Lineer Cebir

Bir Matrisin Transpozu ve Determinant

Bir Matrisin Transpozu

Bir A matrisin transpozu bu matrisin satırlarının sütün olarak (ya da sütunlarının satır olarak) yazılmış halidir ve A^T ile gösterilir.

Yani $A = \left(a_{ij}\right)$ ise $b_{ij} = a_{ji}$ olmak üzere $A^T = \left(b_{ij}\right)$ dir.

Örnekler:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}^T = (7, 8, 9), \qquad \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transpozun özellikleri

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A_1 A_2 \ldots A_k)^T = A_k^T \ldots A_2^T A_1^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Bir Matrisin Transpozu

Transpozu kendisine eşit olan matrise simetrik matris denir. Yani

A simetriktir $\Leftrightarrow$ $A^T = A$.

Örneğin Köşegen matrisler simetriktir.

Önerme: Herhangi bir kare A matrisi için

$B = AA^T$ ve $C = A + A^T$ matrisleri simetriktir.

Bu önermeyi kolaylıkla ispatlayabiliriz:

$$B^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = B,$$

$$C^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = C.$$

Determinant

Determinant kare matrislere karşılık gelen bir skaler bir değerdir.

Gösterim: Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Temel özellik: $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ singülerdir(tersinir değildir).

Düşük boyutlar için determinant

$$\det(a) = a, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$+ : \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} \\ \boxed{*} & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * & \boxed{*} \\ \boxed{*} & * & * \\ * & \boxed{*} & * \end{pmatrix}.$$

$$- : \begin{pmatrix} * & * & \boxed{*} \\ * & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & * \\ * & * & \boxed{*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ * & * & \boxed{*} \\ * & \boxed{*} & * \end{pmatrix}.$$

Örnekler: 2×2 matrisler

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Örnekler: 3×3 matrisler

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$- 0 \cdot 0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 9 = -5,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$- 6 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Genel Tanım:

Determinantın genel tanımı oldukça karmaşıktır ve basit bir formülü yoktur.

Determinant tanımı için birkaç farklı yaklaşım vardır:

1. Yaklaşim (orijinal): Kesin bir tanım (fakat çok karmaşık)

2. Yaklaşim (aksiyomatik): Determinantın hangi özelliklere sahip olması gerektiğini formülüze ederiz

2. Yaklaşim (tümevarım): $n \times n$ bir matrisin determinantını $n-1 \times n-1$ boyutlu belirli matrisler cinsinden yazarız.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $n \times n$ boyutlu elemanları reel olan matrisler kümesi

Teorem: Aşağıdaki özellikleri sağlayan tek bir

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

- Matrisin bir satırı r sayısı ile çarpıldığında determinant da r katına çıkar.
- Matrisin bir satırı bir sayı ile çarpılıp başka bir satıra eklenirse determinantın sonucu değişmez.
- Matrisin iki satırı yer değiştirilirse determinant işaret değiştirir.
- $\det I = 1$

A matrisinin satır eşelon formu:

$$\begin{pmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \square \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0 \qquad\qquad \det A = 0$$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = ?$

Önceki bölümde aşağıdaki elemanter satır işlemlerini kullanarak A matrisini birim matrise dönüştürmüştük:

- 1. ve 2. satırları yer değiştir
- 1. satırın -3 katını 2. satıra ekle
- 1. satırın 2 katını 3. satıra ekle
- 2. satırı -0.5 ile çarp
- 2. satırın -3 katını 3. satıra ekle
- 3. satırı -0.4 ile çarp
- 3. satırın -1.5 katını 2. satıra ekle
- 3. satırın -1 katını 1. satıra ekle

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ \det A = ?$

Önceki bölümde aşağıdaki elemanter satır işlemlerini kullanarak A matrisini birim matrise dönüştürmüştük:

Bu işlemlere dikkat ettiğimizde iki tane «satırı sayı ile çarpma: biri -0.5 ile diğeri -0.4 ile çarpma» ve 1 tane «iki satırın yerini değiştirme» işlemi olduğunu görürüz. Bu işlemlerin dışındaki işlemler determinant sonucuna etki etmez.

Buradan,

$$\det I = -(-0.5)(-0.4)\det A = (-0.2)\det A.$$

Böylece $\det A = -5 \det I = -5.$

Determinantın diğer özellikleri:

- Bir A matrisinin iki satırı birbirine eşit ise $\det A = 0$ dır.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Bir A matrisinin iki satırı birbirinin katı ise $\det A = 0$ dır.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ra_1 & ra_2 & ra_3 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantın diğer özellikleri:

- X, Y ve Z matrisleri i. satır dışında birbirine eşit ve Z'nin i. satırı X ve Y 'nin i. satırları toplamı ise

$$\det Z = \det X + \det Y.$$

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinantın diğer özellikleri:

- Bir satırın skaler bir katının başka bir satıra eklenmesiyle determinantın sonucu değişmez.

$$\begin{vmatrix} a_1 + rb_1 & a_2 + rb_2 & a_3 + rb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} rb_1 & rb_2 & rb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinantın diğer özellikleri:

Köşegen altında kalan elemanları sıfır olan matrise **üst üçgensel matris** denir. Yani $A = (a_{ij})$ üst üçgenseldir $\Leftrightarrow \forall i > j$ için $a_{ij} = 0$.

- Üst üçgensel bir matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

- Eğer $A = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ise

$$\det A = d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Özel olarak $\det I = 1.$

Transpozun determinantı

- Eğer A bir kare matris ise $\det A^T = \det A$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Satır vs. Sütun

- Bir A matrisinin iki sütunu birbirine eşit ise $\det A = 0$ dır.
- Matrisin bir sütunu r sayısı ile çarpıldığında determinant da r katına çıkar.
- Matrisin bir sütunu bir sayı ile çarpılıp başka bir sütuna eklenirse determinantın sonucu değişmez.
- Matrisin iki sütunu yer değiştirilirse determinant işaret değiştirir.

Altmatrisler

A matrisi verilsin. A nın bir $k \times k$ altmatrisi, özel bazı k tane satır ve k tane sütunun seçilip diğer satır ve sütunların silinmesiyle oluşur.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * & 2 & * & 4 \\ * & * & * & * \\ * & 5 & * & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. A' nın M_{ij} altmatrisi A' dan i. satır ve j. sütun silindikten sonra kalan matristir.

Örnek: $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{32} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinantın satır veya sütun açılımı

$n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. A' nın M_{ij} altmatrisi i. satır ve j. sütun silindikten sonra kalan matristir.

Teorem: Herhangi bir $1 \leq k, m \leq n$ için

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det M_{kj},$$

k. satıra göre açılım

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+m} a_{im} \det M_{im}.$$

m. sütuna göre açılım

Satır - sütun açılımında işaretler

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

1. satıra göre açılım:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * \\ * & 5 & 6 \\ * & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & \boxed{2} & * \\ 4 & * & 6 \\ 7 & * & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & \boxed{3} \\ 4 & 5 & * \\ 7 & 8 & * \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \quad - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

2. sütuna göre açılım:

$$\begin{pmatrix} * & \boxed{2} & * \\ 4 & * & 6 \\ 7 & * & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 3 \\ * & \boxed{5} & * \\ 7 & * & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 3 \\ 4 & * & 6 \\ * & \boxed{8} & * \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad +5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad -8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 5(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 8(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 0.$$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

Bu sefer determinantın sonucuna etki etmeyen bir işlem yapalım:

1. satırı 2. satırdan ve 3. satırdan çıkaralım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Son determinanta dikkat edersek 2. ve 3. satırların eşit olduğunu görürüz.

Örnek: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$

Satır indirgeme işlemleri yaparak determinantı daha kolay çözülebilir bir hale getirelim:

1. satırın -4 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix}$$

1. satırın -7 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix}$$

Determinantı 1. sütuna göre açalım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$$

Böylece

$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(-2)(-2) = -12$$

Örnek: $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det C = ?$

Determinantı 3. sütuna göre açalım:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. satırın -2 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\det C = -2 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det C = -2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Determinantı 1. satıra göre açalım:

$$\det C = -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Böylece

$$\det C = -18\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \cdot 2 = -36$$

Problem: a nın hangi değerleri için aşağıdaki lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + az = 3 \end{cases}$$

Sistemin tek çözümü olması için sistem katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}, \quad \det A = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}, \qquad \det A = ?$$

3. sütunun -2 katını 2. saütuna ekleyelim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2-2a & a \end{vmatrix}$$

Determinantı 2. sütuna göre açalım:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2-2a & a \end{vmatrix} = -(-2-2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Böylece $\det A = -(-2-2a) \cdot 3 = 6(1+a).$

Buradan A tersinir olması için gerek ve yeter koşul $a \neq 1$ olmasıdır.

Determinantın özellikleri:

Determinant ve matris çarpımı:

- A ve B $n \times n$ birer matris ise

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B;$$

- A ve B $n \times n$ birer matris ise

$$\det(AB) = \det(BA);$$

- A tersinir bir matris ise

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

- A $n \times n$ bir matris ve $r \in \mathbb{R}$ ise

$$\det(rA) = r^n \det A.$$

Örnekler: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\det X = (-1)\cdot 2\cdot(-3) = 6, \quad \det Y = \det Y^T = 3,$$

$$\det(XY) = 6\cdot 3 = 18, \qquad \det(YX) = 3\cdot 6 = 18,$$

$$\det(Y^{-1}) = 1/3, \qquad \det(XY^{-1}) = 6/3 = 2,$$

$$\det(XYX^{-1}) = \det Y = 3, \quad \det(X^{-1}Y^{-1}XY) = 1,$$

$$\det(2X) = 2^3 \det X = 2^3\cdot 6 = 48,$$

$$\det(-3X^TXY^{-4}) = (-3)^3\cdot 6\cdot 6\cdot 3^{-4} = -12.$$