SAYISAL ÇÖZÜMLEME

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

5. Hafta

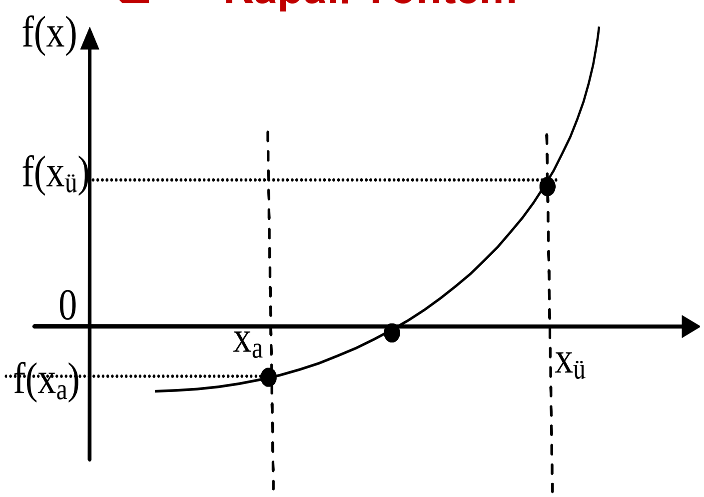
DENKLEM ÇÖZÜMLERİ (Devam)

İÇİNDEKİLER

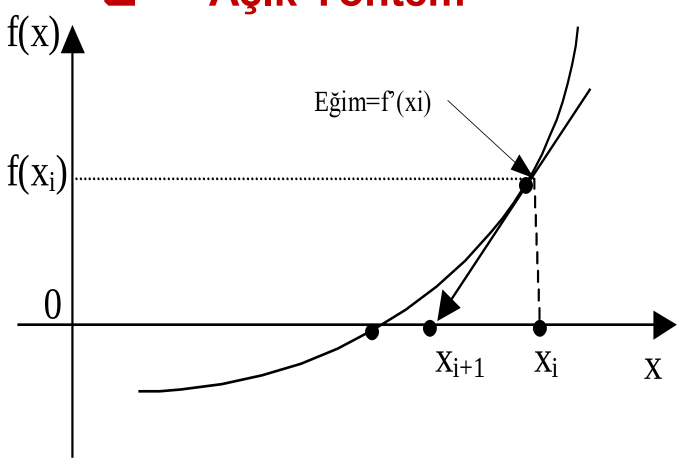
Denklem Çözümünde Açık Yöntemler

- **Bu yöntem, x'in yalnızca başlangıç değeri kullanılan ya da kökü kapsayan bir aralık kullanılması gerekmez.**
- **Açık yöntemler hızlı sonuç vermesine karşın, başlangıç değeri uygun seçilmediğinde ıraksayabilir.**
- **Kökü iki başlangıç değeri arasında kıskaca alma ($f(x_a).f(x_ü) < 0$) sorgulaması yok**
- ***Tüm açık yöntemler, kökün bulunması için matematiksel bir formül kullanır.***

Kapalı Yöntem



Açık Yöntem



Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Basit İterasyon Yöntemi

❶ f(x) fonksiyonu $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ formuna getirilir.

- **Örnek:** $f(x)= x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = x^2 + 3$

  $f(x)= \cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x + x$

- Bu eşitliğin anlamı $y=x$ doğrusu ile $y=g(x)$ fonksiyonunun kesişim noktasını bulmaktır.

❷ Bir x_0 başlangıç değeri seçilir,

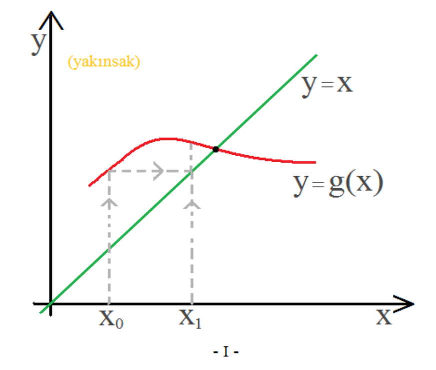
- x_0 , $| f'(x_0) | < 1$ şartını sağlar ise köke yakınsama olur.

❸ $x_{n+1} = g(x_n)$ formu ile iterasyon gerçekleştirilir.

- $x_1=g(x_0)$
- $x_2=g(x_1)$
- …
- $x_n=g(x_{n-1})$

❹ Durdurma şartı

- $| x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_s$ sağlanıncaya kadar
- Ya da belirli iterasyonda durdurulabilir



Basit İterasyon Yöntemi

❖ **Örnek :** **$f(x) = x^2 - 3x + 1$** denkleminin kökünü **mutlak hata $\delta_a = 0.1$** sınırlamasına göre Basit İterasyon yöntemini kullanarak $x_0 = 2$ değerinden başlayarak çözünüz.

❶ $$f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \sqrt{3x - 1}$$

❷ **$x_0 = 2$ ‘den başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$| x_{i+1} - x_i | < \varepsilon_s$ yada iterasyon

$$x_{kök} = 2.4835 \quad \Rightarrow \quad f(x_{kök}) = -0,2828$$

Basit İterasyon Yöntemi

- **Örnek:** $f(x)= 3e^{-0.5x} - x$ fonksiyonunun kökünü mutlak hata $\delta_a = 0.07$ sınırlamasına göre $x_0 = 8$ değerinden başlayarak hesaplayınız.
  - Her adım (iterasyon) için yeni x, g(x) ve hatayı hesaplayınız.

❶ $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ formuna getirilir.

- $x = 3e^{-0.5x}$

❷ $g(x) = 3e^{-0.5x}$ fonksiyonu $x_0 = 8$ başlangıç değeri ve $\varepsilon_a = 0.07$ hata sınırlamasına göre iterasyona tabi tutuluyor.

❸ 13. iterasyondan sonra $\varepsilon_a = 0.07$

hata ile kök değeri x=1.4 elde edilir.

(Yakınsak iterasyon)

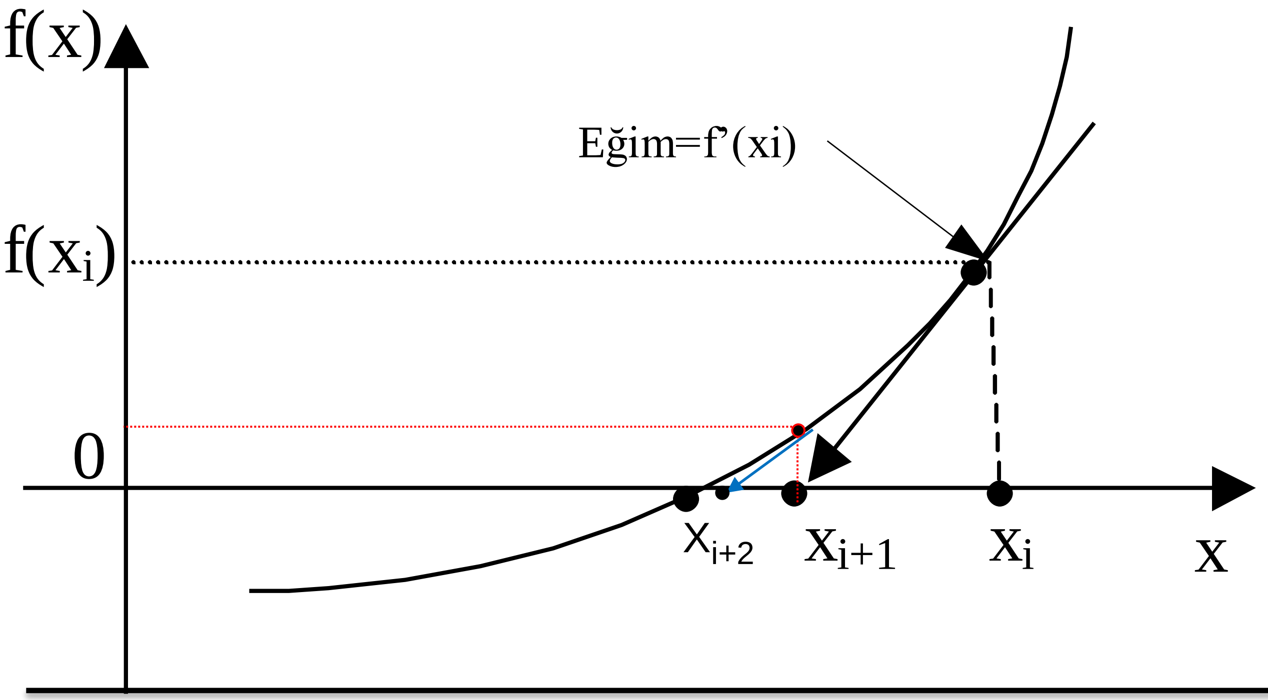
iterasyon sayısı	x	g(x)	$h=\|x_n-x_{n-1}\|$
1	**8**	0,054946917	7,945053083
2	0,054946917	2,918701514	2,863754597
3	2,918701514	0,697161304	2,221540209
4	0,697161304	2,117066992	1,419905688
5	2,117066992	1,040892786	1,076174206
6	1,040892786	1,782765652	0,741872867
7	1,782765652	1,230264839	0,552500813
8	1,230264839	1,621707926	0,391443087
9	1,621707926	1,333435008	0,288272918
10	1,333435008	1,540173057	0,206738049
11	1,540173057	1,388919019	0,151254038
12	1,388919019	1,498032798	0,109113779
13	1,498032798	1,418494205	**0,079538593**
14	1,418494205	1,476043484	

Basit İterasyon Yöntemi

❖ **Örnek :** **$f(x) = 3e^{-0.5x} - x$** fonksiyonunun kökünü mutlak hata $\delta_a = 0.07$ sınırlamasına göre $x_0 = 8$ değerinden başlayarak hesaplayan MATLAB programını Basit iterasyon yöntemine göre yazınız.

Newton-Raphson Yöntemi

- En çok kullanılan yöntemlerden biridir.
- Köke, teğetler ile yaklaşılır.
  - Başlangıç değerinin fonksiyonu kestiği noktadan, çizilen teğetin yatay ekseni kestiği yeni nokta başlangıç değeri ile değiştirilerek köke yaklaşmaya çalışmaktır.
  - Bir noktadaki türev, o noktadan geçen teğetin eğimine eşittir.



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

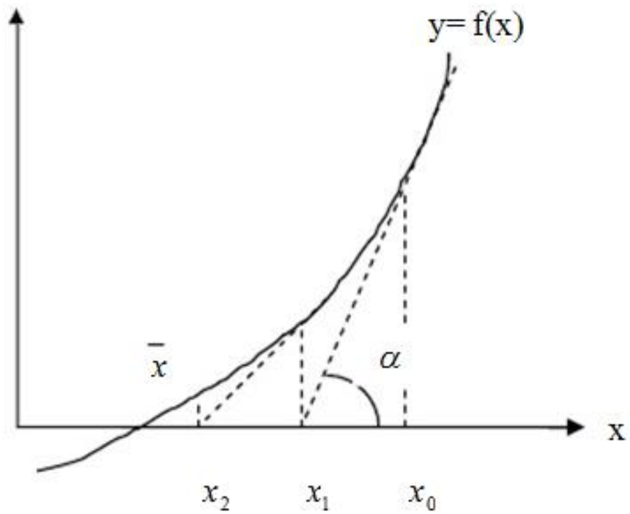
$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Newton-Raphson Yöntemi

❖ Yakınsaklık Koşulu

❶ Başlangıç noktasındaki türev ile köke yaklaşma

$$\mathrm{Tan}(\alpha_1) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} = f'(x_0)$$



❷ x_i yalnız bırakılırsa, ifade basit iterasyondaki gibi $x_{n+1} = g(x_n)$ formuna dönüştürülür

$$x_1 = \underbrace{x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}_{g(x_0)}$$

❸ Yakınsaklık koşulu,

$$|g'(x_0)| < 1$$

$$g'(x_0) = \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)' = \left|\frac{f''(x_0).f(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$$

Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek : f(x) = x^2 - 10** denklemini Newton-Raphson yöntemini kullanarak $x_0 = 3$ değerinden başlayarak, iki iterasyon için çözünüz?

❶ **f(x) = $x^2 - 10$ ⇒ f'(x) = 2x**

❷ **x_0 = 3 'ten başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$| x_{i+1} - x_i | < \varepsilon_s$ yada iterasyon

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek :** $\mathbf{f(x) = x^3 + 4x^2 - 3}$ denklemini Newton-Raphson yöntemini kullanarak $x_0 = 0.7$ değerinden başlayarak, üç iterasyon için çözünüz?

❶ $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 8x$

❷ **$x_0 = -0.7$ 'den başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon_s$ **yada iterasyon**

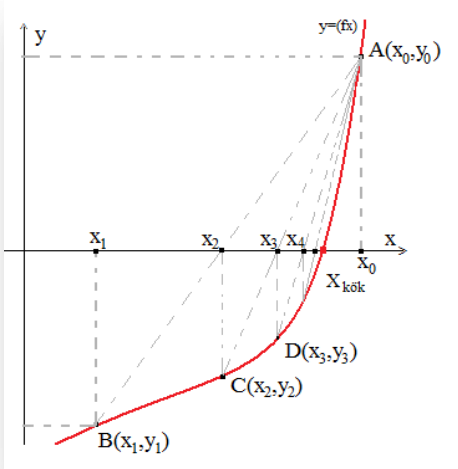
Newton-Raphson Yöntemi

- **Örnek :** **$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$** fonksiyonunun kökünü mutlak hata $\delta_a = 0.01$ sınırlamasına göre $x_0 = 0.7$ değerinden başlayarak hesaplayan MATLAB programını Newton-Raphson yöntemine göre yazınız.

Kiriş (Secant) Yöntemi

- Bazı fonksiyonların/denklemlerin türevini almak oldukça zor olabilir. Bu işlemler uzun zaman alabilir.
- Türev almadan çözüm için Kiriş (secant) yönteminden yararlanılır.
- Şekildeki A-B noktaları arasında, x_0 ve x_1 başlangıç değerleri kullanılarak türev alınmadan gerçek köke daha yakın bir kök bulunabilir.

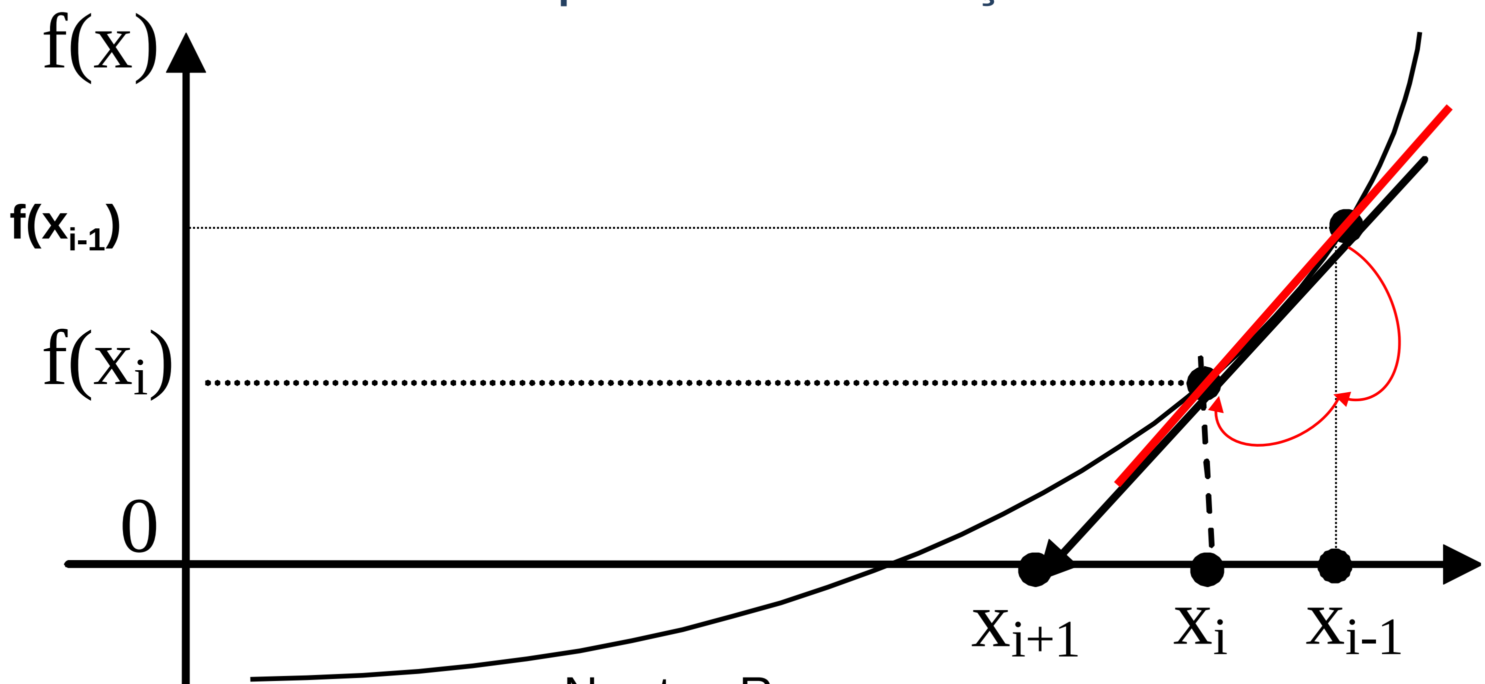
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} y_i$$



- Kirişin x eksenini kestiği nokta köke yakın noktadır.
- Her yeni iterasyonda yeni bir kiriş noktaları bulunarak kirişlerin x eksenini kestiği yeni noktalar ile köke yaklaşılır.
- Bu işlem diğer yöntemlerdeki gibi belirli bir hata sınırlamasına kadar tekrar edilir.

Kiriş (Secant) Yöntemi

Secant Yöntemi ile Newton-Raphson Yönteminin İlişkisi



Newton R

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

Kiriş (Secant) Yöntemi

Secant Yönteminin Regula-Falsi Yöntemi İle Karşılaştırılması

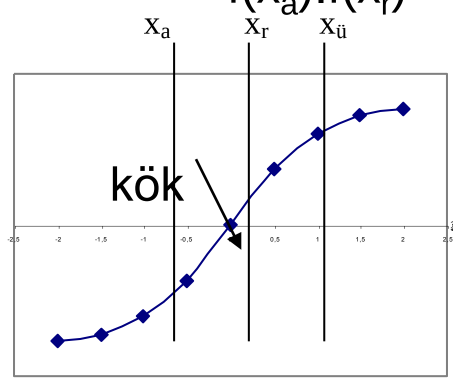
İkisinde de iki ilk tahmin değeri var

Regula Falsi

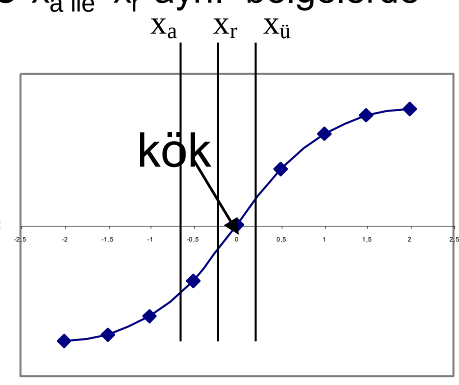
$$x_r = x_{ü} - \frac{f(x_{ü})(x_a - x_{ü})}{f(x_a) - f(x_{ü})}$$

Güncellenecek sınır

- $f(x_a).f(x_r) < 0$ x_a ile x_r farklı bölgelerde xü(yeni)=xr
- $f(x_a).f(x_r) > 0$ x_a ile x_r aynı bölgelerde xa(yeni)=xr



Kök, x_a, x_r arasında



Kök, x_r, $x_ü$ arasında

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Sekant

X_{i+1} X_i X_{i-1}

Kiriş (Secant) Yöntemi

❖ **Örnek :** **f(x) = e^{-x} - x** denkleminin köklerini [0,1] aralığında Secant Yöntemi ile çözünüz?

$f(0) = 1.0 \quad f(1) = -0.632\,120\,559 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$ olduğundan aralıkta kök vardır.

$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = f(x_1) = -0.632\,120\,559$

- $x_2 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1 = 1 - \dfrac{1-0}{-0.632120559 - 1}(-0.632120559) = 0.612\,699$,

$f(0.612\,699) = y_2 = -0.07\,081\,27$

- $x_3 = x_2 - \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = 0.612\,699 - \dfrac{(0.612\,699 - 1)}{(-0.07\,081\,27 + 0.632\,120\,)}(-0.07\,081\,27) = 0.563\,838$

$|x_3 - x_2| = |0.563\,838 - 0.612\,699| = 0.048\,861$

$f(0.563\,838\,) = y_3 = 0.00518297,$

- $x_4 = 0.567170 \qquad |x_4 - x_3| = |0.567170 - 0.563\,838\,| = 0.003\,332$
- $x_5 = 0.567143 \qquad |x_5 - x_4| = |0.567143 - 0.567170| = 2.7 \times 10^{-5}$
- $x_6 = 0.567143 \qquad |x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567143| = 0$

O halde verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 0.567143$ dir.

ÖDEV

- $f(x) = x^3 - x + 127$ denklemini $x_0 = 5$ değerinden başlayarak $\varepsilon_s = 0.00001$ mutlak ve yaklaşık hata sınırlamasına göre
  - Newton-Raphson
  - Basit iterasyon metotlarını kullanarak çözünüz?

KAYNAKLAR

- **Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları**
- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi.**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*” Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, “ Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları” Vipaş Yayıncılık**