SAYISAL YÖNTEMLER

SAYISAL YÖNTEMLER

<u>9. Hafta</u>

SAYISAL TÜREV

İÇİNDEKİLER

- **Sayısal Türev**
  - **Geri Farklar İle Sayısal Türev**
  - **İleri Farklar İle Sayısal Türev**
  - **Merkez Farklar İle Sayısal Türev**
  - **Taylor Serisi İle Sayısal Türev**

Mühendislikte Türev

• Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.

•Bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

• Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.

• Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine göre; bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimine göre ifade edilir.

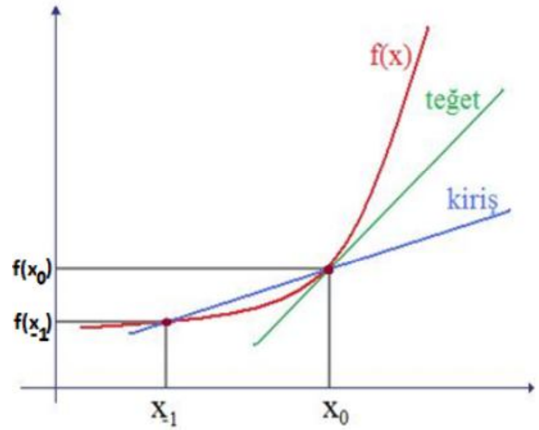
$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

Sayısal Türev

- **Türev,** **bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.**
- **Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde sayısal türev veya sayısal integral işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.**
- **Geometrik olarak Türev, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir *x* noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle *x* noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.**

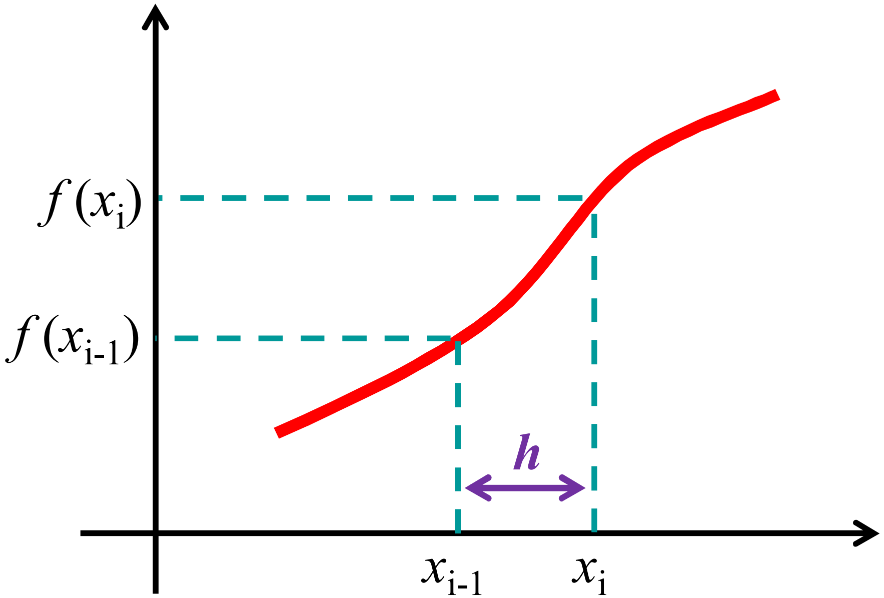
$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- **Sayısal türev,** **bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.**

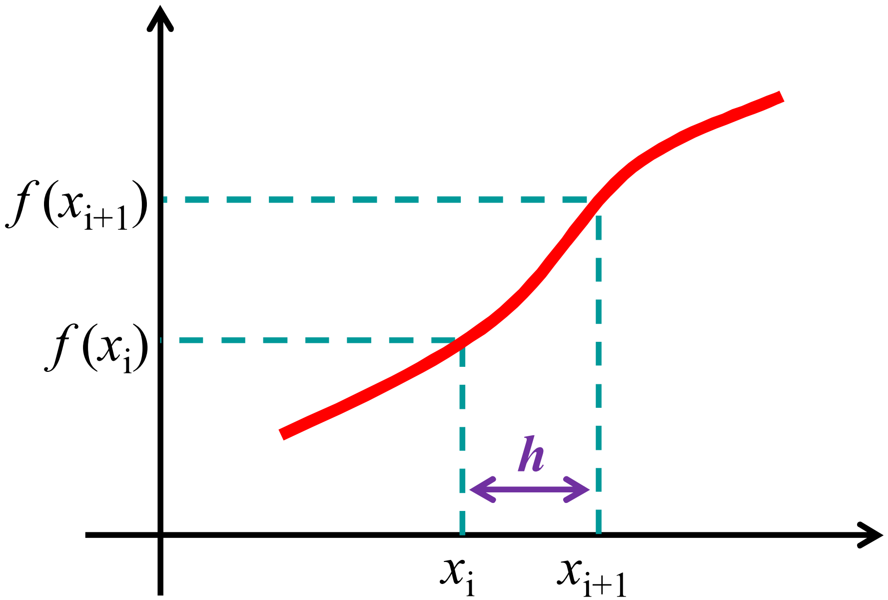
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

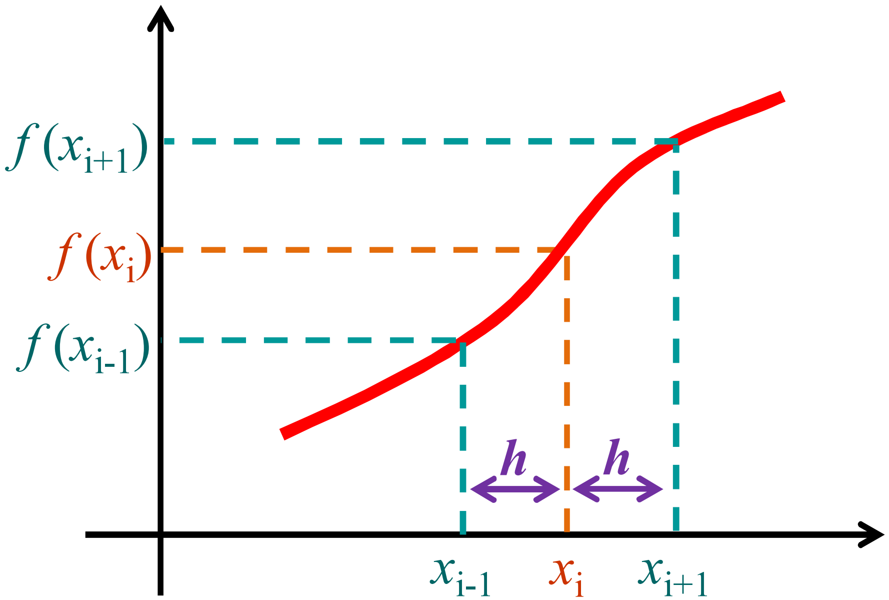
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



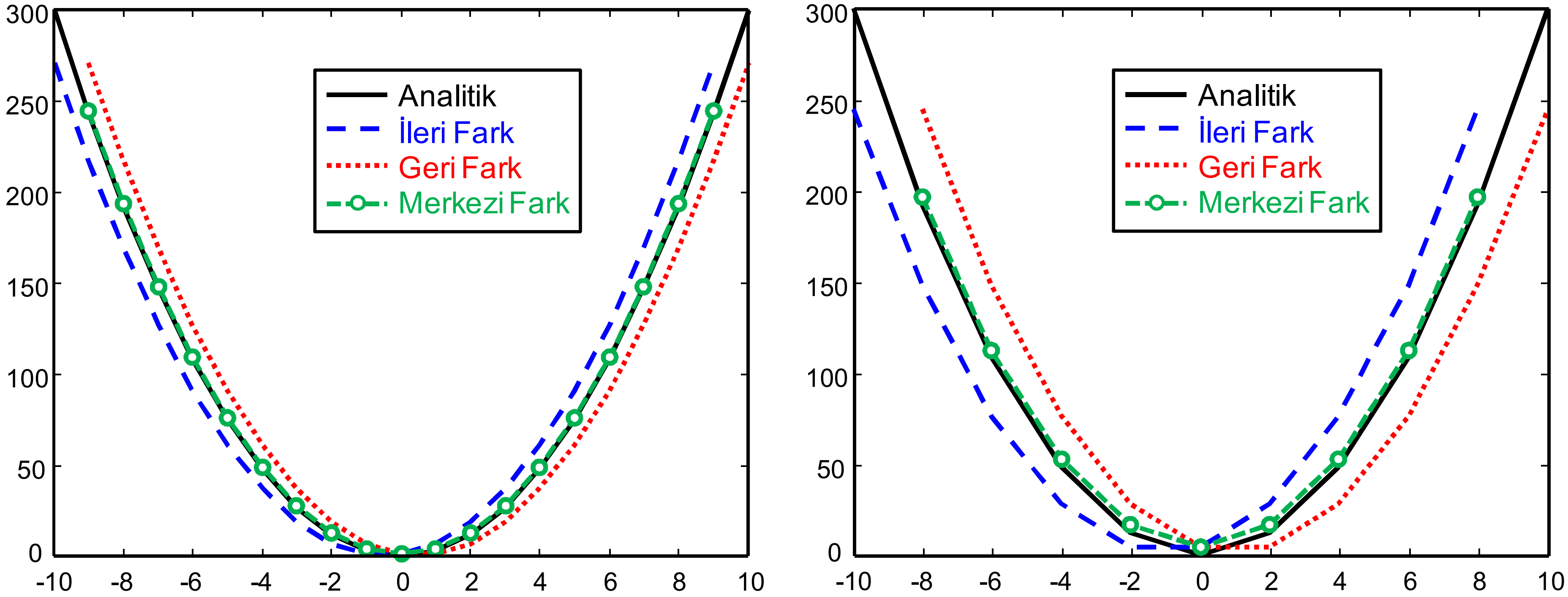
$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$h = 0.1$ $\qquad$ $h = 2$



Örnek

- $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

- **Çözüm:**

  - **Geri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(1) - f(1 - 0.1)}{0.1} = \frac{1^2 - 0.9^2}{0.1} = 1.9$$

  - **İleri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(1 + 0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$$

  - **Merkezi farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(1 + 0.1) - f(1 - 0.1)}{2 * 0.1} = \frac{1.1^2 - 0.9^2}{0.2} = 2$$

  - **Analitik Çözüm**

2

Örnek

- $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.2$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

- **Çözüm:**

  - **Geri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(1) - f(1-0.2)}{0.2} = \frac{2.7183 - 2.2255}{0.2} = 2.464$$

  - **İleri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(1+0.2) - f(1)}{0.2} = \frac{3.3201 - 2.7183}{0.2} = 3.009$$

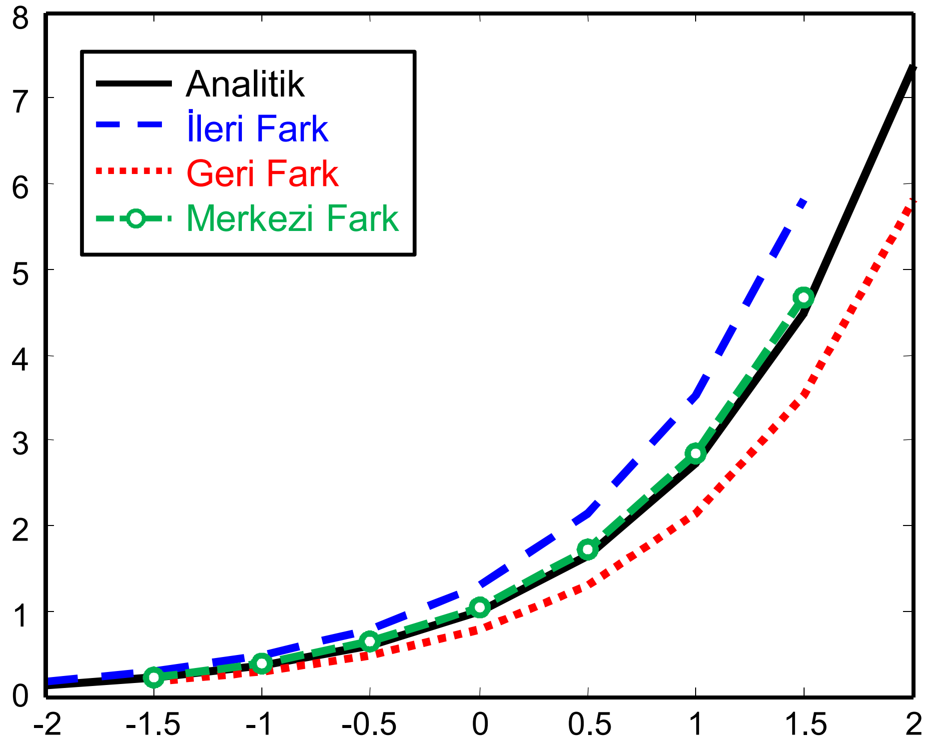
  - **Merkezi farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(1+0.2) - f(1-0.2)}{2 * 0.1} = \frac{3.3201 - 2.2255}{0.2} = 2.7365$$

  - **Analitik Çözüm**

2.7183

Örnek



Analitik
İleri Fark
Geri Fark
Merkezi Fark
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

$$f(x) = e^x$$

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- **Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.**
- **Bir fonksiyonun $x_i+\Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.**

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- **Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx' in mertebesine eşit olur.**
- **Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.**

Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- ***f* (*x*)** **fonksiyonun** x_i+h **civarındaki ve** x_i+2h **civarındaki değerlerini** $f(x_i)$ **nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp,** $f'(x_i)$ **yi çekelim.**

-4

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-4f(x_i+h) = -4f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_i) + 4f(x_i+h) - f(x_i+2h)\right]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile ⟹ $$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- ***f* (*x*)** **fonksiyonun** ***x_i+h*** **civarındaki ve** ***x_i+2h*** **civarındaki değerlerini** ***f* (x_i)** **nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp,** ***f''*(x_i)** **yi çekelim.**

-2 $$f(x_i+h)=f(x_i)+\frac{h^1 f'(x_i)}{1!}+\frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h)=f(x_i)+\frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!}+\frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-2f(x_i+h)=-2f(x_i)-2h.f'(x_i)-h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i+2h)=f(x_i)+2h.f'(x_i)+2h^2 f''(x_i)$$

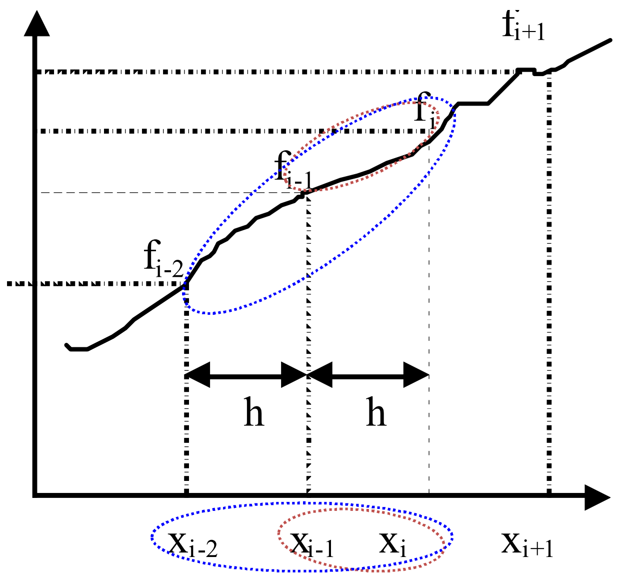
\+

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_i)-2f(x_i+h)+f(x_i+2h)\right]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile ⇒ $$f_i''=\frac{1}{h^2}\left[f_i-2f_{i+1}+f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi ile Geri Fark Yöntemi

- **İleri fark yöntemindeki işlemler $f\ (x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-$2h$ civarındaki değerlerini $f\ (x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.**



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile ➡

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[3 f_i - 4 f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

ÖDEV 1

- **Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.**

$$f_i^{'} = \frac{1}{6h}\left[-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}\right]$$

$$f_i^{''} = \frac{1}{h^2}\left[2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}\right]$$

$$f_i^{'''} = \frac{1}{h^3}\left[-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}\right]$$

Sayısal Türev

- **Örnek: f(x)=2x²+1 fonksiyonunun x=2 yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. h=0.1 ve analitik çözüm f'(2)=8**

- **Çözüm:**

- **Basit ileri farkla çözüm**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} = \frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} = \frac{(2*2.1^2+1)-(2*2^2+1)}{0.1} = \frac{9.82-9}{0.1} = 8.2$$

- **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

$$f_i = f(2) = 2*2^2+1 = 9$$

$$f_{i+1} = f(2.1) = 2*2.1^2+1 = 9.82$$

$$f_{i+2} = f(2.2) = 2*2.2^2+1 = 10.68$$

$$f_i' = \frac{1}{2*0.1}\left[-3*9+4*9.82-10.68\right] = \frac{1.6}{0.2} = 8$$

diff komutu ile sembolik türev alma

- **Tanımlanan bir denklemin türevini alır.**
- **diff (denklem, değişken)**

türev işleminde kullanılacak değişkenin adı

çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklem

```
%  sembol tanımlama
>> syms x
%  diff komutu ile sembolik türev alma
>> diff (x^2)
ans =
     2*x
```

```
%  sembol tanımlama
>> syms x t
%  diff komutu ile sin(2xt)nin t'ye göre türevi
>> diff (sin(2*x*t), t)
ans =
     2*x*cos(2*t*x)
```

diff komutu ile sembolik katlı türev alma

- **Katlı türev alma durumu.**
- **diff (denklem, değişken, türevderecesi)**

```
%   sembol tanımlama
>> syms x
%   diff komutu ile x^2 nin 2. dereceden türevi
>> diff (x^2, x, 2)
ans =

     2
```

Örnek

- $f(x)= e^{2x-3}$ fonksiyonunun $x=2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak *f'(x), f''(x) ve f'''(x)* değerini hesaplayınız. Matlab'da değişik h değerleri için grafikleri çiziniz

Sonuçlar:

- **Geri farklar: 4.4808**
- **İleri farklar: 6.6846**
- **Merkezi farklar: 5.5827**
- **Taylor Seri Açılımı: 5.0407**
- **Analitik Çözüm: 5.4366**

KAYNAKLAR

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, "*MATLAB ile Meslek Matematiği*", Seçkin Yayıncılık
- Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi