DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2011-2012 Güz- Bahar Dönemi

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Birçok mühendislik, fizik ve sosyal kökenli problemler matematik terimleri ile ifade edildiği zaman bu problemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren bir denklemi sağlayan fonksiyonun bulunması problemine dönüşür. Bu mantıkla oluşturulmuş denklemlere ***'Diferansiyel Denklemler'*** denir. Buna örnek olarak F= ma newton kanunu verilebilir.
Eğer u(t), F kuvveti altında m kütleli bir parçacığın t anındaki konumu veren bir fonksiyon ise

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F\left[t, u, \frac{du}{dt}\right]$$

Burada F kuvveti t,u,du/dt hızının bir fonksiyonudur.

Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler

t bağımsız değişkeni, bilinmeyen y=f(t) fonksiyonu ve bu fonksiyonun $y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}$ türevleri arasındaki bir bağıntıya '***diferansiyel denklem***'denir. Bu denklem

$$\mathbf{F(t, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n)})=0}$$

şeklinde gösterilir.

y=f(t) fonksiyonu tek değişkenli bir fonksiyon ise denkleme '***adi diferansiyel'*** denklem ismi verilir. Bilinmeyen y=f(t) fonksiyonu birden fazla değişkene bağlı ise türevlerine **kısmi türev ,** denkleme ise ***kısmi diferansiyel denklem*** ya da ***kısmi türevli denklem*** denir.

$$\frac{dy}{dx} - y = \sin x \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} = Q(x,y) \qquad 2$$

(1) ve (2) denklemlerden 1 nolu denklem adi dif. Denklem, 2nolu denklem ise kısmi dif. Denkleme örnek olarak verilebilir. Adi diferansiyel denklemlere kısaca diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemin mertebesi ve derecesi

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde var olan yüksek mertebeli türevin mertebesidir. En yüksek mertebeli türevin üssü denklemin derecesidir.

$2y'' - 4y' - 6y = 0$ ikinci mertebeden

$y' - 6y = 0$ birinci mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

Genel halde $F[t, u(t), u'(t), u''(t), \ldots\ldots u^n(t)] = 0$ denklemi n. mertebeden adi diferansiyel denklemdir. u(t) yerine y koyarsak

$$F(t, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

olur.

Örneğin

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \qquad (1)$$

diferansiyel denklemi y=u(t) için 3. mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Verilen bir adi diferansiyel denklemi çözmek için en yüksek mertebeli türevden yararlanılır.

$$y^n = f(t, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Çözüm:

(2) nolu adi diferansiyel denklemin $\alpha < t < \beta$ aralığındaki çözümü ϕ dir ve türevleri ϕ', ϕ'',...... $\phi^{(n)}$ vardır

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \ldots\ldots \phi^{(n-1)}(t)] \qquad (3)$$

(3) ün $\alpha < t < \beta$ aralığındaki her t için sağlandığı kabul edilmektedir.

Doğrudan yerine koyma metodu ile $y_1(t) = \cos t$ ve $y_2(t) = \sin t$ fonksiyonları $y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleridir(çözümlerin türevleri alınıp diferansiyel denklemde yerlerine konduğunda diferansiyel denklemi sağlamaları gerekir.)

$y_1 = (\mathrm{Cos}t)' = -\sin t$	$(\sin t)' = -\cos t$	$\cos t - \cos t = 0$
$y_2 = (\sin t)' = \cos t$	$\cos t' = -\sin t$	$-\sin t + \sin t = 0$

Diferansiyel denklemlerin çözümleri

Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan her y=f(t) fonksiyonuna diferansiyel denklemin ***çözümü*** veya ***integrali*** denir. Bir diferansiyel denklemi çözmek demek, türevleri ile birlikte verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulduğu zaman, denklemi özdeş olarak sağlayan bütün fonksiyonları bulmak demektir. Diferansiyel denklemlerin çözümü **genel, özel** ve **tekil** olmak üzere üç türdür.
n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü, sayıca daha aşağı düşürülemeyen n tane keyfi sabiti içerir. **Özel çözümler**, genel çözümlerden sözü edilen sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilir. Bunlardan başka bazı diferansiyel denklemlerin, bu denklemi sağlayan, fakat genel çözümlerden bulunamayan bir veya birkaç çözümü olabilir ki bu çözümlere **tekil çözümler** denir.

Doğrusal ve doğrusal olmayan Denklemler (Lineer ve Non-Lineer Denklemler)

Diferansiyel denklemlerin bir diğer sınıflandırması lineer ve non-lineer olmalarına göre yapılabilir. Eğer **F(t, y, y', y''.........$y^{(n)}$)=0** adi diferansiyel denkleminde F fonksiyonu y, y', y''.........$y^{(n)}$ değişkenlerinin lineer bir fonksiyonu ise **F(t, y, y', y''.........$y^{(n)}$)=0** denklemine **lineerdir** denir. Böylece n. mertebeden en genel lineer adi diferansiyel denklem

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+...................+a_n(t)y=g(t) \qquad 4$$

dir. (4) formunda olmayan denkleme ise ***'non-lineerdir'*** denir. (1) nolu denklem non lineerdir. (1) de non- lineerliliği yy' terimi yapar.

$a_0(t)(y^{(n)})^5$ 5 varsa non-lineer yalnızca 1 varsa lineerdir.

Doğrultu Alanı

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin geometrik olarak yorumlanmasına

$$y'=dy/dt= f(t,y) \qquad 5$$

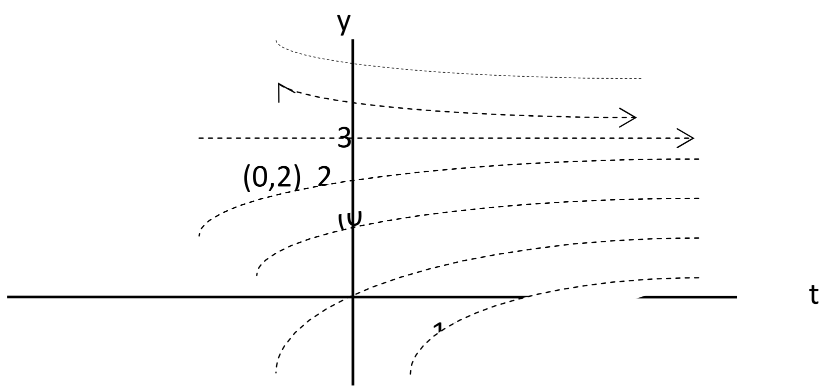
şeklindeki 1. mertebeden diferansiyel denklem yardımcı olur. Bu denklemin çözümü y= ϕ(t) şeklinde olduğundan , çözümün geometrik yorumu ,bu fonksiyonun grafiği ile olur. Geometrik olarak (5) denklemi, keyfi bir (t,y) noktasında ,çözümün dy/dt eğimi f(t,y) ile verildiğini ifade eder. Bunu (t,y) noktasından geçen eğimi f(t,y) olacak şekilde kısa bir doğru parçası çizerek gösterebiliriz. Bu şekilde çizilmiş tüm doğru parçalarına (5) denkleminin **doğrultu alanı** denir.

Doğrultu alanı kısaca t-y düzleminde ele alınan noktalarda çizilen doğru parçalarının topluluğundan oluşur.

Örnek : $y'=dy/dt=(3-y)/2$ denkleminin doğrultu alanını gösteriniz

Burada f(t,y) sadece y ye bağlıdır y'= f(t,y)=f(y) (t=0)

y<3 için dy/dt>0 dy/dt (+) eğim artar, türev yukarı doğru
y>3 için dy/dt<0 dy/dt (-) eğim azalır, türev aşağı doğrudur
y=3 için, dy/dt=0



BÖLÜM 2

2.1. 1. Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden her diferansiyel denklem

$$\mathbf{F(t, y, y')=0}$$

veya

$$\mathbf{M(t,y)dx + N(t,y)dy =0}$$

şeklindedir. Bu denklem y' türevine göre çözülebilirse

$$\mathbf{dy/dt = y' = f(t,y)} \qquad 1$$

şekline girer. Burada f fonksiyonu iki değişkene bağlıdır. Eğer (1) deki 1.fonksiyonun y değişkeni lineer olarak bulunabiliyorsa verilen denklem

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \qquad 2$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme '***1.mertebeden lineer diferansiyel denklem'*** denir

Diferansiyel denklemi sağlayan ve c keyfi sabitine bağlı

$$\mathbf{y= \varphi(t,c)}$$

şeklindeki bir fonksiyona birinci mertebeden diferansiyel denklemin **genel çözümü** denir. $y=\varphi(t,c)$ genel çözümünde $c=c_0$ konursa elde edilecek her

$$\mathbf{y= \varphi(t,c_0)}$$

fonksiyonuna **özel çözüm** denir.

Örnek

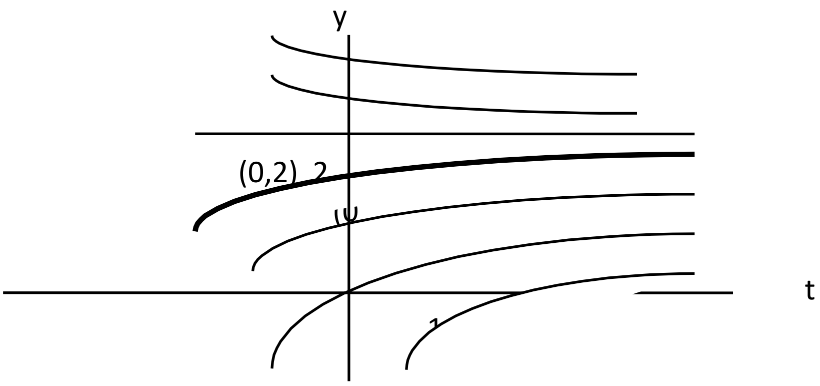
y'=dy/dt=-(y-3)/2 **denkleminin çözümünü bulunuz. Ayrıca bu çözümlerden (0,2) noktasından geçenini grafikle belirtiniz.**

dy/(y-3)=-1/2dt (u=y-3 du=dy ∫du/u=ln|u|=ln|y-3|)
∫ dy/(y-3)= **-**∫ 1/2dt
Ln| (y-3)| =-(1/2)t+lnc (y-3)/c=$e^{-(1/2)t}$ y=3+ c$e^{-(1/2)t}$

(0,2) noktasından geçen çözüm eksenini bulmak için t=0ve y=2 (y=3+ c$e^{-(1/2)t}$) de yerine konursa c=-1 bulunur.
y=3-$e^{-t/2}$ çözümü (0,2) noktasından geçen eğridir.

(t=0 için y=2; t=1 için y=2.4 ; t=-1 için y=1.4 **t→∞ için y=3)**

c=1 için y=3+$e^{-t/2}$ (t=0 için y=4; t=1 için y=3.6 ; t=-1 için y=4.6 **t→∞ için y=3)**



$t \to \infty$ için tüm çözümler y= 3 e yaklaşır.

İntegral Çarpanı

Burada amaç **$y'+p(t)y=g(t)$** diferansiyel denklemini uygun bir integrasyon çarpanı **$\mu(t)$** ile çarpmak sureti ile integrali alınabilir duruma getirmektir. **$\mu(t)$** belli değil, **$\mu(t)$** ile denklemin her iki tarafı çarpılırsa**;**

$$\mu(t)y'+\mu(t)p(t)y=\mu(t)g(t) \qquad 3$$

(3) nolu denklemin sol yanını bir fonksiyonun türevi olarak tanımlamak istersek**, $\mu(t)$**

$$\mu'(t)=p(t)\ \mu(t) \qquad 4$$

koşulunu sağlamak zorundadır**. $\mu(t)$**'nin (+) olduğunu kabul edersek (4) ten

$$\mu'(t)/\ \mu(t)=p(t) \ \text{ veya } \ \frac{d}{dt}Ln\mu(t)=p(t)$$

olur. Her iki tarafın integrali alınarak

$$\ln\mu(t)=\int p(t)dt+k$$

keyfi sabit k=0 seçilirse İntegrasyon çarpanı

$$\mu(t)= e^{\int P(t)dt} \qquad 5$$

yardımıyla hesaplanır. Bulunan **$\mu(t)$, $\mu'(t)=p(t)\ \mu(t)$** koşulunu sağladığından (3) denklemi

$$[\mu(t)y\,]'=\mu(t)g(t) \qquad 6$$

olur. (6) nolu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\mu(t)y=\int\mu(t)g(t)dt+c.$$

Genel çözüm ise

$$y_{genel}=\frac{\int \mu(t)g(t)dt+c}{\mu(t)} \qquad 7$$

eşitliği yardımıyla bulunur. (7) denkleminde c keyfi bir sabit olduğundan bu ifade eğrilerin sonsuz bir ailesine karşı gelir. Bunlara genelde ***integral eğrileri*** olarak isimlendirilir.

Diferansiyel denklemin çözümü olan ve İntegral eğrileri olarak isimlendirilen eğriler doğrultu alanının doğrularına teğettir.(***Kısaca, y'=f(t,y) denkleminin F(t,y)=c formunda ifade edebileceğimiz integral eğrileri, doğrultu alanının doğrularına teğet olacaktır.)***

Eğer bu eğrilerden birini yani bir (t_0,y_0) noktasından geçenini ararsak, $y(t_0)=y_0$ başlangıç koşulu verilmelidir. **y'+p(t)y=g(t)** şeklinde verilmiş 1. Mertebeden diferansiyel denklemle $\mathbf{y(t_0)=y_0}$ başlangıç koşulu da verilirse bu probleme '***başlangıç değer problemi*** 'denir

Örnek

$y'-y/2= e^{-t}$ $y(0)=-1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

y'+p(t)y=g(t) şeklinde **p(t)=-1/2** **q(t)=** e^{-t}

integrasyon çarpanı

$\mu(t)= e^{\int P(t)dt}$ den $\mu(t)=e^{\int(-1/2)dt}=e^{-t/2}$

$[\mu(t)y]'=\mu(t)g(t)$ $(e^{-t/2}y)'= e^{-t/2}e^{-t}$ $(e^{-t/2}y)'=e^{-3t/2}$

integral alınarak

$e^{-t/2}y =-2/3\, e^{-3t/2}+c$

$$y_{genel}= -2/3\, e^{-t}+c\, e^{t/2}$$

c=0 ise	$y=-2/3\, e^{-t}$,	$(x=0\rightarrow y=-2/3;\ x=1\rightarrow y\approx-1/4;\ x\rightarrow\infty$ **için** $y=0)$
c=1 ise	$y=-2/3\, e^{-t}+e^{t/2}$	$(x=0\rightarrow y=1/3;\ x=1\rightarrow y\approx-1.4;\ x\rightarrow\infty$ **için** $y=\infty)$
c=-1 ise	$y=-2/3\, e^{-t}-e^{t/2}$	$(x=0\rightarrow y=-5/3;\ x\rightarrow\infty$ **için** $y=-\infty)$

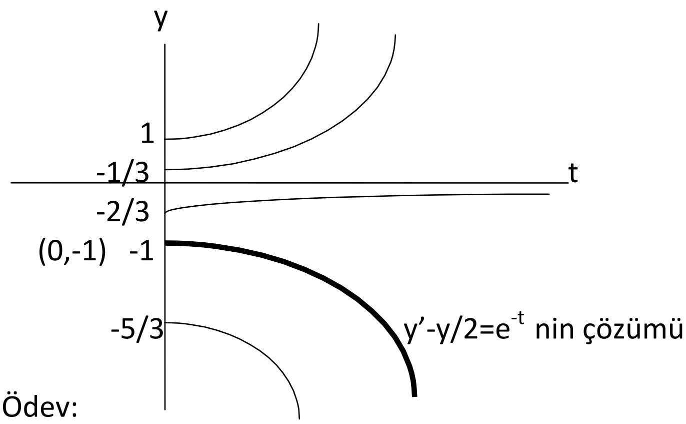
ile integral eğrileri çizilir.

Diferansiyel denklemin çözümü olan ve İntegral eğrileri olarak isimlendirilen eğriler doğrultu alanının doğrularına teğettir.

$y(0)=-1$ $t=0,y=-1$ için $-1=-2/3+c$ $c=-1/3$ bulunur. verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$y= -2/3\, e^{-t}-1/3\, e^{t/2}$$

olur. $y'-y/2=e^{-t}$ nin çözümü şekilde kalın çizgi ile çizilmiştir.



Ödev:

1) $y'+2ty=t$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz
2) $y'+2y= te^{-2t}$ $y(1)=0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz

2.2. Lineer Denklemler

Teorem 2.2.1
$y'+p(t)y=g(t)$ diferansiyel denkleminde $p(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $t=t_0$ noktasını içeren içeren bir ***I:*** $\alpha<t<\beta$ açık aralığı üzerinde sürekli ise bu takdirde bir $t \varepsilon$ ***I*** için $y(t_0)=y_0$ başlangıç koşulunu ve **$y'+p(t)y=g(t)$** diferansiyel denklemini sağlayan bir $y=\phi(t)$ fonksiyonu vardır.

Örnek:
$ty'+2y=4t^2$- $y(1)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz.(**$\mu(t)=t^2$** ,$y=t^2+c/t^2$)
$y(1)=2$ için $c=1$ **$y=t^2+1/t^2$** **$t>0$**

2.3. DEĞİŞKENLERE AYRILABİLİR TİPTE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$\mathbf{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$$

($t=x$ değişkeni için $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$)

şeklindeki bir diferansiyel denklem

$$\mathbf{f(x)dx +\varphi(y)\, dy=0}$$

şekline dönüştürülebiliyorsa ***‘değişkenlere ayrılabilir tipte diferansiyel denklem’*** adını alır.
$f(x)dx +\varphi(y)\, dy=0$ denkleminin her terimi yalnız bir değişken ve bu değişkenin diferansiyelini içerdiğinden terim terim integral alınabilir. Bu durumda

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = c$$

$$\mathbf{F(x) + \phi(y)=c}$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 1:

$y' = y^{2/3}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. c=0 için özel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$dy/dx= y^{2/3}$

$dy/ y^{2/3} =dx$

$\int dy/ y^{2/3} =\int dx$

$y^{-2/3+1}/(-2/3+1)= x$ $\qquad$ $3y^{1/3}=x+c_1$
Böylece genel çözüm **$y^{1/3}= 1/3(x+c_1)$** olarak elde edilir.

Özel çözüm $c_1=0$ konularak $y^{1/3}=x/3$ olur.
ÖRNEK 2:

2) y'+ycosx= 0 diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:
Verilen diferansiyel denklemin her iki tarafını dx ile çarpıp y ye bölersek

$$dy/y +\cos x\, dx=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin integrali alınarak istenen genel çözüme ulaşılır.

$\ln y +\sin x = \ln c$ $\qquad$ $\ln y-\ln c = -\sin x$
$\ln(y/c) =-\sin x$ $\qquad$ $y/c =e^{-\sin x}$

$$\mathbf{y=c\, e^{-\sin x}}$$

elde edilir.

Ödev: 1- dy/dx =(x-1)/y =0 $\qquad$ $y=\sqrt{x^2-2x+2c}$
2-dy+ytanxdx=0 $\qquad$ y=c cosx

2.4. HOMOJEN TİPTE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

M(x,y) için a skaler olmak üzere **$M(ax,ay)=a^r M(x,y)$** bu fonksiyona ***"r inci dereceden homojen bir fonksiyondur"*** denir.

Eğer M(x,y) ile N(x,y) aynı mertebeden homojen fonksiyonlarsa buna ***"homojen 1. mertebeden diferansiyel denklem "***denir. **y=vx** dönüşümü bu denklemi değişkenlere ayrılabilir hale getirir**.**

Eğer dy/dx=y'=f(x,y) şeklindeki bir diferansiyel denklemde f fonksiyonu **sadece x'e veya sadece y'e** değil de, onların **x/y** veya **y/x** oranlarına bağlı ise bu diferansiyel denklem homojendir denir ve

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}) \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki örnekleri incelersek:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ **=** $(\frac{y}{x})^2 + 2\frac{y}{x}$ **homojen**

2) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$ **homojen**

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}$ **=** $y(\frac{y}{x})^2 + 2\frac{y}{x}$ **homojen değil**

NOT:

Verilen diferansiyel denklemin homojen olup olmadığı aşağıdaki gibi bir yolla da araştırılabilir (y=tx yazılarak)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad f(x, tx) = f(1, t)$$

Bunu

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ diferansiyel denklemine uygularsak yani ***(y=tx yazalım)***

$$f(x, tx) = \frac{(tx)^2 + 2x(tx)}{x^2} = \frac{t^2x^2 + 2x^2t}{x^2} = \frac{x^2(t^2 + 2t)}{x^2} = \frac{t^2 + 2t}{1} = f(1, t)$$

olduğundan homojendir.

$\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$ **=ln(1/t)+(1+t)/(1-t)=f(1,t)**

Örnek:

$(x^2-3y^2)dx + 2xydy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$y=vx$ **$dy=vdx+xdv$** verilen denklemde yerlerine konularak

$(x^2-3v^2x^2)dx+2x\,vx(\,vdx+xdv)=0$ **$x^2(1-3v^2)dx+2v^2\,x^2dx+2x^3vdv$ $1/x^2$ ile çarp**

$dx[(1-3v^2)+2v^2]+dv2xv=0$ **$dx(1-v^2)+2vxdv=0$** **$dx(1-v^2)=-2vxdv$**

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2v}{1-v^2}dv$$ **$u=1-v^2$ $du=-2vdv$** **$dv=-du/2v$**

$\ln x=\ln(1-v^2)+c$ $v=y/x$ konursa

$\ln x=\ln(1-(y^2/x^2))+c$

$\ln x-\ln(1-(y^2/x^2))=c$ **$c=\ln(x^3/(\,x^2-\,y^2))$**

$e^c=x^3/(\,x^2-\,y^2)$

Örnek 2:

$$\frac{2xy+3y^2}{2xy+x^2}=\frac{dy}{dx}$$ y(1)=1 için özel çözümü bulunuz.

($c=\ln(x^3/(xy+y^2))$, $e^c=x^3/(xy+y^2)$ $c=\ln(1/2)$)

1.MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

(Homojen çözüm, ikinci taraflı denklemin çözümü)

$$\mathbf{y'+p(x)y=g(x)}$$

şeklindeki denkleme '***birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem'*** denir. **g(x)=0 ise** lineer 1.mertebeden homojen denklem denir. Bu takdirde denklem değişkenlere ayrılabilir tipte olur. Önce

dy/dx+p(x)y=0homojen çözüm bulunur.

$\int dy/y=-\int p(x)dx$

$\ln y=-\int p(x)dx+\ln c$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{y=ce^{-\int p(x)dx}}$

bulunur. Bu ifadenin ikinci taraflı denklemin çözümü olabilmesi için, c nin nasıl bir c(x) fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de c=c(x) olduğuna göre
$y=\ c(x)\ \mathbf{e}^{-\int p(x)dx}$ in ikinci taraflı denklemi sağlama şartını yazalım Buradan

$y'=-p(x)\ \mathbf{c(x)\ e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\ dc/dx}$ elde edilir

y'+p(x)y=g(x) de y ve y' yerlerine konularak genel çözüm elde edilir.

$$\cancel{-p(x)\,\mathbf{c(x)}}\mathbf{e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\ dc/dx+}\cancel{\mathbf{p(x)\ c(x)}}\mathbf{e^{-\int p(x)dx}=g(x)}$$

$$\mathbf{dc/dx = g(x)\ e^{\int p(x)dx}}$$

$$\mathbf{c=\int g(x)\ e^{\int p(x)dx}\ dx+c_1}$$

c nin bu değeri $\qquad$ $y=ce^{-\int p(x)dx}$ de yerine konursa ikinci taraflı denklemin genel çözümü olarak

$$\mathbf{y=\ e^{-\int p(x)dx}[\int g(x)\ e^{\int p(x)dx}\ dx+c_1\ ]}$$

elde edilir. (Bkz: Bölüm 2 (7) no lu eşitlikle aynıdır.)

ÖRNEK

$y'+y=3$ diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm:

Önce **$y'+y=0$** ile homojen çözüm elde edilir, yani

$y'+y=0$ eşitlenerek

$dy/dx=-y$ $\quad$ $dy/y=-dx$

$\ln y=-x+c$

$\ln y-\ln c=-x$

$\ln(y/c)=-x$ $\quad$ $y/c=e^{-x}$

$y=c\,e^{-x}$

ile homojen çözüm elde edilir. Özel çözüm için $c=c(x)$ ile verilen denkleme bağlı olarak türev alınarak yerlerine konur, yani

$y'=c'(x)\,e^{-x}-c(x)e^{-x}$ ve $y=c(x)\,e^{-x}$ ifadeleri verilen $y'+y=3$ eşitliğinde yerlerine konularak

$c'(x)\,e^{-x}-\cancel{c(x)e^{-x}}+\cancel{c(x)\,e^{-x}}=3$ $\quad$ $c'(x)\,e^{-x}=3$ elde edilir $\quad$ $c'(x)=dc/dx$ ile

$dc/dx\,e^{-x}=3$ yazılarak

$dc/dx=3\,e^{x}$

$dc=3\,e^{x}\,dx$

$c=3\,e^{x}+c_1$

elde edilir, bulunan bu değer (c) homojen çözüm sonucu bulunan $y=c\,e^{-x}$ eşitliğinde yerine konularak ikinci taraflı denklemin genel çözümü elde edilir.

genel çözüm:

$y=(3\,e^{x}+c_1)*e^{-x}$ $\quad$ **$y=3+c_1\,e^{-x}$** $\quad$ olur

ödev:

$ds/d\theta=3s+7$ $\quad$ $s(0)=15$ özel çözümü bulunuz.

sonuç= $s=[c_1\,e^{3\theta}-7/3]$

$x^2\ln x\, y' + xy = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

çözüm:

Denklem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\ln x} = \frac{1}{x^2 \ln x} \qquad (1)$$

şeklinde yazılırsa lineer ve ikinci taraflı bir denklem haline gelir. Önce homojen çözüm yapılır, yani

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\ln x} = 0$$

$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x\ln x} = 0$ *hatırlatma:* $\int \frac{dx}{x\ln ax} = \ln(\ln ax)$

lny+ln(lnx)=lnc

ln(ylnx)=lnc *ylnx=c* ***y=c/lnx***

*homojen çözüm bulunur. İkinci taraflı denklemin çözümü için **y=c(x)/lnx** den **c** ve **x** e göre türev alınarak y ve y' nün karşılıkları*

y=c/lnx

$y'=c'(x)/\ln x - c(x)/x(\ln^2 x)$ *(1) de yerlerine konulursa,*

$$c'(x)/\ln x - \cancel{c(x)/x(\ln^2 x)} + \cancel{c(x)/x(\ln^2 x)} = 1/x^2\ln x$$

elde edilir.

$c'(x)/\ln x = 1/x^2\ln x$ $c'(x)=1/x^2$ $dc/dx=1/x^2$ ile

$dc=(1/x^2)dx$

$\int dc = \int(1/x^2)dx$ $c=-1/x+c_1$

elde edilir c nin bu değeri homojen çözüm sonunda bulunan(y=c/lnx) de yerine konularak ikinci taraflı denklemin çözümüne ulaşılır

$$y=(-1/x+c_1)\ln x$$

veya (İntegral çarpanı $\mu(x)=e^{\int \ln(\ln x)dx}$=lnx yardımıyla da çözülür)

$\underline{(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0}$ diferansiyel denklemi

$c_1= c_2=0$ ise denklem homogen tipde bir denklem olur. $c_1$ve c_2 nin her ikisinin de sıfır olmadıklarını kabul edelim. Bu durumda denklemde

$$x=x_1+h\ ,\quad y=y_1+k$$

dönüştürmelerini yapalım. Bu halde

$$dx=dx_1 \qquad dy=dy_1$$

olarak denklem

$$(a_1x_1+b_1y_1+ a_1h+b_1k+c_1)dx_1+(a_2x_1+b_2y_1+ a_2h+b_2 k +c_2)dy_1=0$$

şeklini alır. Şimdi de h ve k yı

$$a_1h+b_1k+c_1=0$$
$$a_2h+b_2 k+c_2=0$$

seçersek,denklem

$$(a_1x_1+b_1y_1)dx_1+(a_2x_1+b_2y_1)dy_1=0$$

şeklini alır ki bu da **homogen tipte bir denklemdir.**

***Not*: Eğer $a_1b_2 -a_2b_1=0$ ise $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ dönüştürmesini yapamayız. Bu durumda**

$a_1b_2 =a_2b_1$ $a_2/a_1 =b_2/b_1=m$ ve $\qquad$ $a_2=m\,a_1$, $b_2=mb_1$ olarak diferansiyel denklem

$$[(a_1x+b_1y)+c_1]dx+[m(a_1x+b_1y)+c_2]dy=0$$

şeklini alır. Burada $a_1x+b_1y =u$ dönüşümü yapılırsa denklem, değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklem haline gelir.

ÖRNEK

1) $dy/dx= (x-y+1)/ (x+y-3)$ denklemini çözünüz.

$x=x_1+h$ $dx=dx_1$ ($a_1b_2 -a_2b_1\neq0$, $1*1-(-1)1=2\neq0$)

$y=y_1+k$ $dy=dy_1$ $(x_1 +h- y_1-k+1)dx_1-(x_1 +h+ y_1+k-3)dy_1=0$

$h-k+1=0$
$-h-k+3=0$ $\qquad$ $-2k=-4$, $k=2$, $h=1$,
$h=x-x_1$ $\qquad$ $x=x_1+1$
$k=y-y_1$ $\qquad$ $y=y_1+2$

$(x_1-y_1)dx_1-(x_1+y_1)dy_1=0$ $\qquad$ homojen tipte diferansiyel denklem

$y_1 = vx_1$ $dy_1 = vdx_1 + x_1dv$

$(x_1 - vx_1)dx_1 - (x_1 + vx_1)(vdx_1 + x_1dv) = 0$

$dx_1[(x_1 - vx_1 - vx_1 - v^2x_1)] + dv[(-x_1^{\ 2} - vx_1^{\ 2})] = 0$

$xdx_1[(1 - v - v - v^2)] + x_1^{\ 2}dv[(-1 - v)] = 0$ $/1/x_1^{\ 2}$ ile çarpalım

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dv(-1-v)}{(-v^2-2v+1)} = 0$$

$u = -v^2 - 2v + 1$ $du = -2v - 2\,dv$

$dv = du/2(-1-v)$

$$\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln(-v^2 - 2v + 1) = c = \ln c$$

$v = y_1/x_1$ idi $v = (y-2)/(x-1)$ idi $(x-1)^2\left(-\frac{(y-2)^2}{(x-1)^2} - \frac{2(y-2)}{(x-1)} + 1\right) = c^2$

2) $(x-y-1)dx + (x+4y-1)dy = 0$ denklemini çözünüz.

3) $(2y - 4x - 1)dx - (y - 2x + 1)dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$a_1b_2 = 4, \quad a_2b_1 = 4; \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-1}{2} \rightarrow a_1 = -2a_2 \ ; \ b_1 = -2\,b_2$$

$$(2y - 4x - 1)dx - \left[\frac{1}{2}(2y - 4x) + 1\right]dy = 0$$

$$(2y - 4x) = u \quad dersek \quad 2\frac{dy}{dx} - 4 = \frac{du}{dx} \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

$$(u - 1)dx + \left(\frac{-1}{2}u - 1\right)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u-1}{\frac{1}{2}u + 1} = 2 + \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \frac{-3}{\frac{1}{2}u+1} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-6}{\frac{1}{2}u+1} \quad \rightarrow \left(\frac{1}{2}u + 1\right)du = -6dx$$

$$\frac{u^2}{4} + u = -6x + c$$

$(2y - 4x) = u$ idi.

$$\frac{(2y - 4x)^2}{4} + (2y - 4x) = -6x + c$$

$$4y^2 - 16xy + 16x^2 + 8y + 8x = 4c$$

2.5. BERNOULLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

p(x) , g(x) x in sürekli fonksiyonları ve $n\neq 0$, $n\neq 1$ olarak

$$y' + p(x)y = g(x)y^n$$

şeklindeki denkleme ***'Bernoulli diferansiyel denklemi'*** denir. Bu denklemi çözmek için **$u=y^{1-n}$** değişken dönüştürmesi yapılarak u yu bilinmeyen kabul eden bir lineer diferansiyel denkleme ulaşılır.

Örnek:

1- $y' + y = y^2e^x$ bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.

$u=y^{1-n}$ değişken dönüştürmesi ile $u=y^{1-2}=y^{-1}=1/y$ olur

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

olarak dy/dx çekilerek

$y' = \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{du}{dx}$ verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$-y^2\frac{du}{dx} + y = y^2e^x$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafını $(-1/y^2)$ ile çarparsak yani

$$-1/y^2\left(-y^2\frac{du}{dx} + y = y^2e^x\right)$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{y} = -e^x$$ **u=1/y idi**

$$\frac{du}{dx} - u = -e^x$$ **lineer diferansiyel denklem elde edilir**

önce **$u' - u = 0$** homojen çözüm elde edilir,

$$\frac{du}{dx} = u \qquad \int\frac{du}{u} = \int dx$$

lnu=x+lnc , lnu-lnc=x ln(u/c)=x

$u/c=e^x$ $u=ce^x$

homojen çözüm elde edilir. ($u=c(x)e^x$) ile verilen denkleme bağlı olarak ($\frac{du}{dx}-u=-e^x$ **)**

türev alınarak yerlerine konur

$u = \mathbf{c(x)e^x}$

$u' = \mathbf{c(x)e^x + c'(x)e^x}$

$\mathbf{\cancel{c(x)}e^x + c'(x)e^x - c(x)e^x = \cancel{-}e^x}$ **$c'(x) = -1$ $dc/dx = -1$ $dc = -dx$**

$c = -x + c_1$

bulunan sabitin (c nin) değeri homojen çözüm sonucunda elde edilen eşitlikte ($u=ce^x$) yerine konularak ikinci taraflı denklemin genel çözümü ($u=1/y$ konularak) y ye bağlı olarak elde edilir.

$u=(-x+c_1)e^x$ $u=-xe^x+c_1e^x$ **$1/y=-xe^x+c_1e^x$**

ÖDEV

Aşağıda verilen bernoulli dif denklemlerini çözünüz.

1- $y'-y=xy^2$ $(1/y=1-x+c_1e^{-x})$

2- $xdy+ydx=x^3y^6dx$ $(1/y^5=-5x^3/2+c_1x^5)$

3- $yy'-xy^2+x=0$ $(y^2=1+c_1e^{x^2})$

4- $(2xy^5-y)dx+2xdy=0$ $(3x^2=(4x^3+c_1)y^4)$

5- $4y'+y\sin x=y^{-3}\sin x$ $(y=1+c_1e^{\cos x})^{1/4}$

$xy-dy/dx=y^3e^{-x^2}$ - diferansiyel denklemini çözünüz.

$y'+p(x)y=g(x)y^n$ bernoulli ($n\neq 0, n\neq 1$)

Çözüm:

$u=y^{1-n}$ değişken dönüşümü ile $u=y^{-2}$ olur.

$\frac{du}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}$ ***çekilerek verilen dif. denklemde yerine***

konur.

$xy+\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}=y^3e^{-x^2}$ ***/ $-2y^{-3}$ ile çarpalım***

$$\frac{-2x}{y^2}-\frac{du}{dx}=-2e^{-x^2} \rightarrow \frac{1}{y^2}=u$$

$2xu+\dfrac{du}{dx}=2e^{-x^2}$ ***(1) 1.mertebeden lineer dif. denklem elde edilir.***

Önce

$2xu+\dfrac{du}{dx}=0$ ***ile homojen çözüm bulunur.***

$$\frac{du}{dx}=-2xu$$

-2xdx=du/u ***-2∫xdx=∫du/u***

$-x^2$+lnc=lnu

lnu-lnc=$-x^2$

ln(u/c)=$-x^2$ ***u/c=*** e^{-x^2}

u=c e^{-x^2} ***(2)***

bulunur.

İkinci taraflı denklemin çözümü için c nin nasıl bir c(x) fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.(yani c=c(x) koyalım). Bu durumda homojen çözüm sonucu bulunan ifadede (u=c(x) e^{-x^2} ***) türevler alınarak (1) de yerlerine konur.***

u=c(x) e^{-x^2}

du/dx= $u'=\dfrac{dc}{dx}e^{-x^2}-2xc(x)e^{-x^2}$

$$\frac{dc}{dx}e^{-x^2}\cancel{-2xc(x)e^{-x^2}}\cancel{+2xc(x)e^{-x^2}}=2e^{-x^2}$$

$\dfrac{dc}{dx}e^{-x^2}=2e^{-x^2}$ ***dc=2dx***

c=2x+c_1 ***(3)***

(3) nolu ifade (2) de yerine konulursa

$u=(2x+c_1)\ e^{-x^2}$

elde edilir. y ye bağlı çözüm için $u=y^{-2}$ idi

$$1/y^2=(2x+c_1)\ e^{-x^2}$$

elde edilir.

RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

p(x), r(x) ve g(x) integre edilebilir fonksiyonlar ve $r(x)\neq 0$ olmak üzere

$$y'=p(x)y+r(x)y^2+g(x)$$

tipindeki diferansiyel denkleme ***'Riccati Diferansiyel Denklemi'*** denir.

Eğer r(x)=0 ise ***lineer diferansiyel denklem***,
g(x)=0 ise ***bernoulli diferansiyel denklemi*** şeklini alır.

Bu iki halin dışında denklemin genel halde çözülemeyeceği Bernoulli tarafından gösterilmiştir. Ancak denklemin bir özel çözümü biliniyorsa

denklemin genel çözümüne ulaşılır. Denklemin bir özel çözümü y_1 olsun Bu halde Riccati Diferansiyel Denkleminin genel çözümü olarak $y=y_1+1/u$ dönüşümü yapılır ve

$$\mathbf{u'+[p(x)+2y_1r(x)]u= -r(x)} \qquad \mathbf{(1)}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 1:

$y'=-y^2+2x^2y+2x-x^4$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=x^2$ dir genel çözümü bulunuz.

$$y'=p(x)y+r(x)y^2+g(x) \quad \text{tipinde}$$

$y=y_1+1/u$ dönüşümü kullanılarak türevler alınıp verilen diferansiyel denkleminde yerlerine konursa , yani;

$y= x^2+(1/u)$
$y'= 2x- u'/u^2$

$2x- u'/u^2= -(x^2+1/u)^2+2x^2(x^2+1/u) +2x-x^4$
$2x- u'/u^2= -(x^4+2x^2/u+1/u^2)+2x^4+2 x^2/u+ 2x-x^4$
$2x- u'/u^2=-x^4-2x^2/u-1/u^2+2x^4+2 x^2/u +2x-x^4$

$- u'/u^2=-1/u^2$ $\qquad$ $\mathbf{u'=1}$ $\qquad$ $u=x+c$
u nun değeri ($y= x^2+(1/u)$) de yerine konarak genel çözüm:

$$y_{genel} = x^2 + 1/(x+c)$$

olur. (1) de $P(x)=2x^2$, $R(x)=-1$ konularak da **$u'=1$ ulaşılabilir.**

Örnek 2:

$y'+y^2-1=0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=1$ dir genel çözümü bulunuz.

Denklemi $y'=1-y^2$ formunda yazalım $g(x)=1$, $r(x)=-1$, $p(x)=0$ olmak üzere denklem Riccati tipi diferansiyel denklemdir.

Çözüm için :

$y=y_1+1/u$ dönüşümü kullanılarak türevler alınıp verilen diferansiyel denkleminde ($y'=1-y^2$) yerlerine konursa , yani;

$y= 1+1/u$
$y'= - u'/u^2$ ile

$- u'/u^2=1-(1+1/u)^2$ $\qquad\qquad$ $- u'/u^2=\cancel{1-1}-2/u-1/u^2$

denklemi $-u^2$ ile çarpalım

$u' = 2u+1$ $\qquad$ *1. mertebeden lineer diferansiyel denklem*

$u' - 2u = 1$ $\qquad$ *($u' + p(x)u = g(x)$ tipi)*

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$
$$\left[\mu(x)u\right]' = \mu(x)g(x)$$

$\left[e^{2x}u\right]' = e^{2x}(1) = e^{2x}$ *her iki tarafın integrali alınarak* $e^{2x}u = \frac{1}{2}e^{2x} + c \qquad u = \frac{1}{2} + ce^{-2x}$

$y = 1 + \frac{1}{u}$ *idi . Genel çözüm;* $\qquad y = 1 + \dfrac{1}{(\frac{1}{2} + ce^{-2x})}$

Örnek 3:
$y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=\sec x$ dir genel çözümü bulunuz.

$q(x)= 2\tan x\sec x$, $r(x)= -\sin x$ $p(x)=$0 olmak üzere riccati tipi diferansiyel denklemdir.
($y'=p(x)y+r(x)y^2+q(x)$ tipi)

$y=y_1+1/u$ dönüşümü kullanılarak türevler alınıp verilen diferansiyel denkleminde (**$y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x$**)yerlerine konursa , yani;

$y=\sec x+1/u$
$y'=\sin x/\cos^2 x-u'/u^2=\tan x\sec x-u'/u^2$

$\tan x\sec x-u'/u^2=\mathbf{2\tan x\sec x-}(\sec x+1/u)^{\mathbf{2}}\mathbf{\sin x}$

$\tan x\sec x-u'/u^2=\mathbf{2\tan x\sec x-\sec^2 x\sin x-2\sec x(1/u)\sin x-1/u^2\sin x}$

$\cancel{\tan x\sec x}-u'/u^2=\mathbf{2\tan x\sec x-\cancel{\tan x\sec x}-2\sec x(1/u)\sin x-(1/u^2)\sin x}$

$-u'/u^2=(-2/u)\tan x\mathbf{-(1/u^2)\sin x}$

$u'=2u\tan x+\sin x$
$u'-2u\tan x=\sin x$ 1.mertrebeden lineer dif denklem haline gelir.

$u=c/\cos^2 x$
$c'=\cos^2 x\sin x$
$c=-\cos^3 x/3+c_1$
$u=(-\cos^3 x/3+c_1)1/\cos^2 x=(-1/3)\cos x+c_1/\cos^2 x$

$$u=(-\cos^3 x+c_1)/3\cos^2 x$$

bulunur $y=\sec x+1/u$ de yerine konarak genel çözüm

$y_{genel}=\sec x+1/(-\cos^3 x+c_1)/3\cos^2 x$ veya

$$\mathbf{y_{genel}=\sec x+3\cos^2 x/(-\cos^3 x+c_1)}$$

elde edilir.

Ödev
$y'=x^3+\frac{2}{x}y-\frac{1}{x}y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=-x^2$ dir. Genel çözümünü bulunuz. ($y_{genel}=-x^2+\frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c}$)

2.6. $y'+p(x)=g(x)e^{ny}$ $(n\neq 0)$ TİPİNDEKİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemin her iki tarafı $\mathbf{e^{-ny}}$ çarpılır, denklem

$$e^{-ny}y'+e^{-ny}p(x)=g(x) \qquad **$$

formunu alır. Burada **$u=e^{-ny}$** değişken dönüşümü yapılır **ve**

$u' = -ne^{-ny}y'$ olduğu gözönüne alınıp **(**)** da yerine konursa

$\frac{u'}{-n} + p(x)u = g(x)$ ***veya*** $u' - np(x)u = -ng(x)$ ***bulunur. u ya göre 1.mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.***

Örnek:

$y' - \frac{1}{x} = xe^{-2y}$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

$y' + P(x) = Q(x)e^{ny}$ tipi (n $\neq 0$) verilen diferansiyel denklemi $e^{-(-2y)} = e^{2y}$ ile çarpalım

$$e^{2y}y' - e^{2y}\frac{1}{x} = x \qquad *$$

olur. Burada u= e^{2y} değişken dönüşümü yapılarak türev alınır

$u' = 2e^{2y}y'$ ve (*)da yerine konursa

$$\frac{u'}{2} - u\frac{1}{x} = x$$

veya

$u' - \frac{2}{x}u = 2x$ **bulunur** ***

(u'+p(x)u=g(x)) tipi 1.mertebeden lineer diferansiyel denklem.

İntegrasyon çarpanı

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} = 1/x^2$

bulunur. $[\mu(x)u]' = \mu(x)g(x)$ de yerine konur ve integral alınarak

$[x^{-2}u]' = 2x^{-1}$

$x^{-2}u = 2\ln x + c$ $\qquad u = 2x^2\ln x + cx^2$

u= e^{2y} idi genel çözüm

$$e^{2y} = 2x^2\ln x + cx^2$$

2.7. TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

M(x,y)dx+N(x,y)dy=0

denklemindeki **M(x,y), N(x,y)** fonksiyonları

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bağıntısını sağlıyorsa bu denkleme *‘**tam diferansiyel denklem**’* denir.

M(x,y) nin x e göre integrali alınır
N(x,y) nin y e göre integrali alınır ve F’e eşitlenir yani

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\textbf{dF=}\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial Y}dy$$

dF=0 F=c ile bulunan sonuçlar ,ortak ifadeler bir kez ve ortak olmayanlar alınarak c’ye eşitlenir.

Örnek 1:

$3x^2dx + 2xydx + x^2dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(3x^2+2xy)dx + x^2dy = 0$

$M(x,y) = (3x^2+2xy)$ **$N(x,y) = x^2$**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad 2x=2x \qquad \text{Tam Diferansiyel}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ **$=3x^2+2xy$** **$F=x^3+x^2y+\cancel{g(y)}$ x’e göre integral**

0

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ **$= x^2$** **$F= x^2y+m(x)$** **y’e göre integral**

$m(x)= x^3$ e eşit olmalıdır

$F= x^3+x^2y$ **dF=0** <u>**Genel çözüm: $c= x^3+x^2y$**</u>

<u>**Ödev:**</u>

1) $(x^2+y^2+x)dx+2xydy=0$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Sonuç: $c=xy^2+(x^2/2)+(x^3/3)$

2) $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho\, e^{2\theta}d\theta=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

genel çözüm $c=\rho\, e^{2\theta}+\rho$

2.8. TAM DİFERANSİYEL VE İNTEGRASYON ÇARPANLARI

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

denklemindeki **M(x,y), N(x,y)** fonksiyonları

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ise verilen diferansiyel denklem tam diferansiyel denklem değildir
Tam diferansiyel olmayan bir denklemi integrasyon çarpanı $\mu(x,y)$ kullanarak çözebiliriz.(belirlenen integrasyon çarpanı ile verilen diferansiyel denklem çarpılarak tam diferansiyel denklem biçimine getirilir ve denklem çözülür.)

$$\mu(x,y)\, M(x,y)dx+\mu(x,y)\, N(x,y)dy=0$$

$$\frac{\partial(\mu, M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu, N)}{\partial x}$$

x'e bağlı integrasyon çarpanı ($\mu(x)$):

$\partial \ln\mu/\partial x =(M_y- N_x) / N(x,y)$ veya $\mu(x) = e^{\int (\frac{M_y - N_x}{N(x,y)})dx}$

y'e bağlı integrasyon çarpanı($\mu(y)$):

$\partial \ln\mu/\partial y =(N_x - M_y) / M(x,y)$ veya $\mu(y) = e^{\int (\frac{N_x - M_y}{M(x,y)})dy}$

eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

$$(N_x - M_y)/(xM(x,y) - yN(x,y)) = R_1$$
$$(M_y - N_x)/(yN(x,y) - xM(x,y)) = R_2$$

xy ye bağlı integrasyon çarpanları($\mu(x,y)$)

ÖRNEK 1:

$(y+xy^2)dx- xdy=0$ denklemini çözünüz.

M(x,y)= $(y+xy^2)$
N (x,y)= - x olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ tam dif.değil.

y'e bağlı integrasyon çarpanı:

$\partial \ln\mu / \partial y = (N_x - M_y) / M$

yardımıyla

$\partial \ln\mu / \partial y = -1-1-2xy / y(1+xy) = -2/y$ elde edilir

ile integral alınarak

$\int d\ln\mu = \int -2/y \, dy$ $\ln\mu = -2\ln y$ $\mu = y^{-2}$

integrasyon çarpanı $\mu = 1/y^2$ elde edilir, verilen dif denklemle çarpılarak

μ **M(x,y)dx+**μ **N(x,y)dy=0**

tam diferansiyel denklem şekline dönüşür.

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu, M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu, N)}{\partial x} = -1/y^2$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \left(\frac{1}{y}+x\right)$ $F = x/y + x^2/2 + g(y)$ x'e göre integral

$$g(y) \nearrow 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ **$=-x/y^2$** **F= x/y+m(x)** y'ye göre integral

m(x)= $x^2/2$ olmalıdır
F= $x/y + x^2/2$ **dF=0** **Genel çözüm: c=** $c = x/y + x^2/2$

Örnek 2:

$(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0$ xy' e bağlı integrasyon çarpanı kullanarak çözünüz**.**

M(x,y)= $(3x+\frac{6}{y})$

N (x,y)= $(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})$ olup

$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6}{y^2}$ $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2}$

$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ tam dif.değil.

<u>xy'e bağlı integrasyon çarpanı:</u>

$(M_y-N_x)/(yN(x,y)-xM(x,y))=R_2=\frac{1}{xy}$ ile xy=u ile

$$\mu(x,y)=e^{\int(\frac{M_y-N_x}{yN(x,y)-xM(x,y)})}=e^{\int\frac{1}{u}du}=e^{\ln u}=xy$$

xy($(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0$ **)** ***Tam diferansiyel denklem (3x^2=3x^2)***

$$x^3y+3x^2+y^3=c$$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ **denklem homojen ise**

μ= $\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ şeklinde bir integrasyon çarpanı olup olmadığına bakalım. ve denklemi μ ile çarpalım.

$\frac{M}{xM+yN}dx+\frac{N}{xM+yN}dy=0$ tam diferansiyel olma şartı

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{xM+yN}\right)$$ dır.

gerekli düzenlemeler yapılarsa

$$N\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}\right)=M\left(x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

olur. Öte yandan homojenlikten Euler teoremine göre

$$xM_x+yM_y=mM(x,y)$$
$$xN_x+yN_y=mN(x,y)$$

olacağından yukarıdaki eşitlik kendiliğinden gerçekleşir. **Dolayısıyla homojen denklemler için**

$$\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

daima bir integrasyon çarpanıdır.

ydy-(2y-x)dx=0 homojen olduğundan

$\mu=\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ ile $\mu=\dfrac{1}{-2xy+x^2+y^2}=\dfrac{1}{(x-y)^2}$

$$\frac{1}{(x-y)^2}ydy-\frac{1}{(x-y)^2}(2y-x)dx=0$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{1}{(x-y)^2}(2y-x)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{(x-y)^2}$

$F=\ln|x-y|+\dfrac{y}{x-y}+g(y)$ $\qquad$ $c=\ln|x-y|+\dfrac{y}{x-y}$

$(y-xy^3)dx+xdy=0$ **denklemini** $\mu=\mu(xy)$ **şeklinde bir integrasyon çarpanı bularak çözünüz.**

M(x,y)= $(y-xy^3)$
N(x,y)= x $\qquad M_y=1-3xy^2 \quad , \quad N_x=1$

xy= u diyelim.

$$\mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\mu' y \qquad , \qquad \mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\mu' x$$

Tam diferansiyel olma şartı:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,y))$$

$$\mu_y M(x,y)+\mu M_y=\mu_x N(x,y)+\mu N_x$$

$$\mu' x(y-xy^3)+\mu(1-3xy^2)=\mu' y\,x+\mu(1)$$

$$-\mu' x^2y^3=3\mu xy^2$$

$$-\mu' xy=3\mu \quad \to \frac{\mu'}{\mu}=-\frac{3}{u} \quad \to \ln\mu=-3\ln u \quad \to \mu=u^{-3} \quad \to \mu=\frac{1}{x^3y^3}$$

Bulunan integrasyon çarpanı ile verilen dif denklem çarpılır

$$\frac{1}{x^3y^3}[\,(y-xy^3)dx+xdy=0\,]$$

$$\left(\frac{1}{x^3y^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\frac{1}{x^2y^3}dy=0$$

$$M_y=N_x=-\frac{1}{2x^3y^3} \qquad tam \quad diferansiyel$$

$$-\frac{1}{2x^2y^2}+\frac{1}{x}=c$$

$\mu(x,y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{xM(x,y)-yN(x,y)}}$ ile de direk olarak integral çarpanı bulunabilir.

$\mu(x-y)$ ŞEKLİNDE BİR İNTEGRASYON ÇARPANI :

u=x-y denirse $\mu_x = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \mu'$ $\mu_y = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\mu'$

Tam diferansiyel olma şartı:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,y))$$

$$\mu_y M(x,y) + \mu M_y = \mu_x N(x,y) + \mu N_x$$

$$-\mu' M + \mu M_y = \mu' N + \mu N_x$$

$$\mu(M_y - N_x) - \mu'(N + M)$$

$$\frac{(M_y - N_x)}{(N + M)} = \frac{\mu'}{\mu}$$

$$\mu(x-y) = e^{\int \frac{(M_y - N_x)}{(N+M)}}$$

3) (2y-x)dx-ydy=0 $\mu(x-y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı bularak çözünüz.

$M_y = 2,$ $N_x = 0$

M(x,y)= 2y-x

N(x,y)=-y

u=x-y denirse $\mu_x = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \mu'$ $\mu_y = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\mu'$

Tam diferansiyel olma şartı:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,y))$$

$$\mu_y M(x,y) + \mu M_y = \mu_x N(x,y) + \mu N_x$$

$$-\mu' M + \mu M_y = \mu' N + \mu N_x$$

$$\mu(M_y - N_x) = \mu'(N + M)$$

$$\frac{(M_y - N_x)}{(N + M)} = \frac{\mu'}{\mu}$$

$$\frac{2}{(-y + 2y - x)} = \frac{\mu'}{\mu}$$

$$\frac{-2}{(x-y)} = \frac{\mu'}{\mu}, \qquad \frac{-2}{u} = \frac{\mu'}{\mu}$$

$\mu(x-y) = -2\ln u = \ln\mu,\qquad \mu = u^{-2} = \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

$\frac{1}{(x-y)^2}((2y-x)dx-ydy=0\ )$

$$\frac{2y-x}{(x-y)^2}dx - \frac{y}{(x-y)^2}dy = 0$$

$M(x,y)= \dfrac{2y-x}{(x-y)^2}$

$$M_y = N_x = \frac{2y}{(x-y)^3}$$ TAM DİF

$N(x,y)= -\dfrac{y}{(x-y)^2}$

$M(x,y)= \dfrac{2y-x}{(x-y)^2}=\dfrac{y-x}{(x-y)^2}+\dfrac{y}{(x-y)^2}$

$$\int M(x,y)dx = \ln(x-y) + \frac{y}{(x-y)} + g(y)$$

$$\int N(x,y)dy = \frac{y}{(x-y)} + m(x)$$

$\dfrac{y}{(x-y)} + \ln(x-y) = c$

$\mu(x+y)$ ŞEKLİNDE BİR İNTEGRASYON ÇARPANI :

u=x+y denirse $\quad \mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\mu' \qquad \mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\mu'$

Tam diferansiyel olma şartı:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,y))$$

$$\mu_y M(x,y) + \mu M_y = \mu_x N(x,y) + \mu N_x$$

$$\mu' M + \mu M_y = \mu' N + \mu N_x$$

$$\mu(M_y - N_x) = \mu'(M - N)$$

$$\frac{(M_y - N_x)}{(M-N)} = \frac{\mu'}{\mu}$$

$$\mu(x+y) = e^{\int\frac{(M_y-N_x)}{(M-N)}}$$

$\mu(x^2+y^2)$ ŞEKLİNDE BİR İNTEGRASYON ÇARPANI :

$u=x^2+y^2$ denirse $\mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=2x\mu'$ $\mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=2y\mu'$

Tam diferansiyel olma şartı:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,y))$$

$$\mu_y M(x,y)+\mu M_y=\mu_x N(x,y)+\mu N_x$$

$$2y\mu' M+\mu M_y=2x\mu' N+\mu N_x$$
$$\mu(M_y-N_x)-\mu'(2yM-2xN)$$

$$\frac{(M_y-N_x)}{(2yM-2xN)}=\frac{\mu'}{\mu}$$

CLAIRAUT DİFERANSİYEL DENKLEMİ

$$y=x\frac{dy}{dx}+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

şeklindeki denkleme 'clairaut denklemi' denir. Clairaut denkleminin genel çözümü bu denklemdeki $y'=dy/dx$ ler yerine bir c keyfi sabiti koymak suretiyle elde edilir. Yani genel çözüm:

$$y_{genel}=xc+\varphi(c)$$

dir.

ÖRNEK

$y=xy'+y'-y'^2$ clairaut dif denklemini çözünüz.

çözüm:genel çözüm

$$y_{genel}=xc+c-c^2$$

*dir. **Tekil çözüm ise**, genel çözümün c ye göre türevini almak suretiyle elde edilecek denklemde c yi çekip y_{genel} de yerine konmasıyla elde edilir. c ye göre türev:*

$x+1-2c=0$ ile $c=1/2(x+1)$

$$y=x(1/2(x+1))+1/2(x+1)-(1/2(x+1))^2$$

$y=1/4\,(x+1)^2$ elde edilir.

2.9. Varlık ve Teklik Teoremi

Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi (Picard Yöntemi)

y'= dy/dx=f(x,y) **y_0=y(x_0)** (1)

diferansiyel denkleminin **x=x_0** için **y=y_0** , bir başka deyişle **y_0=y(x_0)** başlangıç koşulunu gerçekleyen çözümünü bulmak için başlangıç koşulunu da dikkate alarak(1) i x_0 dan x e integre edelim:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (2)$$

Amacımız: x=x_0 için y=y_0 başlangıç koşulunu ve (1) gerçekleyen y fonksiyonunu bulmaktır.

y=y_0 ı oluşturmaya çalıştığımız çözüm için başlangıç noktası olarak ele alalım ve bunu (2) de yerine koyarak yaklaşımın birinci adımını oluşturalım:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx \qquad (3)$$

Buradan elde edilen y_1 değerini (2) de yerine koyarak yaklaşımın ikinci adımını oluşturalım

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$$

devam ederek

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_2)dx$$

....

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx$$

elde edilir ve ***"Picard Yöntemi"*** olarak bilinir.(Cevdet Cerit 1997)

Varlık ve teklik Teoremi:
f(x,y) ve f_y(x,y) fonksiyonları f_y=df/dy

I: x_0-a $\leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ 4

İle belirlenen kapalı bir I bölgesinde sürekli, dolayısıyla sınırlı olsunlar, bir başka deyişle

$$|f(x,y)| \leq M \qquad 5$$

$$\left|f_y(x,y)\right| \leq N \qquad 6$$

eşitsizliklerini gerçekleyen pozitif M ve N sayıları var olsun.

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \qquad 7$$

olmak üzere

$$x_0 - l \langle\ x\ \langle x_0 + l \qquad 8$$

ile belirlenen bir aralıkta

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad 9$$

diferansiyel denkleminin $y_0=y(x_0)$ başlangıç koşulunu gerçekleyen bir ve yalnız bir çözümü vardır. Bu çözüm Picard iterasyonu(yaklaşımı) ile bulunur.

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

$y_0, y_1, y_2........y_n$ fonksiyonlar dizisi oluşturulur. Bu dizinin her terimi başlangıç koşulunu sağlar. Fakat bunlar diferansiyel denklemi sağlamazlar. Belli bir iterasyondan sonra örneğin n=k

$y_{n+1}=y_n$ oluyorsa $y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$ a denklemin bir çözümüdür denir.

Örnek

$f(x,y)= (1+y)/(1+x^2+y^2)$ ve I: $|x| \leq 2, |y| \leq 4$ olmak üzere

$y'= f(x,y)$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösteriniz. Ayrıca çözümün tanımlı olduğu $x_0= 0$ merkezli bir aralık bulunuz.

Çözüm

Varlık ve teklik teoreminden I bölgesi içindeki her t için $|f(x,y)| \leq M$ ve $|f_y(x,y)| \leq N$ veya ($\left|\frac{\partial f}{dy}\right| \leq N$) olduğu gösterilirse diferansiyel denklemin $|x - x_0| < l$ aralığında tek çözümü vardır.

$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{1+y}{1+x^2+y^2}\right| = \frac{|1+y|}{|1+x^2+y^2|} \leq \frac{1+|y|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1+4}{1+0^2+0^2} = \frac{5}{1} = M$$

(paya x ve y nin alabileceği en büyük değerler, paydaya ise alabilecekleri en küçük değerler konursa kesir en büyük değerini alır) Burada a=2 , b=4 tür.

$l=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ = min(2,4/5) Ayrıca

$\left|f_y(x,y)\right| \le N$ =

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}-\frac{(1+y)2y}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{(1+x^2+y^2)-(1+y)2y}{(1+x^2+y^2)^2}\le\frac{\left|(1+x^2+y^2)\right|+\left|(1+y)\right|\left|2y\right|}{\left|(1+x^2+y^2)^2\right|}\le\frac{61}{1}=N$$

olduğundan $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ I içindeki her noktada sınırlıdır. Başlangıç değer problemi $|x| \le 4/5$ aralığı içindeki her x için bir tek y(x) çözümüne sahiptir.

Örnek1:

1) $y' = x^2 - y$ diferansiyel denkleminin çözümünü *$y_0(x_0)=y(1)=2$* başlangıç koşulu altında Picard yöntemi ile ikinci yaklaşıma kadar çözünüz.

$y'=f(x,y)=x^2-y$ $y_0=2$, $x_0=1$ **$f(x,y_0)=x^2-y_0=x^2-2$ dir**

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx = 2+\int_1^x (x^2-2)dx=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{11}{3}$$

bulunan ifade verilen dif. denklemde ($f(x,y_1)=x^2-y_1$) olarak y yerine konularak;

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[(x,y_1(x)]dx = 2+\int_1^x (x^2-\frac{x^3}{3}+2x-\frac{11}{3})dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+x^2-\frac{11}{3}x+\frac{53}{12}$$

Örnek 2

1) $y'=-y+x+1$ diferansiyel denkleminin çözümünü *$y_0(x_0)=y(0)=1$* başlangıç koşulu altında Picard yöntemi ile çözünüz.

$y'=f(x,y)=-y+x+1$ **$y_0=1$, $x_0=0$** **$f(x,y_0)=-y_0+x+1=x$ dir**

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx = 1+\int_0^x xdx = 1+\frac{x^2}{2}$$

$f(x,y_1)=-y_1+x+1$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[(x,y_1(x)]dx = 1+\int_0^x (-1-\frac{x^2}{2}+x+1)dx = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$$

$f(x,y_2)=-y_2+x+1$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[(x, y_2(x)]dx = 1+\int_0^x (-1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x+1)dx = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

....

$$y_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[(x, y_{n-2}(x)]dx = 1+\int_0^x (-1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x+1)dx =$$

$$y_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[(x, y_{n-2}(x)]dx = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+........+(-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

olduğunu varsayalım ve

$$y_n(x) = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+........+(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

olduğunu gösterelim

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[(x, y_{n-1}(x)]dx = 1+\int_0^x \left[-(1+\frac{\mathrm{x}^2}{2}-\frac{x^3}{6}+......+(-1)^n \frac{x^n}{n!})+x+1 \right]dx$$

$= 1-x-x^3/6+x^4/24+...............+(-1)^{n+1}x^{n+1}/(n+1)!+x^2/2+x$

$$=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+........+(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=[1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x3}{6}+\frac{x^4}{24}+........+(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}]+x \qquad (2)$$

bulunur ve 1 nolu ifade gerçeklenmiş olur. (2) nolu ifadeden $n\to\infty$ için limit alınırsa köşeli parantez içindeki sonlu ifade her x için e^{-x} e yakınsayacağından

$\lim_{n\to\infty} y_n = e^{-x}+x$ olur

Örnek 3

y(1)=1 ve $y'=4+x^2y$ dir. Picard yöntemi ile $y_2(1/2)$ yi bulunuz.

$y'=f(x,y)=$ $4+x^2y$ **$y_0=1$, $x_0=1$** **$f(x,y_0)=$** $4+x^2y_0=4+x^2$ **dir**

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx = 1+\int_{1}^{x}(4+x^2)dx = 4x+\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^x = 4x+\frac{x^3}{3}-\frac{10}{3}$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[(x,y_1(x)]dx = 1+\int_{1}^{x} 4+x^2(4x+\frac{x^3}{3}-\frac{10}{3})dx = 4x+x^4+\frac{x^6}{18}-\frac{10x^3}{9}-\frac{53}{18}$$

$y_2(1/2)=-1.019965$

Ödev

1) $y'=2xy-2x$ diferansiyel denkleminin çözümünü $y_0=y(0)=2$ başlangıç koşulu altında Picard yöntemi ile çözünüz.

$y'=f(x,y)=$ $2xy-2x$ **$y_0=2$, $x_0=0$** **$f(x,y_0)=$** $2xy_0-2x$ **$=2x(2)-2x$ dir**

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx = 2+\int_{0}^{x}(2x(2)-2x)dx = 2+x^2$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[(x,y_1(x)]dx = 2+\int_{0}^{x}(2x(2+x^2)-2x)dx = 2+x^2+\frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[(x,y_2(x)]dx = 1+\int_{0}^{x}(2x(2+x^2+\frac{x^4}{2})-2x)dx = 2+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}$$

....

$$y_{n-1}=2+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+........+\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} \qquad (1)$$

olduğunu kabul edelim.

$$y_n=2+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+........+\frac{x^{2n}}{n!} \qquad (2)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[(x, y_{n-1}(x)]dx = = y_0 + \int_0^x [(2xy_{n-1} - 2x]dx =$$

$y_n(x)$=

2+$\displaystyle\int_0^x \left[(2x(2 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + ... + \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}) - 2x \right] dx = 2 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}$ =

1+$\displaystyle(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + ... + \frac{x^{2n}}{n!})$

bulunur ve 1 nolu ifade gerçeklenmiş olur. (2) nolu ifadeden $n\to\infty$ için limit alınırsa köşeli parantez içindeki ifade her x için e^{x^2} e yakınsayacağından

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 + e^{x^2} \quad \text{olur}$$

Eğer belli bir adımdan sonra $y_{n-1}=y_n=y_{n+1}$ olursa bu durumda y_n e (2) denkleminin çözümüdür denir. Aynı zamanda y_n (1) başlangıç değer probleminin de çözümüdür ve dizi bu noktada biter.

DEĞİŞKENLERDEN BİRİNİ İÇERMEYEN İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \qquad y''=f(x)$$

Bu tipteki diferansiyel denklemi çözmek için ard arda iki integral almak yeterlidir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = f(x)$$

in her iki tarafını dx ile çarpalım

$$d(\frac{dy}{dx}) = f(x)dx$$

$$\int d(\frac{dy}{dx}) = \int f(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + c_1 = F(x) + c_1$$

dy= $(F(x)+c_1)dx$

$\int dy = \int (F(x)+c_1)dx$ $\qquad$ y= $\int F(x)dx+c_1x+c_2$

elde edilir. Sonuç c_1 ve c_2 gibi keyfi sabiti içerdiğinden genel çözümdür.

ÖRNEK1:

y''-6x=0 diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \qquad \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = 6x$$

$$d(\frac{dy}{dx}) = 6xdx$$

$$\int d(\frac{dy}{dx}) = \int 6xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1$$

dy= $(3x^2+c_1)dx$ $\qquad$ $\int dy = \int (3x^2+c_1)dx$ $\qquad$ **$y=x^3+c_1x+c_2$**

Bu kural, daha yüksek mertebeden türevler bulunması durumunda da , yani

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

şeklindeki denklemlere de uygulanır.

$\boxed{\dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y')}$ **Tipindeki diferansiyel denklemler**

y'=dy/dx= p dönüştürmesi yapılırsa $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ olarak, denklem

$\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$ 1. mertebeden bir diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur.

Örnek

(x+1) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = (x+2)\dfrac{dy}{dx}$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}\dfrac{dy}{dx}$ $\qquad$ $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y')$ **tipinde**

y'= dy/dx = p dönüştürmesi yapılırsa $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ denklemde yerlerine konursa

$\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{(x+2)}{(x+1)} p$ **1. mertebeden değişkenlere ayrılabilir tipte dif. denklem**

$\dfrac{dp}{p} = \dfrac{(x+2)}{(x+1)} dx$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{dp}{p} = \int \frac{(x+2)}{(x+1)} dx$

$$\int \frac{dp}{p} = \int (1 + \frac{1}{x+1}) dx$$

lnp=x+ln(x+1)+lnc

lnp-lnc-ln(x+1)=x $\quad \dfrac{p}{c(x+1)} = e^x$ $\qquad$ p= c(x+1)e^x

p=dy/dx idi. $\qquad$ dy= c(x+1)e^x dx $\qquad$ ∫dy= c∫(x+1)e^x dx

$c\int(xe^x+e^x)\,dx$ in integrali

$x=u$ $\quad$ $dx=du$

$dv=e^x dx$ $\quad$ $v=e^x$ $\quad$ $uv-\int vdu$ $\quad$ $x\,e^x-\int e^x dx= x\,e^x-e^x$

$y=c[\,x\,e^x-e^x\,]+c_1$ $\quad$ $y= c\,x\,e^x+c_1$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(y,y')}$$

Tipindeki diferansiyel denklemler

$\frac{dy}{dx}=p$ dönüştürmesi yapılır ve

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ olduğu göz önüne alınırsa denklem

$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 1. mertebeden diferansiyel denklem şekline dönüşür.

ÖRNEK:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}=y'^2y^{-1}$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

$\frac{dy}{dx}=p$ dönüştürmesi yapılır ve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$p\frac{dp}{dy}=p^2y^{-1}$ $\quad$ $\frac{dp}{dy}=py^{-1}$ $\quad$ $\int\frac{dp}{p}=\int y^{-1}dy$

$\ln p=\ln y+\ln c$

$\ln(p/c)=\ln y$ $\quad$ **$p=cy$** $\quad$ **$p=dy/dx$ idi.**

$dy/dx= c\,y$ $\quad$ $\int dy/y = c\int dx$

$\ln y= cx+ \ln c_1$

$\ln y- \ln c_1=cx$ $\quad$ $\ln(y/c_1)= cx$ $\quad$ $y=c_1e^{cx}$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)}$$

Tipindeki diferansiyel denklemler

Bu tip diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için denklemin her iki tarafı

$$\mathbf{2}\frac{dy}{dx}\,\mathbf{dx}$$

ile çarpılır. Bu durumda

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx=2f(y)\frac{dy}{dx}dx$$

elde edilir. Bu bağıntının birinci tarafı

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx=d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

olup

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2f(y)dy$$

ve

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\int 2f(y)dy \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\int 2f(y)dy+c=F(y)+c$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{F(y)+c} \qquad \frac{dy}{\sqrt{F(y)+c}}=dx$$

olarak

y=φ(x,c,K) çözümü bulunur.

Örnek:

$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$ **diferansiyel denklemini çözünüz**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y$$

$\mathbf{2}\frac{dy}{dx}\,\mathbf{dx}$ **ile denklemin her iki tarafını çarpalım**

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = -2a^2ydy \qquad 2y'y'' = -2a^2ydy$$

d$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2a^2ydy$ integral alınırsa

$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2a^2\int ydy + K^2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = K^2 - a^2y^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{K^2 - a^2y^2}$

$$\frac{dy}{\sqrt{K^2 - a^2y^2}} = dx \qquad x + c = \int \frac{dy}{\sqrt{K^2 - a^2y^2}}$$

olup

$\frac{1}{a}\arcsin\frac{ay}{K} = x + c$ **arcsin(ay/K)=ax+ac**

ay/K=Sin(ax+ac) **y=K/a (sin(ax+ac))**

Ödev:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y^2}$ **diferansiyel denklemini çözünüz**

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = 2\frac{1}{y^2}dy$$

d$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\frac{1}{y^2}dy$ integral alınırsa

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int 1/y^2 dy \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{-\frac{2}{y} + c}$ c=0 seçilerek

$\sqrt{\frac{-y}{2}}$ **dy=dx** **x+c₂=** $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}$ **$(-y)^{3/2}$**

3.1. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2. Mertebeden adi diferansiyel denklem , f verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad \textbf{(1)}$$

formundadır. Eğer (1) deki f fonksiyonunda y ve y' lineer olarak bulunuyorsa (1) denklemi lineerdir denir.

Yani f(t,y,y')=g(t)-p(t)y'-q(t)y **(2)**
şeklinde yazılabiliyorsa
Burada g,p ve q fonksiyonları, t bağımsız değişkenine bağlı fonksiyonlardır. Bu durumda (1) denklemi

$$\mathbf{y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)} \qquad \textbf{(3)}$$

şeklinde yazılabilir. (3) denklemi yerine

$$\mathbf{P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=G(t)} \qquad \textbf{(4)}$$

şeklinde bir denklem ele alınmaktadır. Eğer P(t)≠0 ise, (4) denklemi P(t) ile bölünürse, (3) denklemi

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, g(t) = \frac{G(t)}{P(t)} \qquad \textbf{(5)}$$

olduğu göz önüne alınarak elde edilir. Eğer (1) denklemi (3) veya (4) formunda değilse, non-lineerdir.

(1),(3) veya (4) formunda verilen bir diferansiyel denklemin başlangıç değer problemi y_0 ve y'_0 verilen sayılar olmak üzere**,**

$$\mathbf{y(t_0)=y_0 \;,\; y'(t_0)=y'_0} \qquad \textbf{(6)}$$

formunda başlangıç koşulları ile verilir.

Dolayısıyla(t_0,y_0) noktası ile birlikte, bu noktanın eğimi de verilmelidir. Bu başlangıç koşulları 2. mertebeden diferansiyel denklemin çözümünde ortaya çıkan iki katsayının belirlenmesinde kullanılır.

Eğer (3) denklemindeki g(t) veya (4) denkleminde G(t) fonksiyonu her t için sıfır ise verilen diferansiyel denklem homojendir denir.

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \qquad \textbf{(7)}$$

aksi takdirde denkleme homojen değildir denir.

Kısaca,

$$P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0 \qquad \textbf{(8)}$$

(8) formundaki denklemler homojendir. Dolayısıyla A,B ve C sabitler olmak üzere (8)denklemi

$$ay''+by'+cy=0 \qquad \textbf{(9)}$$

formunda yazılırsa sabit katsayılı homojen denklem olur. (9) denkleminin çözümü r belirlenmesi gereken bir parametre olmak üzere, $y=e^{rt}$ şeklinde aranırsa ve $y'=re^{rt}$, $y''=r^2e^{rt}$ ler (9) denkleminde yerlerine konursa

$$a\,r^2e^{rt}+b\,re^{rt}+c\,e^{rt}=0$$
$$(ar^2+br+c)\,e^{rt}=0$$

$$\mathbf{ar^2+br+c=0} \qquad \textbf{(10)}$$

elde edilir.

Eğer r (10) denkleminin kökü ise $y=e^{rt}$ denklemin çözümüdür. $ar^2+br+c=0$ denklemine ikinci tarafsız denklemin ‘***karakteristik denklemi’*** denir. Bu denklem diferansiyel denklemde

$ay''+by'+cy=0$ denkleminde:

$y''=r^2$

$y'=r$ $\qquad$ $ar^2+br+c=0$ ikinci mertebeden karakteristik denklem

$y=1$

yazılmak suretiyle doğrudan doğruya elde edilebilir.

<u>I.Durum</u>

$\Delta=\mathbf{b^2-4ac>0}$ ise $\qquad$ r_1 ve r_2 gibi farklı iki reel kök vardır.

$$\left(r_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)$$

Genel çözüm: $\mathbf{y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^{r1x}+c_2e^{r2x}}$ dır

<u>II.Durum</u>

$\Delta=\mathbf{b^2-4ac<0}$ ise kompleks iki kök vardır

$$r_1=\alpha+i\beta \quad ; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$\alpha=(-b/2a)$ $\qquad$ $\beta=\sqrt{4ac-b^2}\,/2a$

genel çözüm: $\mathbf{y=e^{\alpha x}\,(c_1Cos\beta x+c_2Sin\beta x)}$ dır.

III.Durum   Kökler reel ve birbirine eşit ise

Δ=**b^2- 4ac=0** r_1= r_2=r=(-b/2a)   katlı 2 kök vardır.

Genel çözüm   **$y=(c_1+c_2x)e^{rx}$**

3.2.LİNEER HOMOJEN DENKLEMLERİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ

Teorem 3.2.1:

p,q ve g fonksiyonları I açık aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t), \quad y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y'_0$$

başlangıç değer problemi gözönüne alınsın: Bu durumda t, I aralığında kalmak suretiyle çözümü vardır ve bu problemin tek bir y=y(t) çözümü bulunur.

Örnek 1:

y''+5y'+6y=0   y(0)=2,   y'(0)=3   başlangıç değer problemini çözünüz.

$y''=r^2$

$y'=r$ $r^2+5r+6=0$ $r_1=-2$, $r_2=-3$ 2 farklı reel kök

$y=1$

Genel çözüm: **$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^{r1x}+c_2e^{r2x}$** dır

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$ dır   **(1)**

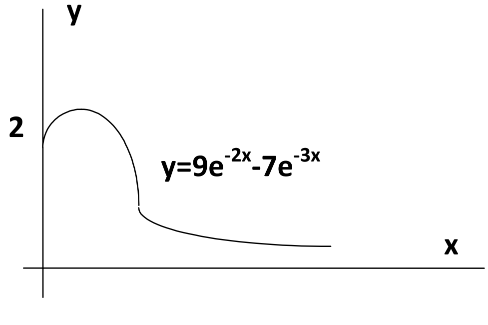
y(0)=2 için $c_1+c_2=2$

y'(0)=3 için $y'=-2\,c_1e^{-2x}-3\,c_2e^{-3x}$ $-2\,c_1-3c_2=3$

$c_1=9$ $c_2=-7$ (1) yerlerine konursa başlangıç değer probleminin çözümü

$$y=9e^{-2x}-7e^{-3x}$$

bulunur.



Örnek 2

$4y''-8y'+3y=0 \quad y(0)=2$ **,** $y'(0)=1/2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

y''=r²

y'=r *4r²-8r+3=0* *r_1=3/2, r_2=1/2 2 farklı reel kök*

y=1

Genel çözüm: **y=$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$=** $c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ dır

y=$c_1e^{3/2x}+c_2e^{1/2x}$ dır **(1)**

Başlangıç koşulları ile

$$c_1+c_2=2$$
$$\frac{3}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{2} \qquad c_1=-1/2, c_2=5/2$$

Başlangıç değer probleminin çözümü;

$$y=-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}+\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

Örnek 3

(t^2-3t)y''+ty'-(t+3)y=0 y(1)=2, y'(1)=1 **başlangıç değer probleminin çözümünün varolduğu en geniş aralığı bulunuz.**

P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=G(t)

şeklinde bir denklem ele alınmaktadır. P(t)≠0 olduğundan denklemi P(t) ye bölersek, (3) denklemi

$$p(t)=\frac{Q(t)}{P(t)}, q(t)=\frac{R(t)}{P(t)}, g(t)=\frac{G(t)}{P(t)}$$

y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)

şekline gelir.

p(t)=1/(t-3) **q(t)=-(t+3)/t(t-3)** **g(t)= 0**

katsayıların süreksizlik noktaları **t=0 ve t=3 tür (paydayı 0 yapan değerler). Bu nedenle katsayıların sürekli olduğu ve t=1 başlangıç noktasını içeren aralık 0<t<3 aralığıdır. Bu aralıkta teoremin şartları sağlanır ve bu aralık en geniş aralıktır (Şartları sağlayan) y(1)=2, t=1**

Teorem 3.2.2(Süperposisyon)

Eğer y_1 ve y_2 $L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0$ diferansiyel denkleminin çözümleri iseler, c_1 ve c_2 sabitlerinin keyfi değerleri için, $c_1y_1+c_2y_2$ lineer kombinasyonu da diferansiyel denklemin çözümüdür.

İspat için denklemde $y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ koymak yeterlidir.

$$
\begin{aligned}
L[c_1y_1+c_2y_2] &= (c_1y_1+c_2y_2)''+p(c_1y_1+c_2y_2)'+q(c_1y_1+c_2y_2)\\
&= c_1y_1''+c_2y_2''+p(c_1y_1'+c_2y_2')+q(c_1y_1+c_2y_2)\\
&= c_1(y_1''+py_1'+qy_1)+c_2(y_2''+py_2'+qy_2)\\
&= c_1\,L[\cancel{y_1}]+c_2\,L[\cancel{y_2}]\\
&= c_1*0+c_2*0
\end{aligned}
$$

$L[c_1y_1+c_2y_2]=0$ $\quad$ $c_1y_1+c_2y_2$ de bir çözümdür.
Özel durumda teorem c_1 veya c_2 nin sıfır olması durumunda da geçerlidir.

Bu kısımda ise $y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ ifadesindeki c_1 ve c_2 katsayılarının hangi değerleri için($y(t_0)=y_0, \ldots y'(t_0)=y'_0$)başlangıç koşullarının sağlandığı ile ilgileneceğiz.

$y(t_0)=y_0, \ldots y'(t_0)=y'_0$ başlangıç koşulları

$$
\left.\begin{aligned}
c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)&=y_0\\
c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)&=y_0'
\end{aligned}\right\}
$$

denklemlerini sağlar.

Bu denklemlerden c_1 ve c_2 çözülürse

$$c_1=\frac{y_0y_2'(t_0)-y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

$$c_2=\frac{-y_0y_1'(t_0)+y_0'y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

veya bunları determinantlardan oluşan terimler olarak yazarsak

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0)\\ y_0' & y_2'(t_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0)\\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0)\end{vmatrix}} \qquad c_2=\frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0\\ y_1'(t_0) & y_0'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0)\\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0)\end{vmatrix}}$$

olur.

c_1 ve c_2 nin bu değerleri ile $y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ ifadesi ($y(t_0)=y_0, \ldots y'(t_0)=y'_0$)başlangıç koşullarını ve ($L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0$) diferansiyel denklemini sağlar.

Diğer yandan c_1 ve c_2 nin bulunabilmesi için paydalar sıfırdan farklı olmalıdır.

$$W=\begin{Vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{Vmatrix} \neq 0$$ olmalıdır.

W determinantına wronskion determinantı veya kısaca y_1 ve y_2 çözümlerinin wronskioni denir.

Teorem 3.2.3

y_1 ve y_2 nin **L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ denkleminin iki çözümü olduğu kabul edilsin. Ayrıca $y(t_0)=y_0$, ...$y'(t_0)=y'_0$ başlangıç koşullarının tanımlandığı t_0 noktasında $W=y_1y_2'-y_1'y_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde c_1 ve c_2 sabitleri $y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ fonksiyonu için diferansiyel denklemi(L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$) ve başlangıç koşullarını ($y(t_0)=y_0$, ...$y'(t_0)=y'_0$) sağlayacak şekilde seçilebilir.**

Örnek 3:

1)$y''+5y'+6y=0$ diferansiyel denkleminin iki çözümü $y_1(t)=e^{-2t}$, $y_2(t)=e^{-3t}$ idi.
Bu y_1 ve y_2 nin wronskionini bulunuz ve sıfırdan farklı olduğunu gösteriniz.

$$W=\begin{Vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{Vmatrix}=-3e^{-5t}-(-2e^{-5t})=-e^{-5t}\neq 0$$

$y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=c_1 e^{-2t}+c_2 e^{-3t}$ dir.

Teorem 3.2.4.

Eğer y_1 ve y_2 **L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ denkleminin iki çözümü ise ve öyle bir t_0 noktası varsa ve bu noktada** y_1 ve y_2 nin $W\neq 0$ ise, bu takdirde y_1 ve y_2 , c_1 ve c_2 katsayıları ile **$y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ çözümleri (L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$) denkleminin her çözümünü içerir. Dolayısıyla $y= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ ifadesi (L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$) denkleminin genel çözümüdür.**

Bununla birlikte sıfırdan farklı wronskione sahip y_1 ve y_2 çözümlerine **(L[y]= $y''+p(t)y'+q(t)y=0$)** denkleminin **'çözümlerininin temel cümlesi'** denir.

Örnek 4

$y_1(t)=t^{1/2}$ $y_2(t)=t^{-1}$ olarak verilmektedir.

$2t^2y''+3ty'-y=0$ $t>0$ için $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin diferansiyel denkleminin çözümlerinin temel cümlesi olduğunu gösteriniz.

Öncelikle y_1 ve y_2 nin verilen diferansiyel denkleminin çözümleri olup olmadığını yerine koyma metodu ile bakarsak
$y_1(t)=t^{1/2}$, $y_1'(t)=1/2t^{-1/2}$, $y_1''(t)=-1/4t^{-3/2}$

$2t^2(-1/4t^{-3/2})+3t(1/2t^{-1/2})- t^{1/2}=(-1/2+(3/2)-1)t^{1/2}=0$

benzer şekilde

$y_2(t)=t^{-1}$, $y_2'(t)=-t^{-2}$, $y_2''(t)=2t^{-3}$

$2t^2(2t^{-3})+3t(-t^{-2})- t^{-1}=(4-3-1)t^{-1}=0$

olur. Dolayısıyla y_1 ve y_2 verilen diferansiyel denklemin çözümleridir. Bunların Wronskionuna bakılırsa

$W(y_1,y_2)=\begin{Vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{Vmatrix} = -\frac{3}{2}t^{-3/2}$ W(y_1,y_2)$\neq 0$ t>0 olduğundan **$y_1(t)$ $y_2(t)$**

diferansiyel denklemin temel cümlesini oluşturur.

Teorem 3.2.5

Bir I açık aralığında sürekli olan p ve q katsayıları ile tanımlanmış
L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0 diferansiyel denklemini gözönüne alalım. I aralığında bir t_0 noktası seçilsin y_1 diferansiyel denklemin bir çözümü olsun ve $y(t_0)=1$, ...$y'(t_0)=0$ başlangıç koşulları sağlansın y_2 de diferansiyel denklemin bir çözümü olsun ve $y(t_0)=0$, $y'(t_0)=1$ başlangıç koşulları sağlansın Bu takdirde y_1 ve y_2 gözönüne alınan diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesini oluşturur.

Ödev: Yukarıdaki teorem 3.2.5 te tanımlanan çözümlerin temel cümlesini $t_0=0$ başlangıç koşulu için
y''-y=0 diferansiyel denklemi için bulunuz.($y(t_0)=1$, $y'(t_0)=0$, **$y(t_0)=0$, $y'(t_0)=1$)**

$y''=r^2$

$y'=r$ *$r^2-1=0$* *$r_1=1$, $r_2=-1$ 2 farklı reel kök*

y=1

Genel çözüm: **$y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=$** $c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ dır

$y=c_1e^t+c_2e^{-t}$ dır **(**$W(y_1,y_2)t=-2\neq 0$ **(1)**

y(0)=1, y'(0)=0 koşulları ile $c_1=1/2, c_2=1/2$ Böylece

$$y_3(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}=\cosh t$$

Benzer şekilde $y_4(t)$ *y(0)=0, y'(0)=1* koşullarını sağlıyorsa

$$y_4(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}=\sinh t$$

y_3**,** y_4 ***ün Wronskianı*** $W(y_3, y_4)(t) = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

Bu fonksiyonlar, Teorem 3.2.5 ile çözümlerin temel cümlesidir. Bu yüzden verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \sinh t$$

3.3. LİNEER BAĞIMSIZLIK VE WRONSKİAN

Bu bölümde lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık ile wronskian arasındaki ilişki verilecektir.

Bir I aralığının içindeki t için, k_1 ve k_2 her ikisi birden sıfır olmayan sabitler olmak üzere,

$$\mathbf{k_1 f(t)+k_2 g(t)=0} \qquad (1)$$

ise f ve g fonksiyonları **'lineer bağımlı'**dır**.** (1) denklemi I aralığının içindeki her t için eğer **sadece $k_1=k_2=0$** durumunda geçerli ise f ve g ye ***'lineer bağımsızdır'*** denir.

Örnek 5:

Keyfi bir aralıkta e^t ve e^{2t} fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Lineer bağımsızlık için

$$\mathbf{k_1 e^t+k_2 e^{2t}=0} \qquad (2)$$

nin ele alınan aralık içindeki her t için $k_1=k_2=0$ durumunda sağlandığı gösterilmelidir. Ele alınan aralıkta $t_1 \neq t_0$ olmak üzere t_0 ve t_1 noktaları seçilsin. Bu noktalarda (2) denklemi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} &\mathbf{k_1 e^{t0}+k_2 e^{2t0}=0} \qquad (3) \\ &\mathbf{k_1 e^{t1}+k_2 e^{2t1}=0} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Katsayılar determinantı $\mathbf{e^{t0}\, e^{2t1} - e^{2t0}\, e^{t1} = e^{t0}\, e^{t1}(e^{t1} - e^{t0})}$ **olur.** Bu determinant sıfırdan farklı olduğundan (3) denkleminin tek çözümü **$k_1=k_2=0$ dir.** Dolayısıyla verilen fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

Teorem 3.3.1.

f ve g fonksiyonları bir I açık aralığı üzerinde diferansiyeli alınabilinen fonksiyonlar ve bir t_0 noktası için **$W(f,g)(t_0) \neq 0$ ise** f ve g lineer bağımsızdır . Her t noktası için **$W(f,g)(t)=0$ ise** lineer bağımlıdır.

Teoremin ispatı için **$k_1 f(t)+k_2 g(t)=0$** ifadesini ele alalım t_0 noktasında türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} &\mathbf{k_1 f(t_0)+k_2\, g(t_0)=0} \qquad (4) \\ &\mathbf{k_1 f'(t_0)+k_2\, g'(t_0)=0} \end{aligned}$$

olur. 4 deki katsayılar determinantı **$W(f,g)(t_0) \neq 0$** olduğundan tek çözüm **$k_1=k_2=0$ dir.** Bu nedenle f ve g lineer bağımsızdır.

Yukarıdaki örnek için;(örnek5) herhangi bir t_0 noktası için

W(f,g)(t_0)= $\begin{Vmatrix} e^{t_0} & e^{2t_0} \\ e^{t_0} & 2e^{2t_0} \end{Vmatrix} = e^{3t_0} \neq 0$ (5)

dır. Dolayısıyla e^t ve e^{2t} fonksiyonlarını lineer bağımsızdır.

Teorem 3.3.2.(Abel teoremi)

y_1 ve y_2

L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0 (6)

diferansiyel denkleminin çözümleri ise, p ve q I açık aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere **wronskianW(y_1,y_2)t**

W(y_1,y_2)t= c exp[- $\int p(t)dt$ **]** (7)

Burada c y_1 ve y_2 bağlı belli bir sabittir. Bu yüzden tüm t ler için **W(y_1,y_2)t** ya sıfırdır**(eğer c=0 ise) ya da asla sfır değildir.(eğer c** $\neq 0$)

Teoremin ispatı: y_1 , y_2 çözümleri denklemi sağladıklarından

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0 \qquad (8)$$

Birinci denklemi $-y_2$, ikinci denklemi y_1 çarpıp toplarsak

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(t)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \qquad (9)$$

$$W(t) = W(y_1, y_2)(t)$$

(10)

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(9) formunda yazarsak

$$W' + p(t)W = 0 \qquad (11)$$

(11) 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. ve değişkenlere ayrılabilirtiptedir.. Böylece
c sabit

W(t)= c exp[- $\int p(t)dt$ **]** (12)

Üstel fonksiyon sıfır olmayacağından c=0 durumunda W(t)=0 dır. Bu durumda tüm t ler için W(t)=0 dır. ve teorem sağlanmış olur.

Örnek 4 için; $\mathbf{y_1(t)=t^{1/2}}$ $\mathbf{y_2(t)=t^{-1}}$

$\mathbf{2t^2y''+3ty'-y=0}$ dif denkleminin çözümleridir. Abel teoremi yardımıyla özel çözümü bulunuz.

Örnek 4 ten $W(y_1,y_2)(t)=-3/2t^{-3/2}$ olduğunu biliyoruz (7) nolu eşitliği kullanabilmek için verilen diferansiyel denklemi (6) formunda yazmamız gerekir.

$$y''+\frac{3}{2t}y'-\frac{1}{2t^2}y=0$$

$\mathbf{W(y_1,y_2)t= c\,exp[-}\int p(t)dt\,\mathbf{]=cexp(}\int \frac{3}{2t}dt\,\mathbf{)=cexp(-3/2lnt)=ct^{-3/2}}$ **özel çözüm için C=-3/2 seçilmelidir.**

2. mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lineer bağımsızlığı ve wronskian arasındaki ilişki teorem 3.3.3 ile verilmektedir.

SORU) $t^2y''+2ty'+e^{3t}y=0$ diferansiyel denkleminin Wronskian determinantını bulunuz. $W(y_1,y_2)(1)=3$ ise, $W(y_1,y_2)(6)$ değerini bulunuz.

$t^2y''+2ty'+e^{3t}y=0$ denklemi t^2 ye bölünürse

$$y''+\frac{2t}{t^2}y'+\frac{1}{t^2}e^{3t}y=0,$$

$$y''+\frac{2}{t}y'+\frac{1}{t^2}e^{3t}y=0$$

Abel Teoreminden

$$W(y_1,y_2)t=ce^{-\int p(t)dt}=ce-\int\frac{2}{t}dt=ce^{-2\ln t}=\frac{c}{t^2}$$

$W(y_1,y_2)(1)=3$ den c=3 bulunur.

$$W(y_1,y_2)(6)=\frac{c}{t^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\text{ bulunur.}$$

Teorem 3.3.3.

p ve q fonksiyonları bir I açık aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere **L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0** diferansiyel denkleminin çözümleri y_1 ve y_2 olsun, bu takdirde ancak ve ancak I içindeki her t için

$\mathbf{W(y_1,y_2)t=0}$ ise y_1 ve y_2 I üzerinde lineer bağımlıdır

$\mathbf{W(y_1,y_2)t\neq 0}$ ise y_1 ve y_2 I üzerinde lineer bağımsızdır.

Kısaca çözümlerin temel cümlesi wronskian ile lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

y_1 ve y_2 , **L[y]= y''+p(t)y'+q(t)y=0** diferansiyel denkleminin çözümleri , p ve q fonksiyonları bir I açık aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun, bu takdirde aşağıdaki kavramlar denktir ve her biri diğer üçünü gerektirir.

1- y_1 ve y_2 fonksiyonları I üzerinde çözümlerin temel cümlesidir.
2- y_1 ve y_2 fonksiyonları I üzerinde lineer bağımsızdır
3- I daki bir t_0 noktasında $\mathbf{W(y_1,y_2)t_0\neq 0}$ dır.
4- I daki her t için $\mathbf{W(y_1,y_2)t\neq 0}$ dır.

3.4. KARAKTERİSTİK DENKLEMİN KOMPLEKS KÖKLERİ

ay''+by'+cy=0 denkleminde:

$y''=r^2$

$y'=r$ $\qquad ar^2+br+c=0$ ikinci mertebeden karakteristik denklem

y=1

yazılmak suretiyle doğrudan doğruya elde edilebilir.

$\Delta=\mathbf{b^2-4ac<0}$ ise kompleks iki kök vardır

$$r_1=\alpha+i\beta \quad ; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$$\alpha=(-b/2a) \qquad \beta=\sqrt{4ac-b^2}\,/\,2a$$

genel çözüm: $\mathbf{y= e^{\alpha x}\,(c_1Cos\beta x+c_2Sin\beta x)}$ dır. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Euler Formülü:

e^t fonksiyonu t=0 noktasında Taylor serisine açılırsa

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} \qquad -\infty<\mathbf{t}<\infty$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde t yerine it konursa

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

elde edilir. Bu eşitlikte ilk ifade t=0 noktası civarında cost fonksiyonunun taylor serisine 2. ifade ise t=0 noktası civarında sint fonksiyonunun taylor serisine karşılık gelir. Dolayısıyla

$$\mathbf{e^{it} = cost+isint}$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklem '***Euler formülü"***olarak bilinmektedir. Euler formülünden yaralanılarak

$$\mathbf{e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha t}\,(\cos\beta t + i\sin\beta t)}$$
$$\mathbf{= e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t)}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1=\alpha+i\beta \quad ; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

ise $\alpha=(-b/2a)$ $\beta=\sqrt{4ac-b^2}\,/\,2a$
olmak üzere

genel çözüm: **$y= e^{\alpha t}\,(c_1 Cos\beta t+c_2 Sin\beta t)$**

Örnek 1:

y''+y'+y=0 ikinci derece denklemi çözünüz.

$r^2+r+1=0$ (karakteristik denklem) **$\Delta=b^2- 4ac= -3<0$ kompleks iki kök vardır.**

$$\alpha_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2} = \alpha+i\beta$$

genel çözüm: **$y= e^{\alpha x}\,(c_1 Cos\beta x+c_2 Sin\beta x)$** dır

α ve β değerleri yerine konulursa genel çözüm

$$y= e^{(-1/2)x}\,(c_1 Cos\sqrt{\frac{3}{2}x} + c_2 Sin\sqrt{\frac{3}{2}x}) \qquad \text{elde edilir.}$$

Örnek 2:

y''+9y=0 ikinci derece denklemini çözünüz.

Çözüm: **$\Delta=b^2- 4ac= -36<0$ kompleks iki kök vardır.**

$$\alpha_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{36i^2}}{2} = \pm\frac{i6}{2} = \pm 3i = \alpha+i\beta$$

genel çözüm: **$y= e^{\alpha x}\,(c_1 Cos\beta x+c_2 Sin\beta x)$ idi.**

buradan genel çözüm $y= c_1 Cos3x+c_2 Sin3x$elde edilir.

Örnek 3:

$16y'' - 8y' + 145 = 0 \qquad y(0) = -2$ **,** $y'(0) = 1$ *başlangıç değer problemini çözünüz.*

$16r^2 - 8r + 145 = 0$ **karakteristik denklem**

$r_1=\alpha+i\beta$; $r_2=\alpha-i\beta$

$\alpha=(-b/2a)=1/4 \qquad \beta=\sqrt{4ac-b^2}\,/2a=3 \quad (\frac{1}{4}\pm 3i)$

genel çözüm: $y = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)$ **=** $e^{\frac{1}{4}t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)$

$y(0) = -2$ **için** $c_1 = -2$

$$y' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) + e^{\frac{1}{4}t}(-3c_1\sin 3t + 3c_2\cos 3t)$$

$y'(0) = 1$ **için**

$$\frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1$$

$c_2 = 1/2$

y= $e^{\frac{1}{4}t}(-2\cos 3t + 1/2\sin 3t)$

3.5 KATLI KÖKLER VE MERTEBE DÜŞÜRME

ay''+by'+cy=0 denkleminde:

$y''=r^2$

$y'=r$ $\qquad ar^2+br+c=0$ ikinci mertebeden karakteristik denklem

y=1

yazılmak suretiyle doğrudan doğruya elde edilebilir.

Kökler reel ve birbirine eşit ise

$\Delta=b^2-4ac=0$ $\qquad r_1= r_2=r=(-b/2a)$ katlı 2 kök vardır.

Genel çözüm $\qquad$ **$y=(c_1+c_2t)e^{rt}$**

Örnek

y''+y'+1/4y=0 y(0)=2 ve y'(0)=1/3 denklemini çözünüz.

$r^2+r+1/4=0$

$\Delta=b^2-4ac=0$ $\quad r_{12} = \frac{-b}{2a}$ **=-1/2=r** $\qquad$ **(2 katlı kök)**

Genel çözüm **$y=(c_1+c_2t)e^{rt}$ idi. buradan**

$y=(c_1+c_2t)e^{(-1/2)t}$ elde edilir

$y(0)=2$ için ($t=0,y=2$) $c_1=2$ olur.

$y'(0)=1/3$ için $y'(0)=-1/2(c_1+c_2t)\, e^{(-1/2)t}+c_2\, e^{(-1/2)t}=1/3$

t yerine 0, c_1 yerine 2 konularak

$-1+c_2=1/3$ $c_2=4/3$

elde edilir.

$$y=(2+1/3t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

***MERTEBE DÜŞÜRME*, $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ şeklindeki bir diferansiyel denklemin bir $y_1(t)$ çözümü biliniyorsa, diğer çözümünün bulunmasında kullanılır.**

Bu durumda **$y=v(t)y_1(t)$** seçilerek y' ve y'' ifadeleri $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ denkleminde yerlerine konur ve düzenlenirse, yani;

$y=v(t)y_1(t)$

$y'=v'(t)y_1(t)+v(t)y_1'(t)$

$y''=v''(t)y_1(t)+v'(t)y_1'(t)+ v'(t)y_1'(t)+v(t)y_1''(t)$

$v''y_1+(2y_1'+py_1)v'+(\underbrace{\cancel{y_1''+py'+qy_1}}_{0})v=0$

$$v''y_1+(2y_1'+py_1)v'=0$$

bulunur. <u>Bulunan denklem v' ne göre 1.mertebeden diferansiyel denklemdir.</u> Dolayısıyla <u>1.mertebeden lineer diferansiyel denklem</u> veya <u>değişkenlere ayrılabilir tipte diferansiyel denklem</u> haline getirilerek çözülür.

Burada v, v' integre edilerek bulunur.

Bu metodta orjinal diferansiyel denklem y ye göre 2. Mertebeden olduğu halde $y=v(t)y_1(t)$ ile v' ne göre 1. Mertebeden diferansiyel denkleme geçilmektedir, bu nedenle bu metoda ***'Mertebe Düşürme Metodu'*** denir.

Örnek:

1) $\mathbf{2t^2y''+3ty'-y=0}$ diferansiyel denklemin bir çözümü $\mathbf{y_1(t)=t^{-1}}$ olduğuna göre lineer bağımsız ikinci bir çözüm bulunuz.

$y=v(t)y_1(t)$ ile $\qquad$ $\mathbf{y=vt^{-1}}$ $\quad$ **(1)**

$\mathbf{y=vt^{-1}}$
$\mathbf{y'=v't^{-1}-vt^{-2}}$ $\qquad$ $\mathbf{2t^2y''+3ty'-y=0}$ **yerlerine konarak**
$\mathbf{y''=v''t^{-1}-2v't^{-2}+2vt^{-3}}$

$\mathbf{2t^2(v''t^{-1}-2v't^{-2}+2vt^{-3})+3t(v't^{-1}-vt^{-2})-vt^{-1}=0}$
$\mathbf{2tv''-4v'+4vt^{-1}+3v'-3vt^{-1}-vt^{-1}=0}$
$\mathbf{2tv''-v'+(\cancel{4t^{-1}-3t^{-1}-t^{-1}})=0}$ $\qquad$ $\mathbf{2tv''-v'=0}$ **elde edilir.**

$\mathbf{2tv''-v'=0}$ $\qquad$ $\mathbf{2tv''=v'}$ $\qquad$ $\dfrac{v''}{v'}=\dfrac{1}{2t}$ **integral alınarak**

$\int\dfrac{v''}{v'}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t}dt$ $\qquad$ $\mathbf{\ln v'=\frac{1}{2}\ln t+\ln c}$

$\mathbf{\ln v'-\ln c=\frac{1}{2}\ln t}$
$\mathbf{\ln(v'/c)=\ln t^{1/2}}$
$\boxed{\mathbf{v'=ct^{1/2}}}$ $\qquad$ $\mathbf{v'=dv/dt}$ **idi**

integral alınarak v bulunur, yani

$\mathbf{dv/dt=ct^{1/2}}$ $\qquad$ $\mathbf{dv=ct^{1/2}dt}$ $\qquad$ $\mathbf{v=2/3\,ct^{3/2}+k}$ $\qquad$ **(2)**
(2) (1) de yerine konursa $\mathbf{y=vt^{-1}}$ **ile çözüm**

$$\mathbf{y=2/3\,ct^{1/2}+k\,t^{-1}} \qquad \mathbf{(3)}$$

elde edilir. Burada c ve k keyfi sabitlerdir. (3) de 2. terim $y_1(t)$ nin katı, oysa ilk terim y'nin lineer bağımsız çözümünü verir. İlk terimin katsayısını (2/3 c) göz önüne almazsak $y_2(t)=t^{1/2}$olur.

3.6. HOMOJEN OLMAYAN DENKLEMLER VE BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

$$\mathbf{L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)} \qquad \mathbf{(1)}$$

tipindeki denklemlerin çözümleri incelenecektir.

Teorem 3.6.1

Eğer Y_1 ve Y_2 homojen olmayan (sağ yanlı) denklemin iki çözümü ise, bunların farkı da $(Y_1 - Y_2)$, **$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0$ homojen diferansiyel denklemin çözümüdür.**

Eğer y_1 ve y_2 (1) denkleminin çözümlerinin temel cümlesi ise c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $Y_1(t)-Y_2(t)= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ sağlanır.

Teorem 3.6.2

Homojen olmayan (1) diferansiyel denkleminin çözümü, y_1 ve y_2 **homojen diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi,** c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve Y(t) homojen olmayan diferansiyel denklemin özel çözümü olmak üzere genel çözüm;

$$\mathbf{y=\phi(t)= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+Y(t)} \qquad (2)$$

$$\mathbf{y_{genel}= y_{homojen}+y_{özel}}$$

dir.

BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Bu yöntem homojen olmayan sağ yanlı diferansiyel denklemin polinom,üstel fonksiyon trigonometrik fonksiyon veya bu fonksiyonların çarpımı şeklinde olması durumunda uygulanır.

ÖZEL ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI:

Ay''+By'+Cy= f(x) de

1.) ***f(x) in k. Dereceden x in bir tam çok terimlisi olması durumu***
(polinom ise)

$y_{özel}$ çözümü

- **C≠0 ise*(y li ifade var ise) f(x) ile aynı dereceden bir tam çok terimli yani***;
(0 karakteristik denklemin kökü değilse)
$$\mathbf{y_{özel}=Ax^2+Bx+C}$$

- **C=0 , B≠0 ise** f(x) ile aynı dereceden bir tam çok terimlinin x ile çarpımı
(0 karakteristik denklemin basit kökü ise)
$$\mathbf{y_{özel}=x(Ax^2+Bx+C)}$$
şeklindedir.

- **C=0 , B=0 ise (0 karakteristik denklemin 2 katlı kökü ise)**

$$\mathbf{y_{özel}=x^2(Ax^2+Bx+C)}$$

ÖRNEK:

$y''-3y'=2x^2-5x+3$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm

önce homojen çözüm yapılır ***(*** $y''-3y'=0$)

$y''=r^2$

$y'=r$ ***ile*** $r^2-3r=0$ ***(karakteristik denklem) yardımıyla kökler belirlenir***

$r(r-3)=0$ $r_1=0$ $r_2=3$ ***iki reel kök***

$$y_{homojen}=c_1e^{r1x}+c_2e^{r2x}=c_1+c_2e^{3x}$$

Özel çözüm için, *0 karakteristik denklemin basit kökü olduğundan*

$$y_{özel}=x(Ax^2+Bx+C) \text{ seçilir,}$$

buradan verilen dif. denkleme bağlı olarak türevler alınarak

$y''-3y'=2x^2-5x+3$ de yerine konularak (A,B,C*)* katsayıları belirlenir.

$y_{özel}=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$

$y'_{özel}=3Ax^2+2Bx+C$

$y''_{özel}=6Ax+2B$

$6Ax+2B-3(3Ax^2+2Bx+C)=2x^2-5x+3$

$6Ax+2B-9Ax^2-6Bx-3C=2x^2-5x+3$

$-9Ax^2=2x^2$ $A=-2/9$

$(6A-6B)x=-5$ $B=11/18$ $y_{özel}=-2/9\,x^3+11/18\,x^2--16/27x$

$2b-3c=3$ $c=-16/27$

$$y_{genel}=y_{özel}+y_{homojen}$$

$$y_{genel}=c_1+c_2e^{3x}-2/9\,x^3+11/18\,x^2-16/27x$$

2) $y''+7y'=x^2+1$ **diferansiyel denklemi çözünüz.**

$y''=r^2$

$y'=r$ yazılarak $r^2+7r=0$ karakteristik denklemden

$y=1$

$r_1=0$ $r_2=-7$ **2 farklı reel kök**

$$y_{\hom ojen}=c_1+c_2e^{-7x}$$

(x^2+1) için özel çözüm;

0 karakteristik denklemin basit bir kökü olduğundan

$$y_{özel} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$
$$y'_{özel} = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad 21Ax^2 = x^2 \rightarrow A = 1/21$$
$$y''_{özel2} = 6Ax + 2B$$

6A+14B=0
2B+7C=1 den B=-1/49 , C=51/343

$$y_{özel} = x(\frac{1}{21}x^2 - \frac{1}{49}x + \frac{51}{343})$$

$$y_{genel} = y_h + y_{özel}$$

$$y_{genel} = c_1 + c_2e^{-7x} + x(\frac{1}{21}x^2 - \frac{1}{49}x + \frac{51}{343})$$

bulunur.

Ay''+By'+Cy= f(x) diferansiyel denkleminde

- ***f(x) in $Ae^{\alpha x}$ şeklinde üstel fonksiyon olması durumu***

$y_{özel}$ özel çözüm:

- *α karakteristik denklemin bir kökü değilse*

$$y_{özel}=Ae^{\alpha x}$$

- *α karakteristik denklemin basit bir kökü ise*

$$y_{özel}=Axe^{\alpha x}$$

- *α karakteristik denklemin iki katlı bir kökü ise*

$$y_{özel}=A\,x^2\,e^{\alpha x}$$

şeklindedir.

örnekler

1) ***$y''+4y'+8y=e^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.***
2) ***$y''+4y'+4y= e^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.***
3) ***$y''-5y'+6y=5e^{2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.***

<u>Örnek2 in çözümü</u>

$y''+4y'+4y= e^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$r^2+4r+4=0$ karakteristik denklemden
$(r+2)^2=0$ $r= -2$ iki katlı

$$y_{homogen}=(c_1+c_2x)\, e^{-2x}$$

$e^{-\alpha t}$ $\alpha=-2$ karakteristik denklemin <u>2 katlı kökü</u> olduğundan

$$y_{özel}=Ax^2\, e^{-2x}$$

seçilir.

$y'= 2Ax\, e^{-2x}-2Ax^2\, e^{-2x}$

$y''= 2A\, e^{-2x} -4Ax\, e^{-2x}-4Ax\, e^{-2x}+4Ax^2\, e^{-2x}$

$$2A\, e^{-2x} -8Ax\, \cancel{e^{-2x}}+4Ax^2\, \cancel{e^{-2x}}+8Ax\, e^{-2x}\cancel{-8Ax^2}\, e^{-2x}+4\, \cancel{Ax^2}\, e^{-2x}= \cancel{e^{-2x}}$$

$2A\, e^{-2x}= e^{-2x}$ $\qquad$ ***$A=1/2$***

özel çözüm $\qquad$ ***$y_{özel}=1/2(x^2\, e^{-2x})$ olur.***

genel çözüm $y_{genel}=y_{homogen}+y_{özel}$ ile

$$y_{genel}=(c_1+c_2x)\, e^{-2x}+1/2(x^2\, e^{-2x})$$

olur.

2) $y'' + 7y' + 12y = e^{-3x}$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm:

$y'' + 7y' + 12y = 0$ **ile homojen çözüm yapılarak**

$y'' = r^2$
$y' = r$ yazılarak $r^2 + 7r + 12 = 0$ karakteristik denklemden
$y = 1$

$r^2 + 7r + 12 = 0$ $\quad r_1 = -3$ $\quad r_2 = -4$ **2 farklı reel kök**

$$y_{\hom ojen} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$$

bulunur.

e^{-3x} için özel çözüm

üstel fonksiyonda x'in katsayısı (-3), karakteristik denklemin kökü olduğundan

Ae^{-3x} seçilerek

$$y_{özel} = Axe^{-3x}$$
$$y'_{özel} = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$$
$$y''_{özel} = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$$ diferansiyel denklemde yerlerine konularak

$Ae^{-3x} = e^{-3x}$ den A=1 ve

$$y_{özel} = xe^{-3x}$$

bulunur.

$$y_{genel} = y_h + y_{özel}$$

$$y_{genel} = c_1e^{-3x} + c_2e^{-4x} + xe^{-3x}$$

elde edilir.

3. f(x) TRİGONOMETRİK FONKSİYON İSE

ay''+by'+cy= M cos(βx), Nsin(βx)

$y_{özel}$ özel çözüm:

- *iβ karakteristik denklemin kökü değilse*

  $y_{özel}$= Acosβx+Bsinβx
- *iβ karakteristik denklemin kökü ise veya $c=a\beta^2$, b=0 ise*

$y_{özel}$= x (Acospx+Bsinpx)

Örnek

y''+2y'-3y= 8sin4x diferansiyel denklemini çözünüz.

$r^2+2r-3=0$ (karakteristik denklem)

$\Delta=b^2-4ac>0$ ***farklı iki kök***

$r_1=1$ $r_2=-3$ farklı iki kök

$$y_{homojen}=c_1e^{r1x}+c_2e^{r2x} = c_1^{x}+ c_2e^{-3x}$$

<u>özel çözüm için</u> 8sin4x de(i4) karakteristik denklemin kökü olmadığından

$y_{özel}$= Acos4x+Bsin4x

seçilerek türevler alınır ve (y''+2y'-3y= 8sin4x) de yerlerine konularak A ve B katsayıları belirlenir.

$y_{özel}$= Acos4x+Bsin4x
$y'_{özel}$=- 4Asin4x+4Bcos4x
$y''_{özel}$= -16Acos4x-16Bsin4x

-16Acos4x-16Bsin4x-8Asin4x+8Bcos4x-3 Acos4x-3Bsin4x= 8sin4x

sin4x(-19B-8A)= 8sin4x
cos4x(-19A+8B)=0
-19B-8A =8
8B-19A=0 B=-152/425 A= -64/425bulunur.

özel çözüm:

$$y_{özel}= A\cos 4x+B\sin 4x$$

$$y_{özel}=-64/425\cos 4x-152/425\sin 4x$$

olur. genel çözüm

$$y_{genel}= y_{homojen}+ y_{özel} = c_1^x+ c_2e^{-3x} -64/425\cos 4x-152/425\sin 4x$$

elde edilir.
4) $f(x)=e^{\alpha x}f(x)$ şeklinde ise

$$ay''+by'+cy)=e^{\alpha x}f(x)$$

α karakteristik denklemin kökü değilse

$e^{\alpha x}[Ax^n+Bx^{n-1}+...+Z_n]$ şeklinde seçilerek çözüm aranır.

Örnek:

$y''+4y'+4y=x^2 e^{3x}$ diferansiyel denklemi çözünüz.

çözüm:

$r^2+4r+4=0$ karakteristik denklemden
$(r+2)^2=0$ r= -2 iki katlı

$$y_{homogen}=(c_1+c_2x)\, e^{-2x} \qquad (1)$$

elde edilir. α= 3 karakteristik denklemin kökü olmadığından

özel çözüm için:

$$y_{özel}=e^{3x} (Ax^2+Bx+C) \qquad (2)$$

seçilerek y' ve y'' türevleri alınıp verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak A,B ve C katsayıları belirlenir bulunan değerler özel çözümde yerlerine konur. Diferansiyel denklemin genel çözümü homojen çözümle özel çözümün toplamına eşittir.

$$y'= 3 e^{3x} (Ax^2+Bx+C)+(2Ax+B) e^{3x}$$

$$y''= 9 e^{3x} (Ax^2+Bx+C)+3 e^{3x}(2Ax+B) +3 e^{3x}(2Ax+B) +2Ae^{3x}$$

$[25\,Ax^2+(20A+25B)x+2A+10B+25C]\,e^{3x}= x^2\,e^{3x}$

$25A=1$ $\quad$ $20A+25B=0$, $\quad$ $2A+10B+25C=0$ $\quad$ ile

$A=1/25$ $\quad$ $B=-20/625$ $\quad$ $C=6/625$

. A,B ve C değeri (2) de yerine konarak özel çözüm elde edilir.

$$y_{özel}=(1/25\,x^2-20/625x+6/625)e^{3x}$$

genel çözüm:

$$y_{genel}=y_{homogen}+y_{özel} \quad \text{ile}$$

$$y_{genel}=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}+(1/25\,x^2+-20/625x+6/625)e^{3x}$$

Örnek

$y''-4y'=e^{2x}\sin 2x$ dif. denklemini çözünüz.

çözüm:

$r^2-4r=0$ karakteristik denklemden
$r(r-4)=0$ $\quad r_1=0$ $\quad r_2=4$

$$y_{homogen}=c_1+c_2\,e^{4x} \qquad (1)$$

elde edilir.

özel çözüm için $e^{\alpha t}\,\mathrm{Sin}\beta t$ da $(\alpha+i\beta)$ yani $e^{2x}\sin 2x$ de $(2+i2)$karakteristik denklemin kökü olmadığından

$$y_{özel}= e^{2x}\,(A\cos 2x+B\sin 2x) \qquad (2)$$

seçilerek ve y’,y’’ alınarak verilen dif. denklemde yerine konur.

$y'=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)\,e^{2x}+2\,e^{2x}\,(A\cos 2x+B\sin 2x)$

$y''=(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)\,e^{2x}+4\,e^{2x}\,(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+4\,e^{2x}\,(A\cos 2x+B\sin 2x)$

y’’ ve y’ verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak;

$[-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)\,]e^{2x}=e^{2x}\sin 2x$

$(-8A)\cos 2x+(-8B)\sin 2x= \sin 2x$

$$-8B=1 \qquad -8A=0$$

B= -1/8 A=0

Böylece (2) den:

$$y_{özel}=(-1/8\sin 2x)e^{2x} \qquad (2)$$

genel çözüm

$$y_{genel}=c_1+c_2\, e^{4x}+(-1/8\sin 2x)e^{2x} \text{ bulunur.}$$

5 g(t)= f(x)+h(x) (birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde)ise özel çözüm bu fonksiyonların her birine karşılık gelen özel çözümlerin toplamına eşittir.

Özel çözümlerin seçimi için

$g(t)$	Karakteristik denklemin kökü değilse	$y_{özel}$
c(sabit)	0	A
t^n(polinom)	0	$At^n+Bt^{n-1}+....+Z$
$e^{\alpha t}$(üstel)	α	$A\, e^{\alpha t}$
$Sin\beta t$	$i\beta$	$ACos\beta t+BSin\beta t$
$Cos\gamma t$	$i\gamma$	$Acos\gamma t+Bsin\gamma t$
$t^n\, e^{\alpha t}$	α	$e^{\alpha t}[At^n+Bt^{n-1}+...+Z\,]$
$e^{\alpha t}\, Sin\beta t$	$\alpha+ i\beta$	$e^{\alpha t}\,(ACos\beta t+BSin\beta t)$
$e^{\alpha t}\, Cos\gamma t$	$\alpha+ i\gamma$	$e^{\alpha t}\,(ACos\gamma t+BSin\gamma t)$
$t^n\, e^{\alpha t}\, Sin\beta t$	$\alpha+ i\beta$	$e^{\alpha t}Cos\beta t(A_0t^n+A_1t^{n-1}..+A_n)+$ $e^{\alpha t}Sin\beta t(B_0t^n+B_1t^{n-1}..+B_n)$
$t^n\, e^{\alpha t}\, Cos\gamma t$	$\alpha+ i\gamma$	$e^{\alpha t}Cos\gamma t(A_0t^n+A_1t^{n-1}..+A_n)+$ $e^{\alpha t}Sin\gamma t(B_0t^n+B_1t^{n-1}..+B_n)$

Eğer tablonun 2.kolonundakiler karakteristik denklemin kökü iseler bu hale 'Rönasans hali' denir ve tablo değişiklikler yapıldıktan sonra kullanılır. Eğer 2. Kolondakiler karakteristik denklemin 's' katlı kökü iseler bu durumda tablonun 3. kolonundaki fonksiyonlar 't^s'ile çarpılırlar. Özel çözüm ondan sonra araştırılır.

Örnek 1:

$y''-7y'+10y=6t+8e^{2t}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

önce denklem 0 a eşitlenerek homojen kısmın çözümü bulunur.

$r^2-7r+10=0$

$(r-2)(r-5)=0 \quad r_1=2\ ,\ r_2=5$

$$y_{homogen}= c_1e^{2t}+c_2e^{5t}$$

Eşitliğin sağ tarafı doğru denklemi ve üstel fonksiyonun toplamı olduğundan özel çözüm olarak doğru denklemi ve üstel fonksiyon için ayrı ayrı özel çözümler seçilir.

$y_{özel1}=At+B$ seçilerek türevler(y' ve y'') alınır, verilen denklemde yerlerine konularak katsayılar hesaplanır.

$y' = A_0$ $y''=0$

$-7A+10(At+B)=6t$ $10At+10B-7A=6t$

$10At=6t=$ $A= 6/10=3/5$
$10B--7A_0=0$ $B=21/50$

$$y_{özel1}=3/5t+21/50$$

$y_{özel2}=tDe^{2t}$

$y'=2tDe^{2t}+De^{2t}$

$y''=2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}$

$2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}-7(2tDe^{2t}+De^{2t})+10tDe^{2t}=8e^{2t}$
$4De^{2t}=8e^{2t}$
$D=2$

$$y_{özel2}=tDe^{2t}=2te^{2t}$$

genel çözüm;

$$y_{genel}= y_{homogen}+y_{özel}$$

$$\boldsymbol{y_{genel}= c_1e^{2t}+c_2e^{5t}+2te^{2t}+3/5t+21/50}$$

ÖRNEK 2:

$y''+y'-2y=x+\sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm:

$$\boldsymbol{y_{genel}= c_1e^{-2x}+c_2e^{x}-1/2x-1/4-1/10(3\sin x+\cos x)}$$

3.7. PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ METODU

y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) şeklindeki diferansiyel denklemin homojen çözümdeki
c_1 ve c_2 sabitlerinin $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonları değiştirilmesinden dolayı 'Parametrelerin değişimi' metodu denir. Yani

$y_{homojen} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

olur ve dolayısıyla çözümün bulunması $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonlarının belirlenmesine dönüşür. (Burada $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ homojen denklemin çözümleridir.)

$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$
$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t) + u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t)$

$u_1'(t)$ ve $u_2'(t)$ yi içeren terimler toplamı sıfır kabul edilirse;

$$\boxed{u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0} \qquad (1)$$

$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t)$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$y'' = u_1(t)y_1''(t) + u_2(t)y_2''(t) + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t)$

olur. y,y' vey'' y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) denkleminde yerlerine konularak y_1 ve $y_2$nin denklemin çözümleri olduğuda dikkate alınarak

$$\boxed{u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t)} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) yardımıyla u_1' ve u_2' çözülür, integralleri alınarak u_1 ve u_2 belirlenir

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t} \qquad u_2'(t) = \frac{y_1(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t} \qquad (3)$$

$W(y_1,y_2)t$, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin wronskiani $y_1(t)$ ile $y_2(t)$ çözümlerinin temel cümlesi olduğundan $W(y_1,y_2)t \neq 0$ dır. (3) nolu denklemin integrali alınarak

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t}dt + c_1 \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t}dt + c_2$$

fonksiyonları bulunur ve $y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ de yerlerine konarak ikinci taraflı denklemin çözümü elde edilmiş olur. Bu metodu aşağıdaki teoremle Teorem 3.7.1 ile özetleyebiliriz.

Teorem 3.7.1

Eğer p,q ve G fonksiyonları bir I açık aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve y_1 ve y_2 fonksiyonları **$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$** diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümleri iseler, **$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ denkleminin özel çözümü**

$$y_{özel}=-y_1(t)\int \frac{y_2(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t}\,dt+y_2(t)\int \frac{y_1(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t}\,dt$$

$y_{özel}=y_1(t)u_1(t)+y_2(t)u_2(t)$ ve genel çözüm

$y_{genel}=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_{özel}$

ÖRNEK:

$y''+y=\tan t$ diferansiyel denklemini sabitlerin değişimi metodu ile çözünüz.

Çözüm:

$y''+y=0$ denkleminin karakteristik denklemi $r^2+1=0$ ve kökleri $r=\pm i$ olup genel çözümü **$y=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$ den**

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t$$

$y=u_1\cos t+u_2\sin t$ yazılarak Sabitin değişimi kuralını uygularsak

$y'=-u_1\sin t+u_2\cos t+u_1'\cos t+u_2'\sin t$

olup bütünler şart olarak

$$u_1'\cos t+u_2'\sin t=0$$

seçilirse

$$y'=-u_1\sin t+u_2\cos t$$

olur. Buna göre

$$y''=-u_1\cos t-u_2\sin t+-u_1'\sin t+u_2'\cos t$$

olup y, y', y'' nün ifadeleri verilen denklemde yerine konulursa

$-u_1\cos t-u_2\sin t+-u_1'\sin t+u_2'\cos t+u_1\cos t+u_2\sin t=\tan t$

$-u_1'\sin t+u_2'\cos t=\tan t$

elde edilir.

$u_1'\cos t+u_2'\sin t=0$ **/*Sint**

$-u_1'\sin t+u_2'\cos t=\tan t$ **/*-Cost ile çarparsak**

$u_2'=\sin t$

$u_1'=-\sin^2 t/\cos t=(\cos^2 t-1)/\cos t=\cos t-\sec t$

Hatırlatma: $\int(1/\cos at)dt = \int \sec at\, dt = 1/a \ln(\sec at + \tan at)$
Bunlardan

$u_1 = \text{Sint} - \text{Ln}(\text{Sect} + \text{tant}) + K_1$
$u_2 = -\text{Cost} + K_2$

elde edilir. u_1, u_2 **nin bu ifadeleri**

$y = u_1\text{Cost} + u_2\text{Sint}$

ifadesinde yerlerine konulursa verilen denklemin genel çözümü

$$y_{genel} = K_1\text{Cost} + K_2\text{Sint} - \text{Cost Ln}(\text{Sect} + \text{tant})$$

olur.

II.Yol: ***Wronski determinantı'***

y''+y=0 denkleminin karakteristik denklemi $r^2+1=0$ ve kökleri $r=\pm i$ olup genel çözümü
$y = e^{\alpha t}(c_1\text{Cos}\beta t + c_2\text{Sin}\beta t)$ **den**

$$y = c_1\text{Cost} + c_2\text{Sint}$$

idi. y= $c_1y_1 + c_2y_2$ formunda y_1= **Cost** ,y_2= **Sint olduğundan** $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots. y_n$ **fonksiyonları ile oluşturulan**

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & . & . & . & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & y_3^{'} & . & . & . & . & y_n^{'} \\ y_1^{''} & y_2^{''} & y_3^{''} & . & . & . & . & y_n^{''} \;.. \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & . & . & . & . & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad u^{'} = \begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \\ . \\ u_n^{'} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ \dfrac{f(t)}{t^n} \end{pmatrix}$$

determinantı **'*Wronski determinantı'*** olarak isimlendirilir. $\underline{W}\,\underline{u}^{'} = \underline{\varepsilon}_n$

sistemi ile u vektörünün bileşenleri (u_1, u_2, u_3.......)bulunur, ve

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$$ **ile genel çözüme ulaşılır.**

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

u_1' Cost+u_2' Sint=0 /*Sint
-u_1' Sint+u_2' Cost=tant /*-Cost ile çarparsak

$u_2' =$ Sint
$u_1' =- Sin^2t/Cost = (Cos^2t-1)/Cost =$ Cost-Sect

Hatırlatma: **∫(1/Cos *at*)dt =∫Sec *at* dt=1/a Ln(Sec *at*+Tan *at*)**
Bunlardan

u_1=Sint-Ln(Sect+tant)+K_1
u_2=-Cost+K_2

elde edilir. u_1, u_2 nin bu ifadeleri

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \textbf{ ile yani Y=} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sint - Ln(Sect + tant) + K1} \\ \text{- Cost + K2} \end{pmatrix}$$

Y_{genel}= K_1Cost+K_2Sint-Cost Ln(Sect+tant)

olur.

III.YOL (Kramer metodu)

y= u_1y_1(t)+u_2 y_2(t)= u_1Cost+u_2Sint=

u_1' Cost+u_2' Sint=0
-u_1' Sint+u_2' Cost=tant

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ Q(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = -\frac{y_2(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & Q(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)t}$$

$$\textbf{w(y}_1\textbf{,y}_2\textbf{)(t)=} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathrm{u}_1(\mathrm{t}) = -\int \frac{\mathrm{y}_2(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\mathrm{dt} = -\int \frac{\text{sint tant}}{1}\mathrm{dt} = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt$$

$$= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}dt = \int (\cos t - \frac{1}{\cos t})dt = \sin t - \ln(\sec t + \tan t) + K_1$$

$$\mathrm{u}_2(\mathrm{t}) = -\int \frac{\mathrm{y}_1(t)Q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\mathrm{dt} = \int \frac{\text{cost tant}}{1}\mathrm{dt} = \int \sin t dt = -\cos t + K_2$$

u_1, u_2 nin bu ifadeleri y= u_1Cost+u_2Sint yerlerine konularak

y_{genel}= K_1Cost+K_2Sint-Cost Ln(Sect+tant)

olur.

ÖRNEK 2:

$x^2y''+4xy'+2y=2\ln x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

($x^2y''+Axy'+By= f(x)$) tipinde bir diferansiyel denklem. Dolayısıyla euler dif.denklemi)

$y_{homojen}= x^r$

$y'_{homojen}=rx^{r-1}$ $\longrightarrow$ $r(r-1)x^r+4rx^r+2x^r=0$ $\quad$ $x^r(r^2-r+4r+2)=0$

$y''_{homojen}=r(r-1)x^{r-2}$

$r^2+3r+2=0$ ile $\quad r_1=-1 \quad r_2=-2$ iki reel kök olduğundan

$$y_{homojen}= c_1x^{r1}+c_2x^{r2}$$

idi.

$$y_{homojen}= c_1x^{-1}+c_2x^{-2}= u_1x^{-1}+u_2x^{-2}$$

yazılarak . $\underline{W}\,\underline{u}' = \underline{\varepsilon}_n$ **ile**

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{-2}{x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\ln x}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x}u_1' + \frac{1}{x^2}u_2' = 0$$

$$-\frac{1}{x^2}u_1' - \frac{2}{x^3}u_2' = \frac{2\ln x}{x^2} \qquad u_2'=-2x\ln x \qquad u_1'=2\ln x$$

Buradan ($\int \ln(ax)dx=x\ln(ax)-x$ ve $\int x\ln(ax)dx=(x^2/2)\ln(ax)-x^2/4$)

$u_1=2(x\ln x-x)+K_1$

$u_2= -x^2\ln x+x^2/2+K_2$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(x\ln x - x) + K1 \\ -x^2\ln x + x^2/2 + K2 \end{pmatrix}$$

$$Y_{GENEL}=K_1/x+K_2/x^2+\ln x-3/2$$

elde edilir.

Ödev

1) $y''-6y'+9y= e^{3x}/x^2$ **denklemini sabitlerin değişimi metodu ile çözünüz.**

Çözüm: $\quad y_{genel}=K_1 e^{3x}+ K_2x e^{3x}- e^{3x} -e^{3x}\ln x$

***2) y''+y= sinx* denklemini sabitlerin değişimi metodu ile çözünüz**

Çözüm: $y_{genel}=K_1 \cos x+ K_2\sin x- x/2 \cos x-((\cos^2 x)/2) \sin x-1/4 \sin 2x\cos x$

1) $y''-6y'+9y= e^{3x}/x^2$

$r^2-6r+9=0$ ($r_1=r_2=r=-b/2a= 3$) 2 katlı kök

$$y_{homojen}=(c_1+c_2x)e^{3x}=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$$

$$y_{homojen}= (u_1+u_2x)e^{3x}$$

$$w=\begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x} \end{pmatrix}\begin{matrix} y \\ y' \end{matrix} \qquad w.u'=\varepsilon_n \qquad \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{3x}}{x^2} \end{pmatrix}$$

$u'_1e^{3x}+u'_2xe^{3x}=0$
$3u'_1e^{3x}+u'_2(3xe^{3x}+e^{3x})=e^{3x}/x^2$

eşitlikleri ile

$u'_2=1/x^2$ $u_2=-1/x+K_2$

$$Y=Wc=\begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\ln x+K_1 \\ -\dfrac{1}{x}+K_2 \end{pmatrix}$$

$u'_1=-1/x$ $u_1=-\ln x+K_1$

elde edilir. u_1 ve u_2 nin karşılıkları ($y=(u_1+u_2x)e^{3x}$) de yerlerine konularak,

$$y_{genel}=(K_1+K_2x)e^{3x}-e^{3x}-e^{3x}\ln x$$

bulunur.

***2) y''+y= sinx* denklemini sabitlerin değişimi metodu ile çözünüz**

y''+y=0 denkleminin karakteristik denklemi $r^2+1=0$ ve kökleri $r=\pm i$ olup genel çözümü
$y= e^{\alpha t} (c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ den

$$y= c_1\cos x+c_2\sin x$$

$W.u'=\varepsilon_n$ sistemini yazarsak

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$u_1' \cos x+u_2' \sin x=0$ /*Sinx
$-u_1' \sin x+u_2' \cos x=\sin x$ /*Cosx ile çarparsak

$u_2' =$ **Sinx cosx** $u_2=-(\cos^2x)/2+K_2$
$u_1' =$ **-Sin^{2}x** $u_1= -(x/2-(\sin 2x)/4)+K_1$

Hatırlatma: $\int \sin^2x dx= x/2-(\sin 2x)/4$

u_1, u_2 ($y= u_1\text{Cos}x+u_2\text{Sin}x$) yerlerine konarak yani($Y=W.u$) ile

$$y_{genel}=K_1\cos x+K_2\sin x- (x/2)\cos x-((\cos^2x)/2)\sin x-(\sin 2x*\cos x)/4$$

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sabitlerin değişimi kuralı ile çözünüz.

1- $y''-y= 1/\cos x.$ ($y= c_1 \cos x +c_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$)

2- $y''+y=\cot an x$ ($y= c_1 \cos x +c_2\sin x+\sin x\ln\tan(x/2)$)

4.YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. n. Mertebeden Lineer Denklemlerin Genel Teorisi

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...............+P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+P_n(t)y=G(t) \quad (1)$$

şeklindeki bir denklem ‘***n. mertebeden lineer denklem’*** adını alır. Burada P_0, P_1,........,P_n ve G fonksiyonları bir I açık aralığında $\alpha<t<\beta$ reel değerli , sürekli fonksiyonlar ve $P_0(t)$ ın bu aralıkta sıfırdan farklı olduğu kabul edilerek (1) denklemi $P_0(t)$ ile bölünürse

$$L[y]=\frac{d^n y}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...............+p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+p_n(t)y=g(t) \quad (2)$$

elde edilir.

(2) denklemi n. mertebeden olduğundan y’nin t’ye bağlı n. mertebeden türevlerini içerir. Bu nedenle tek çözümün elde edilebilmesi için, n tane başlangıç koşulu verilmelidir.

Buradan $t_0 \varepsilon$ I ve y_0, y_0',.......,$y_o^{(n-1)}$ belli reel sabitler olmak üzere, n tane başlangıç koşulu

$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0',...........,y_0^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1.
Eğer p_1, p_2,........,p_n ve g fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli ise, (2) diferansiyel denklemini ve (3) başlangıç koşullarını I da sağlayan bir tek $y=\phi(t)$ çözümü vardır.

HOMOJEN DENKLEM

n. mertebeden homojen diferansiyel denklem

$L[y]=y^n+p_1(t)y^{(n-1)}+.............+p_{(n-1)}(t)y'+p_n(t)y=0$ (4)

şeklindedir. Eğer $y_1,y_2,...........,y_n$ fonksiyonları (4) denkleminin çözümleri ve $c_1,c_2,...........,c_n$ ler keyfi sabitler ise;

$y=c_1y_1(t)+ c_2y_2(t)+.......................+ c_ny_n(t)$ (5)
lineer kombinasyonu da bir çözümdür. (5) no lu denklemin (4) ün çözümü olduğu teorem 4.1.2 ile verilmektedir.
Teorem 4.1.2. Eğer $p_1, p_2,........,p_n$ ler fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli ve $y_1,y_2,...........,y_n$ fonksiyonları (4) denkleminin çözümleri ve en az bir $t_0\varepsilon$ I noktasında $W(y_1,y_2,...........,y_n)(t)\neq 0$ ise (4) diferansiyel denkleminin her çözümü $y_1,y_2,...........,y_n$ lerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.
(4) denkleminin $y_1,y_2,...........,y_n$ çözümlerinin $W(y_1,y_2,...........,y_n)(t)\neq 0$ ise, $y_1,y_2,...........,y_n$ çözümlerine ***'çözümlerin temel cümlesi'*** denir.

Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları $f_1,f_2,\quad ,f_n$ fonksiyonları için aşağıdaki gibidir.

Eğer her t elemanı I için hepsi birden sıfır olmayan $k_1,k_2,...........,k_n$ sabitleri için

$$k_1f_1+k_2f_2+...........+k_nf_n=0$$

sağlanıyorsa $f_1,f_2,\quad ,f_n$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir. Aksi takdirde lineer bağımsızdır.

Eğer $y_1,y_2,...........,y_n$ fonksiyonları (4) denkleminin çözümleri ise lineer bağımsız olmaları için bir $t_0\varepsilon$ I noktasında gerek ve yeter koşul $W(y_1,y_2,...........,y_n)(t_0)\neq 0$ olmasıdır.

HOMOJEN OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$L[y]=y^n+p_1(t)y^{(n-1)}+.............+p_{(n-1)}(t)y'+p_n(t)y=g(t)$ (1)

şeklindeki denklem ikinci taraflı veya homojen olmayan denklem adını alır. Eğer Y_1 ve Y_2 homojen olmayan diferansiyel denklemin iki çözümü ise onların farkı da diferansiyel denklemin çözümüdür.

$L[Y_1-Y_2]= L[Y_1](t)- L[Y_2](t)=g(t)-g(t)=0$

Bu nedenle homojen olmayan (1) denkleminin iki çözümünün farkı homojen diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü
$y_{genel}= y=c_1y_1(t)+ c_2y_2(t)+.......................+ c_ny_n(t)+y_{özel}$
şeklinde yazılabilir.

Mertebe Düşürme Yöntemi: Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerde mertebe düşürme metodu ile yüksek mertebeden diferansiyel denklem daha düşük mertebeden diferansiyel denkleme getirilerek çözüm aranır. Ancak bu metod için en az bir tane çözümün bilinmelidir. Çözüm $y_1(t)$ ise $y=v(t)\,y_1(t)$ oluşturulur. ve $v'(t)$ ye bağlı daha düşük mertebeden diferansiyel denkleme geçilir. (ödev sayfa 206(11-16,18))

4.2 SABİT KATSAYILI YÜKSEK MERTEBEDEN HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$a_0, a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n$'ler reel sabitler olmak üzere

$$L[y]= a_0y^n+a_1y^{(n-1)}+\dots\dots\dots+a_{(n-1)}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

diferansiyel denklemi gözönüne alınsın. 2. Mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemlerde olduğu gibi $y=e^{rt}$ şeklinde çözüm aranırsa,

$$L[y]= e^{rt}(a_0r^n+a_1r^{(n-1)}+\dots\dots\dots+a_{(n-1)}r+a_n)= e^{rt}Z[r] \qquad (2)$$

olur. Z[r] ye karakteristik polinom , Z[r]=0 karakteristik denklem denir.

n. dereceden bir polinomun kökleri $r_1, \dots\dots, r_n$ olsun(bazıları eşit olabilir).Dolasıyla Z[r] karakteristik polinom

$$\mathbf{Z[r] = a_0(r-r_1)(r-r_2)\dots\dots\dots(r-r_n)} \qquad (3)$$

şeklinde yazılabilir.

KÖKLER REEL VE BİRBİRİNDEN FARKLI İSE

(1) nolu denklemin n tane farklı $e^{r1t}, e^{r2t}, \dots\dots\dots, e^{rnt}$ çözümleri bulunur.

genel çözüm:

$$y_{genel}= c_1\,\mathbf{e^{r1t}} + c_2\,\mathbf{e^{r2t}} +\dots\dots\dots\dots+c_n\,\mathbf{e^{rnt}}$$

şeklindedir.

$\mathbf{a_0r^n+a_1r^{(n-1)}+\dots\dots\dots+a_{(n-1)}r+a_n=0}$ sabit katsayılı karakteristik bir polinomun **köklerinin bulunması**:
a_0 ve a_n katsayılarının çarpanları belirlenir a_n nin çarpanlarından biri p ile a_0 ın çarpanlarından biri q ile gösterilirse ve r=p/q ile denklemin kökü olmaya aday rasyonel kökler yazılır bu kökler tek tek karakteristik denklemde yerlerine konarak denklemi sağlayanlar kök olarak seçilir. Ayrıca her bulunan kökten yaralanarak bulunan çarpanla ($\mathbf{a_0r^n+a_1r^{(n-1)}+\dots\dots\dots+a_{(n-1)}r+a_n=0}$) denklemi bölünerek derecesi düşürülür.

Eğer köklerden bir kısmı kompleks ise bu kural uygulanmaz. Ancak rasyonel köklerden yararlanarak (varsa) denklemin derecesi düşürülerek, kökleri aranır.

Örnek

$y^{IV}+y^{III}-7y^{II}-y'+6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=-1$ başlangıç koşulları için çözünüz.

$y^{IV}=r^4$

$y^{III}=r^3$

$y^{II}=r^2$ $\quad$ $\mathbf{r^4+r^3-7r^2-r+6=0}$ (karakteristik denklem)

$y^{I}=r$

$y=1$

$r^4+r^3-7r^2-r+6=0$ denklemin değişmez sayısı 6 olup bunun bölenleri $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ dır. $a_0=\pm1$dir. $p/q=(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$ Bu nedenle mümkün olan rasyonel kökler $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ dır. Bunlar karakteristik denklemde yerlerine konularak test edilirse 1,-1, 2 ve -3 karakteristik denklemin kökleridir. Öyleyse genel çözüm

$r^4+r^3-7r^2-r+6/(r-1)=r^3+2r^2-5r-6$ $\qquad$ $(r-1)(r+1)(r^2+r-6)=0$

$$\mathbf{y_{genel}=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-3t}}$$

dir. Başlangıç koşulları ile

$c_1+c_2+c_3+c_4=1$
$c_1-c_2+2c_3{}^{-}3c_4=0$
$c_1+c_2+4c_3+9c_4=-2$
$c_1-c_2+8c_3{}^{-}27c_4=0$ denklemini sağlar. Bu denklemlerden

$c_1=11/8$, $c_2=5/12$, $c_3=-2/3$, $c_4=-1/8$ bulunur. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü $\quad$ $y=11/8e^{t}+5/12e^{-t}-2/3e^{2t}+-1/8e^{-3t}$
şeklinde elde edilir.

Kompleks Kökler

Eğer karakteristik denklemin kökleri kompleks ise, $a_0, a_1, a_2,\ldots\ldots,a_n$'ler reel sabitler olduklarından, kompleks kökler $\alpha\pm i\beta$ şeklinde bulunur. Kökler katlı olmamak şartıyla karakteristik denklem(polinom)

$Z(r)=\mathbf{a_0(r-r_1)(r-r_2)\ldots\ldots(r-r_n)}$ $\qquad$ **formunda yazılır.**
Burada da 2.mertebeden diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kompleks olması durumunda ele alınan yöntem uygulanır.

$$r_1=\alpha+i\beta \quad ; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$\alpha=(-b/2a)$ $\qquad$ $\beta=\sqrt{4ac-b^2}\,/\,2a$

genel çözüm: $\quad$ $\mathbf{y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)}$ $\quad$ dir.

Örnek

$y^{IV}-y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz**. $y(0)=7/2$, $y'(0)=-4$, $y''(0)=5/2$, $y'''(0)=-2$** başlangıç koşullarını sağlayan çözümü bulunuz.

$y^{IV}=r^4$
$y^{III}=r^3$
$y^{II}=r^2$ **$r^4-1=0$** , $(r^2-1)(r^2+1)=0$ (karakteristik denklem)
$y^{I}=r$ 2 farklı reel kök ve kompleks kök
$y=1$

$$y_{genel}=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

olur Başlangıç koşullarından $c_1=0$, $c_2=3$, $c_3=1/2$, $c_4=-1$ bulunur

$$y=3e^{-t}+1/2\cos t-\sin t$$

olur.

KATLI KÖKLER

n. mertebeden diferansiyel denklemine karşılık gelen çözümler,

$e^{r1t,}$ te^{r1t},t^2e^{r1t},...................,$t^{(s-1)}e^{r1t}$

şeklindedir.(s katlılığın derecesi)

Eğer kompleks kökler katlı ise çözümler
$e^{(\alpha\pm i\beta)t}$, $t\,e^{(\alpha\pm i\beta)t}$, $t^2\,e^{(\alpha\pm i\beta)t}$,.................., $t^{(s-1)}e^{(\alpha\pm i\beta)t}$ dir. Dolayısıyla lineer bağımsız çözümler

$e^{\alpha t}(\cos\beta t+\sin\beta t)$, $t\,e^{\alpha t}(\cos\beta t+\sin\beta t)$, ..., $t^{(s-1)}e^{\alpha t}(\cos\beta t+\sin\beta t)$,

Örnek:

$y^{IV}+2y''+y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y^{IV}=r^4$
$y^{III}=r^3$
$y^{II}=r^2$ **$r^4+2r^2+1=0$** , $(r^2+1)(r^2+1)=0$ (karakteristik denklem)
$y^{I}=r$ 2 katlı kompleks kök $r_1=r_2=i$, $r_3=r_4=-i$
$y=1$

$y=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)+t\,e^{\alpha t}(c_3\cos\beta t+c_4\sin\beta t)$,

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3t\cos t+c_4t\sin t$$
veya $$y=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t$$

Ödev:

1) y^{IV}+8y'''+24y''+32y'+16y=0 diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.($(r+2)^4=0$ r=-2 4 katlı kök)
2) y'''-3y''+3y'-y=0 diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. ($(r-1)(r-1)^2=0$ karakteristik denklem)

$(y=c_1e^{-t}+c_2te^t+c_3t^2e^t)$

4.3. BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Bu yöntem 2.mertebeden diferansiyel denklemlerde olduğu gibi

$L[y]= a_0y^n+a_1y^{(n-1)}+...............+a_{(n-1)}y'+a_ny=g(t)$ (1)
homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminde g(t)'nin polinom,üstel fonksiyon,sinax,cosbx veya bunların çarpımı ve ya bunların lineer kombinasyonu olması durumunda uygulanır.
Özel çözümler 2. mertebeden diferansiyel denklemlerde olduğu gibi seçilir.

g(t)	***Karakteristik denklemin kökü değilse***	***$y_{özel}$***
c(sabit)	***0***	***A***
t^n(polinom)	***0***	***$A_0t^n+A_1t^{n-1}+....+A_n$***
$e^{\alpha t}$(üstel)	α	***$A\,e^{\alpha t}$***
$Sin\beta t$	$i\beta$	***$ACos\beta t+BSin\beta t$***
$Cos\gamma t$	$i\gamma$	***$Acos\gamma t+Bsin\gamma t$***
$t^n\,e^{\alpha t}$	α	***$e^{\alpha t}[A_0t^n+A_1t^{n-1}+...+A_n]$***
$e^{\alpha t}\,Sin\beta t$	$\alpha+i\beta$	***$e^{\alpha t}\,(ACos\beta t+BSin\beta t)$***
$e^{\alpha t}\,Cos\gamma t$	$\alpha+i\gamma$	***$e^{\alpha t}\,(ACos\gamma t+BSin\gamma t)$***
$t^n\,e^{\alpha t}\,Sin\beta t$	$\alpha+i\beta$	***$e^{\alpha t}Cos\beta t(A_0t^n+A_1t^{n-1}..+A_n)+$ $e^{\alpha t}Sin\beta t(B_0t^n+B_1t^{n-1}..+B_n)$***
$t^n\,e^{\alpha t}\,Cos\gamma t$	$\alpha+i\gamma$	***$e^{\alpha t}Cos\gamma t(A_0t^n+A_1t^{n-1}..+A_n)+$ $e^{\alpha t}Sin\gamma t(B_0t^n+B_1t^{n-1}..+B_n$***

Eğer 2. Kolondakiler karakteristik denklemin 's' katlı kökü iseler bu durumda tablonun 3. kolonundaki fonksiyonlar 't^s'ile çarpılırlar. Özel çözüm ondan sonra araştırılır.

Örnek 1:

$y^{IV}+2y''+y=e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

çözüm:

$r^{IV}+2r^2+1=(r^2+1)^2=0 \quad r=\pm i$ *(2 katlı kök)*

$a\pm ib \qquad a=-b/2a=0 \quad ; \; b=\sqrt{4ac-b^2}/2a=1$

$$y_h=e^{\alpha x}((c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x) \text{ ile}$$

$$y_h=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$

olur.

özel çözüm için

üstel fonksiyon için(e^{3x}) 3 karakteristik denklemin kökü olmadığı için

$$y_{özel}=Ae^{3x}$$

$y'_{özel}=3Ae^{3x} \quad y''_{özel}=9Ae^{3x} \quad y'''_{özel}=27Ae^{3x} \quad y^{IV}_{özel}=81Ae^{3x}$

$81Ae^{3x}+18Ae^{3x}+Ae^{3x}=e^{3x}$

$A=1/100 \qquad y_{özel}=1/100\, e^{3x}$

$$y_{genel}=y_h+y_{özel}$$

$$y_{genel}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+1/100\, e^{3x}$$

elde edilir.

Örnek 2

$y'''-4y'=t+3\cos t+e^{-2t}$ *diferansiyel denkleminin özel çözümünü bulunuz.*

$r^3-4r=0 \; r(r^2-4)=0 \qquad r_1=0,\; r_2=2, r_3=-2$ *(3 farklı reel kök)*

$$y_{homojen}=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-2t}$$

Süper pozisyon prensibi kullanılarak verilen diferansiyel denklemin özel çözümleri

$y'''-4y'=t$
$y'''-4y'=3\cos t$
$y'''-4y'=e^{-2t}$

diferansiyel denklemlerine karşı gelen özel çözümlerin toplamı olarak yazılabilir.

y'''-4y'=t için özel çözüm:

verilen diferansiyel denklemde y li ifade olmadığı için

$$y_{özel1}=t(At+B)$$

şeklinde aranır.
y'''-4y'=3cost için özel çözüm

trigonometrik fonksiyonda t nin katsayısı karakteristik denklemin köklerinden herhangi birine eşit olmadığı için

$$y_{özel2}=D\cos t+E\sin t$$

olarak seçilir.

$y'''-4y'=e^{-2t}$ için özel çözüm

üstel fonksiyonda t nin katsayısı karakteristik denklemin basit bir kökü olduğundan

$$y_{özel3}=tFe^{-2t}$$

olarak seçilir.

A=-1/8 ,B=0, D=0, E=-3/5, F=1/8 olarak bulunur.

Buradan verilen diferansiyel denklemin özel çözümü:

$$y_{özel}=y_{özel1}+y_{öze2}+y_{özel3}=-1/8\,t^2-3/5\sin t+1/8te^{-2t}$$

Örnek 3

$y^{IV}+2y''+y=x^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

çözüm:

$r^{IV}+2r^2+1=(r^2+1)^2=0 \quad r=\pm i$ (2 katlı kök)

$\Delta=$**b^2- 4ac**$<$**0** ise kompleks iki kök vardır

$$r_1=a+ib \quad ; \quad r_2=a-ib$$

a=(-b/2a) b= $\sqrt{4ac-b^2}\,/\,2a$

genel çözüm: **$y=e^{ax}\,(c_1\text{Cos}bx+c_2\text{Sin}bx)$** dır.

$$y_{homojen}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x \quad \textit{olur.}$$

özel çözümler için (x^2 polinom için)

$$y_{özel}=ax^2+bx+c$$

$y'_{özel}=2ax+b$ $y''_{özel}=2a$ $y'''_{özel}=0$ $y^{IV}_{özel}=0$

verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulursa

$4a+ax^2+bx+c=x^2$ *ile*

$a=1$ $b=0$ $4a+c=0$ *dan* $c=-4$ $y_{özel}=x^2-4$

$$y_{genel}=y_{homojen}+y_{özel}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+x^2-4$$

Örnek:

$y^{IV}+2y''+y=x^2+e^{3x}$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

çözüm:

$r^{IV}+2r^2+1=(r^2+1)^2=0$ $r=\pm i$ *(2 katlı kök)*

$$y_h=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$

olur.

özel çözümler için (x^2 polinom için)

$$y_{özel1}=Ax^2+Bx+C$$

$y'_{özel1}=2Ax+B$ $y''_{özel1}=2A$ $y'''_{özel1}=0$ $y^{IV}_{özel1}=0$

verilen dif. denklemde yerlerine konulursa

$4A+Ax^2+Bx+C=x^2$ *ile*

$A=1$ $B=0$ $4A+C=0$ *dan* $C=-4$

$$y_{özel1}=x^2-4$$

üstel fonksiyon için(e^{3x})

$$y_{özel2}=Ae^{3x}$$

$y'_{özel2}=3Ae^{3x}$ $y''_{özel2}=9Ae^{3x}$ $y'''_{özel2}=27Ae^{3x}$ $y^{IV}_{özel2}=81Ae^{3x}$

$81Ae^{3x}+18Ae^{3x}+Ae^{3x}=e^{3x}$

$A=1/100$ $y_{özel2}=1/100\, e^{3x}$

$$y_{genel}=y_h+y_{özel1}+y_{özel2}$$

$$y_{genel}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+ x^2-4+1/100\, e^{3x}$$

elde edilir.

4.4. PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ METODU

***2.** mertebeden diferansiyel denklem için verilen metodun n. mertebeden diferansiyel denkleme genişletilmesidir.*

$L[y]=y^n+p_1(t)y^{(n-1)}+.............+p_{(n-1)}(t)y'+p_n(t)y=g(t)$ (1)

***n.** mertebeden diferansiyel denklem ele alınsın.(1) nolu denklemin özel çözümünü parametrelerin değişimi yöntemi ile bulabilmek için (1) in homojen kısmının çözümünün bilinmesi gerekir. (1) in homojen homojen kısmının çözümlerinin temel cümlesi $y_1,y_2,..........,y_n$ olsun.*

Bu durumda parametrelerin değişimi metodu ile Y(t) özel çözümü homojen çözümde c_i ler yerine u_i ler yazılarak

$$Y(t)=u_1(t)y_1(t)+ u_2(t)y_2(t)+...........+ u_n(t)y_n(t)$$

şeklinde aranır. burada $u_1(t),.........u_n(t)$ belirlenecek fonksiyonlardır.

$$\begin{aligned}
&u_1' y_1+ u_2' y_2+....................+ u_n' y_n=0\\
&u_1' y_1'+ u_2' y_2'+....................+ u_n' y_n'=0\\
&u_1' y_1''+ u_2' y_2''+....................+ u_n' y_n''=0 \qquad (2)\\
&.\qquad .\qquad .\\
&.\qquad .\qquad .\\
&u_1' y_1^{(n-1)}+ u_2' y_2^{(n-1)}+....................+ u_n' y_n^{(n-1)}=g(t)
\end{aligned}$$

n bilinmeyenli n denklem oluşturulmuş olur.(2) nolu denklem sisteminin çözümü için koşul $W(y_1,y_2,.....,y_n)\neq 0$ olmalıdır. Bu ise $y_1,y_2,..........,y_n$ lerin (1) diferansiyel denkleminin homojen kısmının lineer bağımsız çözümleri olmasından zaten sağlanır. Dolayısıyla (2) sisteminden $u_1'(t),.........u_n'(t)$ belirlenebilir. Cramer kuralı kullanılırsa (2) sisteminin çözümü

$$u_m'(t)=\frac{g(t)W_m(t)}{W(t)} \qquad m=1,2,........,n \qquad (3)$$

bulunur. W(t) = ***$W(y_1,y_2,.....,y_n)(t)$ve*** $W_m(t)$ ise W(t) de m. kolon yerine(0,0,.............,1) konularak elde edilen determinantı ifade etmektedir. Bu notasyonları kullanarak (1) nolu denklemin özel çözümünü t_0 keyfi olmak üzere integralin terimleri cinsinden ifade edersek

$$Y(t)=\sum_{m=1}^{n} y_m(t)\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)W_m(s)}{W(s)}ds \qquad (4)$$

olur. (4) nolu eşitlikten görüldüğü gibi (1) diferansiyel denkleminin mertebesi arttıkça özel çözümün bulunması zorlaşmaktadır. Bu nedenle bazı durumlarda Abel özdeşliğinden yararlanılır.

W(t) = ***$W(y_1,y_2,.....,y_n)(t)$= cexp[-∫p(t),dt] burada c sabiti wronskionenin uygun bir noktada hesaplanmasından çıkar.***

Matrislerle ifade edersek

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & . & . & . & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & . & . & . & . & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & . & . & . & . & y_n'' \ .. \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & . & . & . & . & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ . \\ u_n' \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ g(t) \end{pmatrix}$$

determinantı ***'Wronski determinantı'*** olarak isimlendirilir. $\underline{W}\,\underline{u}' = \underline{\varepsilon}_n$

sistemi ile c vektörünün bileşenleri (u_1, u_2, u_3.......)bulunur, ve

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$$ **ile genel çözüme ulaşılır.**

ÖRNEK:

y'''-y''-y'+y=g(t) diferansiyel denkleminin homojen kısmının 3 çözümü $y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=te^t$ ve $y_3(t)=e^{-t}$ dir. Bu denklemin özel çözümünü integralin terimleri cinsinden ifade ediniz.

$$W = \begin{bmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{bmatrix} =$$

1. 2. Kolondan e^t, 3.kolondan e^{-t} çarpan olarak çekilirse

W(t)= $e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & (t+1) & -1 \\ 1 & (t+2) & 1 \end{bmatrix}$ **$=4e^t$**

$W_1(t)$= $\begin{bmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$ **=-2t-1** **$W_2(t)$=** $W = \begin{bmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{bmatrix}$ **=2**

$$\mathbf{W_3(t)}=\begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{bmatrix}=e^{2t}$$

Bulunanlar

$Y(t)=\sum_{m=1}^{n} y_m(t)\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)W_m(s)}{W(s)}ds$ de yerine konursa

$$Y(t)=\sum_{m=1}^{3} y_m(t)\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)W_m(s)}{W(s)}ds=e^t\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s}ds+te\int_{t_t}^{t}\frac{g(s)2}{4e^s}ds+e^{-t}\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)e^{2s}}{4e^s}ds$$

Y(t)= $\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t}\left(e^{t-s}\left[-1+2(t-s)\right]+e^{-(t-s)}\right)g(s)ds$

SIFIRLAYICI(YOKETME YÖNTEMİ) METODU:

Eğer f bir fonksiyon ise, f in sıfırlayıcı türev operatörü

$$\tilde{L}f=\tilde{L}(Ly)=0$$

özelliği ile

$$\tilde{L}=a_nD^n+..........+a_nD+a_0$$

şeklinde ifade edilir. Tersi olarak bu işlemi homojen denklemler için uygulayabiliriz.

Homojen Denklemlere Tekrarbakış

Sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemler;

$$a_ny^{(n)}+............+a_1y'+a_0y=0$$

$a_nr^n+..................+a_1r+a_0=0$

karakteristik polinoma sahiptirler ve kökleri $r_1,r_{2,}..................,r_n$ olmak üzere $y=e^{r_1t}$ gibi $y_1,y_2,..........,y_n$ şeklinde çözümleri vardır. Denklemi $D=\frac{d}{dt}$ kullanarak ta yazabiliriz.

ÖRNEKLER:

$denklem: y''-5y+6y=0$
$polinom: r^2-5r+6=0$

Çarpanları: (r-2)(r-3) kökler: 2,3 reel ve farklı

türev operatörü: $(D-2)(D-3)y=0$ veya $(D^2-5D+6)y=0$
lineer bağımsız çözümler:

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$$
$$genelçözüm: y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

ÖRNEK 2:

$$denklem: y'' + 10y' + 25y = 0$$
$$polinom: r^2 + 10r + 25 = 0$$

Çarpanları: $(r+5)^2 = 0$ kökler: -5,-5 katlı kök

türev operatörü: $(D+5)^2 y = 0$ veya $(D^2 + 10D + 25)y = 0$

lineer bağımsız çözümler:
$$y_1 = e^{-5x}, y_2 = xe^{-5x}$$
$$genelçözüm: y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$$

ÖRNEK 3:

$$denklem: y'' - 4y' + 8y = 0$$
$$polinom: r^2 - 4r + 8 = 0$$

Çarpanları: $(r-2-2i)(r-2+2i) = 0$

kökler: (2+2i), (2-2i)

türev operatörü: $(D-2-2i)(D-2+2i)y = 0$ veya $(D^2 - 4D + 8)y = 0$
lineer bağımsız çözümler:
$$y_1 = e^{2x}\cos 2x, y_2 = e^{2x}\sin 2x$$
$$genelçözüm: y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Bu yöntem sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak , üstel fonksiyon,trigonometrik fonksiyon, polinom, bunların toplamları veya çarpımları şeklinde olması durumunda uygulanır. $D = \frac{d}{dt}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek olarak

(D+1)y=0 e^{-t} nin bir çözümüdür . türev operatörü D+1 e^{-t} nin sıfırlayıcısı olarak ifade edilir.

Benzer olarak $D^2 + 4$ sin 2t veya cos2t nin sıfırlayıcısıdır

$(D-3)^2 = D^2 - 6D + 9$ e^{3t} veya te^{3t} nin sıfırlayıcısıdır.

$$Fonksiyon: f(x) = x^2 e^{-7x}$$
$$L = (D-7)^3$$
$$Fonksiyon: f(x) = e^{-x}\cos 4x$$
$Polinomunkökleri: -1 \pm 4i$ bu köklerle polinom: $(r+1+4i)(r+1-4i) = r^2 + 2r + 5$

$\overset{\square}{L} = D^2 + 2D + 5$

$Fonksiyon: f(x) = x^k e^{\alpha x}$

$Polinomunkökleri: \alpha(k+1$ *çok katlılığı ile)*

Polinom: $(r-\alpha)^{k+1}$ $\qquad \overset{\square}{L} = (D-\alpha)^{k+1}$

$Fonksiyon: f(x) = x^k e^{ax} \sin bx$

$Polinomunkökleri: a \pm ib(k+1$ *çok katlılığı ile)*

Polinom: $((r-a-ib)(r-a+ib))^{k+1} = (r^2-2ar+(a^2+b^2))^{k+1}$

$\overset{\square}{L} = (D^2 - 2aD + (a^2+b^2))^{k+1}$

BELİRSİZ KATSAYILAR YÖNTEMİNDE YOK ETME YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜM FORMUNUN BELİRLENMESİ

$L\,y = f$ *nin özel çözümünü bulmak için*
($y_{özel}$) adımlar

1- *f için (sağ yanlı fonksiyon için)bir sıfırlayıcı bul ve* $\overset{\square}{L}$ *olarak adlandır.*
2- $\overset{\square}{L}\,L y_a = 0$ *sıfırlayıcı fonksiyonun genel çözümünü y_a ile gösterelim. y_a bulunur.*
3- $\overset{\square}{L}\,y_h = 0$ *ile homojen denklemin genel çözümü (y_h) bulunur.*
4- *Sonuçta ($\overset{\square}{L}\,y = f$) Genel çözümü $y_h + y_{özel}$*

Örnek: $y'' + 4y' + 4y = 2e^x$ *L=(D^2+4D+4) için, eşit olarak $(D+2)^2 y=2e^x$, veya $Ly=2e^x$*

1.adım:

(sağ yanlı fonksiyon için)bir sıfırlayıcı $\overset{\square}{L}$ *=(D-1)*
2.adım :

$\overset{\square}{L}$ *=(D-1) operatörünü* $y'' + 4y' + 4y = 2e^x$ *denklemin her iki tarafına uygularsak*

$$(D-1)(D^2+4D+4)y = (D-1)(2e^x) = \frac{d}{dx}(2e^x - 1*2e^x) = 0$$

böylece sıfırlayıcı denklem $(D-1)(D+2)^2 y_a = 0$

sıfırlayıcı denklemin genel çözümü $y_a = c_1e^x + (c_2+c_3x)e^{-2x}$

***3.adım** : Homojen kısmın genel çözümü $y_h = (c_2+c_3x)e^{-2x}$*

***4.adım:** Denklemin özel çözümü için $y_{özel} = c_1e^x$ seçilerek türevler alınıp verilen diferansiyel denklemde yerine yazılarak $c_1 = 2/9$ bulunur. $y_{özel} = 2/9\, e^x$*

$$y_{genel} = y_h + y_{özel} = (c_2+c_3x)e^{-2x} + 2/9\, e^x$$