

Lineer Cebir

Lineer denklem sistemlerinin uygulamaları

Lineer denklem sistemlerinin uygulamaları

Problem 1: \mathbb{R}^2 de $x - y = -2$ ve $2x + 3y = 6$ doğrularının kesiştikleri noktayı bulunuz.

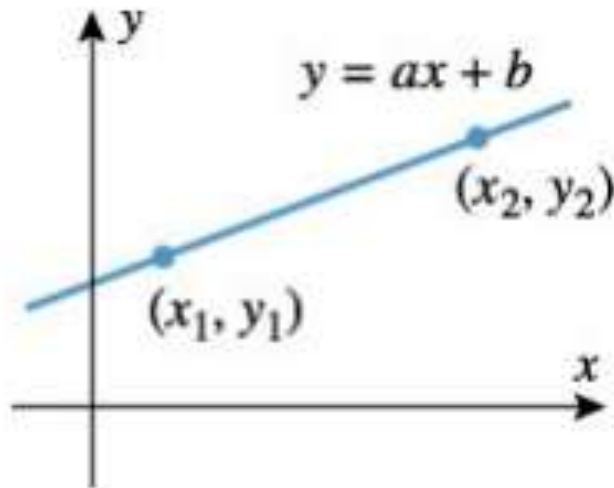
$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Problem 2: \mathbb{R}^3 te $x - y = 2$, $2x - y - z = 3$ ve $x + y + z = 6$ düzlemlerinin kesişimini bulunuz.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Polinom enterpolasyonu: grafiği düzlemdeki belirli noktalardan geçen bir polinomu bulmak.

$$p(x) = ax + b$$



$$ax_1 + b = y_1$$

$$ax_2 + b = y_2$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

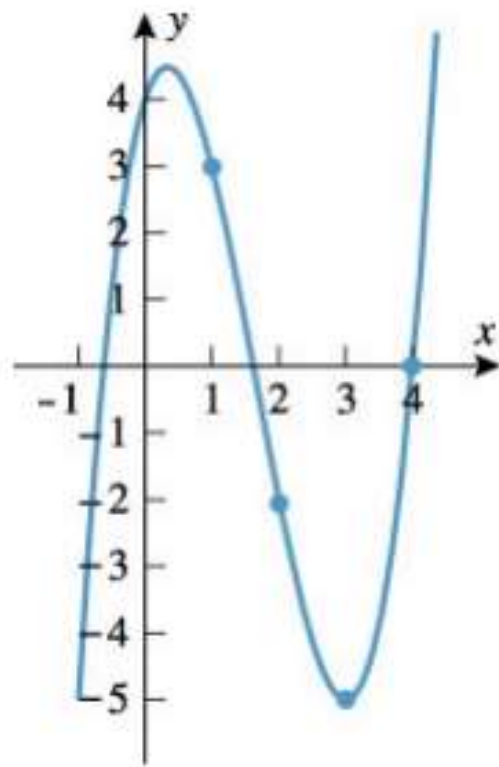
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix}$$



$$(1, 3), \quad (2, -2), \quad (3, -5), \quad (4, 0)$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Belirsiz katsayılar yöntemi genellikle bir lineer denklem sistemi içerir

Problem 3: ve $p(1) = 4$, $p(2) = 3$, $p(3) = 4$ koşullarını sağlayan $p(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

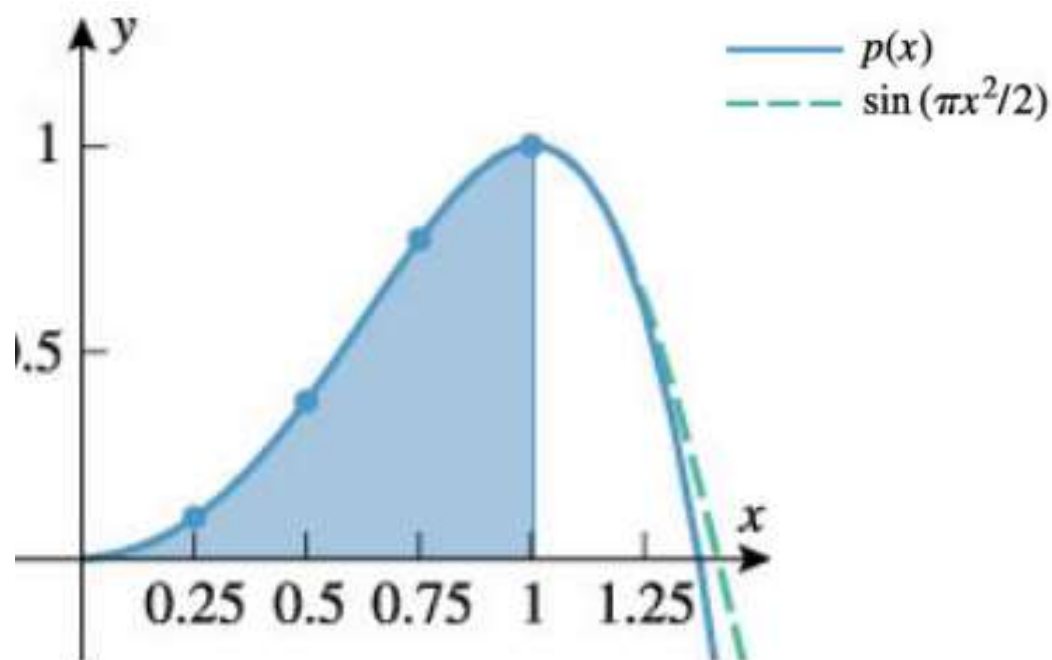
$p(x) = ax^2 + bx + c$ olacak şekilde arayalım: O halde

$$\begin{aligned} p(1) &= a + b + c, & p(2) &= 4a + 2b + c, \\ p(3) &= 9a + 3b + c. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$



$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

$$f(0) = 0, \quad f(0.25) = 0.098017, \quad f(0.5) = 0.382683, \quad f(0.75) = 0.77301, \quad f(1) = 1$$

$$\Rightarrow p(x) = 0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4$$

$$\int_0^1 p(x) dx \approx 0.438501$$

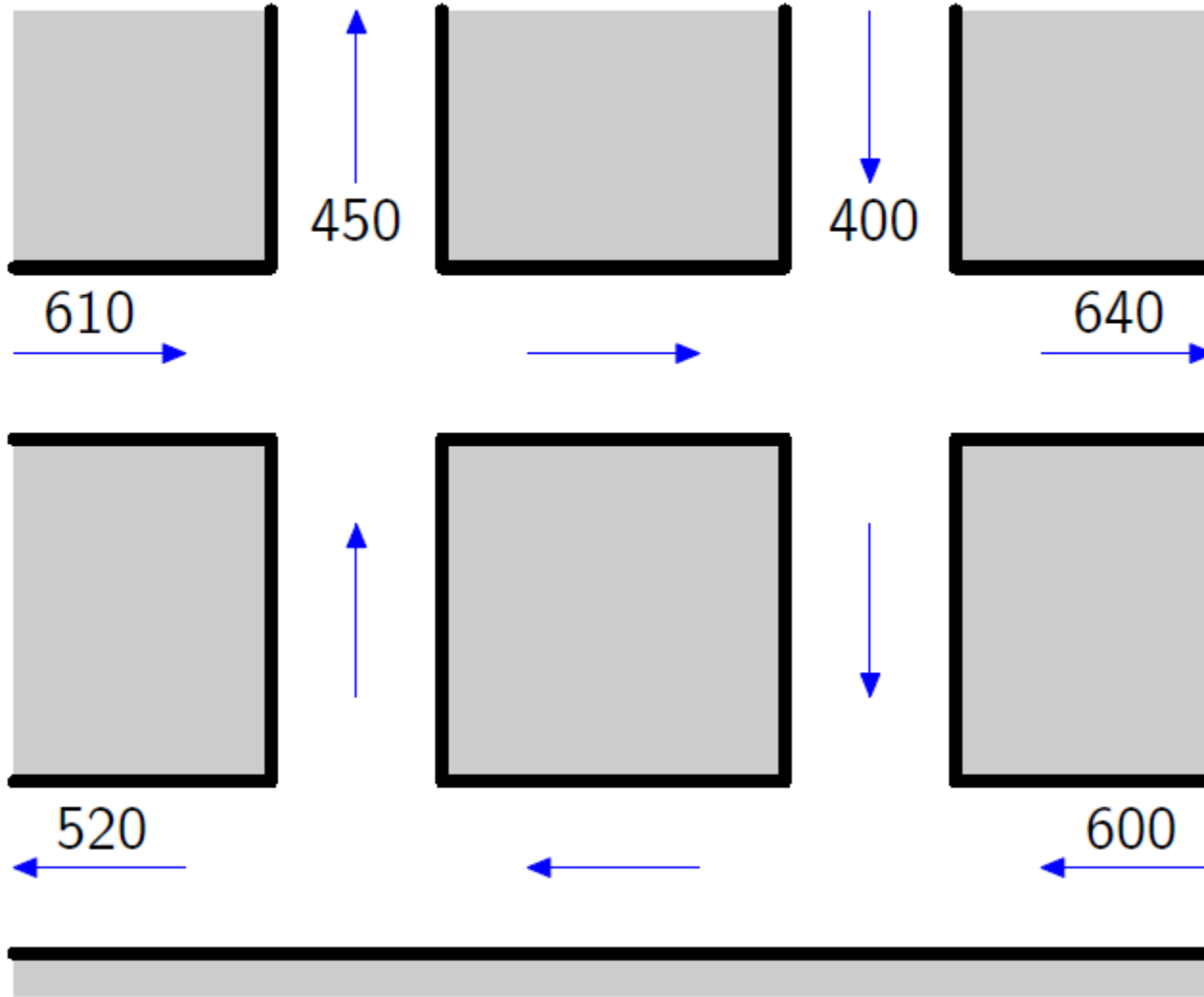
Problem 4: $\int_0^1 \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} dx$ integralini çözünüz.

İntegrali çözebilmek için $R(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+2)}$ rasyonel fonksiyonunun basit kesirlere ayırmalıyız.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} \\ &= \frac{a(x-1)(x+2) + b(x+2) + c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \frac{(a+c)x^2 + (a+b-2c)x + (-2a+2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}. \end{aligned}$$

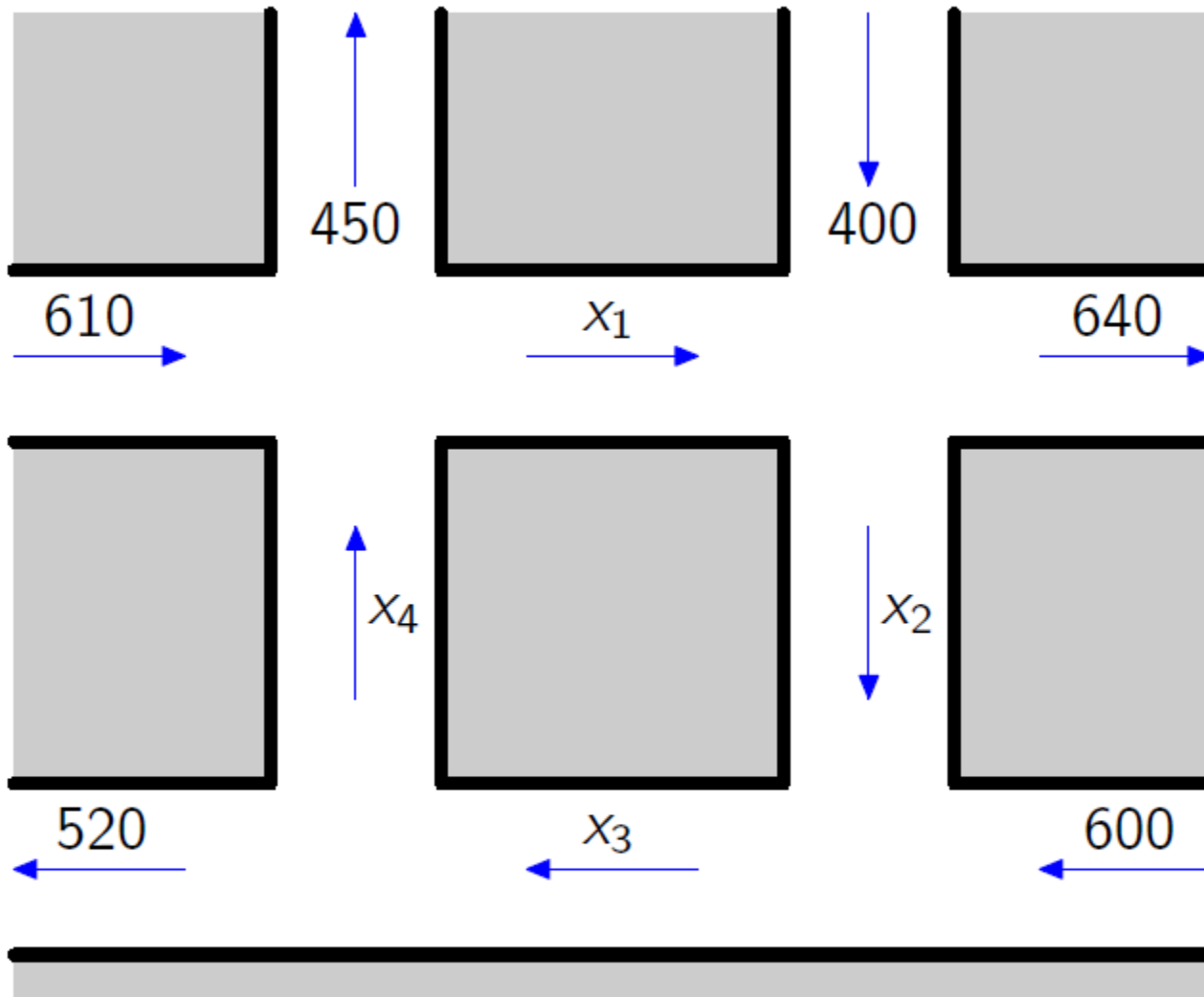
$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b-2c=-3 \\ -2a+2b+c=0 \end{cases}$$

Trafik akışı



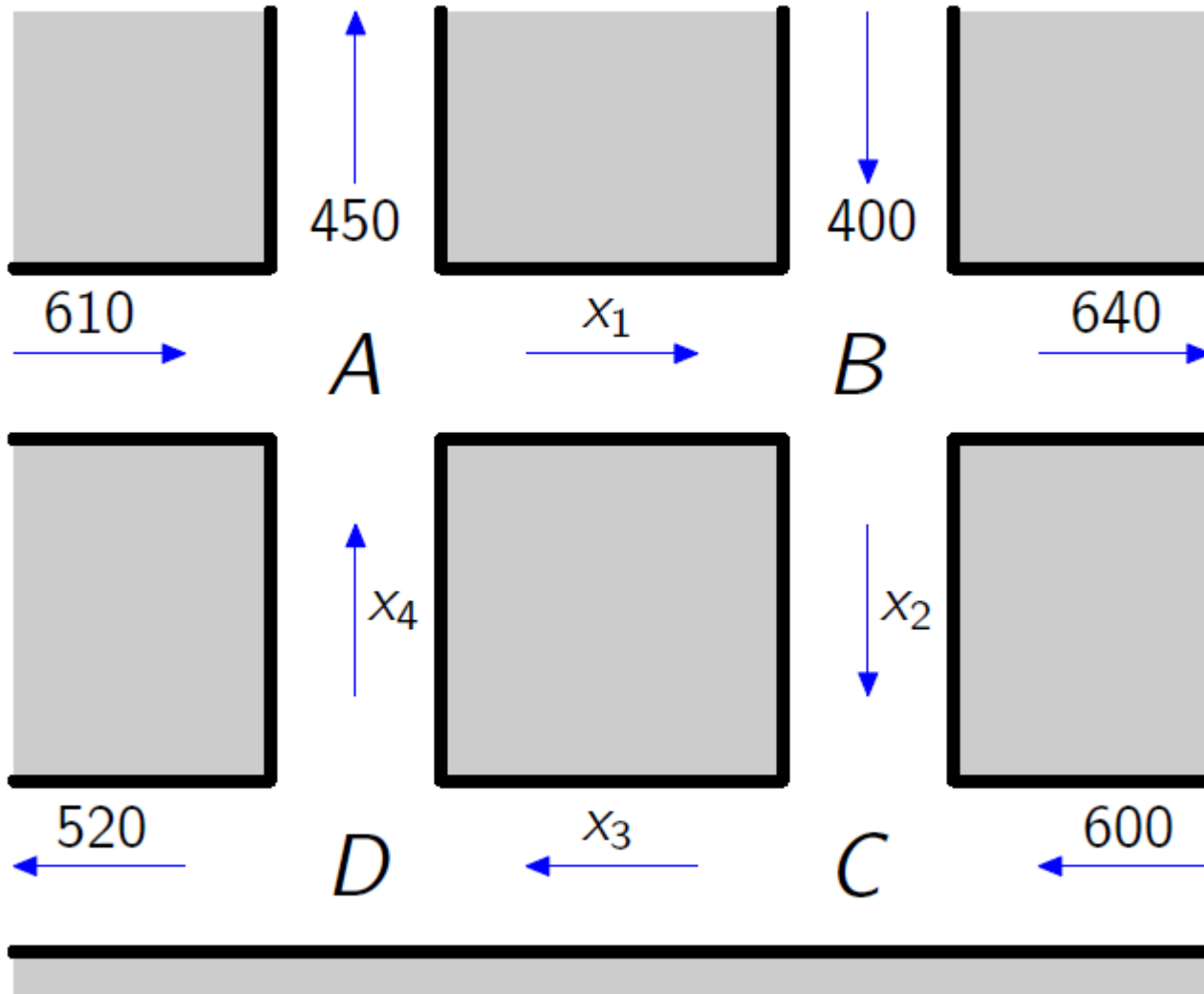
Problem 5: Boş oklarla gösterilen bölgelerdeki trafik miktarını hesaplayınız.

Trafik akışı



$$x_1 = ?, \quad x_2 = ?, \quad x_3 = ?, \quad x_4 = ?$$

Trafik akışı



Kesişim bölgelerinde, «A,B,C,D», gelen ve giden sayıları eşit olmalı

$$A: \quad x_4 + 610 = x_1 + 450$$

$$B: \quad x_1 + 400 = x_2 + 640$$

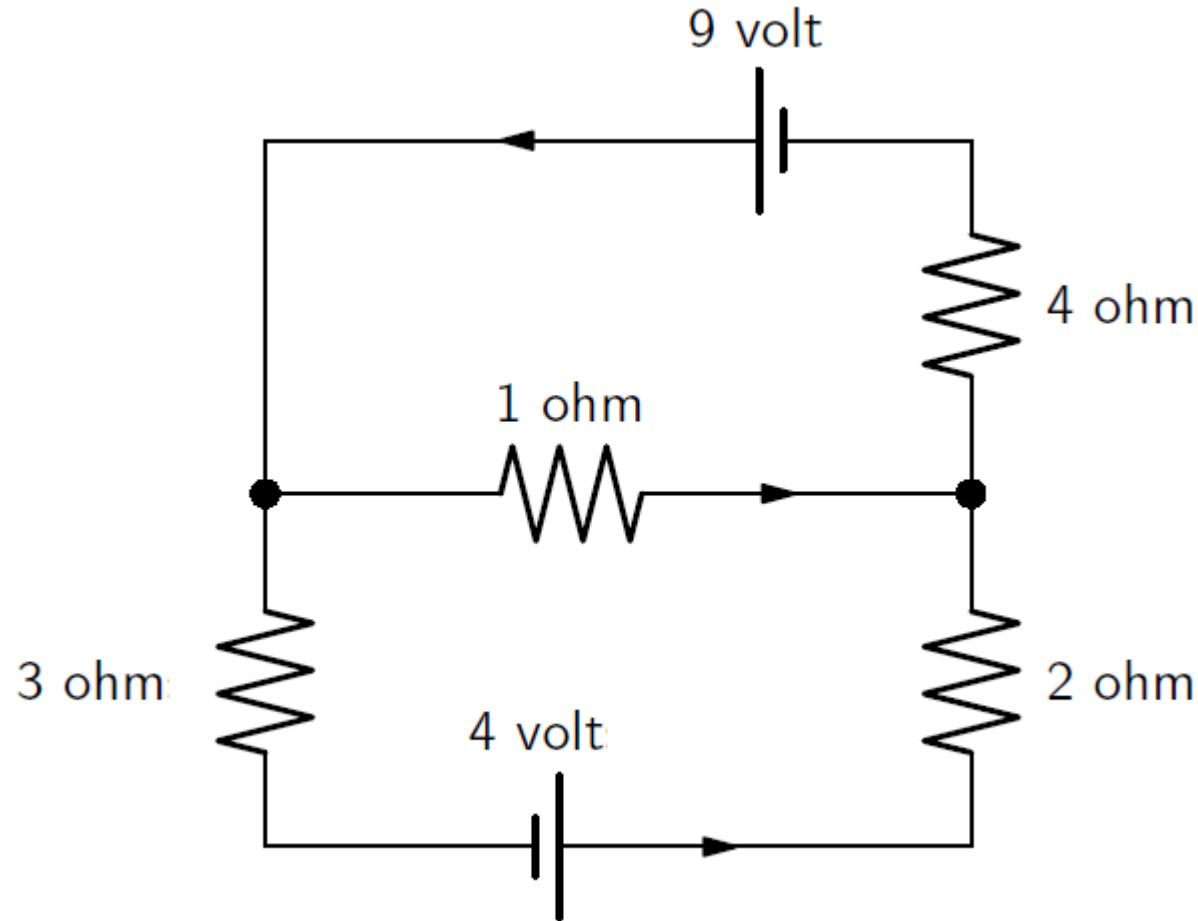
$$C: \quad x_2 + 600 = x_3$$

$$D: \quad x_3 = x_4 + 520$$

$$\begin{cases} x_4 + 610 = x_1 + 450 \\ x_1 + 400 = x_2 + 640 \\ x_2 + 600 = x_3 \\ x_3 = x_4 + 520 \end{cases}$$

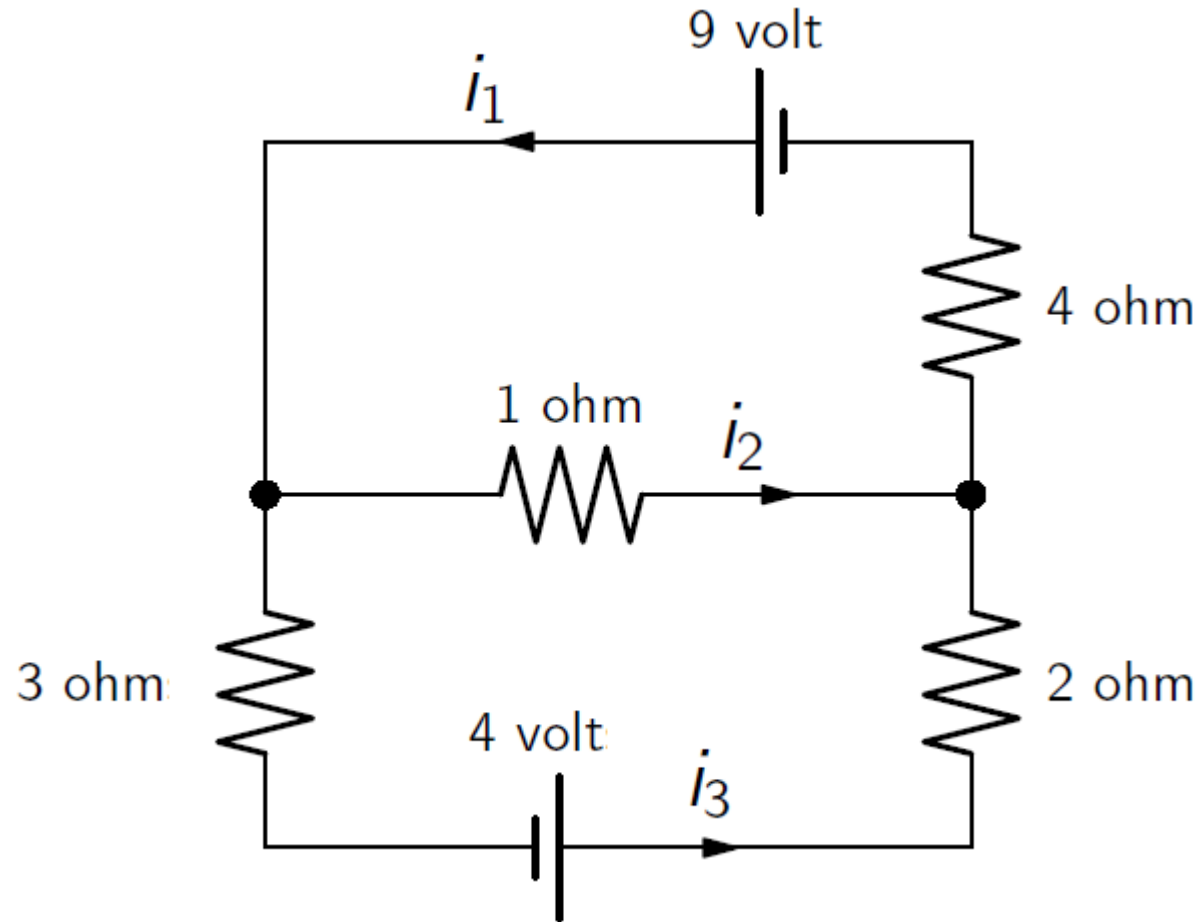
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_4 = -160 \\ x_1 - x_2 = 240 \\ x_2 - x_3 = -600 \\ x_3 - x_4 = 520 \end{cases}$$

Elektrik devreleri



Problem 6: ok işaretli bölgelerdeki akımları hesaplayınız.

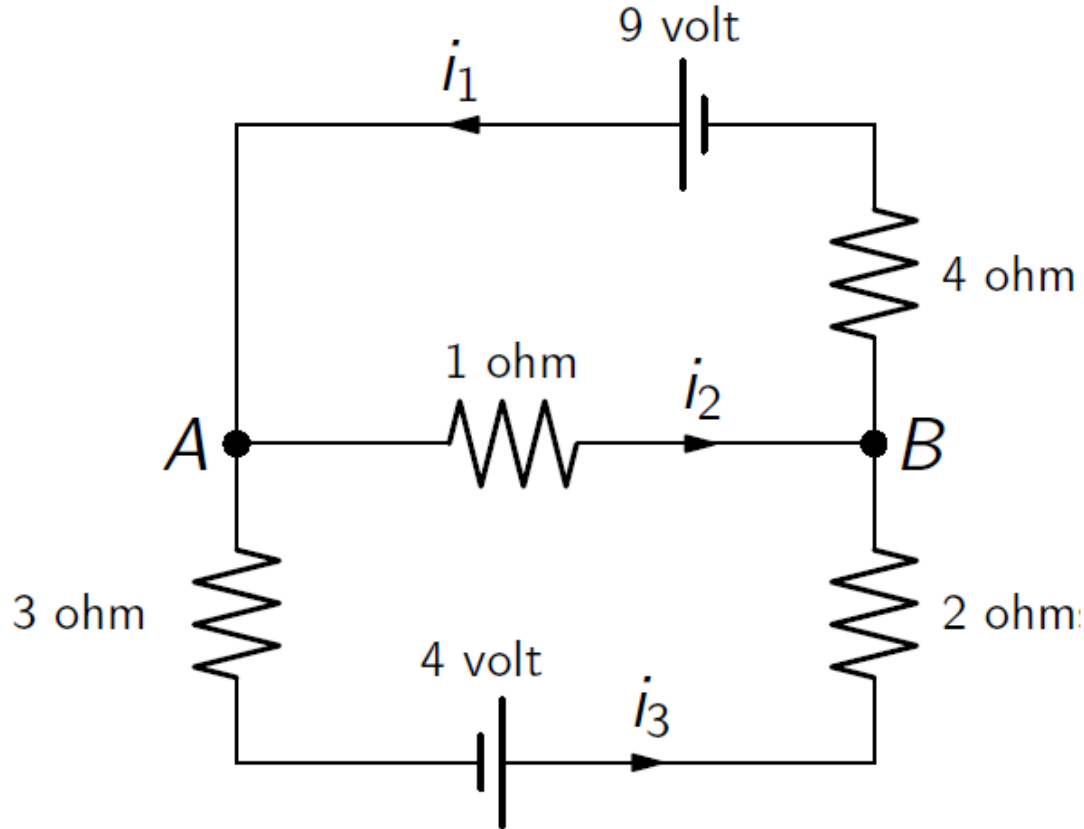
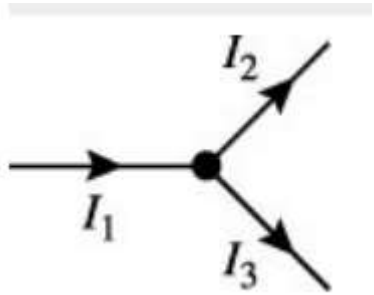
Elektrik devreleri



$$i_1 = ?, \quad i_2 = ?, \quad i_3 = ?$$

Birinci Kirchhoff Kanunu:

Kirchhoff akım Yasası en yalın biçimiyle, bir kavşağa (düğüm) giren akım(lar) ile, çıkan akım(lar)ın yönlü toplamı sıfıra eşittir olarak ifade edilir. Bunun başka bir söylenişi de, bir noktaya gelen akımların toplamı, giden akımların toplamına eşittir.

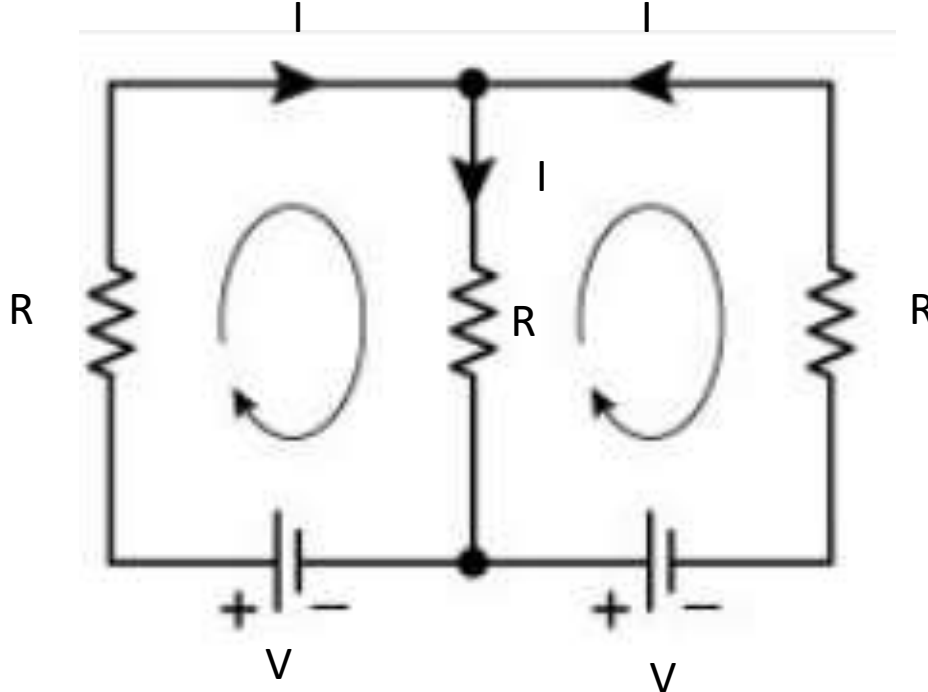


$$i_1 = i_2 + i_3$$

Ohm Kanunu:

Bir direncinin uçları arasındaki elektriksel potansiyel farkı (V), direnç üzerinden geçen akım I ile doğru orantılıdır ve orantı sabiti direncin R değerini verir: $V = I.R$

Denklemin açılımı şu şekildedir: gerilim = akım x direnç veya volt = amper x ohm veya $V = A \times \Omega$.



İkinci Kirchhoff Kanunu: Kirchhoff Gerilim Kanunu

Kapalı bir devre gözü üzerindeki tüm devre elemanları üzerine düşen toplam gerilim sıfırdır. Bir başka deyişle kaynak tarafından devreye sağlanan gerilim yada gerilimler ile devre elemanları üzerinde biriken toplam gerilim birbirine eşittir.

Üst döngü:

$$9 - i_2 - 4i_1 = 0$$

Alt döngü:

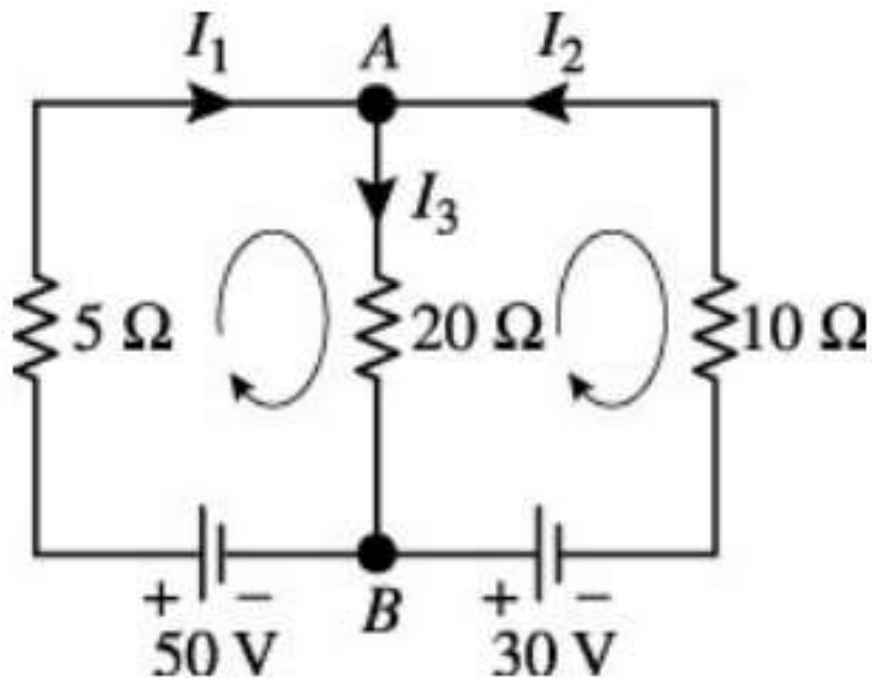
$$4 - 2i_3 + i_2 - 3i_3 = 0$$

Büyük döngü:

$$4 - 2i_3 - 4i_1 + 9 - 3i_3 = 0$$

Uyarı: Üçüncü denklem ilk iki denklem toplamıdır.

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 9 - i_2 - 4i_1 = 0 \\ 4 - 2i_3 + i_2 - 3i_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 4i_1 + i_2 = 9 \\ -i_2 + 5i_3 = 4 \end{cases}$$



Kirchhoff akım Yasası

$$\begin{array}{rcl}
 A & I_1 + I_2 & = I_3 \\
 B & I_3 & = I_1 + I_2 \\
 & I_1 + I_2 - I_3 & = 0
 \end{array}$$

Kirchoff Gerilim Kanunu

$$\begin{array}{rcl}
 I_1 + I_2 - I_3 & = & 0 \\
 5I_1 + 20I_3 & = & 50 \\
 10I_2 + 20I_3 & = & -30
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 5I_1 + 20I_3 & = & 50 \\
 10I_2 + 20I_3 & = & -30 \\
 \hline
 5I_1 - 10I_2 & = & 80
 \end{array}$$

$$I_1 = 6\text{A}, I_2 = -5\text{A}, I_3 = 1\text{A}$$