Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

Kirişler

YÖNTEMİnin Farklı şekli

Kirişler Yönteminin Farklı şekli

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \qquad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına x ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \qquad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Kirişler yönteminin yaklaşımlarının

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n) \qquad (5)$$

şeklinde olduğu bellidir. Bu durumda x_0 noktası sabit kalmaktadır. Yaklaşım hızını arttırmak için (5) yaklaşımları farklı şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad (6)$$

(6) yaklaşımları aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (7)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (7)$$

(7) yaklaşımlarına göre x_{n+1} noktası, geometrik olarak $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde ele alınan (x_{n-1},f(x_{n-1})) ve (x_n,f(x_n)) noktalarından geçen doğrunun (kirişin) x ekseni ile kesişme noktasıdır.

(7) ifadesi, (1) lineer olmayan denkleminin çözümünün yaklaşık olarak bulunması için ***Kirişler Yönteminin farklı şeklidir.***

x_0 noktası (başlangıç yaklaşımı),

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

koşulunu sağlayan herhangi bir noktadır.

Uygulamalarda eğer

$$f(a)\times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = a + \delta$$

$$f(b)\times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b, \quad x_1 = b - \delta$$

Olarak ele alınır.

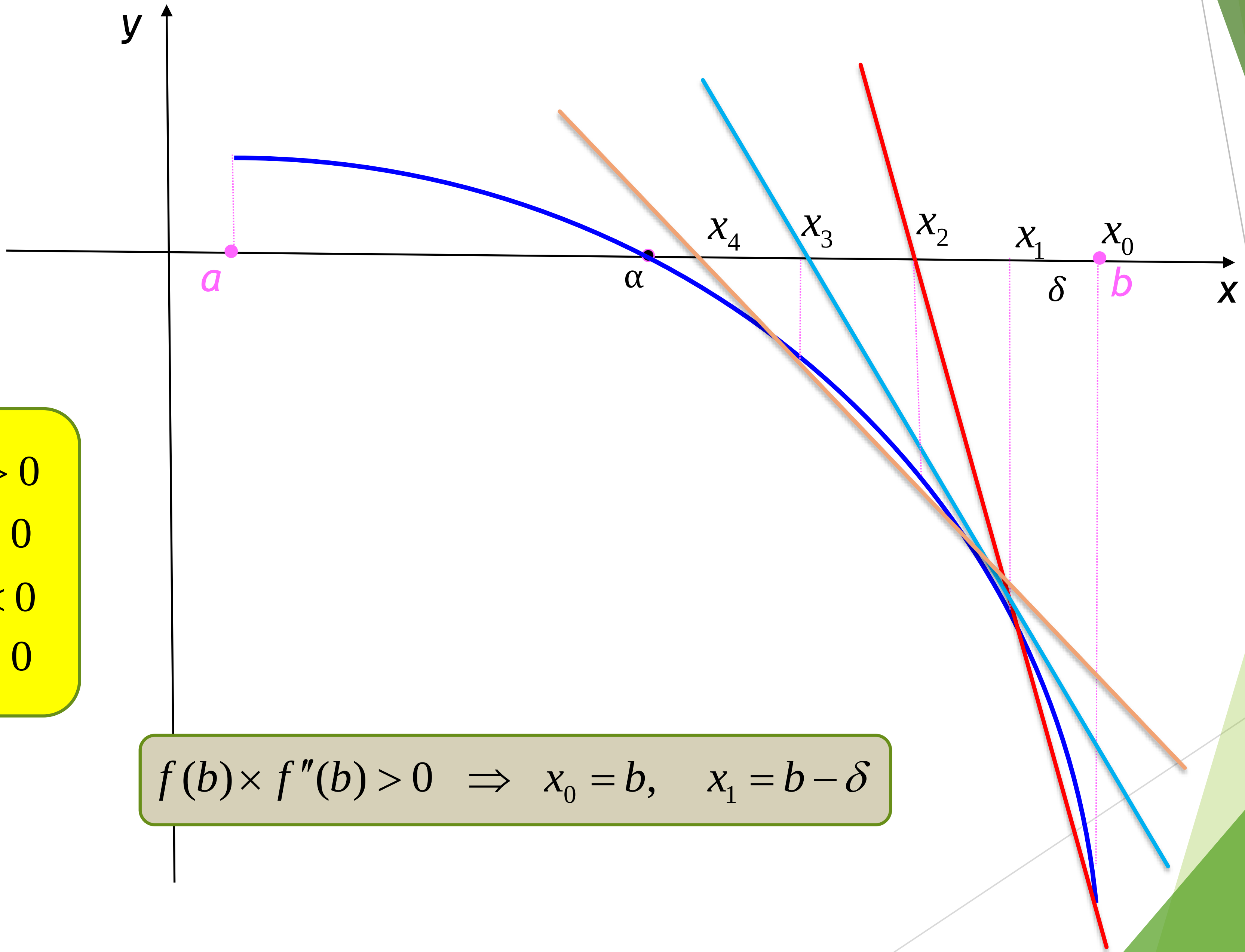
İşlemler

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur.

Kirişler yönteminin farklı şeklinin geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ a)

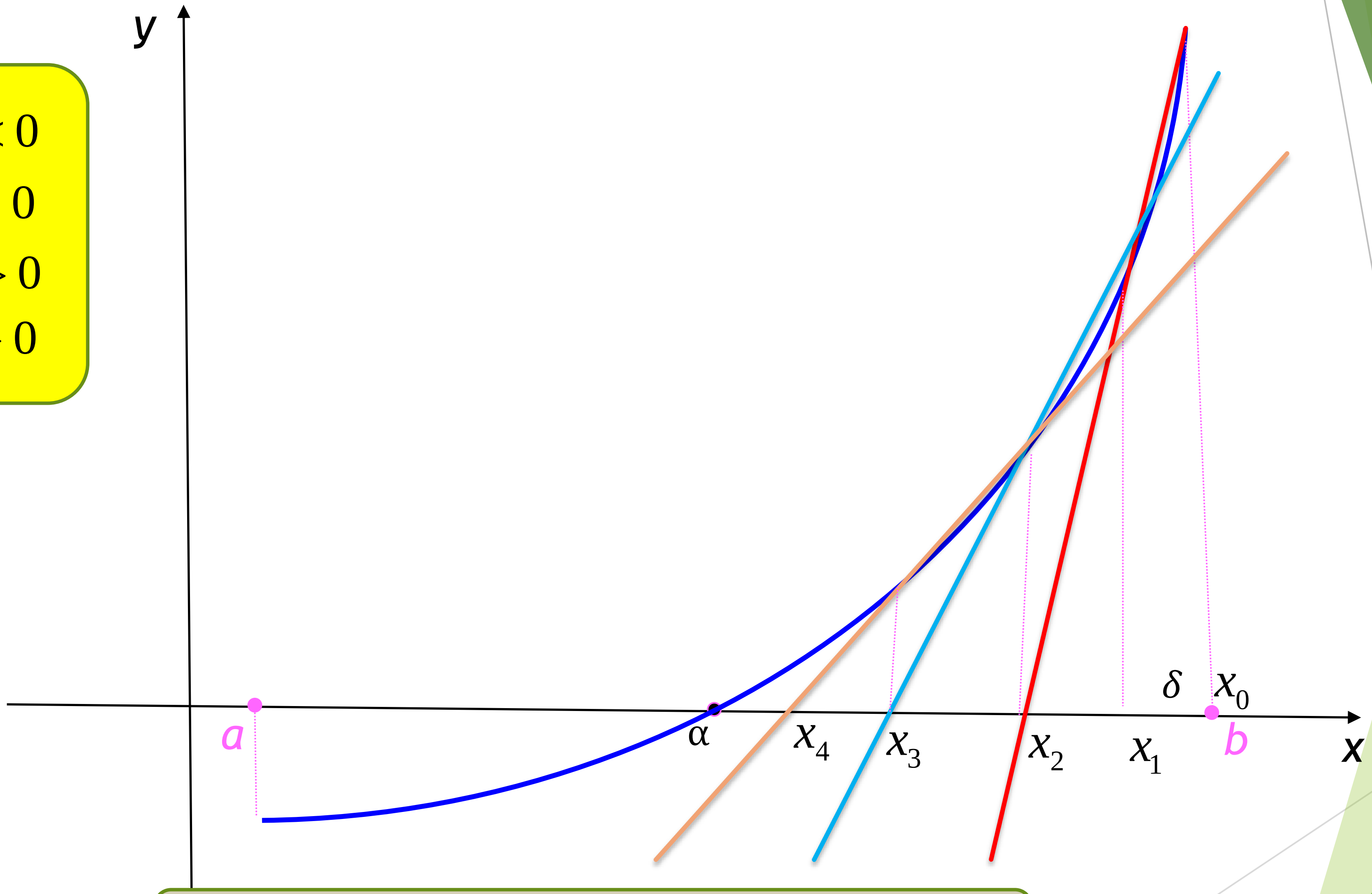


$$f(a)>0$$
$$f(b)<0$$
$$f'(x)<0$$
$$f''(x)<0$$

$$f(b)\times f''(b)>0 \;\Rightarrow\; x_0=b,\quad x_1=b-\delta$$

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ b)

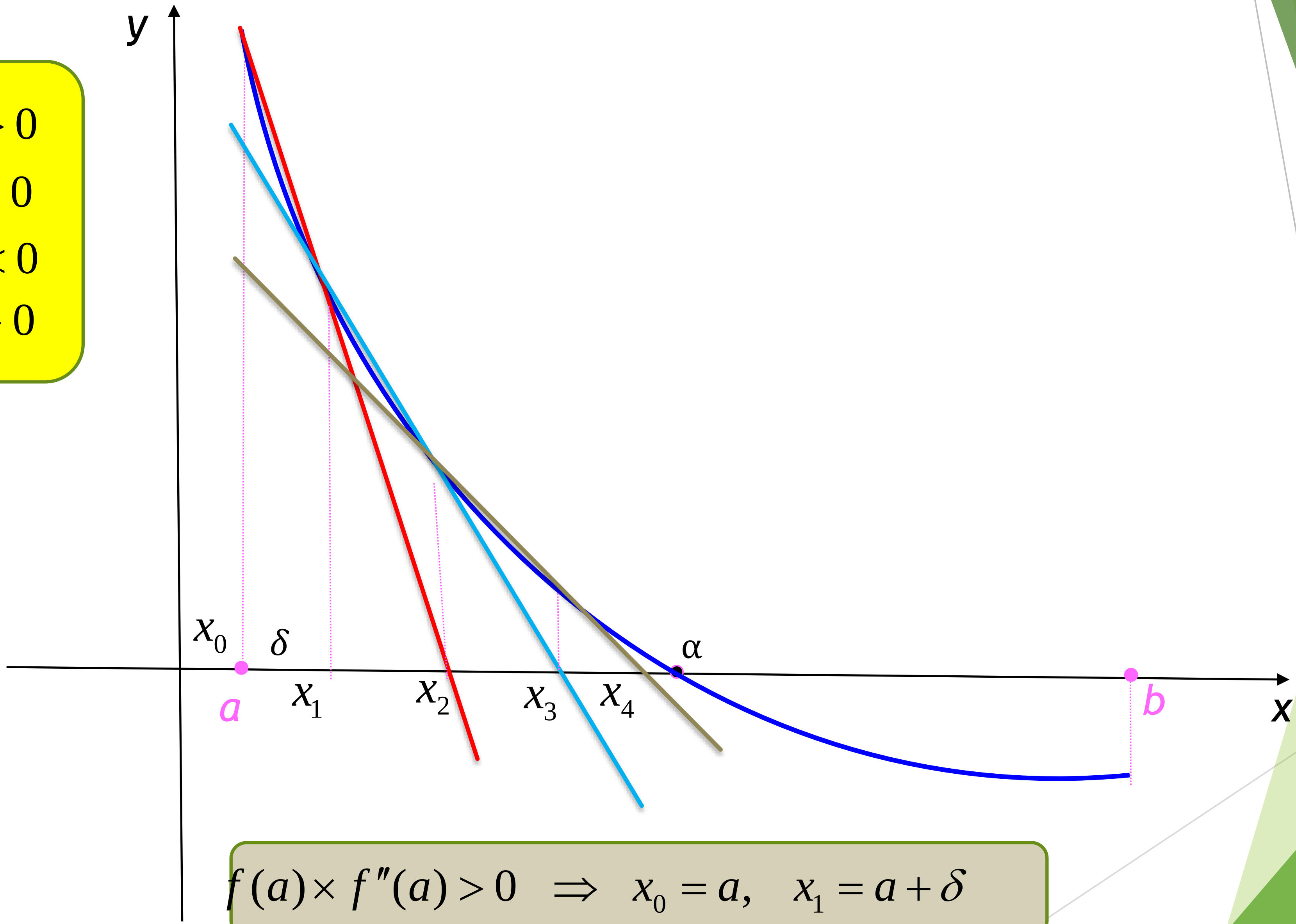
$f(a) < 0$
$f(b) > 0$
$f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$



$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b, \quad x_1 = b - \delta$$

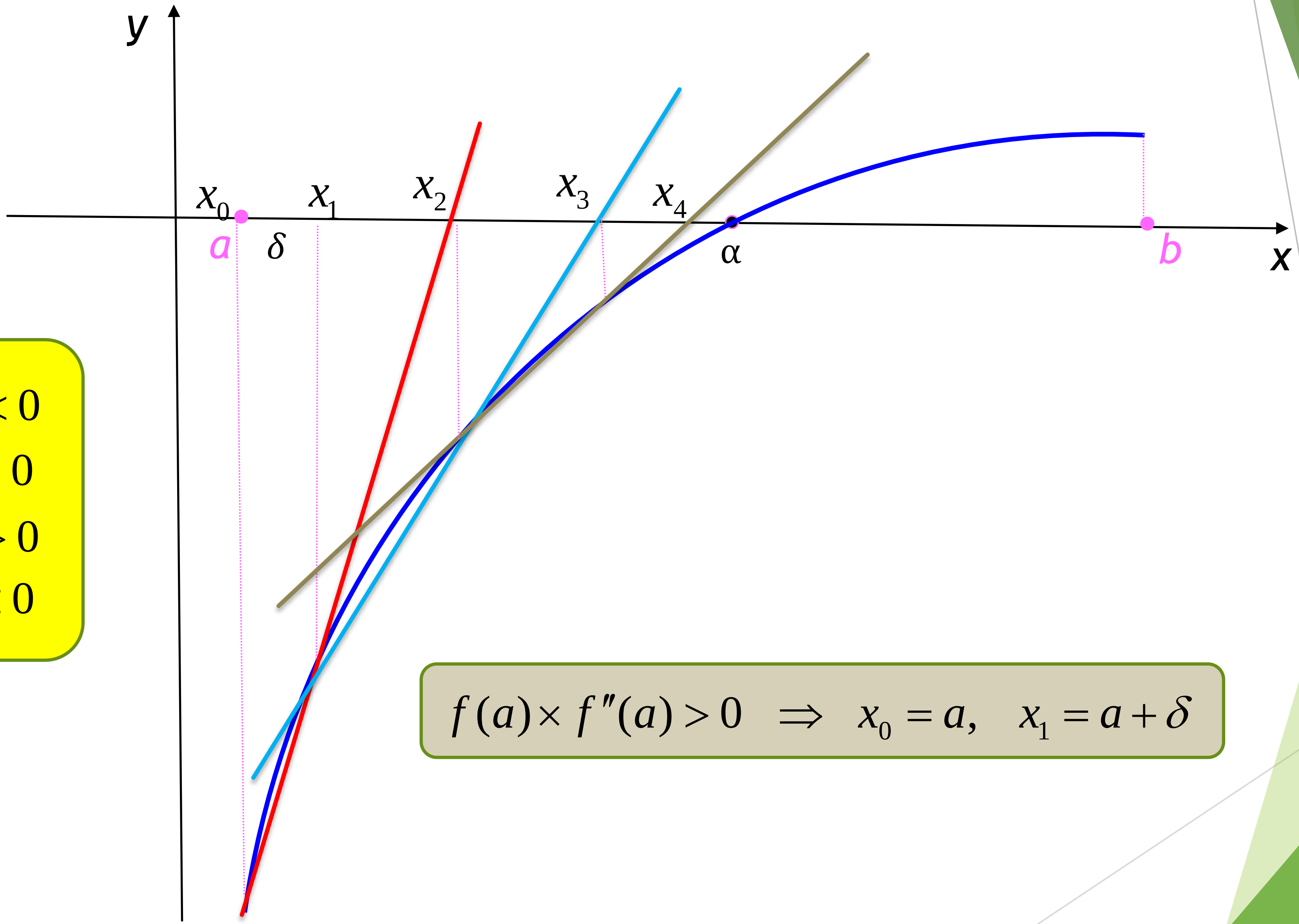
KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ c)

$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$
$$f'(x) < 0$$
$$f''(x) > 0$$



$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = a + \delta$$

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ d)



$f(a) < 0$
$f(b) > 0$
$f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$

$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = a + \delta$$

ÖRNEK: x-cosx=0 denkleminin çözümünü kirişler yönteminin farklı şekli yardımı ile $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile bulunuz.

$$x = cosx$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - cosx$ fonksiyonu için

$$f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - cos1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1)<0$ elde edilir.

Yani denkleminin [0,1] aralığında çözümü vardır.

$f(x) = x - cos\ x$

$f'(x) = 1 + \sin\ x$

$f''(x) = \cos\ x$

$f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$

$f''(0) = \cos\ 1 = 1 > 0$

$f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597 > 0$

$f''(1) = \cos\ 1 = 0.5403 > 0$

$f''(x)\ > 0 \qquad (iç\ bükey)$

$\delta = 0.1$ olsun

$f(1)\, f''(1) > 0$ olduğundan $\Rightarrow\ x_0 = 1,\quad x_1 = 1 - \delta = 1 - 0.1 = 0.9$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0.9$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597$$

$$f(x_1) = f(0.9) = 0.9 - cos\ 0.9 = 0.2784$$

$$x_2 = \frac{x_0\, f(x_1) - x_1\, f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1\text{x}0.2784 - 0.9\text{x}0.4597}{0.2784 - 0.4597} = 0.7464$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_1 = 0.9, \quad x_2 = 0.7464$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(0.9) = 0.2784$$

$$f(x_2) = f(0.7464) = 0.0.7464 - cos\ 0.7464 = 0.0123$$

$$x_3 = \frac{x_1\, f(x_2) - x_2\, f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{0.9\text{x}0.0123 - 0.7464\text{x}0.2784}{0.0123 - 0.2784} = 0.7393$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0071 > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = 0.7464, \quad x_3 = 0.7393$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) = f(0.7464) = 0.0123$$

$$f(x_3) = f(0.7393) = 0.7393 - \cos\ 0.7393 = 0.00036$$

$$x_4 = \frac{x_2\, f(x_3) - x_3\, f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{0.7464 \text{x} 0.00036 - 0.7393 \text{x} 0.0123}{0.00036 - 0.0123} = 0.7391$$

$$|x_4 - x_3| = 0.0002 < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_4 = 0.7391$$