ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Уравнения математической физики»
3 курс, 5–6 семестры, 2022/2023 уч.г.
(Поток Михайловой Т.В.)

1. *Линейное ДУ в частных производных второго порядка. Определение решения. Классификация ДУ в частных производных второго порядка. Понятие характеристики. Характеристики для линейных ДУ в частных производных второго порядка на плоскости.*

2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной:
   - постановка задачи Коши;
   - определение решения задачи Коши;
   - необходимые условия существования решения; формула Даламбера;
   - непрерывная зависимость решения от начальных функций;
   - *постановка локализованной задачи Коши;*
   - *формула Даламбера в случае локализованной задачи Коши и области зависимости решения локализованной задачи Коши от начальных функций.*

   Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).

3. Волновое уравнение в случае трех пространственных переменных:
   - постановка задачи Коши;
   - определение решения;
   - необходимые условия существования решения;
   - теорема о существовании решения (обоснование формулы Кирхгофа);
   - теорема о единственности решения задачи Коши;
   - теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных функций.

4. Волновое уравнение в случае двух пространственных переменных:
   - постановка задачи Коши;
   - определение решения;
   - необходимые условия существования решения;
   - теорема о существовании решения (обоснование формулы Пуассона) - метод спуска;
   - теоремы о единственности решения и о непрерывной зависимости решения от начальных функций.

   Распространение волн в случае двух и трех пространственных переменных. О диффузии волн.

5. Задача Коши для уравнения теплопроводности:
   - постановка задачи Коши;
   - определение решения задачи Коши;
   - необходимые условия существования решения;
   - теорема о существовании решения (обоснование формулы Пуассона);
   - бесконечная дифференцируемость решения задачи Коши;
   - класс единственности решения задачи Коши (ограниченность в каждой полосе);
   - теорема о единственности решения задачи Коши;
   - принцип максимума;
   - теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальной функции.

   Отсутствие непрерывной зависимости решения для случая «обратной» теплопроводности.

6. Смешанная задача для уравнения теплопроводности (случай одной пространственной переменной):
   - постановка задачи;

- определение решения;
- необходимые условия разрешимости (условия гладкости и условие согласования);
- лемма-принцип максимума;
- теорема о единственности решения;
- теорема о непрерывной зависимости решения от метод Фурье решения смешанной задачи;
- теорема о существовании решения (обоснование метода Фурье).

7. Смешанная задача для волнового уравнения (случай одной пространственной переменной):
   - постановка задачи; определение решения;
   - необходимые условия разрешимости (условия гладкости и условия согласования);
   - лемма (метод интеграла энергии);
   - теорема о единственности решения;
   - теорема о непрерывной зависимости решения от начальных функций;
   - метод Фурье решения смешанной задачи;
   - теорема о существовании решения (обоснование метода Фурье) – в этом году без доказательства.

8. *Оператор $-\Delta$ с однородными граничными условиями Дирихле в ограниченной области:*
   - *симметричность;*
   - *положительность собственных значений;*
   - *ортогональность собственных функций.*

   Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Дифференциальное уравнение Бесселя порядка $n(n = 0, 1, 2, ...)$. Функции Бесселя порядка $n(n = 0, 1, 2, ...)$ и их свойства. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в круге при однородном условии Дирихле.

9. Гармонические функции:
   - определение;
   - гармонические функции в $Rn, n = 2, 3, \dots$, которые зависят только от $|x|$;
   - фундаментальное решение уравнения Лапласа.

   Первая формула Грина. Вторая формула Грина. Следствие из Второй формулы Грина для гармонической в области функции. Интегральное представление функции, гладкой в замыкании ограниченной области. Понятие потенциалов. Интегральное представление гармонической функции, гладкой в замыкании области. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о поверхностном среднем. Теорема об объемном среднем. Теорема–строгий принцип максимума для гармонических функций. Теорема–ослабленный принцип максимума для гармонических функций. Теорема об устранении особенности. Теорема Лиувилля.

10. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области:
    - постановка задачи Дирихле;
    - определение решения;
    - необходимые условия разрешимости;
    - теорема о единственности решения;
    - теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции.

    Существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:

    - ядро Пуассона;
    - теорема о существовании решения (обоснование формулы Паусcона).

11. Задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре:
    - постановка задачи; определение решения;

- необходимые условия разрешимости задачи;
- теорема об общем виде решения;
- теорема о существовании решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в шаре.

12. *Задача Дирихле в области внешнего типа (все доказательства для случая $n = 3$):*
    - *преобразование инверсии;*
    - *преобразование Кельвина функции $u(x)$ и его свойства (в частности преобразование Кельвина гармонической функции);*
    - *области внешнего типа;*
    - *понятие гармонической функции, регулярной на бесконечности;*
    - *связь регулярности на бесконечности функции $u(x)$ и гармоничности преобразования Кельвина функции $u(x)$;*
    - *принцип максимума и следствие из него (случай $n = 3$);*
    - *постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области внешнего типа;*
    - *определение решения;*
    - *необходимые условия разрешимости задачи;*
    - *теорема о единственности решения;*
    - *теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции;*
    - *теорема о существовании решения от задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара (случай $n = 3$).*

13. Линейные интегральные уравнения с непрерывным ядром в ограниченной области (уравнения Фредгольма второго рода):
    - определение решения;
    - характеристические числа ядра, собственные функции;
    - сопряженное ядро;
    - определение вырожденного ядра;
    - теоремы Фредгольма (доказательства проводятся для случая вырожденного ядра).

Примечание: *Вопросы, выделенные курсивом, можно знать без доказательства.*