Lineer Cebir

Lineer Denklem Sistemleri

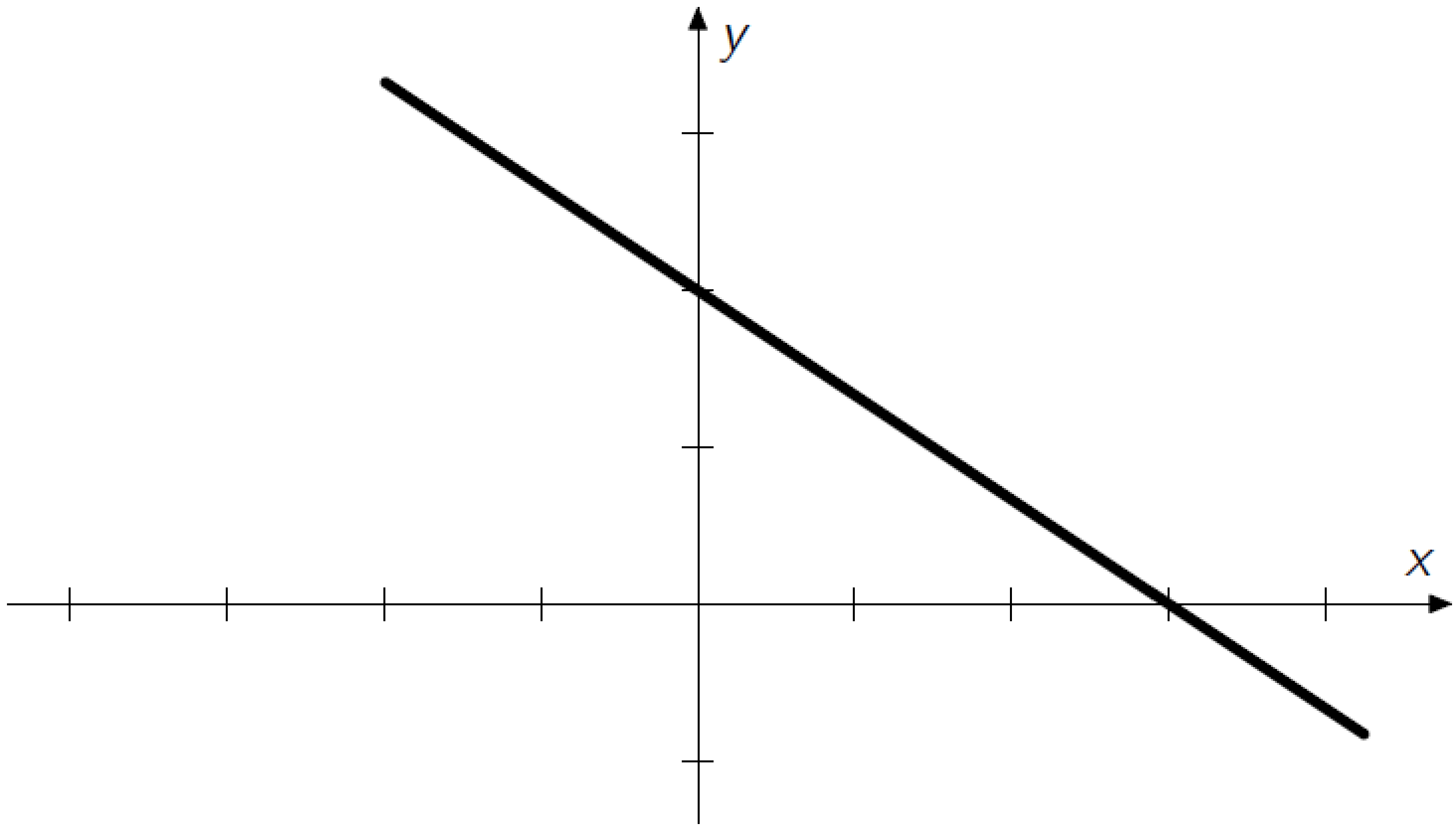
Lineer denklemler

$2x + 3y = 6$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}^2$ de bir doğru olduğundan bu denkleme bir lineer(doğrusal) denklem denir.

Bu denklemin çözümü $2\alpha + 3\beta = 6$ denklemini sağlayan $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sıralı ikilileridir.

Örneğin $(3,0)$ ve $(0,2)$ bu denklemin birer çözümüdür.

Alternatif olarak birinci çözümü $\mathrm{x} = 3$ ve $\mathrm{y} = 0$ şeklinde yazılabilir.



$$2x + 3y = 6$$

Lineer denklemler

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine bağlı bir lineer denklem

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ şeklindedir.

Burada $a_1, a_2, \ldots a_n$ ve b sabitlerdir.

Böyle bir lineer denklemin çözümü

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n = b$$

denklemini sağlayan $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ sıralı sayıları

şeklindedir.

Lineer Denklem Sistemleri

n bilinmeyenli m denklemli lineer denklem sistemi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler bilinmeyenler ve a_{ij} ve b_j ler sabitlerdir.
- Bir lineer denklemin çözümü denklem sistemindeki tüm denklemlerin ortak çözümüdür.
- Bir lineer denklemin tek çözümü olabilir, hiçbir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çözümü olabilir.

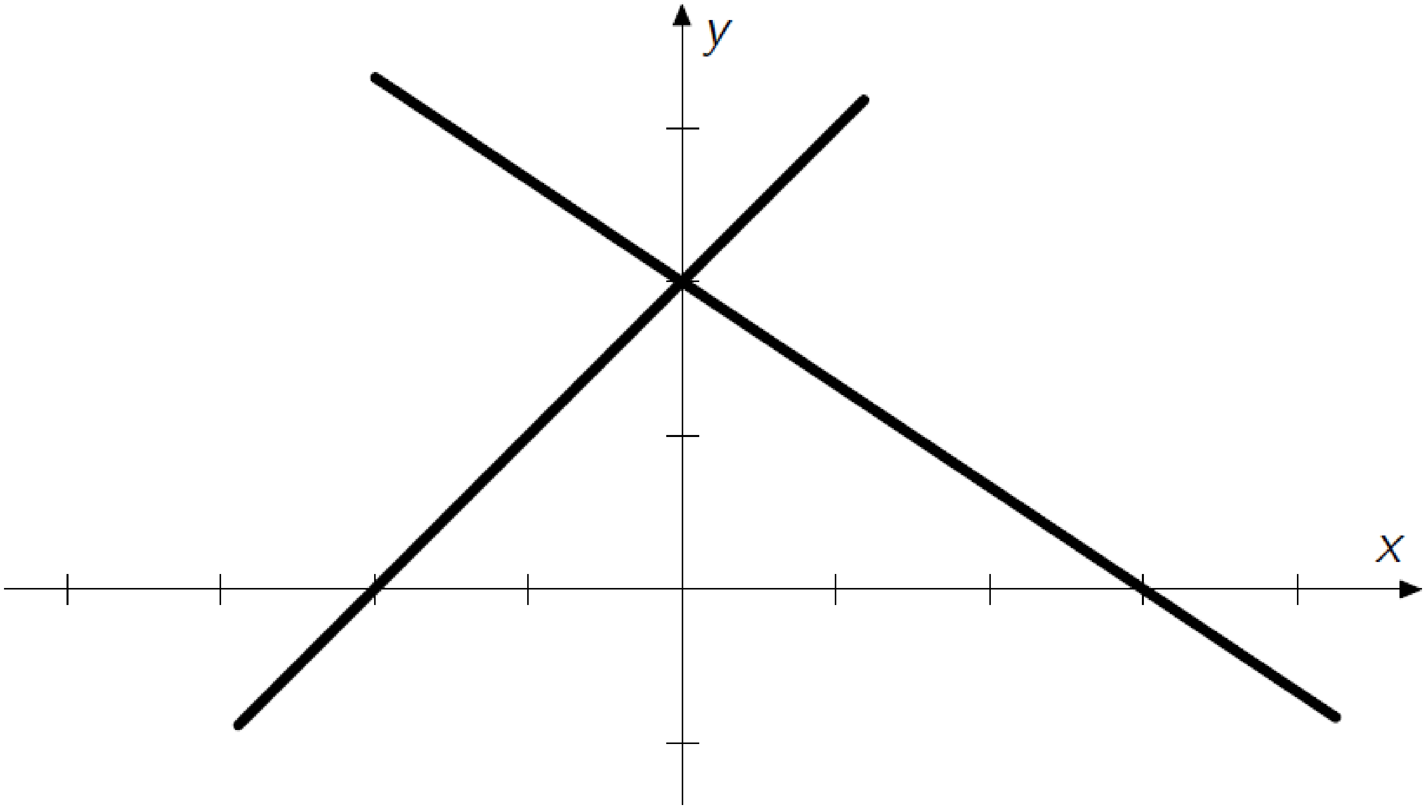
Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $x - y = -2$ ve $2x + 3y = 6$ doğrularının kesiştikleri noktayı bulunuz.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ 2(y - 2) + 3y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2 \\ 5y = 10 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

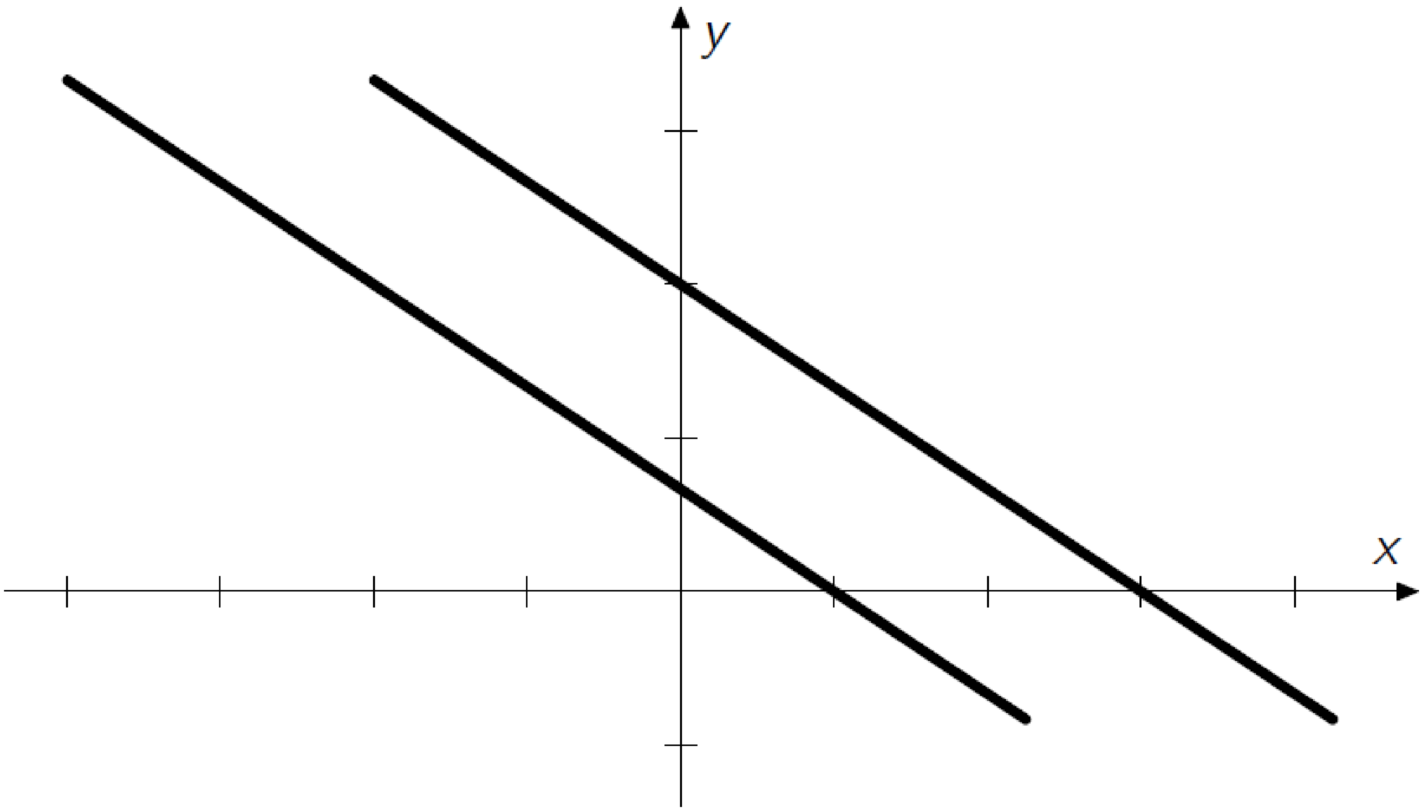
Çözüm: Bu iki doğru $(0,2)$ noktasında kesişirler.



$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \qquad x = 0,\ y = 2$$

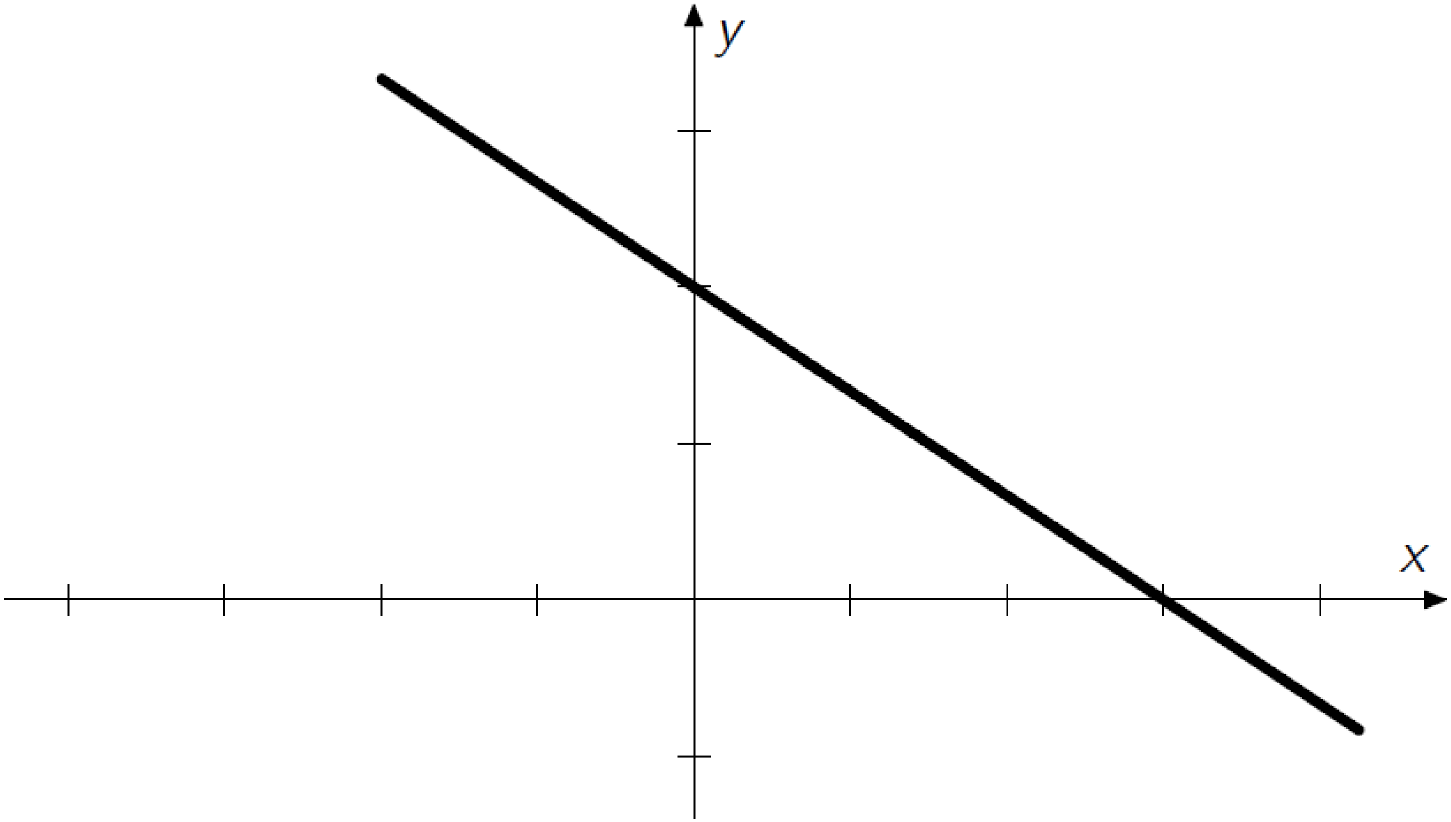
Tek çözüm

Örnek: $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$



Çözüm yok (kararsız sistem)

Örnek:



$$\begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \iff 2x + 3y = 6$$

Sonsuz çözüme sahip sistem

Lineer denklem sistemlerinin çözümü

Yoketme (Eleminasyon) yöntemi: Bu yöntem tüm lineer denklem sistemlerinin çözümü için kullanılabilir. Algoritma: (1) Bir değişken seç ve denklemlerden birinden bu değişkeni çözüp diğer denklemde yerine yazarak onu yok et. (2) Geriye dönük yerine yazarak tüm değişkenleri bul

Algoritma sistemdeki bilinmeyen sayısını ve denklem sayısını düşürür ve sonlu sayıda uygulandığında biter.

Algoritma bittiğinde sistem kolayca çözülebilen basit bir hale dönüşür.

Örnek:
$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ 2x - y - z & = 3 \\ x + y + z & = 6 \end{cases}$$

1. denklemden x' i çözelim:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

2. ve 3. denklemde x' i yerine yazarak yok edelim:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 2(y + 2) - y - z = 3 \\ (y + 2) + y + z = 6 \end{cases}$$

Basitleştirirsek:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ \boxed{\begin{matrix} y - z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{matrix}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y - z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

Dikkat edilirse 2. ve 3. denklem iki bilinmeyenli iki denklemli bir sistemdir.

2. denklemden y' yi çözelim:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = z - 1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

y' yi 3. denklemde yerine yazarak yok edelim:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = z - 1 \\ 2(z - 1) + z = 4 \end{cases}$$

Basitleştirirsek:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = z - 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Yok etme işlemi bitti. Şimdi sistemi geriye dönük yerine yazma işlemiyle kolayca çözebiliriz.

Yani 3. denklemden z' yi bularak 2. denklemde yazar ve y' yi buluruz. Ardından y' yi (ve gerekirse z' yi) 1. denklemde yerine yazarak x' i buluruz.

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = z - 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Örnek: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases}$

1. denklemden x' i çözelim:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

2. ve 3. denklemde x' i yerine yazarak yok edelim:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y - z = 3 \\ -(-y + 2z + 1) + 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

Basitleştirirsek:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y - z = 3 \\ 5y - 5z = 15 \end{cases}$$

2. denklemden y' yi çözelim:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y = z + 3 \\ 5y - 5z = 15 \end{cases}$$

y' yi 3. denklemde yerine yazarak yok edelim:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y = z + 3 \\ 5(z + 3) - 5z = 15 \end{cases}$$

Basitleştirirsek:

$$\begin{cases} x = -y + 2z + 1 \\ y = z + 3 \\ 15 = 15 \end{cases}$$

Yok etme işlemi bitti. 3. eşitlik bir anlam ifade etmez bu yüzden 3 bilinmeyenli iki denklemli bir sistem ortaya çıkar.

Burada z serbest bir değişkendir. Yani z ye herhangi bir sayı verilebilir. Daha sonra y ve x değişkenleri sırayla bulunabilir.

$$z = t, \quad \text{(bir parametre olsun)}$$
$$y = z + 3 = t + 3;$$
$$x = -y + 2z + 1 = -(t + 3) + 2t + 1 = t - 2.$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ -x + 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

Lineer denklem sisteminin genel çözümü:

$$(x, y, z) = (t - 2, t + 3, t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Vektör formunda: $(x, y, z) = (-2, 3, 0) + t(1, 1, 1)$.

Genel çözüm incelendiğinde, çözüm kümesinin $\mathbb{R}^3$' te $(-2,3,0)$ noktasından geçen ve $(1,1,1)$ vektörü yönünde olan bir doğru olduğu görülür.