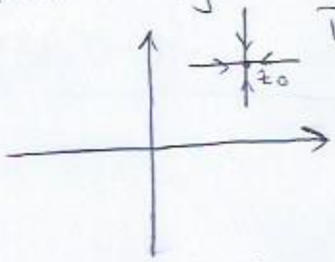
Тема 2. Понятия производной и дифференцируемости функций по комплексному переменному. Критерий дифференцируемости в точке. Понятие функции, регулярной в области.

$z = x + iy$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – функция комплексного переменного



Предел как у вектор-функций

Def: Производная функций комплексного переменного:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

NB: можно приближаться с разных сторон

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

При приближении вдоль Ox (действительной оси): $u_x + iv_x$
вдоль мнимой: $-iv_y + u_y$

} пределы должны быть равны, чтобы производная не зависела от направления.

Def. Функция дифференцируема в точке z, если в некоторой её окрестности она представима в виде $f(z+\Delta z) = f(z) + A\Delta z + o(\Delta z)$ при $\Delta z \to 0$

Утв. $A = f'(z)$

$$\blacktriangle\ \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = A + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = A$$

Если известно, что производная существует, то можно представить, как

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z),\quad \alpha(\Delta z) \xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$$

Функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), если $\exists$ такое представление:

$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

Th (критерий дифференцируемости в точке, условия Коши–Римана)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \Leftrightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) [в вещественном смысле] и выполняются условия $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ в (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ Из последней системы:

$$\left.\begin{array}{l} a = u_x\ ;\ b = -u_y \\ b = v_x\ ;\ a = v_y \end{array}\right| \Rightarrow$$ выполняются условия Коши-Римана

$\Leftarrow$ Запишем дифференцируемость:

$$+\ \begin{array}{l} u(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + u_x\Delta x + u_y\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) = v(x,y) + v_x\Delta x + v_y\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \mid \cdot i \end{array}$$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + iv(x,y) + \underline{(u_x+iv_x)\Delta x + (u_y+iv_y)\Delta y} + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$ — комплекснозначное

$$(u_x+iv_x)\Delta x + (-v_x+iu_x)\Delta y = (u_x+iv_x)\underbrace{(\Delta x+i\Delta y)}_{\Delta z},$$ т.е.:

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (u_x+iv_x)\Delta z + o(|\Delta z|) \Rightarrow f'(z) = u_x + iv_x \ ■$$

Def. Функция f наз. регулярной (голоморфной, аналитической) в точке z_0, если она дифференцируема в некоторой окрестности z_0.

Def. Область — открытое линейно связное множество.

Def. Область наз. односвязной, если любой непрерывный замкнутый контур можно непрерывной деформацией стянуть в точку.

Тема 3. Понятие интеграла по кривой от функции комплексного переменного. Основные свойства интеграла. Первообразная и полный дифференциал в области.
Лемма Гурса. Теорема Коши (д-во д/выпуклой ~~обл~~ области)

$\int_\gamma f(z)dz$ $\quad \gamma$ - кусочно-гладкая кривая
$f(z)$ - непрерывна на γ

гладкая: непрерывно дифференцируема
$\overline{z} = \overline{z}(t)$
$\overline{z}(t)$ - непрерывна
$\overline{z}'(t) \neq 0$

кусочно-гладкая: конечное число особых точек (производная равна нулю или не существует)

$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \quad f(t) = u(t) + iv(t), t \in R$

$= \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt$

Свойства:

1°) $\int_\alpha^\beta c f(t)dt = c\int_\alpha^\beta f(t)dt$ ▲ $c = a+bi$

$\int_\alpha^\beta (a+bi)(u(t)+iv(t))dt = \int_\alpha^\beta (au(t) - bv(t)) +$

$+ i(av(t) + bu(t)))dt = \int_\alpha^\beta (au(t) - bv(t))dt + i\int_\alpha^\beta (av(t) + bu(t))dt =$

$= a\int_\alpha^\beta u(t)dt - b\int_\alpha^\beta v(t)dt + ia\int_\alpha^\beta v(t)dt + ib\int_\alpha^\beta u(t)dt = a\int_\alpha^\beta (u(t)+iv(t))dt +$

$+ bi\int_\alpha^\beta (u(t)+iv(t))dt = (a+bi)\int_\alpha^\beta [u(t)+iv(t)]dt$ ■

2°) $\int_\gamma [f(t)+g(t)]dt = \int_\gamma f(t)dt + \int_\gamma g(t)dt$

3°) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(t)||dt|$ ▲ $\left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt =$

$= \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt = \int_\gamma |f(z)||dz|$ ■

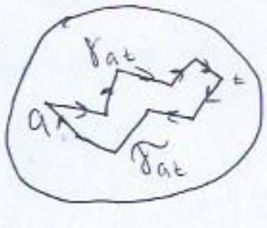
Th. Пусть $\mathcal{D}$ — область, $f(z)$ непрерывная в $\mathcal{D}$. Тогда $f(z)$ — полный дифференциал $\iff \forall$ замкнутой кривой γ в $\mathcal{D}$ $\mapsto \int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$

$\Rightarrow$] $\int\limits_\gamma \underbrace{f(z)\,dz}_{dF(z)=F'(z)dz} = \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt =$

$= F(z(b)) - F(z(a)) = 0$
(т.к. кривая замкнутая)

$\Leftarrow$] $\forall$ замкнутой ломаной γ в $\mathcal{D}$ верно $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow f(z)\,dz$ — полный дифференциал в $\mathcal{D}$.

Δ



$F(z) = \int\limits_{\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta$

$\int\limits_{\gamma_{az}-\tilde\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta = 0 \qquad \int\limits_{\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\tilde\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta$

от выбора ломаной ничего не зависит

$F'(z_0) \overset{?}{=} f(z_0)$

малая окрестность точки z_0.

$\underbrace{\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right|}_{\exists \lim,\ \text{равный } f(z_0)} =$

$F(z) = \int\limits_{\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = F(z_0) + \int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$

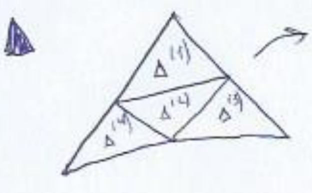
$f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int\limits_{[z_0,z]} f(z_0)\,d\zeta$

$= \left|\frac{1}{z-z_0}\int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{z-z_0}\int\limits_{[z_0,z]} f(z_0)\,d\zeta\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\left|\int (f(\zeta) - f(z_0))\,d\zeta\right| \leq$

$\leq \frac{1}{|z-z_0|}\int\limits_{[z_0,z]} \underbrace{|f(\zeta)-f(z_0)|}_{\leq\varepsilon}\,|d\zeta| \leq \frac{1}{|z-z_0|}\,\varepsilon\cdot|z-z_0| = \varepsilon$ ■

Лемма Гурса. $f(z)$ регулярна в $\mathcal{D}$; Δ — треугольник, $(\Delta \cup \partial\Delta) \subset \mathcal{D} \Rightarrow \oint\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

▲



разбили Δ-ник на 4 части (по средним линиям)

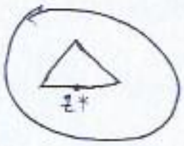
$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4}\int\limits_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)\,dz$

$\exists j: \left|\int\limits_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$

$\left|\int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$

$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$

z^* – общая точка всех Δ_n



f дифференцируема в z^*:

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \varepsilon$$

рассматриваем n достаточно большой, чтобы неравенство выполнялось:

$$| f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) | < \varepsilon |z - z^*|$$

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} \big(f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)\big) dz \right| \leq \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z^*|\,|dz| \leq \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} P(\Delta_n)\,|dz| =$$

периметр Δ_n

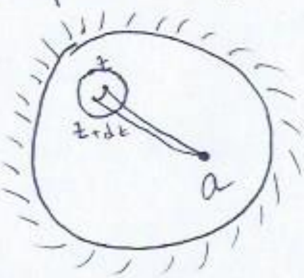
константа

интеграл от $|dz|$ – длина кривой

$$= \varepsilon P^2(\Delta_n) = \varepsilon \left(\frac{P(\Delta)}{2^n} \right)^2$$

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{4^n} P^2(\Delta) \blacksquare$$

Интегральная th. Коши для выпуклой области:



$\mathcal{D}$ – выпуклая область, $a \in \mathcal{D}$

f регулярна в $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, f непр в a $\mathcal{D} \Rightarrow \forall$ замкнутой кривой $\gamma \subset \mathcal{D} \longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

$\blacktriangle$ Возьмем точку a, и, как бы z мы ни взяли, отрезок az целиком лежит в $\mathcal{D}$, в силу выпуклости

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$F(z+\Delta z) - F(z)$$

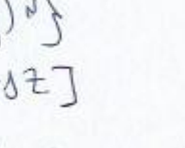
$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{[a,z+\Delta z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z,z+\Delta z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$f(z)$ регулярная в $\mathcal{D}$, непрерывно продолжается на $\partial\mathcal{D}$

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)\,dz = 0 \blacksquare$$

~~Интегральная th Коши для круга~~



~~$f(z)$ регулярна в круге $|z-a| \leq R$~~

~~$\forall z$ внутри $f(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ – (равен нулю в $\forall$ точке)~~

th. Коши. Пусть Ω — ограниченная область, граница которой — конечное объединение кусочно-гладких кривых. Пусть f непр. на $\overline{\Omega}$ и f — голо. на Ω. Тогда интеграл по ориентированной границе $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$

Тема 4. Интегральная формула Коши.

Th (интегральная формула Коши)

Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z-a|\le R$ ($f(z)$ регулярна в области, чуть большей, чем круг)

Тогда $\forall z$ внутри круга $\hookrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$

$|\zeta-a|=R$ – интеграл по границе круга

Δ Фиксируем точку z и рассмотрим функцию $h(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$. Функция $h(\zeta)$ регулярна в круге без точки z.

$\lim\limits_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} = f'(z)$ – в силу регулярности f. Этакой предел.

Доопределим $h(\zeta) = \begin{cases}(f(\zeta)-f(z))/(\zeta-z)\\ f'(z),\ \zeta = z\end{cases}$ – непрерывна

(в точке $\zeta = z$ по непр.)

$\oint \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta = 0$ (по интегральной th. Коши для выпуклой области)

Разобьем на два интеграла: $\oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = f(z)\oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ (*)

Обозначим $g(z) = \oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$; $g'(z) = \oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \oint\limits_{|\zeta-a|=R} d\left(-\frac{1}{\zeta-z}\right) = 0 \Rightarrow g(z) = const$

$g(a) = \oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{d\zeta}{\zeta-a} = 2\pi i = g(z)\ \forall (z)$

Тогда из (*) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ ∎

Тема 6. Степенной ряд и круг его сходимости. Ряд Тейлора. Разложение регулярной функции в степенной ряд.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ – степенной ряд $\exists R: |z-z_0|<R \Rightarrow$ ряд сходится
$|z-z_0|>R \Rightarrow$ ряд расходится

$\to$ при почленном дифференцировании или интегрировании ряда радиус сходимости не изменяется

$\to$ на любом круге, радиуса меньшим радиуса сх-ти, степенной ряд сх-ся равномерно

<u>**Def.**</u> Ряд Тейлора – ряд вида $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

<u>**Th.**</u> (о разложении регулярной функции в степенной ряд)

Пусть f регулярна в D. Тогда $\forall z_0 \in D$ в окрестности этой точки ф-ию f м/о разложить в степенной ряд, который для f является рядом Тейлора.

$\triangle$ По интегральной th. Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \;=$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \frac{1}{\xi-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^k$$

$(\xi - z_0 > z - z_0)$

сумма беск. убывающей прогрессии

$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=r}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi \;= \;\to$ хотим поменять порядок суммирования и интегрирования, нужно д-ть равномерную сх-ть подынтегральной ф-ии.

Признак Вейерштрасса: $\left.\begin{array}{l}\forall z \in G: |f_k(z)| \le g_k \\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k - \text{сх-ся}\end{array}\right| \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ сх-ся равномерно на G.

Воспользуемся признаком Вейерштрасса: $\left|\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right| \le M\frac{t^k}{r}$ $0<t<1$ – бесконечно убывающая геом. прогрессия

$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = t \in (0,1)$, $f(\xi)$ – непр. на компакте $\Rightarrow |f(\xi)| \le M$

$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k \underbrace{\oint\limits_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ ■

$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ – из th о диф-ии интеграла Коши

Тема 8. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце.

Def. $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k}_{|z-a|<R}$$

Замена: $\frac{1}{z-a}=w$, $k=-l \to \sum_{l=1} c_{-l} w^l$ – степенной ряд $|w|<r \to \frac{1}{|z-a|}<r \to |z-a|>\frac{1}{r}$

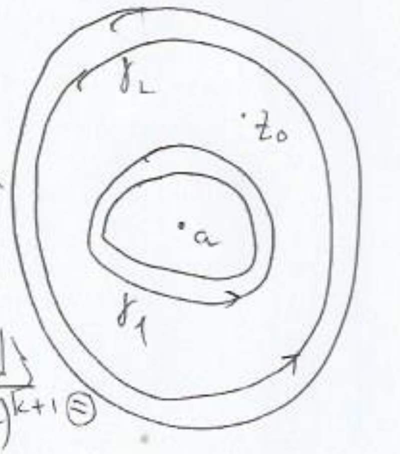
$\frac{1}{r}<|z-a|<R$ – кольцо сходимости

Th 1 (о разложении в ряд Лорана ф-ции, регулярной в кольце)

Если f регулярна в кольце $r<|z-a|<R$, то в этом кольце f м/о разложить в ряд Лорана: $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k$, где $c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta$

▲ Воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$f(z_0)=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta}_{J_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta}_{J_2}$$



J_1: $$\frac{1}{\zeta-z_0}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z_0-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z_0-a}{\zeta-a}\right)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z_0-a}{\zeta-a}\right)^k$$

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\zeta)(z_0-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}\right)d\zeta \underset{\text{признак Вейерштрасса}}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}(z_0-a)^k\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}} =$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z_0-a)^k, \text{ где } c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta$$

J_2: $$-\frac{1}{\zeta-z_0}=\frac{1}{(z_0-a)-(\zeta-a)}=\frac{1}{(z_0-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z_0-a}\right)}=\frac{1}{z_0-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z_0-a}\right)^k$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}f(\zeta)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z_0-a)^{k+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z_0-a)^{k+1}}\cdot\oint_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta-a)^k d\zeta \overset{[-k-1=m]}{=}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{-1}(z_0-a)^m\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta=\sum_{m=-\infty}^{-1}c_m(z_0-a)^m,\quad c_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta$$

По интегральной th Коши для полной границы кольца ($f(z)$ – голоморфна):

$\oint_{\Gamma_1}f(z)dz+\oint_{\Gamma_2}f(z)dz=0 \Rightarrow \oint_{\Gamma_1}f(z)dz=-\oint_{\Gamma_2}f(z)dz \Rightarrow$ окружность интегрирования м/о выбрать любую

Th (единственность разложения в ряд Лорана)

Если $f(z)$ голом. в кольце $r<|z-a|<R$ и разложена в ряд $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k(z-z_0)^k$, то

$b_k = c_k \ \forall k$ (c_k — коэф-т ряда Лорана)

▲ $\frac{f(z)}{2\pi i(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^{n-k+1}}$ (по условию). Пусть $\rho\in(r,R)$, тогда:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}_{c_n} = \frac{1}{2\pi i}\sum^{+\infty} b_k\oint\frac{dz}{(z-z_0)^{n-k+1}}\left[\begin{matrix}\neq 0 \text{ только при } n-k+1=1 \\ n=k!!!\end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i}b_n 2\pi i = b_n$$

Можно сменить порядок интегрирования и суммирования, т.к., разбивая ряд на два, получаются степенные ряды, каждый из которых на окружности ρ сх-ся равномерно. ■

Тема 12. Классификация изолированных точек однозначного характера по структуре главной части разложения в ряд Лорана.

Def. z_0 — особая точка f, если f не является регулярной в z_0.

Изолированные особые точки ($\exists$ проколотая окрестность, где ф-ия регулярная):

1) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — $\exists$ и $\neq \infty$ $\longrightarrow$ устранимая особая точка

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — $\exists$ и $=\infty$ — полюс

3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — нет предела $\longrightarrow$ СОТ (существенная особая точка)

Th. (особые точки)

Пусть f регулярна в $0<|z-a|<R$, $z=a$ — особая точка f; f м/о разложить в ряд Лорана, т.е.

$$f(z)=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k}_{\text{регулярная (правильная)}}.$$

Тогда: a — УОТ $\Leftrightarrow$ главная часть $=0$

a — полюс $\Leftrightarrow$ в главной части конечное число членов

a — СОТ $\Leftrightarrow$ в главной части бесконечное число членов

▲ 1) $\Rightarrow$ Если a — УОТ, то f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Из неравенства Коши для коэф-тов ряда Лорана

$|c_k|\le \dfrac{M}{\rho^k}$, где $|f(z)|\le M$ во $\underline{\text{всей}}$ этой окрестности.

нер-во Коши для коэф-тов

Если $k<0$, то $|c_k|\le M\rho^{-k}$ $\Rightarrow$ выбирая сколь угодно малое ρ, получим $c_k=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ главная часть отсутствует (условие существования предела м/о заменить на условие ограниченности ф-ии в окрестности точки).

$\Leftarrow$ Если главная часть отсутствует, то $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$, а сумма сходящегося степенного ряда на своем круге сх-ти — регулярная функция (если в УОТ доопределим ф-ию значением предела в этой точке, то получим регулярную в этой точке ф-ию).

2) $\Leftarrow$ $f(z)=\dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\ldots+\dfrac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots=\dfrac{1}{(z-a)^k}\underbrace{(c_{-k}+\ldots+c_0(z-a)^k+c_1(z-a)^k+\ldots)}_{\text{(регулярная ф-ия) } (h(z),\ h(a)\neq 0)}$

$f(z)=\dfrac{h(z)}{(z-a)^k}$, $h(z)$ — регулярна в $z=a$, $h(a)\neq 0$

k — порядок полюса, $z=a$ — полюс k-ого порядка f.

2) $\Rightarrow$ Пусть a - полюс $f(z)$

$g(z) = \frac{1}{f(z)}$; $\lim\limits_{z \to a} g(z) = 0 \Rightarrow z = a$ - УОТ $g(z)$

в разложении $g(z)$ нет главной части

$$g(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k (z-a)^k = (z-a)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} c_k (z-a)^{k-n}}_{h(z) \text{ и } h(a) \neq 0}$$

$c_n \neq 0$ первый ненулевой

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^n h(z)} = \frac{1/h(z)}{(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{c}_k (z-a)^k, \ \tilde{c}_0 \neq 0$$

(получили конечное число членов в главной части). ■

Тема 13. Понятие вычета.
Теорема Коши о вычетах. Нахождение вычетов.

Def. $\operatorname{res} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$, z_0 — изолированная особая точка ($z_0 \neq \infty$)

Если z_0 — изолированная особая точка, то существует такая окрестность z_0, где f голо. В этой проколотой окрестности мы и выбираем ~~окрестность~~ окружности, по которой будем интегрировать.

$\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$ — коэффициент при степени -1 в разложении ряда Лорана.

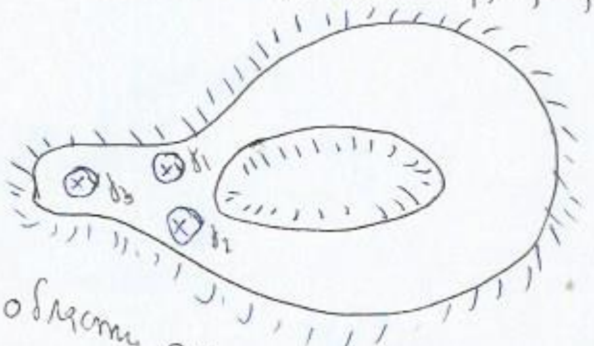
Для бесконечности: $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz = -c_{-1}$, ∞ — изолированная особая точка

(направление обхода контура в другую сторону)

Th. (Коши о вычетах)

Пусть f регулярна в ограниченной области D и непрерывно продолжима на ∂D за исключением, быть может, конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

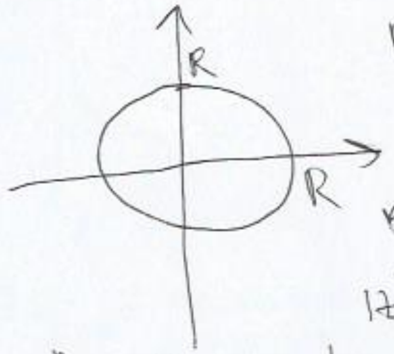


▲ Если из области вырезать круги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, то в оставшейся области функция голоморфна. Для этой оставшейся области применим th Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz + \sum_{k}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0 \\ &\int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \quad \blacksquare$$

Th. Пусть $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 0$

▲ Так как особых конечное число, то $\exists R \longrightarrow |z_k| < R \ \forall k$ (т.е. все особые точки лежат окружности с центром в нуле радиуса R)



Рассмотрим область, ограниченной окружностью радиуса.
Для нее справедлива th. Коши о вычетах:

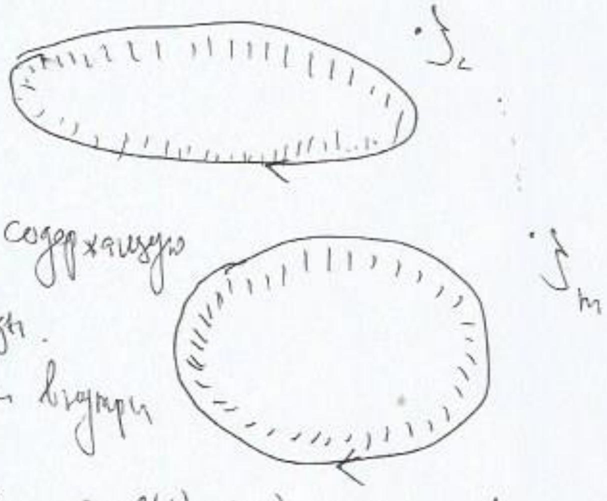
$$\oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz}_{\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)} = 0$$ ■

Th. (Коши о вычетах в бесконечной области)

Пусть $f(z)$ голо. в неограниченной области D за исключением, быть может, конечного особых точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ ($\zeta_1 = \infty$); $f(z)$ непрерывно продолжима на ∂D.

Тогда
$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z=\zeta_k} f(z)$$



▲ Возьмем окружность с центром в нуле, содержащую все особые точки все участки границы.
Применим th. Коши о вычетах к области внутри окружности с вырезанными кусками

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz + \underbrace{\oint f(z)\,dz}_{-2\pi i \operatorname{res} f(z)} = 2\pi i \sum_{k=2}^{m} \operatorname{res}_{z=\zeta_k} f(z)$$

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z=\zeta_k} f(z)$$ ■

3. $\longrightarrow \varphi(z), \psi(z)$ — регулярны в окр-сти z_0
$\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) = 0$
Тогда $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

4. Если z_0 — УОТ ($z_0 \neq \infty$), то $\operatorname{res} = 0$ ($\Leftrightarrow c_{-1}$)

5.) Если $z_0 = \infty$ — УОТ, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim(z(f(\infty) - f(z)))$ ($\Leftrightarrow$)
($z_0 \neq \infty$)

1. $\longrightarrow$ Пусть z_0 — полюс I порядка $f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))$$

2. $\longrightarrow$ Пусть z_0 — полюс k-ого порядка $f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \dots$ ($z_0 \neq \infty$)

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right)\right)$$