

SAYISAL YÖNTEMLER

SAYISAL YÖNTEMLER

8. Hafta

İNTERPOLASYON

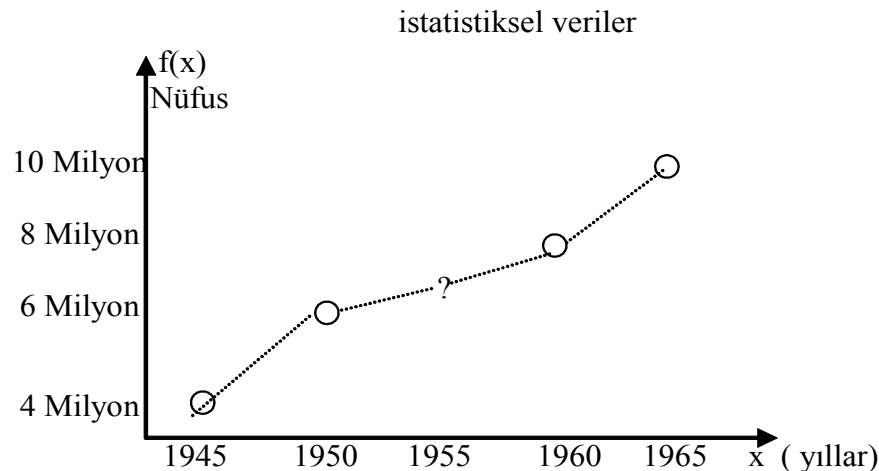
İÇİNDEKİLER

Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

- Doğrusal Ara Değer Hesabı
- MATLAB'ta İnterpolasyon Komutunun Kullanımı
- Lagrange Polinom İnterpolasyonu

Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

- ❑ Aradeğer hesabı mühendislik problemlerinde sıklıkla karşılaşılan bir işlemdir.
- ❑ İnterpolasyon
 - ❑ Bilinen değerlerden **bilinmeyen aradeğerin ya da değerlerin** bulunması işlemidir.
 - ❑ Genel olarak ise bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n gibi ayrık noktalarda verilen f_0, f_1, \dots, f_n değerlerini kullanarak, bu fonksiyonu temsil eden ve daha basit bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu (**enterpolasyon fonksiyonu**) ile ifade edilmesidir.



İnterpolasyon

- ❑ İnterpolasyon fonksiyonu için polinom, trigonometrik fonksiyon, üstel gibi fonksiyonlar kullanılır. Ancak çoğu durumda koşulları kolaylıkla sağlamaları sebebiyle polinomlar tercih edilir.
- ❑ İnterpolasyon fonksiyonunun seçiminde kullanılan teoremler:
 - ❶ Eğer fonksiyon $[a,b]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir ise polinom kullanılabilir.
 - ❑ $[a,b]$ aralığında küçük bir ε değeri için,
$$|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon$$
 koşulu sağlanabilir
 - ❷ Periyodik (2π) ve sürekli bir fonksiyon için,

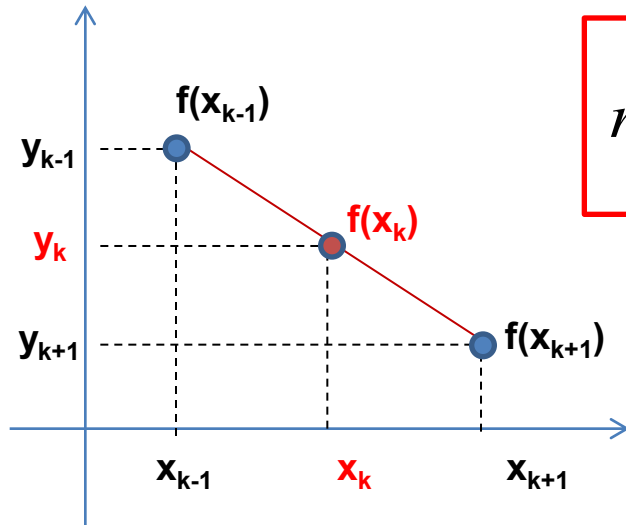
$$F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$$

şeklinde sonlu bir trigonometrik seri interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- ❑ Doğrusal interpolasyonda iki farklı değişkene karşılık gelen fonksiyon değerleri (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , bir doğru ile birleştirilir.
- ❑ Aradeğer (interpolasyon) doğru üzerindedir. Doğru denkleminin elde edilmesi ile interpolasyon bulunur.
- ❑ Bilinen iki nokta arasındaki uzaklık ne kadar az ise bilinmeyen nokta için bulunacak interpolasyon fonksiyonunun değeri de o kadar doğru olacaktır.

Doğru Denklemi



$$m = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \quad y_k = y_{k-1} + m(x_k - x_{k-1})$$

$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k+1})}{x_{k-1} - x_{k+1}}$$

Örnek

- ❑ Aşağıdaki tablo da bir firmanın son 5 yılki ciro dağılımı görülmektedir. Tabloda 2009 yılına ait sonuç yer almamaktadır. Doğrusal interpolasyon yöntemini kullanarak değeri bulunuz.

Yıllar	2007	2008	2009	2010	2011
Ciro	120	142	?	146	143

- ❑ Çözüm:

- ❑ Doğru Denklemi ile

$$m = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{146 - 142}{2010 - 2008} = 2$$

$$y_i = y_{k-1} + m(x_i - x_{k-1})$$

$$y_i = 142 + 2(2009 - 2008)$$

$$y_i = 144$$

$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k+1})}{x_{k-1} - x_{k+1}}$$

$$\frac{142 - f(x_k)}{2008 - 2009} = \frac{142 - 146}{2008 - 2010}$$

$$f(x_i) = 144$$

Örnek

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(4) = 1.3862944 \quad \text{olduğuna göre, lineer enterpolasyon kullanarak}$$

$$\ln(6) = 1.7917595$$

$$\ln(2) = ? \text{ sonucunu bulunuz. } [\ln(2)=0.69314718]$$

1. $x_0=1; x_1=6$ alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x_i - x_k) = 0 + \frac{1.7917575 - 0}{6 - 1} (2 - 1)$$

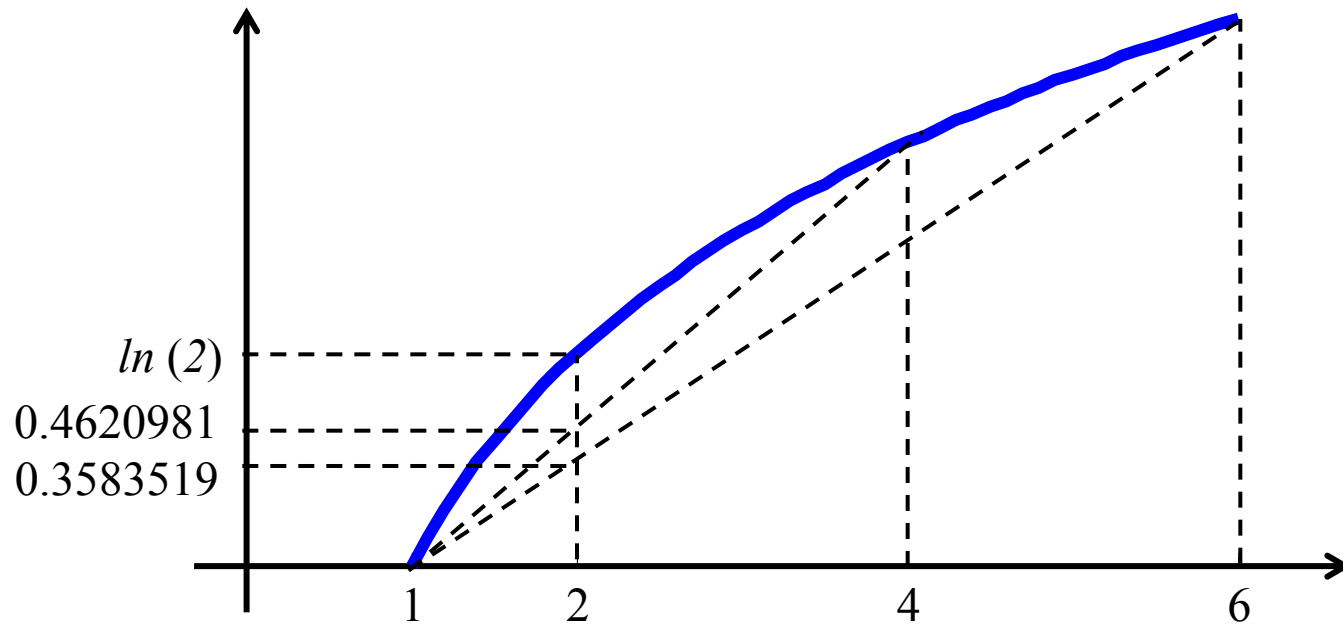
$$\Rightarrow \ln(2) = 0.3583515 \quad \varepsilon_t = \%48.3$$

2. $x_0=1; x_1=4$ alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x_i - x_k) = 0 + \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1} (2 - 1)$$

$$\Rightarrow \ln(2) = 0.46209813 \quad \varepsilon_t = \%33.3$$

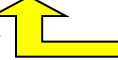
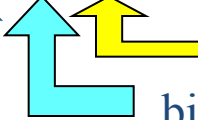
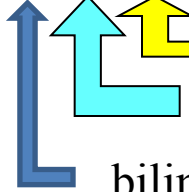
Örnek



MATLAB ile Doğrusal İnterpolasyon



YI= interp1 (X, Y, XI)



X'in bu değeri için işlem yapılacak

bilinen Y değerlerinden oluşan sütun vektörü

bilinen X değerlerinden oluşan sütun vektörü

Y sütun vektöründe bilinmeyen olarak hesaplanacak değer



Örnek: Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta *interp1* komutu ile çözünüz?

```
Command Window
>> x=[1 4 6]';
>> y=[0 1.3862944 1.7917595]';
>> Yi=interp1(x,y,2)

Yi =

    0.462098133333333

>>
fx >>
```

Doğrusal (Linear) interpolasyon

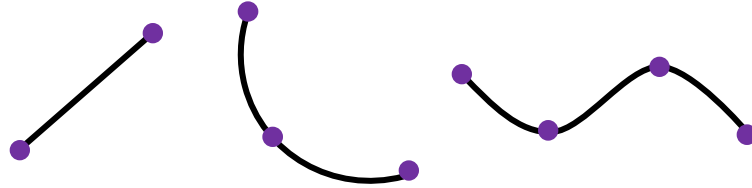
- ❑ **Örnek:** $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $[0.2, 0.3]$ aralığındaki değerleri sırasıyla $[1.22140, 1.34986]$ 'dır. Doğrusal interpolasyon yöntemi ile $x=0.27$ noktasındaki değer nedir?
- ❑ $x=0.27$ noktasındaki gerçek değer 1.3099 olduğuna göre bağıl yüzde hatayı hesaplayınız?

$$f(0.27) = 1.311322$$

$$e^{0.27} = 1.309964$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

- ❑ Lagrange interpolasyonu, bilinen noktalara önce bir eğri uydurulması sonra eğriyi temsil eden denklemden istenilen noktaların değerlerinin elde edilmesine dayanır.



N adet noktadan N-1. dereceden polinom geçebilir

x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	\dots	f_n

- ❑ n elemandan oluşan bir $f(x)$ yukarıdaki tablodaki gibi tanımlanmış olsun.
- ❑ Lagrange yöntemine göre interpolasyon hesabı yapılırken kullanılacak polinom forma sahip fonksiyonun derecesi sahip olunan ölçüm değerlerinin adedinden bir eksik olacak şekilde seçilir.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

Eğer verilen aralıklar eşit değilse Lagrange İnterpolasyon polinomu kullanılır. En basit haliyle 2 nokta kullanan Lineer İnterpolasyon denklemi düzenlenirse:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

$$y = \left[1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right] y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Bulunan bu ifade n nokta için genelleştirilirse:

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

$$\begin{aligned} y_p(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)} * y_1 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)} * y_2 \\ & \vdots \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})} * y_n \end{aligned}$$

Elde edilen $f(x)$ eşitliğinde x değişkeninin istenilen değer karşılığı sayısal olarak girilmek suretiyle fonksiyonun karşılığı Lagrange yöntemine göre bulunmuş olur.

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) \cdot y_i \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange İnterpolasyon

- ❑ **Örnek:** Aşağıdaki tabloda x 'e bağlı bir $f(x)$ fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. $x=3$ için aradeğeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz

x	0	2	4	7	10
$f(x)$	1	7	10	13	20

- ❑ **Çözüm:**

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{(x-2)(x-4)(x-7)(x-10)}{(0-2)(0-4)(0-7)(0-10)} * 1 + \frac{(x-0)(x-4)(x-7)(x-10)}{(2-0)(2-4)(2-7)(2-10)} * 7 \\ & \frac{(x-0)(x-2)(x-7)(x-10)}{(4-0)(4-2)(4-7)(4-10)} * 10 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-10)}{(7-0)(7-2)(7-4)(7-10)} * 13 \\ & + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-7)}{(10-0)(10-2)(10-4)(10-7)} * 20 \end{aligned}$$

$$\mathbf{X=3 \text{ için } f(3)=8.7583}$$

Örnek

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(4) = 1.3862944 \quad \text{olduğuna göre, lagrange enterpolasyon kullanarak}$$

$$\ln(6) = 1.7917595$$

$\ln(2) = ?$ sonucunu bulunuz. [$\ln(2)=0.69314718$]

$$f(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$\ln(x) = \frac{x-4}{1-4} \frac{x-6}{1-6} * 0 + \frac{x-1}{4-1} \frac{x-6}{4-6} * 1.3862944 + \frac{x-1}{6-1} \frac{x-4}{6-4} * 1.7917595$$

$$\ln(2) = \frac{2-4}{1-4} \frac{2-6}{1-6} * 0 + \frac{2-1}{4-1} \frac{2-6}{4-6} * 1.3862944 + \frac{2-1}{6-1} \frac{2-4}{6-4} * 1.7917595$$

$$\ln(2) = 0.5658413$$

Örnek

Aşağıdaki tabloda x 'e bağlı bir $f(x)$ fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. $x = 2.3$ için ara değeri **Lagrange interpolasyon** yöntemi kullanarak bulunuz

x	1.1	1.7	3
$f(x)$	10.6	15.2	20.3

$$y_p(x) = \frac{x-1.7}{1.1-1.7} \frac{x-3}{1.1-3} 10.6 + \frac{x-1.1}{1.7-1.1} \frac{x-3}{1.7-3} 15.2 + \frac{x-1.1}{3-1.1} \frac{x-1.7}{3-1.7} 20.3$$

$$x = 2.3 \quad \Rightarrow \quad y_p(2.3) = 18.3813$$

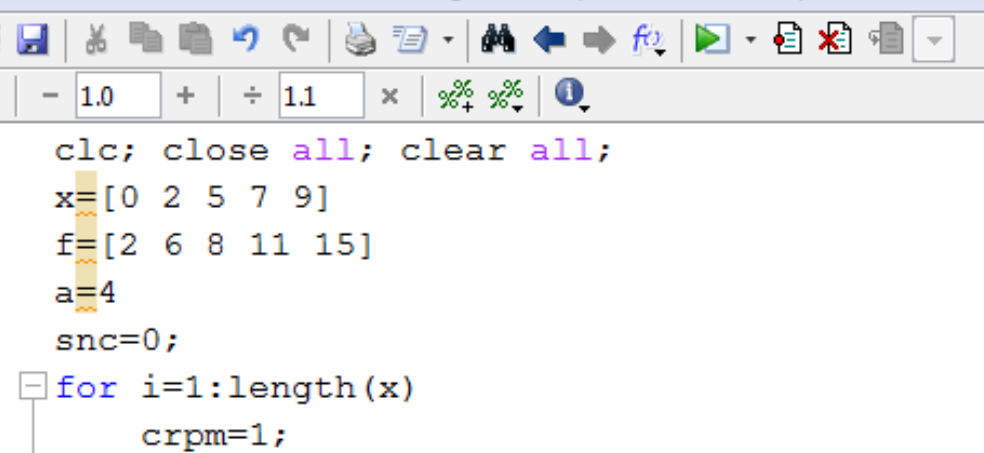
Örnek

- ❑ Aşağıdaki tabloda x 'e bağlı bir $f(x)$ fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. $X=4$ için ara değeri **Lagrange interpolasyon** yöntemi kullanarak bulunuz
- ❑ Soruyu hem el ile hemde matlab ile çözünüz. Matlab da program (döngüler) yazınız

x	0	2	5	7	9
$f(x)$	2	6	8	11	15

Örnek

$$f(3) = 7.190476$$



```
1 - clc; close all; clear all;
2 - x=[0 2 5 7 9]
3 - f=[2 6 8 11 15]
4 - a=4
5 - snc=0;
6 - for i=1:length(x)
7 -     crpm=1;
8 -     for j=1:length(x)
9 -         if i==j
10 -             crpm=crpm;
11 -         else
12 -             crpm=crpm*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
13 -         end
14 -     end
15 -     snc=snc+crpm*f(i);
16 - end
17 - disp(snc)
```

KAYNAKLAR

- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*”, Seçkin Yayıncılık
- Cüneyt Bayılmış, *Sayısal Analiz Ders Notları*, Sakarya Üniversitesi
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Mehmet Yıldırım, *Sayısal Analiz Ders Notları*, Kocaeli Üniversitesi