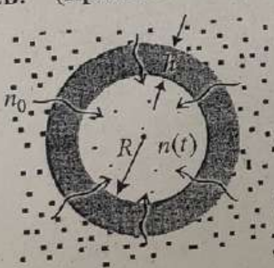
откуда с учётом сделанных приближений: $\frac{4\pi R^3}{3}\frac{dn}{dt}=-D\cdot\frac{n(t)-n_0}{h}\cdot 4\pi R^2 \rightarrow$

$$\frac{Rh}{3D}\frac{dn}{dt}=-\left(n(t)-n_0\right) \;\rightarrow\; -\frac{Rh}{3D}\int_0^{n(t)}\frac{dn}{n-n_0}=\int_0^t d\tilde{t} \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{n_0-n(t)}{n_0}\right)=-\frac{3D}{Rh}t,$$

$n(t)=n_0\left(1-e^{-t/\tau_p}\right)$, где $\tau_p=\frac{Rh}{3D}$. По условию $n(\tau)=\frac{n_0}{2}=n_0\left(1-e^{-\tau/\tau_p}\right)$, откуда $e^{-\tau/\tau_p}=\frac{1}{2}$, и получаем

Ответ: $h=\frac{3\tau D}{R\ln 2}=\frac{3\cdot 0{,}25\cdot 4\cdot 10^{-14}}{4\cdot 10^{-6}\cdot\ln 2}\approx$ **11 нм**

2В. (Крымский К.М.) Диффузионный поток частиц через мембрану внутрь фагоцита $J=\frac{dN}{dt}=-D\frac{dn}{dr}\cdot 4\pi R^2\approx -D\cdot\frac{n(t)-n_0}{dr}\cdot 4\pi R^2$, где n_0 - «равновесная» концентрация чужеродного вещества снаружи от фагоцита, а $n(t)$ - концентрация внутри в момент времени t. Число частиц в объёме фагоцита $N\equiv N(t)=n(t)\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$, откуда с учётом сделанных приближений:



$$\frac{4\pi R^3}{3}\frac{dn}{dt}=-D\cdot\frac{n(t)-n_0}{h}\cdot 4\pi R^2 \;\rightarrow\; \frac{Rh}{3D}\frac{dn}{dt}=-\left(n(t)-n_0\right) \;\rightarrow$$

$$-\frac{Rh}{3D}\int_0^{n(t)}\frac{dn}{n-n_0}=\int_0^t d\tilde{t} \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{n_0-n(t)}{n_0}\right)=-\frac{3D}{Rh}t,\; n(t)=n_0\left(1-e^{-t/\tau_p}\right),$$ где $\tau_p=\frac{Rh}{3D}$. По условию

$n(t_x)=\frac{n_0}{2}=n_0\left(1-e^{-t_x/\tau_p}\right)$, откуда $e^{-t_x/\tau_p}=\frac{1}{2}$, и получаем

Ответ: $t_x=\tau_p\ln 2=\frac{Rh}{3D}\ln 2=\frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-8}}{3\cdot 4\cdot 10^{-14}}\ln 2\approx 0{,}23\ \textit{сек}$

3А. (Стасенко А.Л., Гуденко А.В., Раевский А.О.) Магнитное поле провода не будет проникать в сверхпроводник (за счет возникновения поверхностных токов). Поэтому нормальная компонента индукции должна обращаться в 0 на поверхности. Рассмотрим произвольную точку, лежащую на оси Ox в плоскости XOZ. В этой точке имеется нормальная к оси Ox компонента индукции. Чтобы обратить ее в 0, нужно иметь ток-изображение, текущий в направлении противоположном исходному току (см. рисунок). Два прямых, противоположно направленных тока, создают в точке O индукцию $\vec{B}_{\text{пров}}=(-2B,0,0)$, где величина B находится из теоремы о циркуляции $2\pi hB=\frac{4\pi}{c}I$. Поскольку расстояние $h\gg a$, то поле, создаваемое круговым витком, можно считать полем точечного диполя $\vec{\mu}=\left(-\frac{I\pi a^2}{c},0,0\right)$. В начале координат диполь и его со направленное изображение создают поле $\vec{B}_{дип} = (2\frac{I\pi a^2}{c(h-a)^3}, 0{,}0)$. Окончательно $\vec{B} = \vec{B}_{пров} + \vec{B}_{дип} = (-\frac{2I}{ch}\left(2 - \frac{\pi a^2 h}{(h-a)^3}\right), 0{,}0)$. Т.к. 10 А = 3×10^{10} СГСЭ, то $\frac{2I}{ch}\left(2 - \frac{\pi a^2 h}{(h-a)^2}\right) = \frac{2\times3\times10^{10}}{3\times10^{10}\times10}\left(2 - \frac{\pi\times10}{729}\right) = 0{,}391$ Гс.

3Б. (Гуденко А.В., Раевский А.О.) Согласно граничным условиям на поверхности сверхпроводника нормальная компонента индукции должна обращаться в 0. Рассмотрим произвольную точку, лежащую на оси Ox в плоскости XOZ. В этой точке нормальная к оси Ox компонента индукции направлена в отрицательном направлении оси Oz. Чтобы обратить ее в 0, нужно иметь ток-изображение, текущий в направлении противоположном исходному току (см. рисунок). Два прямых, противоположно направленных тока, создают в начале координат индукцию $\vec{B}_{пров} = (-2B, 0{,}0)$, где величина B находится из теоремы о циркуляции $2\pi h B = \frac{4\pi}{c} I$. Поскольку расстояние $h \gg a$, то поле, создаваемое круговым витком, можно считать полем точечного диполя $\vec{\mu} = (-\frac{I\pi a^2}{c}, 0{,}0)$. В начале координат диполь и его со направленное изображение создают поле $\vec{B}_{дип} = (2\frac{I\pi a^2}{ch^3}, 0{,}0)$. Окончательно $\vec{B} = \vec{B}_{пров} + \vec{B}_{дип} = (-\frac{2I}{ch}\left(2 - \frac{\pi a^2}{h^3}\right), 0{,}0)$. Т.к. 10 А = 3×10^{10} СГСЭ, то $\frac{2I}{ch}\left(2 - \frac{\pi a^2}{h^2}\right) = \frac{2\times3\times10^{10}}{3\times10^{10}\times10}\left(2 - \frac{\pi}{100}\right) = 0{,}394$ Гс.

3В. (Гуденко А.В., Раевский А.О.) Касательная к поверхности металла компонента электрического поля должна равняться 0. Этого можно добиться, если заменить металлический лист зеркальным «изображением» фигуры с противоположным знаком заряда. Поле в точке B направлено нормально к поверхности и по величине совпадает с удвоенным полем тонкого провода и равномерно заряженного кольца. Поле провода находим по тереме Гаусса $E_{пр} 2\pi h l = 4\pi\lambda l$, откуда $E_{пр} = 2\lambda/h$. Поле кольца находится прямым суммированием и равно

$$E_{кол} = \frac{2\pi\lambda a^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}.$$

Окончательно $E_B = 2(E_{пр} + E_{кол}) = \frac{4\lambda}{h}\left[1 + \frac{\pi a^2 h}{(a^2+h^2)^{3/2}}\right]$.

Подставляя числа, получаем $E_B = 2(E_{пр} + E_{кол}) = \frac{4\cdot10}{200}\left[1 + \frac{3{,}14\cdot1\cdot2}{5\sqrt{5}}\right] = 0{,}312$ СГСЭ$_q$/см^2.

Так как 1 СГСЭ$_q$/см = 300 В, то $E_B \cong 100$ В/см.

4А. (Кулешов П.С., Гуденко А.В.) Для света фокусное расстояния линзы в воде определяется радиусами кривизн поверхностей линз R_1 и R_2 и относительным показателем преломления $n_{отн} = n/n_0$ по формуле: $\frac{1}{F_{опт}} = (n_{отн} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = (\frac{n}{n_0} - 1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$. Аналогично фокусное расстояние определяется для звуковой волны, но только в качестве относительного показателя преломления следует взять отношение скоростей звука в воде и стекле: $\tilde{n} = c_0/c$. Скорость звука в стекле определяется по формуле $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4500$ м/с. Тогда $\tilde{n} = \frac{c_0}{c} = 1/3$, а фокусное расстояние:

$$\frac{1}{F_{зв}} = (\tilde{n} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Тогда: $\frac{F_{зв}}{F_{опт}} = \frac{\frac{n}{n_0} - 1}{\tilde{n} - 1}$. Следовательно, для ультразвука эта линза является отрицательной (рассеивающей) с фокусным расстоянием: $F_{зв} = \frac{\frac{n}{n_0} - 1}{\tilde{n} - 1} F_0 = \frac{\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1}{1/3 - 1} \cdot 10 = -1{,}9$ м.

4Б. $F_{опт} = \frac{\tilde{n} - 1}{\frac{n}{n_0} - 1} F_{зв} = \frac{(1/3 - 1)}{(\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1)} \cdot 3 = -15{,}6$ м.

4В. $F_{опт} = \frac{(\tilde{n} - 1)}{\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)} F_{зв} = \frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{\left(\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1\right)} \cdot (-3) = +15{,}6$ м.

5А. (Лапушкин Г.И.) Энергия вращательных уровней равна $E_l = k\theta l(l+1)$. Кратность вырождения каждого уровня с учётом спинов ядер $g(l,s) = (2l+1)(2s+1)$. В состоянии $l = 0$ ($E_0 = 0$) спин ядра равен $s = 0$ (параводород). Доля молекул в этом состоянии

$$w_0 = \frac{g(0,0)}{Z} = \frac{1}{Z},$$

где Z — нормировочный множитель (статсумма). В состоянии $l = 1$ ($E_1 = 2k\theta$) находится ортоводород с $s = 1$. Доля молекул с энергией E_1:

$$w_1 = \frac{g(1,1)}{Z} e^{-E_1/kT} = \frac{9}{Z} e^{-2\theta/T} = \frac{9}{Z} e^{-4}.$$

При $T = \theta/2$ для $l = 2$ имеем $w_2 = \frac{g(2,0)}{Z} e^{-E_2/kT} = \frac{5}{Z} e^{-12}$. Отношение $\frac{w_2}{w_1} \approx 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Вклад от состояний $l > 2$ будет ещё меньше. Следовательно, для вычисления вращательной энергии достаточно учесть только состояния $l = 0$ и $l = 1$. Таким образом, средняя вращательная энергия может быть вычислена как

$$E_{\text{вр}} \approx \frac{w_0 \cdot 0 + w_1 \cdot 2k\theta}{w_0 + w_1} = \frac{9e^{-4}}{1 + 9e^{-4}} \cdot 2k\theta = 0{,}28k\theta \approx 3{,}3 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \approx 2{,}1 \text{ мэВ}.$$

5Б. (Лапушкин Г.И.) Решение аналогично 5А. При температуре $T = \theta/2$ для вычисления вращательной энергии параводорода необходимо учесть уровни $l = 0$ и $l = 2$, а для ортоводорода — достаточно только $l = 1$. Средняя вращательная энергия параводорода:

$$\bar{E}_{\text{пара}} \approx \frac{w_0 \cdot 0 + w_2 \cdot E_2}{w_0 + w_2} = \frac{(2 \cdot 2 + 1)e^{-2(2+1)\theta/T} \cdot 2 \cdot (2+1) \cdot k\theta}{1 + (2 \cdot 2 + 1)e^{-2(2+1)\theta/T}} = \frac{30e^{-12}}{1 + 5e^{-12}} k\theta \approx 30e^{-12} k\theta$$
$$\approx 1{,}8 \cdot 10^{-4} k\theta.$$

Заметим, что, поскольку орто и пара состояния друг в друга не переходят, кратность вырождения по спину ядра в данном случае не важна.

Для ортоводорода имеем: $\bar{E}_{\text{орто}} \approx k\theta \cdot 1 \cdot (1+1) = 2k\theta$. Отношение:

$$\frac{E_{\text{орто}}}{E_{\text{пара}}} = \frac{e^{12}}{15} \approx 1{,}1 \cdot 10^4.$$

5В. (Лапушкин Г.И.) Аналогично 5Б,

$$E_{\text{пара}} = \frac{w_0 \cdot 0 + w_2 E_2}{w_0 + w_2} = \frac{30e^{-6\theta/T}}{1 + 5e^{-6\theta/T}} k\theta = \frac{30k\theta}{5 + e^{6\theta/T}}.$$

Теплоёмкость на одну молекулу параводорода:

$$C_{\text{пара}}^{\text{вр}} = \frac{dE}{dT} = 30k\theta \cdot \frac{\frac{6\theta}{T^2} e^{\frac{6\theta}{T}}}{\left(5 + e^{\frac{6\theta}{T}}\right)^2} \approx 180 \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 e^{-6\theta/T} k \approx 720e^{-12} k = 4{,}4 \cdot 10^{-3} k = 6{,}1 \cdot 10^{-19} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}.$$

Инструкция для проверяющих

Каждая задача оценивается в **2 балла** с шагом 0,5 согласно таблице ниже. Итоговая оценка за письменный экзамен по 10-бальной шкале — **округлённая вверх сумма баллов.**

«Степень решённости» задачи	Баллы
Задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы (включая численные) на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.	2
Ход решения в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но **решение содержит ошибки и недочёты, не касающиеся физического содержания** (вычислительные ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в выкладках, не влияющие на ход решения; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; отсутствует числовой ответ и т.п.).	1,5
Задача **решена частично** (не доведена до конца при верных исходных посылках), либо **решение содержит физические ошибки** (частные ошибки в применении физических законов; логические ошибки; ошибки в размерности величин и т. п.), но все основные законы сформулированы и в целом корректно применены к задаче.	1
Задача **не решена, но есть подвижки в её решении**: решение содержит грубые ошибки, но указаны все физические законы, на основе которых задача может быть решена.	0,5
Задача не решена: основные физические законы записаны неверно, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было	0