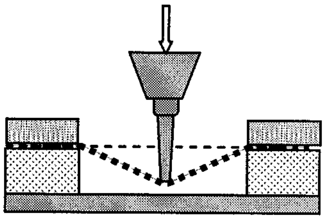
Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 января 2011 г.
Вариант А

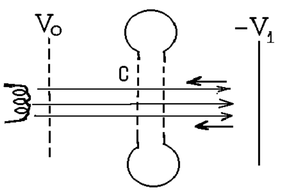
1А. Графен, за исследования свойств которого А.Гейму и К.Новоселову в 2010 году присуждена Нобелевская премия, представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникально высокой прочностью и упругостью.



Опыт по исследованию упругих свойств графена ставится следующим образом: алмазный зонд в виде "ножа" атомно-силового микроскопа оказывает давление на середину графеновой полоски размером $2l_0 d = 1 \times 0,5$ мкм^2, закрепленной по узким сторонам. Для прогиба центра полоски на величину $x = 100$ нм потребовалась сила $F = 1,6$ мкН. Оцените модуль Юнга графена. Графен считать абсолютно мягким в поперечном направлении материалом, а его коэффициент Пуассона равным нулю. Изначально пленка не натянута.

2А. Один моль одноатомного газа Ван-дер-Ваальса сжимают в политропическом процессе $C = const$, уменьшая его объем от $V_0 = 3V_{кр}$ до $V_1 = 2V_{кр}$, а затем расширяют в вакуум до исходного объема. Начальная температура газа $T_0 = 1,5T_{кр}$, конечная — $T_2 = 2,275T_{кр}$. Определите теплоемкость газа в политропическом процессе.

3А. В отражательном клистроне — генераторе высокочастотных колебаний — электроны, ускоряясь под действием напряжения $V_0 = 500$ В, пролетают через сетчатые пластины конденсатора C, который является частью квазистационарного СВЧ-резонатора, и попадают в область постоянного тормозящего поля, которое возвращает их обратно (см.рис.).



На обкладках конденсатора C резонатора, настроенного на частоту $f = 1$ ГГц, имеется переменное поле $E = E_0 \sin(2\pi f t)$, которое группирует из электронного пучка сгустки с центром, соответствующим фазе СВЧ-поля $\varphi = 2\pi$ (быстрые электроны, приходящие в тормозящее поле, замедляются, а "отстающие" — ускоряются). При каких напряженностях возвращающего поля E_1 электронные сгустки будут, тормозясь, отдавать в резонатор максимальную энергию?

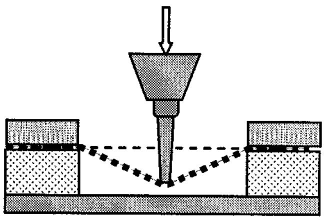
4А. Пучок монохроматических нейтронов попадает на алмазный спектрометр площадью $S = 9$ мм^2 и толщиной $d = 0,3$ мм. Взаимодействие нейтронов с ядрами углерода происходит по реакции $n + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + \alpha$, сечение которой $\sigma = 0,07$ мбн, порог этой реакции $E_{пор} = 6,2$ МэВ. За время $t = 1$ с зарегистрировано $N = 15$ импульсов с амплитудой, соответствующей суммарной энергии продуктов реакции $E = 9,1$ МэВ. Найти энергию падающих нейтронов и плотность их потока. Плотность алмаза $\rho = 3,5$ г/см^3.

5А. Абсолютно черная идеально теплопроводящая пластинка движется в направлении нормали к поверхности со скоростью $v = 300$ км/с в поле равновесного теплового излучения. Найти относительное отличие температуры пластинки от температуры излучения T. Плотность потока энергии излучения в интервале частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ при наблюдении под углом θ к вектору скорости $\vec{v}$ имеет вид:

$$I(T, \omega, \Omega) d\omega d\Omega = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_Б T}\right] - 1} d\omega d\Omega, \quad \text{где } \beta = v/c.$$

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 января 2011 г.
Вариант Б

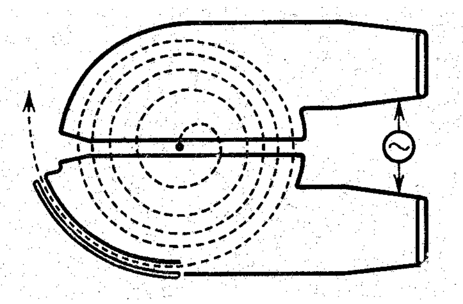
1Б. Графен, за исследования свойств которого А.Гейму и К.Новоселову в 2010 году присуждена Нобелевская премия, представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникально высокой прочностью и упругостью.



Опыт по исследованию упругих свойств графена ставится следующим образом: алмазный зонд в виде "ножа" атомно-силового микроскопа оказывает давление на середину графеновой полоски размером $2l_0 d = 1 \times 0,5$ мкм^2, закрепленной по узким сторонам. При прогибе центра полоски на величину $x_{\max} = 332$ нм под действием силы $F_{\max} = 48$ мкН полоска порвалась. Оцените предел прочности графена и предельно допустимую относительную деформацию графена. На сколько процентов можно расиянуть изготовленную из графена ленту? Графен считать абсолютно мягким в поперечном направлении материалом, а его коэффициент Пуассона равным нулю. Изначально пленка не натянута.

2Б. Один моль газа Ван-дер-Ваальса ($C_V = const$) расширяют в вакуум, увеличивая его объем в 3 раза, а затем в политропическом процессе ($C = const$) сжимают до исходного объема. Рассчитайте теплоемкость газа C в политропическом процессе, используя следующие данные: начальная температура газа $T_0 = 1,3T_{\text{кр}}$, объем — $V_0 = 3V_{\text{кр}}$, установившаяся температура газа после расширения в вакуум — $T_1 = 1,2T_{\text{кр}}$, после сжатия — $T_2 = 3,9T_{\text{кр}}$.

3Б. В циклотроне ионы закручиваются магнитным полем и получают ускорение в щели между двумя ускоряющими электродами — дуантами (см. рис.).



Для резонансного ускорения частота обращения иона и частота ускоряющего поля, которая поддерживается постоянной, должны совпадать. Однако по мере ускорения этот синхронизм начинает нарушаться. До какой максимальной энергии ускорятся в циклотроне протоны, если инжекция частиц произошла при максимальном поле между дуантами?

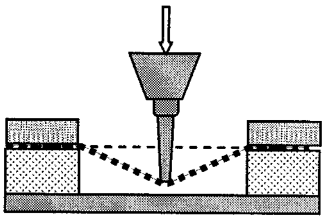
4Б. Подземный нейтринный телескоп в Баксанском ущелье калибруют с помощью искусственного источника нейтрино на основе изотопа хрома $^{51}_{24}$Cr. Ядро хрома захватывает электрон с K-оболочки и в конечном счете образуется ядро ванадия $^{51}_{23}$V в основном состоянии. Энергия излучаемого нейтрино $E_\nu = 747$ кэВ, разность масс нейтральных атомов $\Delta Mc^2 = [M(^{51}_{24}\mathrm{Cr}) - M(^{51}\mathrm{V})]c^2 = 752,6$ кэВ. Определить по этим данным эффективный заряд ядра для электронов K-оболочки в атоме ванадия.

5Б. Найти силу, действующую на абсолютно черную идеально теплопроводящую пластинку площадью $S = 1$ см^2, движущуюся в направлении нормали к поверхности со скоростью $v = 300$ км/с в поле равновесного теплового излучения с температурой $T = 3$ К. В системе, связанной с пластинкой, плотность потока энергии излучения в интервале частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ при наблюдении под углом θ к вектору скорости $\vec{v}$ имеет вид:

$$I(T,\omega,\Omega)d\omega d\Omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\omega^2}{\pi^2 c^2}\,\frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_{\text{Б}}T}\right] - 1}\,d\omega d\Omega, \quad \text{где } \beta = v/c.$$

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 января 2011 г.
Вариант В

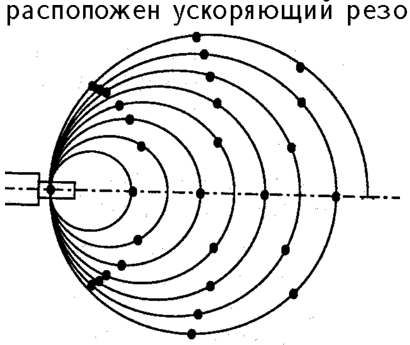
1В. Графен, за исследования свойств которого А.Гейму и К.Новоселову в 2010 году присуждена Нобелевская премия, представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникально высокой прочностью и упругостью.



Опыт по исследованию упругих свойств графена ставится следующим образом: алмазный зонд в виде "ножа" атомно-силового микроскопа оказывает давление на середину графеновой полоски размером $2l_0 d = 1 \times 0,5$ мкм^2, закрепленной по узким сторонам. При прогибе центра полоски на величину $x_{\max} = 332$ нм под действием силы $F_{\max} = 48$ мкН полоска порвалась. Какая сила потребуется, чтобы разорвать стопку графеновых полосок ("графеновый скотч") толщиной $h_0 = 0,1$ мм, надавливая ребром металлической линейки на середину закрепленной полосы длиной $L = 2L_0 = 2$ см и шириной $d_0 = 0,5$ см. Графен считать абсолютно мягким в поперечном направлении материалом, а его коэффициент Пуассона равным нулю. Изначально пленка не натянута.

2В. Один моль газа Ван-дер-Ваальса ($C_V = const$) адиабатически сжали, уменьшив его объем в 28/9 раза и увеличив температуру в 2,25 раза, а затем расширили в вакуум до первоначального объема. Найдите, во сколько раз конечное значение температуры газа отличается от начального, если известно, что его начальный объем $V_0 = (28/3)V_{\text{кр}}$, начальная температура $T_0 = (95/84)T_{\text{кр}}$.

3В. В микротроне — ускорителе электронов — частицы двигаются в постоянном и однородном магнитном поле по раскручивающимся траекториям, в общей точке которых расположен ускоряющий резонатор (см. рис.).



Частота ускоряющего поля постоянна и равна $f_0 = 3$ ГГц. Чему должен быть равен минимальный прирост энергии при каждом проходе ускоряющего резонатора, чтобы все время сохранялся синхронизм ускорения электронов, т.е. электроны проходят ускоряющий резонатор в одной и той же фазе? Чему равно при этом расстояние между орбитами вдоль их общего диаметра?

4В. Ядро атома $^{72}_{32}$Ge, находящееся в первом возбужденном состоянии с энергией возбуждения $E_\gamma = 690$ кэВ, переходит в основное состояние. Оба уровня характеризуются значениями спина ядра, равным нулю. Определить тип и минимально возможную энергию испускаемой при этом заряженной частицы. Граница линии поглощения рентгеновских лучей в основном состоянии атома германия составляет $\lambda = 1,12$ Å.

5В. Найти поток тепла между поверхностями абсолютно черной идеально теплопроводящей пластинки площадью $S = 1$ см^2, движущейся в направлении нормали к поверхности со скоростью $v = 300$ км/с в поле равновесного теплового излучения с температурой $T = 3$ К. Спектральная плотность мощности излучения, падающего по нормали на единичную площадку из единичного телесного угла при наблюдениии под углом θ к вектору скорости $\vec{v}$ имеет вид:

$$I(T,\omega,\Omega)d\omega d\Omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\omega^2}{\pi^2 c^2}\,\frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_Б T}\right]-1}\,d\omega d\Omega, \quad \text{где } \beta = v/c.$$

Письменный Госэкзамен по физике, III курс, 15 января 2011 г.

Решения

Вариант А

1А. (*А.Гуденко*) При прогибе пленки на величину x упругая сила, действующая на зонд $F = 2\sigma dh\sin\alpha$, где α — угол прогиба полоски, малый по условию. При небольших прогибах полоски $F = 2\sigma dh\sin\alpha \simeq 2\sigma dhx/l_0$. При упругой деформации натяжение пропорционально относительной величине растяжения пленки $\Delta l/l_0 = (l - l_0)/l_0 = (\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0)/l_0$: $\sigma = E\Delta l/l_0 \simeq Ex^2/2l_0^2 \rightarrow F = Edhx^3/l_0^3$, откуда получаем, что модуль Юнга графена $E = Fl_0^3/hdx^3 = 1,2\cdot 10^{12}$ Па $= 1,2$ ТПа , что даже превосходит модуль Юнга алмаза, равный $E_{\text{алмаз}} = (0,7 \div 1,0)$ ТПа.

2А. (*Козлов*) После политропического сжатия температура газа

$$T_1 = T_0\left(\frac{V_0 - \nu b}{V_1 - \nu b}\right)^{\frac{R}{C_V - C}} = T_0\left(\frac{3\varphi_0 - 1}{3\varphi_1 - 1}\right)^{\frac{R}{C_V - C}},$$

а после расширения в вакуум

$$T_2 = T_1 - \frac{\nu a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right) = T_0\left(\frac{3\varphi_0 - 1}{3\varphi_1 - 1}\right)^{\frac{R}{C_V - C}} - \frac{9RT_{\text{кр}}}{8C_V}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_0}\right),$$

где

$$\varphi = \frac{V}{V_{\text{кр}}},\ C_V = \frac{3}{2}R.$$

Откуда находим

$$C = \frac{3}{2}R - R\frac{\ln\left(\frac{3\varphi_0 - 1}{3\varphi_1 - 1}\right)}{\ln\left[\frac{\tau_2}{\tau_0} + \frac{3}{4\tau_0}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_0}\right)\right]} = \frac{1}{2}R, \quad \text{где} \quad \tau = T/T_{\text{кр}}.$$

3А. (*Ципенюк*) Отдаваемая мощность будет максимальна тогда, когда центры электронных сгустков будут проходить конденсатор в максимуме тормозящего высокочастотного поля, т.е. время движения электронов в тормозящем постоянном поле напряженности E_1 должно быть равно $(n - 1/4)T_0$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, а T_0 — период СВЧ-поля. Скорость электронов, попадающих на сетки $v_0 = \sqrt{2eV_0/m}$. Отразятся они, когда $v_0 = eE_1t/m$. Время возврата $T = 2t = 2mv_0/(eE_1) = (n - 1/4)T_0 = \frac{n - 1/4}{f}$. Таким образом

$$E_1 = \frac{2\sqrt{2eV_0m}f}{e(n - 1/4)} = \frac{1500}{n - 1/4}\ \text{В/см} = 2;\ 0,86;\ 0,55; \ldots\ \text{кВ/см}.$$

4А. (*Ситников*) Пороговая кинетическая энергия нейтронов $E_{\text{пор}} = Q(1 + m/M) = (13/12)Q$ откуда величина энергии ядерной реакции $Q = 5,7$ МэВ. Так как все вторичные частицы поглощаются в спектрометре, то энергия нейтронов $E_n = Q + E = 5,7 + 9,1 =$

14.8 МэВ. По определению сечение реакции $\sigma = \frac{dN/dt}{jN_{\text{C}}}$ ($N_{\text{C}} = n_{\text{C}}Sd$ — число атомов углерода в спектрометре), откуда

$$j = \frac{dN/dt}{\sigma N_{\text{C}}} = \frac{(dN/dt)A}{\sigma\rho N_{\text{A}}Sd} = 0,45 \cdot 10^6 \text{ нейтр/см}^2\text{с}.$$

5А. (*С.Гуденко*) Для мощности излучения, падающего со стороны направления движения, имеем:

$$\Phi_f = \int dS \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^{\infty} I(T,\omega,\Omega)\cos\theta\, d\omega = S\int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3 \cos\theta\, d\omega}{4\pi^3 c^2 \left[\exp\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_{\text{Б}}T} - 1\right]} =$$

$$= \frac{Sc\alpha T^4}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\cos\theta\, d\Omega}{(1-\beta\cos\theta)^4} = \frac{Sc\alpha T^4}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{\cos\theta\, d\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} =$$

$$= \frac{Sc\alpha T^4}{2}\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(1-\beta x)^4} = \frac{Sc\alpha T^4(3-\beta)}{12(1-\beta)^3} = \frac{Sc\alpha T^4}{4}\,\frac{1-\beta/3}{(1-\beta)^3} = S\sigma T^4\,\frac{1-\beta/3}{(1-\beta)^3}\,.$$

Здесь $\alpha = k^4\pi^2/(15c^3\hbar^3) = 4\sigma/c$ — константа, связывающая температуру (T^4) с плотностью энергии равновесного излучения, σ — постоянная Стефана-Больцмана. Для мощности излучения, падающего с противоположной стороны, аналогично получаем

$$\Phi_b = S\sigma T^4 \frac{1+\beta/3}{(1+\beta)^3}.$$

Полный поток энергии с обеих сторон равен:

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_b = S\sigma T^4\frac{1+\beta/3}{(1+\beta)^3} + S\sigma T^4\frac{1-\beta/3}{(1-\beta)^3} = 2S\sigma T^4\frac{1+2\beta^2-\beta^4/3}{(1-\beta^2)^3}.$$

При $\beta \ll 1$ получаем $\Phi \simeq 2S\sigma T^4(1+5\beta^2)$.

Этот же результат легко получается без относительно сложного интегрирования, если учесть малость скорости $\beta \ll 1$ сразу в подынтегральном выражении:

$$\Phi_f = \frac{Sc\alpha T^4}{2}\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(1-\beta x)^4} \simeq \frac{Sc\alpha T^4}{2}\int\limits_0^1 (x + 4\beta x^2 + 10\beta^2 x^3)\,dx =$$

$$= \frac{Sc\alpha T^4}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{4\beta}{3} + \frac{5\beta^2}{2}\right) = S\sigma T^4(1 + \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2)\,.$$

$$\Phi_b = \frac{Sc\alpha T^4}{2}\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(1+\beta x)^4} \simeq \frac{Sc\alpha T^4}{2}\int\limits_0^1 (x - 4\beta x^2 + 10\beta^2 x^3)\,dx =$$

$$= \frac{Sc\alpha T^4}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{4\beta}{3} + \frac{5\beta^2}{2}\right) = S\sigma T^4\left(1 - \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2\right)\,.$$

Суммарная мощность

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_b = S\sigma T^4\left(1 + \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2\right) + S\sigma T^4\left(1 - \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2\right) = 2S\sigma T^4(1 + 5\beta^2).$$

Высокая теплопроводность пластинки означает, что обе ее стороны будут иметь одинаковую температуру $T_{\text{пл}}$. В стационарном режиме полученный поток равен потоку энергии, излучаемой пластинкой:

$$2S\sigma T^4(1 + 5\beta^2) = 2S\sigma T^4_{\text{пл}}.$$

Отсюда для малых скоростей $\beta \ll 1$ имеем

$$T_{\text{пл}} = T(1 + 5\beta^2/4).$$

Таким образом

$$\frac{T_{\text{пл}} - T}{T} = \frac{5}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1,25 \cdot 10^{-6}.$$

Вариант Б

1Б. (*А.Гуденко*) При прогибе пленки на величину x упругая сила, действующая на зонд, равна $F = 2\sigma dh \sin\alpha = 2\sigma dhx/(x^2 + l_0^2)^{1/2}$, где α — угол прогиба полоски. Тем самым натяжение пленки $\sigma = F(x^2 + l_0^2)^{1/2}/2dhx$. Предел прочности графена находим, подставляя значения силы и деформации при разрыве: $\sigma_{\text{пр}} = F_{\max}(x^2_{\max} + l_0^2)^{1/2}/2dhx_{\max} = 0,26 \cdot 10^{12}$ Па $= 260$ ГПа, что почти на два порядка превосходит прочность специальных сталей $\sigma_{\text{сталь}} = (3 \div 5)$ ГПа. Предельно допустимая относительная деформация $\varepsilon = \Delta l/l_0 = (l - l_0)/l_0 = [(x^2_{\max} + l_0^2)^{1/2} - l_0]/l_0 = 0,2$ ($20\,\%$).

2Б. (*Козлов*) Температура газа после расширения в вакуум

$$T_1 = T_0 - \frac{\nu a}{C_V}\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_1}\right) = T_0 - \frac{9RT_{\text{кр}}}{8C_V}\left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_1}\right), \quad \text{где} \quad \varphi = V/V_{\text{кр}}.$$

Следовательно,

$$C_V = \frac{9R}{8(\tau_0 - \tau_1)}\left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{5}{2}R, \quad \text{где} \quad \tau = T/T_{\text{кр}}.$$

Используя первое начало термодинамики, находим

$$C = C_V - R\frac{\ln\left(\frac{3\varphi_1 - 1}{3\varphi_0 - 1}\right)}{\ln(\tau_2/\tau_1)} = \frac{3}{2}R.$$

3Б. (*Ципенюк*) Циклотронная частота в нерелятивистском случае определяется только магнитным полем

$$\omega_c = \frac{eB}{mc},$$

но по мере ускорения надо пользоваться релятивистской формулой для циклотронной частоты. Ее легко получить из следующих соотношений, учитывая, что в магнитном поле величина скорости не меняется:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}] \ \rightarrow \ \omega = \frac{eBc}{\gamma mc^2},$$

т.е. период обращения определяется выражением

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\gamma mc^2}{ecB} = \frac{W + mc^2}{ecB},$$

где W — кинетическая энергия протона. Так как $T_0 = 2\pi mc/eB$, то

$$T = \frac{2\pi}{ecB} mc^2 \left(\frac{W}{mc^2} + 1\right) = T_0 \left(\frac{W}{mc^2} + 1\right).$$

Ускорение прекратится, когда протоны начнут проходить дуанты в замедляющем поле, а это произойдет, когда период обращения увеличится на $T_0/4$. Таким образом, максимальная кинетическая энергия протонов равна $W = mc^2/4 \simeq 250$ МэВ.

4Б. (*Инжечик, Раевский*) В результате K-захвата на $1s$-оболочке образовавшегося атома ванадия возникает вакансия, которая может заполниться последовательными переходами вышележащих электронов. В результате будет испущена серия γ-квантов с суммарной энергией, равной энергии ионизации уровня $1s$. При этом мы пренебрегаем энергией ионизации уровня, с которого происходит последний переход. Это один из внешних электронов и его энергия ионизации порядка десятка эВ (что, конечно, много меньше энергии ионизации $1s$-электрона, которая порядка кэВ). По закону Мозли $\hbar\omega_\gamma = \mathrm{Ry} Z^2_{\text{эфф}}$ ($Z_{\text{эфф}} = Z - \sigma$). Согласно закону сохранения энергии при K-захвате

$$E_\nu + \frac{E_\nu^2}{2M(^{51}_{23}\mathrm{V})c^2} + \hbar\omega_\gamma = \Delta M c^2.$$

Пренебрегая энергией отдачи, получаем

$$Z_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\Delta Mc^2 - E_\nu}{\mathrm{Ry}}} = \sqrt{\frac{5580}{13,6}} \simeq 20,25,$$

соответственно $\sigma = 2,75$.

Полученная величина выглядит немного большой, поскольку обычно считается, что должна быть единица. Однако тут мы имеем дело со "странными элементами": у хрома конфигурация $3d^5 4s^1$, а у ванадия $3d^3 4s^2$. Так что тут вообще один из $3d$-электронов не "падает вниз", а "летит вверх". У ванадия 8 s-электронов и возможно поэтому они дают такую большую константу экранирования.

5Б. (*С.Гуденко*) Высокая теплопроводность пластинки означает, что обе ее стороны будут иметь одинаковую температуру, и поэтому давление на них, обусловленное собственным излучением пластины, будет одинаковым и вклада в результирующую силу не даст. Для давления излучения, падающего со стороны направления движения, имеем:

$$P_f = \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_0^\infty \frac{I(T,\omega,\Omega)\cos^2\theta}{c} d\omega = \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_0^\infty \frac{\hbar\omega^3 \cos^2\theta}{4\pi^3 c^3 \left[\exp\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_Б T} - 1\right]} d\omega =$$

$$= \frac{\alpha T^4}{4\pi}\int_\Omega \frac{\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4}\,d\Omega = \frac{\alpha T^4}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} d\cos\theta =$$

$$= \frac{\alpha T^4}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-\beta x)^4} = \frac{\alpha T^4}{6(1-\beta)^3}.$$

Константа $\alpha = k_Б^4\pi^2/(15c^3\hbar^3) = 4\sigma/c$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана.

При $\beta \ll 1$ мы получаем, что $P_f = \frac{\alpha T^4}{6}(1+3\beta)$.

Этот же результат легко получается без относительно сложного интегрирования, если учесть малость скорости $\beta \ll 1$ сразу в подынтегральном выражении:

$$P_f = \frac{\alpha T^4}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-\beta x)^4} = \frac{\alpha T^4}{2}\int_0^1 (x^2+4\beta x^3)\,dx = \frac{\alpha T^4}{2}(\frac{1}{3}+\beta) = \frac{\alpha T^4}{6}(1+3\beta).$$

Для давления с противоположной стороны аналогично нетрудно получить

$$P_b = \frac{\alpha T^4}{6(1+\beta)^3} \simeq \frac{\alpha T^4}{6}(1-3\beta).$$

Таким образом, для разности давлений со стороны движения и с обратной стороны имеем

$$\Delta P = \alpha T^4\beta = \frac{4\sigma T^4 v}{c^2} = 6,12\cdot 10^{-16}\,\text{дин/см}^2.$$

Давление получилось очень малое, но на более ранних стадиях развития Вселенной, когда температура фонового излучения была порядка 3000 K, объекты движущиеся со скоростями, сравнимыми со скоростью света, могли довольно существенно тормозиться (и, соответственно, охлаждаться), отдавая свою энергию излучению. Результирующая сила равна разности сил давления $F = S\Delta P = 6,12\cdot 10^{-16}$ дин и направлена против скорости.

Вариант В

1В. (*А.Гуденко*) При разрыве напряжение достигает предела прочности $\sigma_{\text{пр}}$ и упругая сила, действующая при этом на зонд микроскопа: $F = 2\sigma_{\text{пр}} dh\sin\alpha$. При испытании "графенового скотча" в предельном случае на линейку действует упругая сила: $F_0 = 2\sigma_{\text{пр}} d_0 h_0 \sin\alpha_0$. Из равенства предельно допустимых относительных деформаций следует, что $\sin\alpha = \sin\alpha_0$ (размеры полосок пропорциональны), т.е. $F_0/F = d_0h_0\sin\alpha_0/dh\sin\alpha = d_0h_0/dh$ откуда $F_0 = Fd_0h_0/dh = 143$ кН $=$ 14,6 тонн.

2В. (*Козлов*) Используя уравнение адиабаты, найдем

$$C_V = R\frac{\ln\left(\frac{3\varphi_0-1}{3\varphi_1-1}\right)}{\ln(T_1/T_0)} = \frac{3}{2}R, \quad \text{где} \quad \varphi = V/V_{\text{кр}}.$$

Температура газа после расширения в вакуум

$$T_2 = T_1 - \frac{\nu a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_0}\right) = T_1 - \frac{9RT_{\text{кр}}}{8C_v}\left(\frac{1}{\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_0}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{T_1}{T_0} - \frac{3T_{\text{кр}}}{4T_0}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_0}\right) = 2,1.$$

3В. (*Ципенюк*) Как и в задаче 5Б, частота обращения электрона

$$\omega_c = \frac{ecB}{\gamma mc^2},$$

а период обращения

$$T = \frac{2\pi}{ecB}mc^2\left(\frac{W}{mc^2} + 1\right) = T_0\left(\frac{W}{mc^2} + 1\right).$$

Синхронизм движения будет тогда, когда период обращения будет кратен T_0, т.е. $\Delta W = mc^2$. Длины окружностей соседних орбит отличаются на cT_0, значит максимальное расстояние между орбитами равно разности их диаметров $\Delta L = c/\pi f_0 = 3,2\,\text{см}$.

4В. (*Раевский*) Поскольку $(0-0)$-переход для реальных фотонов запрещен, а ядерного превращения не происходит, то снятие возбуждения ядра происходит за счет виртуального фотона, который затем поглощается одним из электронов оболочки — внутренняя конверсия. Согласно закону сохранения энергии $E_1 = E_n + T + E_{\text{отд}}$, где E_n — энергия электрона на n-м уровне, T — кинетическая энергия электрона, $E_{\text{отд}}$ — энергия отдачи. Минимальная энергия соответствует вылету электрона с K-оболочки. Она как раз и соответствует энергии края поглощения рентгеновских лучей

$$E_n = E_{\text{гр}} = hc/\lambda_{\text{гр}} = \frac{6,62\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{10}}{1,12\cdot 10^{-8}\cdot 1,6\cdot 10^{-12}} = 11\,\text{кэВ}.$$

Поскольку при конверсионном переходе импульс электрона равен импульсу отдачи ядра, то кинетической энергией отдачи ядра можно пренебречь по сравнению с энергией электрона. Т.о. кинетическая энергия электрона равна $T = E_1 - E_{\text{гр}} =$679 кэВ.

5В. (*С.Гуденко*) Высокая теплопроводность пластинки означает, что ее стороны будут иметь одинаковую температуру, и поэтому собственное излучение пластинки будет одинаковым в обе — по и против движения — стороны и равно $\Phi_I = S\sigma T_I^4$. В стационарном режиме суммарный падающий поток тепла равен потоку тепла, излучаемому пластинкой: $\Phi_f + \Phi_b = 2\Phi_i$, откуда $\Phi_f - \Phi_b = 2(\Phi_i - \Phi_b)$ и для потока тепла между поверхностями имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \Phi_f - \Phi_I = \Phi_I - \Phi_b = \frac{\Phi_f - \Phi_b}{2} = \sigma T^4\frac{8v}{3c}S = 1,23\cdot 10^{-5}\,\text{эрг/с}.$$