

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа биологической и медицинской физики



Лабораторная работа 4.2

Исследование энергетического спектра β -частиц
и определение их максимальной энергии при
помощи магнитного спектрометра

Авторы:
Ирина Веретененко
Б06-804

1 Введение

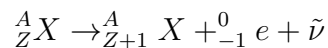
Цели работы:

- Осуществить калибровку магнитного спектрометра по энергии электронов внутренней конверсии ядер ^{137}Cs при β -распаде
- Исследовать энергетический спектр электронов при распаде ядер ^{137}Cs и определить их максимальную энергию.

В работе используются: β -источник (^{137}Cs), тонкая магнитная линза, счетчик электронов, форвакуумный насос, ПЭВМ

1.1 Теория

- β -распад - это самопроизвольное превращение ядер, при котором их массовое число A (число протонов Z + число нейтронов N в ядре) не изменяется, а заряд Z увеличивается или уменьшается на 1 (β^+ и β^- распады). β -распады характерны для атомов с любыми A .
- В данной работе рассматривается β^- распад, при котором испускается электрон и антинейтрино



Освобождающаяся при распаде энергия делится между ядром, электроном и антинейтрино, однако энергия отдачи ядра пренебрежимо мала при сравнении с энергией электрона и антинейтрино. Поэтому будем считать, что они делят между собой всю выделенную энергию. $E_e + E_\nu = E$

Характерной особенностью β -распада является непрерывный энергетический спектр вылетающих электронов: электрон и антинейтрино делят энергию в произвольном соотношении. Значит, энергия электрона может быть любой от 0 до E - энергии, освобождающейся при распаде.

- Вид энергетического спектра электронов при β -распаде можно увидеть на рис. 1

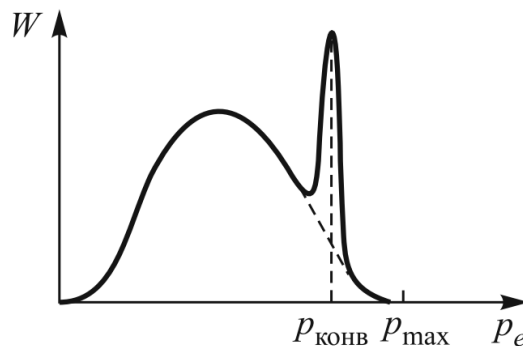


Рис. 1: Энергетический спектр вылетающих электронов при β^- -распаде

- Вывод формулы, описывающей кривую энергетического спектра электронов:
 $W_e(p_e)$ - плотность вероятности распределения электронов по импульсам (что соответствует распределению по энергиям: $E_e^2 = (p_e c)^2 + (m c^2)^2$)
Тогда $W_e(p_e) dp_e$ - вероятность того, что электрон получит при распаде импульс в диапазоне $(p_e, p_e + dp_e)$

Рассмотрим СО в 3мерном пространстве, осями которой являются проекции импульса электрона p_e . В ней интервалу $(p_e, p_e + dp_e)$ соответствует шаровой слой радиусом p_e и толщиной dp_e , объем слоя $4\pi p_e^2 dp_e$

Задание импульса электрона определяет импульс антинейтрино (так как сумма их энергий равна константе). При этом направление антинейтрино остается свободным. Т.о. в пространстве импульсов антинейтрино выделяется шаровой слой площадью $4\pi p_\nu^2$. Тогда

$$W(p_e)dp_e \sim p_e^2 p_\nu^2 dp_e$$

Масса антинейтрино равна 0 (кинетическая энергия антинейтрино совпадает с его полной энергией E_ν). Тогда (T_{max} - максимально возможная в данном распаде энергия электрона, T_e - фактическая кинетическая энергия электрона)

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{T_{max} - T_e}{c}$$

С учетом

$$T_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \Rightarrow T_{max} - T_e = c(\sqrt{p_{max}^2 + m_e^2 c^2} - \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2})$$

Значит

$$W(p_e)dp_e \sim p_e^2 (T_{max} - T_e)^2 dp_e = p_e^2 c^2 (\sqrt{p_{max}^2 + m_e^2 c^2} - \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2})^2 dp_e \quad (1)$$

Формула (1) описывает вид колоколообразного спектра, показанного на рис. 1: кривая плавно отходит от 0, касается 0 при $p_e \rightarrow p_{max}$

- На рис.1 можно заметить узкий пик. Он объясняется тем, что в результате распада ядра становятся возбужденными, поэтому они либо излучают γ -квант, либо передают избыток энергии одному из электронов с внутренних оболочек атомов (К, L). Излучаемые в этом случае электроны имеют строго определенную энергию и называются конверсионными. Ширина конверсионного пика является чисто аппаратной (конверсионное излучение строго монохроматическое), поэтому по ширине пика можно определить разрешающую силу спектрометра.

1.2 Экспериментальная установка

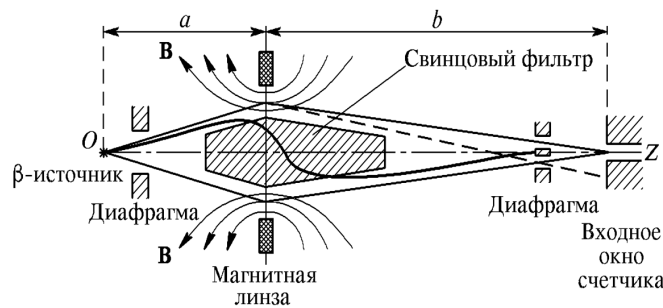
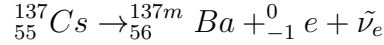


Рис. 2: Схема β -спектрометра с короткой магнитной линзой

В данной работе для определения энергетического спектра β частиц используется магнитный спектрометр с короткой линзой.

- В качестве β -источника используется ^{137}Cs . Тогда исследуемый в работе β^- распад описывается следующим образом:



- Электроны, испускаемые β источником, попадают в магнитное поле тонкой катушки с осью OZ. Траектории электронов - показанные на рис 2 сложные спирали, сходящиеся в фокусе - точке на оси OZ.
- В фокусе стоит детектор электронов (сцинтилляционный счетчик с кристаллом полистирола/ газоразрядный детектор электронов)
- Для заряженных частиц тонкая катушка эквивалентна линзе. Пусть f - фокусное расстояние линзы, I - ток, протекающий через катушку (магнитное поле в линзе $B \sim I^2$). Тогда f зависит от импульса электронов p_e следующим образом:

$$\frac{1}{f} \sim \frac{I^2}{p_e^2}$$

Поэтому при заданном на катушке I на счетчике фокусируются только электроны с определенным значением p_e (несфокусированные электроны проходят мимо окна счетчика - штрихованный луч).

При изменении I на счетчике начинают фиксироваться электроны с другими значениями импульса. Геометрия прибора не меняется в течение опыта, поэтому

$$\boxed{p_e = kI} \quad (2)$$

где k - константа прибора, определяемая по какой-то известной конверсионной линии

- Кольцевые диафрагмы ограничивают углы вылета электронов (для устранения сферической абберации)
- Свинцовый фильтр предохраняет счетчик от γ -лучей, возникающих при β -распаде (см. теорию)
- Конечные размеры источника, диафрагмы, окна счетчика, абберации приводят к тому, что при заданном f на счетчик попадают электроны $[p_e - \Delta p_e/2, p_e + \Delta p_e/2]$. p_e - разрешающая способность спектрометра.
- Связь числа частиц $N(p_e)$, регистрируемых установкой, с $W(p_e)$:

$$N(p_e) \approx W(p_e) \Delta p_e$$

При постоянном токе

$$f \sim p_e^2 \Rightarrow \Delta p_e = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f} p_e \rightarrow \Delta p_e = C p_e$$

где $C = \frac{\Delta f}{2f}$ - определяется геометрией установки. Значит,

$$\boxed{N(p_e) = C W(p_e) p_e} \quad (3)$$

- На рис.3.1 можно увидеть блок-схему установки. Радиоактивный источник ^{137}Cs помещен внутрь откачанной форвакуумным насосом трубы. Электроны фокусируются линзой и попадают в счетчик. Давление в спектрометре ~ 0.1 Торр - при нем потери энергии электронов на рассеяние уже малы, поэтому дальше уменьшать не надо.

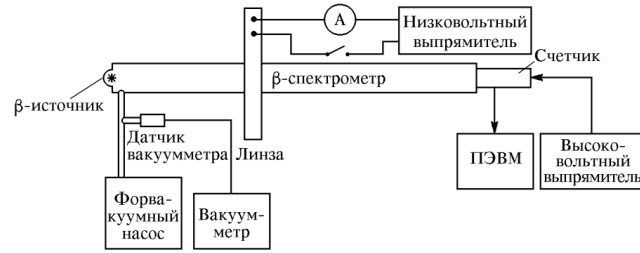


Рис. 3: Блок-схема установки для изучения β -спектра

2 Ход работы и обработка результатов

- Включим установку и откачаем воздух из полости спектрометра
- При выключенном токе в линзе и измерим фоновый счет спектрофотометра (таблица 1). Он обусловлен главным образом γ -квантами и электронами, рассеянными от стенок спектрометра.

Комментарий: Количество электронов, регистрируемых счетчиком за некоторый промежуток времени t подчиняется распределению Пуассона (так как число электронов дискретно, а отдельные акты регистрации не зависят друг от друга). Тогда вероятность того, что будет зарегистрировано N электронов

$$p(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}$$

где \bar{N} -среднее число импульсов, регистрируемых за данный отрезок времени. Дисперсия пуассоновского распределения $\sigma^2 = \bar{N}$, поэтому

$$N = \bar{N} + \pm \sqrt{\bar{N}}$$

ПЭВМ выдавал значения $\frac{\bar{N}}{t}$, где $t = 80\text{с}$ - время измерения числа импульсов. Поэтому умножим исходные данные на t для упрощения вычислений.

Таблица 1: Результаты измерения фона

$N/t, 1/\text{с}$	$N(80\text{с})$	σN
1,3995	111,960	10,581
1,3746	109,968	10,487
1,0747	85,976	9,272

Тогда средний уровень фона спектрометра

$$N_{\text{фон}} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}, \sigma N_{\text{фон}} = \frac{\sqrt{\sigma^2 N_1 + \sigma^2 N_2 + \sigma^2 N_3}}{3} = \frac{\sqrt{N_1 + N_2 + N_3}}{3}$$

$$N_{\text{фон}} = (103 \pm 6)$$

- Измерим β -спектр, особенно в области конверсионного пика: в течении $t=80\text{с}$ измеряем число электронов с импульсами, соответствующими задаваемым значениям тока I катушки. Результаты измерений представлены в таблице 2.

Согласно паспорту источника питания постоянного тока GPR-3060D $\sigma I = 0.05\% \pm 0.02A$
 Погрешность $\sigma(N - N_{\text{фон}}) = \sqrt{\sigma^2 N + \sigma^2 N_{\text{фон}}} = \sqrt{N + \sigma^2 N_{\text{фон}}}$

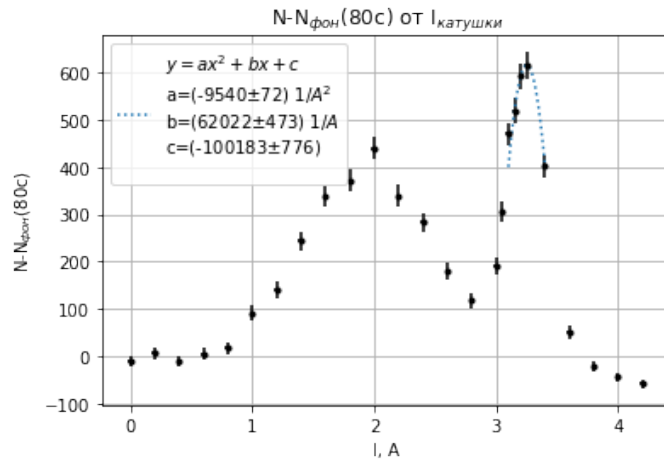
Таблица 2: Результаты измерений числа электронов от силы тока на катушке

I, A	$\sigma I, A$	$N, 1/c$	N за 80с	$N-N\Phi$	$\sigma(N - N)$
0	0,020	1,225	98	-5,00	11,576
0,2	0,020	1,424	113,92	10,92	12,244
0,4	0,020	1,225	98	-5,00	11,576
0,6	0,020	1,399	111,92	8,92	12,162
0,8	0,020	1,562	124,96	21,96	12,687
1	0,021	2,487	198,96	95,96	15,328
1,2	0,021	3,099	247,92	144,92	16,850
1,4	0,021	4,398	351,84	248,84	19,694
1,6	0,021	5,573	445,84	342,84	21,951
1,8	0,021	5,998	479,84	376,84	22,712
2	0,021	6,848	547,84	444,84	24,163
2,2	0,021	5,598	447,84	344,84	21,996
2,4	0,021	4,886	390,88	287,88	20,661
2,6	0,021	3,599	287,92	184,92	17,998
2,8	0,021	2,824	225,92	122,92	16,184
3	0,022	3,724	297,92	194,92	18,273
3,05	0,022	5,186	414,88	311,88	21,234
3,1	0,022	7,222	577,76	474,76	24,774
3,15	0,022	7,847	627,76	524,76	25,764
3,2	0,022	8,759	700,72	597,72	27,143
3,25	0,022	9,297	743,76	640,76	27,924
3,4	0,022	6,385	510,8	407,80	23,384
3,6	0,022	1,987	158,96	55,96	13,963
3,8	0,022	1,075	86	-17,00	11,045
4	0,022	0,787	62,96	-40,04	9,948
4,2	0,022	0,612	48,96	-54,04	9,217

3 Обработка результатов

3.1 Калибровка спектрометра

- Из описания экспериментальной установки (формула (2)) $p_e = kI$, где k - константа прибора, определяемая геометрией прибора. Проведем калибровку спектрометра (определение k) по известному импульсу конверсионного электрона $p_{econv}c = 1013.5\text{кэВ}$.
- Построим график зависимости числа электронов, попавших на счетчик за 80с от I - силы тока на катушке с учетом фона.



- Определим силу тока катушки, соответствующую максимуму конверсионного пика. Для этого в окрестности конверсионного пика фитируем точки полиномом 2 степени и из условия равенства нулю производной найдем максимум. Так как из результатов измерений видно, что относительная погрешность измерения числа электронов больше, чем относительная погрешность измерения силы тока, то при нахождении коэффициентов полинома будем учитывать именно ее.

$$I_{conv} = -\frac{b}{2a}, \sigma I_{conv} = I_{conv} \sqrt{\left(\frac{\sigma a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma b}{b}\right)^2} \Rightarrow I_{conv} = (3.25 \pm 0.03) \text{A}$$

$$k = \frac{p_{econv}}{I_{conv}}, \sigma k = k \frac{\sigma I_{conv}}{I_{conv}}, p_{econv}c = 1013.5\text{кэВ} \Rightarrow \boxed{k c = (312 \pm 3) \frac{\text{кэВ}}{\text{A}}} \quad \boxed{k = (1.04 \pm 0.01) \cdot 10^{-6} \frac{\text{кэВ с}}{\text{м A}}}$$

3.2 Определение максимальной энергии β -спектра

- Из теории (формула (1)) и описания установки (формула (3)):
 T_e - кинетическая энергия электрона, T_{max} - искомая максимальная энергия

$$N(p_e) \sim W(p_e)p_e \sim (p_e^2(T_{max} - T_e)^2) \cdot p_e$$

$$\frac{\sqrt{N(p_e)}}{p_e^{3/2}} \sim T_{max} - T_e$$

- Для определения максимальной энергии β -спектра построим график в спрямляющих координатах (график Ферми-Кюри) следующего вида:

$$\frac{\sqrt{N(p_e)}}{p_e^{3/2}} = AT_e + B$$

Тогда $T_{max} = -\frac{B}{A}$

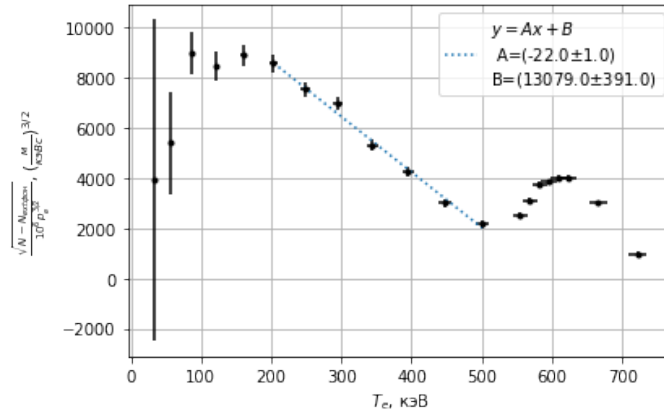
- Формула для расчета кинетической энергии электрона (энергия покоя электрона $m_e c^2 = 511 \text{кэВ}$):

$$T_e = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = \sqrt{(k c I)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2$$

$$\sigma T_e = \sqrt{\left(\frac{\partial T_e}{\partial I}\right)^2 \sigma^2 I + \left(\frac{\partial T_e}{\partial (k c)}\right)^2 \sigma^2 (k c)} = \frac{(k c I)^2}{\sqrt{(k c I)^2 + (m_e c^2)^2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\sigma (k c)}{k c}\right)^2}$$

у-координата графика

$$y = \frac{\sqrt{N - N_{\text{фон}}}}{p_e^{3/2}} = \frac{\sqrt{N - N_{\text{фон}}}}{(k I)^{3/2}}, \sigma y = y \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\sigma N - N_{\text{фон}}}{N - N_{\text{фон}}}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{\sigma k}{k}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{\sigma I}{I}\right)^2}$$



- Фитируем прямой полученный график, используя точки середины спектра до начала конверсионного пика (они измерены с наилучшей точностью) и определим максимальную энергию электрона

$$T_{max} = -\frac{B}{A}, \sigma T_{max} = T_{max} \sqrt{\left(\frac{\sigma A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma B}{B}\right)^2} \Rightarrow \boxed{T_{max} = (590 \pm 30) \text{кэВ}}$$

4 Выводы

- В ходе работы была проведена калибровка магнитного спектрометра. Полученно значение константы спектрометра $k = (1.04 \pm 0.01) \cdot 10^{-6} \frac{\text{кэВ} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{А}}$ с хорошей точностью. Погрешность константы обуславливается погрешностью нахождения конверсионного пика, вызванной погрешностями фитирования и счетчика спектрометра.
- Определена энергия, высвобождающаяся при β^- распаде ^{137}Cs $T_{max} = (590 \pm 30) \text{кэВ}$. Погрешность значения определяется погрешностями фитирования графика Ферми-Кюри, погрешностями измерения силы тока и погрешностью счетчика.