Lineer Denklem Sisteminin Yaklaşık ÇözümYöntemleri

Basit İterasyon YÖNTEMİ

Jacobi YÖNTEMİ

Gauss-Seidel YÖNTEMİ

$$Ax = b \qquad (1)$$

Lineer cebirsel denklemler sistemini ele alalım. Burada $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$ - Katsayılar matrisi, $x = \left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)^T$ bilinmeyenler vektörü, $b = \left(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n,\right)^T$ ise sağ taraf vektörüdür. Sistem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

şekilde yazılabilir.

$$Ax = b \qquad (1)$$

lineer cebirsel denklemler sistemini ele alalım. (1) sistemini her zaman

$x = Bx + C$ (2)

şeklinde yazabiliriz. Gerçekten (1) ifadesinden

$Ax - b = 0$ (3)

ifadesini yazabiliriz. Herhangi $|D| \neq 0$ olan D matrisi ile (3) ifadesini çarparsak,

$D(Ax - b) = 0$ (4)

$(\Rightarrow -D(Ax - b) = 0\ )$) elde ederiz. Her tarafa x vektörünü eklersek,

$x - D(Ax - b) = x$ (5)

sisteminin çözümü (1) sisteminin çözümü ile aynı olacaktır.

(5) ifadesini farklı şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$Ix - DAx + Db = x$ (6)

Buradan

$$x = (I - DA)x + Db$$

Eğer $B = I - DA$ $(D = (I - B)A^{-1})$ ve $C = Db$ yazarsak, son eşitlikten (2) ifadesini elde ederiz.

A ve B matrisleri özel koşulları sağladığı zaman (2) ifadesinin yardımıyla

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ (7)

şeklinde tanımlanan $x^{(k)}, k = 0,1,2, \dots$ vektörler dizisi (1) denkleminin $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ çözümüne yaklaşıyor.

<u>NOT</u>: 1) Eğer $\|B\| < 1$ ise, $x^{(k)} \longrightarrow x$ yaklaşıyor (Özel koşullardan biri).

1) A matrisinin özdeğerlerinin tümü mutlak değerce 1'den küçük ise, o zaman $x^{(k)}$ dizisi x çözümüne yaklaşıyor (Özel koşullardan ikincisi).

Uygulamada B matrisini belirlemek için (1) sistemini açık şekilde yazalım.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1')$$

(2) ifadesini açık şekilde yazalım.

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + c_2 \\ x_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \cdots + b_{3n}x_n + c_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \cdots + b_{nn}x_n + c_n \end{cases} \qquad (2')$$

Eğer $\|B\| < 1$ ise, $(2')$ sisteminden yararlanarak (7) yaklaşımlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ x_3^{(k+1)} = b_{31}x_1^{(k)} + b_{32}x_2^{(k)} + b_{33}x_3^{(k)} + \cdots + b_{3n}x_n^{(k)} + c_3 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + b_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases} \qquad (8)$$

(8) ifadesi lineer cebirsel denklemler sisteminin yaklaşık çözümü için Basit iterasyon yöntemini göstermektedir. İşlemler

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ başlangıç yaklaşımı olarak $x_i^{(0)} = c_i, i = \overline{1,n}$ ele alınır.

Jacobi Yöntemi:

Jacobi Yöntemi:

$(1')$ sisteminin i- nolu denklemini $a_{ii} \neq 0$ sayısı ile bölelim ve $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i, j = \overline{1, n}$, $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i = \overline{1, n}$ yazalım. Bu durumda $(1')$ sisteminden x_i'leri çekersek,

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \cdots + \alpha_{3n-1}x_{n-1} + \alpha_{3n}x_n + \beta_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{n-1} = \alpha_{n-11}x_1 + \alpha_{n-12}x_2 + \alpha_{n-13}x_3 + \cdots + \alpha_{n-1n}x_n + \beta_{n-1} \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \cdots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + \beta_n \end{cases} \tag{9}$$

elde ederiz. (9) sisteminin sol tarafında x_i bilinmeyenleri için $(+1)$. , sağ taraf ise n. yaklaşımları yazarsak, basit iterasyon yöntemine benzer şekilde Jacobi yönteminin yaklaşımlarını elde ederiz.

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1 \\
x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \qquad\qquad +\alpha_{23}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2 \\
x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k)} + \alpha_{32}x_2^{(k)} + \qquad\qquad + \cdots + \alpha_{3n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3 \\
\dots \quad \dots \\
x_{n-1}^{(k+1)} = \alpha_{n-11}x_1^{(k)} + \alpha_{n-12}x_2^{(k)} + \alpha_{n-13}x_3^{(k)} + \qquad\qquad + \cdots + \alpha_{n-1n}x_n^{(k)} + \beta_{n-1} \\
x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \alpha_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + \qquad\qquad +\beta_n
\end{cases}
$$

Eğer $B = (\alpha_{ij})_{nxn}$ matrisinin normu $\|B\| < 1$ ise, o halde (10) şeklinde tanımlanan

$$x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$$

vektörler dizisi (1) sisteminin

$$x = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$$

çözümüne yaklaşıyor. Yani, $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \longrightarrow x$. $\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$ olduğunda işlemler durdurulur.

Gauss- Seidel Yöntemi:

Gauss- Seidel Yöntemi:

Lineer cebirsel denklemler sisteminin yaklaşık çözümü basit iterasyon veya Jacobi yöntemi ile çözüldüğü zaman yaklaşımlar

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

şeklinde belirlenmektedir. $x^{(k)}$ vektörler dizisi yakınsak dizi olduğundan $x^{(k+1)}$ yaklaşımı $x^{(k)}$'ya göre çözüme daha yakın olacaktır. Bu nedenle yaklaşım hızını arttırmam amacıyla (10) yaklaşımları aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \quad +\alpha_{23}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \quad + \cdots + \alpha_{3n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \alpha_{n-11}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n-12}x_2^{(k+1)} + \alpha_{n-13}x_3^{(k+1)} + \quad + \cdots + \alpha_{n-1n}x_n^{(k)} + \beta_{n-1} \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \alpha_{n3}x_3^{(k)} + \quad \ldots \quad + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + \quad +\beta_n \end{cases} \quad (11)$$

(11) ifadesi cebirsel denklemler sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için Gauss- Seidel yöntemidir.

<u>NOT:</u> Her üç yöntemde $x^{(0)}$ başlangıç yaklaşımı olarak

$$x^{(0)} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$$

sabitleri ele alınır. İşlemler $\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$ sağlandığında durdurulur.

Örnek: $\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,3x_3 = 2,2 \end{cases}$ Basit iterasyon (Jacobi) yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 & I \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 & II \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,3x_3 = 2,2 & III \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 & I + II \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 & 2 \times III + II + I \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 & III - II \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \qquad\qquad - 0,0658x_2 - 0,3158x_3 + 0,25 \\ x_2 = -0,2418x_1 \qquad\qquad - 0,148x_3 + 1,066 \\ x_3 = 0,2241x_1 - 0,0345x_2 \qquad\qquad - 0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = & -0,0658x_2 - 0,3158x_3 + 0,25 \\ x_2 = -0,2418x_1 & -0,148x_3 + 1,066 \\ x_3 = 0,2241x_1 - 0,0345x_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k)}{}_1 - 0,0345x^{(k)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$k = 0 \qquad \begin{cases} x^{(0)}{}_1 = 0,25 \\ x^{(0)}{}_2 = 1,066 \\ x^{(0)}{}_3 = -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k)}{}_1 - 0,0345x^{(k)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(1)}{}_1 = & -0,0658x^{(0)}{}_2 - 0,3158x^{(0)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(1)}{}_2 = -0,2418x^{(0)}{}_1 & -0,148x^{(0)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(1)}{}_3 = 0,2241x^{(0)}{}_1 - 0,0345x^{(0)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(1)}{}_1 = & -0,0658\times\mathbf{1,066} - 0,3158\times\mathbf{(-0.2414)} + 0,25 & = 0,2561 \\ x^{(1)}{}_2 = -0,2418\times\mathbf{0,25} & -0,148\times\mathbf{(-0.2414)} + 1,066 & = 1,1827 \\ x^{(1)}{}_3 = 0,2241\times\mathbf{0,25} - 0,0345\times\mathbf{1,066} & -0,2414 & = -0,2782 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2561 \\ 1,1827 \\ -0,2782 \end{bmatrix}$$

$$\left| x^{(1)} - x^{(0)} \right| = \begin{bmatrix} 0,0061 \\ 0,1167 \\ 0,0368 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k)}{}_1 - 0,0345x^{(k)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2561 \\ 1,1827 \\ -0,2782 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(2)}{}_1 = & -0,0658x^{(1)}{}_2 - 0,3158x^{(1)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(2)}{}_2 = -0,2418x^{(1)}{}_1 & -0,148x^{(1)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(2)}{}_3 = 0,2241x^{(1)}{}_1 - 0,0345x^{(1)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(2)}{}_1 = & -0,0658\times\mathbf{1,1827} - 0,3158\times\mathbf{(-0.2782)} + 0,25 & = 0,126 \\ x^{(2)}{}_2 = -0,2418\times\mathbf{0,2561} & -0,148\times\mathbf{(-0.2782)} + 1,066 & = 1,1386 \\ x^{(2)}{}_3 = 0,2241\times\mathbf{0,2561} - 0,0345\times\mathbf{1,1827} & -0,2414 & = 0,2248 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,126 \\ 1,1386 \\ -0,2248 \end{bmatrix}$$

$$\left| x^{(2)} - x^{(1)} \right| = \begin{bmatrix} 0,1301 \\ 0,0481 \\ 0,0534 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 \quad +1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k)}{}_1 \ -0,0345x^{(k)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2561 \\ 1,1827 \\ -0,2782 \end{bmatrix} \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,126 \\ 1,1386 \\ -0,2248 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(3)}{}_1 = & -0,0658x^{(2)}{}_2 - 0,3158x^{(2)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(3)}{}_2 = -0,2418x^{(2)}{}_1 & -0,148x^{(2)}{}_3 \quad +1,066 \\ x^{(3)}{}_3 = 0,2241x^{(2)}{}_1 \ -0,0345x^{(2)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(3)}{}_1 = & -0,0658\times\mathbf{1,1386} - 0,3158\times(\mathbf{-0.2248}) + 0,25 & = 0,2461 \\ x^{(3)}{}_2 = -0,2418\times\mathbf{0,126} & -0,148\times(\mathbf{-0.2248}) \quad +1,066 & = 1,0877 \\ x^{(3)}{}_3 = \ 0,2241\times\mathbf{0,126} \ -0,0345\times\mathbf{1,1386} & -0,2414 & = -0,2224 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,2461 \\ 1,0877 \\ -0,2224 \end{bmatrix}$$

$$\left| x^{(3)} - x^{(2)} \right| = \begin{bmatrix} 0,1381 \\ 0,0509 \\ 0,0024 \end{bmatrix}$$

İşlemler $\left| x^{(3)} - x^{(2)} \right| < \varepsilon$ koşulu sağlananana gibi devam ettirilir.

Örnek:

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,3x_3 = 2,2 \end{cases}$$

Gauss- Seidel yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,3x_3 = 2,2 \end{cases} \quad \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 \end{cases} \quad \begin{matrix} I + II \\ 2 \times III + II + I \\ III - II \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \quad -0,0658x_2 - 0,3158x_3 + 0,25 \\ x_2 = -0,2418x_1 \quad -0,148x_3 \quad +1,066 \\ x_3 = 0,2241x_1 - 0,0345x_2 \quad -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = & -0,0658x_2 - 0,3158x_3 + 0,25 \\ x_2 = -0,2418x_1 & -0,148x_3 + 1,066 \\ x_3 = 0,2241x_1 - 0,0345x_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k+1)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k+1)}{}_1 - 0,0345x^{(k+1)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$k = 0 \qquad \begin{cases} x^{(0)}{}_1 = 0,25 \\ x^{(0)}{}_2 = 1,066 \\ x^{(0)}{}_3 = -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k+1)}{}_1 - 0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k+1)}{}_1 - 0,0345x^{(k+1)}{}_2 - 0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(1)}{}_1 = -0,0658x^{(0)}{}_2 - 0,3158x^{(0)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(1)}{}_2 = -0,2418x^{(1)}{}_1 - 0,148x^{(0)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(1)}{}_3 = 0,2241x^{(1)}{}_1 - 0,0345x^{(1)}{}_2 - 0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(1)}{}_1 = -0,0658\times 1,066 - 0,3158\times(-0.2414) + 0,25 = 0,2561 \\ x^{(1)}{}_2 = -0,2418\times \mathbf{0,2561} - 0,148\times(-0.2414) + 1,066 = 1,1208 \\ x^{(1)}{}_3 = 0,2241\times \mathbf{0,2561} - 0,0345\times \mathbf{1,1208} - 0,2414 = -0,2227 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2561 \\ 1,1208 \\ -0,2227 \end{bmatrix}$$

$$\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = \begin{bmatrix} 0,0061 \\ 0,0548 \\ 0,0187 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)}{}_1 = & -0,0658x^{(k)}{}_2 - 0,3158x^{(k)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(k+1)}{}_2 = -0,2418x^{(k+1)}{}_1 & -0,148x^{(k)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(k+1)}{}_3 = 0,2241x^{(k+1)}{}_1 - 0,0345x^{(k+1)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1,066 \\ -0,2414 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2561 \\ 1,1208 \\ -0,2227 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(2)}{}_1 = & -0,0658x^{(1)}{}_2 - 0,3158x^{(1)}{}_3 + 0,25 \\ x^{(2)}{}_2 = -0,2418x^{(2)}{}_1 & -0,148x^{(1)}{}_3 + 1,066 \\ x^{(2)}{}_3 = 0,2241x^{(2)}{}_1 - 0,0345x^{(2)}{}_2 & -0,2414 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(2)}{}_1 = & -0,0658 \times 1,1208 - 0,3158 \times (\text{-}0.2227) + 0,25 & = 0,2465 \\ x^{(2)}{}_2 = -0,2418 \times \mathbf{0,2465} & -0,148 \times \mathbf{(\text{-}0.2782)} + 1,066 & = 1,1140 \\ x^{(2)}{}_3 = 0,2241 \times \mathbf{0,2465} - 0,0345 \times \mathbf{1,114} & -0,2414 & = -0,2246 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,2465 \\ 1,1140 \\ -0,2246 \end{bmatrix}$$

$$\left| x^{(2)} - x^{(1)} \right| = \begin{bmatrix} 0,0096 \\ 0,0068 \\ 0,0019 \end{bmatrix}$$

$$\left| x^{(2)} - x^{(1)} \right| < \varepsilon$$