Глава II. Линейни пространства

Всички линейни пространства във втора и трета глава (ако не е казано нещо друго) ще бъдат над фиксирано числово поле F.

§ 7. Линейни пространства

Понятието линейно пространство е типичен пример на абстрактна алгебрична структура с въведени в нея операции, подчинени на определени свойства. То е обобщение на познатите от училищния курс по математика едномерно пространство (правата), двумерно пространство (равнината) и тримерно пространство.

Определение. *Нека F е поле и V е непразно множество, чиито елементи ще наричаме вектори. Нека във V са въведени следните операции:*

I. *Събиране на вектори: на всеки два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от V е съпоставен вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ също от V, който ще наричаме сума на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.*

II. *Умножение на вектор с число: на всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V и на всяко число λ от F е съпоставен вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ от V.*

Ще казваме, че V е линейно пространство над полето F, ако тези операции удовлетворяват следните свойства (аксиоми):

1. *Събирането е асоциативно, т. е. за всеки три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от V е в сила $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Този елемент ще бележим с $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ без скоби.*

2. *Събирането е комутативно, т. е. за всеки два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от V е изпълнено $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.*

3. *Съществува неутрален елемент относно операцията събиране, т. е. такъв вектор $\mathbf{0}$ от V, че $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ за всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V. По-долу ще видим, че този неутрален елемент е единствен и ще го наричаме нулев вектор.*

4. *За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V съществува вектор $\boldsymbol{a}'$ от V, такъв че $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\mathbf{0}$. По-долу ще видим, че векторът $\boldsymbol{a}'$ еднозначно се определя от $\boldsymbol{a}$. Ще го наричаме противоположен вектор на $\boldsymbol{a}$ и ще го бележим с $-\boldsymbol{a}$.*

5. *За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е изпълнено $1.\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.*

6. *За всеки две числа λ и μ от F и за всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е изпъ[лнено] $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.*

7. *За всяко число λ от F и за всеки два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от V е изпъ[лнено] $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.*

8. *За всеки две числа λ и μ от F и за всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е изпъ[лнено] $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.*

П р и м е р и н а л и н е й н и п р о с т р а н с т в а.

1. Да разгледаме множеството $F_{m\times n}$ от всички $m\times n$ матрици с еле[мен]ти от F. От свойствата, формулирани в началото на § 4 следва, че $F_{m\times n}$ [е] линейно пространство над F.

2. Важен частен случай на пример 1 е множеството F^n от всички [на]редени n-орки с елементи от F.

При фиксирана координатна система в равнината (пространството) [мо]жем да отъждествяваме $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) с множеството от всички вектори в рав[нин]ата (пространството), чието начало съвпада с началото на координатна[та] система, разгледани с обичайните операции събиране на вектори и умно[]жение на вектор с число. Тези множества са линейни пространства [над] $\mathbb{R}$.

3. Да означим с $F[x]$ множеството от всички полиноми с коефициенти от F, разгледани с обичайните операции събиране на полиноми и умноже[]ние на полином с число. От училищния курс по математика знаем, че тези операции притежават необходимите свойства, така че $F[x]$ е линейно про[с]транство над F. Също така, множеството $F^{n+1}[x]$, състоящо се от всички полиноми с коефициенти от F и степен, ненадминаваща n, е линейно про[с]транство над F. (Множеството от всички полиноми от степен, равна на [n,] не е линейно пространство, тъй като сумата на два такива полинома може да е полином от по-ниска степен.)

С л е д с т в и я о т а к с и о м и т е.

1. Единственост на нулевия вектор.

Нека векторите $\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}''$ удовлетворяват третата аксиома за линейно пространство. Тогава $\mathbf{0}'+\mathbf{0}''=\mathbf{0}'$ (защото $\mathbf{0}''$ е нулев вектор) и $\mathbf{0}'+\mathbf{0}''=\mathbf{0}''$ (защото $\mathbf{0}'$ е нулев вектор). Следователно $\mathbf{0}'=\mathbf{0}''$.

2. Единственост на противоположния вектор на даден вектор.

Нека $\boldsymbol{a}\in V$ и $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{a}''$ са противоположни вектори на $\boldsymbol{a}$. Имаме

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}''=(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}''=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{a}''$$

и

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{a}'+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'')=\boldsymbol{a}'+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}'.$$

Следователно $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}''$.

3. За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е в сила $0.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Имаме $\boldsymbol{a} + 0.\boldsymbol{a} = 1.\boldsymbol{a} + 0.\boldsymbol{a} = (1+0)\boldsymbol{a} = 1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, т.е. $\boldsymbol{a} + 0.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. Като прибавим към двете страни на това равенство вектора $-\boldsymbol{a}$, получаваме $0.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

4. За всяко число λ от F е в сила $\lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

В равенството $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$, като положим $\mu = 0$ и използваме предното свойство, получаваме $\lambda.\boldsymbol{0} = 0.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

5. За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ от V е изпълнено $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

Имаме $\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = 1.\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = (1-1)\boldsymbol{a} = 0.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Следователно векторът $(-1)\boldsymbol{a}$ е противоположният вектор на $\boldsymbol{a}$.

6. Ако $\lambda \in F$, $\boldsymbol{a} \in V$ и $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то или $\lambda = 0$, или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Действително, ако $\lambda \neq 0$, умножаваме горното равенство с λ^{-1} и получаваме $1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

7. Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са вектори от V, уравнението $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ има единствено решение във V.

Очевидно $\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$ е решение на уравнението. Ако $\boldsymbol{x}'$ е вектор, за който $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$, като прибавим към двете страни на това равенство вектора $-\boldsymbol{a}$, получаваме $\boldsymbol{x}' = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$, т.е. $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.

Единственото решение на уравнението $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ по-нататък ще означаваме с $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, т.е. вместо $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$ ще пишем $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

З а б е л е ж к а. Определението за линейно пространство изглежда дълго, а следствията от аксиомите на пръв поглед будят недоумение (сдва ли човек в началото изпитва необходимост да доказва, че $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$). В действителност, нито определението, нито следствията от аксиомите е необходимо да се помнят буквално наизуст. Достатъчно е да се знае, че въведените операции се подчиняват на естествени и "разумни" свойства и с тях може да се работи почти както с числа.

Определение. *Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са вектори от V, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са числа от F. Вектора $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$ ще наричаме линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ с коефициенти съответно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.*

Определение. *Нека W е непразно подмножество на линейното пространство V. Ще казваме, че W е подпространство на V, ако всяка линейна комбинация на вектори от W също принадлежи на W.*

Всяко подпространство е също линейно пространство относно въведените операции.

Задача 1. *Да се докаже, че непразното подмножество W на V е подпространство на V тогава и само тогава, когато се изпълняват следните две условия:*

1) *Сумата на всеки два вектора от W също принадлежи на W.*

2) *Произведението на всеки вектор от W с число от F принадлежи на W.*

(Казваме, че W е затворено относно операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число.)

Задача 2. *Да се докаже, че всяко подпространство съдържа нулевия вектор.*

Задача 3. *Да се докаже, че сечение на произволна фамилия от подпространства също е подпространство.*

П р и м е р и н а п о д п р о с т р а н с т в а.

0. Очевидно множествата $\{\boldsymbol{0}\}$ и V са подпространства на V.

1. Нека V е множеството от всички вектори в равнината, чието начало съвпада с началото на фиксирана координатна система (разгледани с обичайните операции събиране на вектори и умножение на вектор с число). Това множество е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Нека W е множеството от всички вектори от V, чийто край лежи върху фиксирана права, минаваща през началото на координатната система. Тогава W е подпространство на V.

2. Нека $V = F^n$ и k е естествено число, ненадминаващо n. Да означим с W множеството от тези наредени n-орки от F^n, чиито първи k елемента са произволни числа от F, а останалите $n-k$ са равни на нула. Директно от определението се проверява, че W е подпространство на V. Фактически можем да отъждествяваме W с F^k.

3. Линейното пространство $F^{n+1}[x]$ е подпространство на линейното пространство $F^{n+2}[x]$. Също така, за всяко естествено число n $F^{n+1}[x]$ е подпространство на $F[x]$.

Определение. *Нека A е произволно непразно подмножество на линейното пространство V. Множеството $l(A)$, състоящо се от всички линейни комбинации на елементи от A с коефициенти от F ще наричаме линейна обвивка на множеството A.*

Очевидно $l(V) = V$ и $l(\boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{0}\}$.

Задача 4. *Да се докаже, че $l(A)$ е подпространство на V, съдържащо A и $l(A) = A$ тогава и само тогава, когато A е подпространство на V.*

Задача 5. *Да се докаже, че $l(A)$ съвпада със сечението на всички подпространства на V, съдържащи множеството A (т.е. $l(A)$ е най-малкото (относно включване) подпространство на V, съдържащо A).*

Задача 6. *Нека $V = F^2$ и $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$. Да се докаже, че $l(\boldsymbol{e}_1) = \{\,(\lambda, 0) \mid \lambda \in F\,\}$, $l(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = F^2$.*