Lineer Cebir

Taban ve Boyut

Taban Kavramı

Örnek: Aşağıdaki kümeyi ele alalım:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^2$ dir. (ÖDEV)

Diğer yandan S den herhangi iki eleman seçilse yine aynı sonucu

elde ederdik. Örneğin aşağıdaki $\hat{S}$ kümesi için yine $\mathrm{span}(\hat{S}) = \mathbb{R}^2$

$$\widehat{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fakat aynı sonucu elde edebilmek için $\hat{S}$ kümesinden daha fazla eleman atamayız

Taban Kavramı

Bunu şöyle açıklayalım:

1. durumda S' deki üç vektör lineer bağımlıydı. Yani içlerinden herhangi birisi diğerleri cinsinden yazılabilirdi. Onu kümeden çıkardığımızda bir şey kaybetmedik.

2. durumda ise $\hat{S}$ deki iki vektör lineer bağımsızdı. Daha fazla vektör çıkaramazdık.

Bu bize boyut kavramı için bir yöntem sağlar: Yani verilen bir S kümesinden, gerdiği uzay değişmeyecek şekilde içinde lineer bağımsız vektörler kalana kadar gereksiz vektörleri atarız. Kalan lineer bağımsız kümedeki vektör sayısı bize uzayın boyutunu verir.

Taban Kavramı

Tanım: V bir vektör uzayı ve $B = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subset V$ kümesi verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa B kümesi V nin tabanıdır:

a) B lineer bağımsız.

b) $\text{span}(B) = V$.

Örnek:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanıdır.

Not: B ye $\mathbb{R}^3$ ün standart tabanı denir.

Taban Kavramı

Örnek:
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kümesi lineer bağımlı olduğundan $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanı değildir.

Fakat bu kümeden herhangi bir vektör çıkarılırsa $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanı olur.

Taban Kavramı

Notlar:

1. 0 vektörü hiçbir tabanın elemanı olamaz.
2. $\mathbb{R}^3$ te herhangi 4 adet vektörün lineer bağımlı olacağını gösteriniz.
3. İki vektörden oluşan bir küme $\mathbb{R}^3$ ün tabanı olamaz.
4. $\mathbb{R}^3$ ün herhangi bir tabanı tam olarak 3 vektör içermelidir.

Taban Kavramı

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin sıfır uzayı için bir taban bulunuz.

$Ax = 0$ denkleminin çözümünde $x_4 = s$ ve $x_5 = t$ denilirse

$$\begin{aligned} x_1 &= -3s - 2t \\ x_2 &= -s + t \\ x_3 &= -2s - 3t \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

Taban Kavramı

Buradan

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ olmak üzere A nın sıfır uzayı

$$\mathrm{Null}(A) = \{s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 : \ \forall s, \ t \in \mathbb{R}\}$$ olur.

Açıkça görülebilir ki v_1 ve v_2 lineer bağımsız olup sıfır uzayının tabanı

$B = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ dir.

Taban Kavramı

Örnek: $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nin tabanıdır.

Örnek: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ polinomları $\mathcal{P}_n$ için tabandır.

Örnek: $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ polinomları $\mathcal{P}$-tüm polinomlar uzayı-için tabandır.

Taban Kavramı

$\mathrm{v}, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{k} \in \mathbb{R}^n$ ve $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ olsun.

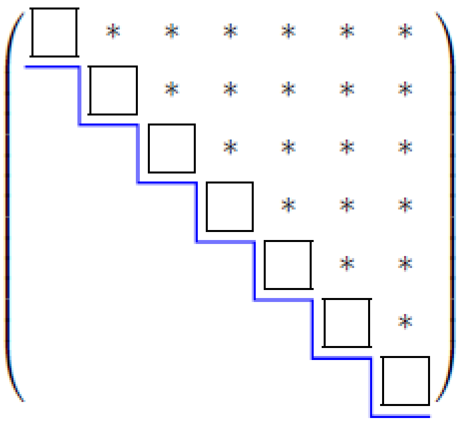
$r_1\mathrm{v}_1 + r_2\mathrm{v}_2 + \cdots + r_k\mathrm{v}_\mathrm{k} = \mathrm{v}$ vektörel denklemi $A\mathrm{x} = \mathrm{v}$ matris denklemine eşittir. Burada

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k), \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix}$$ dir.

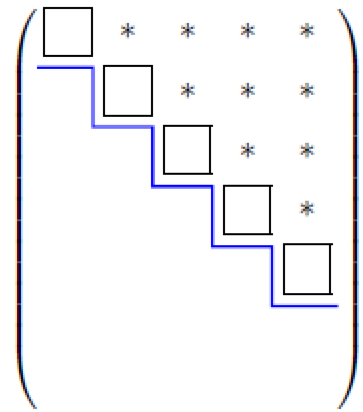
Yani $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ vektörleri $n \times k$ tipindeki A matrisinin sütunlarını oluşturur.

- ❑ Eğer A nın satır eşelon formu sıfır satırı içermiyorsa $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayını gerer.
- ❑ Eğer A nın satır eşelon formunun her satırındaki ilk eleman 1 ise (serbest değişken yok) $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

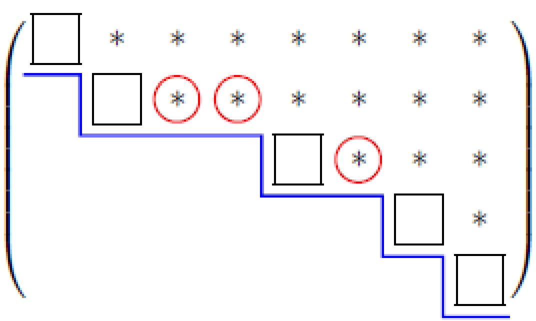
Taban Kavramı



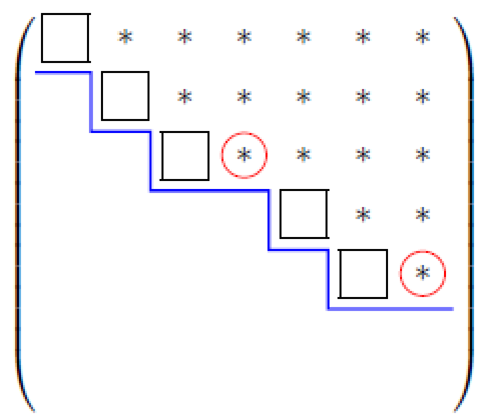
Uzayı gerer
Lineer bağımsız



Uzayı germez
Lineer bağımsız



Uzayı gerer
Lineer bağımsız değil



Uzayı germez
Lineer bağımsız değil

$\mathbb{R}^n$ için taban

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{k} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri verilsin.

Teorem 1: Eğer $k < n$ ise $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ yi germez.

Teorem 2: Eğer $k > n$ ise $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Teorem 3: Eğer $k = n$ ise aşağıdaki koşullar denktir:

i. $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ için tabandır.

ii. $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ yi geren bir kümedir.

iii. $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Boyut Kavramı

Önceki kısımda $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir tabanı n tane elemana sahip olduğunu gördük. Bu durum alt uzaylar için de geçerlidir: Yani bir alt uzayın herhangi bir tabanındaki eleman sayısı aynıdır.

Tanım: $V \neq \{0\}, \mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayı olsun. V nin boyutu herhangi bir tabanındaki eleman sayısına eşit olup $\dim(V)$ ile gösterilir.

Örnek:

- Önceki örnekteki A matrisinin sıfır uzayı 2 boyutludur.
- $V = \{0\}$ alt uzayının taban elemanı yoktur. Bu yüzden boyutu 0 kabul edilir.

Boyut Kavramı: Örnekler

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$
- $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$
- $\dim \mathcal{P}_n = n$
- $\dim \mathcal{P} = \infty$
- $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$

Boyut Kavramı

Örnek: $\mathbb{R}^3$ te $x + 2z = 0$ düzleminin boyutunu bulunuz.

$x + 2z = 0$ denkleminin genel çözümü:

$$\begin{cases} x = -2s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

$$(x, y, z) = (-2s, t, s) = t(0, 1, 0) + s(-2, 0, 1)$$

$x + 2z = 0$ düzlemini geren vektörler:

$\mathrm{v}_1 = (0,1,0)$ ve $\mathrm{v}_2 = (-2,0,1)$ vektörleri olur. Bu vektörler paralel olmadığı için lineer bağımsızdır. Böylece $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ bir taban olup düzlemin boyutu 2 dir.

Taban ve boyut

Örnek: $\mathbf{w}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{w}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (2,3,1)$ ve $\mathbf{w}_4 = (1,1,1)$ vektörleri tarafından gerilen V vektör uzayı için bir taban bulunuz.

Bu vektörler lineer bağımlı olacağından aralarındaki ilişkiyi bulalım:

$$r_1\mathbf{w}_1 + r_2\mathbf{w}_2 + r_3\mathbf{w}_3 + r_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$$

Buradan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi satır indirgeme işlemlerini kullanalım

Taban ve boyut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$ (İndirgenmiş satır eşelon formda)

$$\begin{cases} r_1 + 2r_3 = 0 \\ r_2 + r_3 = 0 \\ r_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = -2r_3 \\ r_2 = -r_3 \\ r_4 = 0 \end{cases}$$

Genel çözüm $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (-2t, -t, t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$

Özel çözüm $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (2, 1, -1, 0).$

Taban ve boyut

Buradan $2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$.

O halde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektörlerinden bir tanesini çıkarabiliriz.

Örneğin $V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4)$.

Şimdi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadıklarını kontrol edelim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Evet lineer bağımsızlar! Buradan $V = \mathbb{R}^3$ olup $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ kümesi V için bir tabandır.

Taban ve boyut

Örnek: $\mathbf{v}_1 = (0,1,0)$ ve $\mathbf{v}_2 = (-2,0,1)$ vektörleri lineer bağımsızdır. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ kümesini $\mathbb{R}^3$ ün tabanı olacak şekilde genişletiniz.

Burada yapmamız gereken $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ ile lineer bağımsız olacak şekilde bir $\mathbf{v}_3$ vektörü bulmaktır.

Önceki örnekten biliyoruz ki $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri $x + 2z = 0$ düzlemini geriyordu. O halde bu düzlem içerisinde olmayan bir vektör seçmeliyiz.

Örneğin $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ vektörü bu düzlem üzerinde değildir. Yani $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılamaz. Böylece $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanıdır.

Taban ve boyut

2. yol: En azından $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ taban vektörlerinden bir tanesi $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleriyle lineer bağımsızdır. Bunu kontrol edelim:

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ için $$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$ için $$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Lineer bağımsızlık

Önerme: Elemanter satır işlemleri bir matrisin satır uzayını değiştirmez.

Alt uzaylar

Tanım: $A, m \times n$ tipinde bir matris olsun.

- A nın m tane satır vektörünün gerdiği alt uzay $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya A nın **satır uzayı** denir.
- A nın n tane sütun vektörünün gerdiği alt uzay $\mathbb{R}^m$ nin bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya A nın **sütun uzayı** denir

Alt uzaylar

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

$\operatorname{span}\{(1,0,-1,2)^t,(3,4,6,-1)^t,(2,5,-9,7)^t\}$ satır uzayı

$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$ sütun uzayı