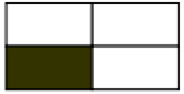
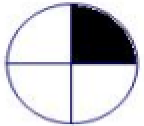
Numere Rationale

O **fracție** reprezintă una sau mai multe părți dintre părțile egale în care a fost împărțit un întreg (sau mai mulți întregi identici)

ex: $\frac{1}{4}$:





O **fracție** se numește (sau fracția $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ este):

-**subunitară**, dacă numărătorul e mai mic decât numitorul ($a < b$) ex: $\frac{2}{5}$

-**echiunitară**, dacă numărătorul este egal cu numitorul ($a = b$) ex: $\frac{3}{3}$

-**supraunitară**, dacă numărătorul este mai mare decât numitorul ($a > b$) ex: $\frac{7}{2}$

Fracții echivalente: Fie a, b, c, d$\in\mathbb{Z}$, $b \neq 0, d \neq 0$. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ se numesc **echivalente** dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

ex: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ pentru că $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$

O fracție $\frac{a}{b}$ cu a $\in\mathbb{Z}$, b$\in\mathbb{Z}^*$se numește **ireductibilă** atunci când numitorul și numărătorul sunt numere prime între ele, adică c.m.m.d.c. al lor este 1.

ex: $\frac{15}{7}; \frac{21}{25}$

Numerele reprezentate printr-un raport de două numere întregi a, b cu forma $\frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$ reprezintă mulțimea tuturor numerelor de forma dată mai sus și formează **mulțimea numerelor raționale**, care se notează cu $\mathbb{Q}$.

Un număr rațional poate fi reprezentat pe o axă a numerelor ocupând o poziție în raport de valoarea sa.

Egalitatea numerelor raţionale

Două **numere raționale** notate cu $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt **egale** dacă fracțiile $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt fracții echivalente adică dacă $m \cdot b = n \cdot a$.

Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale are proprietățile:

1. Reflexivitatea egalității:

   ∀ a∈ℚ avem $a = a$

2. Simetria egalității:

   ∀a, b∈ ℚ, dacă $a = b$ atunci $b = a$

3. Tranzitivitatea egalității:

   ∀a, b, c ∈ℚ, dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$.

4. Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale având proprietățile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate este o relație de echivalență.

Operaţii cu numere raţionale

Adunarea

Suma a două numere raționale $\frac{m}{n}$ *si* $\frac{a}{b}$ este dată de fracția $\frac{mb+na}{nb}$.

ex:

$$\frac{-5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(-5)\cdot 3+2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{-15+4}{6}=\frac{-11}{6}$$

$$\frac{-7}{4}+\frac{4}{-3}=\frac{(-7)(-3)+4\cdot 4}{4\cdot(-3)}=\frac{-21+16}{-12}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$$

Adunarea numerelor raționale are următoarele proprietăți

1. Comutativitatea adunării:

   $\forall$ a, b $\in\mathbb{Q}$, atunci $a+b=b+a$

2. Asociativitatea adunării:

   $\forall$ a, b, c $\in\mathbb{Q}$, atunci $(a+b)+c=a+(b+c)$

3. Există elementul 0 numit element neutru cu proprietatea că:

   $\forall a\in\mathbb{Q}$, atunci $a+0=0+a=a$

4. Există elementul opus oricărui număr rațional a, notat cu $-a$ astfel incat:

   $\forall a\in\mathbb{Q},\exists -a\in\mathbb{Q}$ a.î. $a+(-a)=(-a)+a=0$

Scăderea

Oricare ar fi numerele raționale a și b avem $a-b=a+(-b)$. Astfel, dacă dorim să scădem dintr-un număr rațional a un alt număr rațional b, adunăm la numărul rațional a opusul numărului b adică $(-b)$

ex: $7-3=7+(-3=4)$

Obs:

1. Operația de scădere se poate efectua între oricare ar fi aceste numere raționale
2. Oricare ar fi un număr rațional avem: $a-0=a$, $0-a=-a$
3. Oricare ar fi a,b,c numere raționale, dacă avem $a=b$, avem: $a-c=b-c$
4. Oricare ar fi a,b,c,d numere raționale, dacă $a=b$ și $c=d$, avem: $a-c=b-d$

Înmulțirea

Prin **produsul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ și $\frac{a}{b}$ se obține un al treilea număr rațional notat cu c astfel: $c=\frac{m\cdot a}{n\cdot b}$

ex:

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{-10}{21}$$

$$\frac{2}{-5}\cdot\frac{-1}{11}=\frac{2\cdot(-1)}{(-5)\cdot 11}=\frac{-2}{-55}=\frac{2}{55}$$

Proprietățile înmulțirii numerelor raționale:

1. Comutativitatea înmulțirii:

$\forall$a, b$\in\mathbb{Q}$ atunci $a\cdot b=b\cdot a$

2. Asociativitatea înmulțirii:

$\forall$a, b, c$\in\mathbb{Q}$,atunci $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

3. Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$\forall$a, b, c$\in\mathbb{Q}$, avem $a\cdot(b\cdot c)=ab+ac$

4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că:

$\forall$a $\in\mathbb{Q}$,atunci $a\cdot 1=1\cdot a=a$

5. Există elementul invers oricărui număr rațional a notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$

Obs:

1. Oricare ar fi a rațional avem:

$$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$$

2. Oricare ar fi a,b,c raționale, dacă $a=b$ atunci $a\cdot c=b\cdot c$
3. oricare ar fi a,b,c,d raționale, dacă $a=b$, $c=d$ atunci $a\cdot c=b\cdot d$

Împărțirea

Prin **câtul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ și $\frac{a}{b}$ cu $a, b, n \neq 0$ se obține un al treilea număr rațional notat c astfel: $c = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}$ deci se înmulțește deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.

ex: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

Proprietățile împărțirii numerelor raționale

1. Oricare ar fi a număr rațional, avem: $a : 1 = \frac{a}{1} = a$
2. Oricare ar fi a rațional, avem: $1 : a = \frac{1}{a} = a^{-1}$