Вариант А

1А. В оптическом ($\lambda = 6280\,\text{Å}$) резонаторе Фабри-Перо длиной $L = 10$ см одно из зеркал массой $m = 0,1$ г. укреплено на пружине. В результате тепловых колебаний зеркала ($T = 300$ К) происходит модуляция частоты оптического резонатора. Частота возбуждения резонатора смещена относительно резонансной так, что колебания зеркала приводят к максимальной амплитудной модуляции высокочастотных колебаний. Какова при этом глубина амплитудной модуляции? Частота колебаний зеркала равна $f_0 = 10$ Гц, добротность оптического резонатора $Q = 10^8$.

2А. Теплоизолированный непроводящий парамагнетик помещен в постоянное магнитное поле $H_0 = 10^4$ Гс. Перпендикулярно этому полю прикладывается мощный импульс переменного магнитного поля, опрокидывающий вектор намагниченности образца на 180° за время, много меньшее времени спин-решеточной релаксации (т.н. π-импульс). Найти температуру парамагнетика после восстановления равновесной намагниченности. Начальная температура образца $T_0 = 4,2$ К, теплоемкость единицы объема $C_V = 250T^3$ [эрг/(К·см^3)], где температура T выражена в кельвинах. Магнитная восприимчивость парамагнетика в системе СГСЭ $\chi = 4\cdot 10^{-5}$.

3А. Оценить, какая минимальная плотность мощности накачки необходима для поддержания инверсной заселенности лазера в рентгеновской области ($\lambda_1 = 0,5$ нм), если известно, что в видимом диапазоне ($\lambda_0 = 500$ нм) она составляет $W_0 = 10^3$ Вт/см^3. Считать, что в обоих случаях системы уровней, на которых работают лазеры, подобны и у них одинаковые спины и четности.

4А. Неполяризованный пучок ультрахолодных нейтронов (УХН) падает по нормали к поверхности тонкой однородно намагниченной железной пластинки, вектор остаточной намагниченности которой $\vec{M}$ лежит в плоскости пластины и по величине равен $M = 850$ Гс. В каком диапазоне длин волн нейтронов такая пластина будет работать как поляризатор, пропуская нейтроны только одной поляризации? Длина когерентного рассеяния нейтронов ядрами железа равна $a = 9,9$ фм, плотность железа $\rho = 7,87$ г/см^3. Краевыми эффектами пренебречь.

5А. 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией вплоть до $E_0 = 50$ ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии 730 км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима, со скоростью, превышающей скорость света в вакууме ($\delta = (v_\nu/c)^2 - 1 \simeq 5\cdot 10^{-5}$). По опубликованным данным энергии нейтрино, регистрируемых детектором, не изменились. Как указали вскоре Коэн и Глэшоу, сверхсветовое нейтрино должно терять энергию, излучая электрон-позитронную пару (аналог эффекта Черенкова), при этом потери энергии нейтрино на единицу длины пути $dE/dx = -AE^6\delta^3$ (где $A = 6,46\,(\text{ГэВ}^5\cdot\text{м})^{-1}$). Найти предельную энергию нейтрино, достигающих детектора.

Вариант Б

1Б. Шарик массы $m = 1$ г подвешен на пружинке длиной $l_0 = 10$ см, частота колебаний этого осциллятора $f_0 = 1$ кГц. Какова должна быть длина пружинки, чтобы частота осциллятора стала равной $f = 10$ кГц? При какой температуре у такого осциллятора будет возбуждаться преимущественно первое квантовое состояние?

2Б. Намагниченный до насыщения во внешнем поле непроводящий парамагнетик находится при температуре $T_s = 10$ К. Найти знак и максимально возможную величину изменения температуры парамагнетика при адиабатическом выключении подмагничивающего поля. Теплоемкость решетки подчиняется закону Дебая $C_V = 234 N_l k_Б (T/\Theta)^3$, где $\Theta = 108$ К, N_l — число атомов решетки. Доля парамагнитных ионов от числа атомов решетки составляет $\beta = N_p/N_l = 0{,}03$, полный момент иона $j = 5/2$. Парамагнитные ионы считать невзаимодействующими.

3Б. В экспериментах Парселла, приведших к открытию ЯМР в 1945 г., исследовалось поглощение радиоволн ($\lambda = 10$ м) образцом парафина, помещенным в постоянное магнитное поле. В качестве источника поля использовался электромагнит, сделанный своими руками из деталей, собранных на свалке трамвайного депо г.Бостона. Электромагнит был плохо откалиброван, обнаружить сигнал от протонов не удавалось, и его заметили случайно, когда выключили питание электромагнита (примерно через $t_0 = 10$ с). По результатам опытов было найдено, что величина магнитного момента протона $\mu = 2{,}75\mu_{яб}$. Считая, что сопротивление катушки электромагнита $R = 0{,}01$ Ом, а ее индуктивность $L = 1$ Гн, оценить, какое поле создавал электромагнит.

4Б. При отражении от ферромагнетика граничная энергия нейтронов зависит от их поляризации. Это дает возможность при малых углах скольжения получать при отражении почти полностью поляризованные нейтроны. Найти максимальный угол скольжения, при котором тепловые нейтроны ($E_{теп} = 0{,}025$ эВ), отраженные от намагниченного в плоскости кобальтового зеркала (остаточная индукция $B = 18$ кГс), будут практически полностью поляризованы. Граничная энергия нейтронов при рассеянии на ядрах кобальта равна $E_{гр} = 0{,}585 \cdot 10^{-7}$ эВ.

5Б. 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией $E = 17{,}5$ ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии 730 км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима со скоростью, превышающей скорость света в вакууме ($\delta = (v/c)^2 - 1 \simeq 5 \cdot 10^{-5}$). Как указали вскоре Коэн и Глэшоу, этот результат вызывает сомнение, так как сверхсветовое нейтрино должно терять энергию, излучая в основном электрон-позитронные пары (аналог эффекта Черенкова). Для сверхсветовых нейтрино закон дисперсии записывается в виде $E^2 = p^2c^2 - (mc^2)^2$. Исходя из приведенных данных, найти массу сверхсветового нейтрино m_ν и оценить угол, на который оно отклонится, потеряв на излучение одной пары $\Delta E/E = 0{,}01$ долю первоначальной энергии. Массой электрон-позитронной пары пренебречь.

Вариант В

1В. Современная технология позволяет изготавливать микроминиатюрные механические осцилляторы, собственные частоты которых лежат в гигагерцовом диапазоне. Это открывает возможность наблюдать квантовый характер колебаний (дискретность низколежащих возбуждений). Какова должна быть чувствительность измерительного прибора, чтобы при температуре $T = 70$ мК обнаружить тепловые колебания одномерного осциллятора массой 0,1 мкг и частотой $f_0 = 1$ ГГц?

2В. К непроводящему парамагнетику, находящемуся в термостате с температурой $T = 4,2$ К, приложено магнитное поле $H = 6,25 \cdot 10^4$ Гс. Найти количество тепла, поглощаемого парамагнетиком при выключении поля. Спин каждого парамагнитного иона $S = 1/2$, g-фактор $g = 2$, число ионов $N = 10^{23}$. Парамагнитные ионы считать невзаимодействующими.

Указание. Воспользоваться формулой Стирлинга $\ln N! \simeq N \ln N$.

3В. Маленькая стрелка компаса с остаточным магнитным полем $B_0 = 1$ Тл представляет собой тонкий длинный цилиндр длиной $l = 1$ мм. Компас помещается в вертикальное однородное магнитное поле $\vec{B}$, перпендикулярное вектору магнитного момента $\vec{P}_m$. Оценить, в каких полях B можно наблюдать регулярную прецессию стрелки. Считать, что регулярная прецессия наблюдается, если момент импульса, связанный с прецессией L_Ω, значительно меньше величины механического момента импульса стрелки L, обусловленного намагниченностью, т.е. $L_\Omega \ll L$ (гироскопическое приближение). При каких размерах магнитной стрелки можно наблюдать ее прецессию в поле $B_з = 0,1$ Гс (порядка поля Земли)? Плотность материала магнита $\rho = 8$ г/см^3. Считать магнетизм стрелки чисто спиновым.

4В. Для когерентного разделения нейтронного пучка ($\lambda = 2,7$ Å) используется амплитудная отражающая дифракционная решетка, представляющая собой слои ^{58}Ni, нанесенные на стеклянную пластинку, период структуры $d = 0,021$ мм. Какое максимальное угловое расстояние между максимумами 0-го и (+1)-го порядков может быть достигнуто? При каком периоде структуры максимум (+1)-го порядка существует? Длина когерентного рассеяния нейтронов ядрами никеля $a = 14,4$ фм, плотность никеля $\rho = 8,8$ г/см^3.

5В. 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией вплоть до 50 ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии $L = 730$ км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима, со скоростью, превышающей скорость света ($v/c = 1 + 2,5 \cdot 10^{-5}$). Как указал вскоре Кун, этот результат может быть связан с вращением Земли, что не учитывалось при обработке результатов. Оценить связанную с этим величину поправки к скорости нейтрино, рассматривая его движение в инерциальной системе координат. Считать, что направление ЦЕРН–Гран-Сассо составляет угол $\theta = 45°$ с плоскостью меридиана, проходящего через ЦЕРН, географическая широта ЦЕРНа $\varphi = 45°$.

Указание. Считать, что для нахождения скорости вылетающих из ускорителя в ЦЕРНе нейтрино можно пользоваться релятивистским законом сложения скоростей.

ВАРИАНТ А

1А. (Овчинкин) Парциальные давления паров $P(t_0) = \varphi_0 P_н(t_0)$, $P(t) = \varphi P_н(t)$, с другой стороны

$$P(t_0)V = \frac{m_0}{\mu}RT_0, \qquad P(t)V = \frac{m}{\mu}RT.$$

Из этих систем получаем $\dfrac{\varphi}{\varphi_0} = \dfrac{mT}{m_0T_0}\cdot\dfrac{P_н(t_0)}{P_н(t)}$. Согласно уравнению Клапейрона–Клаузиуса

$$P_н(t) = P_н(t_0)\exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right],$$

откуда

$$\varphi = \varphi_0\frac{mT}{m_0T_0}\exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] \simeq 0{,}66\ (66\%).$$

2А. (Маношкин) Для электромагнитных колебаний

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности металла должна обращаться в ноль. Это приводит в резонаторе размерами $a\times b\times l$ к квантованию компонент волнового числа $k_x = m\pi/a$, $k_y = p\pi/b$, $k_z = n\pi/l$.

Из условия задачи следует, что $n = 2$, так как вдоль l укладывается одна длина волны. Подставляя числа, получаем, что

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\frac{6{,}28}{3}\right)^2 = 4{,}41 = 1{,}87m^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot 2^2 + 9{,}67\cdot p^2.$$

Отсюда следует, что $m = 1$, $p = 0$, а $l = 4$ см.

Пространственные компоненты поля, удовлетворяющие этим условиям, имеют вид:

$$E_x = 0, \qquad E_y = E_0\sin(k_x x)\sin(k_z z), \qquad E_z = 0.$$

У нас $E_0 = E_{эф}$.

Усреднённая по времени энергия электромагнитного поля в резонаторе равна

$$W = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right]dV = \frac{1}{2}\cdot 2\int\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV = \frac{\varepsilon_0 E_{эф}^2}{2}\cdot abl\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \approx 9\cdot 10^{-5}\ Дж.$$

Здесь $1/2\cdot 1/2$ — результат интегрирования по координатам x и z. В стационарном режиме потери в резонаторе равны мощности генератора, поэтому добротность

$$Q = 2\pi\frac{W}{PT} = 2\pi\frac{Wf}{P} \approx 200.$$

3А. (Никулин) Фаза принимаемого сигнала $\varphi = \omega t - kl = \omega t - \frac{\omega l}{c}$. Циклическая частота равна $\dot\varphi = \omega - \frac{\omega \dot l}{c}$, откуда $\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\dot l}{c}$. Так как при истинном эффекте Доплера $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}$, для скорости v получаем: $v = \frac{\Delta\omega}{\omega}c = -\dot l$.

4А. (С. Гуденко, Раевский) В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad где\quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi = Ce^{-\varkappa x}, \qquad где\quad \varkappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}.$$

Из условия $U_0 = 4E$ получаем $\varkappa = k\sqrt{3}$.

Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\varphi}, \qquad где\quad \varphi = \pi/3.$$

Таким образом, $|A| = |B|$ и $B = Ae^{-2i\varphi}$, $\varphi = \pi/3$.

Плотность вероятности $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ при $x < 0$ равна

$$|Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = \left|A\left(e^{ikx} + e^{-2i\varphi}e^{-ikx}\right)\right|^2 = \left|Ae^{-i\varphi}\left(e^{ikx}e^{i\varphi} + e^{-ikx}e^{-i\varphi}\right)\right|^2 = 4|A|^2\cos^2(kx + \varphi).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{max}(x) = 4|A|^2$ в 4 раза превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(kx + \varphi) = \pm 1$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = 0$, откуда $x_{max} = -\lambda/6$, $l_{max} = |x_{max}| = \lambda/6$.

Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{min}(x) = 0$ достигается при $\cos(kx + \varphi) = 0$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = -\pi/2$, откуда $x_{min} = -5\lambda/12$, $l_{min} = |x_{min}| = 5\lambda/12$.

5А. (Петров, Струминский) Максимальная энергия мюона соответствует вылету мюона вдоль импульса боттомония, а минимальная — в обратном направлении. Законы сохранения выглядят так:

$$E = E_1 + E_2, \qquad p = p_1 - p_2.$$

Так как мюоны заведомо ультрарелятивистские, то для них $E = pc$, и получаем

$$E_{max} = E_1 = \frac{E + cp}{2}, \qquad E_{min} = \frac{E - cp}{2}.$$

Здесь полная энергия $E = Mc^2 + T = 19{,}46$ ГэВ, $pc = \sqrt{E^2 - M^2c^4} = 17$ ГэВ. $E_{max} = 18{,}2$ ГэВ, $E_{min} = 1{,}2$ ГэВ. Даже минимально возможная энергия мюона (1,2 ГэВ) много больше энергии покоя мюона (106 МэВ), так что ультрарелятивистское рассмотрение оправдано.

ВАРИАНТ Б

1Б. (Козлов) Внутренняя энергия одного моля газа, обусловленная взаимодействием молекул, есть ($n = N_A/V \simeq \mathrm{const}$)

$$\Delta U_{вз} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varphi(r_{ij}) \simeq N_A\frac{1}{2}\int\varphi(r)\,dN = N_A\frac{1}{2}\int\varphi(r)n\,dV = N_A n\frac{1}{2}\int\varphi(r)4\pi r^2\,dr = \frac{N_A^2}{V}2\pi\int\varphi(r)r^2\,dr.$$

Подставляя значение потенциала, получаем

$$\Delta U_{вз} = 2\pi\frac{N_A^2}{V}\int_d^\infty\left(\frac{F}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}\right)r^2\,dr = -\frac{2\pi}{3}\frac{N_A^2}{V}\left(\frac{B}{d^3} - \frac{A}{3d^9}\right) = -\frac{a}{V}.$$

Откуда находим

$$a = \frac{2\pi}{3}N_A^2\left(\frac{B}{d^3} - \frac{A}{3d^9}\right).$$

Следовательно,

$$T_{кр} = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8}{27k}\left(\frac{B}{d^6} - \frac{A}{3d^{12}}\right) = \frac{16}{81}\frac{B}{kd^6} \simeq 100\ K.$$

2Б. (Маношкин) *Добротность резонатора* $Q = 2\pi\frac{W}{PT}$, где энергия W, запасённая в резонаторе, вычисляется аналогично варианту А. В данной задаче $l = \lambda_z = 8$ см, и поэтому $P = 2\pi fW/Q \simeq 4\cdot 10^8$ Вт.

3Б. (Якута) Аналогично задаче варианта А с учётом $\dot{n} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\dot{p}}{kT}$ (СИ) получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha l\dot{p}}{2ckT}.$$

4Б. (С. Гуденко) В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - k_1}{k + k_1} = \frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x < 0$

$$\rho(x) = |Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx} + \frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2}{3}|A|^2\left(\frac{5}{3} + \cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{max}(x) = 16|A|^2/9$ в 16/9 раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x|_{max} = \lambda/2$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{min}(x) = 4|A|^2/9$ и составляет 4/9 от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m + 1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \qquad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x_{min}| = \lambda/4$.

5Б. (Цыганов) Учитывая законы сохранения зарядов, эта реакция выглядит так:

$$\nu_\mu + p \to \mu^- + W^+ + p.$$

Пороговая энергия нейтрино равна: $E_\nu = \dfrac{(m_p + m_W + m_\mu)^2 - m_p^2}{2m_p}$. Так как масса W (81 ГэВ) много больше масс протона и мюона, то $E_\nu \approx \dfrac{m_W^2}{2m_p} = 3500$ ГэВ.

ВАРИАНТ В

1В. (Цыганов) Уменьшение температуры плавления связано с увеличением доли поверхностных атомов при уменьшении объёма. Будем считать, что у этих атомов энергия связи в α раз меньше, чем в объёме. Учтём вклад поверхностных атомов в среднюю энергию связи. Пусть энергия связи внутренних атомов $E_0 = \beta kT_0$, среднее межатомное расстояние a. Если $E_{св}(R)$ — средняя энергия атомов шара радиуса R, то энергия плавления этого шара равна:

$$Q(R) = E_{св}(R)\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{a^3} = \frac{E_0}{a^3}\left(\frac{4\pi R^3}{3} - 4\pi R^2 a\right) + \alpha E_0\frac{4\pi R^2 a}{a^3}.$$

Отсюда

$$E_{св}(R) = \beta kT_R = E_0[1 - 3(1 - \alpha)a/R] = \beta kT_0[1 - 3(1 - \alpha)a/R],$$

и

$$T_R = T_0[1 - 3(1 - \alpha)a/R].$$

Тем самым

$$\frac{T_0 - T_R}{T_0} = \frac{3(1 - \alpha)a}{R} \quad \to \quad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

При $R_1 = 10$ нм $\Delta T_1 = 25$ K, и, следовательно, при $R_2 = 6$ нм $\Delta T_2 = 25\frac{10}{6} \approx 40$ K, т.е. $T_{пл}(R = 6\ \text{нм}) = 505 - 40 = 465$ K. Экспериментальное значение — 460 K.

2В. (Савров) Из решения задачи варианта А следует, что

$$E_{кр} = \sqrt{\frac{8W}{\varepsilon_0 a bl}} = \sqrt{\frac{4QP}{\pi\varepsilon_0 a blf}} \approx 3\cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3В. (Якута) Фаза принимаемой волны $\varphi = \omega_0 t - kl$, где l — оптическая длина пути. Частота принимаемого излучения $\omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\dot{l}$. За время Δt оптическая длина пути увеличивается на $\Delta l = (n - 1)v\Delta t\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $\dot{l} = (n - 1)v\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = (1 - n)\frac{v}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Второе решение. Представим, что в призме свет распространяется со скоростью c/n и принимается приёмником на границе призмы, движущимся вместе с границей со скоростью $V = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$, затем переизлучается этим устройством как движущимся источником в свободное пространство и принимается неподвижным приёмником. С учётом эффекта Доплера первый приёмник получает сигнал на частоте $\omega_1 = (1 - n\beta)\omega_0$, где $\beta = (V/c) \ll 1$. Второй приёмник (неподвижный) получает переизлучённый движущимся источником сигнал на частоте

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - \beta} = \frac{1 - n\beta}{1 - \beta}\omega_0 \approx [1 - (n - 1)\beta]\omega_0.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = -(n - 1)\beta = (1 - n)\dfrac{v}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

4В. (С. Гуденко) В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - k_1}{k + k_1} = -\frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x < 0$

$$\rho(x) = |A|^2|e^{ikx} + re^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx} - \frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2|A|^2}{3}\left(\frac{5}{3} - \cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{max}(x) = 16|A|^2/9$ в 16/9 раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m + 1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \quad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x_{max}| = (1/4)\lambda$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{min}(x) = 4|A|^2/9$ составляет 4/9 от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x_{min}| = \lambda/2$.

5В. (Петров, Цыганов) Так как адроны ультрарелятивистские, то их энергия $E = pc$, и тем самым импульс бозона Хиггса равен $p_H = p_1 - p_2 = (E_1 - E_2)/c$. Согласно закону сохранения энергии

$$2E_0 = E_1 + E_2 + \sqrt{m_H^2c^4 + p_H^2c^2}.$$

Из этих двух уравнений получаем $m_Hc^2 = 2\sqrt{(E_0 - E_1)(E_0 - E_2)} \simeq 126$ ГэВ.

Обсуждение результатов письменной работы будет проводиться перед устным экзаменом 22 января 2013 г. в 8:45 в Главной физической аудитории. По каждой задаче выставляются баллы 0, 1, 2 и сумма баллов соответствует следующим оценкам: отлично — 8–10, хорошо — 5–7, удовлетворительно — 3–4, неуд — 0–2.

2В. (Савров) Из решения задачи варианта А следует, что

$$E_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{8W}{\varepsilon_0 abl}} = \sqrt{\frac{4QP}{\pi\varepsilon_0 ablf}} \approx 3\cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3В. (Никулин) Фаза принимаемой волны $\varphi = \omega_0 t - kl$, где l — оптическая длина пути. Частота принимаемого излучения $\omega = \dot\varphi = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\dot l$. За время Δt оптическая длина пути увеличивается на $\Delta l = (n-1)v\Delta t\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $\dot l = (n-1)v\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = (1-n)\frac{v}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Второе решение. Представим, что в призме свет распространяется со скоростью c/n и принимается приёмником на границе призмы, движущимся вместе с границей со скоростью $V = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$, затем переизлучается этим устройством как движущимся источником в свободное пространство и принимается неподвижным приёмником. С учётом эффекта Доплера первый приёмник получает сигнал на частоте $\omega_1 = (1-n\beta)\omega_0$, где $\beta = (V/c) \ll 1$. Второй приёмник (неподвижный) получает переизлучённый движущимся источником сигнал на частоте

$$\omega = \frac{\omega_1}{1-\beta} = \frac{1-n\beta}{1-\beta}\omega_0 \approx [1-(n-1)\beta]\omega_0.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = -(n-1)\beta = (1-n)\dfrac{v}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

4В. (С. Гуденко) В области $x<0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x>0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E-U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x=0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k-k_1}{k+k_1} = -\frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x<0$

$$\rho(x) = |A|^2|e^{ikx} + re^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx} - \frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2|A|^2}{3}\left(\frac{5}{3} - \cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{\max}(x) = 16|A|^2/9$ в 16/9 раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m+1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \quad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x<0$, то подходит $m=-1$. Следовательно, $|x_{\max}| = (1/4)\lambda$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{\min}(x) = 4|A|^2/9$ составляет 4/9 от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x<0$, то подходит $m=-1$. Следовательно, $|x_{\min}| = \lambda/2$.

5В. (Петров, Цыпенюк) Так как адроны ультрарелятивистские, то их энергия $E = pc$, и тем самым импульс бозона Хиггса равен $p_H = p_1 - p_2 = (E_1 - E_2)/c$. Согласно закону сохранения энергии

$$2E_0 = E_1 + E_2 + \sqrt{m_H^2c^4 + p_H^2c^2}.$$

Из этих двух уравнений получаем $m_Hc^2 = 2\sqrt{(E_0-E_1)(E_0-E_2)} \simeq 126$ ГэВ.

Обсуждение результатов письменной работы будет проводиться перед устным экзаменом 22 января 2013 г. в 8:45 в Главной физической аудитории. По каждой задаче выставляются баллы 0, 1, 2 и сумма баллов соответствует следующим оценкам: отлично — 8–10, хорошо — 5–7, удовлетворительно — 3–4, неуд — 0–2.

3Б. (Никулин) Аналогично задаче варианта А с учётом $\dot{n} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\dot{p}}{kT}$ (СИ) получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha l\dot{p}}{2ckT}.$$

4Б. (С. Гуденко) В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - k_1}{k + k_1} = \frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x < 0$

$$\rho(x) = |Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx} + \frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2}{3}|A|^2\left(\frac{5}{3} + \cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{max}(x) = 16|A|^2/9$ в 16/9 раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x|_{max} = \lambda/2$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{min}(x) = 4|A|^2/9$ и составляет 4/9 от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m+1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \qquad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x_{min}| = \lambda/4$.

5Б. (Цыпенюк) Учитывая законы сохранения зарядов, эта реакция выглядит так:

$$\nu_\mu + p \to \mu^- + W^+ + p.$$

Пороговая энергия нейтрино равна: $E_\nu = \dfrac{(m_\mu + m_W + m_p)^2 - m_p^2}{2m_p}$. Так как масса W (81 ГэВ) много больше масс протона и мюона, то $E_\nu \simeq \dfrac{m_W^2}{2m_p} = 3500$ ГэВ.

ВАРИАНТ В

1В. (Цыпенюк) Уменьшение температуры плавления связано с увеличением доли поверхностных атомов при уменьшении объёма. Будем считать, что у этих атомов энергия связи в α раз меньше, чем в объёме. Учтём вклад поверхностных атомов в среднюю энергию связи. Пусть энергия связи внутренних атомов $E_0 = \beta kT_0$, среднее межатомное расстояние a. Если $E_{св}(R)$ — средняя энергия атомов шара радиуса R, то энергия плавления этого шара равна:

$$Q(R) = E_{св}(R)\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{a^3} = \frac{E_0}{a^3}\left(\frac{4\pi R^3}{3} - 4\pi R^2 a\right) + \alpha E_0\frac{4\pi R^2 a}{a^3}.$$

Отсюда

$$E_{св}(R) = \beta kT_R = E_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right] = \beta kT_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right],$$

а

$$T_R = T_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right].$$

Тем самым

$$\frac{T_0 - T_R}{T_0} = \frac{3(1-\alpha)a}{R} \quad \to \quad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

При $R_1 = 10$ нм $\Delta T_1 = 25$ K, а, следовательно, при $R_2 = 6$ нм $\Delta T_2 = 25\frac{10}{6} \simeq 40$ K, т.е. $T_{пл}(R = 6\text{ нм}) = 505 - 40 = 465$ K. Экспериментальное значение — 460 K.

Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\varphi}, \qquad \text{где} \quad \varphi = \pi/3.$$

Таким образом, $|A| = |B|$ и $B = Ae^{-2i\varphi}$, $\varphi = \pi/3$.

Плотность вероятности $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ при $x < 0$ равна

$$|Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = \left|A\left(e^{ikx} + e^{-2i\varphi}e^{-ikx}\right)\right|^2 = \left|Ae^{-i\varphi}\left(e^{ikx}e^{i\varphi} + e^{-ikx}e^{-i\varphi}\right)\right|^2 = 4|A|^2\cos^2(kx + \varphi).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{\max}(x) = 4|A|^2$ в 4 раза превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(kx + \varphi) = \pm 1$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = 0$, откуда $x_{\max} = -\lambda/6$, $l_{\max} = |x_{\max}| = \lambda/6$.

Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{\min}(x) = 0$ достигается при $\cos(kx + \varphi) = 0$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = -\pi/2$, откуда $x_{\min} = -5\lambda/12$, $l_{\min} = |x_{\min}| = 5\lambda/12$.

5А. (Петров, Струминский) Максимальная энергия мюона соответствует вылету мюона вдоль импульса боттомония, а минимальная — в обратном направлении. Законы сохранения выглядят так:

$$E = E_1 + E_2, \qquad p = p_1 - p_2.$$

Так как мюоны заведомо ультрарелятивистские, то для них $E = pc$, и получаем

$$E_{\max} = E_1 = \frac{E + cp}{2}, \qquad E_{\min} = \frac{E - cp}{2}.$$

Здесь полная энергия $E = Mc^2 + T = 19{,}46$ ГэВ, $pc = \sqrt{E^2 - M^2c^4} = 17$ ГэВ. $E_{\max} = 18{,}2$ ГэВ, $E_{\min} = 1{,}2$ ГэВ. Даже минимально возможная энергия мюона (1,2 ГэВ) много больше энергии покоя мюона (106 МэВ), так что ультрарелятивиситское рассмотрение оправдано.

ВАРИАНТ Б

1Б. (Козлов) Внутренняя энергия одного моля газа, обусловленная взаимодействием молекул, есть ($n = N_A/V \simeq \text{const}$)

$$\Delta U_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varphi(r_{ij}) \simeq N_A\frac{1}{2}\int\varphi(r)\,dN = N_A\frac{1}{2}\int\varphi(r)n\,dV = N_A n\frac{1}{2}\int\varphi(r)4\pi r^2\,dr = \frac{N_A^2}{V}2\pi\int\varphi(r)r^2\,dr.$$

Подставляя значение потенциала, получаем

$$\Delta U_{\text{пот}} = 2\pi\frac{N_A^2}{V}\int\limits_{\delta}^{\infty}\left(\frac{F}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}\right)r^2\,dr = -\frac{2\pi}{3}\frac{N_A^2}{V}\left(\frac{B}{\delta^3} - \frac{A}{3\delta^9}\right) = -\frac{a}{V}.$$

Откуда находим

$$a = \frac{2\pi}{3}N_A^2\left(\frac{B}{\delta^3} - \frac{A}{3\delta^9}\right).$$

Следовательно,

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8}{27k}\left(\frac{B}{\delta^6} - \frac{A}{3\delta^{12}}\right) = \frac{16}{81}\frac{B}{k\delta^6} \simeq 100\ K.$$

2Б. (Макошкин) Добротность резонатора $Q = 2\pi\frac{W}{PT}$, где энергия W, запасённая в резонаторе, вычисляется аналогично варианту А. В данной задаче $l = \lambda_y = 8$ см, и поэтому $P = 2\pi f W/Q \simeq 4\cdot 10^4$ Вт.

ВАРИАНТ А

1А. ([illegible]) Парциальные давления паров $P(t_0) = \varphi_0 P_н(t_0)$, $P(t) = \varphi P_н(t)$, с другой стороны

$$P(t_0)V = \frac{m_0}{\mu}RT_0, \qquad P(t)V = \frac{m}{\mu}RT.$$

Из этих систем получаем $\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{mT}{m_0T_0}\cdot\frac{P_н(t_0)}{P_н(t)}$. Согласно уравнению Клапейрона–Клаузиуса

$$P_н(t) = P_н(t_0)\exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right],$$

откуда

$$\varphi = \varphi_0\frac{mT}{m_0T_0}\exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right] = 0{,}86\ (86\%).$$

2А. ([illegible]) Для электромагнитных колебаний

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности металла должна обращаться в ноль. Это приводит в резонаторе размерами $a \times b \times l$ к квантованию компонент волнового числа $k_x = m\pi/a$, $k_y = p\pi/b$, $k_z = n\pi/l$.

Из условия задачи следует, что $n = 2$, так как вдоль l укладывается одна длина волны. Подставляя числа, получаем, что

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{4{,}20}{3}\right)^2 = 4{,}41 = 1{,}87m^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot 2^2 + 9{,}87\cdot p^2.$$

Отсюда следует, что $m = 1$, $p = 0$, а $l = 4$ см.

Пространственные компоненты поля, удовлетворяющие этим условиям, имеют вид

$$E_x = 0, \qquad E_y = E_0\sin(k_x x)\sin(k_z z), \qquad E_z = 0.$$

У нас $E_0 = E_{\max}$.

Усреднённая по времени энергия электромагнитного поля в резонаторе равна

$$W = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\varepsilon_0E^2}{2} + \frac{\mu_0H^2}{2}\right]dV = \frac{1}{2}\cdot 2\int\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV = \frac{\varepsilon_0E_m^2}{2}\cdot abl\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \approx 9\cdot 10^{-5}\ Дж.$$

Здесь 1/2 1/2 — результат интегрирования по координатам x и z. В стационарном режиме потери в резонаторе равны мощности генератора, поэтому добротность

$$Q = 2\pi\frac{W}{PT} = 2\pi\frac{Wf}{P} \approx 200.$$

3А. ([illegible]) Фаза принимаемого сигнала $\varphi = \omega t - kl = \omega t - \frac{\omega l}{c}$. Циклическая частота равна $\dot\varphi = \omega - \frac{\omega \dot l}{c}$, откуда $\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\dot l}{c}$. Так как при истинном эффекте Доплера $\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}$, для скорости v получаем $v = \frac{\delta\omega}{\omega}c = -\dot l$.

4А. (С. [illegible], [illegible]) В области $x < 0$ решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad где\ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В области $x > 0$ решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\psi = Ce^{-\varkappa x}, \qquad где\ \varkappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}.$$

Из условия $U_0 = 4E$ получаем $\varkappa = k\sqrt{3}$.