Теоретические вопросы для подготовки к контрольной работе:

1) Сформулировать и доказать теорему для s=2,3 о функции устойчивости явного s- стадийного метода Рунге-Кутты s порядка точности. (теорема 7.1.1)

2) Сформулировать и доказать теорему об условиях точности многошагового метода p-порядка. (теорема 7.1.3.)

3) Сформулировать и доказать теорему о единственности существующего решения краевой задачи с линейным положительным оператором. (теорема 8.5.1.)

4) Сформулировать теорему о соответствии между минимумом функционала и существующим решением краевой задачи. Доказать, что если решение краевой задачи существует, то оно доставляет минимум функционалу (метод Ритца). (теорема 8.5.2.)

5) Сформулировать теорему о соответствии между минимумом функционала и существующим решением краевой задачи. Доказать, что если существует элемент, доставляющий минимум функционалу, то он является решением краевой задачи (метод Ритца). (теорема 8.5.2.)

6) Сформулировать и доказать теорему об ортогональности элемента линейного многообразия (метод Галёркина). (теорема 8.6.1.)

① Th

Если S-стадийный явный метод Рунге-Кутта имеет порядок точности $p = S = 2, 3$, то $R(z) = \{1 + z + \ldots + z^S/S!\}$.

Явный метод Рунге-Кутта:

$$\begin{cases} y_{l+1} = y_l + h \sum_{i=1}^{S} b_i f_i \\ f_i = f(x_l + c_i h, y_l + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j) \end{cases}$$

Док-во:

$f_1 = J\Delta_l$; $f_2 = J(\Delta_l + h a_{21} J \Delta_l) = J\Delta_l(1 + a_{21} z)$;

$f_3 = J(\Delta_l + h a_{31} J\Delta_l + h a_{32} J(\Delta_l + h a_{21} J\Delta_l)) = J\Delta_l(1 + (a_{31} + a_{32})z + a_{32} a_{21} z^2)$

$\Delta_{l+1} = \Delta_l + z\Delta_l(b_1 + b_2(1 + a_{21} z) + b_3(1 + (a_{31} + a_{32})z + a_{32} a_{21} z^2) =$
$= \Delta_l(1 + (b_1 + b_2 + b_3)z + (b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}))z^2 + b_3 a_{32} a_{21} z^3)$

$\Delta_{l+1} = R(z)\Delta_l \Rightarrow R(z) = 1 + \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_{=1} z + \underbrace{(b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}))}_{=1/2} z^2 + \underbrace{b_3 a_{32} a_{21}}_{=1/6} z^3$

(условия порядков)

$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!}$

① Th

Многошаговый метод $\alpha_k y_{l+k} + \alpha_{k-1} y_{l+k-1} + \ldots + \alpha_1 y_{l+1} + \alpha_0 y_l = h(\beta_k f_{l+k} + \beta_{k-1} f_{l+k-1} + \ldots + \beta_1 f_{l+1} + \beta_0 f_l)$ имеет p порядок точности $\Leftrightarrow$ верно $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$; $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \cdot j^q = q \sum_{j=0}^{k} \beta_j \cdot j^{q-1}$, $q = \overline{1, p}$

Док-во:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(x_l + jh) - \sum_{j=0}^{k} h y_x'(x_l + jh) \beta_j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{q=0}^{p} \frac{j^q}{q!} h^q y_l^{(q)} - \sum_{j=0}^{k} \beta_j h \sum_{r=0}^{p} \frac{j^r h^r}{r!} y_l^{(r+1)} = y(x_l) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j + \sum_{q=1}^{p} \frac{h^q y_l^{(q)}}{q!} \left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1} \right] = O(h^{p+1})$$

① Th (единственность)

Пусть линейный положительно определённый оператор L задан на всюду плотном мн-ве D_L гильбертова пр-ва H. Тогда если решение краевой задачи $Lu = f$, $D_L = \{u : u \in C^2[0,1], u(0)=0, u(1)=0\}$ существует, то оно единственное.

Док-во:

$\exists$ 2 решения, т.е. $Lu_1 = f$, $Lu_2 = f$

$L(u_1 - u_2) = 0$; $\quad (L(u_1-u_2), (u_1-u_2)) \geq 0 \Rightarrow$ т.к. $L(u_1-u_2)=0 \Rightarrow u_1 = u_2$

① Th (Тождественность)

Пусть линейный самосопряжённый положительно определённый оператор L задан на мн-ве D_L всюду плотном в гильбертовом пр-ве H, а $F(u)$ - функционал вида $F(u) = (Lu,u) - 2(f,u)$. Если краевая задача $Lu = f$, $D_L = \{u : u \in C^2[0,1],\ u(0)=0,\ u(1)=0\}$ имеет решение u_0, то оно дает функционалу минимальное значение. Обратно, если $\exists$ элемент $u_0 \in D_L$, который дает минимум функционалу, то он будет решением краевой задачи.

Док-во:

Прямое

1) $\exists$ $\bar u$ - решение $L\bar u = f$. $F(u) = (Lu,u) - 2(f,u) = (Lu,u) - 2(L\bar u,u) =$

$= (Lu,u) - (L\bar u,u) - (L\bar u,u) = /\ (L\bar u,u) = (\bar u, Lu) = (Lu,\bar u)\ / =$

$= (Lu,u) - (L\bar u,u) - (Lu,\bar u) = (Lu, u-\bar u) - (L\bar u,u) + (L\bar u,\bar u) - (L\bar u,\bar u) =$

$= (Lu, u-\bar u) - (L\bar u, u-\bar u) - (L\bar u,\bar u) = (Lu - L\bar u, u-\bar u) - (L\bar u,\bar u) =$

$= \underbrace{(L(u-\bar u),(u-\bar u))}_{\geq 0 \text{ (определ.)}} - \underbrace{(L\bar u,\bar u)}_{\geq 0}$

Минимум будет при $(L(u-\bar u),(u-\bar u)) = 0$, $u = \bar u$.

обратное

2) Пусть $\bar u$ доставляет минимум функционала $F(u)$.
Рассмотрим произвольный вектор $\bar u$. $\eta = \cancel{\bar u} - \bar u$

$u = \bar u + \alpha\eta$. $F(u) - F(\bar u) = (Lu,u) - 2(f,u) - (L\bar u,\bar u) + 2(f,\bar u) =$

$= (Lu,u) - (L\bar u,\bar u) - 2(f,u-\bar u) = (L(u-\bar u), u-\bar u) - (L(u-\bar u), u-\bar u) +$

$+ (Lu,u) - (L\bar u,\bar u) - 2(f,u-\bar u) = (L(u-\bar u), u-\bar u) - (L\cancel{u},u) +$

$+ (Lu,\bar u) + (L\bar u,u) - (L\bar u,\bar u) + (L\cancel{u},u) - (L\bar u,\bar u) - 2(f,u-\bar u) =$

$= (L(u-\bar u), u-\bar u) - 2(L\bar u,\bar u) + 2(L\bar u,u) - 2(f,u-\bar u) =$

$= (L(u-\bar u), u-\bar u) + 2(L\bar u, u-\bar u) - 2(f,u-\bar u) = (L(u-\bar u), u-\bar u) +$

$+ 2(L\bar u - f, u-\bar u) \geq 0$

$u - \bar u = \alpha\eta \Rightarrow F(u) - F(\bar u) = \alpha^2(L\eta,\eta) + 2\alpha(L\bar u - f,\eta) \geq 0$

Дискриминант ≤ 0.

$(L\bar u - f,\eta)^2 \leq 0 \Rightarrow (L\bar u - f,\eta) = 0$, η - произвольный $\Rightarrow L\bar u = f$.

① **Th** (метод Галёркина)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ - полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a,b]$. Если непрерывная функция $g(x)$ ортогональна на отрезке $[a,b]$ ко всем функциям $\varphi_n(x)$, т.е. $\int_a^b g(x)\varphi_n(x)\,dx=0,\ n=1,2,\dots$, то $g(x)\equiv 0$ при $a\le x\le b$.

Док-во:

$$g(x) \sim \sum_{l=1}^{\infty} c_l\varphi_l,\quad c_l=\frac{\int_a^b g(x)\varphi_l(x)\,dx}{\|\varphi_l(x)\|^2}=0;\quad \|\varphi_l\|^2=\int_a^b \varphi_l^2(x)\,dx>0,\ l=1,2,\dots$$

$$\|g\|^2=\int_a^b g^2(x)\,dx=\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2\,\|\varphi_l\|^2=0 \Rightarrow g(x)\equiv 0.$$