SAYISAL ÇÖZÜMLEME

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

6. Hafta

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

İÇİNDEKİLER

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümü

Matris Notasyonu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times m} = \left[a_{ij} \right]$$

$$i = 1,2,\dots,n$$
$$j = 1,2,\dots,m$$

Matrislerde Toplama ve Çıkartma

Toplama ve çıkartma işlemlerinin yapılabilmesi için matris büyüklüklerinin (satır/sütun sayılarının) eşit olması gerekir.

$$\left.\begin{array}{l} A = \left[a_{ij}\right] \\ B = \left[b_{ij}\right] \end{array}\right. \Rightarrow C = A \pm B = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right]$$

Matrislerde Çarpma

Çarpma işleminin yapılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının eşit olması gerekir.

$$[A]_{m\times n}[B]_{n\times p} = [C]_{m\times p}$$

$$m\times n \quad . \quad n\times p \quad = \quad m\times p$$

Matrisle Bir Skalerin Çarpımı

Bir matris ile bir skalerin çarpımı, matrisin her elemanının o skalerle çarpılmasıyla elde edilen matristir.

$$s\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s.a & s.b \\ s.c & s.d \end{bmatrix}$$

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ise A.B=?, B.A=?, 2A=?

Lineer Denklem Sistemi

Belirli sayıda bilinmeyen ve belli sayıda denklemden oluşan bir denklem sistemi lineer terimlerden oluşuyorsa bu sistem lineer denklem sistemi olarak adlandırılır.

$$2x - 3y = 5$$
$$-2x + y = -1$$

denklem sistemi iki bilinmeyen içeren lineer bir denklem sistemidir. Genel olarak *n* adet bilinmeyen (x_1, x_2, x_3,….., x_n) içeren lineer bir denklem sistemi aşağıda gösterildiği gibi çık halde veya daha basit olarak matris formunda yazılabilir.

$$\left.\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{3n}x_n = & b_3 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\
a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{nn}x_n = & b_n
\end{array}\right\} \quad A.\vec{x} = \vec{b}$$

Lineer Denklem Sistemi

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{3n}x_n = & b_3 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \dots\dots\dots & a_{mn}x_n = & b_m
\end{array}
$$

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}}
\overset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots. \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}}
=
\overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots. \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}}
$$

A: katsayılar matrisi

x: bilinmeyen vektör

b: sağ taraf vektörü

Örnek

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Lineer bir denklem sisteminin çözülerek bilinmeyen x_i değerlerinin bulunmasında değişik yöntemler kullanılır. Bu yöntemler 2 grup halinde ayrılabilir.

1-) Analitik (Direkt) Yöntemler: Denklem sisteminin çözümünü matematik anlamda tam olarak veren yöntemlerdir. Bu yöntemler sayesinde doğrudan aranan çözüm elde edilir.

- Matris Tersi Yöntemi
- Cramer Yöntemi
- Eliminasyon Yöntemi
- Gauss Eliminasyon Yöntemi
- Gauss-Jordan Yöntemi
- LU Ayırma Yöntemi

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

2-) İteratif (Dolaylı) Yöntemler: Çözümü bulmak için öncelikle tahmini değerlerden başlanır ve adım adım ardışık hesaplamalarla belirli tolerans sınırları içinde aranan çözüme ulaşılır.

- Basit İterasyon (Jacobi) Yöntemi
- Gauss-Seidel Yöntemi
- Rölaksasyon (SOR) Yöntemi

Matrisin Tersi ile Çözümleme

Verilen $A.x=b$ denklem sisteminde, katsayılar matrisinin tersi (A^{-1}) hesaplandığında çözüm vektörü iki matrisin çarpımından elde edilebilir.

$$A.\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}.\vec{b}$$

Matris tersinin hesabı için farklı yöntemler vardır. Fakat bu yöntemlerde, eleman sayısı ne kadar fazla ise matris tersini bulmak için daha fazla bilgisayar hafızasına ve hesaplama zamanına ihtiyaç duyulur.

Matrisin Tersi Nasıl Bulunur

Bir matrisin tersini alabilmek için:

- **Matrisin determinantını ve matrisin ekini (adjoint) bulmak gerekir.**

Bir matrisin ekinin bulunması için:

1. **Matrisin bütün elemanlarının eş-çarpanları bulunur.**
2. **Bulunan eş-çarpanlardan yeni bir matris oluşturulur.**
3. **Bu matrisin transpozesi alınır.**

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini bulunuz.

1) Matrisin determinantı bulunur.

2) Matrisin eş-çarpanları bulunur.

Örnek-Devam

3) Ek-matris bulunur.

4) Matrisin tersi bulunur.

MATLAB'da Matrisin Tersini Alma

Matrisin tersini verir.

inv (matris)

tersi hesaplanacak matris

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -9 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

1) Matrisin determinantı bulunur.

2) Matrisin eş-çarpanları bulunur.

Örnek-Devam

3) **Ek-matris bulunur.**

4) **Matrisin tersi bulunur.**

5) **Bilinmeyenler vektörü bulunur.**

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Örnek-MATLAB ile çözümü

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Cramer Yöntemi ile Çözümleme

Klasik yöntemlerden biri olup, çözüm iki matrisin determinantları oranı olarak elde edilir. Bu yöntemde, *n* tane bilinmeyen içeren

$$A.\vec{x} = \vec{b}$$

şeklindeki lineer denklem sisteminin çözümü;

$$x_i = \frac{|D_i|}{|A|} \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n)$$

$|D_i|$: Katsayılar matrisinde (*A*), *i.* *s*ütun atılıp yerine b vektörünün konması ile elde edilen matrisin determinantıdır.

Bu yöntemde, her biri (n×n) boyutundaki (n+1) adet matrisin determinantının bulunup, bunların oranlanması gerekir. Bundan dolayı işlem sayısı fazla ve çözüm süresi uzundur.

Matrislerde Determinant (2×2)

Matrisin köşegenindeki elemanların çarpımından ters köşegenindeki elemanlarının çarpımı birbirinden çıkarılarak bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

Matrislerde Determinant (3×3)

1. ve 2. satırlar/sütunlar, aynı matrise 4. ve 5. satır/sütun olarak eklenir ve oluşan matriste sol köşegen çarpımlarının toplamından sağ köşegen çarpımlarının toplamı çıkarılarak determinant bulunur.

$$|C| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \end{matrix}$$

4 (-3) 4 =-48

(-2) 1 (-2)=4

6 (-1) 2 =-12

-48+4-12 =-56

-2 (-3) 2 =12

6 1 4 =24

4 (-1) (-2) =8

12+24+8 =44

44-(-56) =100

$$|C| = \left| \begin{matrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & -1 \\ 6 & -3 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

(-48) + 4 + (-12) = -56

12 + 8 + 24 = 44

44-(-56) =100

Seçilen Satır/Sütuna göre Determinant Bulma

Minör ve Kofaktör kullanılarak determinant hesaplanır.

- **Bir kare matrisin bulunduğu a_{ij} elemanının i'nci satır ve j'nci sütunu atıldığında geriye kalan M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının küçüğü (minörü) denir.**
- **$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ sayısına a_{ij} elemanının eş-çarpanı (kofaktörü) denir.**

Örnek: 3x3 matrisin determinantı,

❶ **Bir satır yada sütun seçilir**

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}$$

❷ **Determinant ifadesi yazılır**

$$|A| = a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13}$$

❸ **Kofaktörleri hesaplanır**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

MATLAB’da Matrisin Determinantı

Matrisin determinantını verir.

det (matris)

determinantı hesaplanacak matris

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1) A Matrisinin determinantı bulunur.

2) D Matrisleri bulunur.

Örnek-Devam

3) **Bilinmeyen değerler bulunur.**

Örnek-MATLAB ile çözümü

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Gauss Eliminasyonu Yöntemi ile Çözümleme

Değişkenlerin yok edilmesi ilkesine dayanan bu yöntemde öncelikle katsayılar matrisi alt/üst üçgensel hale dönüştürülür. Daha sonra çözüm vektörü hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Bu yöntemde katsayılar matrisindeki köşegen elemanlar mutlak değerce maksimum olacak şekilde satırların yer değiştirilmesi (pivotlama) gerekir. Böylece yuvarlatma hataları azalır ve köşegendeki sıfır rakamı kalmayacağından dolayı sıfıra bölme hatası da oluşmaz.

Bu yöntemde, her biri (n×n) boyutundaki (n+1) adet matrisin determinantının bulunup, bunların oranlanması gerekir. Bundan dolayı işlem sayısı fazla ve çözüm süresi uzundur.

Örnek

$$\begin{aligned} 5x - 2y - 3z &= 4 \\ -5x + 7y - 2z &= -10 \\ -3x - 3y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

1. x değerleri yalnız bırakılır.

31

Örnek-Devam

2. 2. ve 3. eşitliklerden 1. eşitlik çıkarılarak *x*'den kurtulunur.

3. 2. eşitlik -1'e ve 3. eşitlik 5/7'ye bölünerek tekrar yazılır.

4. 3. eşitlikten 2. eşitlik çıkarılarak *y*'den kurtulunur.

5. 3. eşitlikten *z* hesaplanır.

6. *z*, 2. eşitlikte yerine koyulur ve *y* hesaplanır.

7. *y* ve *z*, 1. eşitlikte yerine koyulur ve I_1 hesaplanır.

Gauss Eliminasyonu Yönteminin MATLAB'ta Çözümü

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

MATLAB'da Sembolik Denklem Çözümü

solve; cebirsel denklemlerin sembolik olarak çözümünde kullanılır.

solve ('denk1', 'denk2',…., 'denkn')

çözümü yapılacak denklemler

Örnek:

$$4x + 3y = 10$$
$$2x - y = 0$$

```
>> [x y]=solve('4*x+3*y=10','2*x-y=0')

x =

1


y =

2

>>
```

KAYNAKLAR

- **Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları**
- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi.**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*” Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, “ Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları” Vipaş Yayıncılık**