0.1 Boyut ve Altuzaylar

Örnek 1. R^3 ün aşağıda verilen W altuzaylarının birer bazlarını ve boyutlarını bulunuz:

(a) $W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$,

(b) $W = \{(a, b, c) : a = b = c\}$,

(c) $W = \{(a, b, c) : c = 3a\}$

Çözüm. (a) Örneğin $(1, 2, 3) \notin W$ olduğundan $W \neq R^3$ tür. Böylece $boyW < 3$. $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, W da iki bağımsız vektördür. Böylece $boyW = 2$ ve buradan $\{u_1, u_2\}$, W nun bir bazıdır.

(b) $u = (1, 1, 1) \in W$ dır. Herhangi bir $w \in W$ vektörü $w = (k, k, k)$ şeklindedir. O halde, $w = ku$ olur. Böylece, u vektörü W yı gerer ve $boyW = 1$ olur.

(c) Örneğin $(1, 1, 1) \notin W$ olduğundan $W \neq R^3$ tür. Böylece $boyW < 3$ tür. $u_1 = (1, 0, 3)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ vektörleri W dadır ve lineer bağımsızdırlar. Böylece $boyW = 2$ ve $\{u_1, u_2\}$, W nun bir bazını oluşturur.

Örnek 2. R^4 ün aşağıdaki vektörlerle gerilen W altuzayının bir bazını ve boyutunu bulunuz.

$$u_1 = (1, -4, -2, 1), u_2 = (1, -3, -1, 2), u_3 = (3, -8, -2, 7)$$

Çözüm.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eşelon matristeki sıfır olmayan satırlar W nun bir bazıdır ve böylece $boyW = 2$ olur. Özel olarak bu üç vektör lineer bağımlı demektir.

Örnek 3. R^4 ün aşağıdaki vektörlerle gerilen bir altuzayı W olsun:

$$u_1 = (1, -2, 5, -3), u_2 = (2, 3, 1, -4), u_3 = (3, 8, -3, -5)$$

(a) W nun bir bazını ve boyutunu bulunuz. (b) W nun bazını, R^4 uzayının bir bazına genişletiniz.

Çözüm. (a) Satırları, verilen vektörler olan matris oluşturulur ve satırca eşelon hale indirgenir:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eşelon matrisin sıfır olmayan $(1, -2, 5, -3)$ ve $(0, 7, -9, 2)$ satırları A nın satır uzayının ve dolayısıyla W nun bir bazıdır ve böylece $boyW = 2$ olur.

(b) Yukarıdaki iki vektörle beraber dört lineer bağımsız vektör arıyoruz. $(1, -2, 5, -3), (0, 7, -9,$ vektörü lineer bağımsızdır (çünkü eşelon bir matris oluştururlar), ve böylece W nun bazının genişletilmesi ile elde edilen R^4 ün bir bazıdır.

Örnek 4. R^5 in $u_1 = (1, 2, -1, 3, 4), u_2 = (2, 4, -2, 6, 8), u_3 = (1, 3, 2, 2, 6), u_4 = (1, 4, 5, 1, 8)$ ve $u_5 = (2, 7, 3, 3, 9)$

vektörleri ile gerilen bir altuzayı W olsun. Bu vektörlerin W için bir baz oluşturan alt kümesini bulunuz.

1.metod Kolonları, verilen vektörler olan matris oluşturulur ve satırca eşelon hale indirgenir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineer bağımsız vektörler C_1, C_3 ve C_5 kolonlarıdır. Buradan, karşılık gelen u_1, u_3, u_5 vektörleri W nun bir bazını oluşturur. O halde $boyW = 3$ tür.

2.metod Satırları verilen vektörler olan, matris oluşturulur ve sıfır satır vektörleri kendi aralarında değiştirilmeden eşelon hale indirgenirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Sıfır olmayan satırlar birinci, üçüncü ve beşinci satırlardır; o halde $\{u_1, u_3, u_5\}$, W nun bir bazıdır. Dolayısıyla $boyW = 3$ tür.

Örnek 5. 2×2 reel matrislerin vektör uzayı V olsun. V in aşağıdaki matrislerin gerdiği W altuzayının boyutunu ve bir bazını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Çözüm. Verilen matrislerin V in olağan bazına göre koordinat vektörleri aşağıda verilmiştir.

$$A = [1, 2, -1, 3]\,, B = [2, 5, 1, -1]\,, C = [5, 12, 1, 1]\,, D = [3, 4, -2, 5]$$

Satırları, verilen vektörler olan bir matris oluşturulur ve eşelon hale indirgenirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 12 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -18 \end{bmatrix}$$

Sıfır olmayan matrisler lineer bağımsızdır, buradan $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -18 \end{bmatrix}$ mat

W nın bir bazıdır ve $boyW = 3$ tür. (Ayrıca A, B ve D matrislerinin de W nun bir bazı olduğuna dikkat ediniz.)

0.2 Bir Matrisin Satır Uzayı ve Rankı

Örnek 1. Aşağıdaki matrislerin satır uzaylarının aynı olup olmadığını belirleyiniz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Çözüm. Matrisler ancak ve ancak satır kanonik biçimleri aynı sıfır olmayan satırlara sahiplerse satır uzayları aynıdır; buradan herbir matrisi satırca kanonik hale indirgeriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A nın indirgenmiş halinin sıfır olmayan satırları ve C nin indirgenmiş halininkiler aynı olduğundan, A ve C nin satır uzayları aynıdır. Diğer taraftan, B nin indirgenmiş halindeki sıfır olmayan satırları diğerlerinden farklıdır, böylece B nin satır uzayı farklıdır.

Örnek 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}$ matrislerin kolon uzaylarının aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. A ve B nin kolon uzayları, ancak ve ancak A^T ve B^T transpozlarının satır uzayları aynı ise aynıdır. Böylece A^T ve B^T satırca kanonik hale indirgersek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek 3. R^3 ün, $U = span\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $W = span\{w_1, w_2, w_3\}$ altuzaylarını ve

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1,-1), u_2 = (2,3,-1), u_3 = (3,1,-5) \\ w_1 &= (1,-1,-3), w_2 = (3,-2,-8), w_3 = (2,1,-3) \end{aligned}$$

vektörlerini düşününüz. $U = W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Satırları u_i olan A matrisi oluşturulur ve A satırca kanonik hale indirgenir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonra, satırları w_i olan B matrisi oluşturulur ve B satırca kanonik hale indirgenir.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. A ve B nin satırca kanonik halleri aynı olduğundan, A ve B nin satır uzayları eşittir ve böylece $U = W$ olur.

Örnek 4. Aşağıdaki matrislerin ranklarını bulunuz.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Çözüm. (a) Satır rankı kolon rankına eşit olduğundan, A nın transpozunu almak ve sonra bunu satırca eşelon hale indirgemek daha kolaydır:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Böylece $rank\ A = 3$ tür.

(b) B matrisinde iki kolon lineer bağımsızdır, çünkü biri diğerinin bir katı değilidir. Böylece $rank\ B = 2$ dir.