ГКЭ-2018

Задача 1. *Сможет ли астронавт, подпрыгнув, покинуть навсегда астероид* $M = 10^{16}$ кг *и* $R =$ 10 км*? На земле он может подпрыгнуть на 1 м*

Решение: Должна быть в начале прыжка v_{II}: $mv_{II}^2/2 = GmM/R$. Отсюда $v_{II} = \sqrt{2GM/R}$. На Земле: $mgh = mv^2/2 \;\Rightarrow\; v^2 = 2gh$. Должно быть: $gh > GM/R$. Подставим: $10 \cdot 1$ м^2/с^2 $>$ $6.67 \cdot 10^{-11}$ Н/кг$^2 \cdot 10^{16}$ кг $\cdot$ м$^2 = 66.7$ м^2/с^2 $\Rightarrow$ **не может**.

Задача 2. *Космический корабль вывели на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость необходимо сообщить кораблю, чтобы он смог преодолеть земное тяготение?*

Решение: I космическая: $ma = F_{\text{тяг}} \;\Rightarrow\; mv_I^2/R = GMm/R^2 \;\Rightarrow\; v_I = \sqrt{GM/R}$ II космическая: $mv_{II}^2/2 = GMm/R \;\Rightarrow\; v_{II} = \sqrt{2GM/R} \;\Rightarrow\; v_{II} = \sqrt{2}v_I$ $\Delta v = v_{II} - v_I = v_I(\sqrt{2}-1) = 7.9(1.4-1) = 3.16$

Задача 3. *Считая Землю однородным шаром радиуса* $R = 6400$ км *и плотностью* $\rho = 5,5$ г/см^3*, оцените гравитационное давление в центре Земли. Гравитационная постоянная* $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2

Решение: Давление в центре Земли равно весу земного вещества в цилиндре высотой, равной радиусу Земли $R = 6400$ км и площадью основания 1 м^2. Учитывая линейную зависимость ускорения свободного падения от расстояния до центра Земли, в итоге имеем: $P = \int\limits_0^R \rho g r dr/R = \rho g r R/2 \approx 1,7 \cdot 10^6$ атм

Решение: Представим, что земля - шар массой M и радиусом $R = 6400$ км. Ускорение свободного падения на расстоянии r от ядра: $g(r) = G \cdot \dfrac{M}{R^2} \cdot \dfrac{r}{R}$ Давление внешнего слоя на шар: $P(r) = \displaystyle\int_0^R \rho g(r) dr$

подставим g(r) : $P(r) = \displaystyle\int_0^R \rho G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \frac{r}{R} dr = \rho G \cdot \frac{M}{2R}$ (1), где $\rho = \dfrac{M}{4/3\pi R^3}$ подставим в (1):

$$P(r) = \rho^2 \cdot G \cdot \frac{2R^2}{3} \approx 1,7 \cdot 10^6 \text{ атм}$$

Задача 4. *В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардируется* $\alpha-$ частицами. ${}^{197}_{79}Au$. $E = 5$ Мэв. $R-?$

Решение: $\dfrac{Z_{Au} Z_\alpha e^2}{R} = E \;\Rightarrow\; R = \dfrac{2 \cdot 79 \cdot (4.8 \cdot 10^{-10})^2}{5 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} = 4.5 \cdot 10^{-12}$ см.

Задача 5. *Бильярдному шару массой* $m = 125$ г*, лежащему на шерховатой поверхности стола, сообщили в горизонтальном направлении начальную поступательную скорость* $v = 2$ м/с*. Найти кинетическую энергию шара к моменту установления качения без проскальзывания*

Решение: $m\dot{v} = -F_{\text{тр}} \Rightarrow \dot{v} = -F_{\text{тр}}/m$. Также $I_{\text{ц.м.}}\dot{\omega} = rF_{\text{тр}}, I_{\text{ц.м.}} = (2/5)mr^2 \Rightarrow (2/5)\dot{\omega}r = F_{\text{тр}}/m = -\dot{v}$. При движении без проскальзывания $v = \omega r$.
$\int\limits_0^t \dot{v} dt = v - v_0 = \int\limits_0^t (-2/5)\dot{\omega} r dt = -(2/5)\omega r - 0 = -(2/5)(v/r)r \Rightarrow (7/5)v = v_0, \omega = (5/7)(v_0/r)$. Кинетическая энергия $T = (I_O/2)\omega^2 = (I_{\text{ц.м.}} + mr^2)(1/2)(5/7)^2(v_0/r)^2 = (5/14)mv_0^2$ (точка O - точка соприкасновения шара со столом).

Задача 6. *Юла, раскрученная до скорости* $n = 20$ *об/сек, установлена на гладком столе...*

Решение: $\dfrac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$, $\vec{L} = I\vec{\omega}$, т.о. $\Omega \cdot (I \cdot \omega) \cdot \sin(\Theta) = m \cdot g \cdot a \cdot \sin(\Theta) \Rightarrow I = \dfrac{mga}{\Omega \cdot \omega}$, где $\Omega = 2\pi N; \omega = 2\pi n$

Задача 7. *Самолёт на скорости* $v = 300$ *км/ч делает поворот с* $R = 100$м *...*

Момент Инерции пропеллера: $I = J; n = 100$ *об/мин , Найти* M

Решение: $[\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$ - уравнение прецессии. $\Omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{300\text{км/ч}}{0,1\text{км}} = 3000\text{час}^{-1} = 0.83c^{-1}$.

$L = I\omega, \omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot 16.67\text{с}^{-1} = 104.7\text{с}^{-1} \Rightarrow M = \Omega L = 0.83 \cdot 7 \cdot 104.7 = 608\text{кг} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{c^2}$

Задача 8. *Однородный стержень массы* $m = 1$ кг *и длины* $l = 1$ м *подвешен за один из концов и совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Найти среднюю за период кинетическую энергию стержня* $\overline{K}$*, если максимальный угол отклонения от вертикали равен* $\varphi_0 = 10°$

Решение: $\overline{K} = \overline{\Pi} = \frac{1}{2}E_{\text{полн.}} = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_0)$

Задача 9. *С какой скоростью v должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы "взлететь" (потерять вес). Автобус преодолевает вершину холма с радиусом кривизны* $R = 42$*м. Скорость автобуса* $u = 72$ *км/ч. Человек находится в центре автобуса.*

Решение: $\dfrac{mu_0^2}{R} = mg$, где $u_0 = u_1 + u$ - скорость человека относительно холма, u_1 - искомая скорость человека.

Условие отрыва: $N = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{mu_0^2}{R} = mg \;\Rightarrow\; u_0 = \sqrt{gR} \;\Rightarrow\; u_1 = \sqrt{gR} - u = \sqrt{42 \cdot 9.8} - \dfrac{72}{3.6} = 0.3\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

Задача 10. *Какую работу должен совершить человек, чтобы пройти от переферии к центру карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью* $\omega = 1$ рад/с*? Радиус карусели* $R = 5$ м*, масса человека* $m = 60$ кг.

Решение:

$$ma = m\frac{(\omega r)^2}{r} = m\omega^2 r \;\Rightarrow\; a(r) = \omega^2 r$$

$$\delta A = m\omega^2 r dr \;\Rightarrow\; A = \int\limits_0^R m\omega^2 r dr = m\omega^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^R = m\omega^2 \frac{R^2}{2}$$

Задача 11. *Найти удлинение тонкого стержня* Δl*, подвешенного за один конец в поле тяжести, если скорость звука в нём равна* $c = 3 \cdot 103\frac{м}{с}$*. Начальная длина стержня* $l = 2$*м*

Решение: Пусть стержень имеет массу m и длину l(в нерастянутом состоянии). Рассмотрим участок его длины dx, находящийся на расстоянии x от нижнего(свободного) конца. На этот учасок действует растягивающее усилие, задаваемое весом участка стержня, находящегося ниже выделенного элемента. если площадь поперечного сечения равна S, то усилие равно

$$\sigma = (mg\frac{x}{l})\frac{1}{S} = \frac{mgx}{lS}$$

Вызванное этим усилием удлинение $\Delta(dx)$ рассматриваемого участка определяется законом Гука:

$$\frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{mgx}{lSE}$$

Отсюда находим полное удлинение:

$$\Delta l = \int_0^{\Delta l} \Delta(dx) = \int_0^{\Delta l} \frac{mgx}{IES}dx = \frac{mgl}{2ES}$$

Т.к. скорость звука $c^2 = \dfrac{E}{\rho} \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{l^2 g}{2c^2}$

Задача 12. *Найти энергию, запасённую в стальном кубике со стороной a = 1 см, сжатом равномерно со всех сторон давлением* $P = 100$атм*. Модуль Юнга* $E = 2 \cdot 10^{11}\text{Н/м}^2$ *, коэффициент Пуассона* $\mu = 0.3$

Решение: $W = wV = \frac{V}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\mu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_z\sigma_y+\sigma_x\sigma_z)) = \frac{V}{2E}\cdot 3(\sigma^2-2\mu\sigma^2) = \frac{V\sigma^2}{2E}(1-2\mu) = \frac{VP^2}{2E}(1-2\mu)$

Задача 13. *На столе стоит наполненный водой цилиндрический сосуд высотой 50 см. На какой высоте от дна сосуда следует сделать отверстие, чтобы струя из него попала на поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда*

Решение: Пусть x - высота, минимум которой мы ищем, h - высота сосуда. По формуле Торричелли: $V = \sqrt{2g(h-x)}$, $L = V\cdot t$, $x = gt^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2x/g} \Rightarrow L = \sqrt{2g(h-x)\cdot 2x/g} = \sqrt{4(h-x)x} \Rightarrow x_{max} = h/2 = 25$см

Задача 14. *Зазор толщиной* $h = 0.1$ мм *между двумя плоскими поверхностями заполнен маслом с вязкостью* $\eta = 10^{-1}$ Па·с. *Найти касательное напряжение, которое необходимо прикладывать к плоскостям для того, чтобы обеспечить их относительное движение со скоростью* $v = 10$ см/с

Решение: Касательное напряжение $\tau_x = \eta\dfrac{dV_x}{dz} = \eta\dfrac{\Delta V}{h} = 10^{-1}\cdot\dfrac{10\cdot 10^{-2}}{0.1\cdot 10^{-3}} = 100$ Па

Задача 15. *Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра* $d = 2$см *при расходе* $Q =$ 30 л/мин. *Вязкость холодной воды* $\eta = 1.5\cdot 10^{-3}$ Па·с

Решение:

$$Re = \frac{\rho V d}{\eta} = \frac{\rho Q d}{\eta S} = \frac{\rho Q d}{\eta\cdot\pi d^2/4} = \frac{4\rho Q}{\pi\eta d} = \frac{4\cdot 1000\cdot 30\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{60}}{\pi\cdot 1.5\cdot 10^{-3}\cdot 0.02} = 0.2\cdot 10^5$$

Задача 16. *Найти высоту поднятия жидкости между двумя плоскими параллельными стеклянными пластинами,расположенными на расстоянии* $h = 1$ мм. *Угол смачивания стекла водой* $\theta = 30°$, *коэффициент поверхностного натяжения на границе вода—воздух* $\sigma = 73\cdot 10 - 3$ Н/м.

Решение: Условие равновесия жидкости: $P_0 = P_0 - \dfrac{2\sigma}{R} + \rho g H \Rightarrow H = \dfrac{4\sigma\cos\theta}{rgh}$

Задача 17. *Определить энергию релятивистского электрона, если радиус кривизны его следа в камере Вильсона, помещённой в магнитное поле* $B = 10^5$ Гс, *составляет* 2*м*

Решение:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\quad F = \gamma m V^2/R = eVB/c \Rightarrow \gamma V = \frac{eBR}{mc}$$

$$p = \gamma m V = \frac{eBR}{c}$$

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = m^2c^4 + \frac{e^2B^2R^2}{c^2}c^2 = m^2c^4 + e^2B^2R^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4+e^2B^2R^2} = \sqrt{(0.511)^2\cdot 10^{12} + (4.8\cdot 10^{-10})^2\cdot 10^{10}\cdot 4\cdot 10^4} = 9.6\cdot 10^{-3}\text{ эрг} = 6\cdot 10^9\text{ эВ}$$

Задача 18. *Усокоренные протоны направляются на жидководородную мишень. Найти минимальную энергию протона, налетающего на неподвижный протон, чтобы стал возможным процесс рождения протон-антипротонной пары*

Решение: $p + p \to p + p + p + \overline{p}$

При минимальной энергии налетающего протона скорость всех 4 образовавшихся частиц в СЦМ будет равна 0. Релятивистский инвариант для 4 частиц (в системе $c = 1$) : $(\varepsilon + 2m_p)^2 - p^2 = inv = (4m_p)^2$, для налетающего протона : $(\varepsilon + m_p)^2 - p^2 = inv = m_p^2$. Из второго $p^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon m_p \Rightarrow \varepsilon^2 + 4m_p\varepsilon + 4m_p^2 - p^2 = 15m_p^2$, $4m_p\varepsilon - 2m_p\varepsilon = 12m_p^2 \Rightarrow \varepsilon = 6m_p$, в стандартной системе $\varepsilon = 6m_pc^2$.

Задача 19. *Релятивистская частица массы* m *прошла в лабораторной системе отсчёта путь* l *после чего распалась.Считая движение частицы равномерным, найти её кинетическую энергию. Время жизни в системе отсчёта частицы* τ_0

Решение: (ЛСО и ССО):$l = \Delta x = v\Delta t = v\gamma\Delta t' = c\tau_0\gamma\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\tau_0\sqrt{\gamma^2-1} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\left(\frac{l}{c\tau_0}\right)^2+1}$; $T = E - mc^2 = (\gamma-1)mc^2 = mc^2(\sqrt{\left(\frac{l}{c\tau_0}\right)^2+1}-1)$

Задача 20. *Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле, напряжённость которого равна... На каком расстоянии от начального положения кинетическая энергия электрона (в лабораторной системе) станет равна его энергии покоя?*

Решение: Работа эл. поля = приращению кин. энергии. $A = \Delta T, \Delta T = m_ec^2, A = eEl$, где l - перемещение. $l = (m_ec^2)/(eE) = 8\cdot10^{-14}$ Дж$/(1.6\cdot10^{-19}$ Кл $\cdot\, 10^6$ В/м$) = 0.5$ м

Задача 21. *С Какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы красный свет показался зеленым?*

Решение: Продольный эффект Доплера в случае приближения приемника к источнику

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \beta = \frac{-1+\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}$$

Примечание: $\lambda_{\text{кр}} \simeq 700$нм, $\lambda_{\text{з}} \simeq 530$нм

Задача 23. *При изобарическом расширении многоатомного идеального газа до конечного объёма 6л. его температура увеличилась в 1,5 раза. Найдите количество теплоты, полученное газом.*

Решение: $Q = \Delta U + A; \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 1.5;\ A = P(V_2 - V_1),\ (P = const);\ \Delta U = \frac{7}{2}\nu R\Delta T = \frac{7}{2}P(V_2 - V_1)$

Задача 24. *Один моль кислорода адиабатически сжимается, в результате чего температура возрасла с 20 до 500 градусов Цельсия. Найти приращение внутренний энергии и работу совершенную над газом.*

Решение: Для $O_2 : C_V = \frac{5}{2}R, C_P = \frac{7}{2}R \Rightarrow \Delta U = \nu C_V\Delta T = \frac{5}{2}\cdot 8.31\cdot 480 = 9970$ Дж $Q = 0 \Rightarrow A_{\text{внеш.}} = \Delta U$

Задача 25. *Найти полную энергию теплового движения молекул аммиака* NH_3*, находящихся в баллоне объёмом* 10 л *при давлении* 18 мм рт.ст. *Молекулы считать жёсткими*

Решение: $PV = \nu RT;\ C_V = 3\nu R \Rightarrow E = C_V\cdot T = 3PV = 11.7$ Дж

Примечание: молекула многоатомная, число степеней свободы - 6, $C_v = \frac{6}{2}\nu R = 3\nu R$

Задача 26. *Один килограмм ртути изотермически сжимают от 1 до 11 атм при температуре* $T = 300K$*. Найти работу, затраченную при сжатии, если изотермическая сжимаемость и плотность ртути в этих условиях не зависят от давления и равны соответственно* $\beta_T = 4\cdot10^{-6} атм^{-1}, \rho = 13.6 г/см^3$

Решение: $\delta A = -PdV = -P\frac{dV}{dP}dP = PV_0\beta dP = P\frac{m}{\rho}\beta dP \Rightarrow A = \frac{m}{\rho}\beta(P_2^2 - P_1^2)/2 = 1.76$ мДж

Задача 27. *Оценить температуру воздуха у носа ракеты, движущейсяя со скоростью, соответствующей числу Маха* $M = 0,5$*. Давление окружающего воздуха* $P_0 = 0,5 атм$*. Температура* $T_0 = 250K$*.*

Решение: Число Маха – скорость поделённая на скорость звука. $M = \frac{V}{V_z}$; $V_z = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7/2R}{5/2R} = \frac{7}{5}$ – показатель адиабаты, μ – молярная масса. Формула Бернули: $\frac{\mu V^2}{2} + C_pT = \frac{\mu V_0^2}{2} + C_pT_0$. Здесь $V_0 = 0$. Выразим температуру: $T = T_0 - \frac{1}{C_p}\frac{\mu V^2}{2}$. $C_p = \frac{7R}{2}$, тогда $T = T_0(1 - \frac{1}{5}\frac{V^2}{V_z^2}) =$

$T_0(1-\dfrac{M^2}{5}) = 250(1-\dfrac{0.25}{5}) = 237.5$К.

Задача 28. *Найти приращение энтропии при расширении 2г молекулярного водорода от объёма 1,5л до объёма 4,5л, если процесс расширения происходит изотермически.*

Решение: Рисунок: В координатах $T(S)$ прямогольник с постоянным T и S меняется от S_1 до S_2. $Q = T(S_2 - S_1) = T\Delta S$ $Q = A_г + \Delta U(=0) = \nu RT \ln\dfrac{V_2}{V_1} = T\Delta S$. $\Delta S = \nu R \ln\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{m}{\mu} R \ln\dfrac{V_2}{V_1} = R\ln 3 = 9,1\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$

Задача 29. *Вычислить приращение энтропии одного киломоля двухатомного идеального газа при нагревании от* $0^\circ\ C$ *до* $500^\circ\ C$*, если процесс нагревания происходил при постоянном давлении. Считать молекулы газа жёсткими.*

Решение: $\Delta S = \nu C_{\mu V}\ln\dfrac{T_2}{T_1} + \nu R\ln\dfrac{V_2}{V_1}$. Так как $P = const$, то $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$. Так же $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_P = \frac{7}{2}R$ Тогда $\Delta S = \nu C_{\mu P}\ln\dfrac{T_2}{T_1} = \nu\frac{7}{2}R\ln\dfrac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2}10^3 8,31\ln\frac{772}{273} = 30\cdot 10^3$Дж/К

Задача 30. *В теплоизолированный сосуд, содержащий 1 л воды при 300 К, положили кусок железа массой 0,1 кг, нагретый до 500 К. Определить суммарное изменение энтропии системы из воды и железа. Теплоёмкость воды и железа равны соответственно 4,18 и 0,45 Дж/(г·К)*

Решение: Найдём установившуюся температуру T: $c_v m_v(T - T_1) = c_F m_F(T - T_2)$

$T = \dfrac{c_v m_v T_1 - c_F m_F T_2}{c_v m_v - c_F m_F} = \dots = 330K \to \Delta S = c_v m_v \ln\dfrac{T}{T_1} + c_F m_F \ln\dfrac{T}{T_2} = \ldots = 378,4$Дж/К

Задача 31. *Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине содержится 10 г водорода, вторая половина откачана до высокого вакуума. Перегородку убирают и газ заполняет весь объём. Считая газ идеальным, найти изменение его энтропии.*

Решение: $Q = 0, A_г = 0 \to \Delta U = 0 \to T = const$. V_0 – начальный объём, $V_1 = 2V_0$ – конечный. $\Delta S = C_V\ln\dfrac{T_2}{T_1}(=0) + \nu R\ln\dfrac{V_1}{V_0} = \nu R\ln 2 = \dfrac{m}{\mu}R\ln 2 = 5R\ln 2 = 28,8$Дж/К

Задача 32. *Определить температуру кипения воды на вершине Эвереста, где атмосферное давление составляет 250 мм рт. ст. Теплоту парообразования воды считать независящей от температуры и равной* $\Lambda = 41$ *кДж/моль*

Решение: $P = 250$мм рт ст $= \dfrac{101000}{760}250 = 3,3\cdot 10^4$Па. $\dfrac{dP}{dT} = \dfrac{\Lambda}{T(V_п - V_ж(=0))}$; $PV_п = RT \to V_п = \dfrac{RT}{P} \to \dfrac{dP}{dT} = \dfrac{\Lambda P}{RT^2}$. $Ln\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{\Lambda}{R}(-\dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{T_0}) \to T = \dfrac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{R}{\Lambda}\ln\frac{P_0}{P}} = 344K = 71^\circ C$.

Задача 33. *Найти число ударов молекул, испытываемое в секунду пылинкой диаметром* $d = 10$ мкм *в воздухе при температуре* $T = 300$ К *и нормальном атмосферном давлении.*

Решение: $P = nKT, n = \dfrac{P}{KT}$. $j = \dfrac{nV}{4}$ – число ударов в ед времени о еденичную площадку. $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = jS$, $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$. $\dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{3}{2}KT \to f = \sqrt{\dfrac{3KT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$. $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{P}{KT}\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}\pi d^2 = \dots = 0,8\cdot 10^{18}$уд/с.

Задача 34. *Тепловые нейтроны (T = 300 K) помещены в однородное магнитное поле B = 105 Гс. Найти отношение числа нейтронов, магнитные моменты которых ориентированных по полю и против него.*

Решение: Спин электрона в единицах $\hbar$ равен 1/2. В магнитном поле B проекция спина на направление поля принимает значения $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Пусть заселенность уровней N_1 и N_2, разность их энергий - ΔE. $\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{\Delta E}{kT}}$. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = g m_s \mu_{я}$. Спин электрона в единицах $\hbar$ равен $\frac{1}{2}$. В магнитном поле B проекция спина на направление поля принимает значения $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Пусть заселенность уровней N_1 и N_2, разность их энергий - ΔE. $\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = g m_s \mu_я$, ядерный магнетон $\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_n c}$. $\Delta E = E_2 - E_1 = g\mu_я B\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\mu_я B$. $g \approx -3.8 \Rightarrow$ на верхнем уровне будут нейтроны со спином вдоль поля. $\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{|g|\mu_я B}{kT}} = e^{-\frac{3.8 \cdot 0.5 \cdot 10^{-23} \cdot 105}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \approx 0.62$ [k в СГС имеет порядок -16, тогда показатель мал и любые подобные соотношения будут ≈ 0, поэтому в расчете взята k из СИ (-23), $\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p c}$. $\Delta E = E_2 - E_1 = g\mu_я\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\mu_я$. $g \approx -3.8 \Rightarrow$ на верхнем уровне будут нейтроны со спином вдоль поля. $\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{|g|\mu_я}{kT}}$

Задача 35. *При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы O_2 равна энергии, необходимой для возбуждения ее на 1-ый колебательный уровень? Длина волны излучения, соответствующаяя этому переходу, равна $\lambda = 6,25$мкм.*

Решение: Для молекулы O_2 средняя энергия поступательного движения $E_{пост} = \frac{3}{2}kT$. Энергия на первом колебательном уровне - $E_1 = \hbar\omega = \frac{\hbar 2\pi c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$. $E_{пост} = E_1 => \frac{3}{2}kT = \frac{hc}{\lambda}$. Отсюда $T = \frac{2hc}{3k} = 1500K$

Задача 36. *При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы O_2 равна энергии, необходимой для возбуждения ее на 1-ый вращательный уровень? Межядерное расстояние в молекуле равно $r = 1.2A$.*

Решение: Для молекулы O_2 средняя энергия поступательного движения $E_{пост} = \frac{3}{2}kT$. Энергия вращения - $E_{вр1} = \frac{L}{2J} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2J}$. Для первого уровня $E_{вр1} = \frac{\hbar^2}{J}$, $J = \mu r^2$, где μ- приведенная масса.Для молекулы O_2 она равна $\frac{m_0 \cdot m_0}{m_0 + m_0} = \frac{m_0}{2}$. Тогда $E_{вр1} = \frac{2\hbar}{m_0 r^2} = E_{пост} = \frac{3}{2}kT$. Отсюда $T = \frac{4\hbar^2}{3km_0 r^2} = 2.8K$.

Задача 37. *Показатель адиабаты кислорода при $400°C$ равен $\gamma = 1,394$.Считая кислород идеальным газом, найти вклад колебаний в теплоёмкость $C_v^{кол}$в расчёте на одну молекулу. Степень диссоциации молекул считать пренебрежимо малой.*

Решение: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + k}{C_v} = 1 + \frac{k}{C_v}$, значит $C_v = k\frac{1}{\gamma - 1}$. $C_v = C_v^{пост} + C_v^{вращ} + C_v^{кол} = \frac{5}{2}k + C_v^{кол}$. Тогда $C_v^{кол} = C_v - \frac{5}{2}k = k\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{5}{2}k = k(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{5}{2})$. Следовательно вклад - $\frac{C_v^{кол}}{C_v} = \frac{k(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{5}{2})}{k\frac{1}{\gamma-1}} = 1 - \frac{5}{2}(\gamma - 1) = 0,015$

Задача 38. *В эксперименте Кавендиша по определению гравитационной постоянной использовался крутильный маятник с периодом колебаний $\tau = 15$мин и моментом инерции $J = 5$кг $\cdot$ м^2. Найти средний квадрат угла отклонения маятника $< \varphi^2 >$ от положении равновесия из-за тепловых флуктуаций при температуре $T = 300$ K.*

Решение: $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\frac{2\pi}{\tau}t + \alpha_0), \omega = \varphi'(t) = \varphi_0 \frac{2\pi}{\tau}\cos(\frac{2\pi}{\tau}t + \alpha_0). < E_{кин} >= \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J(\frac{2\pi}{\tau})^2 < \varphi^2 >}{2}$. Средняя энергия для одной степени свободы $< E >= \frac{kT}{2}$. Приравнивая, получаем $< \varphi^2 >= \frac{kT\tau^2}{4\pi^2 J} = 1,7 \cdot 10^{-17}$

Задача 39. *Найти среднеквадратичную флуктуацию числа частиц в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях.*

Решение: $\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle} = \sqrt{N} = \sqrt{nV} = \sqrt{\frac{P_0}{kT}V}$, где $P_0 = 10^5$Па, $T = 300K$.

Отсюда $\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle} = 0,5 \cdot 10^{10}$

Задача 40. *Оценить среднюю длину свободного пробега λ и частоту столкновений в единице объёма z молекул водорода при нормальных условиях.Межядерное расстояние $d = 0,74A$*

Решение: $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$, $\sigma = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2$, $n = \frac{P_0}{kT}$. Следовательно $\lambda = \frac{kT}{P_0\pi d^2}$, где $P_0 = 10^5$Па, $T = 300K$. Среднее время которое частица пролетает, не столкнувшись $\tau = \frac{\lambda}{v_{\text{ср}}}$, где $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ (из распределения Максвелла). Значит частота соударений в еденице объема z равна $\nu = \frac{N}{\tau} = \frac{nz}{\tau} = \frac{zP_0}{kT\tau}$

Задача 41. *Для протонов в галактических космических лучах оценить среднюю длину свободного пробега λ и частоту парных соударений в единице обёма z. Принять концентрацию протонов равной $n = 10^5\text{м}^{-3}$, скорость хаотического движения порядка скорости света $v = c$, протоны считать твёрдыми шариками радиуса $r_p = 10^{-13}$см.*

Решение: $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$, $\sigma = 4\pi r_p^2$. Следовательно $\lambda = \frac{1}{4\pi r_p^2 n}$. Среднее время которое частица пролетает, не столкнувшись $\tau = \frac{\lambda}{v_{\text{ср}}} = \frac{\lambda}{c}$. Значит частота соударений в еденице объема z равна $\nu = \frac{N}{\tau} = \frac{nz}{\tau} = nz\frac{c}{\lambda}$

Задача 42. *Коэффициент динамической вязкости азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}\text{Па} \cdot c$. Оценить коэффициент теплопроводности азота и газокинетический диаметр молекулы азота.*

Решение: $\eta = D \cdot \rho$, где D - коэффициент диффузии, ρ - плотность N_2. $\kappa = D \cdot C_V$ - коэффициент теплопроводности

$$\kappa = C_V D = C_V \eta/\rho = \frac{5/2 \cdot \nu}{(P\nu)/(RT)}\eta = \frac{5}{2} \cdot \frac{RT}{P}\eta$$

Задача 43. *Оценить количество тепла в расчёте на 1* м^2*, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет с расстоянием между стеклами $h = 23$мм, если разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta t = 50°C$. Коэффициент теплопроводности воздуха считать не зависящим от температуры и равным $k = 2,3 * 10^{-2}\frac{\text{Вт}}{\text{м}*K}$.*

Решение: $q = -k\frac{dT}{dX} = -k\frac{\Delta t}{h} = 0,05\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

Задача 44. *Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda = 10^{-5}$см.*

Решение: $< r^2 >= 6BkTt = 6Dt$, где $D = \frac{1}{3}\lambda v = \frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$$\tau = \frac{l^2}{6D} = \frac{l^2}{6\frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} = \frac{l^2}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = 103c$$

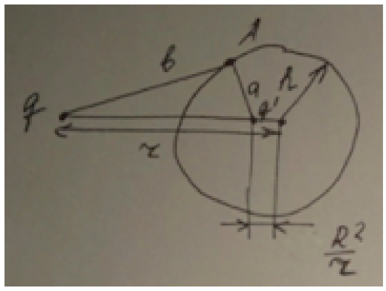
Задача 45. *Оценить коэффициент диффузии сильно разреженного азота по трубке диаметром 1 см при комнатной температуре. Считать, что разрежение таково, что длина пробега молекул ограничивается диаметром трубки (высокий вакуум).*

Решение: $d = 1\text{см}, T = 300K, \lambda \approx d$; $D = \frac{1}{3}\lambda < V >; < V >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \to D \approx \frac{1}{3}d\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \frac{1}{3}10^{-2}\sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 300}{\pi 2,8 \cdot 10^{-4}}} = 15,8$ м2/с.

Задача 46. *Найти силу притяжения точечного заряда q и изолированной проводящей сферы радиуса R, находящихся в вакууме на большом расстоянии $r >> R$ друг от друга.*

Решение: $q' = -\frac{R}{r}q$, потенциал в точке А: $\varphi_A = \frac{q}{b} + \frac{q'}{a} = 0$.

Тогда $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{q'}{q} = \dfrac{R}{r} = const$



$$F = \frac{qq'}{(r - \frac{R^2}{r})^2} = -\frac{q^2\frac{R^2}{r}}{(r^2 - R^2)}r^2 = -\frac{q^2Rr}{(r^2-R)^2}$$

Задача 47. *Найти силу взаимодействия точечного электрического диполя, имеющего момент p, с проводящей плоскостью. Диполь расположен параллельно плоскости на расстоянии a от неё*

Решение: Рисунок: вертикальная ось, справа вдоль неё вектор p, слева такой же p' направленный в другую сторону. $\vec{E} = \dfrac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}$; $\vec{F} = (-\vec{p}\nabla)\dfrac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} = (\vec{p}\nabla)\dfrac{\vec{p}r^2}{r^5} = (\vec{p}\nabla)\dfrac{\vec{p}}{r^3} = \vec{p}\dfrac{-\vec{p}}{r^4} = -\dfrac{3p^2}{(2a)^4}$

Задача 48. *Найти объёмную плотность ρ электрического заряда в атмосфере, если известно, что напряженность элек- трического поля у поверхности Земли равна $E_0 = 100\frac{\text{В}}{\text{м}}$, а на высоте $h = 1,5$км падает до $E_1 = 25\frac{\text{В}}{\text{м}}$. Считать заряд распределённым равномерно.*

Решение: Для сферы: $E_0 = \frac{Q_{\text{земли}}}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, $E' = (Q_{\text{земли}} + \rho V)/(4\pi\epsilon_0(R+h)^2)$, $V = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$

$E' = Q_{\text{земли}}/(4\pi\epsilon_0(R+h)^2) + \frac{\rho}{3\epsilon_0}((R+h)^3 - R^3)/(R+h)^2 = E_0 + \frac{\rho}{3\epsilon_0}(R+h-R^3/(R+h)^2) \approx E_0 + \frac{\rho}{3\epsilon_0}(R+h-R) = E_0 + h\rho/(3\epsilon_0)$

$E' - E_0 = h\rho/(3\epsilon_0) \Rightarrow \rho = 3\epsilon(E' - E_0)/h = -1.3 * 10^{-12}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$

Задача 49. *Найти диэлектрическую проницаемость газа с концентрацией $n = 3*10^{19}\text{см}^{-3}$, частицы которого можно считать проводящими шариками радиуса $r_0 = 10^7\text{см}$.*

Решение: $\vec{p} = r_0^3\vec{E}, \vec{P} = n\vec{p} = nr_0^3\vec{E}, \alpha = nr_0^3, \epsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi n r_0^3$

Задача 50. *Найти магнитный момент кольца радиусом $r = 1\text{см}$, вращающегося с угловой скоростью $\omega = 10\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ относительно перпендикулярной оси симметрии, если по нему равномерно распределен заряд $q = 1$ Кл.*

Решение: $\vec{\mathfrak{M}} = \frac{\mathcal{J}}{c}\vec{S},\ \mathcal{J} = \frac{dq}{dt} = q/T = (q\omega)/(2\pi), S = \pi r^2, \mathfrak{M} = (q\omega r^2)/(2c) = 0,5\frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$

Задача 51. *Найти максимальное значение магнитного поля на расстоянии $L = 1\text{м}$ от кругового витка радиусом $r = 1\text{см}$, по которому протекает ток $\mathcal{J} = 1\text{А}$.*

Решение: $\vec{B} = 3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r}/(r^5) - \mu/r^3, B_{max} = (2\mu)/(L^3) = (2\mathcal{J}\pi r^2)/(cL^3)$

Задача 52. *Постоянный магнит представляет собой длинный тонкий цилиндр радиуса r и длины l с однородной намагниченностью M, направленной вдоль его оси. Найти магнитное поле B на торце магнита.*

Решение: $dB_\tau = \frac{i_m}{c}d\Omega$ – из Сивухина, $\vec{i_m} = c\vec{M}$ - мощность токов намагничивания

$\vec{B_a} = \frac{i_m}{c}2\pi = 2\pi M, \vec{B_c} = 2\vec{B_a} = 4\pi M$, a - точка в основании цилиндра, b - точка в центре цилиндра

Задача 53. *Найти силу, действующую на небольшой сверхпроводящий шарик диаметром $d = 1$ мм, расположенный на расстоянии $R = 5$ см от прямого провода с током $I = 10A$*

Решение: Сверхпроподящий шарик представим магнитным диполем: $\mu = -\vec{B_0}\cdot R^3/2; F = (\vec{\mu}\vec{\nabla})B_0 = \vec{\mu}\frac{d}{dr}B_0(r)$

$$B_0 = \frac{2I}{cr} \;\Rightarrow\; \vec{F} = \vec{\mu}\frac{d}{dr}(\frac{2I}{cr}) = -\vec{\mu}\frac{2I}{cr^2} = \frac{2I}{cr}\frac{R^3}{2}\frac{2I}{cr^2} = \frac{2I^2R^3}{c^2d^3}(r \equiv d)$$

Задача 54. *В тонком поверхностном слое длинного цилиндрического плазменного столба радиуса $r = 1$ см протекает ток J (направление тока — по оси цилиндра). Определить величину J, необходимую для удержания плазмы в равновесии, если концентрация плазмы $n = 10^{16}$см$^{-3}$, а её температура $T = 10^6K$*

Решение: $dE = Fdr = dW_{magn} = d(B^2\cdot V/8\pi); F = d(B^2Sr/8\pi)/dr; P = F/S = d(B^2r/8\pi)/dr(1); 2\pi r = 4\pi J/c; B = 2J/(cr);$

$P_{\text{внеш}} = d(4J^2r/(c^2r^28\pi))/dr = J^2/(2\pi c^2r^2)$; $P_{\text{внутр}} = nkT$; Равновесие, $P_{\text{внутр}} = P_{\text{внеш}} \;\Rightarrow\; nkT =$

$J^2/(2\pi c^2 r^2) \;\Rightarrow\; J = cr\sqrt{2\pi nkT}$
$J = 8,8\cdot 10^{13}\sqrt{\text{см*эрг}}/c$

Задача 55. *Медное кольцо радиуса* $a = 10$ см *с сечением* $S = 1$ мм^2 *находится в перпендикулярном ему однородном магнитном поле, меняющемся по гармоническому закону с амплитудой* $B_0 = 103$ *Гс и частотой* $\nu = 50$ Гц. *Найти среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в кольце. Проводимость меди* $\lambda = 5,3\cdot 10^{17}$ c^{-1}.

Решение: $\Phi = BS$ создаёт электрическое поле $E_{\text{инд}}$ в проводнике. $\oint \vec{E_{\text{инд}}}\,\vec{dl} = \dfrac{-1}{c}\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = \dfrac{-S}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t}$; $E_{\text{инд}}2\pi a = \dfrac{-S}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} \to E = \dfrac{S}{2\pi ac}(B_0 sin(wt))' = \dfrac{SB_0 2\pi\nu}{2\pi ac}cos(2\pi\nu t)$; Закон Джоуля Ленца: $Q = (\vec{j}\vec{E}) = \lambda E^2 = \lambda\left(\dfrac{SB_0\nu}{ac}cos(2\pi\nu t)\right)^2$

Задача 56. *В центре соленоида с плотностью намотки n находится магнитный диполь, дипольный момент которого ориентирован вдоль оси соленоида. Пользуясь теоремой взаимности, найти поток магнитного поля диполя через витки соленоида.*

Решение: Заменим диполь на виток с током: $\mu = \dfrac{JS}{c} \to J = \dfrac{c\mu}{S}$. Этот виток создаёт $\Phi_{12} = L_{12}\dfrac{J}{c}$ в соленойде. Ток в соленойде J_1, тогда: $B = 4\pi n\dfrac{J_1}{c}$ – поле в нём. Оно создаёт $\Phi_{21} = BS = 4\pi n\dfrac{J_1 S}{c} = L_{21}\dfrac{J_1}{c}$ По теореме взаимности: $L_{21} = L_{12}$ при условии $J_1 = J \to \Phi_{12} = \Phi_{21} = \dfrac{4\Phi}{c}nJS = 4\Phi n\mu$.

Задача 57. *Какую мощность нужно подводить к контуру с параметрами:* $C = 1$ нФ$, L = 6$ мкГн$, R = 0.5$ Ом *для поддержания в нём незатухающих колебаний на резонансной частоте с амплитудой напряжения на конденсаторе* 10В*?*

Решение: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\pi\frac{W}{\Delta W}$; $W = \frac{CU_C^2}{2}$; $\Delta W_T = N\cdot T = N\cdot 2\pi\sqrt{LC}$
$N = \frac{\Delta W}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{2\pi W}{2\pi\sqrt{LC}Q} = \frac{CU_C^2}{2\sqrt{LC}Q} = \frac{U_C^2}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{CU_C^2}{2L}R$

Задача 58. *Параметры колебательного контура имеют следующие значения:* $C = 4$ мкФ$, L = 0,1$ мГн$, R = 1$ Ом. *Чему равна полуширина резонансной кривой контура?*

Решение: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega}{\Delta\omega}$
$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_0}{2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{2L} = \gamma = 5000\ c^{-1}$$
Это применимо, потому что $\omega_0 \gg \gamma$

Задача 59. *Найти силу светового давления, которую испытывает зачернённая пластинка при её освещении светом непрерывного лазера мощностью* 1 мВт

Решение: $F = \frac{dp}{dt} = N\hbar k = \frac{W}{\hbar\omega}\hbar k = W/c = 3\cdot 10^{-7}$ дин

Задача 60. *В опытах П.Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток со ставлял 6 Вт/см^2. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки*

Решение: $I = N\hbar\omega/\Delta t \;\Rightarrow\; N = I\Delta t/(\hbar\omega)$-кол-во фотонов, передающихся на единицу площади за Δt.
$p = SN\hbar\omega/c = SI\Delta t/(\hbar\omega) = I\Delta tS/c$
Зачернённые лепестки приобретают импульс $p \;\Rightarrow\; P_b = F/S = p/(S\Delta t) = I/c$;
Зеркальные лепестки приобретают импульс $2p \;\Rightarrow\; P_z = 2I/c$
$P_b = 2\cdot 10^{-4}$Па – на чёрных, $P_z = 2P_b = 4\cdot 10^{-4}$Па – на зеркальных

Задача 61. *В тонкой клиновидной пластинке в отражённом монохроматическом свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними тёмными полосами* $\Delta x = 5$*мм. Найти угол между гранями пластинки. Длина волны* $\lambda = 5800\ \mathring{A}$*, показатель преломления пластинки* $n = 1,5$.

Решение: α-угол наклона, h - высота пластинки (примерно одинакова)
$\Delta = 2hn - \lambda/2$(отр от более плотной среды); $x = hctg\alpha$; $\Delta = 2xtg\alpha n - \lambda/2 = (2m-1)\lambda/2 - min \Rightarrow x_{min} = mctg\alpha\lambda/(2n)$
$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda/(2n)ctg\alpha \Rightarrow ctg\alpha = \Delta x 2n/\lambda = 25862 \Rightarrow \alpha = 0,0022$

Задача 62. *Оценить максимальный номер интерференционной полосы* m_{max} *, которую можно наблюдать в интерференционной схеме Юнга, если в опыте используется квазимонохроматический источник с длиной волны* $\lambda = 500$ нм*, имеющий время когерентности* $\tau = 10^{-10}$*с*

Решение: $m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\Delta = c\tau = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{/}c\tau \Rightarrow m_{max} = \frac{c\tau}{\lambda} = 60000$

Задача 63. *На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии* d *между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой размер Солнца* $\psi = 10^{-2}$ рад

Решение: $d \le \rho_{\text{ког}} = \dfrac{\lambda}{\psi} = 5 \cdot 10^{-5}$м

Задача 64. *Круглое отверстие радиуса* $r = 1$ см *в непрозрачном экране освещается нормально падающей плоской волной с частотой* $\nu = 300$ ГГц*. Найти положения максимумов интенсивности на оси за отверстием.*

Решение: максимумы будут наблюдаться при открытии нечетного числа зон Френеля:
$r_n = \sqrt{\lambda b n} \Rightarrow b = \dfrac{r^2}{\lambda(2n+1)}, n = 0, 1, 2\ldots$

Задача 65. *Линза с фокусным расстоянием* $f = 50$ *см и диаметром* $D = 5$ *см освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны* $\lambda = 630$ *нм. Оценить отношение интенсивности в фокусе линзы к интенсивности падающей волны и размер фокального пятна.*

Решение: В фокусе линза распрямим спираль Фурье. Число зон: $m\lambda F = \dfrac{D^2}{4} \Rightarrow m = \dfrac{D^2}{4\lambda F}$.
$A_1 = \pi m A_0 \Rightarrow \dfrac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_0} = (\dfrac{A_1}{A_0})^2 = \dfrac{\pi^2 D^2}{16\lambda^2 F^2} = ...$ Размер пятна: $r = 1,22\dfrac{\lambda}{D}F$ -Эйри

Задача 66. *На фотографии центра Москвы с высоты 100 км хорошо видны Большой театр и скульптурная группа лошадей на нём. Оцените минимальный диаметр объектива фотоаппарата, если на фотоснимке различаются ноздри коней, расстояние между которыми равно 30 см. Атмосферными флуктуациями пренебречь.*

Решение: d = 30 см, L = 100 км. Критерий Рэлея: $\frac{d}{L} > 1.22\frac{\lambda}{D_{min}}$
$D_{min} > \frac{1.22\lambda L}{d} = 0.23m = 23$ см

Задача 67. *Вычислить наименьшее угловое расстояние между звёздами, которые можно различить в телескоп с диаметром объектива 25 см при наблюдении на длине волны 5000 ангстрем.*

Решение: Дифракционный предел разрешения телескопа $\psi = 1,22\dfrac{\lambda}{D} = 1,22\dfrac{5000 \cdot 10^{-10}}{25 \cdot 10^{-2}} = 2.44 \cdot 10^{-7}$ рад.

Задача 68. *Оценить, с какого расстояния ночью можно ещё увидеть раздельно (различить) свет* *от двух фар автомобиля (если расстояние между фарами 1 м).*

Решение: Рассматриваем глаз как телескоп, фары как звезды. Дифракционный предел разрешения телескопа $\psi = 1,22\dfrac{\lambda}{D}$, $\psi = \dfrac{d}{l}$ $\Rightarrow$ $l = \dfrac{dD}{1.22\lambda}$ Для оценки снизу будем считать, что фары светят красным светом ($\lambda \approx 700$ нм), диаметр зрачка глаза $D \approx 3$ мм. $l \approx \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1.22 \cdot 700 \cdot 10^{-9}} \approx 3,5$ км.

Задача 69. *На щель шириной 10 мкм нормально падает пучок монохроматического света длиной волны 6000 ангстрем. Под какими углами к первоначальному направлению наблюдаются максимумы первого, второго и третьего порядков?*

Решение: Интенсивность дифракционной картины при дифракции Фраунгофера на щели : $I = I_0 \left(\dfrac{sin(asin\theta)}{asin\theta}\right)^2$, $a = \dfrac{\pi b}{\lambda}$. Направление на максимумы : $asin\theta = \dfrac{3\pi}{2}(1), \dfrac{5\pi}{2}(2), \dfrac{7\pi}{2}(3)$.

$$\theta_1 \approx \frac{3\pi}{2}\frac{\lambda}{\pi b} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 0.09$$
$$\theta_2 \approx \frac{5\pi}{2}\frac{\lambda}{\pi b} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 0.15$$
$$\theta_3 \approx \frac{7\pi}{2}\frac{\lambda}{\pi b} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 0.21$$

Задача 70. *Определить разрешающую способность дифракционной решётки шириной $L = 2$ см в третьем порядке ($m = 3$), если постоянная решётки (период) равна $d = 5 \cdot 10^{-3}$ мм*

Решение: Разрешающая способность решетки $R = Nm = \dfrac{L}{d}m = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-6}} = 12000$

Задача 71. *Дифракционная решётка освещается непосредственно Солнцем (угловой размер 10^{-2} рад)... (самый полный вариант условия, что удалось найти)*

Решение: $R = Nm$, $m = 1$. $N = \dfrac{D}{d} = \dfrac{\rho}{d}$. $\rho = \dfrac{\lambda}{\psi}$. Пусть $\lambda \approx 550$ нм, $\rho = \dfrac{550}{10^{-2}} = 55$ мкм.

Задача 72. *Оценить добротность оптического резонатора, состоящего из двух параллельных плоских зеркал. Расстояние между зеркалами $L = 1$ м, коэффициент отражения по мощности $r = 0.99$*

Решение: Формула добротности для интерферометра Фабри-Перо: $Q = \dfrac{2\pi L}{\lambda(1 - r^2)}$, где для оценки возьмем $\lambda = 500$ нм

Претензия: вы уверены, что в знаменателе именно квадрат? Ведь r - это коэффициент пропускания по МОЩНОСТИ.

Задача 73. *Найти время τ распространения волнового пакета с несущей частотой $\nu = 400$ МГц на расстояние $h = 1$ км в ионосфере Земли, где концентрация электронов равна $N = 10^6$ см$^{-3}$.*

Решение: Используем: $v_{ср} = \dfrac{c}{n}$; $v_{ср} \cdot v_{гр} = c^2$ $\Rightarrow$ $\tau = \dfrac{h}{v_{гр}} = \dfrac{h}{cn}$. n для плазмы: $n^2 = \varepsilon = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где $\omega_p = \dfrac{4\pi Ne^2}{m_e}$ и $\omega = 2\pi\nu$

Задача 74. *Найти концентрацию свободных электронов в ионосфере, если для радиоволн с частотой 10 МГц её показатель преломления равен 0.9.*

Решение: $n^2 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где $\omega_p = \dfrac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ и $\omega = 2\pi\nu$ $\Rightarrow$ $n_e = \dfrac{\pi m_e(1 - n^2)\nu^2}{e^2}$

Задача 75. *При некотором угле падения угол преломления светового луча в жидкости равен 30°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отражённый от её поверхности луч максимально поляризован.*

Решение: $n = \operatorname{tg}\varphi_Б$, а $\varphi_Б + \psi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 76. *Найти наименьшую толщину d пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий на неё линейно поляризованный свет мог выходить поляризованным по кругу. Показатели преломления $n_e = 1.5533$, $n_0 = 1.5442$ Длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см*

Решение: $\Delta\varphi = k(n_e - n_0)h$, где $k = 2\pi/\lambda$. Из условия минимума линейно($\Delta\varphi = 0$) сделать по кругу($\Delta\varphi = \pi/2$) $\Rightarrow\; h = \dfrac{\lambda}{4(n_e - n_0)}$

Задача 77. *Уединённый цинковый шарик облучается ультрафиолетовым светом с $\lambda = 250$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода электрона для цинка равна 3,74 эВ.*

Решение: $T_e = \dfrac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}$; $A_{\text{ел.сил}} = qQ\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. Считая $r_2 >> r_1$, получим: $A_{\text{ел.сил}} = \dfrac{qQ}{r_1} = eU$

$A_{\text{ел.сил}} = T_e \;\Rightarrow\; U = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}\right)$

Задача 78. *Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти длину волны излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона*

Решение: $\Delta\lambda = \Lambda_c(1 - \cos\theta)$, $\hbar\omega_0 = mc^2 \;\Rightarrow\; \lambda_0 = \frac{h}{mc} = \Lambda_c \;\Rightarrow\; \lambda = 3\Lambda_c$

Задача 79. *Какой минимальной энергией должен обладать $\gamma-$*квант*, чтобы он смог родить электрон–позитронную пару? Возможен ли данный процесс в вакууме?*

Решение: $\gamma \to e^+ + e^-$, $E_{min} = 2m_ec^2 = 1.02$MeB; Может происходить только при наличии 3 тела, т.к. без его отсутсвия не выполняется одновременно ЗСИ и ЗСЭ.

Задача 80. *Свободное покоившееся ядро ^{191}Ir с энергией возбуждения $E = 129$*кэВ *перешло в основное состояние, испустив γ–*квант*. Вычислить относительное изменение частоты γ–*кванта*, возникающее в результате отдачи ядра.*

Решение: ЗСЭ и ЗСИ: $mc^2 + E = \sqrt{((mc^2)^2 + (pc)^2} + pc \;\Rightarrow\; m^2c^4 + E^2 + p^2c^2 - 2pc^2(mc^2 + E) + 2mc^2E = m^2c^4 + p^2c^2 \;\Rightarrow\; pc = \dfrac{E^2 + 2Emc^2}{2E + 2mc^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{E - pc}{E} = \dfrac{E}{2E + 2mc^2}$

Задача 81. *Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.*

Решение: $\dfrac{h}{mc} = \dfrac{h}{p} \;\Rightarrow\; p = mc \;\Rightarrow\; E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = 2m^2c^4 \;\Rightarrow\; T = E - mc = (\sqrt{2} - 1)mc^2$

Задача 82. *Какова должна быть кинетическая энергия электронов для электронной микроскопии структур с характерными размерами 10^{-8} см?*

Решение: $T \approx \dfrac{p^2}{2m}$, $\Delta p \Delta x \approx \hbar \;\Rightarrow\; T \approx \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$

Задача 83. *Исходя из соотношения неопределенностей, оцените минимальную энергию гармонического осциллятора*

Решение: $x = A\sin(\omega t); \Delta p\Delta x \sim \hbar; p = m\omega A\cos(\omega t) \Rightarrow A \cdot m\omega A \sim \hbar$

$E = \dfrac{kx^2}{2}; \omega^2 = \dfrac{k}{m}; \Rightarrow E \sim m\omega^2 \cdot \dfrac{\hbar}{m\omega} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\hbar\omega}{2}$

Задача 84. *По соотношению неопр., оцените по порядку величины энергию ионизации атома водорода*

Решение: Энергия e^- в атоме H: $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{e^2}{r}$; $p \sim \dfrac{h}{r}; \Rightarrow E \cong \dfrac{h^2}{2mr^2} - \dfrac{e^2}{r}$; Найдём min радиус. Из $\dfrac{\partial E}{\partial r} = 0 \Rightarrow \dfrac{h^2}{mr} = e^2; \Rightarrow r_{min} = \dfrac{h^2}{me^2}, E_{\text{ион}} = \dfrac{me^4}{2h^2}$

Задача 85.

Оценить радиус слабого взаимодействия, переносчиками которого являются промежуточные бозоны массой 80 ГэВ.

Решение: $\Delta E \Delta \tau \approx h \ \Rightarrow \ \Delta \tau = \dfrac{h}{\Delta E}$;

$R = c\Delta\tau = \dfrac{ch}{\Delta E} \approx \dfrac{hc}{mc^2} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \cdot 6.67 \cdot 10^{-34}}{80 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 0.16 \cdot 10^{-16}$м

Задача 86.

Частица массы m заключена в одномерном потенциальным ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти работу, которую надо затратить на сжатие ящика вдвое, если частица находится в основном состоянии.

Решение: Запишем уравнение Шредингера для трех областей (1,3 - вне ящика, слева и справа соответственно, 2 - внутри ящика). Для области 2:

$$\psi'' + \frac{2mE_1}{\hbar^2}\psi = 0, \qquad (1)$$

Для областей 1,3: $\psi \equiv 0$. Решим уравнение (1):

$$k^2 = \frac{2mE_1}{\hbar^2} \Rightarrow \psi'' + k^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = Asin(kx) + Bcos(kx)$$

Условия сшивки:

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, \\ \psi(l) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ sin(kl) = 0. \end{cases} \rightarrow kl = \pi n \rightarrow k = \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$$

Последнее равно связано с тем, что частица находится в основном состоянии.

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{2mE_1}{\hbar^2} \Rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$$

Если ящик сжать вдвое, то $E_1 \rightarrow E_2; l \rightarrow l/2$

$$E_2 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ml^2}, \text{ Тогда } A = E_2 - E_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\hbar^2\pi^2}{ml^2}$$

Задача 87.

Частица массы m заключена в одномерном потенциальным ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками. Оценить силу давления на стенки ящика частицы, находящейся в основном состоянии.

Решение: Энергия основного состояния:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}; (\text{ общая формула } E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}n^2, n = 1, 2, 3...)$$

Импульс:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2} \Rightarrow p = \frac{\hbar\pi}{l}$$

Скорость $V = \dfrac{p}{m} = \dfrac{\hbar\pi}{ml}$. Сила давления изменяет импульс на противоположный за время:

$$\Delta t \approx \frac{l}{V} \Rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2pV}{l} = \frac{2\hbar\pi}{l} \cdot \frac{\hbar\pi}{ml} \cdot \frac{2}{l} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ml^3}$$

Задача 90. *Вычислить первый потенциал возбуждения дважды ионизованного иона лития $^7Li^{2+}$*

и длину волны резонансной линии, соответствующей переходу с $n = 2$ на $n = 1$.

Решение: $E = \frac{z^2}{n^2}R_\infty$; $\phi_1 = z^2 R_\infty(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}) = \frac{3\cdot 9}{4}R_y = \frac{13,6\text{эВ}}{4}9\cdot 3 = 91,8\text{эВ}$; $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}E = \hbar\omega = \phi_1$; $\phi_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$; $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\phi_1} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{10}}{91,8\cdot 10^{-12}\cdot 1,6} = 130\ \mathring{A}$

Задача 91. *Определить возможные значения полного углового момента электрона и его проекции на выделенную ось в атоме водорода, находящемся в возбужденном состоянии с главным квантовым числом $n = 3$.*

Решение: $n = 3$; $l = 0,1,2$; $|\vec{l}|^2 = l(l+1)\hbar^2 = \hbar^2, 2\hbar^2, 6\hbar^2$; $l_z = \hbar m_e$; $m_e = 0, \pm 1, \pm 2$

Задача 92. *Вычислить энергию ионизации позитрония e^+e^-.*

Решение: e^+ и e^- вращаются вокруг центра масс. Найдем уровни энергии. Отличие позитрония от водорода в μ: $\mu_H = \frac{m_e M_p}{m_e + M_p} \approx m_e$; $\mu_{\text{позит}} = \frac{m_e m_{\text{позит}}}{m_e + m_{\text{позит}}} = \frac{m_e}{2}$ $\Rightarrow$ уровни энергии позитрона в 2 раза меньше чем E_H $\Rightarrow$ $E_{\text{позит}} = -\frac{m_e\cdot e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2\cdot\hbar^2\cdot n^2}$; $E_{\text{ион}} = \frac{m_e\cdot e^4}{4\cdot\hbar^2}$

Задача 93. *Атом водорода находится в 2p-состоянии. Определить возможные значения магнитного момента атома.*

Решение: $s = \frac{1}{2}$; $l = 1$; $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

$$g_{\text{л}} = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{4}{3},\ \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ m_j = g_{\text{л}}\cdot\mu_{\text{Б}}\cdot j = 2\mu_{\text{Б}},\ \frac{1}{3}\mu_{\text{Б}}$$

Задача 94. *Колебательный квант молекулы кислорода равен 0,2 эВ. Оценить амплитуду нулевых колебаний молекулы кислорода.*

Решение: Колебательный квант молекулы кислорода равен:

$E_{\text{кол}} = \hbar\omega \ \Rightarrow\ \omega = \frac{E_{\text{кол}}}{\hbar}$; $E_{\text{кол}} = <T> + <U> = 2<T> = mv^2 = m\omega^2 <r^2>$

$A = \sqrt{<r^2>} = \sqrt{\frac{E\text{кол}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{E\text{кол}}{m(\frac{E_{\text{кол}}}{\hbar})^2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{m\cdot E_{\text{кол}}}}$, $m = \mu = \frac{m_0}{2}$, m_0-масса атома кислорода

Задача 95. *Какова длина волны фотона, соответствующая переходу молекулы $H^{35}Cl$ из первого вращательного состояния в основное состояние? Расстояние между ядрами молекулы равно $1,3\ \mathring{A}$*

$E_{\text{вращ}} = \frac{L^2}{2\mathcal{J}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mathcal{J}}$; $E_1 = \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}}$, $E_0 = 0$

$\bigcirc - - - \bigcirc$

$m_H \ll m_{Cl}$

$\lambda = \frac{\omega}{c} = \frac{\Delta E}{\hbar c} = \frac{\hbar}{\mathcal{J}c}$, $\mathcal{J} = \mu d^2$,

Задача 96. *Найти момент инерции и расстояние между ядрами молекулы $H^{127}I$, если наименьшая частота во вращательном спектре этих молекул равна $2,45\cdot 10^{12}$ рад/с.*

$E_{\text{вращ}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2}$; $\Rightarrow$ $\mathcal{J} = \frac{\hbar}{\omega}(\sqrt{l(l+1)}) = \frac{\hbar}{\omega_{min}}(\sqrt{2})$

$\bigcirc - - - \bigcirc$

$m_H \ll m_I$

$\mathcal{J} = m_H d^2 \ \Rightarrow\ d^2 = \sqrt{2}\frac{\hbar}{\mu\omega_{min}}$, $\mu = m_H$, считаем, что H крутиться вокруг I

Задача 97. *Период полураспада полония-210 составляет $T = 140$ сут. При распаде полоний испускает α-частицы со средней кинетической энергией $E = 5,3$ МэВ. Насколько можно нагреть 1 грамм воды с помощью m= 1 мкг полония за $t = 1$ ч?*

Решение: Если энергия частиц греет воду $\Rightarrow$ $E = cm\Delta T = E_{He} \cdot N_{\text{частиц}}$.

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$; $dN = -\lambda N dt \ \Rightarrow\ N = N_0 e^{-\lambda t}$; $m_N \cdot 210 \cdot N_0 = m(P_0) \ \Rightarrow\ N_0 = \dfrac{m}{210 \cdot m_N}$;

$$\Delta T = \frac{1}{m_{\text{вода}}\text{C}} \cdot E_{He} \frac{m_{po}}{210 \cdot m_N}(1 - exp(\frac{-\ln 2}{T_{1/2}}t))$$

Задача 98. *В реакции синтеза ядер дейтерия и трития ${}_1^2D +_1^3 T \to \alpha + n$ выделяется энергия $Q = 17,8$ МэВ. Какова энергия, уносимая нейтроном?*

Решение: ${}_1^3H +_1^2 H \to_2^4 He +_0^1 n$; В системе Ц-М: $p_n = p_\alpha$, $E = \dfrac{p^2}{2m} \ \Rightarrow\ \dfrac{E_\alpha}{E_n} = \dfrac{m_n}{m_\alpha} = \dfrac{1}{4} \ \Rightarrow$

в рассчете на один нуклон $\dfrac{\Delta E}{5} = 3,56$Мэв -уносит ${}_2^4He \ \Rightarrow\ 3,56\cdot$ - уносит нейтрон.

Задача 99. *Сечение взаимодействия нейтрино с нейтроном $\sigma = 10^{-43} cm^2$. Какова вероятность поглотиться для нейтрино, двигающегося по диаметру в ядре Земли? Считать, что ядро состоит из железа ($\rho = 7,8\text{г}/cm^3, A = 56, Z = 26$), его радиус $R \approx 3000$ км.*

Решение:

Число нейтронов в ядре Fe: n=30. Число n в ядре: $N = (N_a \dfrac{\rho}{\mu} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3) \cdot 30 \approx 3 \cdot 10^{54}$.

Полное сечение: $\sigma^* = N\sigma = 3 \cdot 10^{11} cm^2$, Вероятность реакции: $P = \dfrac{\sigma^*}{S_{\text{пов}}} = \dfrac{\sigma^*}{4\pi R^2} = 0,26$

Задача 100. *При делении урана могут образоваться ядра–осколки ${}_{28}^{60}Ni$ и ${}_{54}^{132}Xe$. Оценить энергию, освобождающуюся при делении в результате электростатического отталкивания этих осколков.*

Решение:

${}_{92}^{238}U \to_{28}^{60} Ni +_{54}^{132} Xe$, E - энергия необх, чтобы развести на ∞, $\leftarrow \bigcirc\!\bigcirc \rightarrow$, R_1 и R_2 радиусы ядер,

$E = k\dfrac{Q_1 Q_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{Q^2 \cdot 28 \cdot 54}{10^{-13}}$ед сгс $= \dfrac{10^{-20} \cdot 20 \cdot 54 \cdot 20}{10^{-13}}$эрг $= 0,002$эрг $= 0,001$Тэв $= 1$Гэв

Задача 101. *Узкий пучок тепловых нейтронов ослабляется в $\alpha = 360$ раз после прохождения пластинки из ${}^{112}Cd$ толщиной $d = 0.5$ мм. Определить эффективное сечение взаимодействия нейтронов с ядрами. Плотность кадмия $\rho = 8.65$ г/см^3.*

Решение: $\frac{N - N_r}{N} = \frac{1}{360} \ \Rightarrow\ 1 - Y = \frac{1}{360} \ \Rightarrow\ Y = \frac{359}{360}$ – вероятность реакции

$V = S \cdot \alpha \ \Rightarrow\ m(V) = S\alpha\rho = N m_{\text{част}} \ \Rightarrow\ \frac{N_{\text{част}}}{S} = \frac{dP}{\mu} N_A,\ \frac{N}{S} S\sigma = \frac{359}{360} S \ \Rightarrow\ \sigma = \frac{359}{360}\frac{\mu}{N_A}\rho d$

Задача 102. *Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно чёрного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?*

Решение: Закон Вина и Закон Стефана-Больцмана:

$$\lambda_{max} = \frac{0,52}{T} = \begin{cases} 1\text{мкм},\ (T_2) \\ 2\text{мкм},\ (T_1) \end{cases} \Rightarrow\ 2T_1 = T_2,\ \mathcal{J} = \sigma T^4 \ \Rightarrow\ \frac{\mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = 16 - \text{выросла в 16 раз}$$

Задача 103. *В какой области спектра излучения абсолютно чёрного тела, имеющего температуру 300 K, интенсивность индуцированного излучения превосходит интенсивность спонтанного?*

Решение:

$$\frac{w_{\text{инду}}}{w_{\text{спонт}}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi\omega}{k_b T}} - 1} > 1 \ \Rightarrow\ \omega \geqslant \frac{k_b T \ln 2}{\hbar}$$

Задача 104. *При какой температуре абсолютно чёрного тела вероятность индуцированного излучения на длине волны* $\lambda_r = 0.55$ *мкм превосходит вероятность спонтанного излучения?*

Решение: Распределение Бозе-Эйнштейна (или Планка)

$$\frac{w_{\text{инду}}}{w_{\text{спонт}}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi\omega}{k_b T}} - 1} > 1 \ \Rightarrow \ T > \frac{hc}{k_b \lambda \ln 2} \approx 3.8 \cdot 10^4 \ K$$

Задача 105. *Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна* $1.3 \cdot 10^7$ K

Решение: 1. Считаем что излучение в центре Солнца является чернотелым: $P = \dfrac{4\sigma}{3c}T^4$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{В}}{m^2 \cdot K^4}$ – Константа Стефана-Больцмана. $P = \dots = 5.4 \cdot 10^{12}$ Па $= 5.4 \cdot 10^7$ атм

Решение: 2. Закон Стефана-Больцмана: $\mathcal{J} = \sigma T^4$.

Полная излучаемая инергия: $E = \mathcal{J} 4\pi R_c^2$, $P = \rho_w = \dfrac{\mathcal{J} 4\pi R_c^2}{\frac{4}{3}\pi R_c^3} = \dfrac{3\mathcal{J}}{R_c} = \dfrac{3}{R_c}\sigma T^4$