Lineer Cebir

Vektör uzayları

Vektör Uzayları

Kabaca tanım vermek gerekirse:

Vektör uzayı = Lineer uzay = elemanları(vektörler diyeceğiz) toplanabilen ve ölçeklendirilebilen küme.

Asıl tanım:

V boştan farklı bir küme ve V üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlı olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa V ye bir vektör uzayı denir:

Vektör Uzayları

- Eğer $u, v \in V$ ise $u + v \in V$ dir.
- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- V' deki her u için $u + 0 = 0 + u = u$ eşitliğini sağlayan bir 0 elemanı vardır.
- V' deki her u için $u + (-u) = (-u) + u = 0$ eşitliğini sağlayan ve u nun negatifi denen $-u$ elemanı vardır.
- ku objesi de V nin elemanıdır.
- $k(u + v) = ku + kv$
- $(k + m)u = ku + mu$
- $k(mu) = (km)u$
- $1u = u$

Vektör Uzayları: Örnekler

- $\mathbb{R}^n$: n boyutlu Öklid uzayı
- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: reel elemanlı $m \times n$ boyutlu matrisler uzayı
- $\{0\}$: basit vektör uzay
- $F(\mathbb{R})$: fonksiyonlar uzayı
- $C(\mathbb{R})$: sürekli fonksiyonlar uzayı
- $\mathcal{P}$: tüm polinomların uzayı

Alt uzaylar

Tanım: $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerinin lineer kombinasyonu, $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalerler olmak üzere $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$ şeklindedir.

Tanım: V, $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesi olsun. Eğer her $v_1, v_2 \in V$ için c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in V$ ise V, $\mathbb{R}^n$ in bir alt uzayıdır.

Ya da benzer şekilde: her $v, v_1, v_2 \in V$ ve c, c_1, c_2 sabitleri için $v_1 + v_2 \in V$ ve $cv \in V$

Alt uzayın alternatif bir tanımı: Eğer V lineer birleşimlere göre kapalı ise V bir alt uzaydır.

Alt uzaylar: Örnekler

- $\{0\}$ basit vektör uzayı V vektör uzayının bir alt uzayıdır
- $C(\mathbb{R})$ sürekli fonksiyonlar uzayı $F(\mathbb{R})$ fonksiyonlar uzayının bir alt uzayıdır.
- $\mathcal{P}_n$, derecesi n ye kadar olan polinomlar kümesi tüm polinomların uzayı $\mathcal{P}$ nin bir alt uzayıdır.

Alt uzaylar: Ters Örnekler

- $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayı değildir.

- P_n, derecesi n olan polinomların kümesi tüm

  polinomların uzayı $\mathcal{P}$ nin bir alt uzayı değildir.

Alt uzaylar

Örnek: $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı verilsin.

$x - y = 0$ doğrusu $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayıdır.

Bu doğrunun vektörleri (t, t), $t \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

$$(t, t) + (s, s) = (t + s, t + s)$$

$$r(t, t) = (rt, rt)$$

Örnek: $y = x^2$ parabolü $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı değildir.

Örneğin $(1,1) + (-1,1) = (0,2)$ elemanı parabole ait değildir.

Ya da $2(1,1) = (2,2)$ de parabole ait değildir.

Alt uzaylar

Örnek: $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı verilsin.

- $z = 0$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ nin bir alt uzayıdır.
- $z = 1$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ nin bir alt uzayı değildir.
- $t(1,1,0),\ t \in \mathbb{R}$ doğrusu $\mathbb{R}^3$ nin ve $z = 0$ düzleminin bir alt uzayıdır.
- $(1,1,1) + t(1,1,0),\ t \in \mathbb{R}$ doğrusu $\mathbb{R}^3$ nin bir alt uzayı değildir.
- Genel olarak, orijinden geçen doğrular ve düzlemler $\mathbb{R}^3$ ün birer alt uzayıdır.

Alt uzaylar

$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ reel elemanlı 2×2 boyutlu matrisler uzayının bazı alt uzayları: $A =$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere

- Köşegen matrisler: $b = c = 0$
- Üst üçgensel matrisler: $c = 0$
- Alt üçgensel matrisler: $b = 0$
- Simetrik matrisler $(A^T = A)$: $b = c$
- Ters simetrik matrisler$(A^T = -A)$: $a = d = 0, c = -b$
- İzi sıfır matrisler(iz=«köşegen elemanları toplamı»):$a + d = 0$
- Determinantı sıfır olam matrisler($ad - bc = 0$) bir alt uzay değildir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alt uzaylar

Örnek: A, $m \times n$ matrisi için $Ax = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir alt uzayıdır.

Tanım: Bu alt uzaya A nın sıfır uzayı denir ve $\mathrm{Null}(A)$ ile gösterilir.

Örnek: $A = (1, -1, 3)$

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(A) \iff x - y + 3z = 0$$

$$\mathrm{Null}(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Alt uzaylar

Tanım: $S \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\operatorname{span}(S) = \{\ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i :\ \ \mathbf{v}_i \in S, n < \infty\}$$

(S nin gerdiği alt uzay) bir alt uzaydır.

Örnek: Önceki sorudan

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Null}(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :\ s,\ t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Alt uzaylar

Örnek: $Ax = y, y \neq 0$ homojen olmayan sisteminin çözüm kümesi bir alt uzay değildir.

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) &= c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 \\ &= c_1\mathbf{y} + c_2\mathbf{y} \\ &= (c_1 + c_2)\mathbf{y}, \end{aligned}$$

Sağ tarafın y ye eşit olması gerekmez!

Alt uzaylar

- $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$vektör uzayı için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nin gerdiği alt uzayın elemanları aşağıdaki gibidir:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Bu alt uzay köşegen matrislerin oluşturduğu alt uzaydır.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nin gerdiği alt uzayın elemanları aşağıdaki gibidir:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Bu alt uzay simetrik matrislerin oluşturduğu alt uzaydır.

Alt uzaylar

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nin gerdiği alt uzay üst üçgensel matrisler alt uzayıdır.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nin gerdiği alt uzay $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vektör uzayının tamamıdır.

Alt uzaylar

Not: Belirli bir vektörün $\text{span}(S)$ kümesine ait olup olmadığını belirlemek için bu vektörün S nin elemanlarının lineer birleşimi şeklinde yazılıp yazılamadığına bakılır.

Örnek: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, span$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ alt uzayına ait midir?

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sistemin kararsız olduğunu gösteriniz.

Alt uzaylar

Örnek: $\mathrm{v}_1 = (1,2,0), \mathrm{v}_2 = (3,1,1)$ ve $\mathrm{w} = (4,-7,3)$ olsun. w vektörü $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ ye ait midir?

$$\mathbf{w} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2$$

Buradan $\left\{\begin{array}{rcl} 4 & = & r_1 + 3r_2 \\ -7 & = & 2r_1 + r_2 \\ 3 & = & 0r_1 + r_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} r_1 = -5 \\ r_2 = 3 \end{array}\right.$

Böylece $\mathbf{w} = -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

Alt uzaylar

Örnek: $v_1 = (2,5), v_2 = (1,3)$ olsun. $\text{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$ olduğunu gösteriniz.

$$\mathbf{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{w} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2r_1 + r_2 = a \\ 5r_1 + 3r_2 = b \end{cases}$$

Sistemin katsayılar matrisi $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ olur.

$\det C = 1 \neq 0$ olduğundan. Sistemin her a, b için tek çözümü vardır.

Böylece $\text{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$ olur.

Lineer bağımlılık

Tanım: Sonlu $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}\}$ kümesi verilsin. Eğer $c_1 x_1 + c_2 \mathrm{x}_2 + \cdots + c_m \mathrm{x}_\mathrm{m} = 0$ denklemi $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalerlerinin hepsi birden sıfır olmadan sağlanıyorsa $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 0$ olduğundan lineer bağımlıdır.

Lineer bağımlılık

Örnek: 0 vektörünü içeren herhangi bir küme lineer bağımlıdır.

Not: Bir vektörler kümesi lineer bağımlı ise vektörlerden birisi diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0 \qquad c_2 \neq 0$$

$$\mathbf{x}_2 = (-1/c_2)(c_1\mathbf{x}_1 + c_3\mathbf{x}_3)$$

Not: Genel anlamda sonlu bir kümenin lineer bağımlı olup olmadığını belirlemek kolaydır: Bunun için bir lineer denklem sistemi oluşturulur ve sıfırdan farklı çözümünün olup olmadığı incelenir.

Lineer bağımlılık

Örnek: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{ Gauss yöntemi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu sistemin sıfır tek çözümü vardır. Yani bu vektörler lineer bağımlı değildir.

Lineer bağımlılık

Teorem: Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri lineer bağımlıdır.

ii. $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinden biri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

Teorem: Eğer $m > n$ ise $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ te $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ ve $\mathbf{v}_4 = (1, 2, 4)$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Dikkat edilirse $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmadıkları determinant yardımıyla kolaylıkla bulunabilir.

Lineer bağımsızlık

Tanım: Sonlu $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}\}$ kümesi verilsin. Eğer $c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_m\mathrm{x}_\mathrm{m} = 0$ denklemi yalnızca $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ olduğunda sağlanıyorsa $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

- Ya da $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}\}$ kümesi lineer bağımlı değilse lineer bağımsızdır denir.

Not: Genel anlamda sonlu bir kümenin lineer bağımlı olup olmadığını belirlemek kolaydır: Bunun için bir lineer denklem sistemi oluşturulur ve sıfırdan farklı çözümünün olup olmadığı incelenir.

Lineer bağımsızlık

Örnek: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ ve $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$

vektörlerini inceleyelim:

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \implies (x,y,z) = \mathbf{0}$$

$$\implies x = y = z = 0$$

Örnek: $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrislerini inceleyelim:

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = O \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O$$

$$\implies a = b = c = d = 0$$

Lineer bağımsızlık

Örnek: $1, x, x^2, \ldots, x^n$ polinomlarını inceleyelim:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$
$$\Longrightarrow \quad a_i = 0 \text{ for } 0 \leq i \leq n$$

Örnek: $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x - 1,\ p_3(x) = (x-1)^2$ polinomlarını

inceleyelim:

$$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2$$
$$= (a_1 - a_2 + a_3) + (a_2 - 2a_3)x + a_3 x^2$$

$$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 - a_2 + a_3 = a_2 - 2a_3 = a_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Lineer bağımsızlık

Örnek: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 3)$ vektörleri lineer bağımsız mıdır?

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + r_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Buradan $\begin{cases} r_1 + 3r_2 + 4r_3 = 0 \\ 2r_1 + r_2 - 7r_3 = 0 \\ 0r_1 + r_2 + 3r_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Bu vektörlerin lineer bağımsız olması ile $A = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ matrisinin tekil olması denktir.

$\det A = 0$ bulunur. Buradan vektörler lineer bağımlı olur.

Lineer bağımsızlık

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de u ve v (sıfırdan faklı) vektörlerinin lineer bağımlı olması birinin diğerinin sıfırdan farklı bir katı olması demektir.

Problem: $\mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı üç vektörün hangi durum veya durumlarda lineer bağımlı olabileceğini araştırınız.

Alıştırma: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin sıfır uzayında iki lineer bağımsız vektör bulunuz.

- Bu matrisin sütun vektörleri $\mathbb{R}^3$ te lineer bağımsız mıdır?
- Bu matrisin satır vektörleri $\mathbb{R}^4$ te lineer bağımsız mıdır?

Lineer bağımsızlık

Örnek: e^x, e^{2x}, e^{3x} fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını görelim: Her x için

$$ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = 0$$

İki defa türevleyerek iki denklem daha elde ederiz

$$\begin{aligned} ae^x + be^{2x} + ce^{3x} &= 0, \\ ae^x + 2be^{2x} + 3ce^{3x} &= 0, \\ ae^x + 4be^{2x} + 9ce^{3x} &= 0. \end{aligned}$$

Buradan $A(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ olmak üzere

$A(x)\mathbf{v} = 0$ şeklinde bir denklem elde ederiz.

Lineer bağımsızlık

$$\det A(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{3x} \\ 1 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 1 & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{3x} \\ 1 & 2 & 3e^{3x} \\ 1 & 4 & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x e^{2x} e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

$A(x)$ matrisi tersinir olduğundan sistemin sıfır tek çözümü vardır.

Yani $A(x)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies a = b = c = 0$

Lineer bağımsızlık - Wronskian

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında n-1 mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu takdirde bu fonksiyonların Wronskianı $W[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Eğer en az bir $x_0 \in [a, b]$ için $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x_0) \neq 0$ ise $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $C[a, b]$ de lineer bağımsızdır.