SAYISAL ÇÖZÜMLEME

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

7. Hafta

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ – (Devam)

İÇİNDEKİLER

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümü

- **İteratif Yöntemler**
  - **Jacobi Yöntemi**
  - **Gauss-Siedel Yöntemi**

Yinelemeli Yöntemler

- Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman kolay olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir.

- İteratif ve yaklaşık çözümler daha önce anlatılan yerine koyma yöntemlerine alternatif oluştururlar.

- Yinelemeli (iteratif) yöntemler
  - Jacobi Yöntemi
  - Gauss-Siedel Yöntemi

Jacobi Yöntemi

- Toplam adımlarla yineleme yöntemi olarak ta bilinir.
- Örneğin iki bilinmeyenli bir denklem ele alalım.
  - $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = c_1$
  - $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = c_2$
- Denklemler tekrar düzenlenirse (bilinmeyenler yalnız bırakılırsa)
  - $x_1 = (c_1 - a_{12}\, x_2)/ a_{11} = f(x_1,x_2)$
  - $x_2 = (c_2 - a_{21}\, x_1)/ a_{22} = g(x_1,x_2)$
- Jacobi iterasyonu bilinmeyenler için bir tahmin ile başlar.
  - Çözüm için bir başlangıç x_1 ve x_2 değerleri seçilir. (yani x_0 vektörü)
    - Örneğin; $X_1=Ax_o + C$ ve sırasıyla $X_2=Ax_1 + C$
    - genellersek, $X_k=Ax_{k-1} + C$ ve X_k bilinmeyen vektör elemanları
    - $$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i \,, \qquad i = 1 : n$$
- Durdurma kriteri olarak ya iterasyon sayısı ya da hata sınırlaması kullanılır

$$\max_{i \le i \ge n} \frac{\left| x_i^{k} - x_i^{k-1} \right|}{x_i^{k}}$$

Örnek

Jacobi iterasyon metodu kullanarak aşağıdaki lineer denklem sistemini çözünüz

$$10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23$$
$$2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -9$$
$$-x_1 - x_2 + 5x_3 = 12$$

Çözüm Yolu: yeniden düzenleme

$$x_1 = (23 - 2x_2 - 3x_3)/10$$
$$x_2 = (-9 - 2x_1 - 3x_3)/(-10)$$
$$x_3 = (12 + x_1 + x_2)/5$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ve $x_3 = 0$. keyfi tahminlerle başlıyoruz ve iterasyon aşağıdaki sonuçları verir.

ITER	X_1	X_2	X_3	Hata normu, $E = \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^{new} - x_i^{old} \right\|$
0	0	0	0	---
1	2.300000	0.900000	2.400000	5.600000
2	1.400000	2.080000	3.040000	2.720000
3	0.972000	2.092000	3.096000	4.960001E-01
4	0.952800	2.023200	3.012800	1.712000E-01
5	0.991520	1.994400	2.995200	8.512014E-02
6	1.002560	1.996864	2.997184	1.548803E-02
7	1.001472	1.999667	2.999885	6.592035E-03
8	1.000101	2.000260	3.000228	2.306700E-03
9	0.9998797	2.000089	3.000072	5.483031E-04
10	0.9999606	1.999998	2.999994	2.506971E-04

Örnek

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = ?$$

- Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

Örnek

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875	0.4375	-0.0625	0.1875
4	0.1563	0.4063	-0.0938	0.1563
5	0.1719	0.4219	-0.0782	0.1719
6	0.1641	0.4141	-0.0860	0.1641
7	0.1680	0.4180	-0.0821	0.1680
8	0.1660	0.4160	-0.0840	0.1660
9	0.1670	0.4170	-0.0830	0.1670
10	0.1665	0.4165	-0.0835	0.1665
11	0.1668	0.4168	-0.0833	0.1667
12	0.1666	0.4166	-0.0834	0.1666
13	0.1667	0.4167	-0.0833	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

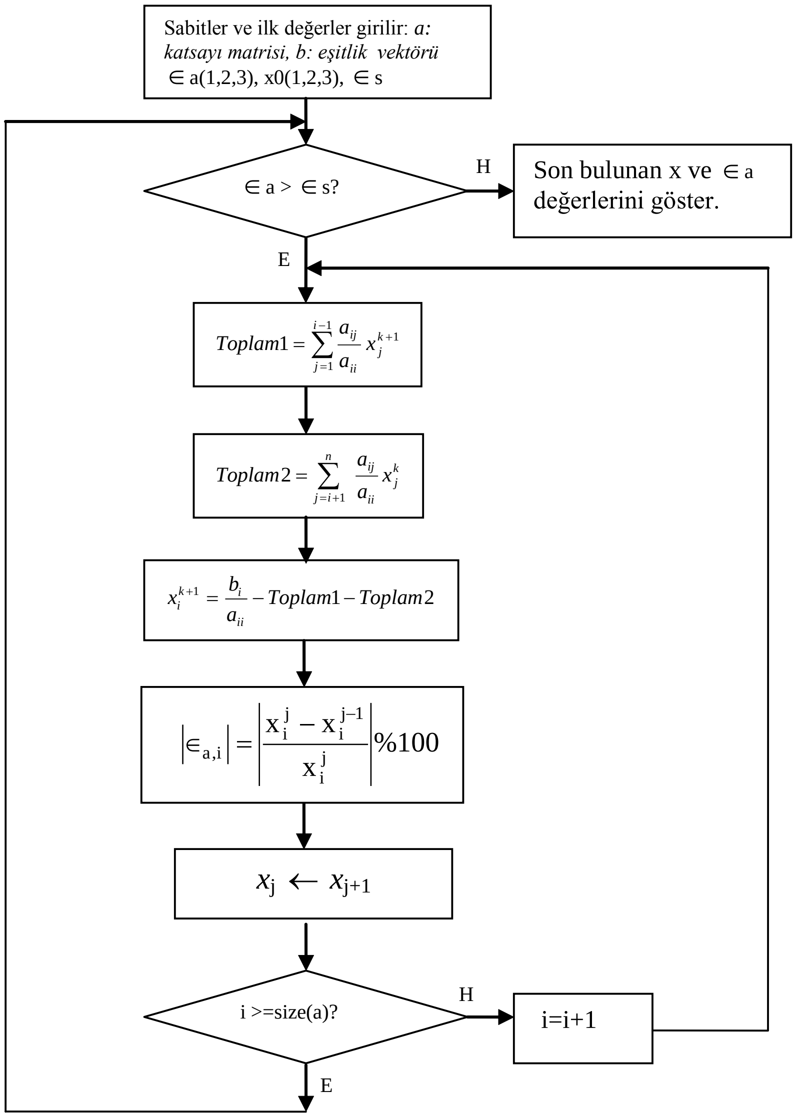
$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$. **iterasyon durduruldu**

İterasyon no

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Jacobi Yöntemi - MATLAB



Editor - C:\Users\asondas\Desktop\Sayısal Analiz\Sayısal Çözümleme\Örnekler\jaco...

```
clc; close all; clear all;

a=[4 1 1 0;1 4 0 1;1 0 4 1;0 1 1 4]
b=[1;2;0;1]

x0=[0;0;0;0]; %başlangıç değeri

[satir sutun]=size(a);
tol=0.0001;
hata=1;
iter=0;
while hata>tol
    iter=iter+1;
    for i=1:satir
        fark=0;
        for j=1:sutun
            if i==j
                fark=fark;
            else
                fark=fark+a(i,j)*x0(j);
            end
        end
        x(i,1)=(b(i)-fark)/a(i,i);
    end
    hata=max(abs(x-x0));
    x0=x;
end
iter
x
```

Gauss-Siedel Yöntemi

- En çok kullanılan iteratif yöntemdir.
- Değişkenlerin yeni değerleri, tüm değişkenler için bir iterasyonun tamamlanması beklenmeden, sonraki hesaplamalarda kullanılır.
- 3'e 3'lük bir denklem sistemi üzerinde Gauss-Siedel yönteminin çalışması.

Başlangıç koşulları: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$

$$a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3=b_1$$
$$a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3=b_2$$
$$a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3=b_3$$

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\overset{0}{x_2}-a_{13}\overset{0}{x_3}}{a_{11}}$$

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1-a_{23}\overset{0}{x_3}}{a_{22}}$$

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$$

n değişken için Gauss-Siedel formülü;

$$\boxed{x_i^{k+1}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k}}$$

Yakınsama koşulu $\quad |a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

Örnek

Aşağıdaki denklemi Gauss-Siedel yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz?

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad -0.1x_2 \quad -0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 \quad +7x_2 \quad -0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 \quad +0.2x_2 \quad +10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

❶ **Bilinmeyen *x* değerlerini diğerleri cinsinden bul**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

❷ **<u>İterasyon 0</u> için $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$**

❸ **<u>İterasyon 1</u>**

x_1 hesabı için, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

x_2 hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_3 = 0$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

x_3 hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_2 = -2.794524$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

Örnek

❹ **İterasyon 2**

x_1 hesabı için, x_2 = -2.794524, x_3 = 7.005610,

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$

x_2 hesabı için, x_1 = 2.990557, x_3 = 7.005610

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

x_3 hesabı için, x_1 = 2.990557, x_2 = -2.499625,

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Hatayı tahmin etmek için bilinmeyenlerin bağıl yaklaşım yüzde hatalarına bakılır. Örneğin x_1 için:

$|\in_{a,1}| = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| \%100 = \%12.5$ 'tir. x_2 ve x_3 için hata tahminleri

$$|\in_{a,2}| = \left|\frac{-2.499625 - 2.794524}{-2.499625}\right| \%100 = \%11.8$$

$$|\in_{a,3}| = \left|\frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291}\right| \%100 = \%0.076$$

Bu şekilde tüm hatalar belirlenen bir tolerans sınırı altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

Örnek

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = ?$$

Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini GAUSS-SIEDEL iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için x =x$^{(0)}$=[0 0 0 0]^T alalım.

Örnek

k	X_1	X_2	X_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.4375	-0.0625	0.1563
2	0.1563	0.4219	-0.0782	0.1641
3	0.1641	0.4180	-0.0821	0.1660
4	0.1660	0.4170	-0.0830	0.1665
5	0.1665	0.4168	-0.0833	0.1666
6	0.1666	0.4167	-0.0833	0.1667
7	0.1667	0.4167	-0.0834	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^2| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

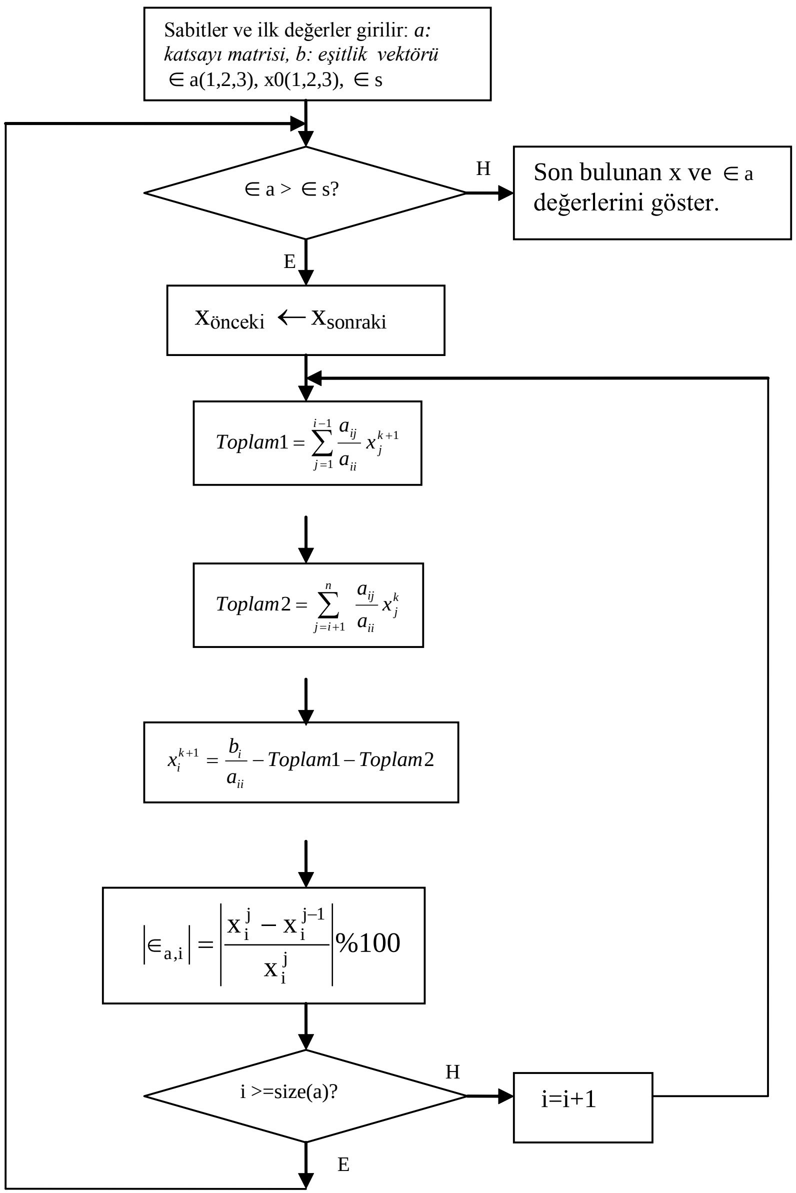
$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

İterasyon adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$

Gauss-Siedel Yöntemi - MATLAB




```matlab
clc; close all; clear all;

a=[4 1 1 0;1 4 0 1;1 0 4 1;0 1 1 4]
b=[1;2;0;1]

x0=[0;0;0;0]; %başlangıç değeri

[satir sutun]=size(a);
tol=0.0001;
hata=1;
iter=0;
while hata>tol
    x=x0;
    iter=iter+1;
    for i=1:satir
        fark=0;
        for j=1:sutun
            if i==j
                fark=fark;
            else
                fark=fark+a(i,j)*x(j);
            end
        end
        x(i,1)=(b(i)-fark)/a(i,i);
    end
    hata=max(abs(x-x0));
    x0=x;
end
iter
x
```

Jacobi ile Gauss-Siedel Yöntemlerinin karşılaştırılması

Birinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

İkinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(a)

Gauss-Siedel

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(b)

Jacobi

Her *x* değeri bulundukça bir sonraki *x* değerini belirleyen denklemde hemen hesaplanır.
Eğer çözüm yakınsıyorsa her zaman en iyi tahminler kullanılmış olur.

Her iterasyonda hesaplanan bütün *x* değerleri bir sonraki *x* değerleri bulunurken toplu olarak yerine koyulur.

Örnek

$$-2x + y = -1$$
$$2x - 3y = 5$$

denklem sistemini Jacobi ve Gauss-Siedel yöntemleri ile çözen MATLAB programlarını yazınız.

KAYNAKLAR

- **Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları**
- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi.**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*” Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, “ Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları” Vipaş Yayıncılık**