2. HAFTA

BLM323

SAYISAL ANALİZ

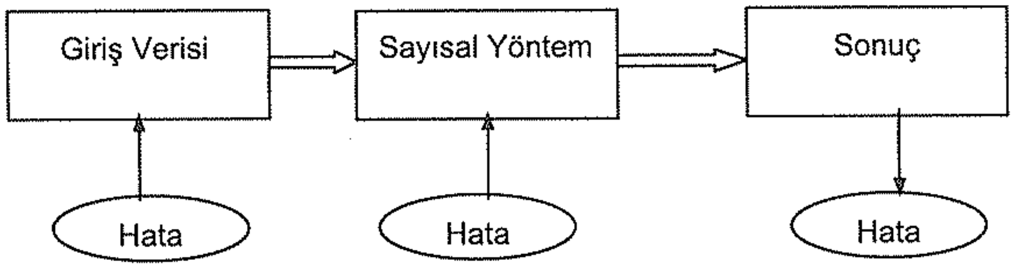
Okt. Yasin ORTAKCI

yasinortakci@karabuk.edu.tr

KBUZEM
Karabük Üniversitesi
Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

HATA

Sayısal yöntemler analitik çözümlerden farklı olarak belli bir hata payı içerirler. Bunun yanı sıra giriş verisi de bir miktar hatalı olabilir.



Sayısal yöntemlere geçmeden önce hata kavramının anlaşılması gerekir. Temel olarak 5 hata kaynağından söz edilebilir.

Hata Kaynakları

1. Kullanılan Verideki Hatalar (Ölçme Hatası)

Veriler çeşitli deney ve ölçümlerle elde edilir. Ölçümün yapıldığı ortam veya sistem kaynaklı hatalar verinin hatalı olmasına neden olur.

2. Yuvarlama Hataları

Bazı rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların tamamı ondalık sistemde sonsuz sayıda basamakla ifade edilmesi gerekir. 64 bitlik bir bilgisayar sisteminde bir reel sayının virgülden sonra belirli sayıda basamağı gösterilebildiğinden geriye kalan basamaklar sayıdan atılarak bir miktar yuvarlama hatası oluşur.

Yine elektronik hesaplayıcılar ve bilgisayarlarda sayısal çözüm yaparken çok sayıda hesaplama yapılır. Hesaplamaların belli aşamasında veya başlangıcında meydana gelen hatalar arkadan gelen hesaplamalara da etki eder ve yayılır. Bu tür hatalar birikerek büyüyebilmekte ve sonucu önemli etkide değiştirebilmektedir.

3. Kesme Hataları

Fonksiyon yaklaşımlarında kullanılan seri ifadelerde olduğu gibi sonsuz terimli bir gösterimin sonlu kısmı bilgisayarlarda ifade edilebilir. Geriye kalan kısım kesme hatası olarak adlandırılır.

4. İnsan Kaynaklı Hatalar

Kullanılan formüllerin kendilerinde yada bilgisayara aktarımında oluşan hatalar bu tip hatalara örnektir.

5. Bilgisayar Kaynaklı Hatalar

Bilgisayarlar elektrik akımı ile çalışan cihazlar olduğu için elektrik kaynaklı ya da bilgisayarın elektronik aksanından kaynaklanan hatalar oluşabilir.
Sayısal yöntemler ile çözülen problemlerin kesin veya analitik çözümleri var ise sayısal çözümde oluşan hata miktarını bulmak zor değildir. Fakat karşılaşılan bir çok problemin özellikle mühendislik problemlerinin analitik çözümleri ve kesin sonuçları bilinmemektedir. Sayısal yöntemler ile yapılan çözümlemelerde hata oluşacaktır. Fakat bu hatanın kabul edilebilir sınırlarda olup olmadığı ölçülmelidir. Hata miktarını belirleme de değişik yöntemler kullanılır.

Hata Çeşitleri

1. Mutlak Hata:

Analitik olarak bilinen ve doğru değer olarak kabul edilen bir sonucu ile sayısal yöntemler ile elde edilmiş sonucun arasındaki farkın mutlak değeridir.

$$\varepsilon_m = |y_g - y_y|$$

ε_m:Mutlak Hata;

y_g:Gerçek Değer;

y_y:Yaklaşık Değer;

2. Bağıl Hata:

Gerçek değere ne kadar yaklaşıldığının oransal bir gösteren bir hata çeşididir. Çoğu problemde bağıl hata mutlak hatadan daha fazla anlam ifade etmektedir.

$$\varepsilon_b = \frac{|y_g - y_y|}{|y_g|}$$

ε_b:Bağıl Hata;

y_g:Gerçek Değer;

y_y:Yaklaşık Değer;

Bağıl hata 100 ile çarpılarak % bağıl hata olarak kullanılabilir. Örneğin bir füzenin menzilinin gerçek değeri 5000 km ise ve yapılan hesaplamalarda bu 4999 km olarak bulunuyorsa, buradaki gerçek hata=5000-4999= 1'dir. Başka bir örneği inceleyecek olursak bir aracın ulaşabileceği maksimum hızın gerçek değeri 50 km/s iken yapılan hesaplamalarda 49 km/s bulunuyorsa bu durumda da mutlak hata=50-49=1 km/s' dir. İki durumda da hata 1 km olarak çıkmaktadır. Fakat daha adil bir değerlendirme yapabilmek için yüzde olarak hatalarına bakıldığında ortaya çıkan hatanın büyüklükleri daha net ortaya konulacaktır.

Birinci örnekte;

$$\varepsilon_b = \frac{5000 - 4999}{5000} = 0{,}0002'dir.$$

$$\text{Yüzde bağıl hata} == \frac{5000 - 4999}{5000} \times 100 = \%0{,}02'dir.$$

İkinci örnekte;

$$\varepsilon_b = \frac{50 - 49}{50} = 0{,}02'dir.$$

$$\text{Yüzde bağıl hata} == \frac{50 - 49}{50} \times 100 = \%2'dir.$$

Bu iki hesaplamada hataların büyüklüklerini bağıl hataları dikkate alarak daha objektif olarak değerlendirebiliriz.

3. Yaklaşım Hatası:

Hem mutlak hata hem de bağıl hata hesaplamalarında çözümün gerçek değerinin bilinmesi gerekiyordu. Gerçek değerin bilinmediği bir çok problem de ise yaklaşım hatası kullanılabilir. Yaklaşım hatasında adım-adım iteratif bir şekilde elde edilen çözüm değerleri bulunur. Bir önceki iterasyonda elde edilen değer yeni iterasyonda kullanılarak hata miktarı oransal olarak tahmin edilmeye çalışılır.

$$\varepsilon_y = \frac{|y_{yeni} - y_{eski}|}{|y_{yeni}|}$$

ε_y :Yaklaşım Hatası;

y_{eski} :Bir önceki adımda elde edilen çözüm değeri;

y_{yeni} :Şu anki adımda elde edilen çözüm değeri;

Örnek: e^x fonksiyonunun sonsuz seri açılımı aşağıdaki serinin toplamı şeklinde verilmektedir. $e^{0,5}$=1,648721271 kabul edilerek, seri açılımından faydalanılarak belli sayıda terim alarak yaklaşım ve mutlak hata yüzdelerini bulmaya çalışalım.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$$

x=0.5 için;

Yukarıdaki serinin ilk terimi alındığında $e^x = 1$

$$\varepsilon_b = \frac{e^{0,5} - 1.0}{e^{0,5}} \times 100 = \frac{1,648721271 - 1.0}{1,648721271} \times 100 = \%39,3$$

İlk iki terimi alındığında $e^x = 1 + x = 1 + 0,5 = 1,5$ olarak bulunur. Buna göre bağıl hata ve yaklaşım hataları şu şekildedir:

$$\varepsilon_b = \frac{e^{0,5} - 1,5}{e^{0,5}} \times 100 = \frac{1,648721271 - 1,5}{1,648721271} \times 100 = \%9,02$$

$$\varepsilon_y = \frac{|y_{yeni} - y_{eski}|}{|y_{yeni}|} = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}5} \times 100 = \%33{,}3$$

Terim sayısı artırılarak elde edilen yeni değerlere bağlı olarak hesaplanan bağıl ve yaklaşım hataları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Terim Sayısı	**Sonuç**	$\varepsilon_b(\%)$	$\varepsilon_y(\%)$
1	1	39,3	-
2	1,5	9,02	33,3
3	1,625	1,44	7,69
4	1,64583333	0,175	1,27
5	1,64843750	0,0172	0,158
6	1,64869791	0,00142	0,0158
7	1,64871961	0,0001007	0,001316

Örnek: $x = \frac{5}{7}$ ve $y = \frac{1}{3}$ sayılarını 5 basamaklı bir sistemde temsil edildiğinde

a) $x + y = ?$ b) $x - y = ?$ c) $x * y = ?$ d) $\frac{x}{y} = ?$

Sonuçlarını kesme işlemi uygulayarak bulunuz ve mutlak hataları hesaplayınız.

Çözüm:

$x = \frac{5}{7} = 0{,}714285$ kesilmiş hali $x = 0{,}71428 \times 10^0$

$y = \frac{1}{3} = 0{,}333333$ kesilmiş hali $y = 0{,}33333 \times 10^0$

a) $x + y = (0{,}71428 + 0{,}33333) \times 10^0 = 0{,}10476 \times 10^1$

b) $x - y = (0{,}71428 - 0{,}33333) \times 10^0 = 0{,}38095 \times 10^0$

c) $x * y = (0{,}71428 * 0{,}33333) \times 10^0 = 0{,}28809 \times 10^0$

d) $\frac{x}{y} = \frac{0{,}71428}{0{,}33333} = 0{,}21428 \times 10^1$

Hatalar;

a) $x + y = \frac{22}{21} \rightarrow \ \varepsilon = \left|\frac{22}{21} - 0{,}10476 \times 10^1\right| = 0{,}190 \times 10^{-4}$

b) $x - y = \frac{8}{21} \rightarrow \ \varepsilon = \left|\frac{8}{21} - 0{,}38095 \times 10^0\right| = 0{,}238 \times 10^{-5}$

c) $x * y = \frac{5}{21} \rightarrow \ \varepsilon = \left|\frac{5}{21} - 0{,}28809 \times 10^0\right| = 0{,}524 \times 10^{-5}$

d) $\frac{x}{y} = \frac{15}{7} \rightarrow \ \varepsilon = \left|\frac{15}{7} - 0{,}21428 \times 10^1\right| = 0{,}571 \times 10^{-4}$

Örnek: Birbirine yakın iki sayı $p = 0{,}54617$ ve $q = 0{,}54601$ olsun. 4 basamaklı bir sistemde $p - q = ?$

Çözüm:

Önce kesme uygulayalım.

$p = 0{,}5461 \times 10^0$ ve $q = 0{,}5460 \times 10^0$

Yaklaşık $p - q = 0{,}1 \times 10^{-3}$ ve gerçek $p - q = 0{,}16 \times 10^{-3}$ ise;

$$\varepsilon_m = |0{,}16 \times 10^{-3} - 0{,}1 \times 10^{-3}| = 0{,}6 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = \frac{0{,}6 \times 10^{-4}}{0{,}16 \times 10^{-3}} = 0{,}375$$

Şimdi de yuvarlama uygulayalım.

$p = 0{,}5462 \times 10^{0}$ ve $q = 0{,}5460 \times 10^{0}$

Yaklaşık $p - q = 0{,}2 \times 10^{-3}$ ve gerçek $p - q = 0{,}16 \times 10^{-3}$ ise;

$$\varepsilon_m = |0{,}16 \times 10^{-3} - 0{,}2 \times 10^{-3}| = 0{,}4 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = \frac{0{,}4 \times 10^{-4}}{0{,}16 \times 10^{-3}} = 0{,}25$$

Örnek: $f(x) = x^3 - 6{,}1\, x^2 + 3{,}2\, x + 1{,}5$ polinomunun $x = 4{,}71$ için değerini 3 basamaklı bir aritmetik kullanarak hesaplayınız.

Çözüm:

$x = 4{,}71 \rightarrow\ x^2 = 0{,}221841 \times 10^2$ kesmeden sonra $x^2 = 0{,}221 \times 10^2$

$x^3 = 0{,}104487111 \times 10^3$ kesmeden sonra $x^3 = 0{,}104 \times 10^3$

$f(4{,}71) = 104 - 6{,}1 \times 22{,}1 + 3{,}2 \times\ 4{,}71 + 1{,}5$

$$= 104 - 134 + 15 + 1{,}5 = -13{,}5$$

Gerçek $f(4{,}71) = -14{,}263899$

$$\varepsilon_m = |-14{,}263899 - (-13{,}5)| = 0{,}763899$$

$$\varepsilon_b = \frac{0{,}763899}{|-14{,}263899|} = 0{,}0535$$

Hatayı azaltmak için fonksiyonu şu şekilde düzenleyelim.

$$f(x) = x\,(x(x - 6{,}1) + 3{,}2) + 1{,}5$$

$$f(4{,}71) = -14{,}2$$

$$\varepsilon_m = |-14{,}263899 - (-14{,}2)| = 0{,}06389$$

$$\varepsilon_b = \frac{0{,}06389}{|-14{,}263899|} = 0{,}0045$$

Kaynakça

- Richard L. Burden, Richard L. Burden (2009). "Numerical Analysis" Brooks/Cole Cengage Learning, Boston.
- Doç. Dr. İbrahim UZUN, (2004), "Numarik Analiz" Beta Yayıncılık.