Lineer Cebir

Cramer Kuralı ve Determinant Yardımıyla Ters Matris

Cramer Kuralı

Aşağıdaki n bilinmeyenli n denklemli lineer sistemi ele alalım:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Bu lineer sistemde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cramer Kuralı

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Teorem: Yukarıdaki sistemde A matrisi tersinir olsun. O halde sistemin tek çözümü

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

şeklindedir. Buradan A_i matrisi A matrisinin i. sütununun $\mathbf{b}$ ile değiştirilmesi ile oluşan matristir.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Örnek

$$3x+5y = 23 \qquad A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$7x\text{-}2y = 81$$

$$|A| = -41 \neq 0, \quad A^{-1} = -1/41 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 23 \\ 81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$3x-2y = 7$$

$$5x+3y = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -38$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = 19 / 19 = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = -38 / 19 = -2$$

Örnek:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 13z = 1 \end{cases}$$

Sistemin ek matrisi aşağıdaki gibidir:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 13 & 1 \end{array}\right)$$

Bu determinantı daha önce hesaplamıştık: $\det A = -12.$

Determinant sıfırdan farklı olduğundan sistemin tek çözümü vardır.

Örnek:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 13z = 1 \end{cases}$$

Cramer kuralından

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$$

Örnek:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 13z = 1 \end{cases}$$

Cramer kuralından

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

Örnek:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 13z = 1 \end{cases}$$

Cramer kuralından

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$$

Örnek:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 13z = 1 \end{cases}$$

Bu sistemin çözümü:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Determinant ve Ters Matris

$n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. A' nın M_{ij} altmatrisi, A' dan i. satır ve j. sütun silindikten sonra kalan matristir.

A' nın **kofaktör matrisi** $n \times n$ bir matristir ve $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ olmak üzere $\tilde{A} = (C_{ij})$ şeklinde gösterilir.

Teorem: $\widetilde{A}^T A = A\widetilde{A}^T = (\det A)I.$

Sonuç: Eğer $\det A \neq 0$ ise A matrisi tersinirdir ve tersi

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\widetilde{A}^T.$$

$A\widetilde{A}^T = (\det A)I$ denkleminin anlamı aşağıdaki gibidir:

Her k için $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj} \det M_{kj} = \det A$

$m \neq k$ için $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{mj} \det M_{kj} = 0$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ formülü yardımıyla kofaktör matrisini elde edelim:

$$M_{11} = 8, \quad M_{12} = -12, \quad M_{13} = -13$$

$$M_{21} = -6, \quad M_{22} = 9, \quad M_{23} = -4$$

$$M_{31} = 15, \quad M_{32} = 5, \quad M_{33} = 10$$

$$C_{11} = 8, \quad C_{12} = 12, \quad C_{13} = -13$$

$$C_{21} = 6, \quad C_{22} = 9, \quad C_{23} = 4$$

$$C_{31} = 15, \quad C_{32} = -5, \quad C_{33} = 10$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -13 \\ 6 & 9 & 4 \\ 15 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\tilde{A}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 12 & 9 & -5 \\ -13 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Şimdi A' nın determinantını 1. satır açılımına göre hesaplayalım:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 + 0 - 3 \cdot (-13) = 55$$

Buna göre

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\tilde{A}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 12 & 9 & -5 \\ -13 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$