Lineer Cebir

Gauss yok etme yöntemi

Gauss yok etme yöntemi

Gauss yok etme yöntemi, yok etme yönteminin «elemanter işlemler» kullanılarak düzenlenmiş bir çeşididir.

Elemanter işlemler:

1) Bir satırı sıfırdan faklı bir sayı ile çarpmak
2) Bir satırı bir sayı ile çarpıp başka bir satıra eklemek
3) İki satırı yer değiştirmek

Önerme: Uygulanmış bir elemanter işlemi başka bir elemanter işlem yardımıyla geri alabiliriz.

İşlem 1: i. satırı $r \neq 0$ sayısı ile çarpmak

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (ra_{i1})x_1 + (ra_{i2})x_2 + \cdots + (ra_{in})x_n = rb_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Bu işlemi i. satırı r^{-1} sayısı ile çarparak geri alabiliriz.

İşlem 2: i. satırın bir r katını j. satırına eklemek

$$\left\{\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{j1} + ra_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + ra_{in})x_n = b_j + rb_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Bu işlemi i. satırın bir $-r$ katını j. satırına ekleyerek geri alabiliriz.

İşlem 3: i. satır ve j. Satırı yer değiştirmek

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Bu işlemi geri almak için tekrar uygulamak yeterlidir.

Teorem: Bir lineer denklem sistemine elemanter işlem uygulandığında sistemin çözümü değişmez

Not: Bir lineer denklem sisteminin çözüm yöntemini iki kısma ayırabiliriz: **(A)** Yokme kısmı **(B)** Geriye dönük yerine yazma
İki kısım da elemanter işlemler yardımıyla yapılır.

Örnek: $$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

1. satırın -2 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

1. satırın -1 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

2. satırın -2 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Yok etme işlemi bitti. Şimdi sistemi geriye dönük yerine yazma işlemiyle kolayca çözebiliriz. Fakat elemanter işlemleri kullanarak sistemi daha basit hale getirebiliriz.

3. satırı $\frac{1}{3}$ ile çarpalım:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

3. satırı 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

2. satırı 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Sistemin tek çözümü: $(x, y, z) = (3, 1, 2)$

Örnek:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

1. satırı 3. satıra ekleyelim

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 5y - 5z = 2 \end{cases}$$

2. satırın -5 katını 3. satıra ekleyelim

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ \boxed{0 = -13} \end{cases}$$

(!!!) Sistemin çözümü yoktur. Kararsız sistem.

Örnek:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

1. satırı 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 5y - 5z = 15 \end{cases}$$

2. satırın -5 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2. satırın -1 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = -2 \\ \quad\quad y - z = 3 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - 2 \\ y = z + 3 \end{cases}$$

Burada z yi bir parametre olarak alırsak çözüm aşağıdaki gibi olacaktır. Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 3 \\ z = t \end{cases}$$

Sistemin çözümü: $(x, y, z) = (t - 2, t + 3, t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Ya da vektör formunda: $(x, y, z) = (-2, 3, 0) + t(1, 1, 1).$

Matrisler: Bir matris dikdörtgensel şekilde sıralanmış sayılar dizinidir.

Örnekler:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0.2 \\ 4.6 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3/5 \\ 5/8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}, 5), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisin boyutu: (satır sayısı**)x(**sütun sayısı**)**

nxn: kare matris

nx1: sütun vektörü

1xn: satır vektörü

Lineer denklem sistemlerinin matris gösterimi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lineer denklem sistemlerinin matris gösterimi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ek matris gösterimi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Elemanter satır işlemleri ek matris için de benzer şekilde kullanılabilir:

Elemanter satır işlemleri:

1) Bir satırı sıfırdan faklı bir sayı ile çarpmak
2) Bir satırı bir sayı ile çarpıp başka bir satıra eklemek
3) İki satırı yer değiştirmek

Uyarı: Burada satırlar birer vektör gibi düşünülür skalerle çarpma işlemi buna göre yapılır.

Elemanter satır işlemleri: Bu işlemleri ek matris için aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

Burada $\mathbf{v}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \mid b_i)$ bir vektör olarak ele alınır.

İşlem 1: i. satırı $r \neq 0$ sayısı ile çarpmak

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ r\mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

İşlem 2: i. satırın bir r katını j. satırına eklemek

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j + r\mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

İşlem 3: i. satır ve j. Satırı yer değiştirmek

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

Satır eşelon formu: Gauss yok etme yönteminin amacı ek matrisi satır eşelon formuna getirmektir. Satır eşelon formda iki özellik aranır:

- Satırlardaki sıfırdan faklı ilk eleman 1'dir
- 1. satırdan son satıra doğru giderken sıfırdan faklı ilk elemanlar sağa doru dizilime sahiptir.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & -3 & 7 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Satır eşelon formunun genel hali:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\boxed{} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & \boxed{} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & \boxed{} & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & & \boxed{} & * & * & * & * \\
 & & & & & & & \boxed{} & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & &
\end{array}\right)$$

- Satırlardaki sıfırdan faklı ilk elemanlar kutular olup 1’e eşittir.
- Merdivenin altındaki tüm sayılar 0’ dır.
- Merdivenin her adım yüksekliği 1’ dir.
- Daire içine alınmış sayılar herhangi bir sayı olabilir.

Tam üçgensensel form satır eşelon formun özel bir hali olup yalnızca n bilinmeyen ve n denklemli sistemlerde ortaya çıkabilir.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
\boxed{} & * & * & * & * & * & * & * \\
 & \boxed{} & * & * & * & * & * & * \\
 & & \boxed{} & * & * & * & * & * \\
 & & & \boxed{} & * & * & * & * \\
 & & & & \boxed{} & * & * & * \\
 & & & & & \boxed{} & * & * \\
 & & & & & & \boxed{} & *
\end{array}\right)$$

Satır eşelon formdaki bir matrisin en sağdaki sütünü hiçbir «**kutu»**(satırdaki sıfırdan faklı ilk eleman) içermiyorsa bu sistemin başlangıç hali kararlı bir sistemdir.

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\boxed{} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & \boxed{} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & \boxed{} & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & & \boxed{} & * & * & * & * \\
 & & & & & & & \boxed{} & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & \boxed{}
\end{array}\right)
$$

Kararlı olmayan bir sistem örneği
Kararsız sistemlerden burada «kutu» olmaz

Gauss yok etme yönteminin amacı bir lineer denklem sisteminin ek matrisini **satır eşelon forma** getirmektir.

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\boxed{1} & & * & * & & * & & & * & * & * \\
 & \boxed{1} & * & * & & * & & & * & * & * \\
 & & & & \boxed{1} & * & & & * & * & * \\
 & & & & & & \boxed{1} & & * & * & * \\
 & & & & & & & \boxed{1} & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

- Merdivenin altındaki tüm sayılar 0 olmalı
- Kutu içerisindeki sayılar 1 olmalı
- Daire içine alınmış sayılar herhangi bir sayı olabilir

Örnek:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Satır eselon formu(tam ücgensel)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

Örnek:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ -x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Satır eşelon formu(tam üçgensel değil)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

Örnek:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & 14 \end{array}\right)$$

Satır eşelon formu(tam üçgensel)

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

İndirgenmiş satır eşelon formda

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Örnek: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

Ek matris incelendiğinde zaten eşelon formda olduğu görülür.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Ek matrisi indirgenmiş eşelon forma getirmek için 2. satırın -2 katını 1. satıra eklemeliyiz. Burada x_3 ve x_4 değişkenleri birer parametre olarak alınır. Buna göre sistem aşağıdaki gibi çözülür:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 - 2 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Lineer denklem sisteminin genel çözümü:

$$\begin{cases} x_1 = t + 2s - 2 \\ x_2 = -2t - 3s + 6 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

Çözüm vektör formunda:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= (-2, 6, 0, 0) + t(1, -2, 1, 0) + s(2, -3, 0, 1).$$

Örnek(Parametre içeren bir örnek**):**

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}) \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

Bu sistem «**homojen**» bir sistemdir. (Homojen sistemlerden sağ taraf sıfırlardan oluşur.) Homojen sistemler her zaman $x = y = z = 0$ çözümüne sahiptir. Bu yüzden kararlıdır.

Sistemin ek matrisi: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right)$

İlk terim 0 olduğundan 1. satır ile 2. satırı (ya da 3. satırı) yer değiştirmeliyiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right)$$

Şimdi yok etme yöntemine başlayabiliriz.

İlk önce 3. satırdan 1. satırı çıkartalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 0 \end{array}\right)$$

2. Satır istediğimiz gibi.

Şimdi 3. satırdan 2. satırı çıkartalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Şimdi iki durum ortaya çıkar:
1. durum: $a \neq 1$ ise 3. satırı $(a-1)^{-1}$ ile çarparız:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

Artık ek matris eşelon formda olup **indirgenmiş eşelon forma** getirilebilir: 3. satırın -3 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

3. satırın 2 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Son olarak 2. satırı 1. satırdan çıkartalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

Buradan tek çözüm $x = y = z = 0$ olur.

2. durum: $a = 1$ ise ek matris zaten eşelon formdadır:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

İndirgenmiş eşelon forma getirmek için 2. satırı 1. satırdan çıkartalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z bağımsız değiken olur:

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5z \\ y = -3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Sisteminin genel çözümü:

Eğer $a \neq 1$ ise $(x, y, z) = (0, 0, 0);$

Eğer $a = 1$ ise $(x, y, z) = (5t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}.$