SAYISAL YÖNTEMLER

SAYISAL YÖNTEMLER

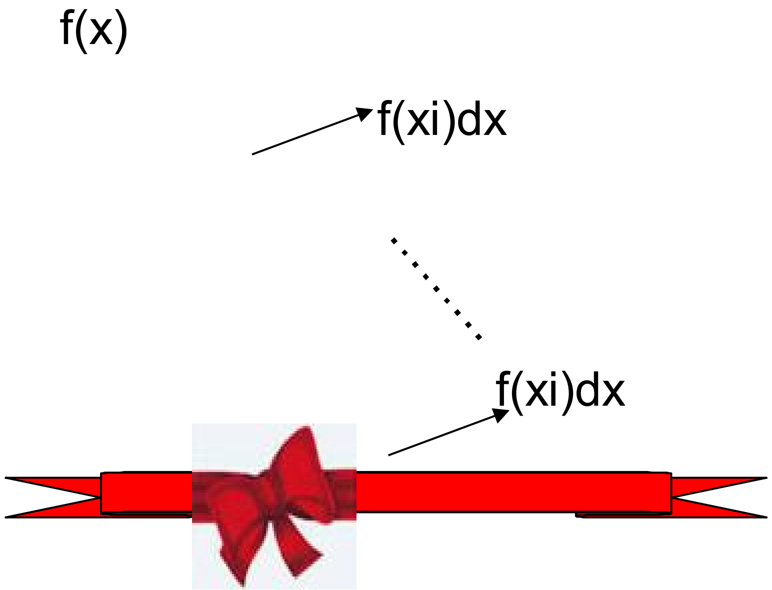
10. Hafta

SAYISAL İNTEGRAL

İÇİNDEKİLER

İntegral

İntegral; diferansiyelin ters işlemidir ve fonksiyon eğrisinin altında ve sınır değerler arasında kalan toplam alanı verir.



Mühendislikte İntegral

- **İntegral hesabı, mesleki olarak nerelerde karşımıza çıkar.**

- **Ortalama değer hesabı,**

$$h = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\,dt \qquad i_{ort} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt \qquad i_{ort} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$$

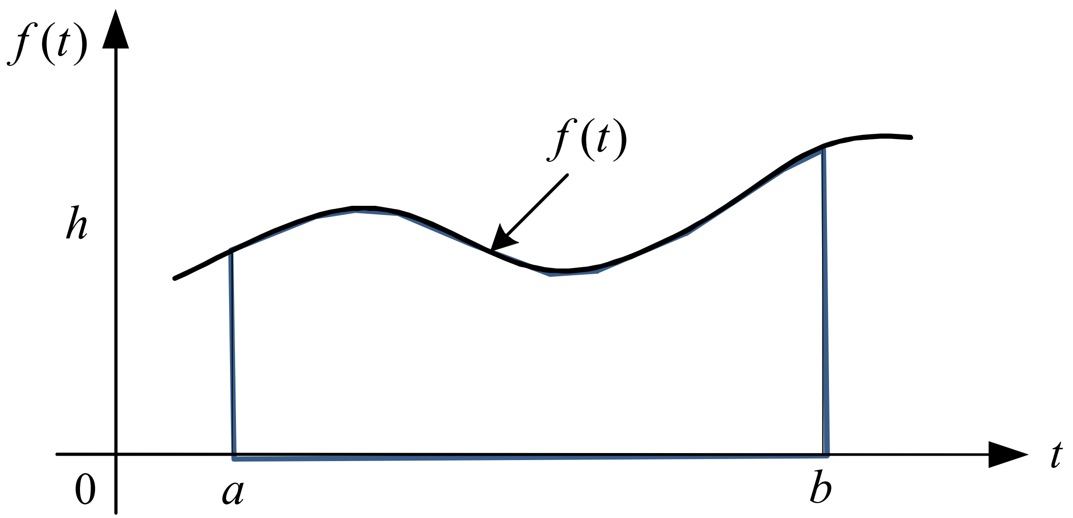
- **Etkin değer (*rms*) hesabı,**

$$f_{etk} = \frac{1}{(b-a)}\sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$$

Sayısal İntegral

- Mühendisler değişen sistemler ve süreçlerle sürekli olarak uğraşmak zorunda oldukları için türev ve integral kavramları mesleklerinin temel araçlarındandır.

- Sayısal integral, x=a ve x=b gibi iki sınır arasında kalan bölge küçük şeritlere ayrılır ve bu şeritlerin alanları toplanarak integral değeri elde edilir.



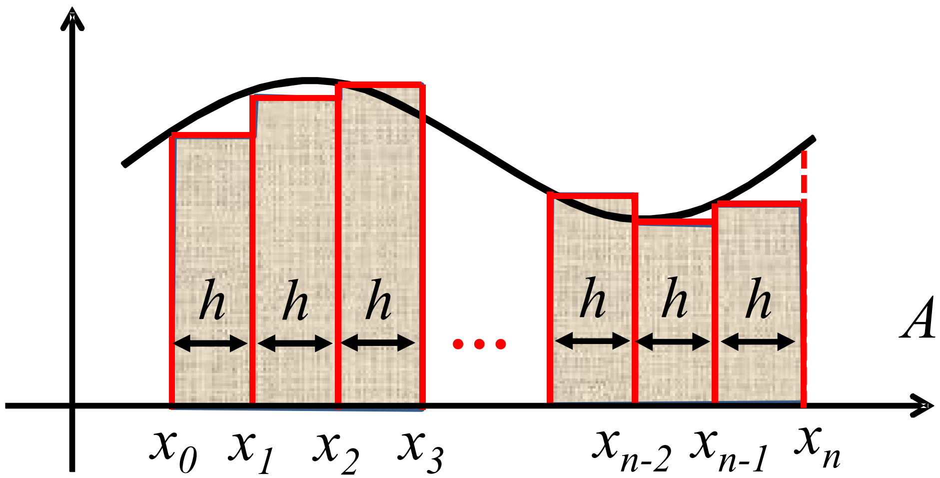
$$Alan = \int_a^b f(t)\, dt$$

$$(b-a)h \cong \int_a^b f(t)\, dt$$

Dikdörtgenler Yöntemi ile Sayısal İntegral

- **Dikdörtgenler yönteminde, şekilde görüldüğü gibi *a* ve *b* olarak sınırları belirlenen *x* eksenindeki aralığın *h* olarak adlandırılan eşit uzunluktaki dikdörtgen parçalarına bölünmesi gerekir.**

- **Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (*h* ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.**



$$Alan \cong h.y_0 + h.y_1 + h.y_2 + \ldots + h.y_{n-1}$$

$$Alan \cong h\left[y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun** $\mathbf{0 < x < 1.5}$ **aralığı için** $\mathbf{h = 0.25}$ **kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini dikdörtgenler yöntemi ile hesaplayınız.**

n	x	$y(x) = e^{2x}$
0	0	1.0000
1	0.25	1.6487
2	0.5	2.7183
3	0.75	4.4817
4	1	7.3891
5	1.25	12.1825
6	1.5	20.0855

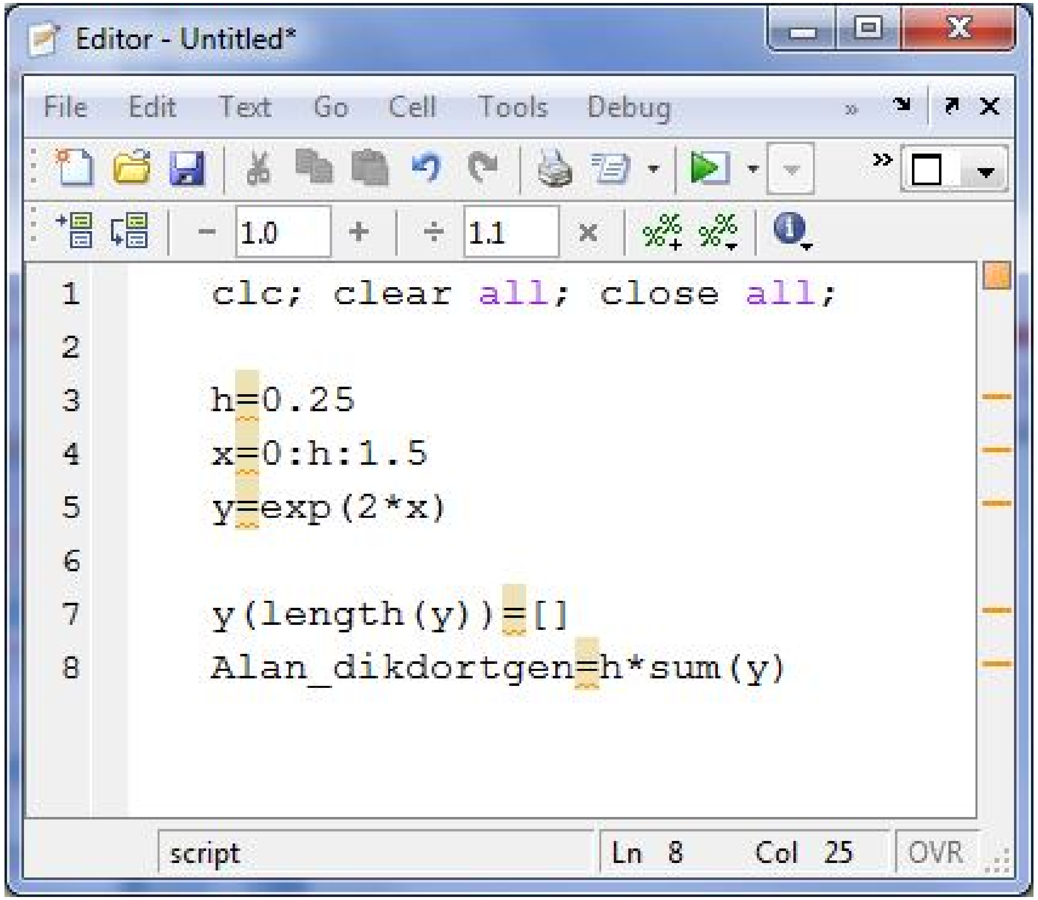
- **Çözüm:**

$$Alan \cong h\left[y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right]$$

$$Alan \cong 0.25\left[1 + 1.6487 + 2.7183 + 4.4817 + 7.3891 + 12.1825\right] = 7.3551$$

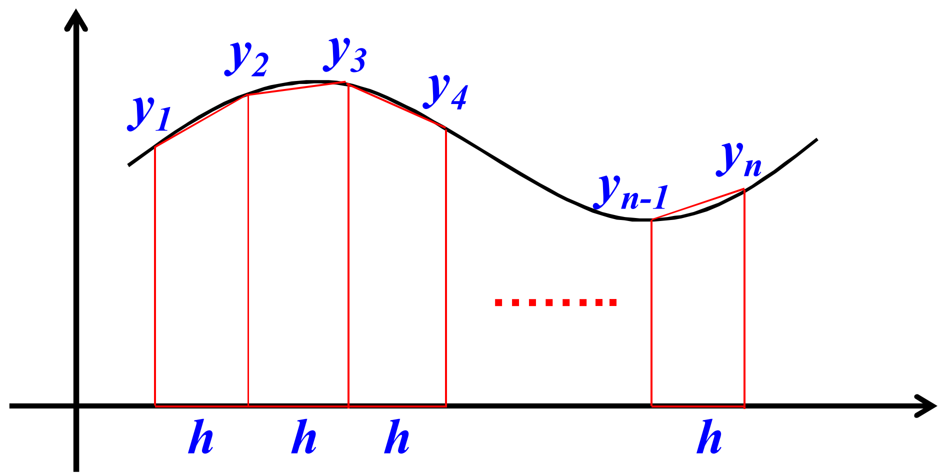
Örnek

- ❑ $y(x)=e^{2x}$ **fonksiyonunun** $\mathbf{0 < x < 1.5}$ **aralığı için** $\mathbf{h = 0.25}$ **kullanarak fonksiyonun integralini dikdörtgenler yöntemini kullanarak hesaplayan MATLAB programını yazınız.**



Trapez (Yamuk) Yöntemi ile Sayısal İntegral

- **Trapez yönteminde, şekilde görüldüğü gibi *a* ve *b* olarak sınırları belirlenen *x* eksenindeki aralığın *h* olarak adlandırılan eşit uzunluktaki parçalara bölünmesi gerekir.**
- **Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (*h* ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.**



$$Alan \cong h\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+h\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+h\left(\frac{y_3+y_4}{2}\right)+\ldots+h\left(\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$Alan \cong \frac{h}{2}\left[y_1+2\left(y_2+y_3+y_4+\ldots+y_{n-1}\right)+y_n\right]$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini trapez yöntemi ile hesaplayınız.**

n	x	$y(x) = e^{2x}$
0	0	1.0000
1	0.25	1.6487
2	0.5	2.7183
3	0.75	4.4817
4	1	7.3891
5	1.25	12.1825
6	1.5	20.0855

- **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right) + y_6\right]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{2}\left[1 + 2(1.6487 + 2.7183 + 4.4817 + 7.3891 + 12.1825) + 20.0855\right] = 9.7407$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyonun integralini trapez yöntemini kullanarak hesaplayan MATLAB programını yazınız.**

```
clc; clear all; close all;

h=0.25
x=0:h:1.5
y=exp(2*x)

son=length(y)
toplam=2*sum(y)-y(1)-y(son)
Alan_trapez=toplam*h/2
```

trapz komutu ile alan (integral) hesabı

- trapz (x, $f(x)$)

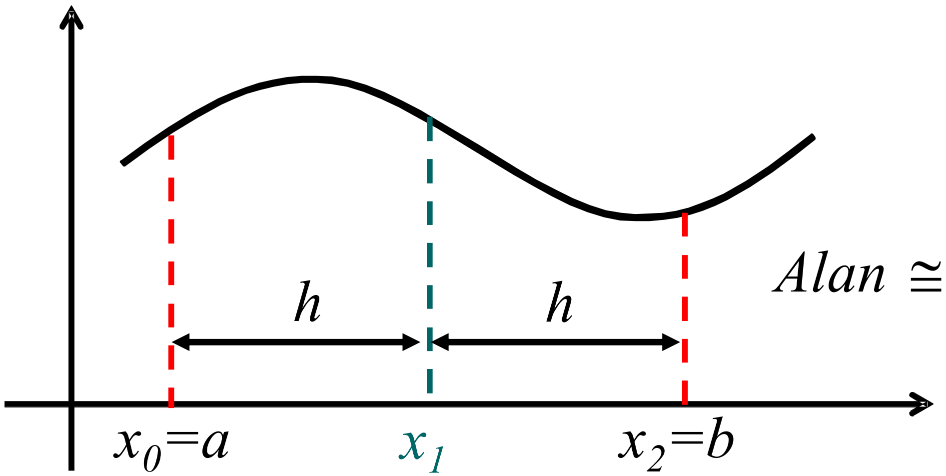
alanı (integrali) hesaplanacak fonksiyon

integralin sınırları içerisinde h aralığına göre oluşan vektör

```
%  fonksiyonun aralığını tanımla
>> a=0; b=1; h=0.25;
>> x = a:h:b;
%  trapz komutu ile integral hesabı
>> alan = trapz (x, exp(-x.^2))
alan =
      0.7430
```

Simpson 1/3 Kuralının Uygulanması

- **Simpson 1/3 yönteminde, *a* ve *b* olarak sınırları belirlenen *x* eksenindeki aralığın *h* olarak adlandırılan eşit uzunlukta fakat çift sayıdan oluşan *n* adet parçalara bölünmesi gerekir.**
- **Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (*h* ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.**
- **Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.**



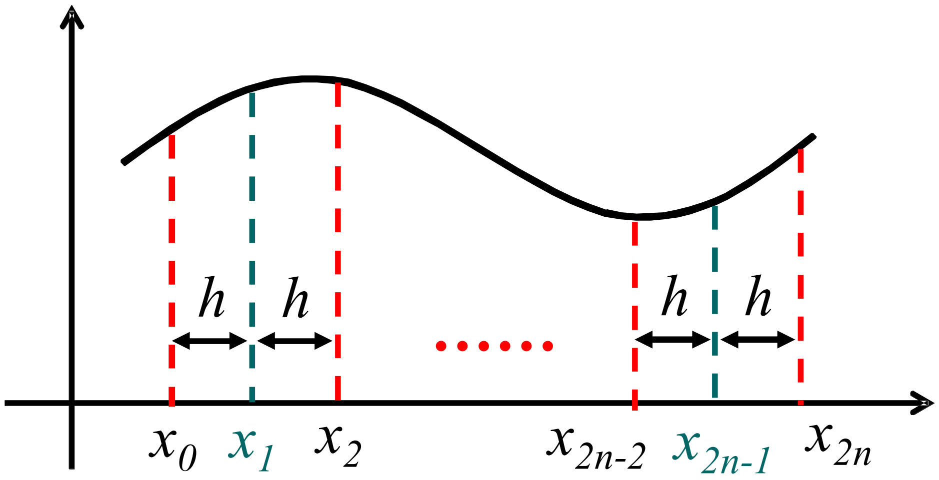
Newton-Gregory denklemi ile:

$$Alan \cong \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 y_0 \right) h.ds$$

$$\boxed{Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 \right]}$$

Simpson 1/3 Kuralı Genellenirse

İntegral alanı *2h* genişliğindeki *n* adet bölgeye ayrılırsa:



$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] + \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right] + \ldots\ldots + \frac{h}{3}\left[y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right]$$

$$\boxed{Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right) + y_{2n}\right]}$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini Simpson 1/3 yöntemi ile hesaplayınız.**

n	x	$y(x) = e^{2x}$
0	0	1.0000
1	0.25	1.6487
2	0.5	2.7183
3	0.75	4.4817
4	1	7.3891
5	1.25	12.1825
6	1.5	20.0855

- **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{3}\left[1 + 4(1.6487 + 4.4817 + 12.1825) + 2(2.7183 + 7.3891) + 20.0855\right] = 9.5460$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyonun integralini simpson 1/3 kuralını kullanarak hesaplayan MATLAB programını yazınız.**

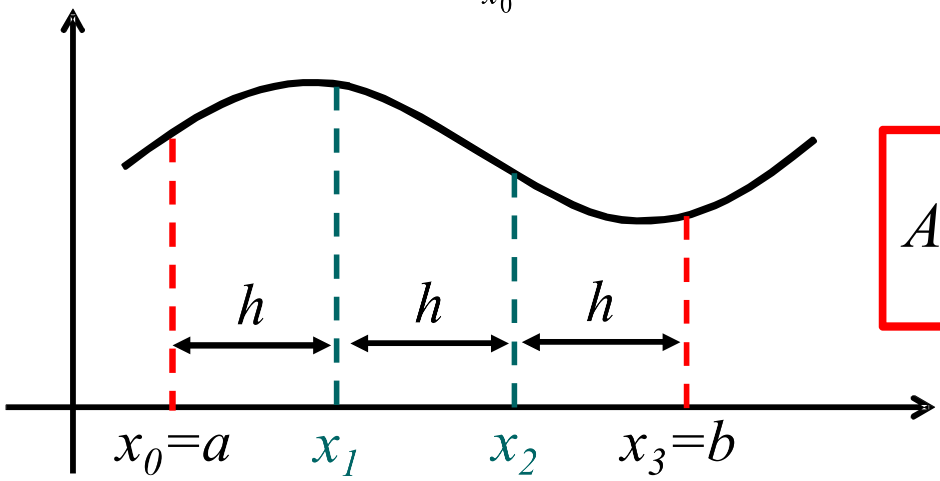
```
clc; clear all; close all;

h=0.25
x=0:h:1.5
y=exp(2*x)

son=length(y)
toplam=y(1)+4*sum(y(2:2:son))+2*sum(y(3:2:son-1))+y(son)
Alan_simpson13=toplam*h/3
```

Simpson 3/8 Kuralının Uygulanması

- **Simpson 3/8 yönteminde, *a* ve *b* olarak sınırları belirlenen *x* eksenindeki aralığın *3h* olarak adlandırılan eşit uzunlukta fakat 3 dilimden oluşan *n* adet parçaya bölünmesi gerekir.**

- **Newton-Gregory ilerleme polinomunun ilk 4 teriminin alınması ile (n=3) elde edilir.**

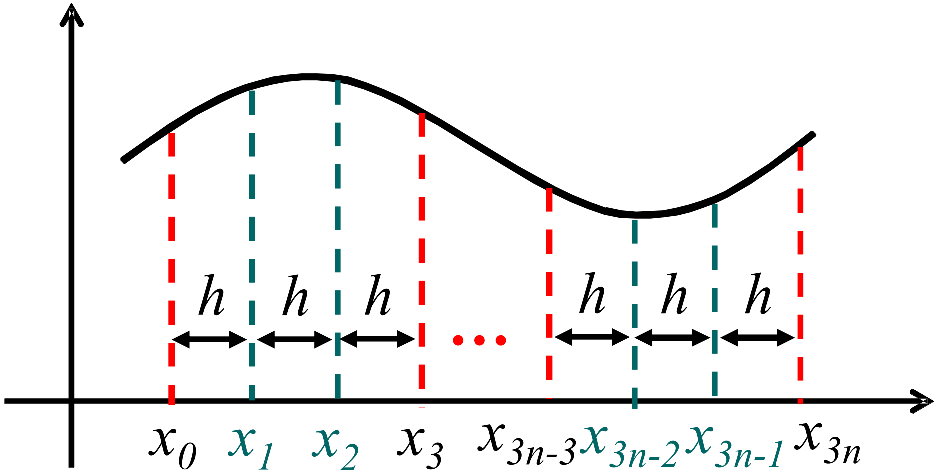
$$Alan \cong \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 y_0 \right) h.ds$$



$$\boxed{Alan \cong \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right]}$$

Simpson 3/8 Kuralı Genellenirse

İntegral alanı *3h* genişliğindeki *n* adet bölgeye ayrılırsa:



$$Alan \cong \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] + \frac{3h}{8}\left[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right] + \ldots + \frac{3h}{8}\left[y_{3n-3} + 4y_{3n-2} + 3y_{3n-1} + y_{3n}\right]$$

$$\boxed{Alan \cong \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \ldots + 3y_{3n-2} + 3y_{3n-1} + y_n\right]}$$

Örnek

- $y(x)=e^{2x}$ **fonksiyonunun** $\mathbf{0 < x < 1.5}$ **aralığı için** $\boldsymbol{h = 0.25}$ **kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini Simpson 3/8 yöntemi ile hesaplayınız.**

n	x	$y(x)=e^{2x}$
0	0	1.0000
1	0.25	1.6487
2	0.5	2.7183
3	0.75	4.4817
4	1	7.3891
5	1.25	12.1825
6	1.5	20.0855

- **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{3h}{8}\left[y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+y_6\right]$$

$$Alan \cong \frac{3h}{8}\left[1+3*1.6487+3*2.7183+2*4.4817+3*7.3891+3*12.1825+20.0855\right]=9.5498$$

Örnek

- $y(x) = e^{2x}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyonun integralini simpson 3/8 kuralını kullanarak hesaplayan MATLAB programını yazınız.**

```
clc; clear all; close all;

h=0.25
x=0:h:1.5
y=exp(2*x)

son=length(y)
toplam=y(1)+3*sum(y(2:son-1))-sum(y(4:3:son-1))+y(son)
Alan_simpson38=toplam*3*h/8
```

Ödev

- $y(x) = e^{-x^2}$ **fonksiyonunun $0 < x < 1.5$ aralığı için $h = 0.25$ kullanarak fonksiyonun integralini bütün yöntemler ile hesaplayınız.**

KAYNAKLAR

- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, "*MATLAB ile Meslek Matematiği*", Seçkin Yayıncılık**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**