1) $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$;

2) *Нулевият вектор се представя по единствен начин като сума на вектори съответно от* $V_1, V_2, \ldots, V_s$.

Твърдение 3. *Нека* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *е базис на крайномерното линейно пространство* V *и* k *е произволно естествено число, ненадминаващо* n. *Тогава* $V = V_1 \oplus V_2$, *където* $V_1 = l(e_1, \ldots, e_k)$, $V_2 = l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. *Обратно, ако* $V = V_1 \oplus V_2$ *и* $e_1, \ldots, e_k$ *и* $e_{k+1}, \ldots, e_n$ *са базиси съответно на* V_1 *и* V_2, *то* $e_1, \ldots, e_k; e_{k+1}, \ldots, e_n$ *е базис на* V, *в частност* $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ *(последното следва и от теорема 1).*

Доказателство. Очевидно $V = V_1 + V_2$. От линейната независимост на векторите $e_1, \ldots, e_k; e_{k+1}, \ldots, e_n$ следва $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ (действително, ако $v \in V_1 \cap V_2$, то $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_n e_n$, откъдето $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k - \alpha_{k+1} e_{k+1} - \cdots - \alpha_n e_n = \mathbf{0}$ и оттук $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, значи $v = \mathbf{0}$). Сега от твърдение 2 получаваме $V = V_1 \oplus V_2$.

Твърдение 4. *Нека* V *е крайномерно линейно пространство и* W *е подпространство на* V. *Да се докаже, че съществува подпространство* U *на* V, *такова че* $V = W \oplus U$.

Доказателство. Нека $e_1, e_2, \ldots, e_k$ е базис на W. Да допълним този базис до базис $e_1, \ldots, e_k; e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V (твърдение 5 от § 9). Да положим $U = l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Тогава според твърдение 3, $V = W \oplus U$.

Задача 5. *Да се докаже, че всяко ненулево крайномерно линейно пространство* V *е директна сума на едномерни подпространства.*

Упътване. Ако $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на V, то $V = l(e_1) \oplus l(e_2) \oplus \cdots \oplus l(e_n)$.

§ 11. Ранг на система вектори. Ранг на матрица

В този параграф ще разгледаме метод, който ни дава възможност да определим дали една система вектори е линейно зависима или не.

Нека $A \in F_{m \times n}$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Ако фиксираме произволни* k *реда и произволни* k *стълба на матрицата* A, *елементите, които стоят в пресечните им точки образуват квадратна матрица от ред* k. *Детерминантата на всяка такава матрица ще наричаме минор на* A *от ред* k. *С други думи, минор от ред* k *на* A *е всяка детерминанта от вида*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

където $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$.

Определение. *Ще казваме, че матрицата* A *има ранг* r *(и ще пишем* $r(A) = r$*), ако* A *притежава различен от нула минор от ред* r *и всички минори от по-голям ред са равни на нула. По определение* $r(\mathbf{0}) = 0$.

Забележка. Лесно се вижда, че ако всички минори от ред $r+1$ са равни на нула, то и всички минори от ред, по-голям от $r+1$ също са равни на нула.

От теоремата за транспонирана детерминанта (теорема 2 от § 1) следва, че $r(A^t) = r(A)$.

Определение. *Нека V е линейно пространство и*

$$c_1,\ c_2, \dots,\ c_t \tag{1}$$

е система вектори от V. Ще казваме, че системата вектори (1) има ранг r (и ще пишем $r(c_1,\ c_2, \dots,\ c_t) = r$), ако съществуват r линейно независими вектора от тази система и всеки друг вектор от системата е тяхна линейна комбинация.

Задача 1. *Да се докаже, че:*

а) *рангът на системата вектори* (1) *е равен на максималния брой линейно независими вектори в тази система;*

б) $r(c_1,\ c_2, \dots,\ c_t) = \dim l(c_1,\ c_2, \dots,\ c_t)$.

Да означим с $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \dots,\ \boldsymbol{a}_m$ векторите редове на матрицата A, т.е. $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ... , $\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$. Можем да разглеждаме $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \dots,\ \boldsymbol{a}_m$ като вектори от линейното пространство F^n. Аналогично, векторите стълбове $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n$ на A ще разглеждаме като вектори от F^m.

Теорема 1. *В сила са равенствата*

$$r(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \dots,\ \boldsymbol{a}_m) = r(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n) = r(A).$$

Доказателство. Поради наличието на теоремата за транспонирана детерминанта (теорема 2 от § 1), достатъчно е да докажем само равенството $r(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_n) = r(A)$. Ако $A = \boldsymbol{0}$, твърдението е очевидно. Нека $r(A) = r \geq 1$. Без ограничение на общността можем да считаме, че минорът от ред r, стоящ в горния ляв ъгъл на A е различен от нула. Нека

$$\begin{array}{c} \quad\ b_1 \quad\ b_2 \qquad\quad\ b_r \\ D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ a_1 \\ a_2 \\ \\ a_r \end{array}$$

и $\Delta = \det D \neq 0$. Тогава първите r стълба на A са линейно независими. Действително, ако съществува линейна зависимост между стълбовете $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r$, то същата линейна зависимост ще съществува между стълбовете на матрицата D, откъдето ще следва $\det D = 0$.

Ще докажем, че всеки стълб $\boldsymbol{b}_l$ на A, $r < l \leq n$, е линейна комбинация на стълбовете $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r$, с което теоремата ще бъде доказана.

Нека i е произволно естествено число между 1 и m. Да разгледаме квадратната матрица D_i от $(r+1)$-ви ред, която се получава като "заградим" матрицата D с i-ия ред и l-ия стълб на A:

$$D_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{il} \end{pmatrix}.$$

Ако $i \leq r$, тази матрица има два равни реда и следователно $\det D_i = 0$. Ако $i > r$, то $\det D_i$ е минор от $(r+1)$-ви ред на A и отново $\det D_i = 0$. Да означим с $A_1, \ldots, A_r$; A_l адюнгираните количества съответно на елементите $a_{i1}, \ldots, a_{ir}$; a_{il}. Очевидно $A_l = \Delta$. Развиваме $\det D_i$ по последния ред и получаваме

$$a_{i1}A_1 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{il}\Delta = 0.$$

Тъй като $\Delta \neq 0$, то

$$a_{il} = -\frac{A_1}{\Delta}a_{i1} - \cdots - \frac{A_r}{\Delta}a_{ir}.$$

Това равенство е в сила за всяко $i = 1, 2, \ldots, m$. При това, адюнгираните количества A_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ **не зависят** от i, тъй като

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}.$$

Така всеки елемент a_{il} на l-ия стълб $\boldsymbol{b}_l$ е линейна комбинация на съответните елементи на стълбовете $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ **с едни и същи коефициенти** за всяко $i = 1, 2, \ldots, m$. Следователно $\boldsymbol{b}_l$ е линейна комбинация на $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ със същите коефициенти.

З а б е л е ж к а. В доказателството на теоремата използвахме, че са равни на нула не **всички** минори от ред $r+1$, а само тези минори от ред $r+1$, които заграждат D. Така за да докажем, че $r(A) = r$, достатъчно е да намерим ненулев минор от ред r и да проверим, че са равни на нула само минорите от ред $r+1$, които го заграждат.

Следствие 2. *Ако A е квадратна матрица от ред n, то $\det A = 0$ тогава и само тогава, когато редовете (стълбовете) на A са линейно зависими.*

Д о к а з а т е л с т в о. Едната посока на твърдението следва от свойство 4 за линейна зависимост на вектори от § 8 и свойство 8 за детерминанти от § 2.

Обратно, нека $\det A = 0$. Тогава $r(A) < n$. Според теорема 1 рангът на векторите редове (стълбове) на A също е по-малък от n и значи те са линейно зависими.

§ 12. Системи линейни уравнения. Хомогенни системи

Системи линейни уравнения. Да разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{1}$$

Да означим с A и $\overline{A}$ съответно матрицата и разширената матрица на системата.

Теорема 1 (теорема на Руше). *Системата (1) е съвместима тогава и само тогава, когато $r(A) = r(\overline{A})$.*

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ векторите стълбове на матрицата A, а с $\boldsymbol{b}$ — стълба от свободните членове. Имаме $r(A) = r(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \leq r(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n; \boldsymbol{b}) = r(\overline{A})$.