$V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k)$, *то съществува подсистема на системата вектори* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$, *която е базис на* V *над* F.

Д о к а з а т е л с т в о. От $V \neq \{\mathbf{0}\}$ следва, че поне един от векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ е различен от нулевия вектор. Нека например $\boldsymbol{b}_1 \neq \mathbf{0}$. Ако $V = l(\boldsymbol{b}_1)$, то $\boldsymbol{b}_1$ е базис на V. Нека $V \supsetneqq l(\boldsymbol{b}_1)$. Тогава поне един от векторите $\boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$, например $\boldsymbol{b}_2$, не принадлежи на $l(\boldsymbol{b}_1)$ (в противен случай $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k) = l(\boldsymbol{b}_1)$). Според лема 1 векторите $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ са линейно независими. Ако $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, то $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ образуват базис на V. В противен случай, например $\boldsymbol{b}_3 \notin l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ и тогава векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ са линейно независими. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки избираме вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$, $n \leq k$, които са линейно независими и $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$. Следователно тези вектори образуват базис на V.

З а б е л е ж к а. Едно ненулево линейно пространство V е крайномерно над F точно когато е линейна обвивка на краен брой свои вектори.

Теорема 3. *Всеки два базиса на ненулевото крайномерно пространство* V *над полето* F *съдържат равен брой вектори.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ са два базиса на V. Тогава всеки вектор от втория базис се изразява линейно чрез векторите от първия базис. Тъй като векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ са линейно независими, от основната лема (лема 1 от § 8) следва, че $k \leq n$. Аналогично $n \leq k$. Следователно $n = k$.

Определение. *Броят на векторите в кой да е базис на ненулевото крайномерно пространство* V *над полето* F *ще наричаме размерност на* V *над* F *и ще го бележим с* $\dim_F V$ *или само* $\dim V$, *ако* F *се подразбира. По определение размерността на нулевото пространство е равна на нула. Ако* V *е безкрайномерно пространство, ще пишем* $\dim V = \infty$.

От предните примери следва, че $\dim F^n = n$, $\dim F^{n+1}[x] = n + 1$, $\dim F[x] = \infty$.

Теорема 4. *Нека* V *е линейно пространство над полето* F. *Тогава*

а) V *е крайномерно и* $\dim V = n$ *тогава и само тогава, когато във* V *съществуват* n *на брой линейно независими вектора и всеки* $n + 1$ *на брой вектора са линейно зависими. В този случай всеки* n *на брой линейно независими вектора от* V *са базис на* V;

б) V *е безкрайномерно тогава и само тогава, когато за всяко естествено число* n *във* V *има* n *на брой линейно независими вектора.*

Д о к а з а т е л с т в о. а) Нека V е крайномерно и $\dim V = n$. Тогава V притежава базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, състоящ се от n на брой вектора. Нека

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_{n+1}$ е произволна система от $n + 1$ на брой вектора от V … вектори се изразяват линейно чрез базисните вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots$ … основната лема (лема 1 от § 8) следва, че векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots$ … линейно зависими.

Обратно, нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са линейно независими вектори … всеки $n+1$ на брой вектора от V са линейно зависими. Нека $\boldsymbol{a}$ е про… вектор от V. Ако $\boldsymbol{a} \notin l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$, според лема 1 векторите … $\dots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{a}$ биха били линейно независими; противоречие. Следовател… $l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$. Така векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са линейно незав… и всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е тяхна линейна комбинация. Следовател… вектори са базис на V и значи V е крайномерно и $\dim V = n$.

Накрая, нека $\dim V = n$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$ е произволна система … брой линейно независими вектори от V. Ако съществува вектор от V … $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$, прилагайки лема 1 бихме получили $n+1$ на брой … независими вектора във V, което противоречи на $\dim V = n$. Следов… $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ и значи тези вектори са базис на V.

б) Нека V е безкрайномерно и n е произволно естествено число … пуснем, че във V няма n линейно независими вектора (т. е. всеки n … във V са линейно зависими). Тогава от подусловие а) следва, че $\dim V$ … противоречие.

Обратно, ако за всяко естествено число n във V има n на брой … независими вектора, отново от подусловие а) следва, че не е въз… да е крайномерно пространство, т. е. V е безкрайномерно.

Твърдение 5. *Всяка линейно независима система вектори … номерно пространство* V *може да се допълни до базис на* V.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s$ са линейно незав… вектори от V. Ако $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s)$, то тези вектори са базис … противен случай съществува вектор $\boldsymbol{b}_{s+1}$ от V, такъв че $\boldsymbol{b}_{s+1} \notin l(\dots$ $\dots, \boldsymbol{b}_s)$. Според лема 1 векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_{s+1}$ са линейно … сими. Ако $V = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_{s+1})$, то тези вектори са базис … противен случай съществува вектор $\boldsymbol{b}_{s+2}$ от V, такъв че $\boldsymbol{b}_{s+2} \notin l(\dots$ $\dots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_{s+1})$. Продължавайки по този начин (процесът не може … безкраен, тъй като $\dim V < \infty$), достигаме до система вектори $\boldsymbol{b}_1, \dots$ $\boldsymbol{b}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{b}_n$, които са линейно независими и $V = l(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_{s+1}, \dots$ Следователно тези вектори са базис на V.

Задача 1. *Нека* V *е крайномерно пространство и* W *е под… ранство на* V. *Тогава* W *също е крайномерно и* $\dim W \leq \dim V$ … $\dim W = \dim V$ *тогава и само тогава, когато* $W = V$.

Твърдение 6. *Нека V е ненулево крайномерно пространство над полето F. Една система вектори от V е базис на V тогава и само тогава, когато всеки вектор от V се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите от тази система.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ е базис на V, $\boldsymbol{v} \in V$ и

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n,$$
$$\boldsymbol{v} = \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{b}_n.$$

Като извадим горните две равенства, получаваме

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{b}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{b}_n.$$

От линейната независимост на векторите $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ получаваме

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \dots \quad , \quad \lambda_n = \mu_n.$$

Следователно векторът $\boldsymbol{v}$ се записва по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$.

Обратно, нека векторите $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ са такива, че всеки вектор от V се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация. Тогава $V = l(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и за да докажем, че тези вектори образуват базис на V, остава да проверим, че те са линейно независими. Нека

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n = \mathbf{0} \quad (\lambda_i \in F; \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

Също така, очевидно имаме $0.\boldsymbol{b}_1 + 0.\boldsymbol{b}_2 + \cdots + 0.\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}$. Тъй като нулевият вектор се записва по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ... , $\lambda_n = 0$ и значи тези вектори са линейно независими.

Задача 2. *Да се докаже, че векторите $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ образуват базис на крайномерното пространство V тогава и само тогава, когато $V = l(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и нулевият вектор се представя по единствен начин като линейна комбинация на тези вектори.*

Твърдение 6 ни позволява да дадем следното

Определение. *Нека V е линейно пространство с размерност n над полето F и $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ е фиксиран базис на V. Нека $\boldsymbol{v} \in V$ и*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n \quad (\lambda_i \in F,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Еднозначно определените (от базиса $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$) числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$ ще наричаме координати на $\boldsymbol{v}$ **в базиса** $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$.

Задача 3. *Нека V е крайномерно пространство, $\boldsymbol{v} \in$*

$$\boldsymbol{v} = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_k \boldsymbol{v}_k \quad (\mu_i \in F,\ \boldsymbol{v}_i \in V; \quad i =$$

Тогава координатите на вектора $\boldsymbol{v}$ във фиксиран базис на комбинации с коефициенти $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_k$ на съответни на векторите $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2, \dots,\ \boldsymbol{v}_k$ в същия базис.

§ 10. Сума на подпространства

Сечение на произволна фамилия подпространства на пространство също е подпространство (задача 3 от § 7). Не че обединение на подпространства отново е подпространство

Задача 1. *Да се докаже, че обединението на две отново е подпространство тогава и само тогава, когато ространство се съдържа в другото.*

Ще дефинираме понятието сума на подпространства подпространство.

Определение. *Нека V_1, V_2, ... , V_s са подпространства пространство V. Под сума $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ на тези ще разбираме множеството от всички вектори $\boldsymbol{v}$ от V, се представят като сума $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_s$, където ... , s.*

Задача 2. *Да се докаже, че:*

а) $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ *е подпространство на* V;

б) $V_1 + V_2 + \cdots + V_s = l(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s)$.

Теорема 1. *Нека V е линейно пространство и V_1 и V_2 подпространства на V. Тогава пространствата $V_1 + V_2$ крайномерни и*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Доказателство. Нека $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = l$. е подпространство както на V_1, така и на V_2, от задача $V_1 \cap V_2$ е крайномерно пространство и $\dim(V_1 \cap V_2) =$

Нека $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ е базис на $V_1 \cap V_2$, ако $V_1 \cap V_2 \neq$ (ако е необходимо) до базис $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r;\ \boldsymbol{b}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{b}_k$