Конспект для подготовки к ГОСу. Математический анализ

Редкозубов В.В.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши

Пусть $\{a_n\}$ — (числовая) последовательность, т.е. функция $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение. *Подпоследовательностью* $\{a_{n_k}\}$ последовательности $\{a_n\}$ называется композиция строго возрастающей функции $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(k) = n_k$, и последовательности $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_{n_k} = a \circ \sigma(k)$.

Пример. $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$ — подпоследовательность $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$.

Теорема (Больцано-Вейерштрасс). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

▲ Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, тогда значения всех ее членов принадлежат некоторому отрезку $[c, d]$. Разделим $[c, d]$ пополам и положим $[c_1, d_1] = [c, (c + d)/2]$, если $[c, (c + d)/2]$ содержит значения бесконечного множества членов $\{a_n\}$ (т.е. множество $\{m \in \mathbb{N}\colon a_m \in [c, (c + d)/2]\}$ бесконечно). В противном случае отрезок $[(c + d)/2, d]$ содержит значения бесконечного множества членов $\{a_n\}$ и мы положим $[c_1, d_1] = [(c+d)/2, d]$. Выберем такой номер n_1, что $a_{n_1} \in [c_1, d_1]$. Пусть уже построен отрезок $[c_k, d_k]$, содержащий значения бесконечного множества членов $\{a_n\}$, и выбран $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Обозначим через $[c_{k+1}, d_{k+1}]$ левую половину $[c_k, d_k]$, если она содержит значения бесконечного множества членов $\{a_n\}$; в противном случае через $[c_{k+1}, d_{k+1}]$ обозначим правую половину. Теперь находим такой номер $n_{k+1} > n_k$, что $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$. По индукции будет построена последовательность стягивающихся отрезков $\{[c_k, d_k]\}$ и подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ исходной последовательности. По Т Кантора о вложенных отрезках существует точка $a = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} d_k$. Так как $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ■

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall m \geqslant N\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема (Коши). *Последовательность* $\{a_n\}$ *сходится* $\iff$ $\{a_n\}$ *фундаментальна.*

▲ ($\Rightarrow$) Пусть $\exists a \in \mathbb{R}\colon\ a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется номер N, такой что $(n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда при n, $m \geqslant N$ имеем

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\{a_n\}$ фундаментальна.

($\Leftarrow$) Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена.

По условию фундаментальности найдется такой номер N, что $|a_n - a_m| < 1$ при всех n, $m \geqslant N$. В частности, $a_N - 1 < a_n < a_N + 1$ для всех $n \geqslant N$. Определим $\alpha = \min\{a_N - 1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$ и $\beta = \max\{a_N + 1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$, тогда $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

По Т Больцано–Вейерштрасса $\{a_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, $a_{n_k} \to a$. Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию фундаментальности существует такой номер N_1, что $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех n, $m \geqslant N_1$, и по определению предела существует номер такой N_2, что $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $k \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при любом $n \geqslant N$ имеем

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(учтено, что $n_N \geqslant N$). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Достижение точных граней функции, непрерывной на отрезке

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $a \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\colon\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Функция f *непрерывна* (на E), если она непрерывна в каждой точке множества E.

Теорема (Вейерштрасс). *Если функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна, то существуют точки x_s, $x_i\in[a,b]$, такие что $f(x_s)=\sup\limits_{[a,b]} f$ и $f(x_i)=\inf\limits_{[a,b]} f$.*

▲ Покажем сначала, что f ограничена. Если это не так, то $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]\colon\ |f(x_n)|>n$. По Т Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\to x_0$. Ввиду замкнутости отрезка точка $x_0\in[a,b]$. Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому $f(x_{n_k})\to f(x_0)$, но по построению $|f(x_{n_k})|>n_k\to+\infty$; противоречие.

Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f$. Поскольку f ограничена, то $M\in\mathbb{R}$. По определению супремума $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in[a,b]\colon\ M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M$ и, значит, $f(x_n)\to M$. По Т Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\to x_s$ и $x_s\in[a,b]$. Функция f непрерывна в точке x_s, поэтому $f(x_{n_k})\to f(x_s)$. С другой стороны, $f(x_{n_k})\to M$. В силу единственности предела $f(x_s)=M$.

Точка x_i находится аналогично. ■

Теорема о промежуточных значениях

Теорема. *Если функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна и число s лежит между $f(a)$ и $f(b)$, т.е. $f(a)\leqslant s\leqslant f(b)$ или $f(b)\leqslant s\leqslant f(a)$, то найдется $c\in[a,b]$, что $f(c)=s$.*

▲ Пусть $f(a)\leqslant f(b)$ и число s удовлетворяет $f(a)\leqslant s\leqslant f(b)$. Обозначим $[a_1,b_1]=[a,b]$. Если определен отрезок $[a_k,b_k]$, то положим

$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}\left[a_k,\frac{a_k+b_k}{2}\right], & \text{если } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)\geqslant s,\\ \left[\frac{a_k+b_k}{2},b_k\right], & \text{если } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)<s.\end{cases}$$

В обоих случаях $f(a_{k+1})\leqslant s\leqslant f(b_{k+1})$. По индукции будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, таких что $f(a_n)\leqslant s\leqslant f(b_n)$. Так как $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0$, то $\{[a_n,b_n]\}$ стягивающаяся. По Т Кантора существует точка c — общая для всех отрезков $[a_n,b_n]$, причем $a_n\to c$ и $b_n\to c$. Функция f непрерывна в точке c, поэтому переходя в неравенстве $f(a_n)\leqslant s\leqslant f(b_n)$ к пределу при $n\to\infty$, получим $f(c)\leqslant s\leqslant f(c)$. Следовательно, $f(c)=s$ и искомая точка c найдена.

Случай $f(b)<f(a)$ рассматривается аналогично. ■

Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Теорема (Ролль). *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f(a)=f(b)$, то найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $f'(c)=0$.*

▲ По Т Вейерштрасса существуют такие точки $x_s,x_i\in[a,b]$, что $f(x_i)\leqslant f(x)\leqslant f(x_s)$ для всех $x\in[a,b]$. Если $f(x_s)>f(a)=f(b)$, то положим $c=x_s$. Тогда $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$ при $x\in[a,c)$ и $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0$ при $x\in(c,b]$. С одной стороны, $f'(c)=\lim\limits_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$, с другой, $f'(c)=\lim\limits_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0$. Следовательно, $f'(c)=0$ и точка c — требуемая.

Если $f(x_i)<f(a)=f(b)$, то положим $c=x_i$. Если $f(x_s)=f(x_i)$, то f — постоянна на $[a,b]$ и любая точка $c\in(a,b)$ подходит. ■

Теорема (Лагранж). *Если функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.*

▲ Рассмотрим функцию $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$. Эта функция непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $h(a)=h(b)=0$. Поэтому по Т Ролля найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $h'(c)=0$, т.е. $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. ■

Если рассмотреть функцию $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ и повторить предыдущие рассуждения, то получим доказательство следующего факта.

Теорема (Коши). *Если функции f и g непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'\neq 0$ на (a,b), то найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Формула Тейлора

Определение. Пусть функция f n раз дифференцируема в точке x_0, т.е. существует $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда равенство $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$ называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0. При этом $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора*, $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ — *остаточным членом.*

Теорема (Лагранж). *Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на интервале (a,b) и $a < x_0 < b$,. Тогда для любого $x \in (a,b)$ найдется такая точка c, лежащая между x_0 и x, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

▲ Пусть для определенности $x > x_0$. Для функций $r_n(x)$ $\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$ имеют место равенства $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$, $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, причем производные φ', φ'', $\ldots$, $\varphi^{(n+1)}$ не обнуляются на (x_0, x). По Т Коши о среднем, примененной к r_n и φ на отрезке $[x_0, x]$, имеем

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(c_1)}{\varphi'(c_1)}$$

для некоторой точки $c_1 \in (x_0, x)$. Повторяем рассуждения для r_n' и φ' на отрезке $[x_0, c_1]$:

$$\frac{r_n'(c_1)}{\varphi'(c_1)} = \frac{r_n'(c_1) - r_n'(x_0)}{\varphi'(c_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{r_n''(c_2)}{\varphi''(c_2)}$$

для некоторой точки $c_2 \in (x_0, c_1)$ и т.д. Применяя Т Коши в итоге $n+1$ раз, получим точки $x_0 < c_{n+1} < c_n < \ldots < c_1 < x$, такие что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n'(c_1)}{\varphi'(c_1)} = \ldots = \frac{r_n^{(n+1)}(c_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}.$$

Для $c = c_{n+1}$ равенство крайних членов запишется в виде

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

и требуемое равенство установлено. ■

Следствие (остаточный член в форме Пеано). *Если функция f в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную n-го порядка, непрерывную в самой точке x_0, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

▲ По предыдущей теореме $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$, где точка $c = c(x)$ лежит между точками x_0 и x. Так как $c(x) \to x_0$ при $x \to x_0$, то в силу непрерывности производной $f^{(n)}$ в точке x_0 имеем $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + o(1)$ при $x \to x_0$. ■

Замечание. Для формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано достаточно существования $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$.

Исследование функций при помощи производной

Теорема 1 (условия монотонности). *Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках I. Тогда*

1) f нестрого возрастает на $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ на внутренности I;
2) f нестрого убывает на $I \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ на внутренности I;
3) f постоянна на $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ на внутренности $x \in I$.

▲ Докажем пункт 1.

($\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, x_0 — внутренняя точка I, т.е $\exists\delta > 0$: $B_\delta(x_0) \subset I$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ для всех $x \in B'_\delta(x_0)$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$.

($\Leftarrow$) Пусть x, $y \in I$, $x < y$. По Т Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ для некоторой точки $c \in (x, y)$. Поскольку c — внутренняя точка I, значение $f'(c) \geqslant 0$ и, значит, $f(x) \leqslant f(y)$. Следовательно, f нестрого возрастает на I.

Пункт 2 доказывается аналогично. Пункт 3 следует из предыдущих двух утверждений. ■

Замечание. Как видно из доказательства ($\Leftarrow$), если $f'(x) > 0$ (< 0) на внутренности I, то f строго возрастает (строго убывает) на I. Обратное неверно ($f(x) = x^3$ на $(-1, 1)$).

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (строгого локального максимума)* функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если x_0 внутренняя точка множества E и $\exists\delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(x_0)$: $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$).

Аналогично определяются *точки (строгого) локального минимума.* Вместе с точками локального максимума они называются *точками локального экстремума.*

Теорема 2 (Ферма). *Пусть x_0 — точка локального экстремума функции f. Если f имеет производную в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

▲ Если x_0 — точка локального максимума f, то существует такое $\delta > 0$, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ при $x_0 < x < x_0+\delta$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ при $x_0-\delta < x < x_0$. С одной стороны, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, с другой, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема 3 (достаточные условия экстремума). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Пусть f дифференцируема на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и непрерывна в точке x_0. Тогда*

1) *если $f'(x) \geqslant 0$ на (a, x_0) и $f'(x) \leqslant 0$ на (x_0, b), то x_0 — точка локального максимума f (строгого, если неравенства для производной строгие);*
2) *если $f'(x) \leqslant 0$ на (a, x_0) и $f'(x) \geqslant 0$ на (x_0, b), то x_0 — точка локального минимума f (строгого, если неравенства для производной строгие).*

▲ Если функция f удовлетворяет условиям пункта 1, то по Т1 f нестрого возрастает на $(a, x_0]$ и нестрого убывает на $[x_0, b)$. Так что $f(x) \leqslant f(x_0)$ на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и, значит, x_0 — точка локального максимума f. Если неравенства для производной строгие, то возрастание/убывание строгое. Так что $f(x) < f(x_0)$ на $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ и, значит, x_0 — точка строгого локального максимума f.

Пункт 2 доказывается аналогично. ■

Замечание*. Для функции $f(x) = x^2(2 + \sin\frac{1}{x})$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, точка $x = 0$ является точкой строгого минимума, однако условия Т3 не выполняются.

Определение. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ определена на промежутке I. Функция f называется *выпуклой* на I, если для любых x, $y \in I$, $x \neq y$, и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y). \qquad (*)$$

Функция f называется *вогнутой* на I, если функция $-f$ выпукла на I.

Пример. Линейная функция $l(x) = \alpha x + \beta$ одновременно выпукла и вогнута на любом промежутке.

Замечание. 1) Условие выпуклости функции f геометрически означает, что график f лежит не выше *любой* его хорды.

2) Если функции f и g выпуклы на промежутке I, то (как непосредственно следует из определения) функция $f + g$ также выпукла на I. В частности, прибавление (вычитание) к выпуклой функции линейной не меняет условия выпуклости: f выпукла на промежутке $I \Leftrightarrow f + l$ выпукла на I.

Теорема 4. *Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема на внутренности I. Тогда f выпукла на $I \Leftrightarrow f'$ нестрого возрастает на внутренности I.*

▲ ($\Rightarrow$) Пусть x, y — внутренние точки I, $x<y$. Можно считать, что $f(x)=f(y)=0$. Действительно, выполнения этого условия всегда можно добиться заменой функции f на $f+l$, где l — некоторая линейная функция (сравните с док-вом Т Лагранжа). Прибавление линейной функции также не меняет возрастания f'. Если f выпукла на I, то $f(z)\leqslant 0$ для любого $z\in(x,y)$. Это следует из (*), т.к. $z=(1-t)x+ty$ при некотором $t\in(0,1)$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{z\to x+0}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leqslant 0,\qquad f'(y)=\lim_{z\to y-0}\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\geqslant 0,$$

так что $f'(x)\leqslant f'(y)$. Следовательно, производная нестрого возрастает на внутренности I.

($\Leftarrow$) Фиксируем точки x, $y\in I$, $x<y$. Считаем, что $f(x)=f(y)=0$. Покажем, что для f выполняется условие (*), т.е. $f(z)\leqslant 0$ для любого $z\in(x,y)$. Если $f(z)>0$ в некоторой точке $z\in(x,y)$, то применяя Т Лагранжа о среднем к сужениям функции f на отрезки $[x,z]$ и $[z,y]$ получим такие точки c_1, c_2, $x<c_1<z<c_2<y$, что

$$f'(c_1)=\frac{f(z)-f(x)}{z-x}>0,\qquad f'(c_2)=\frac{f(y)-f(z)}{y-z}<0.$$

Имеем $c_1<c_2$, но $f'(c_1)>f'(c_2)$, т.е. производная не является нестрого возрастающей на внутренности I. ■

Следствие. Пусть функция f дважды дифференцируема на (a,b). Тогда f выпукла на (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''\geqslant 0$ на (a,b).

Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ и функция $f\colon E\to\mathbb{R}^m$.

Определение. Функция f *непрерывна* на E, если f непрерывна в каждой точке E, т.е.

$$\forall x\in E\,\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in E\colon\ (\|y-x\|<\delta\Rightarrow\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon)$$

($\|\cdot\|$ — евклидова норма). Здесь δ зависит от ε и от x, т.е. $\delta=\delta(x,\varepsilon)$. Если удается δ выбрать по ε одним для всех точек $x\in E$, то приходим к следующему понятию.

Определение. Функция f *равномерно непрерывна* на E, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in E\colon\ (\|y-x\|<\delta\Rightarrow\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon).$$

Очевидно, что (f р.н. на E) $\Rightarrow$ (f непр. на E). В общем случае, обратное утверждение неверно ($f(x)=x^2$ на $E=\mathbb{R}$). Ситуация меняется, если E является компактом.

Напомним, что множество K (в МП X) называется *компактным*, если из любого его покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ открытыми множествами, $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, можно выбрать конечный набор $G_{\lambda_1},\dots,G_{\lambda_m}$, также покрывающий K. В $\mathbb{R}^n$ мн K компактно $\Leftrightarrow$ K замкнуто и ограничено.

Теорема (Кантор). *Если функция $f\colon K\to\mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте K, то f равномерно непрерывна на K.*

▲ Пусть $\varepsilon>0$. Так как f непрерывна на K, то $\forall a\in K\ \exists\delta_a>0\ \forall x\in K\colon\ \rho_K(x,a)<\delta_a\Rightarrow\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon/2$. Семейство окрестностей $\{B_{\delta_a/2}(a)\}_{a\in K}$ образует открытое покрытие K. Поскольку K компакт, то $K\subset B_{\delta_{a_1}/2}(a_1)\cup\ldots\cup B_{\delta_{a_N}/2}(a_N)$.

Покажем, что $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\delta_{a_i}/2$ искомое. Пусть $\|x-x'\|<\delta$. Точка x лежит в некотором шаре $B_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$. Тогда $\|x'-a_i\|\leqslant\|x'-x\|+\|x-a_i\|<\delta_{a_i}$ и, значит, также $x'\in B_{\delta_{a_i}}(a_i)$. Следовательно,

$$\|f(x')-f(x)\|\leqslant\|f(x')-f(a_i)\|+\|f(x)-f(a_i)\|<\varepsilon.\ ■$$

Достаточное условие дифференцируемости

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и a — внутренняя точка E.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой* в точке a, если существует линейная функция $\ell_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что

$$f(a+h) - f(a) = \ell_a(h) + \alpha(h)\|h\|, \tag{$*$}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ (последнее слагаемое записывают $o(\|h\|)$). Линейная функция ℓ_a называется *дифференциалом* функции f в точке a и обозначается df_a.

Пусть $e^1, \ldots, e^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Если функция f дифференцируема в точке a, то ввиду линейности df_a и равенства $\|te^k\| = |t|$ имеем

$$f(a+te^k) - f(a) = tdf_a(e^k) + |t|\alpha(te^k).$$

Поэтому существует $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+te^k)-f(a)}{t} = df_a(e^k)$. Этот предел называют *частной производной* f по переменной x_k в точке a и обозначают $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ или $f'_{x_k}(a)$.

Таким образом, $df_a(h) = df_a\left(\sum\limits_{k=1}^n h_k e^k\right) = \sum\limits_{k=1}^n h_k df_a(e^k) = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$ для любого $h \in \mathbb{R}^n$.

Теорема. *Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в этой точке, то f дифференцируема в точке a.*

▲ Выберем $B_r(a) \subset E$, где определены $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, и зафиксируем $h = (h_1, \ldots, h_n)$ с $\|h\| < r$. Покажем, что найдутся такие точки $c^k \in B_r(a)$, что

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k.$$

Для наглядности рассмотрим случай $n = 2$. Разность $f(a+h) - f(a)$ можно переписать в виде

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) + f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2).$$

Функция $t \mapsto f(t, a_2)$ дифференцируема на отрезке с концами a_1 и a_1+h_1, поэтому по Т Лагранжа существует такая точка a_1^*, лежащая между a_1 и a_1+h_1, что

$$f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1^*, a_2) h_1$$

(при $h_1 = 0$ пусть $a_1^* = a_1$). Аналогично $f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2^*) h_2$.

Положим $c^1 = (a_1^*, a_2)$ и $c^2 = (a_1+h_1, a_2^*)$. Тогда $c^k \in B_r(a)$ и $f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{k=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k$.

Так как $\|c^k - a\| \leqslant \|h\|$ и $c^k = c^k(h)$, то $c^k(h) \to a$ при $h \to 0$. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ непрерывна в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \to \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ при $x \to a$ и, значит, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k(h)) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + o(1)$ при $h \to 0$. Учитывая, что $|h_k| \leqslant \|h\|$, имеем

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k + \|h\| o(1), \quad h \to 0.$$

Следовательно, f дифференцируема в точке a. ■

Функция может быть недифференцируемой в точке, но быть непрерывной и в окрестности иметь частные производные по всем переменным. Примером такой функции может служить $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$ и точка $(0,0)$.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой* в точке a, если все частные производные f определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в точке a. Если множество E открыто и f непрерывно дифференцируема в каждой точке E, то она называется *непрерывно дифференцируемой на* E. Множество всех таких функций будем обозначать $C^1(E)$.

Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение. Говорят, что функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *неявно задана* уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv F(x, y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ для всех $x \in E$.

Пример. Функция $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, неявно задана уравнением $x^2+y^2-1=0$.

Теорема. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $(a,b)\in U$ и пусть функция $F\colon U\to\mathbb{R}$ такая, что*

1) $F\in C^1(U)$; 2) $F(a,b)=0$; 3) $F'_y(a,b)\neq 0$.

Тогда $\exists\delta$, $\sigma>0$ и такая функция $f\in C^1(B_\delta(a))$, что

$$\forall(x,y)\in B_\delta(a)\times B_\sigma(b)\colon\quad F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x).$$

При этом $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=-\frac{F'_{x_k}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$, $k=1,\dots,n$.

▲ Пусть для определенности $F'_y(a,b)>0$. Выберем $\sigma>0$ так, что $F'_y(x,y)>0$ для любой точки $(x,y)\in B_{2\sigma}(a,b)$. Тогда функция $\varphi_0\colon[b-\sigma,b+\sigma]\to\mathbb{R}$, $\varphi_0(y)=F(a,y)$, имеет положительную производную и, значит, строго возрастает. Отсюда следует, что $\varphi_0(b-\sigma)<\varphi_0(b)<\varphi_0(b+\sigma)$ или $F(a,b-\sigma)<0<F(a,b+\sigma)$. По непрерывности F

$$\exists\delta\in(0,\sigma)\ \forall x\in B_\delta(a):\quad F(x,b-\sigma)<0\ \wedge\ F(x,b+\sigma)>0$$

и, кроме того, $B_\delta(a)\times[b-\sigma,b+\sigma]\subset B_{2\sigma}(a,b)$.

Фиксируем $x\in B_\delta(a)$ и рассмотрим функцию $\varphi\colon[b-\sigma,b+\sigma]\to\mathbb{R}$, $\varphi(y)=F(x,y)$. Эта функция непрерывна и $\varphi(b-\sigma)<0$, а $\varphi(b+\sigma)>0$, поэтому по Т о промежуточном значении $\varphi(y)=0$ для некоторого $y\in(b-\sigma,b+\sigma)$. Такая точка y единственная в силу строго возрастания φ (ведь $\varphi'(y)=F'_y(x,y)>0$). Тем самым определена функция $f\colon B_\delta(a)\to\mathbb{R}$, $f(x)=y$, причем

$$\forall(x,y)\in B_\delta(a)\times B_\sigma(b)\colon\quad F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x).$$

Докажем непрерывность функции f. Предположим f разрывна в некоторой точке $x\in B_\delta(a)$. Тогда $\exists\varepsilon>0$ и последовательность $x^{(k)}\to x$, что $f(x^{(k)})\notin B_\varepsilon(f(x))$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Числовая последовательность $\{f(x^{(k)})\}$ ограничена (ведь $f(x^{(k)})\in B_\sigma(b)$), следовательно, имеет сходящуюся подпоследовательность: $f(x^{(k_j)})\to y$ при $j\to\infty$. Имеем $0=F(x^{(k_j)},f(x^{(k_j)}))\to F(x,y)$ и, значит, $F(x,y)=0$ ввиду непрерывности F. Поскольку $F(x,b\pm\sigma)\neq 0$, то $y\in(b-\sigma,b+\sigma)$. Однако $y\neq f(x)$, что противоречит единственности решения уравнения $F(x,y)=0$.

Докажем дифференцируемость f. Для точки $p\in B_\delta(a)$ из условия дифференцируемости F в точке (p,q), где $q=f(p)$, следует

$$F(p+h,q+u)=F(p,q)+\sum_{k=1}^n F'_{x_k}(p,q)h_k+F'_y(p,q)u+\alpha(h,u)\cdot(\|h\|+|u|),$$

где $\alpha(h,u)\to 0$ при $h\to 0$, $u\to 0$.

Возьмем $u=f(p+h)-f(p)\equiv u(h)$, тогда $u(h)\to 0$ при $h\to 0$ ввиду непрерывности f в точке p. Кроме того, $F(p+h,q+u(h))=F(p+h,f(p+h))=0$, $F(p,q)=F(p,f(p))=0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n F'_{x_k}(p,q)h_k+F'_y(p,q)u(h)+\beta(h)(\|h\|+|u(h)|)=0, \qquad (*)$$

где $\beta(h)=\alpha(h,u(h))\to 0$ при $h\to 0$. Будем брать приращение h настолько малым, что $|\beta(h)|\leqslant\frac{1}{2}\left|F'_y(p,q)\right|$. Тогда

$$u(h)=-\frac{\sum\limits_{k=1}^n F'_{x_k}(p,q)h_k+\beta(h)\|h\|}{F'_y(p,q)\pm\beta(h)}=\sum_{k=1}^n O(1)h_k+o(1)\cdot\|h\|,$$

так что $|u(h)|=O(1)\|h\|$ при $h\to 0$. Следовательно, равенство (*) может быть переписано в виде

$$\sum_{k=1}^n F'_{x_k}(p,q)h_k+F'_y(p,q)u(h)+o(1)\|h\|=0.$$

Откуда, учитывая, что $u(h) = f(p+h) - f(p)$, получаем

$$f(p+h) - f(p) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{F'_{x_k}(p,q)}{F'_y(p,q)} h_k + o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

т.е. f дифференцируема в точке p и $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = -\frac{F'_{x_k}(p,f(p))}{F'_y(p,f(p))}$.

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ непрерывна как отношение двух непрерывных функций, поэтому f непрерывно дифференцируема в $B_\delta(a)$. ■

Экстремумы функций многих переменных

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и a — внутренняя точка E.

Определение. Точка a называется *точкой локального максимума* (*строгого локального максимума*) функции f, если

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B'_\delta(a)\colon \ f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) < f(a)).$$

Аналогично определяются точки (строгого) локального минимума. Вместе с точками локального максимума они называются *точками локального экстремума.*

Теорема 1 (необходимое условие). *Если a — точка локального экстремума функции f и существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.*

▲ По определению точки экстремума существует $\delta > 0$, такое что $f(a) = \max\limits_{x \in B_\delta(a)} f(x)$ или $f(a) = \min\limits_{x \in B_\delta(a)} f(x)$. Отсюда, в частности, следует, что 0 является точкой локального экстремума функции $\varphi(t) = f(a + te^k)$, $t \in (-\delta, \delta)$. По Т Ферма $\varphi'(0) = 0$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi'(0) = 0$. ■

Следствие. Если a — точка локального экстремума функции f и f дифференцируема в этой точке, то $df_a \equiv 0$ и $\operatorname{grad} f(a) = 0_n$.

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}^n$, в которой все частные производные функции f обращаются в ноль, называется *стационарной точкой* функции f.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Напомним, что функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется дважды непрерывно дифференцируемой на U (пишут $f \in C^2(U)$), если все частные производные 2-го порядка определены на U и являются непрерывными функциями. В этом случае $d^2 f_a(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ является квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$.

Относительно квадратичных форм нам понадобится

Лемма 1. *Если кв. форма Q положительно определена, то $\exists \eta > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n\colon \ Q(h) \geqslant \eta \|h\|^2$.*

▲ Положим $\eta = \inf\limits_{\|h\|=1} Q(h)$. Поскольку функция Q непрерывна, а единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ является компактом, то по Т Вейерштрасса значение η достигается и, следовательно, $\eta > 0$. Тогда для $h \neq 0$ имеем $Q(h) = Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \|h\|^2 \geqslant \eta \|h\|^2$. При $h = 0$ неравенство очевидно верно. ■

Теорема 2 (достаточные условия). *Пусть множество U открыто в $\mathbb{R}^n$, функция $f \in C^2(U)$ и $a \in U$ — стационарная точка f. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если форма $d^2 f_a$ положительно определена, то a — точка строгого локального минимума f;*
2) *если форма $d^2 f_a$ отрицательно определена, то a — точка строгого локального максимума f;*
3) *если форма $d^2 f_a$ неопределена, то функция f в точке a не имеет локального экстремума.*

▲ 1) Запишем для f формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \alpha(h) \|h\|^2,$$

где функция $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. По предыдущей лемме существует $\eta > 0$, такое что $d^2 f_a(h) \geqslant 2\eta \|h\|^2$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$. Поскольку функция α бесконечна мала, найдется $\delta > 0$, такое что $|\alpha(h)| \leqslant \frac{\eta}{2}$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$ с $0 < \|h\| < \delta$. Поэтому для таких $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) - f(a) \geqslant \eta \|h\|^2 - \frac{\eta}{2}\|h\|^2 = \frac{\eta}{2}\|h\|^2 > 0$$

и, значит, a — точка строгого минимума f.

2) Поскольку $d^2(-f)_a = -d^2 f_a$, случай сводится к предыдущему заменой f на $-f$.

3) Если a — точка минимума f, то для всех $h \in \mathbb{R}^n$ с $\|h\| < \delta$ выполнено

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \alpha(h)\|h\|^2 \geqslant 0.$$

Поэтому для любого $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \to +0} t^{-2}\left(\frac{1}{2} d^2 f_a(tv) + \alpha(tv)\|tv\|^2\right) = \frac{1}{2} d^2 f_a(v) + \|v\|^2 \lim_{t \to +0} \alpha(tv) = \frac{1}{2} d^2 f_a(v) \geqslant 0.$$

Аналогично доказывается, что если a — точка максимума f, то $d^2 f_a(v) \leqslant 0$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Поэтому если $d^2 f_a$ принимает значения разных знаков, то f в точке a не имеет локального экстремума. ■

Замечание. Если форма $d^2 f_a$ полуопределена, то Т2 не позволяет сделать вывод о наличии экстремума в точке a.

Пример. Рассмотрим функции $f(x,y) = x^2 + y^4$ и $g(x,y) = x^2 - y^4$. Очевидно $(0,0)$ — стационарная точка и f, и g, причем $d^2 f_{(0,0)}(h) = d^2 g_{(0,0)}(h) = h_1^2$ для любого $h = (h_1, h_2)$. Формы $d^2 f$ и $d^2 g$ положительно полуопределены, однако $(0,0)$ является точкой (строгого) минимума f и не является точкой экстремума g, т.к. $g(t,0) = t^2 > 0$ и $g(0,t) = -t^4 < 0$ при $t \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению условных экстремумов.

Пусть $f, g_i \colon E \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $1 \leqslant m < n$ и $S = \{x \in E\colon \ g_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m\}$.

Определение. Точка $a \in S$ называется *точкой условного максимума* функции f с условиями связи $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, если $\exists \delta > 0 \ \forall x \in B'_\delta(a) \cap S\colon \ f(x) \leqslant f(a)$. Аналогично определяются точки условного минимума.

Теорема 3 (Лагранж). *Пусть множество U открыто в $\mathbb{R}^n$, f, $g_i \in C^1(U)$, $i = 1, \ldots, m$, и* $\operatorname{grad} g_i(a)$ *линейно независимы. Если a является точкой условного экстремума функции f при выполнении условий $g_i(x) = 0$, то существуют такие числа λ_i, что* $\operatorname{grad} f(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(a)$.

Из Т3 следует, что точки условного экстремума являются стационарными точками функции $L\colon U \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$, называемой *функцией Лагранжа*.

Интеграл как функция верхнего предела

Определение. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема (по Риману)* на $[a,b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (T, \xi),\ |T| < \delta: \quad |\sigma_T(f,\xi) - I| < \varepsilon,$$

т.е. существует предел интегральных сумм $\sigma_T(f,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ с $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, когда мелкость $|T| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ стремится к нулю, равный I. В случае существования I называют *определенным интегралом* функции f. Множество интегрируемых на $[a,b]$ функций обозначают $\mathcal{R}[a,b]$.

Определение. Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ определена на промежутке I и точка $a \in I$. Если $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset I$, то функция $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ для любого отрезка $[\alpha,\beta]$ из промежутка I, тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in I$, непрерывна на I и если f непрерывна в точке x, то функция F дифференцируема в точке x с $F'(x) = f(x)$.*

▲ Пусть точка $x \in I$. Выберем $\delta > 0$ так, что $I \cap [x-\delta, x+\delta]$ есть невырожденный отрезок $[\alpha, \beta]$. Так как $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, то она ограничена на $[\alpha, \beta]$, т.е найдется число M, такое что $|f| \leqslant M$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда для любого $y \in [\alpha, \beta]$ выполнено

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|dt \right| \leqslant M|y-x|$$

и, значит, $\lim\limits_{y \to x} F(y) = F(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если f непрерывна в точке x, то $\exists \delta > 0\ \forall t \in B_\delta(x) \cap I\colon\ \ |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Но тогда для любого $y \in B'_\delta(x) \cap I$ имеем

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)\, dt - \frac{1}{y-x} \int_x^y f(x)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|y-x|} \left| \int_x^y |f(t) - f(x)|\, dt \right| \leqslant \frac{1}{|y-x|} \cdot \varepsilon \cdot |y-x| = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{y \to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. ■

Следствие. Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I, то f имеет на I первообразную.

Теорема 2 (формула Ньютона–Лейбница). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — ее первообразная на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.*

▲ Функция $\int_a^x f(t)\, dt$ является первообразной для функции f на $[a, b]$. Поэтому $\int_a^x f(t)\, dt = \Phi(x) + C$. Полагая в равенстве $x = a$ находим, что константа $C = -\Phi(a)$. Осталось положить $x = b$. ■

Равномерная сходимость

Пусть функции f_n, $f\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к f на множестве E, если

$$\forall x \in E\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

При этом f называют *предельной функцией* последовательности $\{f_n\}$ и пишут $f_n \to f$ на E. Отметим, что номер N здесь зависит от ε и от x, т.е. $N = N(x, \varepsilon)$. Если удается N выбрать по ε одним для всех точек $x \in E$, то приходим к следующему понятию.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E.

Ясно, что ($f_n \rightrightarrows f$ на E) $\Rightarrow$ ($f_n \to f$ на E).

Теорема. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $E \subset \mathbb{R}^n$. Если все функции f_n непрерывны в точке $a \in E$ (на E), то предельная функция f также непрерывна в точке a (на E).*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на E, то $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in E$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для любого $x \in E$ имеем

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f_N непрерывна в точке a, то $\exists \delta > 0\ \forall x \in B_\delta(a) \cap E\colon\ \ |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. В итоге имеем $|f(x) - f(a)| < |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$, что доказывает непрерывность функции f в точке a. ■

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится лишь поточечно, то предельная функция может и не оказаться непрерывной ($f_n(x) = x^n$ на $E = [0, 1]$).

Следствие 1. Пусть функции f_n непрерывны на $[a,b]$ и пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда $\int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)dt$ на $[a,b]$.

▲ По Т функция f непрерывна (а следовательно, интегрируема) на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на $[a,b]$, найдется $N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\, \forall t \in [a,b]\colon\ |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно, для всех $n \geqslant N$ и $x \in [a,b]$

$$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Замечание. В условиях следствия 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится лишь поточечно, то такое равенство может и не выполняться ($f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $E = [0,1]$).

Следствие 2. Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, $f'_n \rightrightarrows g$ на $[a,b]$ и существует такое $x_0 \in [a,b]$, что последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, функция f непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и $f' = g$.

▲ По Т функция g непрерывна на $[a,b]$. По формуле Ньютона–Лейбница и следствию 1 имеем

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^x g(t)dt \text{ на } [a,b].$$

Определим функцию $f(x) = c + \int_{x_0}^x g(t)dt$, где $f_n(x_0) \to c$. Сходящуюся последовательность $\{f_n(x_0)\}$ можно считать, очевидно, функциональной последовательностью, равномерно сходящейся на $[a,b]$. Поэтому $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ (как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей). По свойствам интеграла с переменным верхним пределом f непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ с $f' = g$. ■

Отметим, что условием следствия 2 является равномерная сходимость производных, а не самих функций. Равномерный предел непрерывно дифференцируемых функций может и не оказаться дифференцируемой функцией ($f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ на $E = [-1,1]$).

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно* (*поточечно*) *сходится* на E к сумме S, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ равномерно (поточечно) сходится к S на E.

Применяя Т и ее следствия к последовательности частичных сумм, получим соответствующие утверждения для рядов:

1. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $E \subset \mathbb{R}^n$. Если все функции f_k непрерывны в точке $a \in E$ (на E), то его сумма S также непрерывна в точке a (на E).

2. Пусть функции f_k непрерывны на $[a,b]$ и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b f_k(x)dx\right)$.

3. Пусть функции f_k непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k$ равномерно сходится на $[a,b]$ и существует такое $x_0 \in [a,b]$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a,b]$ и $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$.

Утверждение 2 (соот. 3) носит название теоремы *о почленном интегрировании* (соот. *о почленном дифференцировании*) ряда.

Действительные степенные ряды

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \qquad (1)$$
где $a_k, x_0 \in \mathbb{R}$, x — вещественная переменная.

Определение. Неотрицательное число R (или символ $+\infty$) называется *радиусом сходимости* ряда (1), если $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-x_0| < R$ ряд (1) сходится, а $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-x_0| > R$ ряд (1) расходится. Интервал (x_0-R, x_0+R) называется *интервалом сходимости* ряда (1).

Теорема 1 (Коши – Адамар). *Каждый степенной ряд (1) имеет радиус сходимости R, выражаемый формулой $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$ (считаем $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$).*

▲ Покажем, что величина R в формуле Коши – Адамара удовлетворяет определению радиуса сходимости. Пусть $x \neq x_0$, тогда
$$q = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} |x-x_0| \sqrt[k]{|a_k|} = |x-x_0| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$
Если $|x-x_0| < R$, то $q < 1$ и по признаку Коши сходимости числовых рядов ряд (1) абсолютно сходится (а, следовательно, сходится). Если $|x-x_0| > R$, то $q > 1$ и по признаку Коши n-й член ряда (1) не стремится к нулю. Ряд (1) расходится (и абсолютно расходится, т.е. расходится ряд из модулей членов). ■

Следствие. Если степенной ряд (1) имеет радиус сходимости $R \in (0, +\infty]$, то на любом отрезке $[x_0-r, x_0+r]$, где $0 \leqslant r < R$, он сходится равномерно.

▲ Как следует из доказательства Т1, в точке $x_1 = x_0 + r$ ряд абсолютно сходится, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$. Поскольку $\forall x \in [x_0-r, x_0+r]$ $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon$ $|a_k(x-x_0)^k| \leqslant |a_k| r^k$, то ряд (1) равномерно сходится на $[x_0-r, x_0+r]$ по признаку Вейерштрасса. ■

Теорема 2. *Если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ — сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ функция f имеет производную m-го порядка на (x_0-R, x_0+R)*
$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)(x-x_0)^{k-m},$$
причем ряд в правой части имеет тот же радиус сходимости R.

▲ Пусть $m = 1$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, то последовательности $\{\sqrt[k]{k|a_k|}\}$ и $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ имеют одни и те же частичные пределы. В частности, у них совпадают верхние пределы и, значит, по формуле Коши-Адамара заключаем, что радиус сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^k$ равен R. При $x \neq x_0$. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ отличаются числовым множителем, а значит, сходятся одновременно (при $x = x_0$ очевидно сходятся). Следовательно, радиус сходимости второго ряда также равен R.

По следствию из Т1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ равномерно сходится на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ для любого $r \in (0, R)$. По Т о почленном дифференцировании функционального ряда равенство $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ имеет место на $[x_0-r, x_0+r]$, а в силу произвольности $r \in (0, R)$ — и на всем интервале (x_0-R, x_0+R).

Общее утверждение устанавливается индукцией по m. ■

Следствие. Если функция f разлагается в ряд по степеням $x - x_0$, т.е. существует $\delta > 0$, что $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ для всех $x \in B_\delta(x_0)$, то коэффициенты $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, единственным степенным рядом, представляющим функцию f в некоторой окрестности x_0, является *ряд Тейлора* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Отметим, что не всякая бесконечно дифференцируемая функция разлагается в ряд по степеням $x - x_0$. Например, у функции

$f(x)=e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$, ряд Тейлора в точке $x_0=0$ нулевой, но он не сходится к f ни в какой окрестности этой точки.

Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке

Пусть f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция (т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, понимаемый как несобственный интеграл с конечным числом особенностей абсолютно сходится). *Тригонометрический ряд Фурье* функции f — это ряд вида

$$S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где $c_k=\hat f(k)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$. Коэффициенты связаны соотношениями $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$, $c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$, $k\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим вопрос сходимости ряда Фурье $S(f,x)$ в точке, т.е. условие существования конечного $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x)$, где $S_n(f,x)=\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. Для этого запишем $S_n(f,x)$ в виде интеграла, используя определение c_k:

$$S_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du\cdot e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(u)e^{ik(x-u)}du.$$

Сделав замену $t=x-u$ и вводя *ядро Дирихле* $D_n(t):=\frac12\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}=\frac12+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$, получим

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt,$$

где 2-е равенство получено ввиду 2π-периодичности f и D_n, а 3-е — ввиду четности D_n.

Теорема (признак Дини). *Пусть f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция и пусть для точки x и числа S существует такое $\delta>0$, что интеграл*

$$\int_0^{\delta}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t}\,dt<+\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x к числу S.

▲ Поскольку $\int_0^{\pi} D_n(t)dt=\frac{\pi}{2}$ и $D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ при $t\neq 2m\pi$, имеем

$$S_n(f,x)-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2S\cdot D_n(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac12\right)t\,dt.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Уменьшим $\delta\in(0,\pi)$ настолько, что $\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t}\,dt<\varepsilon$.

Воспользуемся неравенством $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$ на $[0,\frac{\pi}{2}]$ (следует из выпуклости вверх $\sin$ на $[0,\frac{\pi}{2}]$). Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac12\right)t\right|\,dt\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{\frac{2}{\pi}t}\,dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $h(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на $[\delta,\pi]$, поэтому по лемме Римана

$$I_n:=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac12\right)t\,dt\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Следовательно, $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\colon\ |I_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ и, значит, $|S_n(f,x)-S|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. ■

Следствие. Пусть f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция и для точки x существуют конечные $f(x+0)$, $f(x-0)$ и конечные обобщенные односторонние производные

$$f'_R(x)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t},\quad f'_L(x)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x к числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

▲ Из существования конечных $f'_R(x)$ и $f'_L(x)$ вытекает, что $\exists\delta>0\ \exists C>0\ \forall t\in(0,\delta)\colon$ $|f(x+t)-f(x+0)|\leqslant Ct$ и $|f(x-t)-f(x-0)|\leqslant Ct$. Но тогда $\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t}\leqslant 2C$ на $(0,\delta)$ для $S=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и фигурирующий в признаке Дини интеграл сходится по признаку сравнения. ■

Равномерная сходимость рядов Фурье

Лемма. *Пусть f — 2π-периодическая кусочно-непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция. Тогда выполнено неравенство Бесселя:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat f(k)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx.$$

▲ Положим $c_k=\hat f(k)$ и воспользуемся свойством модуля комплексного числа $|z|^2=z\bar z$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\right|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\right)\left(\overline{f(x)}-\sum_{m=-n}^{n}\bar c_me^{-imx}\right)=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\sum_{m=-n}^{n}\bar c_m\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx-\sum_{k=-n}^{n}c_k\overline{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx}+2\pi\sum_{k=-n}^{n}c_k\bar c_k$$

(при перемножении крайних членов воспользовались ортогональностью системы $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ на $[-\pi,\pi]$). Используя выражения коэффициентов c_k через интеграл, имеем

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\right|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2.$$

Откуда $\sum\limits_{k=-n}^{n}|c_k|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$ и заявленное неравенство получается предельным переходом при $n\to\infty$. ■

Теорема. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая кусочно-непрерывную на $[-\pi,\pi]$ производную f'. Тогда ряд Фурье f равномерно сходится к f на всей числовой прямой.*

▲ По формуле интегрирования по частям

$$2\pi\hat{f'}(k)=\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}dt=f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}+ik\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt=2\pi ik\hat f(k)$$

(внеинтегральный член равен нулю, т.к. функция $f(t)e^{-ikt}$ 2π-периодична).

Далее, при $k\neq0$ ввиду неравенства $2ab\leqslant a^2+b^2$ имеем

$$|\hat f(k)|=|\widehat{f'}(k)|\cdot\frac{1}{|k|}\leqslant\frac12|\widehat{f'}(k)|^2+\frac{1}{2k^2}.$$

По неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2$ сходится. Но тогда по признаку сравнения и сходимости $\sum\limits_{k\neq 0} \frac{1}{2k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ заключаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$.

Поскольку $|\hat{f}(k)e^{ikx}| = |\hat{f}(k)|$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$, то ряд Фурье $S(f,x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса. По следствию из признака Дини он в каждой точке x сходится к $f(x)$. ■

Преобразование Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на любом отрезке.

Определение. *Преобразованием Фурье* функции f называется функция

$$F[f](y) = \hat{f}(y) := \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx.$$

Функция $F[f](-y)$ называется *обратным преобразованием Фурье* функции f.

Напомним, что v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim\limits_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} f(x)dx$ и если f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то v.p. интеграл совпадает с несобственным интегралом по $\mathbb{R}$.

В дальнейшем будем рассматривать свойства $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx$ для *абсолютно интегрируемой* на $\mathbb{R}$ функции f. Нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда функция $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и для всякого отрезка $[c,d]$*

$$\int_c^d F[f](y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c^d f(x)e^{-iyx}dydx.$$

▲ Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная финитная (т.е. равная нулю вне некоторого отрезка) функция f_n, такая что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|dx < \frac{1}{n}$. Так как

$$\Big|F[f](y) - F[f_n](y)\Big| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f_n(x))e^{-iyx}dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \frac{1}{n\sqrt{2\pi}},$$

то $F[f_n](y) \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} F[f](y)$ при $n \to \infty$.

Пусть f_n равна нулю вне $[\alpha, \beta]$. Поскольку

$$|e^{-iyx} - e^{-iy_0x}| = |e^{-i(y-y_0)x} - 1| = 2\left|\sin\frac{(y-y_0)x}{2}\right| \leqslant |x||y-y_0|,$$

$$\sqrt{2\pi}\Big|F[f_n](y) - F[f_n](y_0)\Big| = \left|\int_\alpha^\beta f_n(x)[e^{-iyx} - e^{-iy_0x}]dx\right| \leqslant |y-y_0| \int_\alpha^\beta |xf_n(x)|dx,$$

то $F[f_n](y) \to F[f_n](y_0)$ при $y \to y_0$ и, значит, функция $F[f_n]$ непрерывна. Тогда функция $F[f]$ непрерывна (как равномерный предел непрерывных функций) и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d F[f_n](y)dy = \int\limits_c^d F[f]dy$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d F[f_n](y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_c^d f(x)e^{-iyx}dydx$.

По Т Фубини $\int\limits_c^d F[f_n](y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \int\limits_c^d e^{-iyx}dx$ (т.к. интегрирование фактически ведется по $[\alpha,\beta] \times [c,d]$) и теперь утверждение вытекает из оценки

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \int_c^d [f(x) - f_n(x)]e^{-iyx}dxdy\right| \leqslant (d-c) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \frac{d-c}{n}. \ ■$$

Теорема 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет там непрерывную абсолютно интегрируемую производную f', то $F[f'](y) = iyF[f](y)$.*

▲ Поскольку $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$, то из сходимости $\int\limits_0^{+\infty} f'(t)dt$ вытекает существование конечного предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Число $A = 0$, т.к. в противном случае $|f| > |A|/2$ в некоторой окрестности $+\infty$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f|dx$ будет расходиться. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Интегрируем по частям

$$\sqrt{2\pi}F[f'](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-iyx}dx = f(x)e^{-iyx}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-iy)e^{-iyx}dx = \sqrt{2\pi}iyF[f](y). \blacksquare$$

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то преобразование Фурье $F[f]$ является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией и $\frac{d}{dy}F[f](y) = F[(-ix)f](y)$.*

▲ По лемме

$$\int_0^t F[(-ix)f](y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (-ix)f(x)e^{-ixy}\,dydx.$$

Так как $\int\limits_0^t (-ix)e^{-ixy}\,dy = \int\limits_0^t \frac{d}{dy}e^{-ixy}dy = e^{-ixt} - 1$, то $\int\limits_0^t F[(-ix)f](y)dy = F[f](t) - F[f](0)$.

По лемме функция $F[(-ix)f]$ непрерывна, поэтому функция $F[f](t) = F[f](0) + \int\limits_0^t F[(-ix)f](y)dy$ непрерывно дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом). Осталось продифференцировать при $t = y$. $\blacksquare$