0.0.1 Vektörler ve Lineer Denklemler

1. Aşağıdaki vektör denklemini eşdeğer lineer denklem sistemine dönüştürünüz ve çözünüz:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sağ taraftaki vektörleri bilinmeyen skalarla çarpınız ve daha sonra toplayınız:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 5y \\ 8y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 2z \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 2x+5y+2z \\ 3x+8y+3z \end{bmatrix}$$

Karşılıklı bileşenleri eşitleyiniz ve daha sonra sistemi eşelon forma indirgeyiniz.

$$\begin{array}{ccc} x+2y+3z=1 & x+2y+3z=1 & x+2y+3z=1 \\ 2x+5y+2z=-6 & y-4z=-8 & y-4z=-8 \\ 3x+8y+3z=5 & 2y-6z=2 & 2z=18 \end{array}$$

Sistem üçgenseldir ve geriye-yerine koyma $x = -82, y = 28, z = 9$ tek çözümünü verir.

2. $v = (1, -2, 5)$ vektörünü $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3)$ ve $u_3 = (2, -1, 1)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazınız.

x, y ve z şimdilik bilinmeyen olmak üzere v yi $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ şeklinde yazmak istiyoruz.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+2z \\ x+2y-z \\ x+3y+z \end{bmatrix}$$

buluruz (Lineer birleşimi oluştururken vektörleri kolon şeklinde yazmak satır şeklinde yazmaktan daha elverişlidir). Karşılıklı bileşenlerin herbirini diğerine eşitleyerek

$$\begin{array}{ccc} x+y+2z=1 & x+y+2z=1 & x+2y+3z=1 \\ x+2y-z=-2 & y-3z=-3 & y-3z=-3 \\ x+3y+z=5 & 2y-z=4 & 5z=10 \end{array}$$

elde ederiz. Üçgensel biçimin tek çözümü $x=-6, y=3, z=2$ dir. Böylece $v = -6u_1+3u_2+2u_3$ olur.

3. $v=(2,3,-5)$ vektörünü $u_1=(1,2,-3), u_2=(2,-1,-4)$ ve $u_3=(1,7,-5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazınız.

4. $u_1=(1,1,1), u_2=(2,-1,3)$ ve $u_3=(1,-5,3)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını belirleyiniz.

u_1, u_2, u_3 vektörlerinin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olmalarının $xu_1+yu_2+zu_3=0$ vektör denklemlerinin sıfırdan farklı bir çözüme veya sadece sıfır çözümüne sahip olmasına bağlı olduğunu hatırlatalım. O halde vektörlerin lineer birleşimini sıfır vektörüne eşitleyelim:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+z \\ x-y-5z \\ x+3y+3z \end{bmatrix}$$

Karşılık gelen bileşenleri birbirine eşitler ve sistemi eşelon forma indirgersek:

$$\begin{array}{ccc} x+2y+z=0 & x+2y+z=0 & \\ x-y-5z=0 & -3y-6z=0 & \begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ y+2z=0 \end{array} \\ x+3y+3z=0 & y+2z=0 & \end{array}$$

Sistem eşelon formda bir serbest (keyfi) değişkene sahip olduğundan sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir. O halde verilen vektörler lineer bağımlıdır. (Lineer bağımlılık veya bağımsızlığı sağlamak için sistemi çözmeye ihtiyacımız yoktur, sadece sistemin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olup olmadığını bilmek yeter.)

5. $(1,-2,-3),(2,3,-1),(3,2,1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını belirleyiniz.

Vektörlerin sıfır vektörüne eşit lineer birleşimini (x,y,z) katsayıları ile oluşturalım:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ -2x+3y+2z \\ -3x-y+z \end{bmatrix}$$

Karşılık bileşenleri eşitleyelim ve sistemi eşelon forma indirgeyelim:

$$\begin{array}{ccc} x+2y+3z=0 & x+2y+z=0 & x+2y+3z=0 \\ -2x+3y+2z=0 & 7y+8z=0 & y+2z=0 \\ -3x-y+z=0 & 5y+10z=0 & -6z=0 \end{array}$$

Homojen sistem serbest (keyfi) değişkene sahip olmayan bir üçgensel biçime sahiptir. Bu nedenle sadece sıfırdan çözümü vardır. O halde esas vektörler lineer bağımsızdır.

0.0.2 Nokta Çarpımı (İç Çarpım), Ortogonallik

1. $u=(1,-2,3,-4)$ ve $v=(6,7,1,-2)$ ise $u.v$ yi bulunuz.

Karşılıklı bileşenleri çarparak ve toplayarak: $u.v = (1)(6)+(-2)(7)+(3)(1)+(-4)(-2)=3$ buluruz.

2. $u=(3,2,1), v=(5,-3,4), w=(1,6,-7)$ olduğunu kabul edelim. **(a)** $(u+v).w$, **(b)** $u.w+v.w$ ifadelerini hesaplayınız.

(a) İlk önce karşılıklı bileşenleri toplayarak $u+v$ yi hesaplarız. $u+v=(8,-1,5)$ ve $(u+v).w=(8,-1,5)(1,6,-7)=(8)(1)+(-1)(6)+(5)(-7)=-33$ buluruz.

(b) İlk önce $u.w=3+12-7=8$ ve $v.w=5-18-28=-41$ buluruz. O zaman $u.w+v.w=8-41=-33$.

(a) ve (b) den $(u+v).w=u.w+v.w$ eşitliği geçerlidir.

3. $u = (1, 2, 3, -4), v = (5, -6, 7, 8)$ ve $k = 3$ olsun. **(a)** $k\,(u.v)$, **(b)** $(ku).v$, **(c)** $u.(kv)$ değerlerini bulunuz.

(a) İlk önce $u.v = 5 - 12 + 21 - 32 = -18$ buluruz. Daha sonra $k\,(u.v) = 3(-18) = -54$

(b) İlk önce $k.u = (3, 6, 9, -12)$ buluruz. Daha sonra $(k.u)\,.v = (3)(5) + (6)(-6) + (9)(7) + (-12)(8) = 15 - 36 + 63 - 96 = -54$

(c) Önce $k.v = (15, -18, 21, 24)$ ifadesini bulalım. Daha sonra $u.(kv) = (1)(15) + (2)(-18) + (3)(21) + (-4)(24) = 15 - 36 + 63 - 96 = -54$ olur.

4. $u = (5, 4, 1), v = (3, -4, 1)$ ve $w = (1, -2, 3)$ olsun. Eğer varsa, bu vektör çiftlerinden hangileri ortogonaldir?

Her vektör çiftinin nokta çarpımını bulalım:

$$u.v = 15 - 16 + 1 = 0,\ \ v.w = 3 + 8 + 3 = 14,\ \ u.w = 5 - 8 + 3 = 0$$

Böylece u ve v , u ve w vektörleri ortogonal fakat v ve w vektörleri ortogonal değildir.

5. $u = (1, k, -3)$ ve $v = (2, -5, 4)$ vektörleri ortogonal olacak şekilde k yı bulunuz.

$u.v$ yi hesaplayalıp, sıfıra eşitleyelim

$$u.v = 2 - 5k - 12 = 0 \Rightarrow -5k - 10 = 0 \Rightarrow k = -2$$

bulunur.

0.0.3 R^n de Norm (Uzunluk)

1. Eğer $w = (-3, 1, -2, 4, -5)$ ise $\|w\|$ yi bulunuz.

$w^2 = (-3)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2 + (-5)^2 = 9 + 1 + 4 + 16 + 25 = 55$; buradan dolayı $\|w\| = \sqrt{55}$ olur.

2. $u = (1, k, -2, 5)$ için $\|u\| = \sqrt{39}$ olacak şekilde k yı belirleyiniz.

$$\|u\|^2 = 1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2 = 1 + k^2 + 4 + 25 = 39 \Rightarrow k^2 + 30 = 39 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

elde edilir.

3. $w = (4, -2, -3, 8)$ yi normalleyiniz.

Önce $w^2 = 4^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 8^2 = 93$ buluruz. Daha sonra w nin her bileşenini $\|w\| = \sqrt{93}$ ile bölelim.

$$\hat{w} = (\frac{4}{\sqrt{93}}, \frac{-2}{\sqrt{93}}, \frac{-3}{\sqrt{93}}, \frac{8}{\sqrt{93}})$$

elde edilir.

4. $v = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$ vektörünü normalleyiniz.

v ve v nin herhangi pozitif katının aynı normallenmiş şekle sahip olduğunu belirtelim. Bu nedenle, v yi 12 ile çarparak kesirleri "tamlarız": $12v = (6, 8, -3)$ alalım. Bu durumda

$(12v)^2 = 36 + 64 + 9 = 109$ ve $\|12v\| = \sqrt{109}$ bulunur.

$$\hat{v} = \widehat{12v} = \frac{12v}{\|12v\|} = (\frac{6}{\sqrt{109}}, \frac{8}{\sqrt{109}}, \frac{-3}{\sqrt{109}})$$

elde edilir.

5. $u = (1, 2, -2), v = (3, -12, 4)$ ve $k = -3$ olsun. (a) $\|u\|\,\|v\|$ *ve* $\|ku\|$ yu bulunuz. (b) $\|ku\| = |k|\,\|u\|$ ve $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ olduğunu sağlayınız.

0.0.4 Uzaklık, Açılar, İzdüşümler

1. Aşağıdaki şıklardaki u ve v vektörleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

(a) $u = (1,7), v = (6,-5)$

(b) $u = (3,-5,4), v = (6,2,-1)$

(c) $u = (5,3,-2,-4,-1), v = (2,-1,0,-7,2)$.

Çözüm. u ve v vektörleri arasındaki uzaklığı $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\ldots}$ formülünü kullanarak bulalım.

(a) $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(1-6)^2+(7-(-5))^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

(b) $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(3-6)^2+(-5-2)^2+(4+1)^2} = \sqrt{9+49+25} = \sqrt{83}$

2. $u = (2,k,1,-4)$ ve $v = (3,-1,6,-3)$ olmak üzere $d(u,v) = 6$ olacak şekildeki k değerini bulunuz.

İlk önce

$$[d(u,v)]^2 = (2-3)^2+(k+1)^2+(1-6)^2+(-4+3)^2 = k^2+2k+28$$

buluruz. Şimdi $k^2+2k+28 = 6^2$ ni çözersek $k = 2,-4$ elde ederiz.

3. $u = (1,2,-5)$ ve $v = (2,4,3)$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\cos\theta$ yı bulunuz.

İlk önce $u.v = 2+8-15 = -5$, $\|u\|^2 = 1+4+25 = 30$, $\|v\|^2 = 4+16+9 = 29$ bulunur. Bu durumda

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|} = -\frac{5}{\sqrt{30}\sqrt{29}}$$

4. $u = (1,-3,4)$ ve $v = (3,4,7)$ olmak üzere, $izd(u,v)$ yi bulunuz.

İlk önce $u.v = 3-12+28 = 19$ ve $\|v\|^2 = 9+16+49 = 74$ buluruz. Buradan

$$izd(u,v) = \frac{u.v}{\|v\|^2}v = \frac{19}{74}(3,4,7) = \left(\frac{57}{74},\frac{76}{74},\frac{133}{74}\right)$$

0.0.5 Noktalar, Doğrular ve Hiperdüzlemler

Bu kısımda R^n de bir nokta olarak bakılan $P(a_1, a_2, ..., a_n) = P(a_i)$ $n-$lisi ve O dan $C(c_1, c_2, ..., c_n)$ ye bir vektör olarak bakılan $v = [c_1, c_2, ..., c_n]$ $n-$lisini birbirinden ayırt eder.

1. (a) R^2 de $P(2,5)$ ve $Q(-3,4)$, (b) R^3 de $P(1,2,-4)$ ve $Q(6,0,-3)$ olmak üzere $\overrightarrow{PQ}$ yönlü doğru parçasıyla belirlenen v vektörünü bulunuz.

(a) $v = Q - P = [-3-2, 4-5] = [-5,-1]$

(b) $v = Q - P = [6-1, 0+2, -3-4] = [5,2,-7]$

2. R^3 de $P(3,k,-2)$ ve $Q(5,3,4)$ noktalarını düşünelim. $\overrightarrow{PQ}$ vektörü, $u = [4,-3,2]$ vektörüne ortogonal olacak şekilde k yı bulunuz.

İlk önce $v = Q - P) = [5-3, 3-k, 4+2] = [2, 3-k, 6]$ yı bulalım. Daha sonra

$$u.v = 4(2) - 3(3-k) + 2(6) = 8 - 9 + 3k + 12 = 3k + 11$$

hesaplayalım. Son olarak, $u.v = 0$ veya $3k + 11 = 0$ koyalım ki buradan $k = -11/3$ çıkar.

3. R^4 de $P(3,-2,1,-4)$ den geçen ve $u = (2,5,-6,-2)$ ye dik olan H hiperdüzleminin bir denklemini bulunuz.

H hiperdüzlemi u ya normal (dik) olduğundan $2x + 5y - 6z - 2w = k$ denklemine sahiptir. P yi bu denklemde yerine yazarsak $k = -2$ buluruz. Böylece H nın bir denklemi $2x + 5y - 6z - 2w = -2$ olur.

4. $3x - 7y + 4z = 5$ denklemiyle tanımlanan H' düzlemine paralel ve $P(1,-5,2)$ noktasından geçen ve R^3 de yatan H düzleminin denklemini bulunuz.

H ve H' nün paralel olması için gerek ve yeter koşul normallerinin paralel veya antiparalel olmasıdır. Bu nedenle H nın bir denklemi $3x - 7y + 4z = k$ dır. $P(1,-5,2)$ yi bu denklemde yerine yazalım. $k = 16$ buluruz. Böylece istenen denklem $3x - 7y + 4z = 46$ dır.

5. R^4 de $P(4, -2, 3, -1)$ noktasından geçen ve $u = (2, 5, -7, 11)$ yönünde olan doğrunun bir parametrik denklemini bulunuz.

R^n de $P(a_i)$ den geçen ve sıfırdan farklı $u = [u_i]$ vektörü doğrultusunda olan L doğrusu

$$X = P + tu \text{ veya } x_i = a_i + u_i t \ (i = 1, 2, ..., n \text{ için}) \tag{1}$$

denklemini sağlayan $X = (x_i)$ noktalarının oluşturduğu bir doğrudur. Burada t parametresi tüm reel sayıları alır. Böylece

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 7t \\ w = 1 + 11t \end{cases} \text{ veya } (4 + 2t, -2 + 5t, 3 - 7t, 1 + 11t)$$

6. R^3 de $P(5, 4, -3)$ ve $Q(1, -3, 2)$ noktalarından geçen doğrunun bir parametrik denklemini bulunuz.

Önce $u = \overrightarrow{PQ} = [1 - 5, -3 - 4, 2 - (-3)] = [-4, -7, 5]$ hesaplayalım. O zaman 5.problemi kullanarak

$$x = 5 - 4t, y = 4 - 7t, z = -3 + 5t$$

buluruz.

7. 6.problemdeki doğru için parametrik olmayan bir gösterim bulunuz.

t için her koordinat denklemini çözünüz ve sonuçları eşitleyiniz.

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{5}$$

veya $7x - 4y = 19$ ve $5x + 4z = 13$ istenendir.

8. R^3 de $2x - 3y + 7z = 4$ düzlemine dik olan ve $P(6, 5, 1)$ noktasından geçen düzlemle

kesişen doğrunun bir parametrik denklemini bulunuz.

Doğru düzleme dik olduğundan, doğru düzlemin $v = [2, 3, -7]$ vektörü doğrultusunda olmalıdır. Bu nedenle

$$x = 6 + 2t,\ y = 5 - 3t,\ z = 1 + 7t$$

olur.

0.0.6 Çapraz Çarpım (Dış Çarpım)

Çapraz çarpım R^3 deki vektörler için tanımlıdır.

1. **(a)** $u = (1, 2, 3)$ ve $v = (4, 5, 6)$, **(b)** $u = (7, 3, 1)$ ve $v = (1, 1, 1)$, **(c)** $u = (-4, 12, 2)$ ve $v = (6, -18, 3)$ için $u \times v$ yi bulunuz.

Çözüm. $u = (a_1, a_2, a_3)$ ve $v = (b_1, b_2, b_3)$ için dış çarpım aşağıdaki şekilde elde edilebilir. $v = (b_1, b_2, b_3)$ vektörünü, $u = (a_1, a_2, a_3)$ vektörünün altına koyarak

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

tablosunu oluşturunuz. O zaman

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

idi.

(a)

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (12 - 15, 12 - 6, 5 - 8) = (-3, 6, -3)$$

(c)

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -18 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} \right) = (36+36, 12+12, 72-72) = (72, 24, 0)$$

2. $u = 2i - 3j + 4k, v = 3i + j - 2k,\ w = i + 5j + 3k$ vektörlerini düşünelim. (a) $u \times v$, (b) $u \times w$, (c) $v \times w$ yi hesaplayınız.

Çözüm. $v_1 = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $v_2 = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ olmak üzere

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

(b) $u \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-9 - 20)i + (4 - 6)j + (10 + 3)k = -29i - 2j + 13k$