0.1 KOORDİNATLAR VE İZOMORFİZMLER

0.1.1 Koordinatlar

$V, n-$boyutlu bir vektör uzayı ise, V nin n tane vektörü olan bir S bazına sahip olduğunu biliyoruz. Böylece, şimdiye kadar S deki vektörlerin sırasına çok dikkat etmedik. Ancak, bu kesimde V nin bir $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sıralı bazından söz edeceğiz. Böylece $S_1 = \{v_2, v_1, ..., v_n\}$ V nin farklı sıralı bir bazıdır.

Bir $V, n-$boyutlu vektör uzayının sıralı bir bazı $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ise, bu halde bir önceki kısımda teorem 1 den V nin her v vektörü tek olarak

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayılardır. S sıralı bazına göre v nin koordinat vekötürünü

$$[v]_s = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

biçiminde göstereceğiz. $[v]_s$ nin bileşenleri v nin s ye göre koordinatları olarak adlandırılır.

Örnek 1. P_1 vektör uzayını gözönüne alalım ve P_1 in sıralı bir bazı $S = [v_1, v_2]$ olsun. Burada $v_1 = t$ ve $v_2 = t$ dir. $v = p(t) = 5t - 2$ ise, bu halde $[v]_s = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, S sıralı bazına göre v nin koordinat vektörüdür. Diğer taraftan, $T = [t+1, t-1]$ sıralı baz ise $5t - 2 = \frac{3}{2}(t+1) + \frac{7}{2}(t-1)$ yazılabilir. Bu da

$$[v]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

olması demektir. ■

Dikkat edilirse, $[v]_s$ koordinat vektörü, S de verilen vektörlerin sırasına bağlıdır. Bu sıranın değişimi v nin S ye göre koordinatları değiştirebilir.

Örnek 2. R^3 vektör uzayını gözönüne alalım. Bu vektör uzayının sıralı bir bazı $S = [v_1, v_2, v_3]$ olsun. Burada

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. Eğer

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ise $[v]_s$ koordinat vektörünü hesaplayınız.

Çözüm. $[v]_s$ koordinat vektörünü bulmak için

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = v$$

olacak biçimdeki a_1, a_2 ve a_3 sabitlerini bulmamız gerekir. Bu eşitlik ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right] \tag{1}$$

veya buna denk olarak

$$\left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & v \end{array}\right]$$

olan lineer denklem sistemini verir (gösteriniz). (1) deki matris satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürülürse

$$a_1 = 3,\ a_2 = -1,\ a_3 = -2$$

çözümü elde edilir (gösteriniz). Böylece

$$v_s = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

bulunur. ■

Bir V vektör uzayının sıralı bir bazı $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve V nin

$$[v]_s = [w]_s$$

olacak biçimdeki iki vektörü v ve w olsun. Şimdi $v = w$ olduğunu göstereceğiz.

$$[v]_s = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, [w]_s = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olsun. $[v]_s = [w]_s$ eşitliği nedeniyle

$$a_i = b_i, i = 1, 2, ..., n$$

yazabiliriz. Bu halde

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

ve

$$\begin{aligned} w &= b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \\ &= v \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir sıralı baz seçimi ve her $v \in V$ vektörüne bir koordinat vektörünün karşılık getirilmesi sonucu bize vektör **"resmetme"** imkanı verir. Örnek 1 yardımıyla bu düşünceyi açıklayalım. R^2 düzleminde sabit bir O noktası seçip, O dan geçen ve P_1 in $\{t, 1\}$ bazındaki t ve 1 baz vektörlerini gösteren herhangi iki w_1 ve w_2 yönlü doğru parçalarını çizelim. w_1 ve w_2 nin doğrultuları sırasıyla x_1 ve x_2 eksenleri olarak adlandırılan iki doğru belirler. x_1 ekseni yönünde pozitif yön w_1 in yönü, negatif yön $-w_1$ in yönüdür. w_1 ve w_2 uzunlukları sırasıyla x_1 ve x_2 eksenleri üzerindeki uzunlukları ifade eder. P_1 in bir vektörü v ise, v yi tek olarak $v = a_1w_1 + a_2w_2$ biçiminde yazabiliriz. Şimdi x_1 ekseni üzerinde $|a_1|$ uzunluğunda bir doğru parçası (a_1 pozitif ise pozitif yönde, a_1 negatif ise negatif yönde) işaretleyelim ve bu doğru parçasının uç noktasından w_2 ye paralel çizelim. Benzer şekilde x_2 ekseni üzerinde $|a_2|$ uzunluğunda bir doğru parçası (a_2 pozitif ise pozitif yönde, a_1 negatif ise negatif yönde) işaretleyelim ve bu doğru parçasının uç noktasından w_1 e paralel çizelim. O dan bu iki doğrunun kesim noktasına yönlü doğru parçasını çizelim. Bu yönlü doğru parçası v yi temsil eder.

0.1.2 İzomorfizmler

$V, n-$boyutlu bir vektör uzayı, V nin sıralı bir $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve V nin iki vektörü v ve w ise bu halde v ve w tek olarak

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, \ w = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$$

biçiminde yazılır. Böylece v ve w vektörlerine R^n nin sırasıyla $[v]_s$ ve $[w]_s$ elemanları karşılık getirilir:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow [v]_s \\ w &\rightarrow [w]_s \end{aligned}$$

$v + w = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + ... + (a_n + b_n) v_n$ toplamı, $v + w$ vektörüne

$$[v+w]_s = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = [v]_s + [w]_s$$

vektörünün karşılık getirilmesi demektir. Bu sebepten

$$v + w \to [v+w]_s = [v]_s + [w]_s$$

dir. Yani, V nin v ve w vektörleri toplandığında bulunan $v + w$ vektörüne R^n de karşılık getirilen $[v+w]_s$ koordinat vektörünü elde etmek için v nin $[v]_s$ koordinat vektörü ile w nin $[w]_s$ koordinat vektörü toplanır.

Benzer şekilde c bir reel sayı ise, bu halde

$$cv = (ca_1) v_1 + (ca_2) v_2 + ... + (ca_n) v_n$$

dir. Bu ise

$$[cv]_s = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} = c [v]_s$$

olmasını gerektirir. Bu sebepten,

$$cv \to [cv]_s = c [v]_s$$

yazılabilir. Böylece v bir c skaları ile çarpıldığında, cv vektörüne R^n de karşılık getirilen $[cv]_s$ koordinat vektörünü elde etmek için c ile $[v]_s$ koordinat vektörü çarpılır.

Bu tartışma cebirsel açıdan V ile R^n nin birbirine **"oldukça benzer"** yapıya sahip olduğunu belirtir.

Şimdi bu kavramı açıklayalım. Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına bir fonksiyon L olsun. Her $v_1, v_2 \in V$ için, $L(v_1) = L(v_2)$ iken $v_1 = v_2$ oluyorsa, L nin birebir olduğunu hatırlatalım.

Üstelik, her $w \in W$ için $L(v) = w$ olacak biçimde en az bir $v \in V$ varsa L örtendir. Böylece

$$L(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan $L = R^3 \to R^2$ bağıntısı örtendir. Bunu göstermek için $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ alalım. Bu halde

$$L(v) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = w = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ vektörünü arayalım. Böylece $a_1 = b_2, a_2 = b_1 - b_2$ ve a_3 keyfi çözümü elde edilir. Ancak L birebir değildir. Zira

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ve } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ise, bu halde

$$L(v_1) = L(v_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

fakat $v_1 \neq v_2$ dir.

Tanım 1. $V, \oplus, \odot$ işlemlerine göre ve $W, \boxplus, \boxdot$ işlemlerine göre iki reel vektör uzayı olsun. Aşağıdaki (a),(b) özelliğine sahip bir $L : V \to W$ birebir ve örten bir fonksiyonuna V den W ya bir izomorfizm (Yunancada isos=aynı, morphos=yapı anlamına gelir) adı verilir:

(a) $L(V \oplus W) = L(V) \boxplus L(W)$, her $v, w \in V$ için

(b) $L(c \odot V) = c \boxdot L(V)$, her $v \in V$, c bir reel sayı.

Bu durumda V, W ya **izomorftur** denir. ■

L, V den W ya bir izomorfizm ise Tanım 1 den de

$$L(a_1 \odot v_1 \oplus a_2 \odot v_2 \oplus \ ... \ \oplus a_k \odot v_k) = a_1 \boxdot L(v_1) \boxplus a_2 \boxdot L(v_2) \boxplus \ ... \ \boxplus a_k \boxdot L(v_k)$$

yazılabilir. Burada $v_1, v_2, \ ..., v_k,$ V nin vektörleri ve $a_1, a_2, \ ..., a_k$ skalarlardır.

Uyarı 1. Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına verilen bir L fonksiyonu, Tanım 1 in (a) ve (b) özellikleri sağlıyorsa L ye aynı zamanda **bir lineer dönüşüm** adı da verilir. Ayrıca bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına izomorfizm; lineer, birebir ve örten bir fonksiyondur.

İzomorfm vektör uzaylarının cebirsel yapıları aynı olup, bunların farklıkları sadece elemanlarının sıfırdan farklı olması ile anlaşılır. Yani, V ve W vektör uzayları, L izomorfizmi altında izomorf iseler bu halde her $v \in V$ için $L(v) = w$ olacak biçimde bir tek $w \in W$ vardır. Tersine her $w \in W$ için $L(v) = w$ olacak biçimde bir tek $v \in V$ vardır. V nin her bir elemanı bu elemanın L altındaki görüntüsü ile değiştirirsek ve $\oplus$ ve$\odot$ işlemleri yerine sırasıyla $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemlerini alırsak, kesinlikle W yı elde ederiz. İzomorf vektör uzaylarına ait önemli örnek aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 1. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ise, bu halde, V, R^n ye izomorftur.

Teorem 2.

(a) Her V vektör uzayı kendisine izomorftur.

(b) V, W ya izomorf ise, W da V ye izomorftur.

(c) U, V ye izomorf ise, V de W ya izomorf ise, bu halde, U, W ya izomorftur.

Teorem 3. İki sonlu boyutlu vektör uzayının izomorf olması için gerek ve yeter şart boyutlarının aynı olmasıdır.

Sonuç 1. V, R^n-ye izomorf sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı ise, bu halde $boy\, V = n$ dir.

0.2 BiR MATRİSİN RANKI

Bu kesimde verilen bir $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ kümesi tarafından gerilen bir vektör uzayının bir bazını bulmak için daha başka etkili bir metod elde edeceğiz. Bir önceki ünitede S nin bir altkümesi V olmak üzere, V nin bir bazını seçebilmek için bir teknik geliştirdik. Bu kesimde geliştirilen metod V nin bir bazını oluşturur fakat bu, bazın S nin bir altkümesi olmasını garantilemez. Bir A matrisine bir tek sayı ekleyeceğiz ve sonra katsayılar matrisi A olan bir homogen sistemin çözüm uzayının boyutu hakkında bize bilgi verdiğini göstereceğiz.

Tanım 2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ tipinde keyfi bir matris olsun. A nın satırları R^n de vektörler olarak gözönüne alındığında R^n nin gerdiği bir altuzayına A nın **satır uzayı** denir. Benzer olarak, A nın sütunları R^m nin gerdiği bir altuzayına A nın **sütun uzayı** denir.

Teorem 4. A ve B $m \times n$ tipinde satırca (sütunca) denk olan matrisler ise o zaman A ve B nin satır (sütun) uzayları eşittir.

Verilen vektörlerin bir kümesi tarafından gerilen bir altuzayın bir bazını bulmak için bu teoremi kullanabiliriz. Aşağıdaki örnekte bu metodu tanıtacağız.

Örnek 3. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tarafından gerilen R^5 in bir altuzayı olan V nin bir bazını bulunuz.

Çözüm. Verilen vektörlerin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır uzayı olduğuna dikkat ediniz. Elementer satır işlemler uygulanarak indirgenmiş satır eşelon formu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olan matrise A nın satırca denk olduğunu buluruz. A ve B nin satır uzayları özdeş ve B nin satır uzayının bir bazı

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

den oluşur. Buradan, $\{w_1, w_2, w_3\}$, V nin bir bazıdır. ■

A matrisine satırca denk olan indirgenmiş eşelon formda bir B matrisini bulmaya gerek yoktur. Bütün bunlar A matrisine satırca denk olan bir B matrisine sahip olduğumuzu ve B nin satır uzayının bir bazını kolayca elde edebileceğimizi gerektirir. Sık sık A yı indirgenmiş satır eşelon formda böyle bir B matrisine tüm yöntemlerle indirgeyemeyebiliriz. A matrisi satır eşelon formdaki bir B matrisine denk ise o zaman A nın satır uzayının bir bazı B nin sıfırdan farklı satırlarının formunda olduğunu gösterebiliriz.

Şüphesiz Örnek 3 de kullanılan metod ile oluşturulan baz verilen geren kümenin bir altkümesi olmayabilir. Geren kümenin bir alt kümesi genellikle bir baz verir. Bir önceki ünitede kullanılan yöntem ile R^n nin bir altkümesini V nin bir bazı sadeleştirildiğinde R^n nin doğal bazına benzerdir. Böylece eğer

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

V de bir vektör ve Örnek 3 deki metod ile elde edilen ve belirleyici 1 ler $j_1, j_2, ..., j_k$ sütunlarında bulunan V nin bir bazı $j_1, j_2, ..., j_k(v_1, v_2, ..., v_k)$ ise o zaman

$$v = [a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + ... + a_{jk}v_k]$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 4. Örnek 3 deki altuzay V olsun. V de verilen

$$v = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 14 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

vektörü Örnek 3 de verilen bazın bir lineer birleşimi olarak yazınız.

Çözüm. $j_1 = 1, j_2 = 2$ ve $j_3 = 4$ olduğundan $v = 5w_1 + 4w_2 + 6w_3$ tür. ■

R^n den farklı vektör uzayının bir altuzayının bir bazını bulmak için Örnek 3 de verilen yöntemin nasıl kullanılacağını aşağıdaki örnekte

Örnek 5. $v_1 = t^4 + t^2 + 2t + 1, v_2 = t^4 + t^2 + 2t + 2, v_3 = 2t^4 + t^3 + t + 2$ ve $v_4 = t^4 + t^3 - t^2 - t$ olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tarafından gerilen P_4 ün altuzayı V olsun. V nin bir bazını bulunuz.

Çözüm. P_4 vektör uzayı

$$L(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e) = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan izomorfizm altında R^5 e izomorf olduğundan $L(V)$, R^5 in bir W altuzayına izomorftur. Teorem 3 den W altuzayı $\{L(v_1), L(v_2), L(v_3), L(v_4)\}$ tarafından gerilir. Şimdi Örnek 3 deki gibi W nin bir bazını bulalım. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır uzayı W ve A nın

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine satırca denk olduğu elde edilir. $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere W nin bir bazı $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ tür. Bu durumda V nin bir bazı da $\{L^{-1}(w_1), L^{-1}(w_2), L^{-1}(w_3)\} = \{t^4 + t^2 + 2t, t^3 - 2t^2 - 3t, 1\}$ dir.

Tanım 3. A nın satır (sütun) uzayının boyutuna A nın **satır (sütun) rankı** denir.
■

A ve B satırca denk (matrisler) ise o zaman satır rank $A =$ satır rank B ve A ve B sütunca denk (matrisler) ise o zaman sütun rank $A =$ sütun rank B dir. Bu nedenle $m \times n$ tipindeki bir A matrisinden başlayarak A ya satırca denk olan indirgenmiş satır eşelon formda bir B matrisi bulunuyorsa o zaman A ile B nin satır rankları eşittir. Fakat B nin satır rankının sıfırdan farklı satırlarının sayısı olduğu açıktır. Böylece verilen bir A matrisinin satır rankını bulmak için iyi bir metoda sahibiz.

Örnek 6. Örnek 3 deki çözümde tanımlanan A matrisinin yalnızca satır vektörlerinden oluşan satır uzayının bir bazını bulunuz. Ayrıca A nın satır rankını hesaplayınız.

Çözüm. Bir önceki ünitedeki Teorem 2 deki ikinci ispattaki yöntem kullanılarak

$$a_1\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & -4\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}3 & 2 & 8 & 1 & 4\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}2 & 3 & 7 & 2 & 3\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] = \left[A^T \mid 0\right] \tag{1}$$

denklemini oluştururuz. Bu ise A^T nin katsayılar matrisi olduğunu ifade eder. (1) deki ilaveli matrisi $\left[A^T \mid 0\right]$ indirgenmiş eşelon forma dönüştürerek

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-49}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

elde ederiz (doğrulayınız). (2) deki belirleyiciler 1 ler 1.ci 2.ci ve 3.cü sütunda bulunduğundan A nın satır uzayının bir bazını A nın ilk üç satırı oluşturur. Yani

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2 & 8 & 1 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3 & 7 & 2 & 3\end{bmatrix}\right\}$$

A nın satır uzayının bir bazıdır. A nın satır rankı 3 tür.

Örnek 7. Örnek 3 deki çözümde tanımlanan A matrisinin yalnızca satır vektörlerinden oluşan satır uzayının bir bazını bulunuz. Ayrıca A nın satır rankını hesaplayınız.

Çözüm 1. Satır vektörleri olarak A nın sütunları yazıldığında A^T matrisini elde ederiz. A^T matrisi indirgenmiş satır eşelon forma dönüştürüldüğü zaman

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-49}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Örnek 6 da gördüğümüz gibi. Böylece $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-49}{24} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ v
A^T nin satır uzayı için bir baz oluşturur. Bu nedenle

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-49}{24} \end{bmatrix} \text{ve} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

vektörleri A nın sütun uzayı için bir baz olur ve A nın sütun rankının 3 olduğu sonucuna ulaşırız.

Çözüm 2. Eğer A nın yalnızca sütun vektörlerini içeren A nın sütun uzayının bir bazını bulmak istersek ilaveli matrisi $[A \mid 0]$ ve önceki ünitedeki Teorem 2 nin ispatında geliştirilen yöntemi kullanarak

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemini oluştururuz. Bu matrisi satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürerek

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde ederiz. Böylece belirleyici 1 ler 1.ci, 2.ci ve 4.cü sütunlarda olduğundan A nın birinci, ikinci ve dördüncü sütunları A nın sütun uzayının bir bazını oluşturur sonucuna ulaşırız. Yani

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

A nın sütun uzayının bir bazıdır, A nın sütun rankı 3 tür. ■

A, $m \times n$ tipinde bir matris P de singüler olmayan $m \times m$ tipinde bir matris ise o zaman A ve PA nın satırca denk matrisler olmaları için satır rank (PA) $=$ satır rank A sonucunu elde ederiz. Benzer olarak Q singüler olmayan $n \times n$ tipinde bir matris ise o zaman sütun rank (AQ) $=$ sütun rank A dır. Ayrıca *boy* $R^n = n$ olduğundan satır rank $A \leq n$ olduğunu görürüz. Yine A nın satır uzayı m vektör tarafından gerildiği için satır rank $A \leq m$. Buradan satır rank $A \leq \min\{m, n\}$ dir.

Teorem 5. $m \times n$ tipinde herhangi bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin satır rankı ile sütun rankı birbirine eşittir.

Teorem 6. A, $m \times n$ tipinde bir matris ise o zaman rank $A+$ sıfırlık $A = n$ dir.

Örnek 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. A nın satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürüldüğünde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda rank $A = 3$ ve sıfırlık $A = 2$ dir. $Ax = 0$ denkleminin çözüm uzayının boyutu 2 bulunur.