§ 8. Линейна зависимост и независимост

...дни от най-важните понятия в линейната алгебра са понятията ли...на независимост и линейна зависимост на вектори.

...Определение. (!) *Нека $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ са вектори от линейното ...транство V над полето F. Ще казваме, че тези вектори са линейно ...висими над F (или още, че системата вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ е ли...но независима над F), ако от това, че някоя линейна комбинация на ...торите $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ с коефициенти от F е равна на нулевия век...о следва, че всички коефициенти в тази линейна комбинация са равни ...нула. За една безкрайна система вектори от V ще казваме, че е ли...но независима над F, ако всяка нейна крайна подсистема е линейно ...висима над F.*

...Ще казваме, че системата вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ от V е линейно ...исима над F, ако съществуват числа λ_1, λ_2, ..., λ_n от F, не всички ...които са равни на нула, но $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$.

...-нататък, ако полето F се подразбира, ще пропускаме досадното уточ...ние "над F".)

...Ясно е, че една система от вектори е линейно независима точно когато ...е линейно зависима и обратно — една система от вектори е линейно ...висима точно когато не е линейно независима.

...Задача 1. *Да се докаже, че векторите $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ ... F^2 са линейно независими. По-общо, векторите $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\dots,0)$, ... $= (0,1,0,\dots,0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$ от F^n са линейно независими.*

...О с н о в н и с в о й с т в а на понятията линейна зависимост и линейна ...зависимост на вектори.

1. *Един вектор е линейно независим тогава и само тогава, когато е ...нулев.*

...Това свойство следва от следствие 6 от аксиомите за линейно прост...нство.

2. *Всяка подсистема на линейно независима система от вектори е ...що линейно независима.*

...Нека $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ е линейно независима система от вектори ... $B = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$, $k \leq n$. Да допуснем, че системата B е линейно ...висима и нека $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$, като например $\lambda_1 \neq 0$. ...Тогава $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k + 0.\boldsymbol{a}_{k+1} + \dots + 0.\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$, което противоречи ...на линейната независимост на системата A. Следователно B е линейно ...независима система вектори.

От доказаното свойство следва, че всяка надсистема на линейно зависима система от вектори също е линейно зависима.

3. *Ако една система от вектори съдържа нулевия вектор или два пропорционални вектора, тя е линейно зависима.*

Действително, нека $A = \{\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$. Тогава $1.\boldsymbol{a}_1 + 0.\boldsymbol{a}_2 + \dots + 0.\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ и значи системата A е линейно зависима. Ако пък $\boldsymbol{a}_2 = \lambda\boldsymbol{a}_1$, то $\lambda\boldsymbol{a}_1 - 1.\boldsymbol{a}_2 + 0.\boldsymbol{a}_3 + \dots + 0.\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ и отново системата A е линейно зависима.

4. *Една система A от поне два вектора е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един вектор от A е линейна комбинация на останалите вектори от A.*

Нека $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ е линейно зависима система от вектори и $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$, като например $\lambda_1 \neq 0$. Тогава $\boldsymbol{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2 - \dots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_n$. Обратно, ако $\boldsymbol{a}_1 = \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \mu_n\boldsymbol{a}_n$, то $1.\boldsymbol{a}_1 - \mu_2\boldsymbol{a}_2 - \dots - \mu_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ и значи системата от вектори A е линейно зависима.

Ще завършим този параграф с т. нар. *основна лема* на линейната алгебра.

Лема 1 (Основна лема на линейната алгебра). *Нека V е линейно пространство и са дадени две системи вектори от V:*

$$A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \quad \text{и} \quad B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k\}.$$

Нека всеки вектор от системата B е линейна комбинация на векторите от системата A. Тогава, ако $k > n$, то векторите от системата B са линейно зависими.

(*Казано по-кратко, ако повече на брой вектори се изразяват линейно чрез по-малко на брой, то повечето на брой вектори са линейно зависими.*)

Д о к а з а т е л с т в о. Ще проведем индукция по n. Нека $n = 1$, т. е. $A = \{\boldsymbol{a}_1\}$. Тогава системата вектори B или съдържа нулевия вектор, или съдържа два пропорционални вектора (всички вектори от B са кратни на $\boldsymbol{a}_1$). Според свойство 3 от по-горе векторите от B са линейно зависими.

Нека $n > 1$. По условие съществуват числа λ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, n$), такива че

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_{1,n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + \lambda_{1n}\boldsymbol{a}_n &= \boldsymbol{b}_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_{k-1,1}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1,n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + \lambda_{k-1,n}\boldsymbol{a}_n &= \boldsymbol{b}_{k-1}, \\
\lambda_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_{k,n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + \lambda_{kn}\boldsymbol{a}_n &= \boldsymbol{b}_k.
\end{aligned}$$

ко $b_k = \mathbf{0}$, системата вектори B е линейно зависима (свойство 3). Нека $\neq 0$ и например $\lambda_{kn} \neq 0$. Елиминираме a_n от първите $k-1$ равенства ато умножим последното равенство с $-\dfrac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}}$ и го прибавим към i-тото авенство за всяко $i = 1, 2, \dots, k-1$. Получаваме равенствата

$$\left(\lambda_{11} - \lambda_{k1}\tfrac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{1,n-1} - \lambda_{k,n-1}\tfrac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}}\right) a_{n-1} = b_1 - \tfrac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\lambda_{k-1,1} - \lambda_{k1}\tfrac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{k-1,n-1} - \lambda_{k,n-1}\tfrac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}}\right) a_{n-1} = b_{k-1} - \tfrac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}} b_k.$$

акa векторите $b_i - \dfrac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}} b_k$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ са $k-1$ на брой и всеки т тях е линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Освен това, $-1 > n-1$. Според индукционното предположение системата вектори $- \dfrac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}} b_k$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ е линейно зависима, т. е. съществуват числа $\mu_2, \dots, \mu_{k-1}$, не всички от които са равни на нула и такива, че

$$\mu_1 \left(b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) + \dots + \mu_{k-1}\left(b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) = \mathbf{0}.$$

Оттук получаваме равенството

$$\mu_1 b_1 + \dots + \mu_{k-1} b_{k-1} + * b_k = \mathbf{0}$$

(няма да се интересуваме какъв е коефициентът пред b_k). Следователно векторите $b_1, \dots, b_{k-1}, b_k$ са линейно зависими.

§ 9. Базис, размерност, координати

Лема 1. *Нека V е линейно пространство и $a_1, a_2, \dots, a_s$ са линейно независими вектори от V. Ако a е вектор от V, който не принадлежи на $l(a_1, a_2, \dots, a_s)$, то векторите $a_1, a_2, \dots, a_s; a$ продължават да бъдат линейно независими.*

Доказателство. Да допуснем, че системата от вектори $a_1, a_2, \dots, a_s; a$ е линейно зависима и нека

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s + \lambda a = \mathbf{0},$$

където поне един от коефициентите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s; \lambda$ е различен от нула. Ако $\lambda = 0$, получаваме линейна зависимост на векторите $a_1, a_2, \dots, a_s$, което е противоречие. Ако $\lambda \neq 0$, имаме

$$a = -\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} a_2 - \dots - \frac{\lambda_s}{\lambda} a_s \in l(a_1, a_2, \dots, a_s),$$

което отново е противоречие. Следователно системата вектори $a_1, a_2, \dots, a_s; a$ е линейно независима.

Определение. *Нека V е ненулево линейно пространство над полето F и B е непразно подмножество на V. Ще казваме, че B е базис на V над F (или само базис на V, ако F се подразбира), ако:*

1) *B е линейно независима система от вектори;*

2) *всеки вектор от V е линейна комбинация на векторите от B с коефициенти от F, т. е. $V = l(B)$.*

Примери.

1. От задача 1 от § 8 и задача 2 от § 04 следва, че векторите $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ образуват базис на F^n над F.

2. Полиномите $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуват базис на $F^{n+1}[x]$. Полиномите $1, x, x^2, \dots$ образуват базис на $F[x]$.

Определение. *Едно ненулево линейно пространство V ще наричаме крайномерно над F (или само крайномерно, ако F се подразбира), ако V притежава краен базис. В противен случай ще казваме, че V е безкрайномерно над F.*

Пространствата F^n и $F^{n+1}[x]$ са крайномерни над F, а пространството $F[x]$ е безкрайномерно над F.

Теорема 2. *Нека ненулевото пространство V е линейна обвивка на краен брой свои вектори. Тогава V е крайномерно над F. По-точно, ако*