2.Konu

Matrisler ve matris işlemleri

Kaynaklar:

*1.**Uygulamalı lineer cebir.** 7.baskıdan çeviri.Bernhard Kollman, David R.Hill/çev.Ed. Ömer Akın, Palma Yayıncılık, 2002*

*2.**Lineer Cebir.** Feyzi Başar.Surat Universite yayınları, 2012*

1. **Matris toplamının özellikleri**
2. **Matris çarpımının özellikleri**
3. **Skalarla çarpımın özellikleri**
4. **Transpozun özellikleri**
5. **Özel tipte matrisler**
6. **Bölünmüş matrisler**
7. **Singüler olmayan matrisler**
8. **Lineer sistemler ve tersleri**

1. Matris toplamının özellikleri

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ ve $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ $m\times n$ tipindeki matrisler.

1.Teorem: A, B, C $m\times n$ tipinde bir matrisler olsun.

i. A+B=B+A
ii. A+(B+C)=(A+B)+C
iii. Herbir A $m\times n$ matrisi için,
$A+O_{mn}=A$
şekilde O_{mn} $m\times n$ tipinde matrisi vardır. O_{mn} matrise sıfır matris denir. m=n olduğunda O_n veya O yazılır.
iv. Herbir A $m\times n$ matrisi için,
A+D=O olacak şekilde bir tek D $m\times n$ tipinde matrisi vardır.
$D=-A$ şekilde yazacağiz ve $-A$ ye A nın **negatifi** denir.

İspat:

i. $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}], \boldsymbol{C}=A+B=[c_{ij}], \boldsymbol{D}=B+A=[d_{ij}]$ olsun.
Tüm i,j ler için $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}=d_{ij}$ olduğuna göre C=D.

ii. A+(B+C)=(A+B)+C

iii. $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], = [a_{ij}], C = [c_{ij}],$

$$F = \mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = [f_{ij}], \boldsymbol{H} = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} = [h_{ij}]$$

Tüm i,j ler için $f_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = h_{ij}$ olduğuna göre F=H.

iv. $A = [a_{ij}]$

$B = A + O = A$

$a_{ij} + 0 = a_{ij}$

A+D=O $D = [d_{ij}]$

$$a_{ij} + d_{ij} = 0 \Rightarrow d_{ij} = -a_{ij}$$

1.Ö.:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

2.Ö.: A 2x3 tipinde matris. $a_{ij} = |i - j|$. –A=?

2. Matris çarpımının özellikleri

2.Teorem: Eğer **A,B,C** birer matris ise,

i. $A(BC) = (AB)C$

ii. $(A + B)C = AC + BC$

iii. $C(A + B) = CA + CB$

İspat:

i. $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{m \times n}, \boldsymbol{B} = [b_{ij}], \boldsymbol{n \times p}, \boldsymbol{C} = [c_{ij}], \boldsymbol{p \times k}$ tipinde

$$F = A(BC), G = (AB)C, D = BC, H = AB$$

$$d_{lj} = \sum_{r=1}^{p} b_{lr} c_{rj}, \qquad l = 1, .., n; j = 1, \dots, k$$

$$h_{ir} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lr}, \qquad i = 1, .., m;\ r = 1, \dots, p$$

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{r=1}^{p} b_{lr} c_{rj} \quad i = 1, .., m;\ j = 1, \dots, p$$

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{p} h_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lr} c_{rj} \quad i = 1, .., m; j = 1, \dots, p$$

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{r=1}^{p} b_{lr} c_{rj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} a_{il} b_{lr} c_{rj} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lr} c_{rj} = g_{ij}$$

ii. $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}], \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{C} = [c_{ij}], \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$ tipinde

$D = A + B, F = DC, G = AC, H = BC, M = G + H$

$d_{il} = a_{il} + b_{il}, i = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, n$

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{n} d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} (a_{il} + b_{il})c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} (a_{il}c_{lj} + b_{il}c_{lj})$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il}c_{lj} + \sum_{l=1}^{n} b_{il}c_{lj} = g_{ij} + h_{ij} = m_{ij}$$

iii. Ödev için bırakılıyor.

3.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A(BC) = (AB)C = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

4.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$(A + B)C = AC + BC = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

3.Skalarla çarpımın özellikleri

3.Teorem: Eğer **A,B** birer matris ise ve $r, s \in R$ ise

i. $r(sA) = (rs)A$

ii. $(r + s)A = rA + sA$

iii. $r(A + B) = rA + rB$

iv. $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

İspat:

i. $C = r(sA), D = (rs)A, C = [c_{ij}], D = [d_{ij}]$

$c_{ij} = r(sa_{ij}), d_{ij} = (rs)a_{ij} \Rightarrow c_{ij} = d_{ij} \Rightarrow C = D$

ii. $C = (r + s)A, D = rA + sA, C = [c_{ij}], D = [d_{ij}]$

$c_{ij} => (r + s)a_{ij}, d_{ij} = ra_{ij} + sa_{ij} \Rightarrow c_{ij} = d_{ij} \Rightarrow C = D$

iii. $C = r(A + B), D = rA + rB, C = [c_{ij}], D = [d_{ij}]$

$c_{ij} = r(a_{ij} + b_{ij}), d_{ij} = ra_{ij} + rb_{ij} \Rightarrow c_{ij} = d_{ij} \Rightarrow C = D$

iv. $C = A(rB), D = r(AB)$,F=$(rA)B, C = [c_{ij}], D = [d_{ij}], F = [f_{ij}]$, A mxn, B nxp matris

$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(rb_{lj})$=$r\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} = \sum_{l=1}^{n}(ra_{il})b_{lj}$

$\Longrightarrow c_{ij} = d_{ij} = f_{ij} \Longrightarrow C = D = F$

5.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2(3A)=6A=?

A(2B)=2(AB)=?

4.Transpozun özellikleri

4.Teorem: Eğer r bir skalar ve A,B matrisler ise

i. $(A^T)^T = A$

ii. $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii. $(AB)^T = B^T A^T$

iv. $(rA)^T = rA^T$

İspat:

i. $C = A^T, D = C^T.\ C = [c_{ji}], D = [d_{ij}]$

$c_{ji} = a_{ij}, d_{ij} = c_{ji} \Longrightarrow a_{ij} = d_{ij}$

ii. $C = (A + B)^T, D = A^T + B^T.\ C = [c_{ji}], D = [d_{ij}]$

$c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})^T = a_{ij}{}^T + b_{ij}{}^T = d_{ij} \Longrightarrow c_{ij} = d_{ij}$

iii. $C = AB, D = B^T A^T$

$$c_{ij}{}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}{}^T b_{ik}{}^T = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^T a_{kj}{}^T = d_{ij}$$

iv. $(ra_{ij})^T = r(a_{ij})^T$

6.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$A^T = ?\ B^T = ?\ (A + B)^T = ?\ A^T + B^T = ?$

7.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$AB = ?, (AB)^T = ? B^T = ? A^T = ? B^T A^T = ?$

8.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$AB = O \nRightarrow A = O \text{ veya } B = O$

9.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix} \nRightarrow B = C$$

Uyari:

Matris çarpımı ile reel sayıların çarpımı arasındaki farkların bir kısmı:

1. **AB nin BA eşit olması gerekmez.**

2. $\boldsymbol{A \neq O}$ $\boldsymbol{ve}$ $\boldsymbol{B \neq O}$ **olmak üzere AB sıfır matris olabilir**
3. $\boldsymbol{B \neq C}$ **iken AB=AC olabilir**

5.Özel tipte matrisler

1.Tanım: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], n \times n$ kare matris olsun**.** $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **köşegen matris** denir. Köşegen elemanların birbirine eşit olduğu matrisine **skalar matris** denir.
O köşegenmidir?
2.Tanım: $\boldsymbol{I_n} = [a_{ij}], n \times n$ kare matrisi **köşegen ise ve** $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$,
$i = j$ için $a_{ij} = 1$ ise $\boldsymbol{I_n}$ matrise **ösdeşlik (birim) matris** denir.
10.Ö.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A, B, \boldsymbol{I_3}$ köşegen, $B, \boldsymbol{I_3}$ skalar, $\boldsymbol{I_3}$ ösdeşlik

5.Teorem: A, mxn tipinde bir matris ise $\boldsymbol{A\, I_n = A}$ **ve** $\boldsymbol{I_m A = A}$ olur.
6.Teorem: Eğer A bir skalar matris ise bir r skaları için $\boldsymbol{A = r\, I_n}$ olur.

3.Tanım: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], n \times n$ kare matrisi ise
$A^p = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ (p çarpan).
$A^0 = I_n$ şekilde tanımlanır.
Özellikleri:

i. $A^p A^q = A^{p+q}$
ii. $(A^p)^q = A^{pq}$
iii. $(AB)^p = A^p B^p$

4.Tanım: Eğer $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], n \times n$ kare matrisine **üst üçgen matris** denir.
5.Tanım: Eğer $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], n \times n$ kare matrisine **alt üçgen matris** denir.
11.Ö.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A üst üçgen, B alt üçgen
6.Tanım: Eğer $A^T = A$ ise A matrisine **simetrik matris** denir.
7.Tanım: Eğer $A^T = -A$ ise A matrisine **ters-simetrik matris** denir.
12.Ö.:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ simetriktir.

13.Ö.:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -4\\ -3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$ simetriktir.

6.Bölünmüş matrisler

mxn tipindeki $A=[a_{ij}]$ matrisini göz önüne alalım. Bu matrisin bazı satır veya sütunlarını çıkarırsak, A matrisin bir **alt matrisini** elde ederiz.

14.Ö.:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc|cc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc|c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\widehat{A_{11}} & \widehat{A_{12}} & \widehat{A_{13}}\\ \widehat{A_{21}} & \widehat{A_{22}} & \widehat{A_{23}}\end{bmatrix} \quad (1)$$

A ve B matrislerin her ikisi de aynı yolla bölünmüş mxn tipindeki matrisler ise, A+B matris A ve B alt matrislerin toplamı ile basitçe elde edilir. A bölünmüş matris ise cA skalar çarpımı, her bir alt matrisi bir c skaları ile çarpmak sureti ile bulunur.

Eğer A matrisi (1) de gösterildiği gibi bölünmüş bir matris ve

$$B=\left[\begin{array}{cc|cc}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{21} & b_{21} & b_{21}\\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\\ \hline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\\ B_{31} & B_{32}\end{bmatrix}$$

biçimde bölünmüş bir matris ise bu iki matrisin çarpımı

$$AB=\begin{bmatrix}\widehat{A_{11}}B_{11}+\widehat{A_{12}}B_{21}+\widehat{A_{13}}B_{31} & \widehat{A_{11}}B_{12}+\widehat{A_{12}}B_{22}+\widehat{A_{13}}B_{32}\\ \widehat{A_{21}}B_{11}+\widehat{A_{22}}B_{21}+\widehat{A_{23}}B_{31} & \widehat{A_{21}}B_{12}+\widehat{A_{22}}B_{22}+\widehat{A_{23}}B_{32}\end{bmatrix}$$

15.Ö.:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ \hline 2 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2\\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

$$AB=C=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ \hline 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = ?$$

7.Singüler olmayan matrisler

8.Tanım: $\boldsymbol{AB = BA = I_n}$ olarak şekilde bir B matrisi mevcut ise nxn tipindeki bir A matrisine **singüler değildir** veya **tersi alınabilir** denir. B ye de A nın **tersi** denir. Aksi takdirde A matrise **singüler** veya **tersi alınamazdir** denir.

16.Ö.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB = BA = I_2}$$

7.Teorem: Bir matrisin tersi mevcut ise tektir.

Ispat: B ve C matrisler A nın tersi olsun.

$$AB = BA = I_n, AC = CA = I_n$$

Buradan $B = BI_n = B\,(AC) = (BA)C = I_nC = C$

Sigulyar olmayan A nın tersi A^{-1} şekilde gösterilir.

$$AA^{-1} = A^{-1}A$$

17.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Eğer A^{-1} mevcut ise $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Buradan AA^{-1}=$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a + 2c = 1, b + 2d = 0, 3a + 4c = 0, 3b + 4d = 1$

$$a = -2, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

18.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Eğer A^{-1} mevcut ise $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Buradan AA^{-1}=$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a + 2c = 1, b + 2d = 0, 2a + 4c = 0, 2b + 4d = 1$

Bu lineer sistemin çözümü yoktur.

8.Teorem: A ve B nxn tipinde singüler olmayan matrisler ise, bu taktirde AB matrisi de singüler değildir ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ispat: $(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

1.Sonuç: Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_r$ nxn tipinde singüler olmayan ik matris ise, bu taktirde $A_1A_2 \ \ldots \ A_r$ matrisi de singüler değildir ve $(A_1A_2 \ \ldots \ A_r)^{-1} = {A_r}^{-1} \ldots {A_2}^{-1}{A_1}^{-1}$

9.Teorem: A matrisi singüler olmayan matris ise, bu taktirde A^{-1} matrisi de singüler değildir ve $(A^{-1})^{-1} = A$

Ispat: $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

10.Teorem: A matrisi singüler olmayan matris ise, bu taktirde A^T matrisi de singüler değildir ve $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Ispat: $AA^{-1} = I_n$.

Eşitliğin her iki yanının transpozu alınırsa

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = {I_n}^T = I_n.$$

$A^{-1}A = I_n$ eşitliğin transpozu alınırsa

$$(A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T = {I_n}^T = I_n$$

$$(A^{-1})^T A^T = A^T(A^{-1})^T = I_n$$

19.Ö.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8.Lineer sistemler ve tersleri

A, nxn tipinde bir matris ise, bu takdirde $AX = B$ sistemi n – bilinmeyenli, n-denklemli bir sistemdir. A matrisin singüler olmadığını kabul edelim. A^{-1} mevcuttur.

AX=B eşitliğin her iki tarafı A^{-1} ile çarpılsa

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ veya $I_nX = X = A^{-1}B$ bulunur.

20.Ö.:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Eğer $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ise, AX=B lineer sistemin çözümü

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 9 \end{bmatrix}$ olur. Diğer yandan $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ ise,

buradan $X = A^{-1}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.Hafta Ödevler:

2.1. $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}], \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{C} = [c_{ij}], \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$ tipindeki matrisler ve $r, s \in R$ ise $(sA + rB)C = sAC + rBC$ olduğunu ğösteriniz.

2.2. A simetrik matris ise A^T matrisinin de simetrik olduğunu gösteriniz.

2.3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ise $(AB)^{-1}$ bulunuz.

2.4. Aşağıdaki matrislerin tersini bulunuz:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2.5. Eğer A,B,C nxn tipinde singüler olmayan matrisler ise, bu taktirde ABC matrisi de singüler olmayacağını ve $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

2.6. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ve

$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ \hline 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ bölünmüş matrisleri verilsin. Bu iki matrisin çarpımı

$AB = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$

biçimindedir. Aşağıdakileri bulunuz:

(i) C_{11}
(ii) C_{12}
(iii) C_{21}
(iv) C_{22}

2.7. A ve B simetrik matris olsun. A+B matrisin simetrik olduğunu gösteriniz.

2.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise A=S+K olarak S simetrik ve K ters simetrik matrisi bulunuz.

2.9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere AX=B sistemi için X i bulunuz.

(i) $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, (ii) $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.10. AB=AC ve A matrisi singüler değilse, bu taktirde B=C olduğunu gösteriniz.