Lineer Cebir

Matrisler

Matrisler

$m \times n$ bir matris m satırlı n sütunlu aşağıdaki gibi bir dikdörtgensel sayılar dizinidir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Gösterim: Kolaylık olması açısından yukarıdaki matris $A = (a_{ij})_{m \times n}$ veya boyutları biliniyorsa $A = (a_{ij})$ şeklinde de gösterilebilir

n −boyutlu bir vektör $1 \times n$ şeklinde bir satır vektörü ya da $n \times 1$ şeklinde bir sütun vektörü olarak yazılabilir.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisi $n-$boyutlu satır vektörlerinin sütunu ya da $m-$boyutlu sütun vektörlerinin satırı olarak düşünülebilir.

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\\ \vdots\\ \mathbf{v}_m\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$$

$$A=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n), \qquad \mathbf{w}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$$

Matrislerde işlemler

$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ve $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ matrislerinin toplanabilmesi için aynı boyutlarda olması gerekir.

$C = A + B$ matrisi $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ şeklinde olup elemanları $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ olarak hesaplanır.

Örneğin;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisi ve r skaleri verilsin. Bu takdirde $D = rA$ matrisi $D = (d_{ij})_{m \times n}$ şeklinde olup elemanları $d_{ij} = r a_{ij}$ olarak hesaplanır.

Örneğin;

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ tipinde sıfır matris tüm elemanları sıfırlardan oluşan bir matris olup $0_{m\times n}$ ya da yalnızca 0 ile gösterilir.

Bir matrisin negatifi: $-A = (-1)\mathrm{A}$

Matrislerin farkı: $A - B = A + (-B)$

Dikkat edilirse matrislerde toplama, çıkarma ve skalerle çarpma işlemleri vektörlerdeki gibidir. Bu işlemlere lineer işlemler denir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad 3D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$2C + 3D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$A + D$ tanımlı değildir.

Matrislerdeki lineer işlemlerin özellikleri

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

$$r(sA) = (rs)A$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$(r + s)A = rA + sA$$

$$1A = A$$

$$0A = O$$

İç çarpım

n −boyutlu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

İç çarpım skaler çarpım olarak ta adlandırılır.

Matris çarpımı

A ve B matrislerinin çarpılabilmesi için A nın sütün sayısı ile B nin satır sayısının aynı olması gerekir.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n\times p}$ matrisleri veriliyor. $C = AB$ matrisi $C = (c_{ij})_{m\times p}$ şeklinde olup elemanları

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ k hesaplanır.

Yani matrisler satır-sütun şeklinde (iç) çarpılır:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \boxed{*} & * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{array}\right) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$$

$$\implies \quad AB = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_p \end{pmatrix}$$

Örnekler:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k),$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \ldots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \ldots & y_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \ldots & y_nx_n \end{pmatrix}.$$

Örnekler:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 17 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soldaki matrisin sütun sayısı ile sağdaki matrisin satır sayısı farklı olduğundan bu çarpım tanımlı değildir.

Aşağıdaki lineer denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Bu sistemin matris gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Matris çarpımının özellikleri

$(AB)C = A(BC)$ Birleşme özelliği

$(A + B)C = AC + BC$ Dağılma özelliği

$C(A + B) = CA + CB$ Dağılma özelliği

$(rA)B = A(rB) = r(AB)$

Yukarıdaki eşitlikler verilen matrisler için toplama ve çarpma işlemleri tanımlı ise her zaman sağlanır.

A ve B $n \times n$ tipinde kare matrisler ise AB ve BA her zaman tanımlıdır.
Fakat genel olarak $AB \neq BA$ dir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O halde

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$AB = BA$ olması durumda A ve B değişmelidir denir.

Örnek: A ve B $n \times n$ tipinde herhangi iki matris olsun. Bu takdirde $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ eşitliği sağlanır mı?

$$\begin{aligned} (A-B)(A+B) &= (A-B)A + (A-B)B \\ &= (AA - BA) + (AB - BB) \\ &= A^2 + AB - BA - B^2 \end{aligned}$$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart A ve B değişmeli olmasıdır.

Köşegen matris

$A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde kare matris ise bu matrisin a_{ii} elemanlarına **köşegen elemanları** denir.
Eğer A kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise **köşegen matris** denir.

Örnek: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi « $diag(7,1,2)$ » ile gösterilir.

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorem: $A = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $B = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ matrisleri için

$$\begin{aligned} A + B &= \mathrm{diag}(s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n), \\ rA &= \mathrm{diag}(rs_1, rs_2, \ldots, rs_n), \\ AB &= \mathrm{diag}(s_1 t_1, s_2 t_2, \ldots, s_n t_n). \end{aligned}$$

Not: Köşegen matrisler değişmelidir

Teorem: $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ ve $A, m \times n$ tipinde bir matris ise DA matrisi her $i = 1,2, \ldots, m$ için A' nın i. satırı ile d_i elemanının çarpılmasıyla elde edilir.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \implies DA = \begin{pmatrix} d_1\mathbf{v}_1 \\ d_2\mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ d_m\mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

Teorem: $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ ve $A, m \times n$ tipinde bir matris ise AD matrisi her $i = 1,2, \ldots, n$ için A' nın $i.$sütunu ile d_i elemanının çarpılmasıyla elde edilir.

$$\begin{aligned} & A = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n) \\ \Longrightarrow \quad & AD = (d_1\mathbf{w}_1, d_2\mathbf{w}_2, \ldots, d_n\mathbf{w}_n) \end{aligned}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ 7a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ 7a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

Birim matris

Birim matris köşegen elemanlarının tümü bir olan bir köşegen matristir.
$n \times n$ tipindeki birim matris I_n veya kısaca I ile gösterilir.

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genel olarak $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

Teorem: $A, m \times n$ tipinde bir matris ise $I_m A = A I_n = A$ dır.

Ters matris

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ tipindeki kare matrislerin kümesi olsun. Eğer

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ için

$$AB = BA = I_n$$

koşulunu sağlayan bir B matrisi varsa A tersinir bir matris

olup A' nın tersi B' dir. Yani $B = A^{-1}$ dir.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Tersinir olmayan bir matris **tekil**(singüler) matristir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Buna göre $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ ve $C^{-1} = C$ dir.