Обратна матрица. Матрични уравнения

1. Определение за:

- неособена и особена матрица;
- обратима матрица.

Теорема 1. *Една квадратна матрица е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Доказателство. от учебника □

2. Матрични уравнения - от учебника.

Линейни пространства

1. Определение за линейно пространство (ЛП), примери.
2. Определение за:

- линейна комбинация на вектори;
- подпространство на ЛП;
- линейна обвивка $l(a_1, a_2, \dots, a_s)$ на система вектори $A = a_1, a_2, \dots, a_s$ от V.

Линейна зависимост и независимост

1. Определение за:

- линейна зависимост на вектори;
- линейна независимост на вектори.

2. Основни свойства на понятията линейна зависимост и независимост на вектори - 4 свойства - с доказателствата .

Лема 1. *(основна лема на линейната алгебра) (доказателството от учебника). Нека V е ЛП и са дадени две системи вектори от V:*

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Нека всеки вектор от системата B е линейна комбинация на векторитр от системата A Тогава, ако $k > n$, то векторите от системата B са линейно зависими.

Базис, размерност, координати

Лема 2. *(доказателството от учебника) Нека V е ЛП и $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ са линейно независими вектори от V. Ако a е вектор от V, който не принадлежи на линейната обвивка $l(a_1, a_2, \dots, a_s)$ на векторите $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, то векторите $\{a_1, a_2, \dots, a_s; a\}$ продължават да бъдат линейно независими.*

Определение за:

- базис на ЛП; (много важно понятие)
  Ако векторите $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ образуват базис на V ще записваме $V = \mathrm{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- крайномерно и безкрайномерно ЛП.

Теорема 3. (доказателството от учебника) Всеки два базиса на ненулевото крайномерно ЛП V над полето F съдържат равен брой вектори.
Определение за размерност на ЛП.

Теорема 4. (доказателството само на а) от учебника) Нека V е ЛП над F. Тогава:

а) V е крайномерно и $dimV = n$ тогава и само тогава, когато във V съществуват n на брой линейно независими вектори и всеки $n+1$ на брой вектори са линейно зависими. В този случай всеки n на брой линейно независими вектори от V са базис на V.

б) V е безкрайномерно тогава и само тогава, когато за всяко естествено число n във V има n на брой линейно независими вектори.

Твърдение 6. (доказателството от учебника) Нека V е ненулево крайномерно ЛП над F. Една система вектори от V е басис на V тогава и само тогава, когато всеки вектор от V се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите от тази система.

Определение за координати на вектор (след Задача 2).

Задача 3. (да се реши самостоятелно) Нека V е ненулево крайномерно ЛП, $v \in V$
и $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_k v_k$ $\mu_i \in F$, $v_i \in V$; $i = 1, 2, \dots, k$. Тогава координатите на вектора v във фиксиран базис на V са линейни комбинации с коефициенти $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ на съответните координати на векторите $v_1, v_2, \dots, v_k$ в същия базис.

Тъй като твърдението в Задача 3. е много важно и ще го използваме по-нататък при решаване на задачи, ще го илюстрирам с пример.

Пример към Задача 3. Нека V е 3-мерно ЛП (dim V=3) над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ и нека векторите $\{e_1, e_2, e_3\}$ образуват базис на V, т.е. $V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Векторите v_1, v_2, v_3, v_4 от V имат следните координати относно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$: $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (-4, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, 0)$, $v_4 = (2, -1, 2)$. Да се намерят координатите на вектора $v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - v_4$ относно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ на V.
Решение: Всеки от векторите v_1, v_2, v_3, v_4 от V е линейна комбинация на базисните вектори с коефициенти координатите му, т.е.

$$v_1 = -1.e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad v_2 = -4.e_1 + 0e_2 + 1e_3, \quad v_3 = 1.e_1 + 2e_2 + 0e_3, \quad v_4 = 2.e_1 - 1e_2 + 2e_3.$$

$$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - v_4 = 2(-1.e_1 + 2e_2 + 3e_3) - 3(-4.e_1 + 0e_2 + 1e_3) + 4(1.e_1 + 2e_2 + 0e_3) - (2.e_1 - 1e_2 + 2e_3) =$$
$$= (-2 + 12 + 4 - 2)e_1 + (4 + 0 + 8 + 1)e_2 + (6 - 3 + 0 - 2)e_3 = 12e_1 + 13e_2 + e_3$$

Получихме $v = 12e_1 + 13e_2 + e_3$, което означава, че координатите на вектора v относно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ са $v = (12, 13, 1)$.
По същия начин се доказва твърдението в Задача 3 в общия случай. Когато решаваме задачи направо ще прилагаме Задача 3 така:

$$v = (2(-1) - 3(-4) + 4(1) - (2),\ \ 2(2) - 3(0) + 4(2) - (-1),\ \ 2(3) - 3(1) + 4(0) - (2)) = (12, 13, 1).$$