Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

III курс *15 января 2013 года*

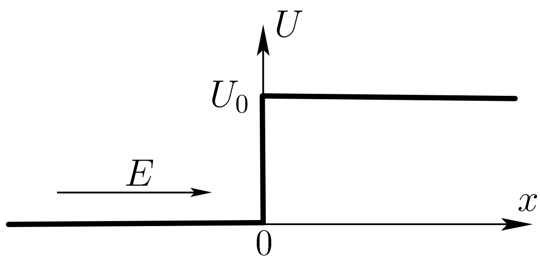
ВАРИАНТ А

1А. В воздухе главной физической аудитории при температуре $t_0 = 18$ °C и относительной влажности $\varphi = 90\%$ содержится в виде паров $m_0 = 7$ кг воды. Какова будет относительная влажность воздуха в этой аудитории при температуре $t = 30$ °C, если содержание паров воды в ней составляет $m = 10$ кг. Удельную теплоту испарения воды считать постоянной и в этих условиях равной $\lambda = 2420$ кДж/кг.

2А. Генератором с частотой $f = 10$ ГГц возбуждают стационарные колебания в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times l$, где $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. Медленное увеличение мощности генератора до значения $P = 28$ кВт приводит к пробою воздуха в двух точках, расположенных на одинаковых расстояниях от торцов. Определите добротность резонатора, считая, что пробой воздуха наступает при напряжённости $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см.

3А. При постоянном расстоянии l между удалённым источником и приёмником электромагнитных волн в результате внешнего воздействия (например, вспышки космического излучения) меняется со временем со скоростью $\dot{n}$ показатель преломления среды. Найти вызванное этим относительное смещение $\Delta\omega/\omega$ частоты регистрируемого приёмником сигнала. Какой скорости v источника найденное смещение может быть по ошибке приписано?

4А. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $E = U_0/4$. На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружения частицы будет максимальна, и на каком — минимальна?



5А. Найти максимальную и минимальную энергии мюонов, образующихся при распаде боттомония ($\Upsilon \to \mu^+ + \mu^-$), движущегося с кинетической энергией $T = 10$ ГэВ. Масса боттомония $M = 9{,}46$ ГэВ/c^2.

Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

III курс *15 января 2013 года*

ВАРИАНТ Б

1Б. Потенциал парного межмолекулярного взаимодействия в благородных газах, в модели твёрдых сфер, можно описать следующим образом

$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty, & r < \delta, \\ \dfrac{A}{r^{12}} - \dfrac{B}{r^6}, & r \geqslant \delta, \end{cases}$$

где A, B — константы потенциала, диаметр молекулы δ связан с параметром b в уравнении Ван-дер-Ваальса соотношением: $b = \frac{2\pi}{3} N_{\text{А}} \delta^3$, ($N_{\text{А}}$ — число Авогадро). Оценить величину критической температуры аргона, полагая

$$\frac{A}{k\delta^{12}} = \frac{B}{k\delta^6} = 500\ K,$$

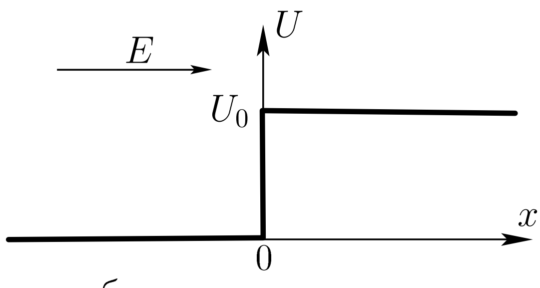
где k — постоянная Больцмана,

Указание: Суммирование по частицам можно заменить интегрированием.

2Б. Генератором с частотой $f = 7{,}5$ ГГц возбуждают стационарные колебания в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times l$, где $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. Медленное увеличение мощности генератора приводит к пробою воздуха в двух точках, расположенных на одинаковых расстояниях от торцов. Определите, при какой мощности генератора это произошло, считая, что пробой воздуха наступает при напряжённости $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см, а добротность резонатора $Q = 200$.

3Б. Электромагнитное излучение проходит через газохранилище, заполняемое газом, давление которого растёт со временем с постоянной скоростью $\dot{P}$ при постоянной температуре T. Найти вызванное этим относительное смещение $\Delta\omega/\omega$ частоты сигнала, регистрируемого приёмником на расстоянии l от источника излучения. Поляризуемость молекул газа принять равной α.

4Б. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высоты $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $E = 4U_0/3$. На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и каком — минимальна?



5Б. Мюонное нейтрино, попав в жидководородную камеру, рождает промежуточный бозон W^+ ($m_W = 81$ ГэВ/c^2). Найти минимальную энергию ν_μ.

Государственный экзамен по физике

1	2	3	4	5	Σ

III курс

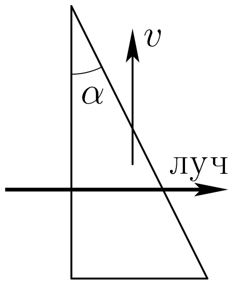
15 января 2013 года

ВАРИАНТ В

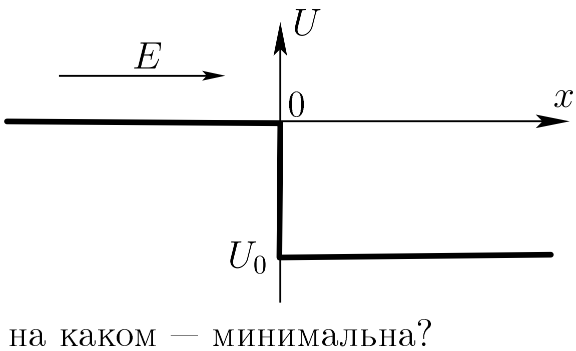
1В. Температура плавления олова $T_0 = 505$ К. Однако у оловянных наночастиц температура плавления изменяется. Так у частиц радиусом $R_1 = 10$ нм температура плавления равна $T_1 = 480$ К. Оценить, какова будет температура плавления у частиц радиусом $R_1 = 6$ нм. Считать, что температура плавления определяется средней энергией связи на один атом.

2В. Генератором с частотой $f = 12$ ГГц возбуждают стационарные колебания в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times l$, где $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. Медленное увеличение мощности генератора до значения $P = 26$ кВт приводит к пробою газа в двух точках, расположенных на одинаковых расстояниях от торцов. Найдите напряжённость пробоя $E_{\text{пр}}$, если добротность резонатора $Q = 200$.

3В. Прямоугольная призма из прозрачного материала с показателем преломления n движется вверх с нерелятивистской скоростью v. Призма пересекает горизонтальный лазерный луч. Определить относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ излучения, принимаемого неподвижным приёмником, расположенным на пути лазерного луча. Угловым смещением луча, вышедшего из призмы, пренебречь.



4В. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высоты $U_0 < 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $E = |U_0|/3$. На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?



5В. В июле 2012 г. было объявлено, что в ЦЕРНе в экспериментах на встречных протон-протонных пучках с энергиями $E_0 = 200$ ГэВ обнаружена частица, похожая по свойствам на бозон Хиггса, предсказанный ещё в 1964 г. Было зарегистрировано рождение новой частицы и двух антипараллельных ультрарелятивистских адронных струй с энергиями $E_1 = 160$ ГэВ и $E_2 = 100$ ГэВ. Оценить по этим данным массу обнаруженной частицы.

ВАРИАНТ А

1А. `(Овчинкин)` Парциальные давления паров $P(t_0) = \varphi_0 P_{\text{н}}(t_0)$, $P(t) = \varphi P_{\text{н}}(t)$, с другой стороны

$$P(t_0)V = \frac{m_0}{\mu}RT_0, \qquad P(t)V = \frac{m}{\mu}RT.$$

Из этих систем получаем $\dfrac{\varphi}{\varphi_0} = \dfrac{mT}{m_0T_0} \cdot \dfrac{P_{\text{н}}(t_0)}{P_{\text{н}}(t)}$. Согласно уравнению Клапейрона—Клаузиуса

$$P_{\text{н}}(t) = P_{\text{н}}(t_0) \exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right],$$

откуда

$$\varphi = \varphi_0 \frac{mT}{m_0T_0} \exp\left[\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] \simeq 0{,}66\ (66\%).$$

2А. `(Маношкин)` Для электромагнитных колебаний

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности металла должна обращаться в ноль. Это приводит в резонаторе размерами $a \times b \times l$ к квантованию компонент волнового числа $k_x = m\pi/a$, $k_y = p\pi/b$, $k_z = n\pi/l$.

Из условия задачи следует, что $n = 2$, так как вдоль l укладывается одна длина волны. Подставляя числа, получаем, что

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\frac{6{,}28}{3}\right)^2 = 4{,}41 = 1{,}87m^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot 2^2 + 9{,}67 \cdot p^2.$$

Отсюда следует, что $m = 1$, $p = 0$, а $l = 4$ см.

Пространственные компоненты поля, удовлетворяющие этим условиям, имеют вид:

$$E_x = 0, \qquad E_y = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_z z), \qquad E_z = 0,$$

У нас $E_0 = E_{\text{пр}}$.

Усреднённая по времени энергия электромагнитного поля в резонаторе равна

$$W = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right]dV = \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV = \frac{\varepsilon_0 E_{\text{пр}}^2}{2}\cdot abl \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \approx 9 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Здесь $1/2 \cdot 1/2$ — результат интегрирования по координатам x и z. В стационарном режиме потери в резонаторе равны мощности генератора, поэтому добротность

$$Q = 2\pi\frac{W}{PT} = 2\pi\frac{Wf}{P} \approx 200.$$

3А. `(Никулин)` Фаза принимаемого сигнала $\varphi = \omega t - kl = \omega t - \frac{\omega n l}{c}$. Циклическая частота равна $\dot\varphi = \omega - \frac{\omega \dot n l}{c}$, откуда $\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\dot n l}{c}$. Так как при истинном эффекте Доплера $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}$, для скорости v получаем: $v = \frac{\Delta\omega}{\omega}c = -\dot n l$.

4А. `(С. Гуденко, Раевский)` В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \text{где} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi = Ce^{-\varkappa x}, \qquad \text{где} \quad \varkappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}.$$

Из условия $U_0 = 4E$ получаем $\varkappa = k\sqrt{3}$.

Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\varphi}, \qquad \text{где} \quad \varphi = \pi/3.$$

Таким образом, $|A| = |B|$ и $B = Ae^{-2i\varphi}$, $\varphi = \pi/3$.

Плотность вероятности $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ при $x < 0$ равна

$$|Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = \left|A\left(e^{ikx} + e^{-2i\varphi}e^{-ikx}\right)\right|^2 = \left|Ae^{-i\varphi}\left(e^{ikx}e^{i\varphi} + e^{-ikx}e^{-i\varphi}\right)\right|^2 = 4|A|^2\cos^2(kx + \varphi).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{\max}(x) = 4|A|^2$ в 4 раза превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(kx + \varphi) = \pm 1$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = 0$, откуда $x_{\max} = -\lambda/6$, $l_{\max} = |x_{\max}| = \lambda/6$.

Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{\min}(x) = 0$ достигается при $\cos(kx + \varphi) = 0$. Наименьшему расстоянию соответствует $kx + \varphi = -\pi/2$, откуда $x_{\min} = -5\lambda/12$, $l_{\min} = |x_{\min}| = 5\lambda/12$.

5А. (Петров, Струминский) Максимальная энергия мюона соответствует вылету мюона вдоль импульса боттомония, а минимальная — в обратном направлении. Законы сохранения выглядят так:

$$E = E_1 + E_2, \qquad p = p_1 - p_2.$$

Так как мюоны заведомо ультрарелятивистские, то для них $E = pc$, и получаем

$$E_{\max} = E_1 = \frac{E + cp}{2}, \qquad E_{\min} = \frac{E - cp}{2}.$$

Здесь полная энергия $E = Mc^2 + T = 19{,}46$ ГэВ, $pc = \sqrt{E^2 - M^2c^4} = 17$ ГэВ. $E_{\max} = 18{,}2$ ГэВ, $E_{\min} = 1{,}2$ ГэВ. Даже минимально возможная энергия мюона (1,2 ГэВ) много больше энергии покоя мюона (106 МэВ), так что ультрарелятивиситское рассмотрение оправдано.

ВАРИАНТ Б

1Б. (Козлов) Внутренняя энергия одного моля газа, обусловленная взаимодействием молекул, есть ($n = N_{\text{А}}/V \simeq \text{const}$)

$$\Delta U_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varphi(r_{ij}) \simeq N_{\text{А}}\frac{1}{2}\int\varphi(r)\,dN = N_{\text{А}}\frac{1}{2}\int\varphi(r)n\,dV = N_{\text{А}}n\frac{1}{2}\int\varphi(r)4\pi r^2\,dr = \frac{N_{\text{А}}^2}{V}2\pi\int\varphi(r)r^2\,dr.$$

Подставляя значение потенциала, получаем

$$\Delta U_{\text{пот}} = 2\pi\frac{N_{\text{А}}^2}{V}\int\limits_{\delta}^{\infty}\left(\frac{F}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}\right)r^2\,dr = -\frac{2\pi}{3}\frac{N_{\text{А}}^2}{V}\left(\frac{B}{\delta^3} - \frac{A}{3\delta^9}\right) = -\frac{a}{V}.$$

Откуда находим

$$a = \frac{2\pi}{3}N_{\text{А}}^2\left(\frac{B}{\delta^3} - \frac{A}{3\delta^9}\right).$$

Следовательно,

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8}{27k}\left(\frac{B}{\delta^6} - \frac{A}{3\delta^{12}}\right) = \frac{16}{81}\frac{B}{k\delta^6} \simeq 100\ K.$$

2Б. (Маношкин) Добротность резонатора $Q = 2\pi\frac{W}{PT}$, где энергия W, запасённая в резонаторе, вычисляется аналогично варианту А. В данной задаче $l = \lambda_y = 8$ см, и поэтому $P = 2\pi fW/Q \simeq 4\cdot 10^4$ Вт.

3Б. (Никулин) Аналогично задаче варианта А с учётом $\dot{n} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\dot{P}}{kT}$ (СИ) получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha l\dot{p}}{2ckT}.$$

4Б. (С. Гуденко) В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x > 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x = 0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - k_1}{k + k_1} = \frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x < 0$

$$\rho(x) = |Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx} + \frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2}{3}|A|^2\left(\frac{5}{3} + \cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{\max}(x) = 16|A|^2/9$ в $16/9$ раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x|_{\max} = \lambda/2$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{\min}(x) = 4|A|^2/9$ и составляет $4/9$ от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m+1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \qquad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x < 0$, то подходит $m = -1$. Следовательно, $|x_{\min}| = \lambda/4$.

5Б. (Ципенюк) Учитывая законы сохранения зарядов, эта реакция выглядит так:

$$\nu_\mu + p \to \mu^- + W^+ + p.$$

Пороговая энергия нейтрино равна: $E_\nu = \dfrac{(m_\mu + m_W + m_p)^2 - m_p^2}{2m_p}$. Так как масса W (81 ГэВ) много больше масс протона и мюона, то $E_\nu \simeq \dfrac{m_W^2}{2m_p} = 3500$ ГэВ.

ВАРИАНТ В

1В. (Ципенюк) Уменьшение температуры плавления связано с увеличением доли поверхностных атомов при уменьшении объёма. Будем считать, что у этих атомов энергия связи в α раз меньше, чем в объёме. Учтём вклад поверхностных атомов в среднюю энергию связи. Пусть энергия связи внутренних атомов $E_0 = \beta kT_0$, среднее межатомное расстояние a. Если $E_{\text{св}}(R)$ — средняя энергия атомов шара радиуса R, то энергия плавления этого шара равна:

$$Q(R) = E_{\text{св}}(R)\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{a^3} = \frac{E_0}{a^3}\left(\frac{4\pi R^3}{3} - 4\pi R^2 a\right) + \alpha E_0\frac{4\pi R^2 a}{a^3}.$$

Отсюда

$$E_{\text{св}}(R) = \beta kT_R = E_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right] = \beta kT_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right],$$

а

$$T_R = T_0\left[1 - 3(1-\alpha)a/R\right].$$

Тем самым

$$\frac{T_0 - T_R}{T_0} = \frac{3(1-\alpha)a}{R} \quad \to \quad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

При $R_1 = 10$ нм $\Delta T_1 = 25$ К, а, следовательно, при $R_2 = 6$ нм $\Delta T_2 = 25\frac{10}{6} \simeq 40$ К, т.е. $T_{\text{пл}}(R = 6 \text{ нм}) = 505 - 40 = 465$ К. Экспериментальное значение — 460 К.

2B. (Савров) Из решения задачи варианта А следует, что

$$E_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{8W}{\varepsilon_0 abl}} = \sqrt{\frac{4QP}{\pi\varepsilon_0 ablf}} \approx 3\cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3B. (Никулин) Фаза принимаемой волны $\varphi = \omega_0 t - kl$, где l — оптическая длина пути. Частота принимаемого излучения $\omega = \dot\varphi = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\dot l$. За время Δt оптическая длина пути увеличивается на $\Delta l = (n-1)v\Delta t\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\dot l = (n-1)v\operatorname{tg}\alpha$ и $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = (1-n)\frac{v}{c}\operatorname{tg}\alpha$.

Второе решение. Представим, что в призме свет распространяется со скоростью c/n и принимается приёмником на границе призмы, движущимся вместе с границей со скоростью $V = v\operatorname{tg}\alpha$, затем переизлучается этим устройством как движущимся источником в свободное пространство и принимается неподвижным приёмником. С учётом эффекта Доплера первый приёмник получает сигнал на частоте $\omega_1 = (1-n\beta)\omega_0$, где $\beta = (V/c) \ll 1$. Второй приёмник (неподвижный) получает переизлучённый движущимся источником сигнал на частоте

$$\omega = \frac{\omega_1}{1-\beta} = \frac{1-n\beta}{1-\beta}\omega_0 \approx [1-(n-1)\beta]\omega_0.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = -(n-1)\beta = (1-n)\dfrac{v}{c}\operatorname{tg}\alpha$.

4B. (С. Гуденко) В области $x<0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$, где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В области $x>0$ решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi = Ce^{ik_1x}$, где $k_1^2 = 2m(E-U_0)/\hbar^2$. Граничные условия в точке $x=0$ приводят к следующему выражению для амплитудного коэффициента отражения r

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k-k_1}{k+k_1} = -\frac{1}{3}.$$

Плотность вероятности при $x<0$

$$\rho(x) = |A|^2|e^{ikx}+re^{-ikx}|^2 = |A|^2\left|e^{ikx}-\frac{1}{3}e^{-ikx}\right|^2 = \frac{2|A|^2}{3}\left(\frac{5}{3}-\cos 2kx\right).$$

Максимальное значение плотности вероятности $\rho_{\max}(x) = 16|A|^2/9$ в $16/9$ раз превышает плотность вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = -1$, откуда

$$2kx = 4\pi\frac{x}{\lambda} = \pi(2m+1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{m}{2}+\frac{1}{4} \quad (m \text{ — целое число}).$$

Поскольку слева от ступеньки $x<0$, то подходит $m=-1$. Следовательно, $|x_{\max}| = (1/4)\lambda$. Минимальное значение плотности вероятности $\rho_{\min}(x) = 4|A|^2/9$ составляет $4/9$ от плотности вероятности обнаружить частицу в падающем потоке и достигается при $\cos(2kx) = 1$, откуда $2kx = 4\pi x/\lambda = 2\pi m$ или $x/\lambda = m/2$, (m — целое число). Поскольку слева от ступеньки $x<0$, то подходит $m=-1$. Следовательно, $|x_{\min}| = \lambda/2$.

5B. (Петров, Ципенюк) Так как адроны ультрарелятивистские, то их энергия $E = pc$, и тем самым импульс бозона Хиггса равен $p_H = p_1 - p_2 = (E_1-E_2)/c$. Согласно закону сохранения энергии

$$2E_0 = E_1 + E_2 + \sqrt{m_H^2c^4 + p_H^2c^2}.$$

Из этих двух уравнений получаем $m_Hc^2 = 2\sqrt{(E_0-E_1)(E_0-E_2)} \simeq 126$ ГэВ.

Обсуждение результатов письменной работы будет проводиться перед устным экзаменом 22 января 2013 г. в 8:45 в Главной физической аудитории. По каждой задаче выставляются баллы 0, 1, 2 и сумма баллов соответствует следующим оценкам:

отлично — 8–10, хорошо — 5–7, удовлетворительно — 3–4, неуд — 0–2.