

# SAYISAL YÖNTEMLER

# SAYISAL YÖNTEMLER

## 3. Hafta

### HATA KAVRAMI

# GİRİŞ

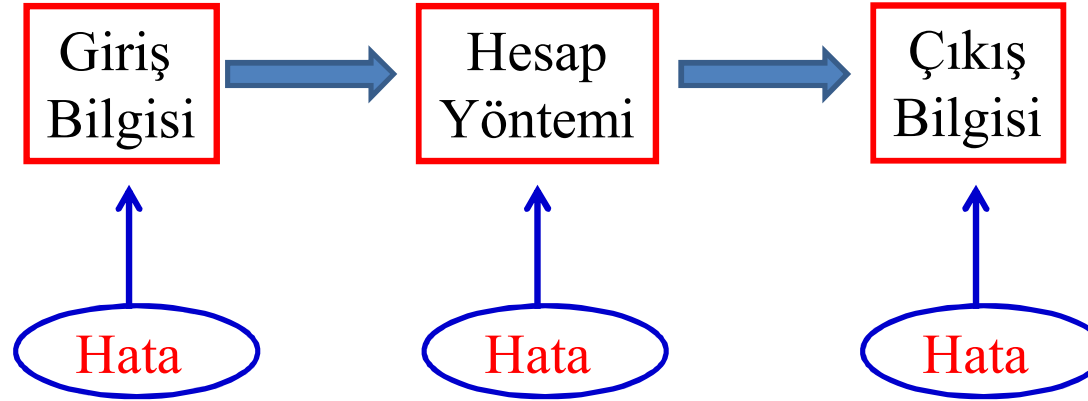
---

Sayısal analiz, matematik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümlenme tekniğidir. Genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkansız olan matematiksel problemleri belirli bir hata aralığında çözmek için kullanılır.



*Sayısal analiz işleyiş şeması*

# HATA



Bir problemin çözümünde kullanılan sayısal yöntemler belli bir giriş verisini işleme tabii tutarak sayısal çözüme ulaşırlar. Sayısal yöntemler, analitik çözümden farklı olarak, sayıları kullanarak işlem yapar ve belli bir hata payı içerirler.

Bunun yanı sıra giriş verisi de bir miktar hatalı olabilir. Eğer giriş verisi deneyler sonucunda bulunmuş ise bu değerler yapılan ölçümlerin hassasiyetine göre bir hata payı içerecektir.

Giriş bilgisinin ve kullanılan yöntemin hata içermesi, bulunacak olan sonuçlarında belli bir miktarda hata içereceğini gösterir. Yani, **sayısal yöntemler ile bulunan sonuçlar kesin değerler değil yaklaşık değerlerdir.**

Dolayısıyla hata analizi sayısal çözümde önemli bir konudur. Sonuçların hata içermesinden ziyade, bu hataların kabul edilebilir sınırlar içerisinde olması yani hataların verilen **tolerans** değerinden küçük olması önemlidir.

Hata, gerçek değer ile hesaplanan yaklaşık değer arasındaki farktır. Bu şekilde tanımlanan hata iki şekilde ifade edilir.

**Mutlak Hata:** Gerçek değer ( $A$ ) ile hesaplama sonucu bulunan yaklaşık değer ( $a$ ) arasındaki farka denir.

$$\Delta a = |A - a|$$

**Bağıl (İzafi) Hata:** Daha anlamlı olması açısından hatanın mutlak olarak değil gerçek değere göre büyüklüğünün bilinmesi gerekir. Mutlak hatanın gerçek değere oranı bağıl hatayı verir.

$$\delta a = \left| \frac{A - a}{A} \right|$$

**Yüzde Hata:** Bağıl hatanın 100 ile çarpımı yüzde hatayı verir.

$$\% \delta_a = 100 \times \delta a$$

# Örnek

---

Gerçek sayı:60

| NO | SAYI    | MUTLAK H. | BAGIL H. | YUZDE H. |
|----|---------|-----------|----------|----------|
| 1  | 60.2982 | 0.2982    | 0.0049   | 0.4971   |
| 2  | 61.4053 | 1.4053    | 0.0234   | 2.3421   |
| 3  | 57.0907 | 2.9093    | 0.0485   | 4.8488   |
| 4  | 58.7982 | 1.2018    | 0.0200   | 2.0030   |
| 5  | 62.8333 | 2.8333    | 0.0472   | 4.7221   |
| 6  | 61.8085 | 1.8085    | 0.0301   | 3.0141   |

## Örnek

---

Uzunluğu 5.521 cm olan bir vidanın boyu cetvel ile ölçüldüğünde uzunluğu 5.53 cm bulunuyor. Buna göre ölçme işlemindeki mutlak ve bağıl hatayı bulunuz.

$$\Delta a = |A - a| = |5.521 - 5.53| = 0.009 \text{ cm}$$

$$\delta a = \left| \frac{A - a}{A} \right| = \left| \frac{5.521 - 5.53}{5.521} \right| = 0.0016$$

# TOPLAMA ve ÇIKARTMADA HATALAR

$$\begin{array}{ll} A_1 + A_2 + A_3, \dots, A_n & (n \text{ tane sayının gerçekteki değerleri}) \\ a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_n & (n \text{ tane sayının yaklaşık değerleri}) \\ \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3, \dots, \Delta a_n & (A \text{ sayılarının mutlak hataları}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A = A_1 + A_2 + A_3, \dots, A_n \\ a = a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_n \end{array} \quad (\text{Cebirsel toplam})$$

$$|A - a| = |A_1 - a_1| + |A_2 - a_2| + |A_3 - a_3| + \dots + |A_n - a_n|$$

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \dots + \Delta a_n$$

Toplama veya çıkartma işlemleri sonucunda **mutlak hatalar toplanır.**



# Örnek

---

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 10.5 \pm 0.02 \\ a_2 = 8.9 \pm 0.01 \\ a_3 = 2.1 \pm 0.03 \end{array} \right\} a = a_1 - a_2 + a_3 \quad \text{işleminde } \Delta a = ?, \delta a = ?$$

$$a = A_1 - A_2 + A_3 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3$$

$$a = 10.5 - 8.9 + 2.1 + 0.2 + 0.01 + 0.03 = 3.7 + 0.06$$

$$\Delta a = 0.06$$

$$\delta a = \left| \frac{\Delta a}{A} \right| = \left| \frac{0.06}{3.7} \right| = 0.0162$$

# ÇARPMA ve BÖLMEDE HATALAR

$A_1, A_2$  (sayıların gerçek değerleri )

$a_1, a_2$  (sayıların yaklaşık değerleri )

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = A_1 + \Delta a_1 \\ a_2 = A_2 + \Delta a_2 \end{array} \right\} \quad a_1 \cdot a_2 = (A_1 + \Delta a_1) \times (A_2 + \Delta a_2)$$

$$a_1 \cdot a_2 = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot \Delta a_2 + A_2 \cdot \Delta a_1 + \Delta a_1 \cdot \Delta a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 - A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot \Delta a_2 + A_2 \cdot \Delta a_1 + \Delta a_1 \cdot \Delta a_2$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2 - A_1 \cdot A_2}{A_1 \cdot A_2} = \frac{A_1 \cdot \Delta a_2}{A_1 \cdot A_2} + \frac{A_2 \cdot \Delta a_1}{A_1 \cdot A_2} + \frac{\Delta a_1 \cdot \Delta a_2}{A_1 \cdot A_2} = \frac{\Delta a_2}{A_2} + \frac{\Delta a_1}{A_1} + \frac{\Delta a_1 \cdot \Delta a_2}{A_1 \cdot A_2}$$

ihmal

$$\left| \frac{A_1 \cdot A_2 - a_1 \cdot a_2}{A_1 \cdot A_2} \right| = \delta a_1 + \delta a_2$$

Çarpma ve bölme işlemleri sonucunda **bağıl hatalar toplanır.**

# Örnek

Bir dikdörtgenin kenarları  $a_1 = 4 \pm 0.02\text{m}$  ve  $a_2 = 3 \pm 0.02\text{m}$  ise dikdörtgenin alanının bağıl ve mutlak hatalarını hesaplayınız.

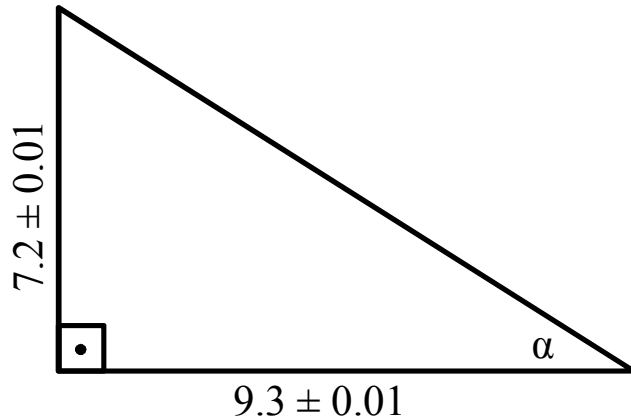
$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 4 \quad , \quad \Delta a_1 = 0.02 \\ A_2 = 3 \quad , \quad \Delta a_2 = 0.02 \end{array} \right\} \quad \delta a_1 = \frac{0.02}{4} = 0.005 \quad , \quad \delta a_2 = \frac{0.02}{3} = 0.006$$

$$A_1 \cdot A_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\delta(a_1 \cdot a_2) = \delta a_1 + \delta a_2 = 0.011$$

$$\Delta(a_1 \cdot a_2) = (A_1 \cdot A_2) \cdot \delta(a_1 \cdot a_2) = 0.132$$

# Örnek



tg  $\alpha$  ifadesinin hatalarını bulunuz.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 7.2 \quad , \quad \Delta a_1 = 0.01 \\ A_2 = 9.3 \quad , \quad \Delta a_2 = 0.01 \end{array} \right\} \quad \delta a_1 = \left| \frac{0.01}{7.2} \right| = 0.0013 \quad , \quad \delta a_2 = \left| \frac{0.01}{9.3} \right| = 0.001$$

$$A_1 / A_2 = 7.2 / 9.3 = 0.774$$

$$\delta(a_1 / a_2) = \delta a_1 + \delta a_2 = 0.0023$$

$$\Delta(a_1 / a_2) = (A_1 / A_2) \cdot \delta(a_1 / a_2) = 0.0017$$

$$\boxed{tg \alpha = 0.77 \pm 0.0017}$$

# ÜS ve KÖKÜN HATALARI

---

$A$  ( gerçek değer )

$a$  ( yaklaşık değer )

$\delta a$  (  $a$ 'nın bağıl hatası )

$$s = a^m \quad \Rightarrow \quad s = \underbrace{a.a.a.....a}_m \quad \Rightarrow \quad \delta s = m.\delta a$$

$$s = \sqrt[m]{a} \quad \Rightarrow \quad \delta s = \frac{1}{m}.\delta a$$

# Örnek

---

Bir karenin kenarı  $a_1 = 3.7 \pm 0.01 \text{ cm}$  ise karenin alanının bağıl ve mutlak hatalarını hesaplayınız.

$$a = 3.7 \pm 0.01 \Rightarrow \quad A = 3.7 \quad , \quad \Delta a = 0.01$$

$$\delta a = \left| \frac{\Delta a}{A} \right| = \left| \frac{0.01}{3.7} \right| = 0.0027$$

$$s = a^2 = 3.7^2 = 13.69$$

$$\delta s = 2.\delta a = 0.0054$$

$$\Delta s = s.\delta s = 13.69 \times 0.0054 = 0.073$$

$$S = 13.69 \pm 0.073$$

# HATA KAYNAKLARI

---

Sayısal analizde sonuçları etkileyen çeşitli hata kaynakları vardır. Bunlar:

**Kesme Hatası (Truncation Error):** Kesin ve tam sonuç veren analitik bir yöntem yerine, yaklaşık sonuç veren sayısal bir yöntemin kullanılması sonucunda oluşan hatadır

- **Örnek:** Sonsuz terimli serilerin açılımında belirli sayıda terimin kullanılması veya iterasyon sayısının sonlu sayıda tutulmasından kaynaklanan hatadır.

- Taylor Serisi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

# HATA KAYNAKLARI

---

Sayısal analizde sonuçları etkileyen çeşitli hata kaynakları vardır. Bunlar:

- **Yuvarlatma Hatası (Round-off Error):**

- Hesaplarda, rakamların hane sayısının sonlu tutulmasından kaynaklanan hatadır.
- Sayılarda noktadan sonraki bazı rakamların ihmal edilmesi sonucunda oluşan hatadır.
- İşlem sayısı arttıkça yayılır.
- Pi sayısı =  $\pi = 3,141592653897932846 \dots$



# Hata hesaplamasına örnek

$f(x) = e^x$  fonksiyonunun Taylor serisine açılımı aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu açılım ile herhangi bir  $x$  değeri için fonksiyonun değeri yaklaşık olarak hesaplanabilir:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

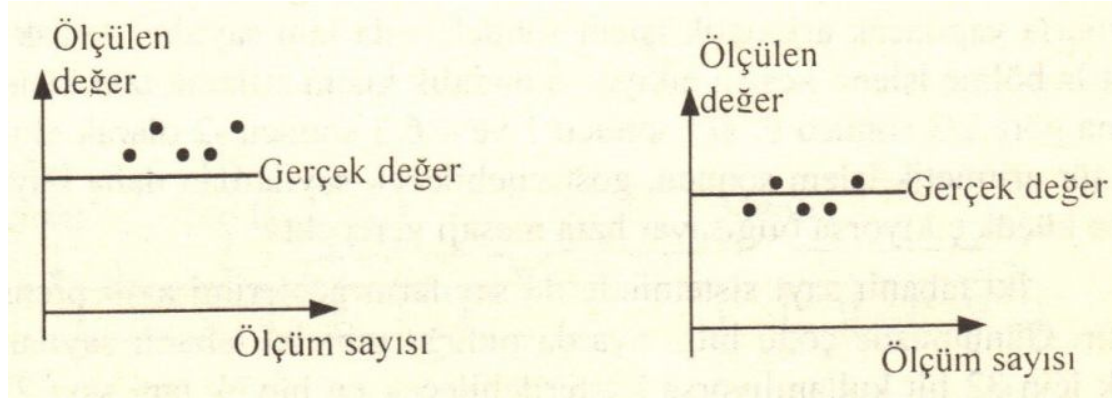
**$x = 5$**  için:

- Seride ilk dört terimin alınması ile oluşacak **kesme** hatasını, **mutlak** ve **bağıl** hata olarak hesaplayınız;
- İlk dört terimin alınması ile elde edilecek yaklaşık değer, virgülden sonra üç haneye yuvarlatıldığında, **toplam** hatayı mutlak ve bağıl hata olarak hesaplayınız.
- Gerçek değer, virgülden sonra üç haneye yuvarlatıldığında, **yuvarlatma** hatasını **mutlak** ve **bağıl** hata olarak bulunuz

# HATA KAYNAKLARI

Sayısal analizde sonuçları etkileyen çeşitli hata kaynakları vardır. Bunlar:

- **Giriş Verisindeki Hata (Ölçüm Hataları):** Yapılan ölçüm veya kullanılan ölçüm aletlerine bağlı olarak, ölçülen değerler belli bir doğruluğa ve belli bir hassasiyete sahip olacaktır. Ölçüm değerlerinin gerçek değere ne kadar yakın olduğunu **doğruluk**, belli bir fiziksel büyüklük için tekrarlanan ölçümlerin birbirine ne kadar yakın olduğuna ise **hassasiyet** denir.



Doğruluk

Hassasiyet

- **İnsan Hatası:** İnsanın kendisinden kaynaklanan, fiziksel veya matematiksel modelin oluşturulmasında, işlem yaparken veya program yazarken yapabileceği hatalardır.

## ÖRNEK

---

Bir matematikçi dairenin alanını analitik olarak  $A_D = \pi r^2$  bulmuştur.

- Sadece ikiz kenar üçgenlerin alanını hesaplayabilen bir bilgisayarla bu dairenin alanını  $\% \delta_a \leq 0.01$  hata ile bulabilecek bir algoritma oluşturun ve programını MATLAB programlama dilinde yazın.

# ÖRNEK

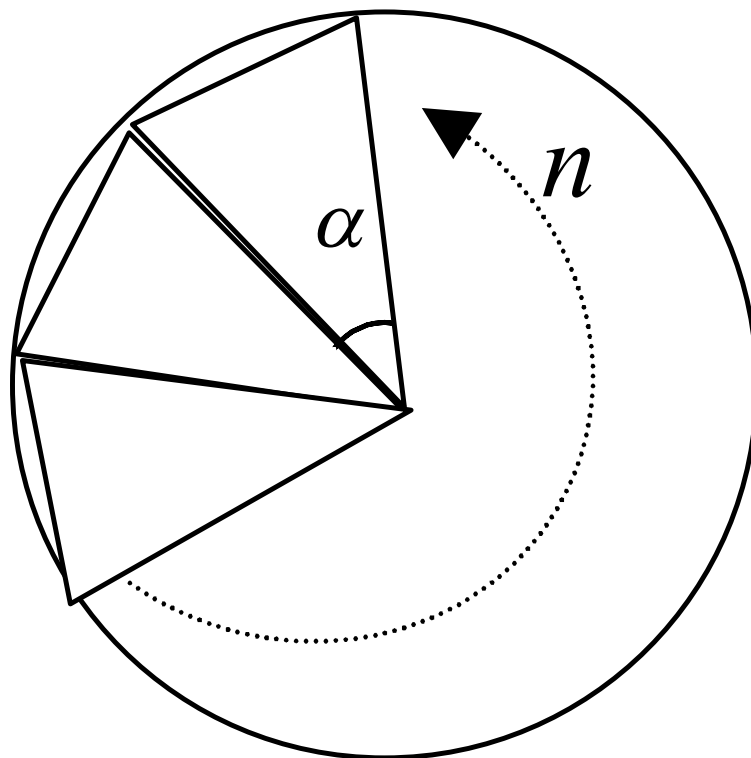
---

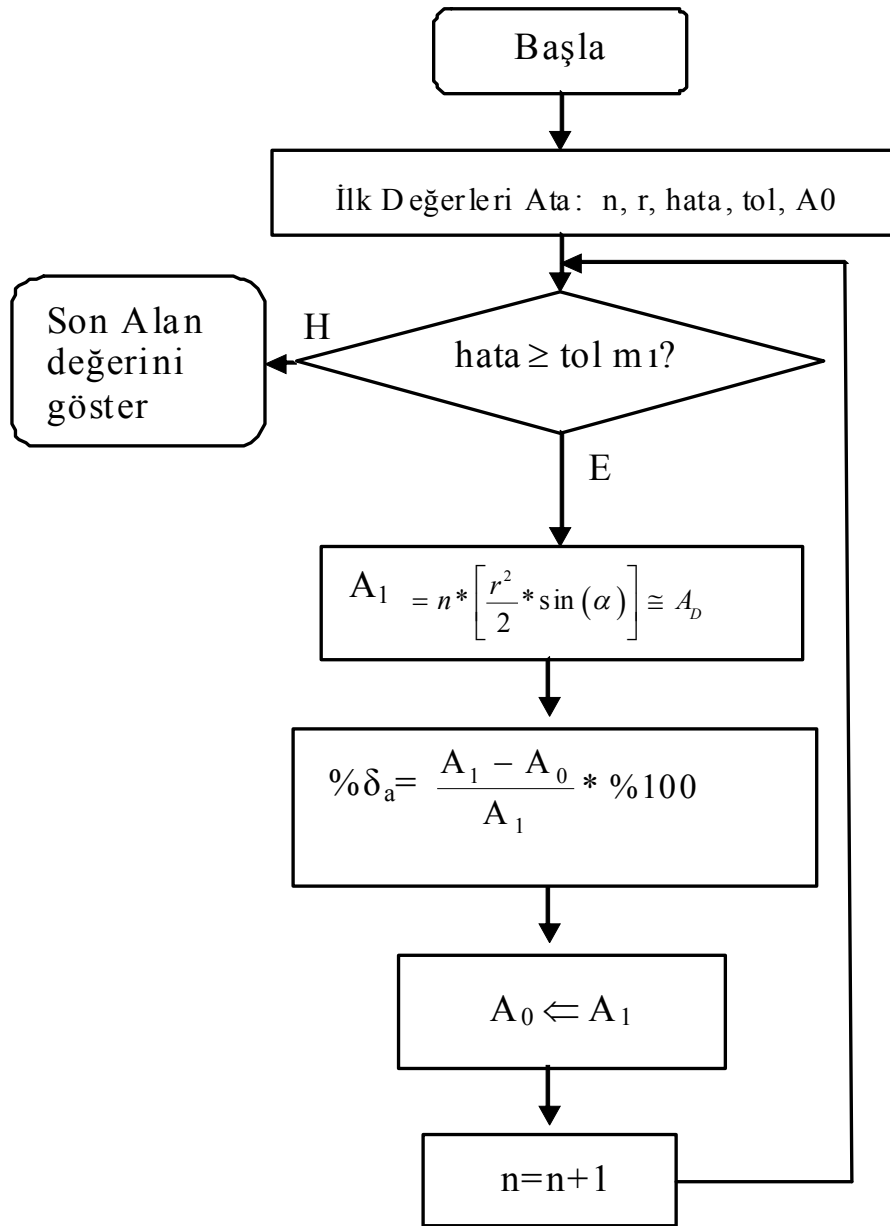
Bir matematikçi dairenin alanını analitik olarak  $A_D = \pi r^2$  bulmuştur.

- Sadece ikiz kenar üçgenlerin alanını hesaplayabilen bir bilgisayarla bu dairenin alanını  $\% \delta_a \leq 0.01$  hata ile bulabilecek bir algoritma oluşturun ve programını MATLAB programlama dilinde yazın.

Program, her adımda daireyi üçgenlerden oluşan  $n$  eşit parçaya bölsün, istenen doğruluk sağlanmadıkça  $n$ 'i 1 arttırsın ( $r=1$  cm olsun,  $n$ , 5'ten başlasın). Daireyi yaklaşık olarak oluşturacak  $n$  tane üçgenin alanı ;

$$n * A_{\text{üçgen}} = n * \left[ \frac{r^2}{2} * \sin(\alpha) \right] \cong A_D \qquad \alpha = \frac{2\pi}{n}$$





```

C:\Documents and Settings\asonda...
File Edit View Text Debug Breakpoints Web
Window Help

1 |
2 | clc; close all; clear all;
3 |
4 | n=6; hata=0.1; r=1; tol=0.01;
5 | Alan_gercek=(pi*r^2);
6 | A0=0;
7 |
8 | while hata>=tol
9 |     A1=n*(0.5*r^2*sin(2*pi/n));
10 |     hata=((A1-A0)/A1)*100;
11 |     A0=A1;
12 |     n=n+1;
13 | end
14 | Alan_gercek
15 | Hesaplanan_Alan=A1
16 | hata
17 | n

script Ln 1 Col 1
  
```

# KAYNAKLAR

---

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- Prof. Dr. Asaf Varol, Sayısal Analiz Ders Notları, Fırat Üniversitesi