I. Интегральные ур-я

5.22. Выяснить, при каких значениях λ интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

разрешимо для любой $f(x) \in C[0, 2\pi]$ и найти решение.

$\cos(2x-y) = \cos 2x \cos y + \sin 2x \sin y$ ↪ ядро вырожденное

1) $\varphi(x) = \lambda \cos 2x \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos y\, \varphi(y)\,dy}_{C_1} + \lambda \sin 2x \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin y\, \varphi(y)\,dy}_{C_2} + f(x)$

$\varphi(x) = \lambda \cos 2x\, C_1 + \lambda \sin 2x\, C_2 + f(x)$

$C_1 = \int_0^{2\pi} \cos y \left(\lambda \cos 2y\, C_1 + \lambda \sin 2y\, C_2 + f(y)\right) dy$

$C_1 = \lambda \int_0^{2\pi} \underbrace{\cancelto{0}{\cos y \cos 2y}}_{\text{чет}} C_1\,dy + \lambda \int_0^{2\pi} \underbrace{\cancelto{0}{\sin 2y \cos y}}_{\text{чет}} C_2\,dy + \int_0^{2\pi} \cos y\, f(y)\,dy = \int_0^{2\pi} \cos y\, f(y)\,dy$

$C_2 = \lambda \int_0^{2\pi} \sin y \left(\lambda \cos 2y\, C_1 + \lambda \sin 2y\, C_2 + f(y)\right) dy$

$C_2 = \lambda \int_0^{2\pi} \underbrace{\cancelto{0}{\sin y \cos 2y}}_{\text{чет}} C_1\,dy + \lambda \int_0^{2\pi} \underbrace{\cancelto{0}{\sin y \sin 2y}}_{\text{чет}} C_2\,dy + \int_0^{2\pi} \sin y\, f(y)\,dy = \int_0^{2\pi} \sin y\, f(y)\,dy$

Ответ: $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos 2x \cos y + \sin 2x \sin y) f(y)\,dy + f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y) f(y)\,dy + f(x) \quad \forall \lambda$

5.25. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

при всех λ, a, b, если:

1) $\mathcal{K}(x, y) = x \cos y + \sin x \sin y$, $f(x) = a + b \cos x$;

$\varphi(x) = \lambda x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, \varphi(y)\,dy}_{C_1} + \lambda \sin x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, \varphi(y)\,dy}_{C_2} + a + b\cos x$

$\varphi(x) = \lambda x C_1 + \lambda \sin x\, C_2 + a + b\cos x$

$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \left(\lambda y C_1 + \lambda \sin y\, C_2 + a + b\cos y\right) dy$

$C_1 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} y C_1 \cos y\,dy + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \sin y\, C_2\,dy + \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos y\,dy}^{A} = \lambda C_1 \left[\cancelto{0}{y \sin y}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \cancelto{0}{\cos y}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right] + \frac{\lambda C_2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\sin 2y}\,dy + A = A$

$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \left(\lambda y C_1 + \lambda \sin y\, C_2 + f(y)\right) dy$

$C_2 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot y C_1\,dy + \lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\,dy + \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin y\,dy}^{B} = \lambda C_1 \left[-y\cos y\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\cos y\,dy} \right] + \lambda C_2 \left[\frac{1}{2} y\Big|_{-\pi}^{\pi} - \cancelto{0}{\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi}} \right] + B = 2\pi\lambda C_1 + \pi\lambda C_2 + B$

$A = \int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos y)\cos y\,dy = a\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\,dy + b\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y\,dy = \cancelto{0}{a \sin y}\Big|_{-\pi}^{\pi} + b\left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dy + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos 2y\,dy \right] = b\left[\frac{1}{2} y\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\cancelto{0}{\sin 2y}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$

$= \pi b$

$B = \int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos y)\sin y\,dy = a\int_{-\pi}^{\pi} \sin y\,dy + \frac{b}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2y\,dy = \cancelto{0}{-a\cos y}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{b}{4}\cancelto{0}{\cos 2y}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$C_1 = \pi b$

$C_2 = 2\pi\lambda C_1 + \pi\lambda C_2 = 2\pi^2\lambda b + \pi\lambda C_2 \hookrightarrow C_2 = \dfrac{2\pi^2\lambda b}{1 - \pi\lambda}$

$\varphi(x) = \lambda\pi b x + \sin x \dfrac{2\pi^2\lambda^2 b}{1 - \pi\lambda} + a + b\cos x$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\lambda & 1 - \pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi b \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $\exists!$ $\iff$ $\Delta \neq 0$ $\hookrightarrow$ $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$; a, b – любые

$C_1 = \pi b$; $C_2 = \dfrac{2\pi^2\lambda b}{1 - \pi\lambda}$

2) $\lambda = \frac{1}{\pi}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi b \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \hookrightarrow \exists \text{ реш-е при } b = 0$$

C_2 – любое, $C_1 = 0$ $\hookrightarrow$ $\varphi(x) = a + C\sin x$

Ответ: **5.25.** 1) $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, $\varphi_1 = \sin x$; $\varphi = a + b\cos x + \lambda b\pi x + \dfrac{2\pi^2\lambda^2 b}{1 - \lambda\pi}\sin x$, если $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ (a, b любые); при $\lambda = \frac{1}{\pi}$ уравнение разрешимо, если $b = 0$, и $\varphi(x) = a + C\sin x$, где C — произвольная постоянная;

5.26. Решить интегральные уравнения при всех λ и при всех значениях параметров a, b, входящих в свободный член этих уравнений. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядер интегральных операторов:

27) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x)\varphi(y)\, dy + ax + \cos x,$
$x \in [-\pi, \pi];$

$$\varphi(x) = \lambda x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, \varphi(y)\,dy}_{C_1} + \lambda \cos x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, \varphi(y)\,dy}_{C_2} + ax + \cos x$$

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 \cos x + ax + \cos x$$

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\,[\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + ay + \cos y]\,dy = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} y\sin y\,dy + \frac{\lambda C_2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2y\,dy + a\int_{-\pi}^{\pi} y \sin y\,dy + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2y\,dy = \lambda C_1\Big[-y\cos y\Big|_{-\pi}^{\pi} + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\,dy}^{\,0}\Big] -$$
$$- \frac{\lambda C_2}{4}\cancel{\cos 2y\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} - a\, y\cos y\Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 = 2\pi\lambda C_1 + 2\pi a$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\,[\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + ay + \cos y]\,dy = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} y\cos y\,dy + \lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y + a\int_{-\pi}^{\pi} y\cos y\,dy + \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y\,dy = (\lambda C_1 + a)\Big[y \sin y\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin y\,dy\Big] +$$
$$+ (\lambda C_2 + 1)\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dy + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2y\,dy\Big] = \pi\lambda C_2 + \pi$$

$$C_1 = 2\pi\lambda C_1 + 2\pi a \;\hookrightarrow\; C_1 = \frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda}$$

$$C_2 = \pi\lambda C_2 + \pi \;\hookrightarrow\; C_2 = \frac{\pi}{1 - \pi\lambda}$$

$$\varphi(x) = ax + \cos x + \frac{2\pi\lambda a}{1 - 2\pi\lambda}x + \frac{\pi\lambda}{1 - \pi\lambda}\cos x$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \pi\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ \pi \end{pmatrix}$$

1) ∃! при $\Delta \neq 0 \hookrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2\pi}$; $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$

Тогда $C_1 = \frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda}$, $C_2 = \frac{\pi}{1-\pi\lambda}$; $\varphi(x) = ax + \cos x + \frac{2\pi\lambda a}{1 - 2\pi\lambda}x + \frac{\pi\lambda}{1 - \pi\lambda}\cos x$

2) $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2\pi a \\ 0 & \frac{1}{2} & \pi \end{array}\right) \hookrightarrow a = 0$$

$C_1 = C$ - любое

$C_2 = 2\pi$

$\varphi(x) = 2\cos x + \frac{1}{2\pi}Cx$ не сходится

3) $\lambda = \frac{1}{\pi}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2\pi a \\ 0 & 0 & \pi \end{array}\right) \hookrightarrow \text{решений нет}$$

Ответ: 27) если $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$, $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$, то $\varphi(x) = \lambda\left(\frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda}x + \frac{\pi}{1 - \pi\lambda}\cos x\right) + ax + \cos x$; если $\lambda = \frac{1}{\pi}$, то уравнение решений не имеет; если $\lambda = \frac{1}{2\pi}$, то уравнение имеет решение только, если $a = 0$, и $\varphi(x) = Cx + \cos x$, где C — произвольная постоянная; $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ и $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$ — характеристические числа, а $\varphi_1(x) = \cos x$ и $\varphi_2(x) = x$ — соответствующие собственные функции;

5.31. Найти решение уравнения

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(xe^{-x^2} \cdot \cos^3 y + \frac{1 - \cos x}{x}e^{y^2}\right)\varphi(y)\, dy + f(x),$
$x \in [-1, 1].$

$$\varphi(x) = \lambda x e^{-x^2}\underbrace{\int_{-1}^{1}\cos^3 y\,\varphi(y)\,dy}_{C_1} + \lambda\frac{1 - \cos x}{x}\underbrace{\int_{-1}^{1} e^{y^2}\varphi(y)\,dy}_{C_2} + f(x)$$

$$\varphi(x) = C_1\lambda x e^{-x^2} + C_2\lambda\frac{1 - \cos x}{x} + f(x)$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1}\cos^3 y\Big[C_1\lambda y e^{-y^2} + C_2\lambda\frac{1 - \cos y}{y} + f(y)\Big]dy = C_1\lambda\int_{-1}^{1} y e^{-y^2}\cos^3 y\,dy + C_2\lambda\int_{-1}^{1}\frac{1 - \cos y}{y}\cos^3 y\,dy + \overbrace{\int_{-1}^{1} f(y)\cos^3 y\,dy}^{A} = A$$

0, т.к. нечет.

0, т.к. нечет.

$$C_2 = \int_{-1}^{1} e^{y^2}\Big[C_1\lambda y e^{-y^2} + C_2\lambda\frac{1-\cos y}{y} + f(y)\Big]dy = \cancel{C_1\lambda\int_{-1}^{1} y\,dy}^{\,0} + \cancel{C_2\lambda\int_{-1}^{1} e^{y^2}\frac{1 - \cos y}{y}dy}^{\,0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(y)e^{y^2}dy}_{B} = B$$

0, нечет

$$\varphi(x) = \lambda A x e^{-x^2} + \lambda B\frac{1 - \cos x}{x} + f(x)$$

предположено, что в ответах опечатка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \hookrightarrow \text{реш-е } \exists \text{ при } \forall\lambda$$

Ответ: **5.31.** 1) $\varphi(x) = \lambda C_1 x e^{-x^2} + \lambda C_2 \frac{1 - \cos x}{2} + f(x)$, где $C_1 = \int_{-1}^{1} f(y)\cos^3 y\, dy$, $C_2 = \int_{-1}^{1} f(y) e^{y^2}\, dy$. Решение существует при любых λ для всех $f(x) \in C[-1, 1]$. Следовательно, ядро $K(x, y)$ не имеет характеристических чисел. Отсюда следует, что ядро $K^*(x, y)$ также не имеет характеристических чисел.

5.23. Найти решения следующих интегральных уравнений при всех значениях параметров a, b, c, входящих в свободный член этих уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y\sin x + \cos y)\varphi(y)\,dy + ax^2 + b;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y)\,dy + a\sin x + b;$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1+xy)\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c;$

$K = 1(x)\cdot 1(y) + xy \hookrightarrow$ вырожденное

$$\varphi(x) = \lambda \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi(y)dy}_{C_1} + \lambda x \underbrace{\int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy}_{C_2} + ax^2 + bx + c$$

$$\varphi(x) = \lambda C_1 + \lambda x C_2 + ax^2 + bx + c$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1}[\lambda C_1 + \lambda y C_2 + ay^2 + by + c]dy = 2\lambda C_1 + \frac{2}{3}a + 2c$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} y[\lambda C_1 + \lambda y C_2 + ay^2 + by + c]dy = \frac{2}{3}\lambda C_2 + \frac{2}{3}b$$

$$\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 0 \\ 0 & 1-\frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a + 2c \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$$

1) $\exists!$ при $\Delta \neq 0 \hookrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}, \lambda \neq \frac{3}{2}$

$$C_1 = \frac{\frac{2}{3}a + 2c}{1-2\lambda}; \quad C_2 = \frac{2b}{3(1-\frac{2}{3}\lambda)} = \frac{2b}{3-2\lambda}$$

$$\varphi(x) = \lambda\frac{2a+6c}{3(1-2\lambda)} + \lambda x \frac{2b}{3-2\lambda} + ax^2 + bx + c$$

2) $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \frac{2}{3}a + 2c \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}b \end{array}\right) \hookrightarrow a = -3c$$

$C_1 = C_0$ – любое, $C_2 = b$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{2}bx - 3cx^2 + bx + c = \frac{3}{2}bx - 3cx^2 + c + \frac{1}{2}C_0$$

3) $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & \frac{2}{3}a + 2c \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}b \end{array}\right) \hookrightarrow b = 0$$

$C_2 = C_0$ – любое, $C_1 = -\frac{1}{3}a - c$

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}a - c\right) + \frac{3}{2}xC_0 + ax^2 + c = \frac{3}{2}xC_0 + ax^2 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a$$

Ответ:

3) $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda a + 3c}{3(1-2\lambda)} + \dfrac{3b}{3-2\lambda}x + ax^2$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ и $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ (a, b, c любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо, если $a + 3c = 0$, $\varphi(x) = \dfrac{3}{2}bx + ax^2 + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо, если $b = 0$ и $\varphi(x) = ax^2 - \dfrac{1}{2}(a+c) + C_2 x$, где C_2 — произвольная постоянная;

5.32. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

1) $\varphi(x_1, x_2) = \lambda \iint\limits_{-1}^{1} \left[x_1 + x_2 + \frac{3}{32}(y_1 + y_2)\right]\varphi(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left[|x|^2 + |y|^2\right]\varphi(y)\,dy$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$;

$$\varphi(x) = \lambda|x|^2 \underbrace{\int_{|y|<1} \varphi(y)dy}_{C_1} + \lambda \underbrace{\int_{|y|<1} |y|^2\varphi(y)dy}_{C_2}$$

$$\varphi(x) = \lambda|x|^2 C_1 + \lambda C_2$$

переход к полярным координатам

$$C_1 = \int_{|y|<1}[\lambda|y|^2C_1 + \lambda C_2]dy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(\lambda r^2 C_1 + \lambda C_2)r\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{4}\lambda C_1 + \frac{1}{2}\lambda C_2\right) = \frac{1}{2}\pi\lambda C_1 + \lambda C_2$$

$$C_2 = \lambda\int_{|y|<1}|y|^2[\lambda|y|^2C_1 + \lambda C_2]dy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2(\lambda r^2 C_1 + \lambda C_2)r\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{6}\lambda C_1 + \frac{1}{4}\lambda C_2\right) = \frac{1}{3}\pi\lambda C_1 + \frac{1}{2}\pi\lambda C_2$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\pi\lambda & \lambda \\ \frac{1}{3}\pi\lambda & 1-\frac{1}{2}\pi\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $\exists!$ реш при $\Delta \neq 0 \hookrightarrow$

$C_1 =$

Ответ: 2) $\lambda_1 = \frac{4\sqrt{3}-6}{\pi}$, $\varphi_1 = 1 + \sqrt{3}\,(x_1^2 + x_2^2)$; $\lambda_2 = -\frac{4\sqrt{3}+6}{\pi}$, $\varphi_2 = \sqrt{3}\,(x_1^2 + x_2^2) - 1$;

5.34. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathcal{K}(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \iint\limits_{-1}^{1} (x_1x_2 + y_1y_2)\varphi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 + f(x_1, x_2).$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda x_1 x_2 \underbrace{\iint_{-1}^{1} \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2}_{C_1} + \lambda \underbrace{\iint_{-1}^{1} y_1 y_2\, \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2}_{C_2} + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda x_1 x_2 C_1 + \lambda C_2 + f(x_1, x_2)$$

$$C_1 = \iint_{-1}^{1} [\lambda y_1 y_2 C_1 + \lambda C_2 + f(y_1, y_2)]\,dy_1 dy_2 = \cancelto{0}{\lambda C_1 \int_{-1}^{1} y_1 dy_1 \int_{-1}^{1} y_2 dy_2} + \lambda C_2 \iint_{-1}^{1} dy_1 dy_2 + \overbrace{\iint_{-1}^{1} f(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2}^{A} = 4\lambda C_2 + A$$

$$C_2 = \iint_{-1}^{1} y_1 y_2 [\lambda y_1 y_2 C_1 + \lambda C_2 + f(y_1, y_2)]\,dy_1 dy_2 = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} y_1^2 dy_1 \int_{-1}^{1} y_2^2 dy_2 + \cancelto{0}{\lambda C_2 \int_{-1}^{1} y_1 dy_1 \int_{-1}^{1} y_2 dy_2} + \overbrace{\iint_{-1}^{1} y_1 y_2 f(y_1 y_2)\,dy_1 dy_2}^{B} = \frac{4}{9}\lambda C_1 + B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

1) $\exists !$ при $\Delta \neq 0 \hookrightarrow 1 - \frac{16}{9}\lambda^2 = 0 \hookrightarrow \lambda \neq \pm\frac{3}{4}$

$$C_1 = \frac{A + \frac{4}{9}\lambda B}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}$$

$$C_2 = \frac{\frac{4}{9}\lambda A + B}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}\left[\left(A + \frac{4}{9}\lambda B\right) x_1 x_2 + \frac{4}{9}\lambda A + B\right] + f(x_1, x_2)$$

2) $\lambda = \frac{3}{4}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & A \\ -\frac{1}{3} & 1 & B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & A \\ 0 & 0 & B + \frac{A}{3} \end{array}\right) \hookrightarrow B = -\frac{A}{3}$$

$C_2 = C$ – любая, $C_1 = A + 3C$

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}(A + 3C)x_1 x_2 + \lambda C + f(x_1, x_2)$$

3) $\lambda = -\frac{3}{4}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & A \\ \frac{1}{3} & 1 & B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & A \\ 0 & 0 & B - \frac{A}{3} \end{array}\right) \hookrightarrow B = \frac{A}{3}$$

$C_2 = C$ – любая, $C_1 = A - 3C$

$$\varphi(x) = -\frac{3}{4}(A - 3C)x_1 x_2 + \lambda C + f(x_1, x_2)$$

4) Ищем собственные ф-ции:

$f(x_1, x_2) = 0 \hookrightarrow A = B = 0$

а) $\lambda = \frac{3}{4}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \hookrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 3 \end{cases}$$

$\varphi(x) = 3\lambda x_1 x_2 + \lambda \hookrightarrow \varphi_1 = 3x_1 x_2 + 1$ – собственная ф-ция

б) $\lambda = -\frac{3}{4}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \hookrightarrow \begin{matrix} C_2 = -1 \\ C_1 = 3 \end{matrix}$$

$\varphi(x) = 3\lambda x_1 x_2 - \lambda \hookrightarrow \varphi_2 = 3x_1 x_2 - 1$ – собств. ф-ция

Ответ: **5.34.** Характеристические числа $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ и $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$, соответствующие собственные функции $\varphi_1 = 1 + 3x_1x_2$ и $\varphi_2 = 3x_1x_2 - 1$. Если $\lambda = \pm\frac{3}{4}$, то $\varphi(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)}\Big((f_1 + 4\lambda f_2)x_1x_2 + \frac{4}{9}\lambda f_1 + f_2\Big) + f(x_1, x_2)$, где $f_1 = \iint_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\, dy_1\, dy_2$, $f_2 = \iint_{-1}^{1} y_1y_2 f(x_1, x_2)\, dy_1\, dy_2$, $\Delta(\lambda) = 1 - \frac{16}{9}\lambda^2$; при $\lambda = \frac{3}{4}$ уравнение разрешимо, если $f_1 + 3f_2 = 0$, и $\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1x_2f_1 + f(x_1, x_2) + C(3x_1x_2 + 1)$, где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = -\frac{3}{4}$ уравнение разрешимо, если $f_1 - 3f_2 = 0$, и $\varphi(x_1, x_2) = -\frac{3}{4}x_1x_2f_1 + f(x_1, x_2) + C(3x_1x_2 - 1)$, где C_2 — произвольная постоянная.

5.41. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy$$

в следующих случаях:

1) $\mathcal{K}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)\,dy + \lambda\int_x^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy \overset{(**)}{=} \lambda\int_0^x y\varphi(y)\,dy + \lambda\int_x^1 x\varphi(y)\,dy$$

$\varphi(x) = \lambda\, a(x) + \lambda x\, b(x)$ $(*)$, где $a(x) = \int_0^x y\varphi(y)\,dy$; $b(x) = \int_x^1 \varphi(y)\,dy$

Продифф. $a(x)$ и $b(x)$:

$a'(x) = x\varphi(x)$

$b'(x) = -\varphi(x)$

Из $(*)$: $\varphi'(x) = \cancel{\lambda x\varphi(x)} + \lambda b(x) - \cancel{\lambda\varphi(x)x} \xrightarrow{\text{дифф}} \varphi''(x) = \lambda(-\varphi(x)) \hookrightarrow \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$ — ур-е гармонич. колебаний

Чтобы решить ур-е, нужно получить краевые условия:

$(**) \hookrightarrow \varphi(0) = \lambda\cdot 0 + \lambda\cdot 0 = 0$

$\varphi(1) = \lambda\int_0^1 y\varphi(y)\,dy + \lambda\cdot 0$

$\varphi'(0) = \lambda\, b(0) = \int_0^1 \varphi(y)\,dy$

$\varphi'(1) = \lambda\int_1^1 = 0$

Получили задачу:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(1) = 0 \end{cases}$$

1 сл. $\lambda = -a^2$, $a > 0$

$\varphi = C\operatorname{ch} ax + D\sin ax$

$\varphi(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$\varphi'(1) = 0 \hookrightarrow D = 0$

2 сл. $\lambda = 0 \hookrightarrow \varphi = Cx + D$

$\varphi(0) = 0 \hookrightarrow D = 0$

$\varphi'(1) = 0 \hookrightarrow C = 0$

3 сл. $\lambda = a^2$, $a > 0$

$\varphi = C\cos ax + D\sin ax$

$\varphi(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$\varphi'(1) = 0 \hookrightarrow Da\cos a = 0 \hookrightarrow a = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, \ldots$

$\hookrightarrow \varphi = \varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x\right)$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$

Ответ: **5.41.** 1) $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $\varphi_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;