§ 6. Обратна матрица

казваме, че една квадратна матрица A е *неособена*, ако $\det A \neq 0$.
тивен случай ще я наричаме *особена*. От теоремата за умножение
ерминанти следва, че произведението на неособени матрици също е
ена матрица.

пределение. *Една квадратна матрица A ще наричаме обратима,*
ществува квадратна матрица A' от същия ред, такава че $AA' =$
E. Матрицата A' ще наричаме обратна на матрицата A.

о A е обратима матрица, то тя притежава единствена обратна мат-
Действително, ако A'' е такава матрица, че $AA'' = A''A = E$, то

$$A'AA'' = A'(AA'') = A'E = A',$$
$$A'AA'' = (A'A)A'' = EA'' = A''$$

чи $A' = A''$. Тази единствена матрица ще бележим с A^{-1}.
ко A е обратима матрица и A^{-1} е обратната ѝ, от теоремата за ум-
ние на детерминанти имаме $\det A.\det(A^{-1}) = \det E = 1$ и значи
$^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
Це отбележим, че произведение на обратими матрици също е обратима
ица, при това $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

еорема 1. *Една квадратна матрица е обратима тогава и само то-*
, когато е неособена.

Доказателство. Ако A е обратима матрица, от равенството
$.\det(A^{-1}) = 1$ следва $\det A \neq 0$, т. е. A е неособена.
Нека сега A е неособена и $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Да означим с X матрицата

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ето A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.
подчертаем, че адюнгираните количества на елементите от i-ия **ред**
A стоят в i-ия **стълб** на X. Нека $AX = (c_{ij})_{n\times n}$. От правилото за
ножение на матрици следва, че c_{ij} е развитието на $\det A$ по i-ия ред
юнгираните количества на елементите от j-ия ред. Знаем тогава, че
$= \delta_{ij} \det A$ (твърдение 3 от § 3). Това означава, че $AX = \det A.E$. Нека

$Y = \dfrac{1}{\det A}X$. Имаме

$$AY = A\left(\frac{1}{\det A}X\right) = \frac{1}{\det A}AX = \frac{1}{\det A}(\det A.E) = E.$$

Аналогично се проверява, че $YA = E$. Така Y е обратната матрица на матрицата A.

Накрая ще отбележим, че с помощта на обратна матрица могат да се решават матрични уравнения. Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (x_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$. Да разгледаме матричното уравнение $AX = B$. Ако A е обратима матрица, като умножим това уравнение отляво с A^{-1}, получаваме уравнението $X = A^{-1}B$, което е еквивалентно на горното. Аналогично можем да решаваме уравнения от вида $YA = B$. В този случай $Y = BA^{-1}$.

Да разгледаме частния случай, когато $m = 1$. Нека

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогава уравнението $AX = B$ е матричен запис на системата

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right.$$

Равенството $X = A^{-1}B$ представлява съкратен запис на формулите на Крамер.