SAYISAL YÖNTEMLER

SAYISAL YÖNTEMLER

4. Hafta

DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

İÇİNDEKİLER

Denklem Çözümleri

- Denklemler fizik kanunlarına ve fiziksel parametrelere dayanır.
- Problemlerin çözümünde ve sistemlere ait bağımlı değişkenlerin tahmin edilmesinde kullanılırlar.
- Denklemler mühendislikte tasarımda kullanılır.
- Sayısal analizdeki matematiksel modelleme aşaması denklemler ve denklem çözümlerinden oluşur.

Sayısal Analizde Denklem Köklerini Bulmada İzlenecek Yol

❶ **Denklem köklerini aramaya belirli bir başlangıç değeri ya da değer aralığından başlanır.**

- **Kökü aramaya, doğru bir noktadan başlamak çözüme ulaşmayı hızlandıracaktır.**

❷ **Fonksiyonun girişine değerler vererek, fonksiyonun çıkışı gözlemlenir.**

- **Fonksiyonun çıkışını gözlemlemenin kolay yolu, fonksiyonun grafiğini çizdirmektir.**
- **Grafik, köke yakın aralığı hızlı ve kolay tespit etmeyi sağlar.**
- **Kökü aramaya uygun yerden başlamayı sağlar.**

Grafik Yöntemleri

- Sayısal analiz ile denklem köklerini hızlı ve kolay bulmayı sağlayan bir yöntemdir.

- Karmaşık denklem/problemlerin yaklaşık (kabaca) çözümlenmesini sağlar.

- Grafiksel yöntemlerin dezavantajları 

  ❶ Hassas çözüm elde edilemez

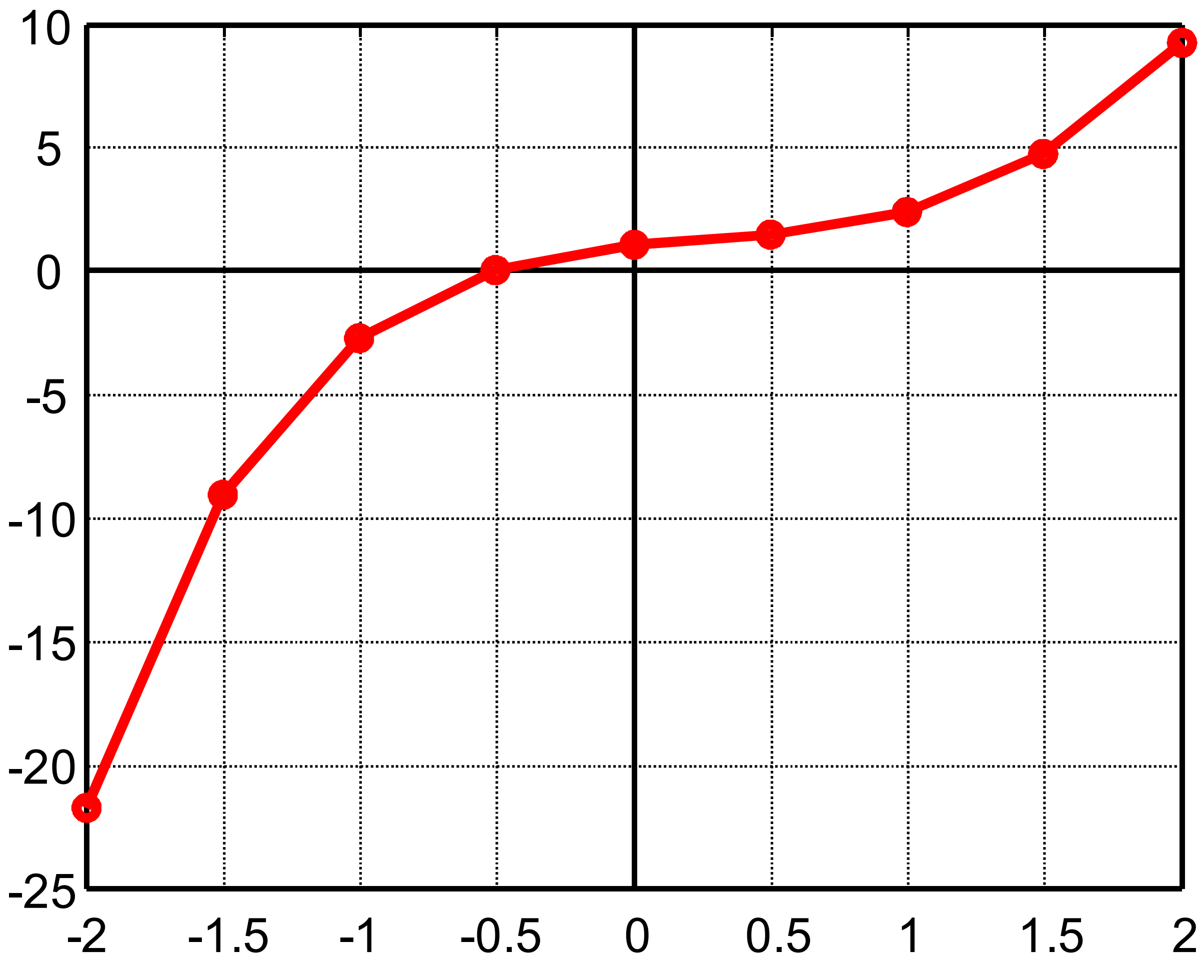
  ❷ Bilgisayar kullanmadan grafik çizmek uzun zaman alır

  ❸ Çoğunlukla 3 ya da daha düşük bilinmeyenli denklem çözümü için uygundur.

Grafik Yöntemleri

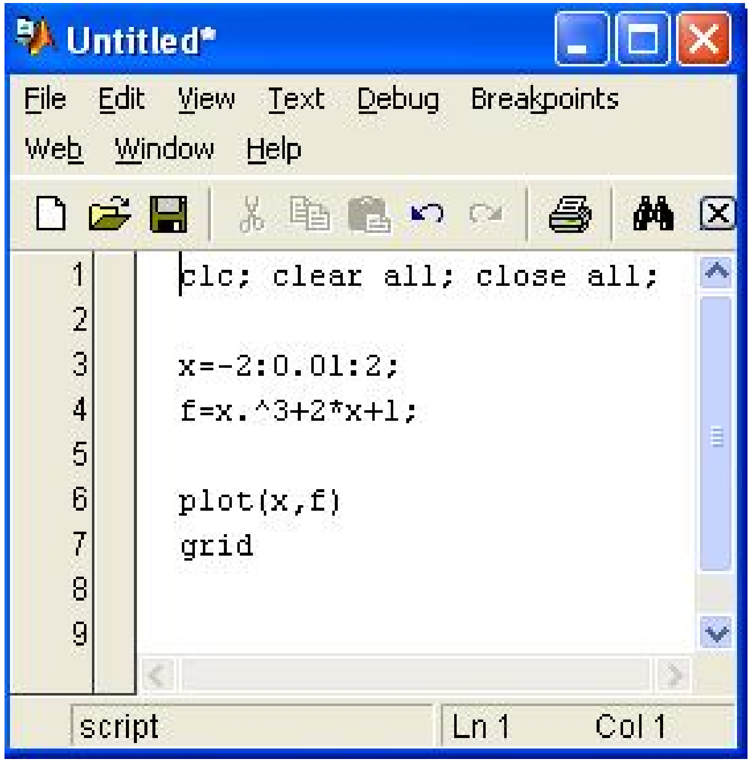
Örnek: $f(x) = xe^{-x} + x^3 + 1$ **fonksiyonunun kökünü, grafik yöntemi ile yaklaşık olarak bulunuz?**

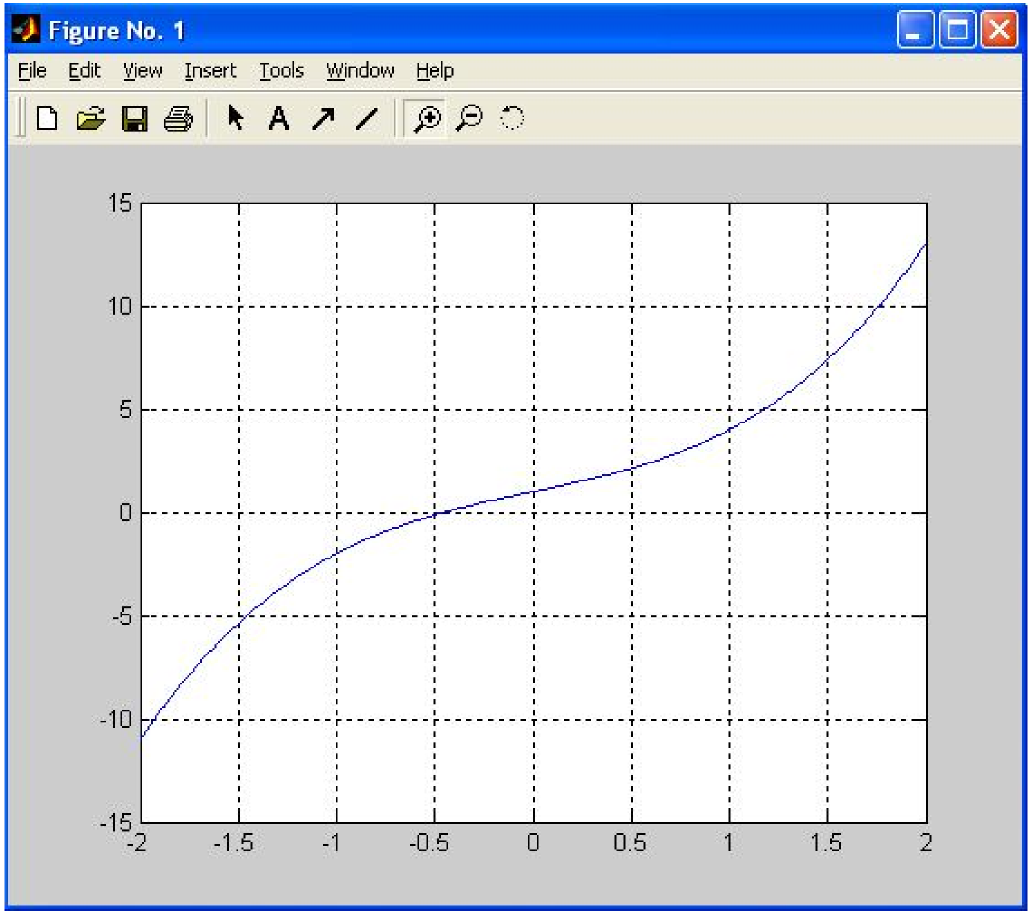
x	$f(x)$
-2.0	-21.7781121978
-1.5	-9.0975336055
-1.0	-2.71828182845
-0.5	0.05063936464
0.0	1.00000000000
0.5	1.42826532985
1.0	2.36787944117
1.5	4.70969524022
2.0	9.27067056647



Grafik Yöntemleri

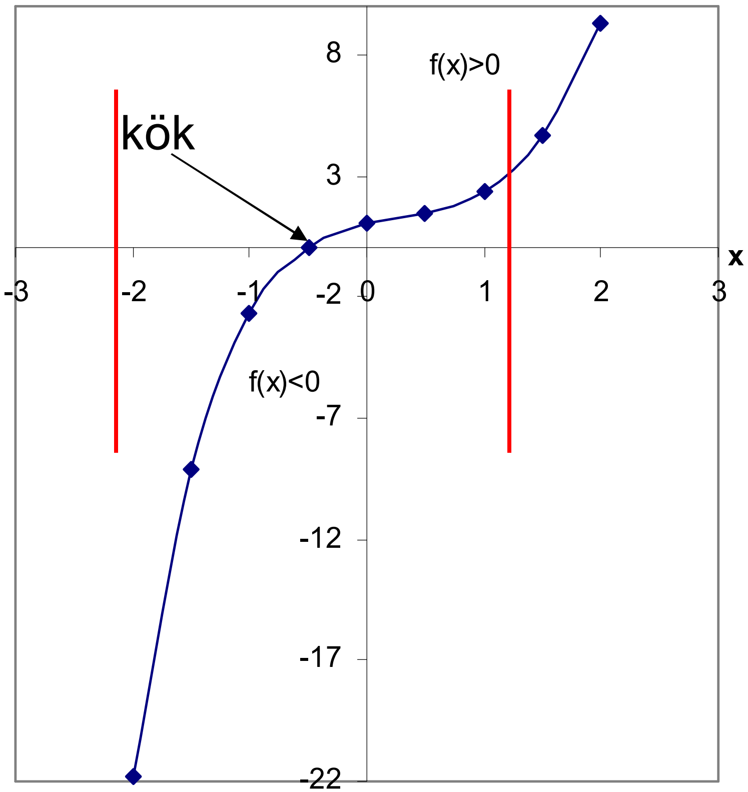
Örnek: $f(x) = x^3 + 2x + 1$ **fonksiyonunun kökünü, MATLAB programında çizdireceğiniz grafik üzerinden kabaca bulunuz?**

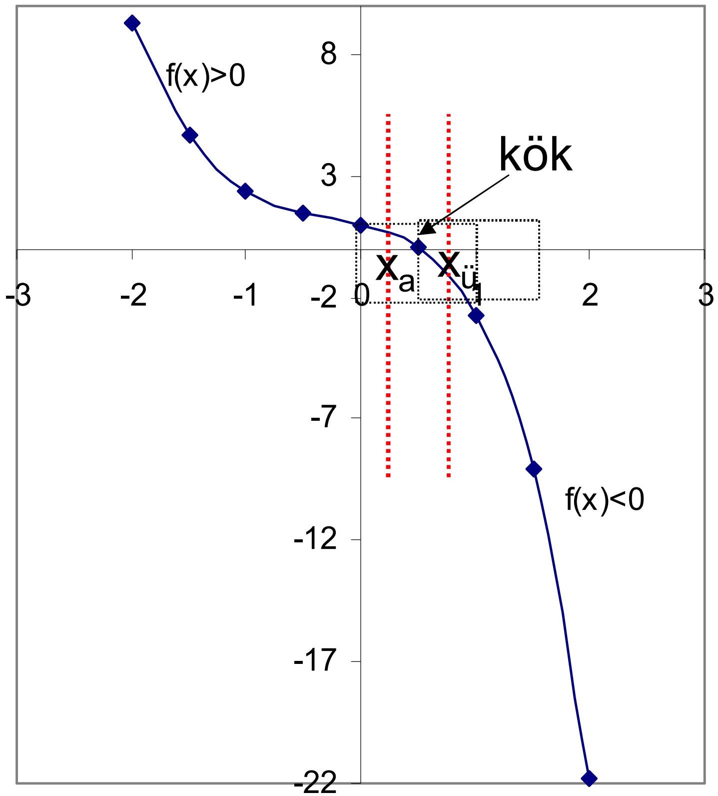




Denklem Çözümünde Kapalı Yöntemler

- **Fonksiyonlar kök civarında işaret değiştirdikleri için, *kökü sağından ve solundan* kıskaca alarak bu aralığı gittikçe daraltıp köke ulaşmak mümkündür. Bunun için iki tane başlangıç değeri belirlemek gerekir.**
- **Kök, bu iki değerin arasındaki kapalı bölgede olduğu için bu yöntemlere *kapalı yöntemler* adı verilir.**

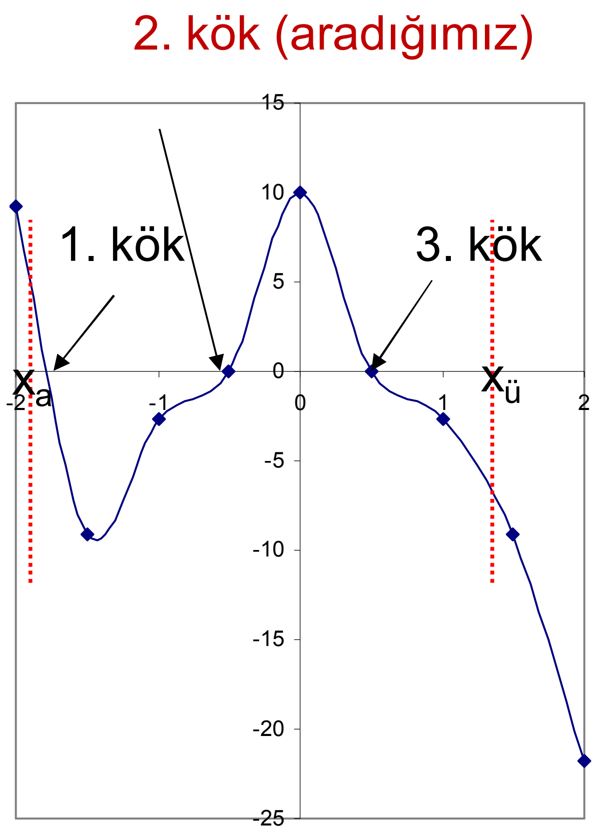




Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Denklem Çözümünde Kapalı Yöntemler

- Doğru kökü hızlı ve sağlıklı olarak bulmak için, arada başka bir kök olmaması gerekir, bundan dolayı aralık mümkün olduğunca dar seçilmelidir.



Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- Denklem çözümünde kapalı yöntemlerin bir türü olan ***Bisection***, ikiye bölme ya da yarılama olarak ta adlandırılmaktadır.
- ***Bisection***, sürekli bir fonksiyonun bir sıfırının (kökünün) bulunması için kullanılan sistematik bir tarama tekniğidir.
- Tekrarlama (tarama) yöntemlerinin en basit ve en anlaşılırıdır.
- Kökün bulunduğu aralığı yarılayarak (ikiye bölerek) daraltma prensibine dayanır.
  - Bu yöntem, içerisinde bir sıfır bulunan bir aralığın öncelikle tespitine dayanır.
  - Aralık sonunda fonksiyon zıt işarete sahiptir.
  - Sonra aralık iki eşit alt aralığa bölünür ve hangi aralığın bir sıfır değeri içerdiğine bakılır.
  - Sıfır içeren alt aralıklarda hesaplamalara devam edilir.
- Dezavantajı, yavaş yakınsaması ve bazen tam olarak çalışmaması.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- Bir f(x) fonksiyonu, [x_a, $x_ü$] aralığında bir sıfır noktasına (köke) sahip olduğunu varsayalım.

❶ İlk olarak, f(x) fonksiyonunun belirtilen aralıkta kökü olup olmadığı [$f(x_a)* f(x_ü) < 0$] kontrol edilir. Şart sağlıyorsa kök vardır. Çünkü fonksiyonlar zıt işaretlidir.

- [$f(x_a) * f(x_ü) > 0$] ise <u>kök yoktur</u>.
- [$f(x_a) * f(x_ü) = 0$] ise kök x_a ya da $x_ü$

❷ İlk iterasyonda, belirtilen fonksiyon aralığının orta noktası tespit edilir.

$$x_o = \frac{x_a + x_ü}{2}$$

❸ Kök [x_a, x_o] ya da [x_o, $x_ü$] aralığından birisinde olmalıdır

- $f(x_a)* f(x_o) < 0$ ise kök [x_a, x_o] aralığında
- $f(x_o)* f(x_ü) < 0$ ise kök [x_o, $x_ü$] aralığında
- $f(x_o)* f(x_ü) = 0$ ise kök x_o ‘dur

❹ Bir sonraki iterasyonda kök yeni aralıkta aranır ve <u>2. adımdan</u> itibaren işlemler tekrarlanır.

- Tekrarlama işlemi $\left|\frac{x_a - x_ü}{2}\right| < \varepsilon_s$ şartı sağlanana kadar devam eder.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

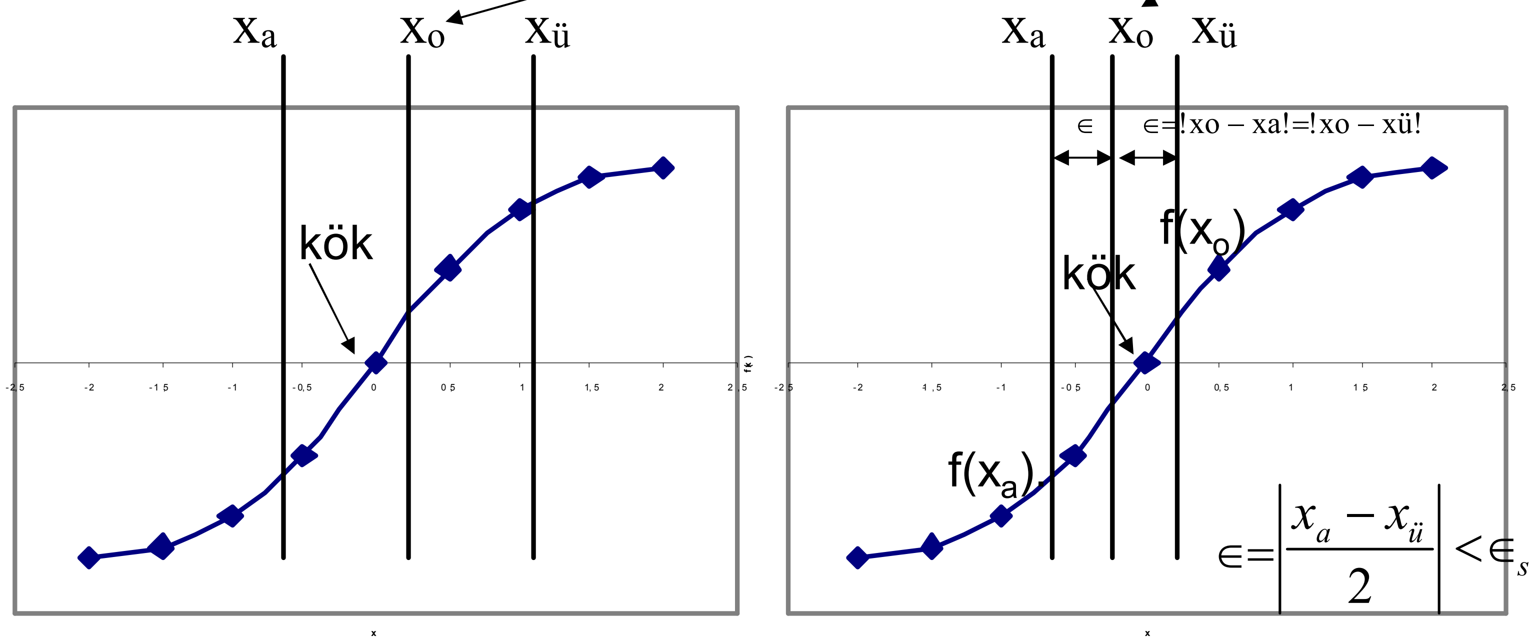
$$x_o = \frac{x_a + x_ü}{2}$$

- $f(x_a).f(x_o) < 0$ x_a ile x_o farklı bölgelerde
- $f(x_a).f(x_o) > 0$ x_a ile x_o aynı bölgelerde

Güncellenecek sınır

$x_ü(\text{yeni}) = x_o$

$x_a(\text{yeni}) = x_o$



Kök, x_a, x_o arasında Kök, x_o, $x_ü$ arasında

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

❖ **Örnek:** $\mathbf{f(x) = x.e^{-x}+x^3+1}$ fonksiyonunun kökünü $\delta_s = 2*10^{-6}$ duyarlılıkla bulalım,

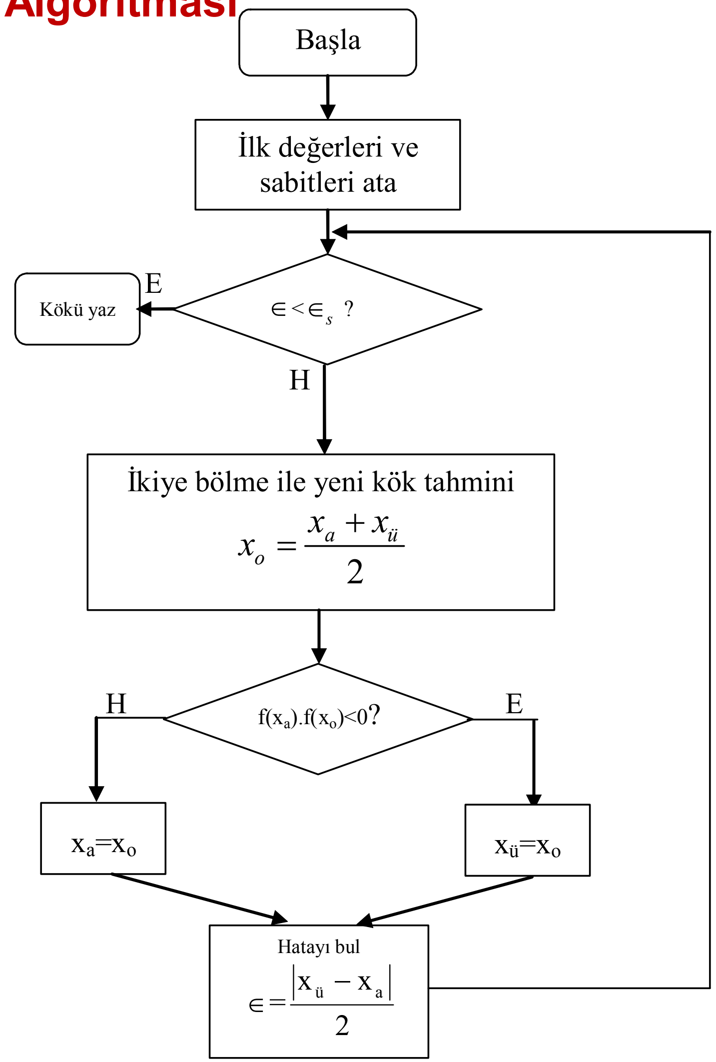
Not: *Grafik yönteminde, [-1,0] aralığı için kabaca sonuç x=-0.51*

n	x_a	$x_ü$	x_o	$f(x_a).f(x_o)$	$\in = \left\| \frac{x_a - x_ü}{2} \right\|$
1	-1.000000	0.000000	-0.500000	-	0.500000
2	-1.000000	-0.500000	-0.750000	+	0.250000
3	-0.750000	-0.500000	-0.625000	+	0.125000
4	-0.625000	-0.500000	-0.562500	+	0.062500
5	-0.562500	-0.500000	-0.531250	+	0.031250
6	-0.531250	-0.500000	-0.515625	+	0.015625
7	-0.515625	-0.500000	-0.507813	-	0.007813
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
19	-0.515449	-0.515442	-0.515446	+	0.000004
20	-0.515446	-0.515442	-0.515444	-	0.000002

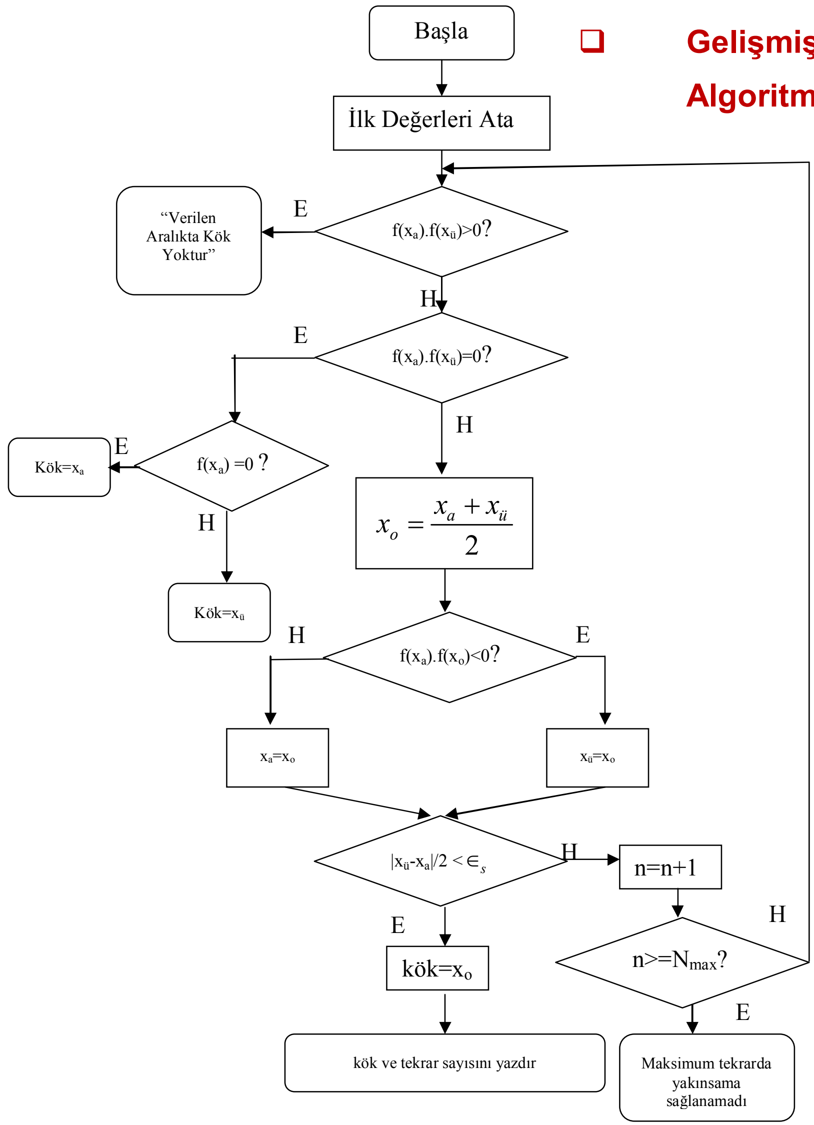
Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- **Algoritması**



- **Gelişmiş Algoritması**



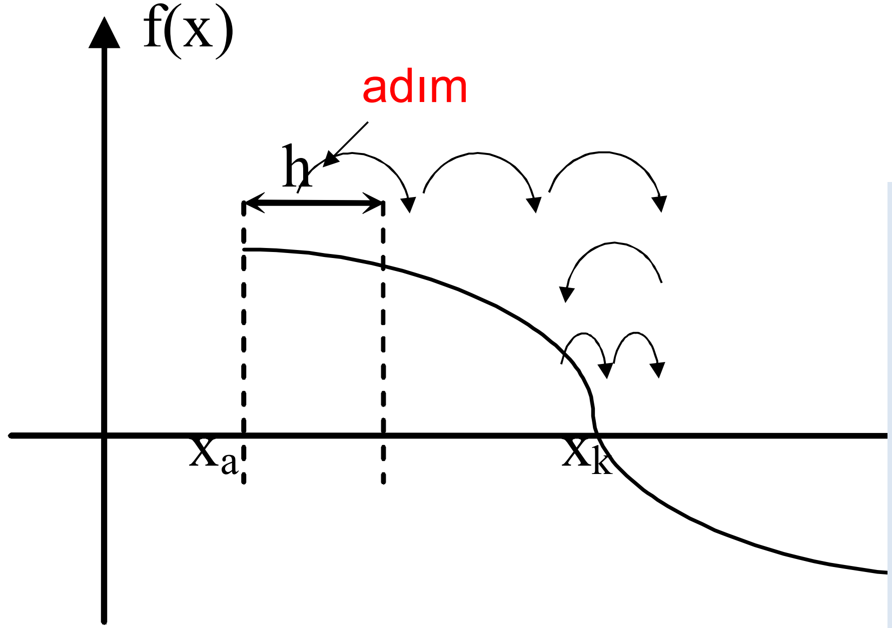
Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Adım Küçülterek Köke Yaklaşma Yöntemi

- Ardışıl yaklaşım yöntemi olarak ta bilinir.
- Bir başlangıç değerinden başlanarak, adım adım (h, sabit mesafeler) köke yaklaşılır.
  - Önce büyük adımlar ile başlanır.
- [f(x)* f(x+h) > 0] şartı sağlandığı sürece
  - Bir adım daha ilerlenir.
  - Adım büyüklüğünde (h) değişiklik yapılmaz.
- [f(x)* f(x+h) < 0] ise kök geçilmiştir.
  - En son kalınan başlangıç değerinden, adım küçülterek tekrar ilerlemeye devam edilir.
- Hata sınırlaması sağlanana kadar köke yaklaşmaya devam edilir.
  - $h < \varepsilon_s$

Adım Küçülterek Köke Yaklaşma Yöntemi

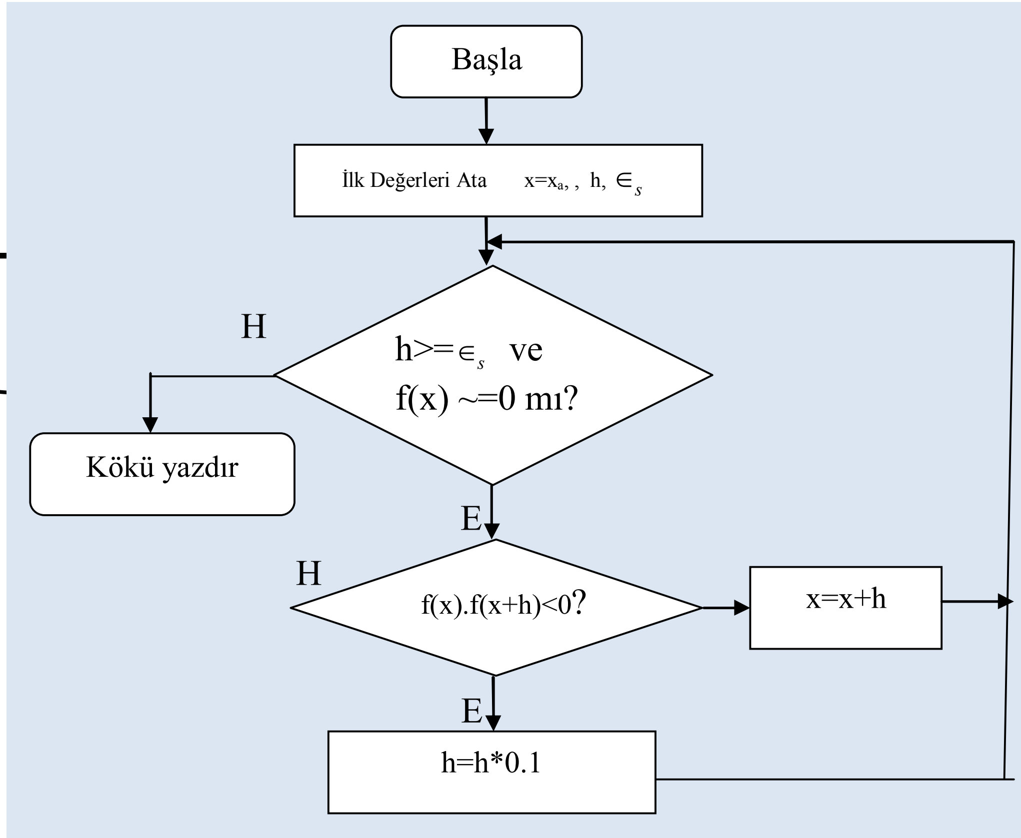
- Çalışması



$f(x).f(x+h) > 0 \longrightarrow \boxed{x(yeni)=x+h}$

$f(x).f(x+h) < 0 \longrightarrow h(yeni)=h/10$

- Algoritması



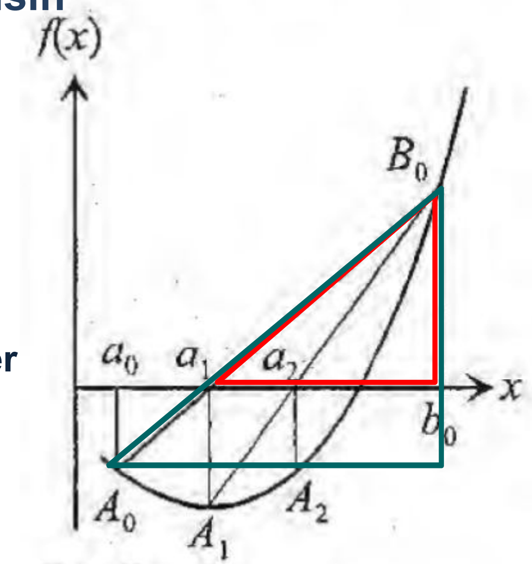
Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

ÖDEV

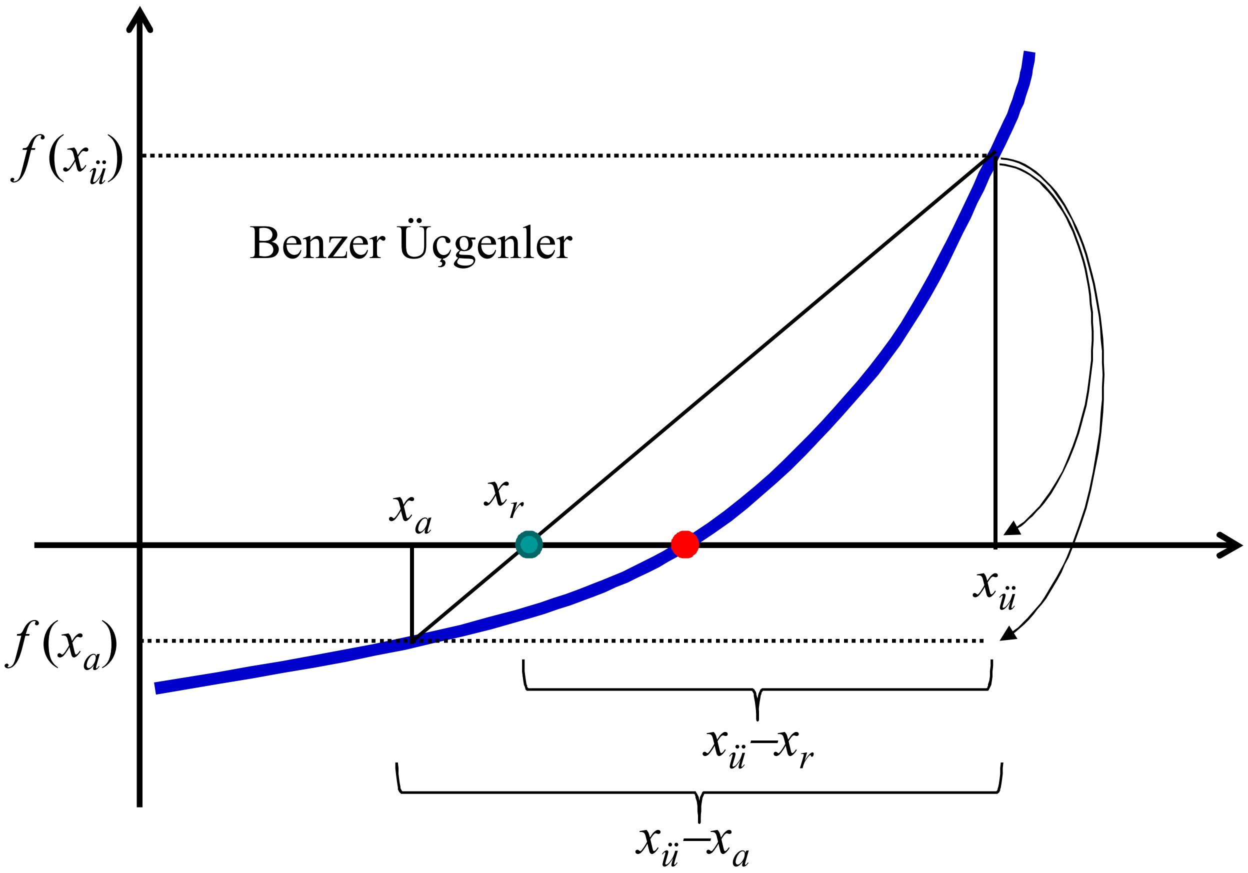
- $f(x) = e^x.x^2 - 5x$ fonksiyonunu [-1, 1] aralığında $\varepsilon_s = 0.01$ hata sınırlamasına göre 20 iterasyonda bisection ve adım küçülterek köke yaklaşma metodunu kullanarak çözünüz?
  - Adım küçülterek yaklaşma metodunda
    - Başlangıç h= 0.1, küçültme oranı h=h/10;

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

- En eski kök bulma yöntemlerinden birisidir.
- Eğrinin bir doğruyla yer değiştirmesi sonucunda, kökün konumunun yanlış belirlenmesi nedeniyle, latince "yanlış nokta" anlamında olan Regula Falsi olarak adlandırılır.
- Regula Falsi yönteminde köke yakınsama yavaş olmasına rağmen, mutlaka yakınsama vardır.
  - Bisection'dan hızlı, kiriş yönteminden yavaş
- f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığında kökü hesaplanmak istensin
  - [a, f(a)] ve [b, f(b)] noktaları arasına bir kiriş (doğru) çizilir.
  - Doğrunun x eksenini kestiği noktanın (a_1) alt ve üst kısmında iki benzer üçgen oluşur.
  - İki üçgenin benzerliğinden x eksenini kestiği nokta (a_1) hesaplanır.
  - İstenilen hassasiyet (hata sınırı) sağlanmadıysa yukarıdaki işlemler [a_1 , f(a_1)] ve [b, f(b)] noktaları için tekrar ettirilir.



Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)



$$\frac{f(x_ü)}{f(x_ü)-f(x_a)} = \frac{x_ü - x_r}{x_ü - x_a}$$

$$\boxed{x_r = x_ü - \frac{f(x_ü)\left(x_a - x_ü\right)}{f(x_a)-f(x_ü)}}$$

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

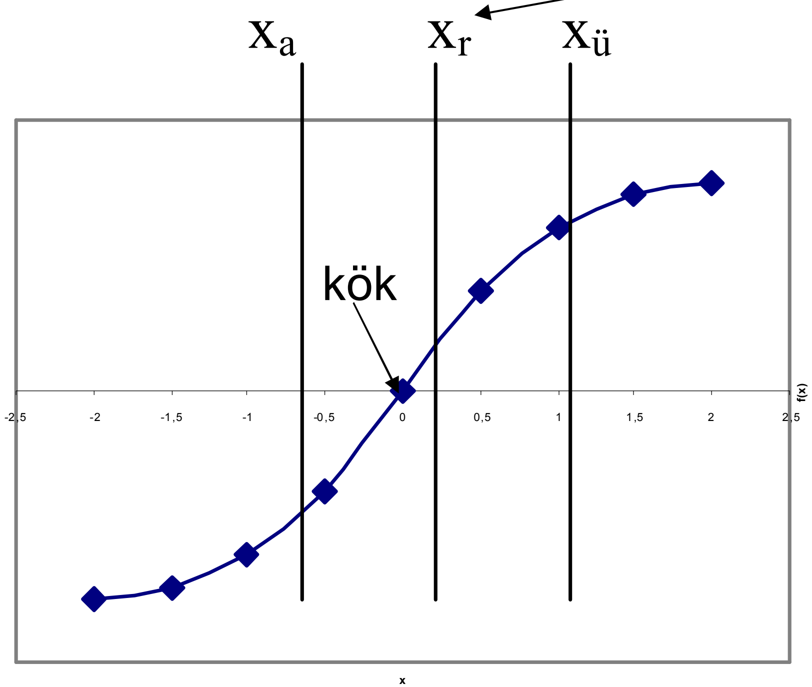
$$x_r = x_{\ddot{u}} - \frac{f(x_{\ddot{u}})(x_a - x_{\ddot{u}})}{f(x_a) - f(x_{\ddot{u}})}$$

- $f(x_a).f(x_r) < 0$ x_a ile x_r farklı bölgelerde
- $f(x_a).f(x_r) > 0$ x_a ile x_r aynı bölgelerde

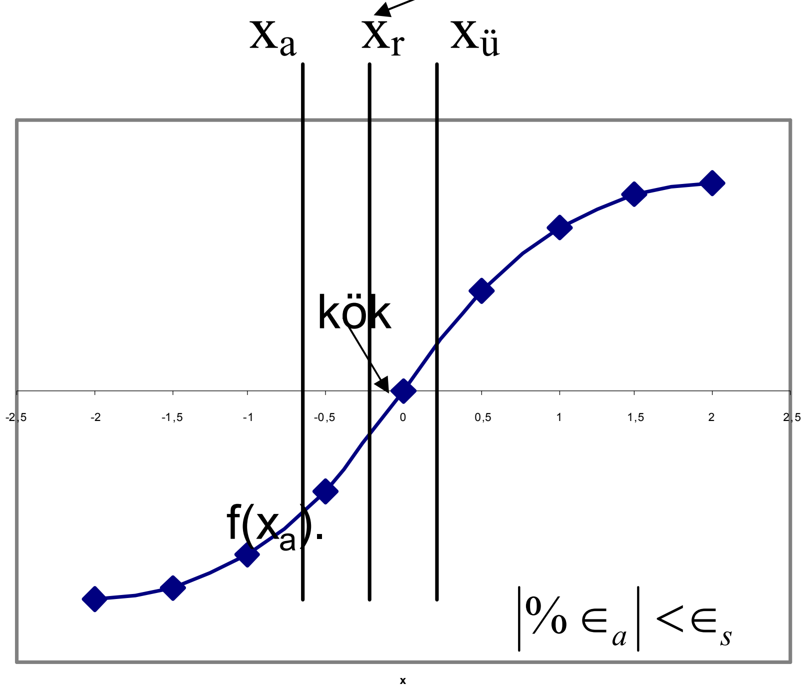
Güncellenecek sınır

$x_{\ddot{u}}(\text{yeni}) = x_r$

$x_a(\text{yeni}) = x_r$



Kök, x_a, x_r arasında



Kök, x_r, $x_{\ddot{u}}$ arasında

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

Örnek : $f(x)=x^3+4x^2-10$ denkleminin [1,2] aralığındaki kökünü yer değiştirme yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz.

$$x_r = x_{ü} - \frac{f(x_{ü})(x_a - x_{ü})}{f(x_a) - f(x_{ü})}$$

1. İTERASYON:

$x_a=1 \quad \rightarrow \quad f(x_a) = -5$

$x_u=2 \quad \rightarrow \quad f(x_u) = 14$

$x_r=1,2631 \quad \rightarrow \quad f(x_r) = -1,6022$

$f(x_u) \,.\, f(x_r) < 0$

$x_a = 1,2631$

$x_u = 2$

2. İTERASYON:

$x_a=1,2631 \quad \rightarrow \quad f(x_a) = -1.6022$

$x_u=2 \quad \rightarrow \quad f(x_u) = 14$

$x_r=1,3388 \quad \rightarrow \quad f(x_r) = -0,4303$

$f(x_u) \,.\, f(x_r) < 0$

$x_a = 1,3388$

$x_u = 2$

ÖDEV-2

- $f(x)=x^3+4x^2-10$ fonksiyonunu [1, 2] aralığında $\delta_s = 10^{-5}$ hata sınırlamasına göre bisection metodunu kullanarak çözünüz?

KAYNAKLAR

- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları**
- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi.**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, "*MATLAB ile Meslek Matematiği*" Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, " Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları" Vipaş Yayıncılık**