Numere Reale

Mulțimea **numerelor reale** reprezintă reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și cele iraționale, notată cu $\mathbb{R}$.

Este evident că toate mulțimile studiate sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor iraționale se obține prin $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Obs:

1.Din punct de vedere geometric, mulțimea numerelor reale reprezintă o dreaptă căreia i se asociază un punct numit origine corespunzător valorii 0 și un sens de parcurgere corespunzător numerelor pozitive, iar sensul opus corespunzător numerelor negative.

2.Mulțimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri: pozitivă și negativă $(-\infty, \infty)$, unde:

$-\infty$ se citește „ minus infinit"

$+\infty$ se citește „plus infinit" sau infinit

Relatia de ordine

Oricum am alege două numere a şi b reale, există cel puţin una din relaţiile $a > b$ sau $a \le b$, astfel, oricare două numere reale pot fi comparate.

Astfel ($\mathbb{R}$, $\le$) este o mulţime total ordonată în raport cu relaţia de ordine „$\le$” (mai mic sau egal).
Proprietăţile relaţiei „$\le$”:

1. Oricare ar fi a $\in \mathbb{R}$, avem $a \le a$
2. Oricare ar fi a, b$\in \mathbb{R}$, dacă $a \le b$ şi $b \le a$, atunci $a = b$
3. Oricare ar fi a, b, c $\in \mathbb{R}$, dacă $a \le b$ şi $b \le c$, atunci $a \le c$
4. Relaţia de ordine este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale în sensul că:
   1) Dacă a, b, c $\in \mathbb{R}$ şi $a \le b$, atunci $a + c \le b + c$ şi reciproc
   2) Dacă a, b, c $\in \mathbb{R}$ şi $a \le b$, atunci: $a \cdot c \le b \cdot c$ dacă $c > 0$ şi $a \cdot c \ge b \cdot c$ dacă $c < 0$ şi reciproc
5. Dacă a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ şi $a \le b$, $c \le d$ atunci: $a + c \le b + d$

Valoarea absolută, valoare maximă, valoare minimă partea întreagă şi partea fracţionară

Numărul pozitiv notat $|x|$ reprezintă **valoarea absolută** a numărului real x şi este definit astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

ex: $|-7| = 7$ $\quad |3| = 3 \quad |0| = 0$

Obs:

1. Valoarea absolută se mai numeşte şi **modulul** numărului respectiv
2. Din punct de vedere geometric, valoarea absolută semnifică distanţa pe axa reală dintre cele două numere

Fie a, b $\in \mathbb{R}$,atunci prin max (a,b) notăm **maximul** dintre numerele reale a şi b definit astfel:

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, daca\ a \geq b \\ b, daca\ a < b \end{cases}$$

ex: $\max(-2,-3) = -2$

$\max(-5,|5|) = |5| = 5$

Fie a, b $\in \mathbb{R}$, atunci prin min (a,b) notăm **minimul** dintre numerele reale a şi b definit

astfel: $\min(a,b) = \begin{cases} a, daca\ a \leq b \\ b, daca\ a > b \end{cases}$

Intervale de numere reale

Fie a şi b numere reale cu $a \le b$

Notăm cu $[a;b]$ mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$. Acest interval se numeşte **interval închis** cu extremităţile a, b.

Notăm cu $(a;b)$ mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Acest interval se numeşte **interval deschis** cu extremităţile a, b.

Obs. Intervalele deschise spre deosebire de cele închise nu-şi conţin extremităţile.

ex. $[-1;4] = (-1;4) \cup \{-1;4\}$

Notăm cu $(a,b]$ mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$. Acest interval se numeşte **interval semideschis** cu extremităţile a, b deschis la stânga şi închis la dreapta.

Notăm cu $[a,b)$ mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.. Acest interval se numeşte interval semideschis cu extremităţile a,b, închis la stânga şi deschis la dreapta.

Intervalele de forma: $(a;b);[a;b];[a,b);(a,b]$ cu a și b date explicit se numesc intervale mărginite.

Intervalele de forma:

$(a;+\infty)$ adică mulțimea $\{x|x\in\mathbb{R},\ x>a\}$

$(-\infty;a]$ adică mulțimea $\{x|x\in\mathbb{R},\ x\le a\}$

$[a,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x\ge a\}$

$(-\infty,a)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x<a\}$

$(-\infty,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$

se numesc **intervale nemărginite.**

Fie $a\in\mathbb{R}$.

$A=\{x\in\mathbb{R} \ / \ |x|<a\}=(-a, a)$

$B=\{x\in\mathbb{R} \ / \ |x|\le a\}=[-a, a]$

$C=\{x\in\mathbb{R}/\ x>a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

$D=\{x\in\mathbb{R}/\ x\ge a\} = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

Obs: Intervalele sunt mulțimi asupra cărora se pot aplica toate operațiile studiate în capitolul mulțimi, ca rezultat obținându-se tot intervale de numere reale sau mulțimi vide.

Operatii cu numere reale

Adunarea

Prin adunarea a două numere reale se obține un al treilea număr real notat cu $s = a + b$ unde s reprezintă **suma**, iar a și b termenii sumei.

Proprietățile adunării numerelor reale:

1. Comutativitatea: $a + b = b + a$, a, b $\in \mathbb{R}$
2. Asociativitatea: $(a+b)+c = a+(b+c)$, a, b, c $\in \mathbb{R}$
3. Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, a$\in \mathbb{R}$
4. Există elementul opus: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Astfel se poate defini scăderea:

Prin scăderea a două numere reale a, b se obține un al treilea număr natural numit **diferență** iar a scăzător și b descăzut, definit astfel: $d = a - b = a + (-b)$

Inmulțirea

Prin înmulțirea a două numere reale a,b numiți **factori** se obține un al treilea număr real p numit **produs** și definit astfel: $p = a \cdot b$

Proprietățile produsului numerelor reale:

1. Comutativitatea: oricare a, b $\in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$
2. Asociativitatea: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Distributivitatea față de adunare: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că oricare a $\in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$
5. Există elementul invers oricărui număr real notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: oricare a $\in \mathbb{R}$, există- a $\in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg:

Dacă a este un număr real, iar n un număr natural astfel încât $n \neq 0$ și $n \neq 1$ atunci: $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots\ldots a}_{n \text{ ori}}$, unde a este baza iar n exponentul

Obs:

1. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$
2. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $a^1 = a$

Proprietăți :

1. Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
3. Puterea produsului este egală cu produsul puterilor $\left(a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_i\right)^n = a_1^n \cdot a_2^n \ldots\ldots a_i^n$,oricare a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$
4. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m : a^n = a^{m-n}$
5. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$ atunci $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Partea Intreaga. Partea fractionara.

Partea întreagă a unui număr real x, notată $[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

$x-[x]$ se notează cu $\{x\}$ şi se numeşte **partea fracţionară** a lui x. $\{x\}=x-[x]$

Exemplu:

$[2,3]=2$

$[-4,37]=-5$

$[-4,37]=-4,37-(-5)=6,63$

$\{2,3\}=0,3$

Observaţie:

1) Dacă $k\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ şi $k\le x<k+1, [x]=k$
2) $0\le\{x\}<1$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$
3) Dacă $\{x\}<0,5$, atunci rotunjirea la unităţi a lui x este $[x]$.
4) Dacă $0,5\le\{x\}$, atunci rotunjirea la unităţi a lui x este $[x]+1$