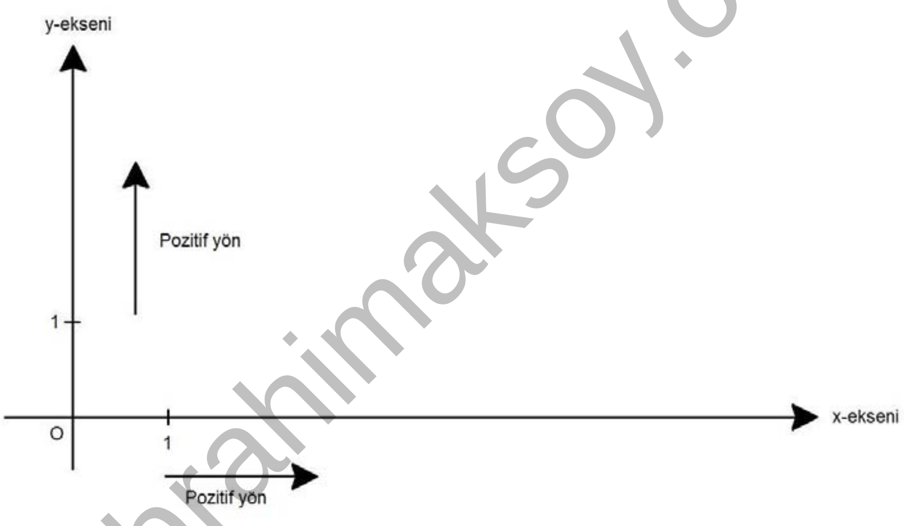
## 1. DÜZLEMDE ve 3 BOYUTLU UZAYDA VEKTÖRLER

Bir çok uygulamada, basınç, kütle ve sürat gibi, büyüklüğü verilerek tam olarak tanımlanabilen çokluklarla karşılaşırız. Bunlara "skalarlar" denir ve *c, d, r, s* ve *t* gibi küçük italik harflerle gösterilir. Hız, kütle ve ivme gibi daha birçok ölçülebilen büyüklükler de vardır ve bunların tanımlanması için büyüklüğün yanında bir de yön kavramı gereklidir. Bunlara "vektörler" denir ve incelemeleri bu bölümü kapsar. Vektörler küçük kalın harflerle gösterilir örneğin **u,v,x,y,z** gibi.

### 1) Düzlemde Vektörler

Orjin olarak adlandırılan bir *O* noktasında dik kesişen bir çift doğru çizeriz. Bu doğrulardan biri, **x-ekseni**, genellikle yatay durumdadır. Diğer doğru **y-ekseni**, dik durumda alınır. x ve y eksenlerine birlikte ***"koordinat eksenleri"*** denir ve bir dik veya Kartezyen koordinat sistemi oluştururlar. Şimdi x ve y eksenleri üzerinde uzunluğun ve pozitif yönlerin birimlerini sabitlemek için, x-eksenin üzerinde *O* 'ın sağında ve y-ekseni üzerinde *O* 'ın yukarısında bir nokta seçelim. Her zaman değil, fakat çoğunlukla, bu noktalar *O* 'dan eşit uzaklıkta olacak şekilde seçilir. Böylece her iki eksen için de aynı uzunluk birimi kullanılır.




Şekil 2.1



Düzlemdeki her $P$ noktası ile reel sayılardan oluşan bir sıralı $(x, y)$ ikilisini eşleştirebiliriz. Buna $P$ noktanın koordinatları denir. Tersine her sıralı reel sayı ikilisini düzlemde bir noktayla eşleştirebiliriz. $(x, y)$ koordinatlı $P$ noktası $P(x, y)$ veya kısaca $(x, y)$ ile gösterilir. Düzlemdeki tüm noktaların kümesi ile gösterilir; buna **2-boyutlu uzay** denir.

$2x1$ matrisini ele alalım.

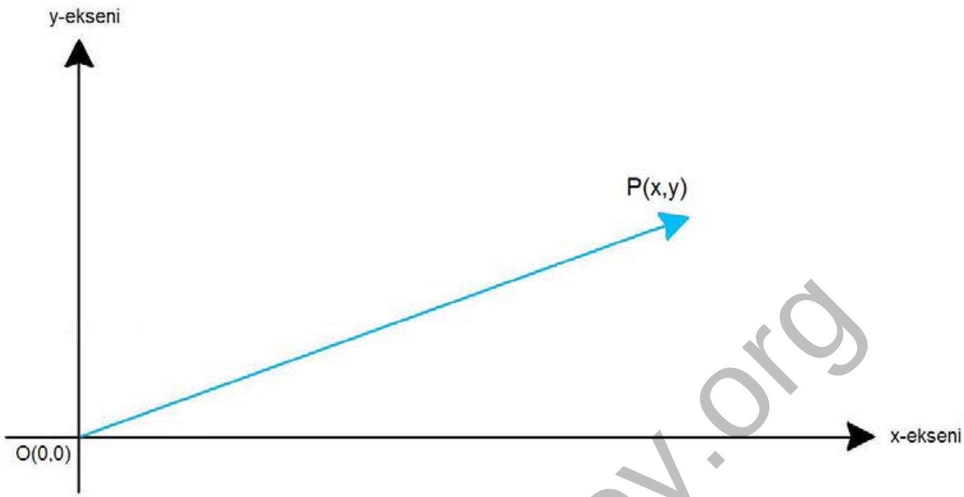
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Burada $x$ ve $y$ reeldir. $X$ ile başlangıç noktası orjin ve bitiş noktası $P(x, y)$ olan bir yönlü doğru parçasını eşleştirelim. $O$ dan $P$ ye çizilen yönlü doğru parçası $\overrightarrow{OP}$ ile gösterilir ve $O$: başlangıç noktası, $P$: bitim noktası olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitim noktasının üzerlerine bir ok koyarak ayırtederiz.

Bir yönlü doğru parçasının büyüklüğü onun uzunluğudur. Böylece bir yönlü doğru parçası kuvveti, hızı ve ivmeyi tanımlamak için kullanılır. Diğer yandan, $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasıyla bir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

matrisini eşleştirebiliriz. Burada $O(0,0)$ başlangıç ve $P(x,y)$ bitim noktasıdır.




Şekil 2.2

**Tanım 1.** **Düzlemde bir vektör;** $2x1$ boyutlu bir

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

matrisidir. Burada $x, y$ reel sayılardır ve $x$ in bileşenleri olarak adlandırılır. Düzlemde bir vektörü kısaca bir vektör olarak belirtiriz.

Böylece, her bir vektörle bir yönlü doğru parçasını eşleştirebiliriz. Tersine, her yönlü doğru parçasını da bir vektörle eşleştirebiliriz. Sıklıkla yönlü doğru parçası ve vektör kavramları birbirlerinin yerine kullanılır ve bir yönlü doğru parçası bir vektör olarak adlandırılır.

Bir vektör bir matris olduğundan eğer $x_1 = x_2$ve $y_1 = y_2$ ise

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

vektörlerine **eşittir** denir. Yani, eğer karşılıklı bileşenleri eşitse iki vektör eşittir.

**Örnek 1.** Eğer

$$a + b = 3$$
$$a - b = 2$$

ise; yani $a = 5/2$ ve $b = 1/2$ olmak koşuluyla,

$$\begin{bmatrix} a+b \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ a-b \end{bmatrix}$$

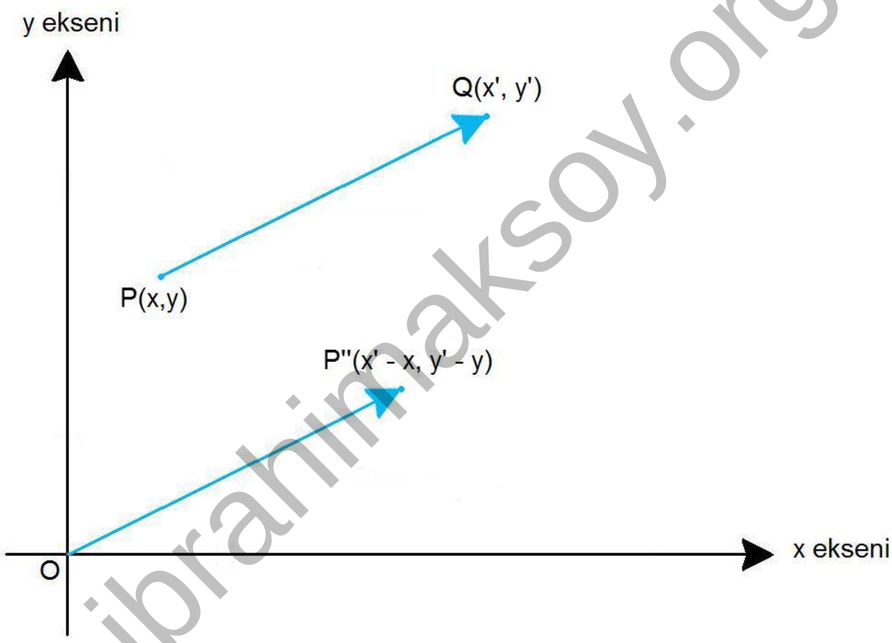
vektörleri eşittir.

Fiziksel uygulamalarda, çoğunlukla şekil2.3(a)'da gösterildiği gibi orjinden farklı $P(x, y)$ noktasından $Q(x', y')$ noktasına bir yönlü doğru parçasıyla ilgilenmek gerekir. Bu şekilde bir doğru parçasına da **düzlemde bir vektör** ya da kısaca bir **vektör** denir. $P(x, y)$ **başlangıç noktası** $Q(x', y')$ **bitim noktasıdır**. Böyle bir vektörün bileşenleri $x' - x$ veya $y' - y$ dir. Yani şekil2.3(a)'daki $\overrightarrow{PQ}$ vektörü aynı zamanda

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix}$$

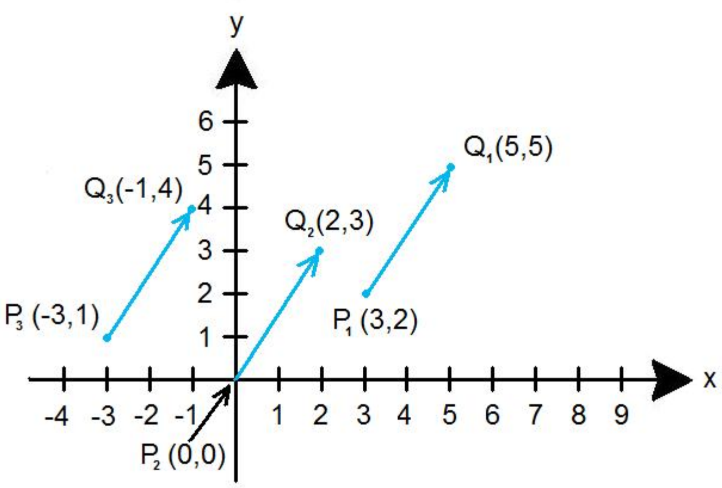
vektörüyle de gösterilebilir. Burada $O$, başlangıç ve $P''(x' - x, y' - y)$ ise bitim noktasıdır.

Şekil2.3(b)'de gösterildiği gibi $P_1(3,2)$ ve $Q_1(5,5)$, $P_2(0,0)$ ve $Q_2(2,3)$, $P_3(-3,1)$ ve $Q_3(-1,4)$ noktalarını birleştiren, sırasıyla $\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}, \overrightarrow{P_3Q_3}$ vektörlerini ele alalım. Hepsi aynı bileşenlere sahip olduklarından birbirine eşittir.




(a) Aynı vektörü gösteren, farklı yönlü doğru parçaları

Şekil 2.3




(b) Düzlemde Vektörler



Ayrıca,

$$\overrightarrow{P_4Q_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

vektörünün $P_4(-5,2)$ başlangıç noktası ile, $Q_4(x_4', y_4')$ bitim noktası şöyle belirlenebilir. Biz, $x_4' - (-5) = 2$ ve $y_4' - 2 = 3$ e sahip olmalıyız. Böylece $x_4' = -3$ ve $y_4' = 5$ olur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{P_5Q_5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektörünün $Q_5(8,6)$ bitim noktası ile, $P_5(x_5', y_5')$ başlangıç noktası şöyle belirlenir. Biz, $8 - x_5 = 2$ ve $6 - y_5 = 3$ olmalıdır. Böylece $x_5 = 6$ ve $y_5 = 3$ dür.

Her

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

vektörüyle bir ve yalnız bir $P(x, y)$ noktasını eşleştirebiliriz.

Bu nedenle $\boldsymbol{x}$ vektörünü aynı zamanda $(x, y)$ olarak da yazarız. Elbette bu eşleştirme $\overrightarrow{QP}$ yönlü doğru parçası vasıtasıyla gösterilir. Burada $O$ orjin ve $P$ koordinatları $(x, y)$ olan noktadır (Şekil 2.2).

Böylece düzlem tüm noktaların kümesi olarak veya tüm vektörlerin kümesi olarak görülebilir. Bu sebeple, ve konuya (içeriğe) bağlı olarak $R^2$ yi bazen tüm $(x, y)$ sıralı ikililerinin kümesi olarak bazen de tüm

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$2x1$ tipindeki matrislerin kümesi olarak alabiliriz.

**Tanım 2.**

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

düzlemde iki vektör olsun. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörlerinin toplamı $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}$$

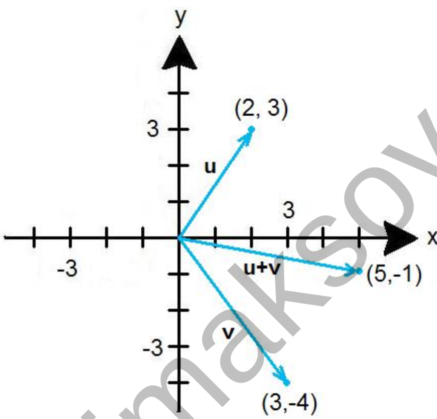
olur.

**Uyarı.** Vektör toplamının, matris toplamının özel bir durumu olduğuna dikkat ediniz.

**Örnek 2.** $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan

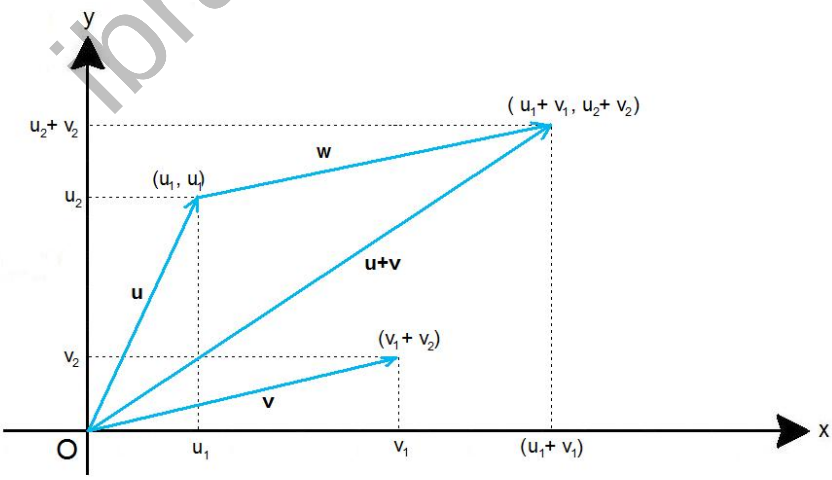
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2+3 \\ 3+(-4) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olur. Şekil 2.4'e bakınız.




Şekil 2.4

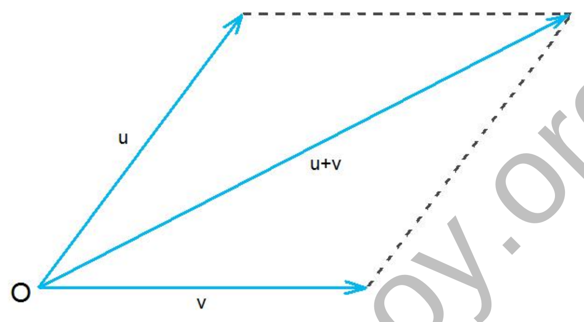




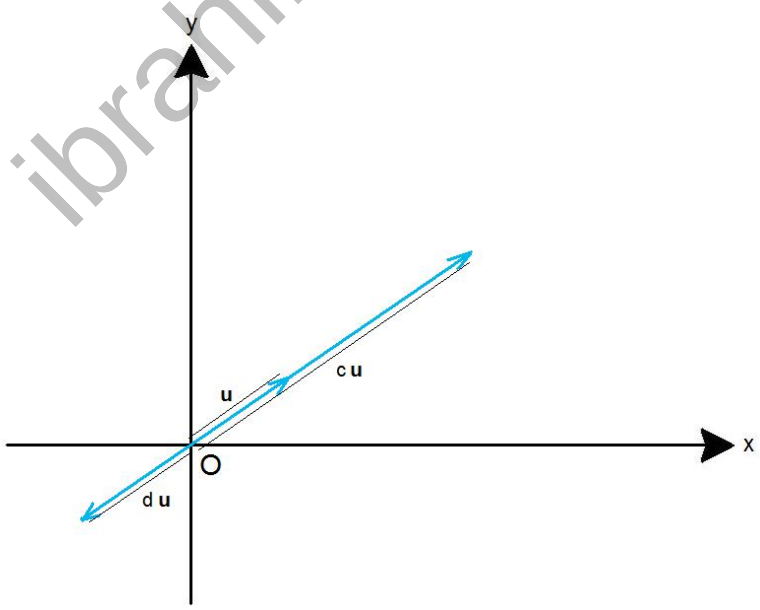

Şekil 2.5
Vektör Toplamı

Vektör toplamını geometrik olarak aşağıdaki şekilde yorumlayabiliriz. Şekil 2.5'de "$\boldsymbol{w}$" yönlü doğru parçası "$\boldsymbol{v}$" ye paraleldir, "$\boldsymbol{v}$" ile aynı uzunluğa sahiptir ve başlangıç noktası $\boldsymbol{u}$ nun bitim noktası olan $(u_1, u_2)$ dir. Böylece "$\boldsymbol{w}$" nin bitim noktası $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ olur. Yani başlangıç noktası $O$ ile bitim noktası $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ olan vektör $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dir. Şekil 2.6'da gösterildiği gibi $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ yi aynı zamanda $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ ile tanımlanan paralel kenarın köşegeni olarak da tanımlayabiliriz.

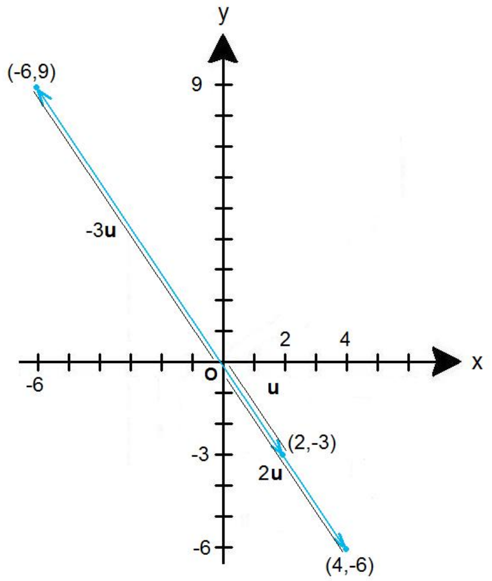
**Tanım 3.** $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ bir vektör ve $c$ bir skalar (reel sayı) ise, $\boldsymbol{u}$ **nun** $c$ ile skalar çarpımı $c\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$ vektörüdür. Böylece skalar çarpım $c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ nun her bileşenini $c$ ile çarparak elde edilir. Eğer $c > 0$ ise $c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ ile aynı yöndedir, diğer yandan eğer, $d < 0$ ise $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{du}$ ters yöndedir(Şekil 2.7).




Şekil 2.6
Vektör Toplamı




Şekil 2.7
Skalar Çarpım




**Örnek 3.** Eğer $c = 2, d = -3$ ve $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ise

$$c\boldsymbol{u} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ve

$$d\boldsymbol{u} = -3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olur (Şekil 2.8).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

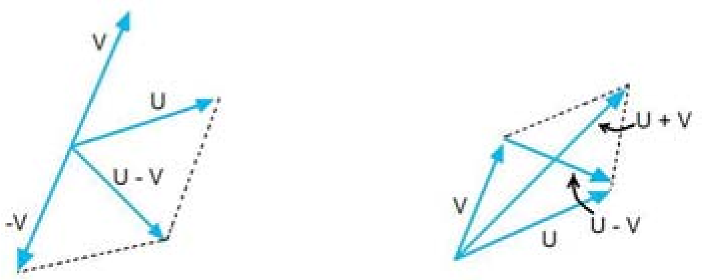
vektörü **"sıfır vektörü"** olarak adlandırılır ve $\mathbf{0}$ ile gösterilir. Eğer $u$ herhangi bir vektör ise

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$$

olduğu açıktır. Aynı zamanda

$$\boldsymbol{u} + (-\mathbf{1})\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

olduğunu gösterebiliriz. $(-\mathbf{1})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ vektörüne $\boldsymbol{u}$ nun **negatifi** deriz. Ayrıca, $\boldsymbol{u} + (-\mathbf{1})\boldsymbol{v}$ ifadesini $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ olarak yazarız ve $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{v}$ **arasındaki fark** olarak adlandırırız. Bu şekil 2.9(a) da gösterilmektedir. Vektör toplamının bir paralelkenarın bir köşegenini verirken, vektör farkının da diğer köşegeni verdiğine dikkat etmeliyiz [Şekil 2.9(b)'ye bakınız].




(a) Vektörler arasındaki fark (b) Vektör toplamı ve vektör farkı

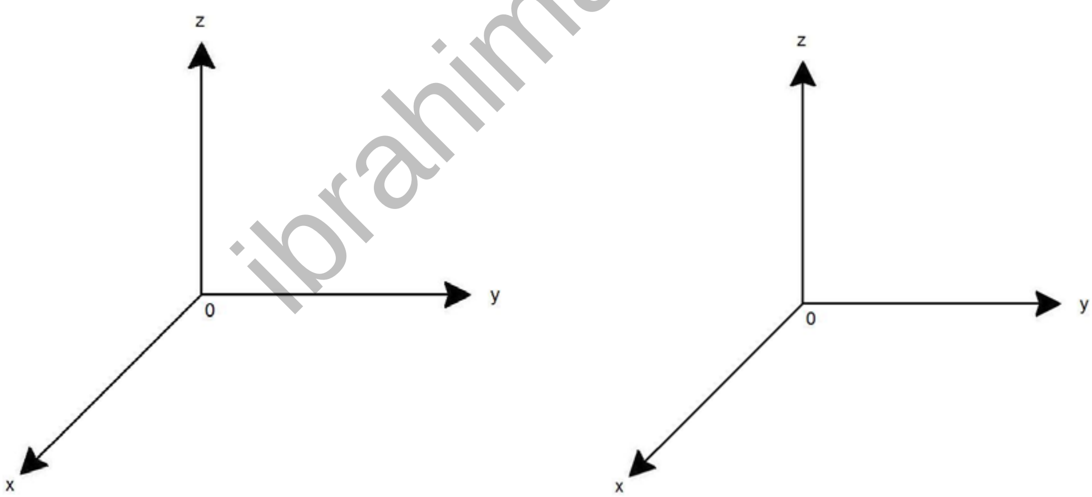
ŞEKİL 2.9

### 2) Uzayda Vektörler

Şu ana kadar incelenen düzlemde vektörler kavramı, uzayda vektörlere şöyle genelleştirilebilir. İlk olarak "Orjin" olarak adlandırılan belirli bir nokta ve her biri bu noktadan geçen **koordinat eksenleri** olarak adlandırılan her biri diğer ikisine dik üç doğru seçerek bir **"koordinat sistemi"** belirleriz. Bu doğrular x-,y- ve z- eksenleri olarak adlandırılır. Bu eksenlerin her biri üzerinde uzunluk birimlerini ve koordinat eksenlerindeki pozitif yönleri belirleyerek (sabitleyerek) bir nokta seçeriz. Çoğunlukla, fakat her zaman değil, tüm koordinat eksenleri için aynı uzunluk birimi kullanılır. Şekil 2.10 da muhtemel birçok koordinat sisteminden iki tanesini gösteriyoruz.

Şekil 2.10(a) da gösterilen koordinat sistemi **sağ-el koordinat sistemi** ve Şekil 2.10(b) deki **sol-el koordinat sistemi** olarak adlandırılır. Sağ el sistemi şu şekilde karakterize edilir. Eğer sağ el parmaklarını pozitif x-ekseninden, pozitif y-eksenine $90^0$lik bir açı kadar döndürürsek baş parmak pozitif z-ekseninin yönünü gösterecektir (Şekil 2.11)






(a) Sağ el koordinat sistemi (b) Sol el koordinat sistemi

Eğer x-eksenini, y-eksenine doğru saat yönünün tersinde döndürürsek, sağ-el pozitif z-yönünde hareket edecektir.

Uzaydaki her bir $P$ noktasını, reel sayılardan oluşan ve o noktanın koordinatları olarak adlandırılan bir $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ sıralı üçlüsüyle eşleştirebiliriz. Tersine reel sayılardan oluşan her sıralı üçlüyü uzayda bir noktayla eşleştirebiliriz. $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ koordinatlarına sahip $P$ noktası $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ya da kısaca $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ile gösterilir. Uzaydaki bu tüm noktaların kümesi $\boldsymbol{3-uzay}$ olarak adlandırılır ve $R^3$ şeklinde gösterilir.

**Uzayda bir vektör** ya da kısaca **vektör**

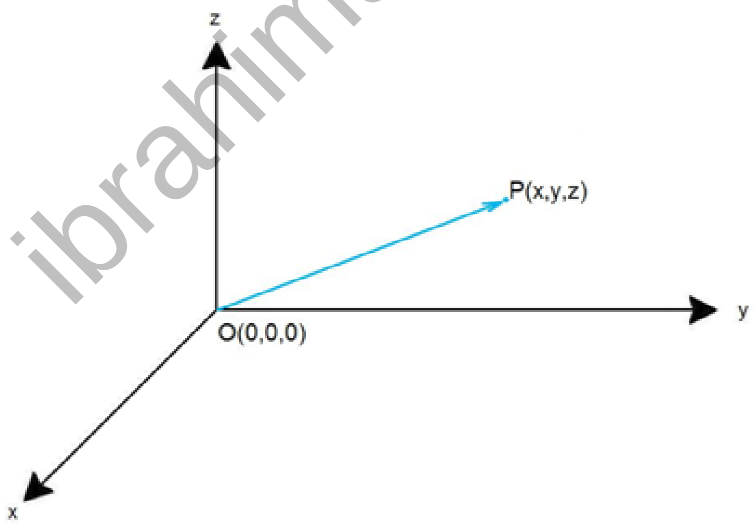
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde $3x1$ tipinde bir matristir. Burada $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ reel sayıları $\boldsymbol{x}$ in **bileşenleri** olarak adlandırılır. Eğer karşılıklı bileşenleri eşitse uzayda iki vektöre **eşittir** denir.

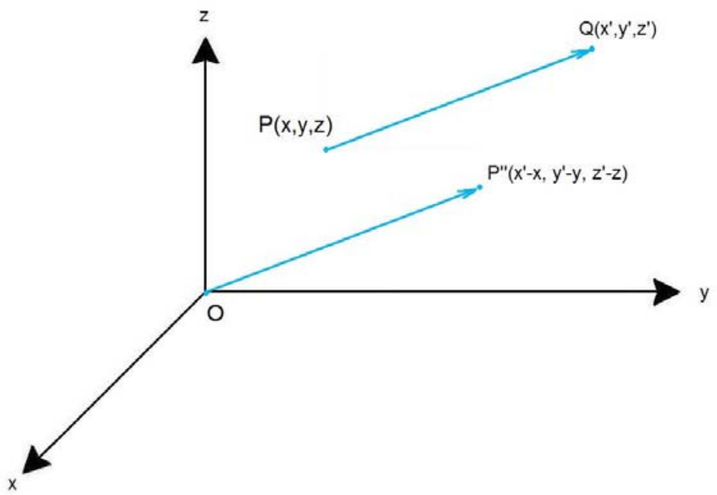
Düzlemde olduğu gibi

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vektörüyle, $O(0,0,0)$ başlangıç noktası ve $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ bitim noktası olmak üzere $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasını eşleştirebiliriz. Tersine bu şekildeki her yönlü doğru parçasını $\boldsymbol{x}$ vektörüyle eşleştirebiliriz (Şekil 2.12(a)). Dolayısıyla $\boldsymbol{x}$ vektörünü $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ şeklinde de yazabiliriz. Yine düzlemde olduğu gibi, fiziksel uygulamalarda sıkça $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ (orjin değil) noktasından $Q(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}')$ noktasına yönlendirilmiş bir $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasıyla karşılaşırız (Şekil 2.12(b)). Bu şekildeki bir doğru parçasını da $\boldsymbol{R}^3$ **de bir vektör** ya da kısaca **vektör** olarak adlandırabiliriz. Burada $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ başlangıç noktası $Q(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}')$ bitim noktasıdır. Böyle bir vektörün bileşenleri $\mathrm{x}' - \mathrm{x}, \mathrm{y}' - \mathrm{y}$ ve $\mathrm{z}' - \mathrm{z}$ dir. $R^3$ te eğer karşılıklı bileşenleri eşitse bu şekilde tanımlanan iki vektöre **eşittir** denir. Böylece Şekil 2.12(b)'deki $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $O$ (orjin) başlangıç noktası ve $\mathrm{P}''(\mathrm{x}' - \mathrm{x}, \mathrm{y}' - \mathrm{y}, \mathrm{z}' - \mathrm{z})$, bitim noktası olacak şekilde $\begin{bmatrix} (\mathrm{x}' - \mathrm{x} \\ \mathrm{y}' - \mathrm{y} \\ \mathrm{z}' - \mathrm{z} \end{bmatrix}$ vektörüyle de gösterilebilir.




(a) $R^3$ de bir vektör
Şekil 2.12



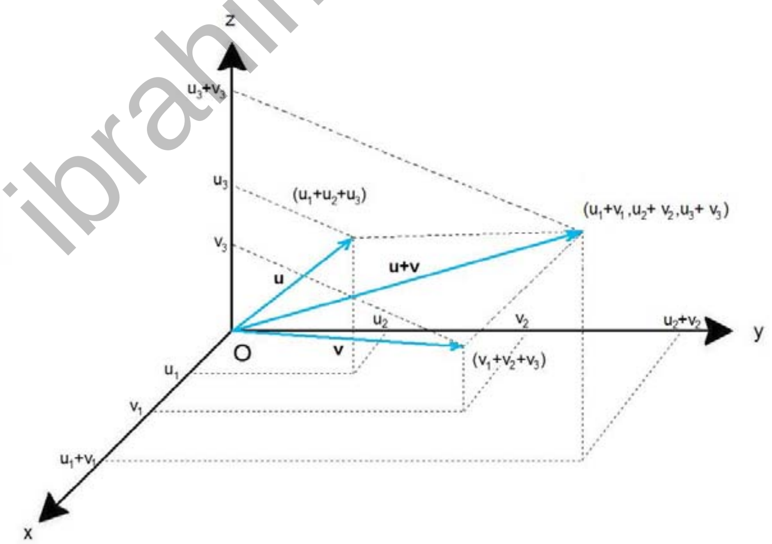

(b) Farklı yönlü doğru parçaları aynı vektörü gösteriyor.

Eğer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ $R^3$ de vektörler ve $c$ bir skalar ise $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ **toplamı** ve $\boldsymbol{cu}$ skalar **çarpımı** sırasıyla

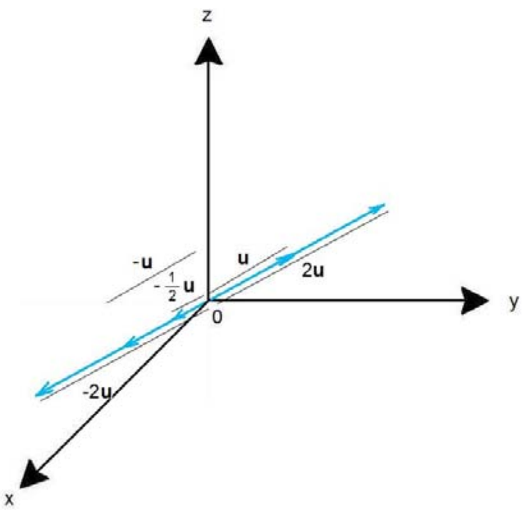
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \text{ ve } \boldsymbol{cu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}u_1 \\ \boldsymbol{c}u_2 \\ \boldsymbol{c}u_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Toplam Şekil 2.13'de gösterilirken, skalar çarpım Şekil 2.13'de gösteriliyor (Şekil 2.5 ve 2.8'e benziyorlar).






Şekil 2.13
Vektör Toplamı




Şekil 2.14

Skalar çarpım

**Örnek 4:** $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ de olsun. (a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; (b) $-2\boldsymbol{u}$; (c) $3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$ vektörlerini hesaplayınız.

**Çözüm. (a)** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 3+(-4) \\ (-1)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, **(b)** $-2\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2(2) \\ -2(3) \\ -2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$,

**(c)** $3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3(2) \\ 3(3) \\ 3(-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(3) \\ 2(-4) \\ 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ -7 \end{bmatrix}$

$R^3$ de 0 (sıfır) vektörü

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dır ve $\mathbf{0}$ şeklinde gösterilir. $\mathbf{0}$ vektörü, $R^3$ teki her $\boldsymbol{u}$ vektörü için

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$$

özelliğini sağlar. $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ vektörünün negatifi $-\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix}$ olur ve

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$$

olur.

**Teorem 1.** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ **ve** $\boldsymbol{w}$ $R^2$ veya $R^3$'de tanımlı vektörler, c ve d reel sabitler ise;

(a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
(b) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
(c) $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$
(d) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$
(e) $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$
(f) $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$
(g) $c(d\boldsymbol{u})=(cd)\boldsymbol{u}$
(h) $\mathbf{1}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

ifadeleri geçerlidir.