SKALAR ÇARPMA-(NOKTA ÇARPIMI)

R^n de iki vektör $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olsun. u ve v nin nokta, skalar veya iç çarpımı $u.v$ ile gösterilen bir skalardır ve vektörlerin karşılıklı bileşenlerinin çarpılıp toplanmasına eşittir:

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots, u_nv_n$$

dir. Eğer $u.v = 0$ ise u ve v vektörlerine ***ortogonal (veya dik) vektörler*** denir.

Örnek 1: $u = (1, -2,3, -4), v = (6,7,1, -2), w = (5, -4,5, -7)$ olsun. Bu durumda

$$u.v = 1.6 + (-2).7 + 3.1 + (-4).(-2) = 6 - 14 + 3 + 8 = 3$$

$$u.w = 1.5 + (-2).(-4) + 3.5 + (-4).7 = 5 + 18 + 15 - 28 = 0$$

Böylece u ve w ortogonaldir.

R^n de nokta çarpımının özellikleri aşağıdadır.

Teorem 1: Herhangi $u, v, w \in R^n$ vektörleri ve $k \in R$ skaları için

(i) $(u + v).w = u.w + v.w$
(ii) $(ku).v = k(u.v)$
(iii) $u.v = v.u$
(iv) $u.u \geq 0$ dır. Eğer $u.u = 0$ ise $\Leftrightarrow u = 0$ dır.

BİR VEKTÖRÜN NORMU

R^n de bir vektör $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ olsun. u vektörünün normu (uzunluğu), $u.u$ nun negatif olmayan karekökü olarak tanımlanır ve $\|u\|$ yazlır:

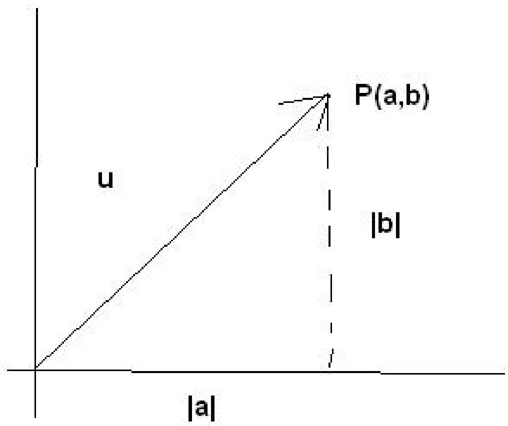
$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

$u.u \geq 0$ olduğundan, karekök vardır. Yine eğer $u \neq 0$ ise, $\|u\| > 0$; ve $\|0\| = 0$ dır.

Bir vektörün normunun yukarıdaki tanımı bir vektörün (Öklid) geometrisindeki boyu ile uygunluk gösterir. Özellikle, R^2 düzleminde bitim noktası Şekil 1'deki gibi $P(a, b)$ olan bir vektör (ok) u olsun. O zaman $|a|$ ve $|b|$ uzunlukları u vektörü ile dik ve yatay doğrultuların oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarıdır. Pisagor teoremi gereğince u nun $\|u\|$ uzunluğu

$$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dir. Bu değer u nun yukarıda tanımlanan normu ile aynıdır.



Şekil 1

Örnek 2: $u = (3, -12, 4)$ olsun.

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

bulunur.

Eğer $\|u\| = 1$ veya, eşdeğer olarak $u.u = 1$ ise u birim vektördür. Şimdi, eğer v sıfırdan farklı herhangi bir vektör ise, o zaman

$$\hat{v} \equiv \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$$

v ile aynı yönde olan bir birim vektördür. ($\hat{v}$ yı bulma işlemi v yi normlama olarak adlandırılır). Örneğin

$$\hat{v} \equiv \frac{1}{\|v\|} v = \left(\frac{2}{\sqrt{102}}, \frac{-3}{\sqrt{102}}, \frac{8}{\sqrt{102}}, \frac{-5}{\sqrt{102}}\right)$$

$v = (2, -3, 8, -5)$ vektörü yönünde bir birim vektördür.

Teorem 2 (Cauchy-Schwarz): R^n deki herhangi u, v vektörleri için $|u.v| \ll \|u\|\|v\|$ bağıntısı sağlanır.

Teorem 3 (Minkowski): R^n deki herhangi u, v vektörleri için $\|u + v\| \ll \|u\| + \|v\|$ dir.

Uzaklık, Açılar, İzdüşümler

R^n deki iki vektör $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olsun. u ve v arasındaki uzaklık, $d(u, v)$ ile gösterilir ve

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımın R^2 düzleminde alışılmış Öklid uzaklığına eşdeğer olduğunu göstereceğiz. R^2 de $u = (a, b), v = (c, d)$ olsun. $P(a, b)$ ve $Q(c, d)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(u, v) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

dir. Öte yandan, yukarıdaki tanım uyarınca

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(a-c, b-d)\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

dir. İkiside aynı değeri verir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak R^n de sıfırdan farklı iki u, v vektörleri arasındaki θ açısını

$$cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

İle tanımlayabiliriz. Eğer $u.v = 0$ ise, $\theta = 90^0$ (veya $\theta = \pi/2$) olduğunu belirtelim. Bu, daha önceki ortogonallik tanımıyla bağdaşır.

Örnek 3: $u = (1,-2,3)$ ve $v = (3,-5,-7)$ vektörlerini alalım. O zaman

$$d(u,v) = \sqrt{(1-3)^2 + (-2+5)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{4+9+100} = \sqrt{113}$$

bulunur. u ve v arasındaki açı θ olmak üzere $cos\theta$ yı bulmak için, ilk önce

$$u.v = 3 + 10 - 21 = -8, \|u\|^2 = 1 + 4 + 9 = 14, \|v\|^2 = 9 + 25 + 49 = 83$$

değerlerini buluruz. O zaman

$$cos\theta = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{83}}$$

bulunur.

R^n de iki vektör $u, v \neq 0$ olsun. u nun v üzerine (vektör) izdüşümü

$$u^* = izd(u,v) = \frac{u.v}{\|v\|^2}.v$$

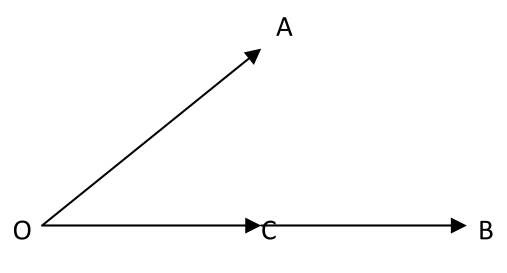
vektörüdür. Bu tanımın fizikteki vektör izdüşümü kavramıyla bağdaştığını göstereceğiz. Şekil 2'deki u ve v vektörlerini düşünelim. u nun v üzerine (dik) izdüşümü

$$\|u^*\| = \|u\|cos\theta = \|u\|\frac{u.v}{\|u\|\|v\|} = \frac{u.v}{\|v\|}$$

büyüklüğüne sahip bir u^* vektörüdür. u^* vektörünü elde etmek için onun büyüklüğünü birim vektörle çarparız.

$$\|u^*\| = u^*\frac{v}{\|v\|} = \frac{u.v}{\|v\|^2}.v$$

Bu yukarıdaki $izd(u,v)$ ile bağdaşır. ($|\overrightarrow{OA}| = \vec{u}, |\overrightarrow{OC}| = u^*, |\overrightarrow{OCB}| = \vec{u},\ m(A\hat{O}C) = \theta^0$)



Şekil 2

R^n de Konumlanmış Vektörler, Hiperdüzlemler ve Doğrular

Bu kısımda R^n de bir nokta olan bir n-li $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_i)$ ile O orjin noktasından $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ noktasına giden bir vektör olan $v = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ n-lisi arasındaki farkı inceleyeceğiz. R^n de $P = (a_i)$ ve $Q = (b_i)$ nokta çiftleri P den Q ya, bağlı vektör veya yönlü doğru parçası tanımlar ve $\overrightarrow{PQ}$ ile gösterilir. $\overrightarrow{PQ}$ yu

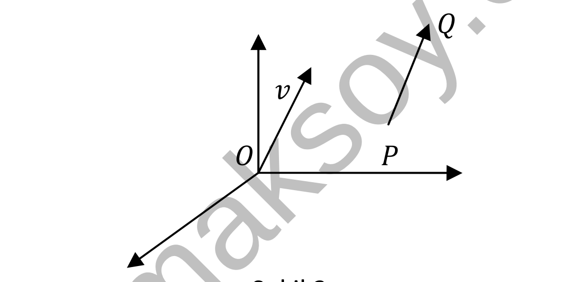
$$v = Q - P = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n]$$

ile gösteririz. Çünkü $\overrightarrow{PQ}$ ile v Şekil 3'de görüldüğü gibi aynı yön ve aynı büyüklüğe sahiptir.

R^n de bir H hiperdüzlemi

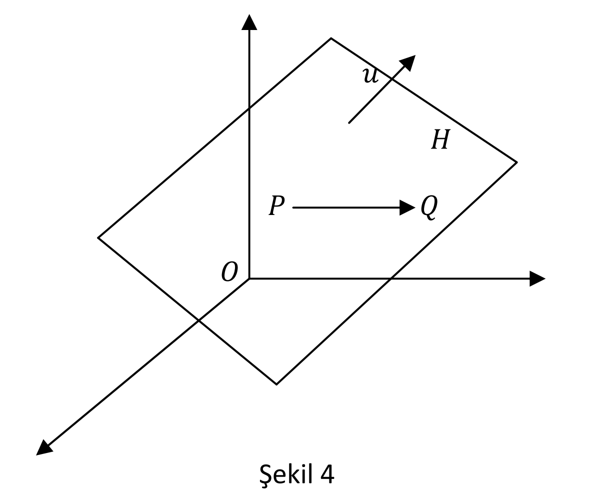
$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$$

bozulmamış lineer denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarının kümesidir. Özel olarak, R^2 de bir H hiperdüzlemi bir doğrudur ve R^3 de bir düzlemdir. $a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \neq 0$ vektörü H nın bir normali olarak adlandırılır. Bu termonolojiyi bize veren gerçek,



Şekil 3

$P, Q \in H$ olmak üzere herhangi $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasının u normal vektörüne ortogonal olması gerçeğidir. Bu gerçek Şekil 4'de gösterilmiştir.

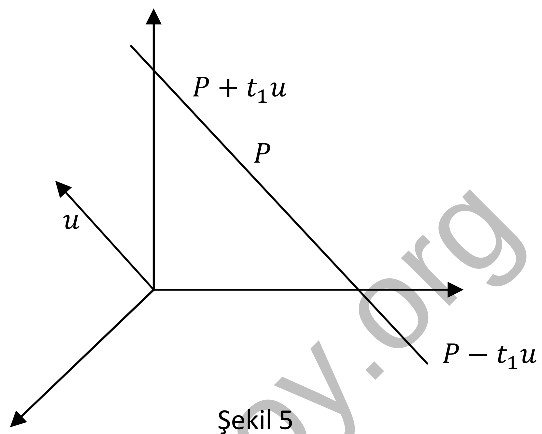


Şekil 4

R^n de bir $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktasından geçen ve sıfırdan farklı $u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ vektörü yönünde olan bir L doğrusu

$$X = P + tu \text{ veya } \begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t \\ x_2 = a_2 + u_2 t \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n = a_n + u_n t \end{cases}$$

ifadesini sağlayan $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktalarından oluşur, burada t parametresi bütün reel sayıları tarar. Şekil 5'e bakınız.



Şekil 5

Örnek 4:

(a) R^4 de bir $P(1,3,-4,2)$ noktasından geçen ve $u = [4,-2,5,6]$ vektörüne normal (dik) olan H hiperdüzlemini düşünelim. Bunun denklemi

$$4x - 2y + 5z + 6t = k$$

biçiminde olmalıdır. Bunun denkleminde P nin koordinatları x, y, z yerlerine yazılır ve

$$4x - 2y + 5z + 6t = k \text{ veya } 4 - 6 - 20 + 12 = k \text{ veya } k = -10$$

elde edilir. Böylece H nın denklemi, $4x - 2y + 5z + 6t = -10$ dir.

(b) R^3 de bir $P(1,2,3,-4)$ noktasından geçen ve $u = [5,6,-7,8]$ yönünde olan L doğrusunu düşünelim. L nin bir parametrik gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{matrix} x_1 = 1 + 5t \\ x_2 = 2 + 6t \\ x_3 = 3 - 7t \\ x_4 = -4 + 8t \end{matrix} \quad \text{veya } (1 + 5t, 2 + 6t, 3 - 7t, -4 + 8t)$$

$t = 0$ bize P noktasının L üzerinde olması gerektiğini belirtir.

R^n de Eğriler

R reel ekseninde bir aralık D olsun. $F: D \to R^n$ sürekli fonksiyonu R^n de bir eğridir. Böylece her $t \in D$ ye R^n de aşağıda belirtilen nokta karşılık gelir:

$$F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]$$

Üstelik, $F(t)$ nin türevi (eğer varsa)

$$V(t) = dF(t)/dt = [dF_1(t)/dt, dF_2(t)/dt, \dots, dF_n(t)/dt]$$

Vektörünü verir ki bu vektör eğriye teğettir. $V(t)$ yi normlayarak

$$\boldsymbol{T(t)} = \frac{V(t)}{\|V(t)\|}$$

elde edilir, bu vektör eğriye teğet olan birim vektördür. [Birim vektörler geometrik anlamları gereğince kalın harflerle gösterilir.]

Örnek 5: R^3 de bir C eğrisini düşünelim:

$$F(t) = [sint, cost, t].$$

$F(t)$ nin [veya $F(t)$ nin her bileşeninin] türevini alarak

$$V(t) = [cost, -sint, 1]$$

bulunur. Bu vektör eğriye teğettir. $V(t)$ yi normlarız. İlk önce

$$\|V(t)\|^2 = cos^2 t + sin^2 t + 1 = 1 + 1 = 2$$

elde ederiz. O zaman

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t}) = \frac{V(t)}{\|V(t)\|} = \left[\frac{cos\, t}{\sqrt{2}}, \frac{-sin\, t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

olur. Bu vektör, eğriye teğet olan birim vektördür.

Uzay Vektörleri, ijk Gösterimi

R^3 deki vektörler, uzay vektörleri olarak adlandırılır. Pek çok uygulamada, özellikle fizikte görülürler. Gerçekten, bu şekildeki vektörler için aşağıdaki gibi özel bir notasyon sık sık kullanılır:

$i = (1,0,0)$, x yönündeki birim vektörü gösterir.

$j = (0,1,0)$, y yönündeki birim vektörü gösterir.

$k = (0,0,1)$, z yönündeki birim vektörü gösterir.

O zaman R^3 de herhangi $u = (a, b, c)$ vektörü

$$u = (a, b, c) = ai + bj + ck$$

formunda tek olarak ifade edilir. i, j, k birim vektörler ve hepsi de ortogonal olduğundan,

$$i.i = 1,\ j.j = 1,\ k.k = 1 \text{ ve } i.j = 0,\ i.k = 0,\ j.k = 0$$

sağlanır.

Daha önce tartışılan vektör işlemleri yukarıdaki gösterimle aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$u = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $v = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ olsun. O zaman

$$u + v = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

$$u.v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$cu = ca_1 i + ca_2 j + ca_3 k$$

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

elde edilir, burada c bir skalardır.

Örnek 6: $u = 3i + 5j - 2k$ ve $v = 4i - 3j + 7k$ olsun.

(a) $u + v$ yi bulmak için karşılıklı bileşenler toplanır. $u + v = 7i + 2j + 5k$ bulunur.
(b) $3u - 2v = (9i + 15j - 6k) - (8i - 6j + 14k) = i + 21j - 20k$
(c) $u.v$ yi bulmak için, karşılıklı bileşenler çarpılır ve sonra toplanır: $u.v = 12 - 15 - 14 = -17$
(d) $\|u\|$ yi bulmak için her bileşenin karesi alınır ve toplanarak $\|u\|^2$ elde edilir. Yani $\|u\|^2 = 9 + 25 + 4 = 38$ ve buradan $\|u\| = \sqrt{38}$.

Çapraz Çarpım

R^3 deki $u.v$ vektörleri için **çapraz çarpım** adı verilen ve $u \times v$ ile gösterilen bir özel işlem vardır. Özellikle,

$$u = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \text{ ve } v = (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

olsun. O zaman,

$$u \times v = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

$u \times v$ nin vektör olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle $u \times v, u$ ve v nin **vektör çarpımı** veya **dış çarpım** adını da alır. Determinant gösterimini kullanarak ($\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$) gibi, çapraz çarpım

$$u \times v = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

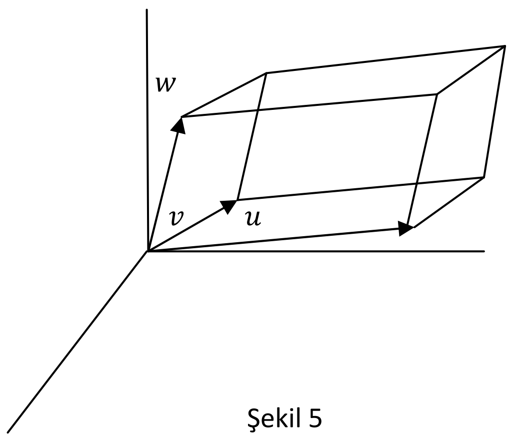
şeklinde de ifade edilebilir. Eşdeğer olarak,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

dir. Çapraz çarpımın iki önemli özelliği aşağıdadır.

Teorem 4: R^3 deki vektörler u, v, w olsun.

(i) $u \times v$ vektörü hem u hem de v ye ortogonaldir.
(ii) $u.v \times w$ "üçlü çarpımının mutlak değeri u, v ve w vektörlerinin üzerinde kurulabilen paralelyüzün hacmini gösterir.



Şekil 5

Örnek 7:

(a) $u = 4i + 3j + 6k$ ve $v = 2i + 5j - 3k$ olsun. O zaman

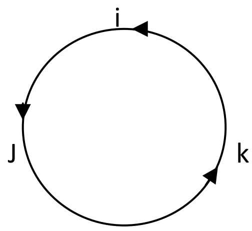
$$u \times v = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} k = -39i + 24j + 14k$$

(b) $(2, -1{,}5) \times (3{,}7{,}6) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right) = (-41{,}3{,}17)$ (Burada çapraz çarpım **ijk** notasyonunu kullanmadan buluruz)

(c) **i,j,k** vektörlerinin çapraz (dış) çarpımları aşağıdaki gibidir:

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j \text{ veya } j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$$

Başka bir ifadeyle, eğer (i, j, k) üçlüsüne bir dairesel permütasyon olarak bakarsak, yani Şekil 6 daki gibi bir çemberin etrafında saat hareketlerinin tersi yönünde düşünülürse, o zaman ikisinin verilen yöndeki çarpımı üçüncüdür fakat ikisinin ters yönde çarpımı üçüncünün negatif işaretlisine eşittir.



Şekil 6

Kompleks Sayılar

Kompleks (karmaşık) sayılar kümesi C ile gösterilir. Formal olarak, bir kompleks sayı reel sayıların bir sıralı (a, b) ikilisidir. Eşitlik, toplama ve çarpma aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Bir a reel sayısını $(a, 0)$ kompleks sayısıyla

$$a \leftrightarrow (a, 0)$$

biçiminde eşleriz. Reel sayılarda toplama ve çarpma reel sayıları koruduğundan

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0).(b, 0) = (ab, 0)$$

bulunur. Böylece R ve C nin bir alt kümesine izomorf olarak bakılabilir ve uygun (mümkün) olduğunda a ile $(a, 0)$ yer değiştirir.

$(0,1)$ kompleks sayısı i ile gösterilir.

$$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \text{ veya } i = \sqrt{-1}$$

önemli özelliğine sahiptir. Üstelik,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \text{ ve } (0, b) = (b, 0)(0,1)$$

kullanılarak

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0,1) = a + bi$$

olur. $z = a + bi$ gösterimi (a, b) den daha kullanışlıdır. Burada $a = Rez$ ve $b = Imz$, sırasıyla, z kompleks sayısının reel ve sanal kısmı olarak adlandırılır. Örneğin, $z = a + bi$ ve $w = c + di$ kompleks sayılarının toplamı ve çarpımı değişme ve dağılma özellikleriyle birlikte $i^2 = -1$ kullanarak elde edilebilir:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z.w = (a + bi).(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$z = (a, b) = a + bi$ kompleks sayısının eşleniği

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

şeklinde tanımlanır. O zaman $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$ dir. Eğer, ek olarak, $z \neq 0$ ise o zaman z nin z^{-1} tersi ve w nun z ile bölümü, sırasıyla,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \text{ ve } \frac{w}{z} = wz^{-1}$$

ile verilir, burada $w \in C$ dir. $-z = -1z$ ve $w - z = w + (-z)$ yi de tanımlarız.

Reel sayılar bir doğru üzerindeki noktalarla temsil edilebildiği gibi kompleks sayılar da düzlemdeki noktalarla temsil edilebilir. Özellikle, (a, b) noktasını düzlemde $z = a + bi$ kompleks sayısını gösteren nokta olarak kabul edebiliriz. Bu sayının reel kısmı a ve sanal kısmı b dir.

z nin mutlak değeri, z den orjine olan uzaklık olarak tanımlanır ve $|z|$ yazılır:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Belirtelim ki $|z|$, (a, b) vektörünün normuna eşittir. Ayrıca $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ dir.

Örnek 8: $z = 2 + 3i$ ve $w = 5 - 2i$ kabul edelim. O zaman

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$$

$$zw = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$$

$$\bar{z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i \text{ ve } \bar{w} = \overline{5 - 2i} = 5 + 2i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{5 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 2i)\,(2 - 3i\,)}{(2 + 3i)(2 - 3i\,)} = \frac{4 - 19i}{13}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ ve } |w| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

C^n de Vektörler

Kompleks sayıların n lilerinin kümesi C^n ile gösterilir ve kompleks n −uzay (n −boyutlu karmaşık uzay) adını alır. Reel halde olduğu gibi C^n nin elemanlarına noktalar veya vektörler, C nin elemanlarına skalarlar adı verilir ve C^n de vektörler toplama ve skalarla çarpma

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$$

$$z(z_1, z_2, \dots, z_n) = (zz_1, zz_2, \dots, zz_n)$$

ile verilir, burada $z_i, w_i, z \in C$ dir.

Örnek 9:

(a) $(2 + 3i, 4 - i, 3) + (3 - 2i, 5i, 4 - 6i) = (5 + i, 4 + 4i, 7 - 6i)$
(b) $2i(2 + 3i, 4 - i, 3) = (-6 + 4i, 2 + 8i, 6i)$

Şimdi C^n de gelişigüzel vektörler u ve v olsun:

$$u = (z_1, z_2, \dots, z_n), v = (w_1, w_2, \dots, w_n), z_i, w_i, z \in C.$$

u ve v nin nokta çarpımı, veya iç çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$u.v = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

Bu tanımın, w_i reel iken $w = \overline{w_i}$ olduğundan, önceki reel halde olan iç çarpım tanımına indirgenebileceğine işaret edelim. u nun normu

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \cdots + z_n\overline{z_n}} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots |z_n|^2}$$

ile tanımlanır. $u.u$ ve dolayısıyla $\|u\|$ reeldir.

Örnek 10: $u = (2 + 3i, 4 - i, 2i)$ ve $v = (3 - 2i, 5, 4 - 6i)$ olsun. O zaman

$$u.v = (2 + 3i)\overline{(3 - 2i)} + (4 - i)\overline{(5)} + (2i)\overline{(4 - 6i)}$$

$$= (2 + 3i)(3 + 2i) + (4 - i)5 + (2i)(4 + 6i) = 13i + 20 - 5i - 12 + 8i = 8 + 16i$$

$$u.u = (2 + 3i)\overline{(2 + 3i)} + (4 - i)\overline{(4 - i)} + (2i)\overline{(2i)}$$

$$= (2+3i)(2-3i) + (4-i)(4+i) + (2i)(-2i) = 13 + 17 + 4 = 34$$

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{34}$$

C^n uzayı yukarıdaki vektörel toplama, skalarla çarpma ve nokta çarpımı işlemleri ile birlikte kompleks Öklidyen (n −boyutlu Öklid uzayı) olarak adlandırılır.

Uyarı: Eğer $u.v$ çarpımı, $u.v = z_1w_1 + z_2w_2 + \cdots + z_nw_n$ ile tanımlanmış olsaydı, o zaman $u \neq 0$; örneğin, eğer $u = (1, i, 0)$ olsa bile $u.u = 0$ olurdu. Gerçekten $u.u$ reel bile olmayabilirdi.