# Lineer Cebir

Gauss yok etme yöntemi

### Gauss yok etme yöntemi

Gauss yok etme yöntemi, yok etme yönteminin «elemanter işlemler» kullanılarak düzenlenmiş bir çeşididir.

#### Elemanter işlemler:

- 1) Bir satırı sıfırdan faklı bir sayı ile çarpmak
- 2) Bir satırı bir sayı ile çarpıp başka bir satıra eklemek
- 3) İki satırı yer değiştirmek

Önerme: Uygulanmış bir elemanter işlemi başka bir elemanter işlem yardımıyla geri alabiliriz.

## **İşlem 1:** *i*. satırı $r \neq 0$ sayısı ile çarpmak

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ (ra_{i1})x_1 + (ra_{i2})x_2 + \dots + (ra_{in})x_n = rb_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Bu işlemi i. satırı  $r^{-1}$  sayısı ile çarparak geri alabiliriz.

## **İşlem 2:** i. satırın bir r katını j. satırına eklemek

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots & \Longrightarrow \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots & \ldots & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{j1} + ra_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + ra_{in})x_n = b_j + rb_i \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Bu işlemi i. satırın bir -r katını j. satırına ekleyerek geri alabiliriz.

# **İşlem 3:** i. satır ve j. Satırı yer değiştirmek

Bu işlemi geri almak için tekrar uygulamak yeterlidir.

**Teorem:** Bir lineer denklem sistemine elemanter işlem uygulandığında sistemin çözümü değişmez

**Not:** Bir lineer denklem sisteminin çözüm yöntemini iki kısma ayırabiliriz: **(A)** Yokme kısmı **(B)** Geriye dönük yerine yazma İki kısım da elemanter işlemler yardımıyla yapılır.

# Örnek: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

1. satırın -2 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ y - z & = -1 \\ x + y + z & = 6 \end{cases}$$

1. satırın -1 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

#### 2. satırın -2 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ y - z = -1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Yok etme işlemi bitti. Şimdi sistemi geriye dönük yerine yazma işlemiyle kolayca çözebiliriz. Fakat elemanter işlemleri kullanarak sistemi daha basit hale getirebiliriz.

# 3. satırı $\frac{1}{3}$ ile çarpalım:

$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ y - z & = -1 \\ z & = 2 \end{cases}$$

3. satırı 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{cases}$$

2. satırı 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x & = 3 \\ y & = 1 \\ z & = 2 \end{cases}$$

Sistemin tek çözümü: (x, y, z) = (3, 1, 2)

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

1. satırı 3. satıra ekleyelim

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 5y - 5z = 2 \end{cases}$$

2. satırın -5 katını 3. satıra ekleyelim

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = -13 \end{cases}$$

(!!!) Sistemin çözümü yoktur. Kararsız sistem.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

1. satırı 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 5y - 5z = 15 \end{cases}$$

2. satırın -5 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2. satırın -1 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x & -z = -2 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - 2 \\ y = z + 3 \end{cases}$$

Burada z yi bir parametre olarak alırsak çözüm aşağıdaki gibi olacaktır. Her  $t \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 3 \\ z = t \end{cases}$$

Sistemin çözümü:  $(x, y, z) = (t - 2, t + 3, t), t \in \mathbb{R}$ .

Ya da vektör formunda: (x, y, z) = (-2, 3, 0) + t(1, 1, 1).

**Matrisler:** Bir matris dikdörtgensel şekilde sıralanmış sayılar dizinidir.

Örnekler: 
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
,  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0.2 \\ 4.6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} 3/5 \\ 5/8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}, 5), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisin boyutu: (satır sayısı)x(sütun sayısı)

nxn: kare matris

nx1: sütun vektörü

1xn: satır vektörü

#### Lineer denklem sistemlerinin matris gösterimi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

#### Lineer denklem sistemlerinin matris gösterimi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

#### Ek matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Elemanter satır işlemleri ek matris için de benzer şekilde kullanılabilir:

#### Elemanter satır işlemleri:

- 1) Bir satırı sıfırdan faklı bir sayı ile çarpmak
- 2) Bir satırı bir sayı ile çarpıp başka bir satıra eklemek
- 3) İki satırı yer değiştirmek

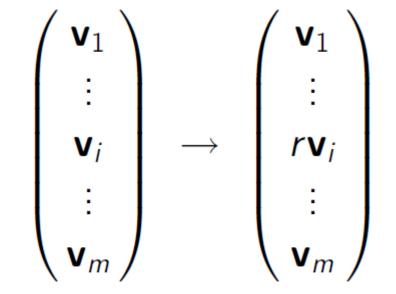
**Uyarı**: Burada satırlar birer vektör gibi düşünülür skalerle çarpma işlemi buna göre yapılır.

Elemanter satır işlemleri: Bu işlemleri ek matris için aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

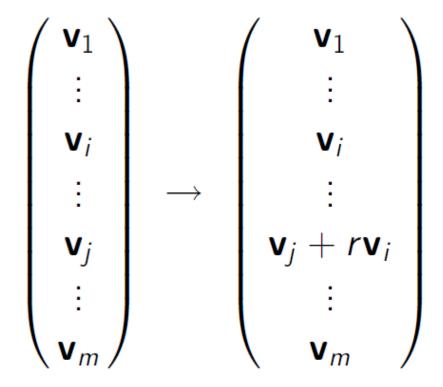
$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\hline
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_2 \\
\vdots \\
\mathbf{v}_m
\end{pmatrix}$$

Burada  $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \end{pmatrix}$  bir vektör olarak ele alınır.

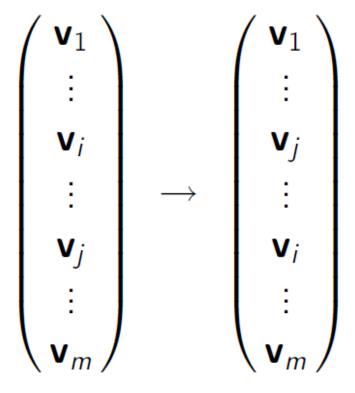
**İşlem 1:** *i*. satırı  $r \neq 0$  sayısı ile çarpmak



**İşlem 2:** i. satırın bir r katını j. satırına eklemek



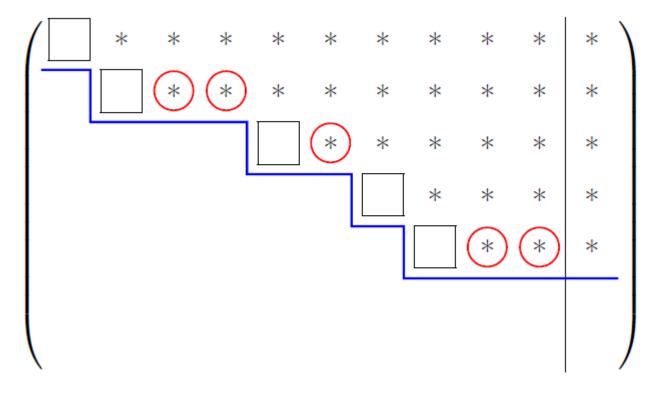
**İşlem 3:** i. satır ve j. Satırı yer değiştirmek



**Satır eşelon formu:** Gauss yok etme yönteminin amacı ek matrisi satır eşelon formuna getirmektir. Satır eşelon formda iki özellik aranır:

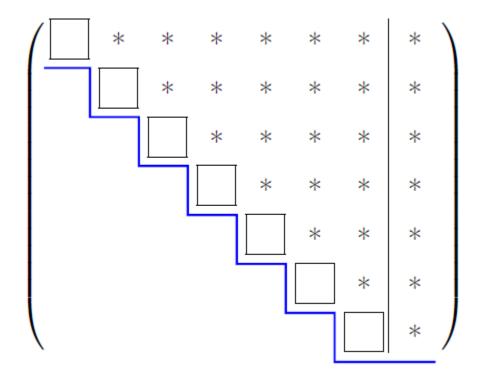
- Satırlardaki sıfırdan faklı ilk eleman 1'dir
- 1. satırdan son satıra doğru giderken sıfırdan faklı ilk elemanlar sağa doru dizilime sahiptir.

#### Satır eşelon formunun genel hali:

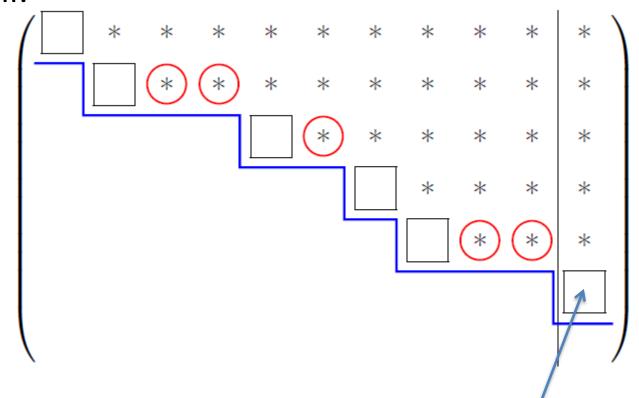


- Satırlardaki sıfırdan faklı ilk elemanlar kutular olup 1'e eşittir.
- Merdivenin altındaki tüm sayılar 0' dır.
- Merdivenin her adım yüksekliği 1' dir.
- Daire içine alınmış sayılar herhangi bir sayı olabilir.

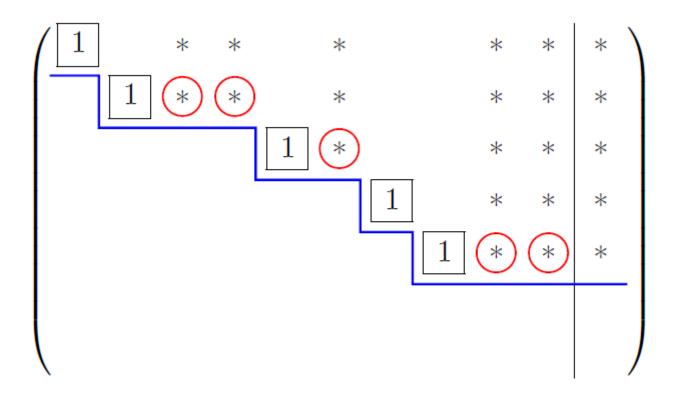
Tam üçgensensel form satır eşelon formun özel bir hali olup yalnızca n bilinmeyen ve n denklemli sistemlerde ortaya çıkabilir.



Satır eşelon formdaki bir matrisin en sağdaki sütünü hiçbir «kutu»(satırdaki sıfırdan faklı ilk eleman) içermiyorsa bu sistemin başlangıç hali kararlı bir sistemdir.



Kararlı olmayan bir sistem örneği Kararsız sistemlerden burada «kutu» olmaz Gauss yok etme yönteminin amacı bir lineer denklem sisteminin ek matrisini satır eşelon forma getirmektir.



- Merdivenin altındaki tüm sayılar 0 olmalı
- Kutu içerisindeki sayılar 1 olmalı
- Daire içine alınmış sayılar herhangi bir sayı olabilir

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ 2x - y - z &= 3 \\ x + y + z &= 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Satır eselon formu(tam ücgensel)

$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ y - z = -1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\begin{cases} x & = 3 \\ y & = 1 \\ z & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Satır eşelon formu(tam üçgensel değil)

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\begin{cases} x & -z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Satır eşelon formu(tam üçgensel)

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{1} & 1 - 0 \\ 0 & \boxed{1} - 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\begin{cases} x & -z = -2 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Örnek: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Ek matris incelendiğinde zaten  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  eşelon formda olduğu görülür.

Ek matrisi indirgenmiş eşelon forma getirmek için 2. satırın -2 katını 1. satıra eklemeliyiz.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  Burada  $x_3$  ve  $x_4$  değişkenleri  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ birer parametre olarak alınır. Buna göre sistem aşağıdaki gibi çözülür:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 6
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 - 2 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Lineer denklem sisteminin genel çözümü:

$$\begin{cases} x_1 = t + 2s - 2 \\ x_2 = -2t - 3s + 6 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$
  $(t, s \in \mathbb{R})$ 

#### Çözüm vektör formunda:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
  
=  $(-2, 6, 0, 0) + t(1, -2, 1, 0) + s(2, -3, 0, 1).$ 

Örnek(Parametre içeren bir örnek):

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bu sistem «**homojen**» bir sistemdir. (Homojen sistemlerden sağ taraf sıfırlardan oluşur.) Homojen sistemler her zaman x = y = z = 0 çözümüne sahiptir. Bu yüzden kararlıdır.

Sistemin ek matrisi: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

İlk terim 0 olduğundan 1. satır ile 2. satırı (ya da 3. satırı) yer değiştirmeliyiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi yok etme yöntemine başlayabiliriz. İlk önce 3. satırdan 1. satırı çıkartalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Satır istediğimiz gibi.

Şimdi 3. satırdan 2. satırı çıkartalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi iki durum ortaya çıkar:

**1. durum:**  $a \neq 1$  ise 3. satırı  $(a-1)^{-1}$  ile çarparız:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Artık ek matris eşelon formda olup **indirgenmiş eşelon forma** getirilebilir: 3. satırın -3 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

3. satırın 2 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Son olarak 2. satırı 1. satırdan çıkartalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Buradan tek çözüm x = y = z = 0 olur.

**2. durum:** a=1 ise ek matris zaten eşelon formdadır:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

İndirgenmiş eşelon forma getirmek için 2. satırı 1. satırdan çıkartalım:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
\boxed{1} & 0 & -5 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

z bağımsız değiken olur:

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5z \\ y = -3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

#### Sisteminin genel çözümü:

Eğer 
$$a \neq 1$$
 ise  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ;

Eğer 
$$a = 1$$
 ise  $(x, y, z) = (5t, -3t, t), t \in \mathbb{R}$ .