I. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

20.50. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

1) концы стержня $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0(x)$; рассмотреть случаи:
а) $u_0(x) = A = \text{const}$, б)* $u_0(x) = Ax(l-x)$, $A = \text{const}$;

а) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

$u|_{t=0} = A$

1) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

Ищем реш-е в виде $u = T(t)X(x)$

$T'X = a^2 TX'' \hookrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const}$

$X'' + \lambda X = 0$

$X(0) = X(l) = 0$

1 сл $\lambda = a^2,\ a > 0$

$X = A\operatorname{ch} ax + B\operatorname{sh} ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(l) = 0 \hookrightarrow B = 0$

2 сл $\lambda = 0$

$X = Ax + B$

$X(0) = 0 \hookrightarrow B = 0$

$X(l) = 0 \hookrightarrow A = 0$

3 сл $\lambda = -a^2,\ a > 0$

$X = A\cos ax + B\sin ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(l) = 0 \hookrightarrow B\sin al = 0 \hookrightarrow al = \pi n \hookrightarrow a = \frac{\pi n}{l}$

$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$

2) Разложим неоднородности по x в РФ

$A = \sum\limits_{n=1} \alpha_n X_n$

$\alpha_n = \frac{\int_0^l A\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx} \ominus$

числитель: $\int_0^l A\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = -\frac{Al}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l = -\frac{Al}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \frac{Al}{\pi n}(1-(-1)^n)$

знаменатель: $\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx = \int_0^l\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^l - \frac{l}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{l}x\Big|_0^l = \frac{1}{2}l$

$\ominus \frac{2A}{\pi n}(1-(-1)^n)$

3) $u = \sum\limits_{n=1} T_n(t)X_n(x)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1} T_n'(t)X_n(x) = a^2\sum\limits_{n=1} T_n(t)\underbrace{X_n''(x)}_{=-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n} \\ \sum\limits_{n=1} T_n(0)X_n(x) = \sum\limits_{n=1}\alpha_n X_n(x) \end{cases}$$

При X_n: $\begin{cases} T_n' = -a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n \\ T_n(0) = \alpha_n \end{cases} \hookrightarrow T_n = \alpha_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$

Ответ: $u = \sum\limits_{n=1} T_n(t)X_n(x)$, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$

$T_n = \alpha_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$

б) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

$u|_{t=0} = Ax(l-x)$

1 шаг $u_t = a^2 u_{xx}$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

из решения известно: $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$

2 шаг $Ax(l-x) = \sum \alpha_n X_n$

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l Ax(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx}{\int_0^l \sin^2\frac{\pi n x}{l}dx}$$

числитель $= -\frac{Al}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l + \frac{Al}{\pi n}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{Al^2}{\pi n^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l +$
$+ \frac{2Al^2}{\pi^2 n^2}\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l = (1-(-1)^n)\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}$

знаменатель $= \frac{l}{2}$

$$\alpha_n = \frac{4Al^2(1-(-1)^n)}{\pi^3 n^3}$$

3 шаг

$$u = \sum^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$
$$\sum_1 T_n' X_n = \sum_1 T_n \underbrace{X_n''}_{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n} a^2$$
$$\sum T_n(0) X_n = \sum^{\infty} \alpha_n X_n$$
$$T_n' + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)T_n = 0$$
$$T_n(0) = \alpha_n$$
$$T_n(t) = \alpha_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$$

Ответ: $u = \sum_{n=1} T_n(t) X_n(x)$, $X_n = \sin\frac{\pi n}{l}x$
$T_n = \alpha_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$

20.14. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u$ $(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = x^2 - x$, $u_t|_{t=0} = 0$;

2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$ $(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = \pi x - x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$;

$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$

$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$

1) Ищем реш-е в виде $u = T_n(t) X_n(x)$

$T''X + 2T'X = TX'' - TX \quad |:TX$

$\frac{T''}{T} + 2\frac{T'}{T} + 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda = const$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

1 сл. $\lambda = a^2$, $a > 0$

$X = A\operatorname{ch} ax + B\operatorname{sh} ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow B = 0$

2 сл. $\lambda = 0$

$X = Ax + B$

$X(0) = 0 \hookrightarrow B = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow A = 0$

3 сл. $\lambda = -a^2$, $a > 0$

$X = A\cos ax + B\sin ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow B\sin a\pi = 0 \hookrightarrow a\pi = \pi n \hookrightarrow a = n$

$X_n = \sin nx$

2) Разложим неоднородности по X в РФ

$\pi x - x^2 = \sum_{n=1} \alpha_n X_n$

$\alpha_n = \frac{\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx\,dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx} =$

числитель: $\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx\,(\pi x - x^2)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos nx(\pi - 2x)\,dx = \frac{1}{n^2}\sin nx\,(\pi - 2x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{2}{n^2}\sin nx\,dx = -\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^\pi =$

$= -\frac{2}{n^3}(-1)^n + \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^3}\left(1 - (-1)^n\right)$

знаменатель: $\frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sin 2nx\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}$

3) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n + \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n' X_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \overbrace{X_n''}^{=-n^2X_n} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n = 0 \end{cases}$$

При X_n: $\begin{cases} T_n'' + 2T_n' + n^2 T_n + T_n = 0 \\ T_n(0) = \alpha_n \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$ $\to \lambda^2 + 2\lambda + n^2 + 1 = 0 \to \lambda = \pm in - 1$

$T_n = e^{-t}(C_1 \sin nt + C_2 \cos nt)$

$C_1 = \frac{\alpha_n}{n}$

$C_2 = \alpha_n$

Ответ: $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) X_n(x)$, где $X_n(x) = \sin nx$

$T_n = e^{-t}\left(\frac{\alpha_n}{n}\sin nt + \alpha_n \cos nt\right)$

20.3. Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

1) один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а другой конец ($x = l$) свободен;
2) оба конца стержня свободны;
3) один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а другой конец ($x = 0$) свободен.

$u\big|_{t=0} = u_0(x)$

$u_t\big|_{t=0} = u_1(x)$

1 шаг $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$u_x\big|_{x=0} = 0$

$(u_x + hu)\big|_{x=l} = 0$

$u = T(t)X(x)$

$T''X = a^2 T X''$

$T(t)X'(0) = 0$

$T(t)(X'(l) + hX(l)) = 0$

$\underset{\text{от } t}{\frac{T''}{a^2 T}} = \underset{\text{от } x}{\frac{X''}{X}} \to X'' + \lambda X = 0$

$X'(0) = 0$

1 случай $\lambda = -b^2$, $b > 0$

$X = C\,\mathrm{ch}\,bx + D\,\mathrm{sh}\,bx$

$X'(0) = 0 \to D = 0$

$X'(l) + hX(l) = 0 \to b\,\mathrm{sh}\,bl + h\,\mathrm{ch}\,bl = 0 \to \underset{>0}{\mathrm{th}\,bl} = \overset{-A}{\underset{<0}{-\frac{h}{b}}}$

Решений нет

2 случай $\lambda = b^2$, $b > 0$

$X = C\cos bx + D\sin bx$

$X'(0) = 0 \to D = 0$

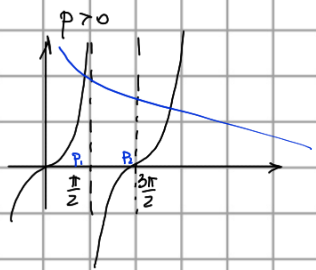
$X'(l) + hX(l) = 0$

$-b\sin bl + h\cos bl = 0 \to \mathrm{tg}\,\overset{p}{bl} = \frac{h}{b}$

$\mathrm{tg}\,p = \frac{hl}{p}$

p_1, p_2 – корни

$X_n(x) = \cos\left(\frac{p_n}{l}x\right)$



$u_0(x) = \sum_{1}^{\infty} \alpha_n X_n(x)$

$u_1(x) = \sum_{1}^{\infty} \beta_n X_n(x)$

$\alpha_n = \frac{(u_0, X_n)}{(X_n, X_n)}$

$\beta_n = \frac{(u_1, X_n)}{(X_n, X_n)}$

$u = \sum T_n X_n$

$\sum T_n'' X_n = \sum T_n X_n''$ $\quad \left(\frac{p_n}{\ell}\right)^2 X_n$

$\sum T_n(0) X_n = \sum \alpha_n X_n$

$\sum T_n'(0) X_n = \sum \beta_n X_n$

$X_n: \quad T_n'' + \left(\frac{p_n}{\ell}\right)^2 T_n = 0 \quad \hookrightarrow T_n = \alpha_n \cos\left(\frac{p_n}{\ell} x\right) + \frac{\beta_n}{p_n} \ell \sin\left(\frac{p_n}{\ell} x\right)$

$T_n(0) = \alpha_n$

$T_n'(0) = \beta_n$

Ответ

2. Решить смешанные задачи:

a) $u_{tt} = u_{xx} - 2\cos 3t,\ t > 0,\ 0 < x < \pi;$
$u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t,\ t \geq 0;$
$u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 \leq x \leq \pi;$

0 шаг: $u_{гн} = a(x) \cos 3t$

$a'(0) = 0, \quad a'(\pi) = 2\pi$

Подберем $a(x) = x^2 \hookrightarrow u_{гн} = x^2 \cos 3t$

$u = u_{гн} + v(x,t) = x^2 \cos 3t + v(x,t)$

$-9x^2 \cos 3t + v_{tt} = \cancel{2\cos 3t} + v_{xx} - \cancel{2\cos 3t}$

кр. услов: $(2x \cos 3t + v_x)\big|_{x=0} = 0$

$(2x\cos 3t + v_x)\big|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t \quad \hookrightarrow \quad v_x\big|_{x=0} = 0,\ v_x\big|_{x=\pi} = 0,\ v\big|_{t=0} = 0,\ v_t\big|_{t=0} = 0$

начальные услов: $(x^2 \cos 3t + v)\big|_{t=0} = x^2$

$(-3x^2 \sin 3t + v_t)\big|_{t=0} = 0$

Получили новую задачу (однородную):

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + 9x^2 \cos 3t \\ v_x\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=\pi} = 0 \\ v\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1 шаг $\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v_x\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$

Решение ищем в виде $v = T(t) X(x)$:

$$\begin{cases} T'' X = X'' T \\ T X'(0) = T X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Ищем нетривиальные решения: $\underbrace{\frac{T''}{T}}_{\text{от } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{от } x} = -\lambda = const$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

1 случай:

$\lambda = a^2,\ a > 0 \hookrightarrow X = C \operatorname{ch} ax + D \operatorname{sh} ax$

$(aC \operatorname{sh} ax + aD \operatorname{ch} ax)\big|_{x=0} = 0 \quad \hookrightarrow D = 0$

$(aC \operatorname{sh} ax + aD \operatorname{ch} ax)\big|_{x=\pi} = 0 \quad \hookrightarrow C = 0$

2 случай:

$\lambda = 0 \hookrightarrow X = Ax + B$

Из краевых условий: $A = 0 \hookrightarrow X = 1$

3 случай:

$\lambda = a^2,\ a < 0 \hookrightarrow X = C \cos ax + D \sin ax$

$(-aC \sin ax + aD \cos ax)\big|_{x=0} = 0 \quad \hookrightarrow D = 0$

$(-aC \sin ax + aD \cos ax)\big|_{x=\pi} = 0 \quad \hookrightarrow \sin a\pi = 0 \hookrightarrow a = n$

$\{X_n(x)\}$: $X_n = \cos nx$ - собственные ф-ции

2 шаг: Разложение неоднородностей по x в РФ

$$9x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad \alpha_n = \frac{\int_0^\pi 9x^2 \cos nx\,dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx} \circeq$$

числитель: $\cancel{\frac{1}{n} 9x^2 \sin nx \Big|_0^\pi} - \int_0^\pi \frac{18x}{n} \sin nx\,dx = \frac{18x}{n^2} \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{18}{n^2} \cos nx\,dx = \frac{18\pi}{n^2}(-1)^n - \cancel{\frac{18}{n^3} \sin nx \Big|_0^\pi}$

знаменатель: $\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\circeq \frac{36}{n^2}(-1)^n$

3 шаг

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$\sum T_n'' X_n = \sum T_n \underbrace{X_n''}_{=-n^2 X_n} + \cos 3t \sum \alpha_n X_n$$

$$\sum T_n(0) X_n = 0$$

$$\sum T_n'(0) X_n = 0$$

При X_n: $\begin{cases} T_n'' = -n^2 T_n + \alpha_n \cos 3t \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$

1) $n = 0$: $T_0'' = \alpha_0 \cos 3t = \left| \alpha_0 = \frac{\int_0^\pi 1 \cdot 9x^2\,dx}{\int_0^\pi 1^2\,dx} = 3\pi^2 \right| = 3\pi^2 \cos 3t$

$T_0(0) = 0$; $T_0'(0) = 0$

$T = At + B - \frac{1}{3}\pi^2 \cos 3t$

$T_0(0) = 0 \hookrightarrow B = \frac{1}{3}\pi^2$

$T_0'(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$\hookrightarrow T_0 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{3}\cos 3t$

2) $n = 3$: $T_3'' + 9T_3 = -4\cos 3t$

$T_3(0) = 0$, $T_3'(0) = 0$

$T_3 = A\cos 3t + B\sin 3t + T_{чн}$

$T_{чн} = \operatorname{Re} T$

$T'' = -9T - 4e^{i3t} \hookrightarrow T = Cte^{i3t}$

$T'' = 0 + 2Ci3e^{i3t} - 9Cte^{i3t} \hookrightarrow 6Ci = 4 \hookrightarrow C = \frac{2}{3}i$

$T = \frac{2}{3}i\,te^{i3t} \hookrightarrow T_3 = A\cos 3t + B\sin 3t - \frac{2}{3}t\sin 3t$

3) $n \neq 0, 3$: $T_n'' + n^2 T_n = \alpha_n \cos 3t$

$T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$

$T_{чн} = k\cos 3t \hookrightarrow -9k + n^2 k = \alpha_n \hookrightarrow k = \frac{\alpha_n}{n^2 - 9}$

$T_n = \frac{\alpha_n}{n^2-9}\cos 3t + A_n \cos nt + B_n \sin nt$

$T_n(0) = 0 \hookrightarrow A_n = \frac{-\alpha_n}{n^2-9}$

$T_n'(0) = 0 \hookrightarrow B_n = 0$

Ответ: $u = x^2 \cos 3t + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $X_n = \cos nx$,
$T_0 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{3}\cos 3t$, $T_3 = A\cos 3t + B\sin 3t - \frac{2}{3}t\sin 3t$, $T_n = \frac{\alpha_n}{n^2-9}\cos 3t - \frac{\alpha_n}{n^2-9}\cos nt$ $(n \neq 0, 3)$

б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$;
$u|_{x=0} = te^{-9t}$, $u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = \pi x - \sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

0 шаг: Краевые условия $\hookrightarrow$ однородные (— неоднородности)

$U_{чн} = a(x)\,te^{-9t} + b(x)\pi$

$a(0) = 1 \qquad a'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$b(0) = 0 \qquad b'(\frac{\pi}{2}) = 1$

$a(x) = 1$ (подбираем линейную функцию)
$b(x) = x$

$U_{чн} = te^{-9t} + \pi x$

$U = te^{-9t} + \pi x + v(t,x)$

$e^{-9t} - 9te^{-9t} + v_t = v_{xx} + 2\pi x e^{-9t} + e^{-9t} - 9te^{-9t}$

гр. усл: $v|_{x=0} = v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$

н.у: $(\pi x + v)|_{t=0} = \pi x - \sin x$

Получим новую задачу:

$$v_t = v_{xx} + 2\pi x e^{-9t}$$
$$v|_{x=0} = v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$
$$v|_{t=0} = -\sin x$$

1 шаг: $\{$ однор. ур-е, краев. усл.

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

Ищем в виде $v = T(t)X(x)$:

$T'X = TX''$

$T(t)X(0) = T(t)X'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Ищем нетривиальные реш-я

$$\underbrace{\frac{T'}{T}}_{\text{от } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{от } x} = -\lambda = const$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

1 случай $\lambda = a^2, a > 0$

$\hookrightarrow X = C\,ch\,ax + D\,sh\,ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \hookrightarrow Da\,ch\,a\frac{\pi}{2} = 0 \hookrightarrow D = 0$ $\Big|\hookrightarrow X \equiv 0$

2 случай $\lambda = 0$

$\hookrightarrow X = Ax + B$

$X(0) = 0 \hookrightarrow B = 0$

$X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \hookrightarrow A = 0$ $\Big|\hookrightarrow X = 0$

3 случай $\lambda = a^2, a < 0$

$X = C\cos ax + D\sin ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \hookrightarrow Da\cos a\frac{\pi}{2} = 0 \hookrightarrow \cos a\frac{\pi}{2} = 0 \hookrightarrow a = 2n-1$ (чтобы нумерацию была с 1)

главное не перепутать, а подставить в $X = \cancel{C\cos ax} + D\sin ax$

$\{X_n(x)\}$: $X_n = \sin((2n-1)x)$ – собственные ф-ции

2 шаг Разложение неоднородностей по x в РФ

1) $2\pi x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n X_n(x)$

$$d_n = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sin((2n-1)x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2((2n-1)x)dx} \;(=)$$

числитель $= -\frac{2\pi}{2n-1}x\cos((2n-1)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2\pi}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n-1)x)dx = \frac{2\pi}{(2n-1)^2}\sin((2n-1)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

взяли по частям

$= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

знаменатель $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos((4n-2)x))dx = \frac{\pi}{4}$

$(=)\; \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

2) $-\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x)$

$\beta_n = \begin{cases} -1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$

<u>3 шаг</u>

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

ур $\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty} T_n' X_n = \sum_1^{\infty} T_n \overbrace{X_n''}^{-(2n-1)^2 X_n} + e^{-9t} \sum_1^{\infty} \alpha_n X_n$

кр. усл: автоматически выполняются (каждая X_n им удовлетворяет)

н.у: $\sum_1^{\infty} T_n(0) X_n = \sum_1^{\infty} \beta_n X_n$

$\hookrightarrow$ При X_n: $T_n' = -(2n-1)^2 T_n + \alpha_n e^{-9t}$

$T_n(0) = \beta_n$

1) $n=1$: $T_1' + T_1 = 8e^{-9t}$

$T_1(0) = 1$

$T_1 = Ce^{-t} + ae^{-9t}$

$-9a + a = 8 \hookrightarrow a = -1$

$T_1 = Ce^{-t} - e^{-9t}$

$T_1(0) = C - 1 \hookrightarrow C = 0$

$T_1 = -e^{-9t}$

2) $n=2$: $T_2' + 9T_2 = -\frac{8}{9} e^{-9t}$

$T_2(0) = 0$

$T_2 = Ate^{-9t}$

$Ae^{-9t} - 9Ate^{-9t} + 9Ate^{-9t} = -\frac{8}{9} e^{-9t}$

$T_2 = -\frac{8}{9} te^{-9t} + Ce^{-3t}$

$T_2(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$T_2 = -\frac{8}{9} te^{-9t}$

3) $n \geq 3$: $T_n' + (2n-1)^2 T_n = \alpha_n e^{-9t}$

$T_n(0) = 0$

$T_2 = Ae^{-9t}$

$-9A + (2n-1)^2 A = \alpha_n \hookrightarrow A = \frac{\alpha_n}{(2n-1)^2 - 9}$

$T_n = \frac{\alpha_n}{(2n-1)^2 - 9} e^{-9t} + Ce^{-(2n-1)^2 t}$ $\quad\hookrightarrow T_n = \frac{\alpha_n}{(2n-1)^2 - 9}\left(e^{-9t} - e^{-(2n-1)^2 t}\right)$

$T_n(0) = 0 \hookrightarrow C = \frac{-\alpha_n}{(2n-1)^2 - 9}$

<u>Ответ:</u> $u = te^{-9t} + \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $X_n = \sin((2n-1)x)$

$T_1 = -e^{-9t}$; $T_2 = -\frac{8}{9} te^{-9t}$, $T_n = \frac{\alpha_n}{(2n-1)^2 - 9}\left(e^{-9t} - e^{-(2n-1)^2 t}\right)$, $n \geq 3$

в) $u_{tt} - 4u_{xx} = 2x + 4\cos 2t \cdot \sin x$, $t > 0$, $0 < x < \pi$;

$u|_{x=0} = \pi$, $u|_{x=\pi} = \pi t^2$, $t \geq 0$;

$u|_{t=0} = (\pi - x)(\frac{\pi}{2} x + 1)$, $u_t|_{t=0} = 4 \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$;

1) Получим однородную задачу:

$u_{гн} = a(x)(\pi - x) + b(x)t^2$

$a(0) = 1 \quad a(\pi) = 0$

$b(0) = 0 \quad b(\pi) = 1$

Подберем линейную ф-цию: $u_{гн} = xt^2 + \pi - x$

$u = u_{гн} + v(x,t) = xt^2 + v(x,t)$

Подставим в задачу:

$$\begin{cases} 2x + v_{tt} - 4v_{xx} = 2x + 4\cos 2t \cos x, & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{t=0} = \frac{\pi^2}{2} x - \frac{\pi}{2} x^2 \\ (2xt + v_t)|_{t=0} = 4 \sin 2x \end{cases}$$

Получили однородную задачу

$$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 4\cos 2t \cos x \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=\pi} = 0 \\ v\big|_{t=0} = \frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2 \\ v_t\big|_{t=0} = 4\sin 2x \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0 \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде $v(x,t) = T(t)\,X(x)$

$$T''X = 4TX'' \hookrightarrow \underbrace{\frac{T''}{T}}_{\text{от } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{от } x} = -\lambda = \text{const}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

<u>1 сл</u> $\lambda = -a^2,\ a > 0$

$\hookrightarrow X = A\,\mathrm{ch}\,ax + B\,\mathrm{sh}\,ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow B\,\mathrm{sh}\,a\pi = 0 \hookrightarrow B = 0$ $\Big|\hookrightarrow X \equiv 0$

<u>2 сл</u> $\lambda = 0$

$X = Ax + B$

$X(0) = 0 \hookrightarrow B = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow A = 0$ $\Big|\hookrightarrow X \equiv 0$

<u>3 сл</u> $\lambda = a^2,\ a < 0$

$X = C\cos ax + D\sin ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$

$X(\pi) = 0 \hookrightarrow D\sin a\pi = 0 \hookrightarrow a\pi = \pi n \hookrightarrow a = n$

$\{X_n(x)\}:\ X_n = \sin nx$ – собственные ф-ции

3) Разложим неоднородности по x в РФ

- $\frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x)$

$$\alpha_n = \frac{\int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2\right)\sin nx\,dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx} \ominus$$

числитель $= \int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2\right)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{\pi^2}{2}x\right)\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\left(\pi x - \frac{\pi^2}{2}\right)\cos nx = \cancelto{0}{\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{2}\right)} - \frac{1}{n^2}\cancelto{0}{\left(\pi x - \frac{\pi^2}{2}\right)\sin nx\Big|_0^\pi} + \int_0^\pi \frac{\pi}{n^2}\sin nx = \cancelto{0}{-\frac{\pi}{n^3}\cos nx\Big|} + \frac{1}{n}(-1)^n\pi = \frac{\pi}{n}(-1)^n$

знаменатель $= \int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx\right)dx = \frac{x}{2}\Big|_0^\pi - \frac{1}{4n}\sin 2nx\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

$\ominus \ \frac{2}{n}(-1)^n$

- $4\sin 2x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x)$

$$\beta_n = \begin{cases} 4, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

- $4\cos x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n X_n(x)$

$$\gamma_n = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

4) $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$

Подставим в ур-е:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n - 4\sum_{n=1}^{\infty} T_n \underbrace{X_n''}_{=-n^2 X_n} = \cos 2t \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n X_n$$ (краевые условия выполняются автоматически)

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n$$

При X_n: $$\begin{cases} T_n'' + 4n^2 T_n = \gamma_n \cos 2t \\ T_n(0) = \alpha_n \\ T_n'(0) = \beta_n \end{cases}$$

$\underline{n=1}$: $\begin{cases} T_1'' + 4T_1 = 4\cos 2t \\ T_1(0) = -2 \\ T_1'(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_1 = t\sin 2t - 2\pi\cos 2t$

$\underline{n=2}$: $\begin{cases} T_2'' + 16T_2 = 0 \\ T_2(0) = 0 \\ T_2'(0) = 4 \end{cases} \hookrightarrow T_2 = \sin 4t$

$\underline{n \geq 3}$: $\begin{cases} T_n'' + 4n^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = \alpha_n \\ T_n'(0) = \beta_n \end{cases}$ $\begin{cases} T_n = A\cos 2nt + B\sin 2nt \\ A = \alpha_n \\ B = \frac{\beta_n}{2n} \end{cases}$ $\hookrightarrow T_n = \alpha_n \cos 2nt + \frac{\beta_n}{2n}\sin 2nt$

$\underline{\text{Ответ}}$: $u = xt^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $X_n = \sin nx$

$T_1 = t\sin 2t - 2\pi\cos 2t$; $T_2 = \sin 4t$

$T_n = \alpha_n \cos 2nt + \frac{\beta_n}{2n}\sin 2nt$

г) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2,\ t > 0,\ 0 < x < 1;$
$u|_{t=0} = \sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = x,\ 0 \leq x \leq 1;$
$u|_{x=0} = t^2,\ u|_{x=1} = t + t^2,\ t \geq 0.$

Получим однородную задачу:

$u_{гн} = a(x)t^2 + b(x)(t + t^2)$

$\left.\begin{matrix} a(0) + b(0) = 1, & b(0) = 0 \\ a(1) + b(1) = 1, & b(1) = 1 \end{matrix}\right| \hookrightarrow \begin{matrix} b(0) = 0, & a(0) = 1 \\ b(1) = 1, & a(1) = 1 \end{matrix}$

$u_{гн} = t^2 + tx$

$u = t^2 + tx + v(x,t)$

$$\begin{cases} \cancel{2} + v_{tt} = v_{xx} - \cancel{t^2} - tx - v + \cancel{t^2} + \cancel{2} \\ v|_{t=0} = \sin 3\pi x \\ (v_t + \cancel{x})|_{t=0} = \cancel{x} \\ (\cancel{t^2} + v)|_{x=0} = \cancel{t^2} \\ (\cancel{t^2} + \cancel{t} + v)|_{x=1} = \cancel{t} + \cancel{t^2} \end{cases}$$

Получили однородную задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} - tx - v \\ v|_{t=0} = \sin 3\pi x \\ v_t|_{t=0} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + v = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0 \end{cases}$

Ищем реш-е в виде $v = T(t)X(x)$

$T''X - TX'' + TX = 0 \ | : T$

$\frac{T''}{T}X - X'' + X = 0 \ | : X$

$\underbrace{\frac{T''}{T}}_{\text{от } t} = \underbrace{\frac{X''}{X} - 1}_{\text{от } x} = -\lambda = \text{const}$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$

$\underline{1 \text{ сл}}$: $\lambda = -a^2,\ a > 0$

$X = A\,\mathrm{ch}\,ax + B\,\mathrm{sh}\,ax$

$X(0) = 0 \hookrightarrow A = 0$

$X(1) = 0 \hookrightarrow B\,\mathrm{sh}\,a = 0 \hookrightarrow B = 0$

$\underline{2 \text{ сл}}$: $\lambda = 0$

$X = Ax + B$

$X(0) = 0 \hookrightarrow B = 0$

$X(1) = 0 \hookrightarrow A = 0$

3сл $\lambda = a^2,\ a>0$

$X = A\cos ax + B\sin ax$

$X(0)=0 \hookrightarrow A=0$

$X(1)=0 \hookrightarrow B\sin a = 0 \hookrightarrow a = \pi n$

$X_n(x) = \sin \pi n x$

2) Разложим неоднородности по x в ряд Фурье

• $-x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$

$\alpha_n = \dfrac{\int_0^1 (-x)\sin \pi n x\,dx}{\int_0^1 \sin^2 \pi n x\,dx} \ \textcircled{=}$

числитель: $\frac{1}{\pi n} x\cos \pi n x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi n}\cos \pi n x\,dx = \frac{(-1)^n}{\pi n} - \frac{1}{(\pi n)^2}\sin \pi n x\Big|_0^1 = \frac{(-1)^n}{\pi n}$

знаменатель: $\int_0^1 \left(\frac12 - \cos 2\pi n x\right)dx = \frac12 x\Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\cancel{\sin \frac{2\pi n}{1} x}\Big|_0^1 = \frac12$

$\textcircled{=} \dfrac{(-1)^n \cdot 2}{\pi n}$

• $\sin 3\pi x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n$

$\beta_n = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases}$

3) $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$

$\begin{cases} \sum T_n'' X_n - \sum T_n X_n'' + \sum T_n X_n = t\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n \quad (X_n'' = -\pi^2 n^2 X_n) \\ \sum T_n(0) X_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n \\ \sum T_n'(0) X_n = 0 \end{cases}$

При X_n: $\begin{cases} T_n'' + \pi^2 n^2 T_n + T_n = t\alpha_n \\ T_n(0) = \beta_n \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$

$n=3$: $\begin{cases} T_3'' + (9\pi^2+1)T_3 = t\overbrace{\frac{(-1)^n 2}{3\pi}}^{\alpha_3} \\ T_3(0) = 1 \\ T_3'(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_3 = \dfrac{\alpha_3}{9\pi^2+1}t + \dfrac{\alpha_3}{(9\pi^2+1)^{3/2}}\sin(\sqrt{9\pi^2+1}\,t)$

$n\neq 3$: $\begin{cases} T_n'' + (\pi^2 n^2+1)T_n = \alpha_n t_n \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_n = \dfrac{\alpha_n}{\pi^2 n^2+1}t + \dfrac{\alpha_n}{(\pi^2 n^2+1)^{3/2}}\sin(\sqrt{\pi^2 n^2+1}\,t)$

Ответ: $u = t^2 + tx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $X_n = \sin \pi n x$

$T_3 = \dfrac{\alpha_3}{9\pi^2+1}t + \dfrac{\alpha_3}{(9\pi^2+1)^{3/2}}\sin(\sqrt{9\pi^2+1}\,t)$; $T_n = \dfrac{\alpha_n}{\pi^2 n^2+1}t + \dfrac{\alpha_n}{(\pi^2 n^2+1)^{3/2}}\sin(\sqrt{\pi^2 n^2+1}\,t)$

II. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области.

20.22. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ($0 < x < p$, $0 < y < q$), закрепленный вдоль контура, если $u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

$u_{tt} = a^2\Delta u = a^2 u_{xx} + a^2 u_{yy}$

1 шаг $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u \\ (*) \end{cases}$

Решение ищем в виде $u = T(t)Z(x,y)$ (метод разделения переменных)

$T''Z = a^2 T\Delta Z$

$T(t)Z\big|_{x=0} = T(t)Z\big|_{x=p} = T(t)Z\big|_{y=q} = T(t)Z\big|_{y=0} = 0$

$\dfrac{T''}{a^2 T} = \dfrac{\Delta Z}{Z}$

$Z\big|_{x=0} = Z\big|_{x=p} = Z\big|_{y=0} = Z\big|_{y=q} = 0 \ (**)$

$\Delta Z = -\lambda Z$

$Z = X(x)Y(y)$

$X''Y + XY'' = -\lambda XY$

$X(0)Y(y) = X(p)Y(y) = X(x)Y(0) = X(x)Y(q) = 0$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \hookrightarrow \frac{X''}{X} = -\mu = \text{const}$

$X(0) = X(p) = 0$

$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{p}$

Аналогично $Y_m(y) = \sin\frac{\pi m y}{q}$

$u = \sum\limits_{n,m=1} T_{nm}(t)X_n(x)Y_m(y)$

ур-е: $\sum\limits_{nm} T''_{nm} Z_{nm} = a^2 \sum T_{nm}\Delta Z_{mn} = \left(-\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2\right) Z_{mn}$

н.у: $\sum\limits_{nm} T_{nm}(0) Z_{mn} = \sum\limits_{nm} \beta_{nm} Z_{mn}$

$\sum T'_{nm}(0) Z_{mn} = 0$

$T''_{mn} + a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right) T_{mn} = 0$

$T_{mn}(0) = \beta_{nm}$

$T'_{mn}(0) = 0$ $\quad\Big|\hookrightarrow T_{mn} = \beta_{mn}\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}}\, t\right)$

$$\beta_{mn} = \frac{\int_0^p\int_0^q Axy(x-p)(y-q)\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi m y}{q}\,dx\,dy}{\int_0^p\int_0^q \sin^2\frac{\pi n x}{p}\sin^2\frac{p m y}{q}\,dx\,dy}$$

$$\int_0^p x(x-p)\sin\frac{\pi n x}{p}dx = -\frac{p}{\pi n}x(x-p)\cos\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p + \frac{p}{\pi n}\int_0^p(2x-p)\cos\frac{\pi n x}{p}dx = \frac{p^2}{\pi^2 n^2}(2x-p)\sin\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p - \frac{2p^2}{\pi^2 n^2}\int_0^p \sin\frac{\pi n x}{p}dx = \frac{2p^3}{\pi^3 n^3}\underbrace{\cos\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p}_{=(-1)^n-1}$$

20.21. Решить следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi;$$
$$u_{x=0} = y|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0;$$
$$u|_{t=0} = 3\sin x\sin 2y,\ u_t|_{t=0} = 5\sin 3x\sin 4y,\ 0 \leqslant x \leqslant p,\ \ 0 \leqslant y \leqslant q.$$

1) Решение однородную систему:

$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$

Решение ищем в виде $u = T(t)Z(x,y)$

$\begin{cases} T''Z = T\Delta Z \\ T(t)Z|_{x=0} = T(t)Z|_{x=\pi} = T(t)Z|_{y=0} = T(t)Z|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta Z}{Z} = -\lambda = \text{const} \\ Z|_{x=0} = Z|_{x=\pi} = Z|_{y=0} = Z|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$

• $\Delta Z = -\lambda Z$

Решение ищем в виде $Z = X(x)Y(y)$

$\begin{cases} X''Y + Y''X = -\lambda XY \\ X(0)Y = X(\pi)Y = XY(0) = XY(\pi) = 0 \end{cases}$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \hookrightarrow \frac{X''}{X} = -\mu = \text{const}$

$X(0) = X(\pi) = 0$

$X'' + \mu X = 0$

<u>1 сл</u> $\mu = -a^2,\ a > 0$

$X = A\operatorname{ch} ax + B\operatorname{sh} ax$

$X(0) = X(\pi) = 0$ $\hookrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

<u>2 сл</u> $\mu = 0$

$X = Ax + B$

$X(0) = X(\pi) = 0 \hookrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

<u>3 сл</u> $\mu = a^2,\ a > 0$

$X = A\cos ax + B\sin ax$

$X(0) = X(\pi) = 0 \hookrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin\pi a = 0 \end{cases} \hookrightarrow \pi a = \pi n \hookrightarrow a = n$

$X_n = \sin nx$

Аналогично $Y_m = \sin my$

2) Разложим неоднородности по x, y в РФ

- $3\sin x \sin 2y = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{mn} Z_{mn}$

$$\alpha_{mn} = \frac{\int_0^\pi\int_0^\pi 3\sin x \sin 2y \sin nx \sin my\,dx\,dy}{\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2 nx \sin^2 mx\,dx\,dy} = \begin{cases} 1, & n=1, m=2 \\ 0, & n\neq 1, m\neq 2 \end{cases}$$

- $5\sin 3x \sin 4y = \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{nm} Z_{mn} \hookrightarrow \beta_{mn} = \begin{cases} 1, & n=3, m=4 \\ 0, & n\neq 3, m\neq 4 \end{cases}$

3) $u = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)$

$$\begin{cases} \sum_{n,m=1}^{\infty} T''_{mn} Z_{mn} = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{mn} \underbrace{\Delta Z_{mn}}_{=(-n^2-m^2)Z_{mn}} \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{mn}(0) Z_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} Z_{mn} \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T'_{mn}(0) Z_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_{nm} Z_{mn} \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} T'' + (n^2+m^2) T = 0 \\ T(0) = \alpha_{mn} \\ T'(0) = \beta_{mn} \end{cases}$$

<u>$n=1, m=2$:</u> $\begin{cases} T''_{12} + 5T_{12} = 0 \\ T_{12}(0) = 1 \\ T'_{12}(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_{12} = \cos\sqrt{5}t$

<u>$n=3, m=4$:</u> $\begin{cases} T''_{34} + 25T_{34} = 0 \\ T_{34}(0) = 0 \\ T'_{34}(0) = 1 \end{cases} \hookrightarrow T_{34} = \frac{1}{5}\sin 5t$

<u>$n\neq 1,3;\ m\neq 2,4$:</u> $\begin{cases} T''_{mn} + (n^2+m^2) T_{mn} = 0 \\ T_{mn}(0) = 0 \\ T'_{mn}(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_{mn} = 0$

<u>Ответ:</u> $u = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t) X(x) Y(y)$, где $X(x) = \sin nx$; $Y(y) = \sin ny$

$T_{12} = \cos\sqrt{5}t$; $T_{34} = \frac{1}{5}\sin 5t$

20.59. Дана тонкая квадратная пластинка ($0 < x < l$, $0 < y < l$), для которой известно начальное распределение температуры $u|_{t=0} = u_0(x, y)$. Боковые стороны $x = 0$ и $x = l$ и стороны оснований $y = 0$, $y = l$ во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластинки в момент времени $t > 0$.

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x,y) \end{cases}$$

1) Решим однородную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде $u = T(t) Z(x,y)$

$$\begin{cases} T'' Z = a^2 T \Delta Z \\ T(t) Z|_{x=0} = T(t) Z|_{x=l} = T(t) Z|_{y=0} = T(t) Z|_{y=l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta Z}{Z} = -\lambda = const \\ Z|_{x=0} = Z|_{x=l} = Z|_{y=0} = Z|_{y=l} = 0 \end{cases}$$

- $\Delta Z = -\lambda Z$

Решение ищем в виде $Z = X(x) Y(y)$

$$\begin{cases} X''Y + Y''X = -\lambda XY \\ X(0)Y = X(\pi)Y = XY(0) = XY(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \hookrightarrow \frac{X''}{X} = -\mu = const$

$X(0) = X(l) = 0$

$X'' + \mu X = 0$

<u>1сл</u> $\mu = -a^2$, $a > 0$

$X = A\,\mathrm{ch}\,ax + B\,\mathrm{sh}\,ax$

$X(0) = X(l) = 0 \hookrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

<u>2сл</u> $\mu = 0$

$X = Ax + B$

$X(0)=X(\ell)=0 \hookrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

3 сл $\mu = a^2,\ a>0$

$X = A\cos ax + B\sin ax$

$X(0)=X(\ell)=0 \hookrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\sin \pi a = 0 \end{cases} \hookrightarrow \ell a = \pi n \hookrightarrow a = \frac{\pi n}{\ell}$

$X_n = \sin \frac{\pi n}{\ell} x$

Аналогично $Y_m = \sin \frac{\pi m}{\ell} y$

2) Разложим неоднородности по x, y в РФ

$u_0(x,y) = \sum\limits_{m,n=1} \alpha_{mn} z_{mn}$

$$\alpha_{mn} = \frac{\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x,y) \sin\frac{\pi n}{\ell}x \sin\frac{\pi m}{\ell} y\, dx dy}{\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} \sin^2\frac{\pi n}{\ell}x \sin^2\frac{\pi m}{\ell} y\, dx dy}$$

3) $u = \sum\limits_{m,n=1} T_{mn}(t) X_{mn}(x) Y_{mn}(y)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{m,n=1} T_{mn}'(t) = a^2 \sum\limits_{m,n=1} T_{mn} \Delta z_{mn} = \left(-\left(\frac{\pi m}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\right) z_{mn} \\ \sum\limits_{m,n=1} T_{mn}(0) z_{mn} = \sum\limits_{m,n=1} \alpha_{mn} z_{mn} \end{cases}$$

При z_{mn}: $\begin{cases} T_{mn}'(t) + a^2\left(\left(\frac{\pi m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\right) = 0 \\ T_{mn}(0) = \alpha_{mn} \end{cases}$

$\begin{cases} T_{mn} = A\exp\left[-ta^2\left(\left(\frac{\pi m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\right)\right] \\ A = \alpha_{mn} \end{cases}$

Ответ: $u = \sum\limits_{n,m=1} T_{mn}(t) X_{mn}(x) Y_{mn}(y)$, где $X_{mn} = \sin\frac{\pi n}{\ell}x$, $Y_{mn} = \sin\frac{\pi m}{\ell} y$

$T_{mn} = \alpha_{mn} \exp\left[-ta^2\left(\left(\frac{\pi m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\right)\right]$,

$$\alpha_{mn} = \frac{\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x,y) \sin\frac{\pi n}{\ell}x \sin\frac{\pi m}{\ell} y\, dx dy}{\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} \sin^2\frac{\pi n}{\ell}x \sin^2\frac{\pi m}{\ell} y\, dx dy}$$

III Метод Фурье с применением ф-ции Бесселя

1. Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ достаточно гладкая функция, (r, φ) – полярные координаты.

а) $u_t = 9\Delta u + e^{-2t} J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad r<2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t>0;$

$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

$u|_{r=2} = 0 \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$

где $f(r) \in C^1[0,2]$, $\quad f(2)=0, \quad \mu_3^{(1)}$ – положительный нуль функции Бесселя $J_1(\xi)$.

1) Решим однородную задачу:

$\begin{cases} u_t = 9\Delta u \\ u|_{r=2} = 0 \end{cases}$

Ищем реш-е в виде $u = T(t) z(r, \varphi)$

$\begin{cases} T' z = 9 T \Delta z \\ T z|_{r=2} = 0 \end{cases} \hookrightarrow \frac{T'}{9T} = \frac{\Delta z}{z} = -\lambda = const$

$\begin{cases} \Delta z + \lambda z = 0 \\ z|_{r=2} = 0 \end{cases}$

Вводим $z_3 = \Phi_1 J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)$, где $\Phi_1 = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, и $\tilde{z}_\ell = \tilde{\Phi}_1 J_1\left(\frac{\mu_\ell^{(1)}}{2} r\right)$, где $\tilde{\Phi}_1 = \sin\varphi$

$\Delta z_3 = -\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2 z_3$; $\Delta \tilde{z}_\ell = -\left(\frac{\mu_\ell^{(1)}}{2} r\right)^2 \tilde{z}_\ell$

Ищем реш-е задачи в виде $u = T_3(t) z_3 + \sum\limits_{\ell=0} \tilde{T}_\ell(t) \tilde{z}_\ell$

2) Разложим неоднородности по r в РФ

$f(r) = \sum\limits_{\ell=0} \alpha_\ell \tilde{z}_\ell$

$$\alpha_\ell = \frac{\int_0^2 r f(r) J_1\left(\frac{\mu_\ell^{(1)}}{2} r\right) dr}{\int_0^2 r J_1^2\left(\frac{\mu_\ell^{(1)}}{2} r\right) dr}$$

3) $T_3' z_3 + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l' \tilde{z}_l = 9 T_3 \underbrace{\Delta z_3}_{=-\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2 z_3} + 9 \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l \Delta \tilde{z}_l + e^{-2t} z_3$

$T_3(0) z_3 + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l(0) \tilde{z}_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \tilde{z}_l$

При z_3: $\begin{cases} T_3' + 9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2 T_3 = e^{-2t} \\ T_3(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_3 = \frac{\exp\left(-9t\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2\right)}{2 - 9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2} + \frac{e^{-2t}}{9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2 - 2}$

При $\tilde{z}_l$: $\begin{cases} \tilde{T}_l' - 9\tilde{T}_l = 0 \\ \tilde{T}_l(0) = \alpha_l \end{cases} \hookrightarrow \tilde{T}_l = \alpha_l e^{9t}$

<u>Ответ</u>: $u = \left(\frac{\exp\left(-9t\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2\right)}{2 - 9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2} + \frac{e^{-2t}}{9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)^2 - 2}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{9t} \sin\varphi \, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2} r\right)$,

$\alpha_l = \frac{\int_0^2 r f(r) J_1\left(\frac{\mu_l^{(1)}}{2} r\right) dr}{\int_0^2 r J_1^2\left(\frac{\mu_l^{(1)}}{2} r\right) dr}$

б) $2u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 3\varphi \cos\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
$u|_{r=1} = 0 \quad t > 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$\sin 3\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}(\sin 4\varphi + \sin 2\varphi)$

1) Решим однородную задачу

$\begin{cases} 2u_{tt} = \Delta u \\ u|_{r=1} = 0 \end{cases}$

Ищем реш-е в виде $u = T(t) Z(r, \varphi)$

$\begin{cases} 2T'' Z = T \Delta Z \\ TZ|_{r=1} = 0 \end{cases} \hookrightarrow \frac{T''}{2T} = \frac{\Delta Z}{Z} = -\lambda = const \hookrightarrow \Delta Z + \lambda Z = 0$

Вводим $z_k = \Phi_4 J_4(\mu_k^{(4)} r)$, $\Phi_4 = \sin 4\varphi$, и $z_l = \Phi_2 J_2(\mu_k^{(2)} r)$, $\Phi_2 = \sin 2\varphi$

$\Delta z_k = -(\mu_k^{(4)} r)^2 z_k$; $\Delta z_l = -(\mu_k^{(2)} r)^2 z_l$

Ищем реш-е в виде $u = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) z_k + \sum_{l=0}^{\infty} T_l(t) z_l$

2) Разложим неоднородность по r в РФ:

$\frac{1}{2} f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k$, $\alpha_k = \frac{\int_0^1 r \frac{1}{2} f(r) J_4(\mu_k^{(4)} r) dr}{\int_0^1 r J_4^2(\mu_k^{(4)} r) dr}$

$\frac{1}{2} f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_l z_l$, $\beta_l = \frac{\int_0^1 r \frac{1}{2} f(r) J_2(\mu_k^{(2)} r) dr}{\int_0^1 r J_2^2(\mu_k^{(2)} r) dr}$

3) $2\sum_{k=0}^{\infty} T_k'' z_k + 2\sum_{l=0}^{\infty} T_l'' z_l = \sum_{k=0}^{\infty} T_k \Delta z_k + \sum_{l=0}^{\infty} T_l \Delta z_l + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k + \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l z_l$

При z_k: $\begin{cases} 2T_k'' + (\mu_k^{(4)} r)^2 T_k = \alpha_k \\ T_k'(0) = 0 \\ T_k(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_k = \frac{\alpha_k}{2} t^2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k^{(4)} r} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k^{(4)} r t\right)$

При z_l: $\begin{cases} 2T_l'' + (\mu_k^{(2)} r)^2 T_l = \beta_l \\ T_l'(0) = 0 \\ T_l(0) = 0 \end{cases} \hookrightarrow T_l = \frac{\beta_l}{2} t^2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_l^{(2)} r} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_l^{(2)} r t\right)$

<u>Ответ</u>: $u = \sum_{k=0}^{\infty} T_k z_k + \sum_{l=0}^{\infty} T_l z_l$, где $z_k = \Phi_4 J_4(\mu_k^{(4)} r)$, $\Phi_4 = \sin 4\varphi$

$z_l = \Phi_2 J_2(\mu_k^{(2)} r)$, $\Phi_2 = \sin 2\varphi$

$T_k = \frac{\alpha_k}{2} t^2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k^{(4)} r} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k^{(4)} r t\right)$; $T_l = \frac{\beta_l}{2} t^2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_l^{(2)} r} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_l^{(2)} r t\right)$

$\alpha_k = \frac{\int_0^1 r \frac{1}{2} f(r) J_4(\mu_k^{(4)} r) dr}{\int_0^1 r J_4^2(\mu_k^{(4)} r) dr}$; $\beta_l = \frac{\int_0^1 r \frac{1}{2} f(r) J_2(\mu_k^{(2)} r) dr}{\int_0^1 r J_2^2(\mu_k^{(2)} r) dr}$

в) $u_t = \Delta u, \quad r < 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = (r-2)^2, \quad r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
$u|_{r=2} = 16t \sin 5\varphi \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

<u>Оман</u>: $u_{зн} = A(r) t \sin 5\varphi = t A(r) \sin 5\varphi$

$u|_{r=2} = t A(r) \sin 5\varphi = 16 t \sin 5\varphi \hookrightarrow A(r) = 16$

$u = u_{зн} + V \Rightarrow A(r) \sin 5\varphi + V_t = t \Delta(A(r) \sin 5\varphi) + \Delta V$

Хотим, чтобы $\Delta(A(r) \sin 5\varphi) = 0 \hookrightarrow A''(r) \sin 5\varphi + \frac{1}{r} A'(r) \sin 5\varphi + \frac{1}{r^2} A(r)(-25 \sin 5\varphi) = 0$

$A'' + \frac{1}{r} A' - \frac{25}{r^2} A = 0 \hookrightarrow r^2 A'' + r A' - 25 A = 0$ — ур-е Эйлера

Замена: $A(r) = z(t)$, $r = e^t$

$r^2 A'' \hookrightarrow \ddot{z} - \dot{z}$; $r A' \hookrightarrow \dot{z}$ $\Rightarrow \ddot{z} - 25 z = 0 \hookrightarrow z = C e^{5t} + D e^{-5t} \hookrightarrow A(r) = C r^5 + \frac{D}{r^5}$, где $D = 0$, т.к. задача в круге

$u_{зн}|_{r=2} = 16 t \sin 5\varphi \hookrightarrow C = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow u = \frac{1}{2} t r^5 \sin 5\varphi + V$

$V_t = \Delta V - \frac{1}{2} r^5 \sin 5\varphi$

$V|_{t=0} = (r-2)^2$

$V|_{r=2} = 0$

Ищем $z_k = \Phi_5 J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right)$, $\Phi_5 = \sin 5\varphi$

$-\frac{1}{2} r^5 = \sum_k \alpha_k J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right)$, $\alpha_k = \frac{\int_0^2 r\left(-\frac{1}{2}r^5\right)}{\int_0^2 r J_5^2\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) dr} J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) dr$

$(r-2)^2 = \sum_l \beta_l J_0\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2} r\right)$, $\beta_l = \frac{\int_0^2 r^0 (r-2)^2 J_0\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2} r\right) dr}{\int_0^2 r J_0^2\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2} r\right) dr}$

Вводим $z_k = \Phi_5 J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right)$ и $\tilde{z}_l = \Phi_0 J_0\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2} r\right)$

$\Delta z_k = -\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 z_k$ и $\Delta \tilde{z}_l = -\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2}\right)^2 \tilde{z}_l$

Ищем реш-е задачи в виде $V = \sum_k T_k(t) z_k + \sum_l \tilde{T}_l(t) \tilde{z}_l$

$\Rightarrow \sum_k T_k'(t) z_k + \sum_l \tilde{T}_l'(t) \tilde{z}_l = \sum_k T_k(t) \underbrace{\Delta z_k}_{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 z_k} + \sum_l \tilde{T}_l(t) \underbrace{\Delta \tilde{z}_l}_{-\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2}\right)^2 \tilde{z}_l} + \sum_k \alpha_k z_k$

$\sum_k T_k(0) z_k + \sum_l \tilde{T}_l(0) \tilde{z}_l = \sum_l \beta_l \tilde{z}_l$

При z_k: $T_k'(t) = -\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 T_k(t) + \alpha_k$ $\hookrightarrow T_k = \frac{\alpha_k}{\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2}\left(1 - e^{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 t}\right)$

$T_k(0) = 0$

При $\tilde{z}_l$: $\tilde{T}_l'(t) = \tilde{T}_l(t) \cdot \left(-\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2}\right)^2\right)$ $\hookrightarrow \tilde{T}_l = \beta_l e^{-\left(\frac{\mu_l^{(0)}}{2}\right)^2 t}$

$\tilde{T}_l(0) = \beta_l$

$u = V + u_{гч}$ – ответ

20.34. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

если:

1) $u_0(x) = u_1(x) = J_2(\mu_k x)$;

1) Решим однородную задачу:

$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{4u}{x^2} \\ u|_{x=1} = 0 \end{cases}$

Ищем реш-е в виде $u = T(t) X(x)$

$T'' X = X'' T + \frac{1}{x} T X' - \frac{4}{x^2} T X \hookrightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{1}{x}\frac{X'}{X} - \frac{4}{x^2} = -\lambda = const$

$x^2 X'' + x X' - 4X + \lambda x^2 X = 0$

Если $X = J_2(\mu_k x)$: $\mu_k x = \rho \hookrightarrow X' = \mu_k J_2'(\mu_k x)$ и $\rho^2 J_2''(\rho) + \rho J_2'(\rho) - 4 J_2(\rho) = -\rho^2 J_2$

Тогда $\frac{T''}{T} = -\mu_k^2$, $T'' + T\mu_k^2 = 0 \to T = A\cos\mu_k t + B\sin\mu_k t$

$T(0) J_2(\mu_k x) = J_2(\mu_k x) \to T(0) = 1$, $T'(0) = 1 \Rightarrow T = \cos\mu_k t + \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t$

Ответ: $u = T_k X_k$, T и X нашли в ходе решения

20.62. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + f(t)J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

если:

1) $f(t) = \sin t$; 2)* $f(t) = e^{-t}$,

где μ_k — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$.

4. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ – последовательные корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. Доказать, что если $m \neq n$, то

$$\int_0^1 r J_2(\mu_n r) J_2(\mu_m r) dr = 0.$$

(Указание: воспользоваться ортогональностью собственных функций соответствующего оператора).

Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ - посл-е корни ур-я $J_2'(\mu) = 0$. Д-ть, что при $n \neq m$

$\int_0^1 r J_2(\mu_n r) J_2(\mu_m r) = 0$ (r - весовая ф-я => это ортогон. с весом)

Вспоминаем ф-лу Грина: $\iint_D (\Delta U v - U \Delta v) dxdy = \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$

Пусть U и V - соб. ф-ции Δ: для краев. з-чи $\begin{cases} \Delta U = \lambda_1 U & \text{в } D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \end{cases}$ и

вот из прав части Грина и этого

$\begin{cases} \Delta v = \lambda_2 v \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \iint_D (\Delta U v - U \Delta v) dxdy = (\lambda_1 - \lambda_2) \iint_D U v \, dxdy = 0 \Rightarrow U$ и V ортог при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

D: $x^2 + y^2 < R_1^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ Обл-ть круговая => нормаль идёт по напр. радиуса

$U = \Phi_2(\varphi) J_2(\mu_n r)$, $V = \Phi_2(\varphi) J_2(\mu_m r)$, $\Phi_2 = \cos 2\varphi$ =>

$\underbrace{\iint_D UV dxdy}_{=0} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi}_{\neq 0} \int_0^1 r J_2(\mu_n r) J_2(\mu_m r) dr$ якобиан

Якобиан и есть весовая ф-я

=> $\int_0^1 \ldots = 0$ → бессели ортогон => по ним м/о разложить в ряд.