



Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal
Çözümü

Teğetler ve Kirişler

Yönteminin

Aynı zamanda uygulanması

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \quad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \quad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına x ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \quad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Lineer olmayan denkleminin çözümünü daha az hatalı bulmak ve yaklaşım hızını arttırmak için Teğetler ve Kirişler yöntemi aynı zamanda uygulanabilir. Bunun için:

Eğer

$$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (A)$$

Eğer

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (B)$$

olarak ele alınır.

$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow$	$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow$
$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$ $x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$ $x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

Diğer yaklaşımlar ise

$$\begin{aligned}
 x_{2n} &= x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \\
 x_{2n+1} &= \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}
 \end{aligned} \tag{C}$$

Şeklinde olacaktır.

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}$$

Yani, x_{n+1} noktasının geometrik olarak " **$f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(x_{2n-2}, f(x_{2n-2}))$ noktasında çizilen teğetin x - eksenini kesişme noktasıdır**" olduğu söylene bilir.

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

x_{2n+1} noktası, geometrik olarak $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde ele alınan $(x_{2n-1}, f(x_{2n-1}))$ ve $(x_{2n-2}, f(x_{2n-2}))$ noktalarından geçen doğrunun (kirişin) x eksenini ile kesişme noktasıdır.

$$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow (A), (C)$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow (B), (C)$$

İşlemler

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur.

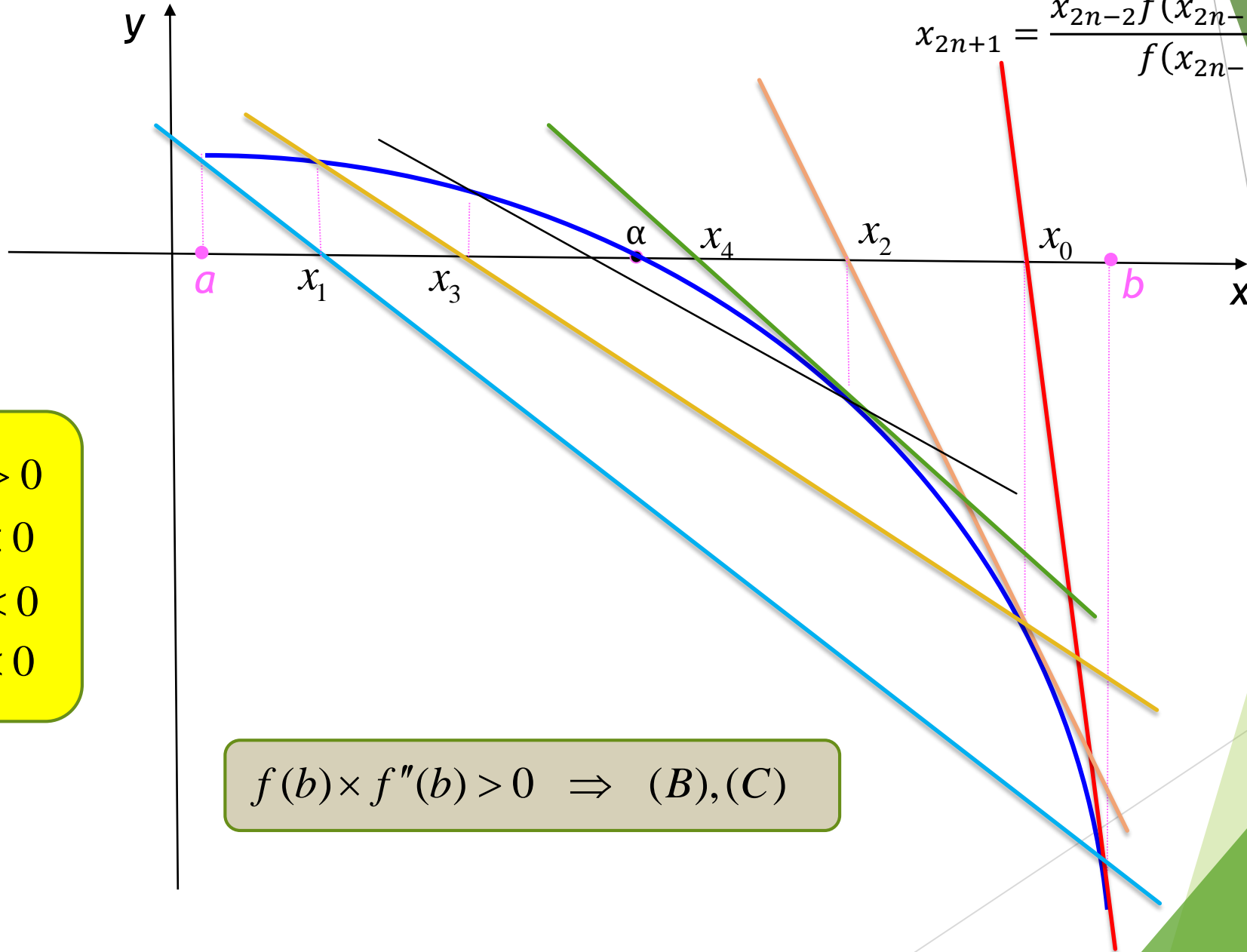
Teğetler ve kirişler yönteminin aynı zamanda uygulanmasının geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

TEĞETLER + KİRİŞLER

a)

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$



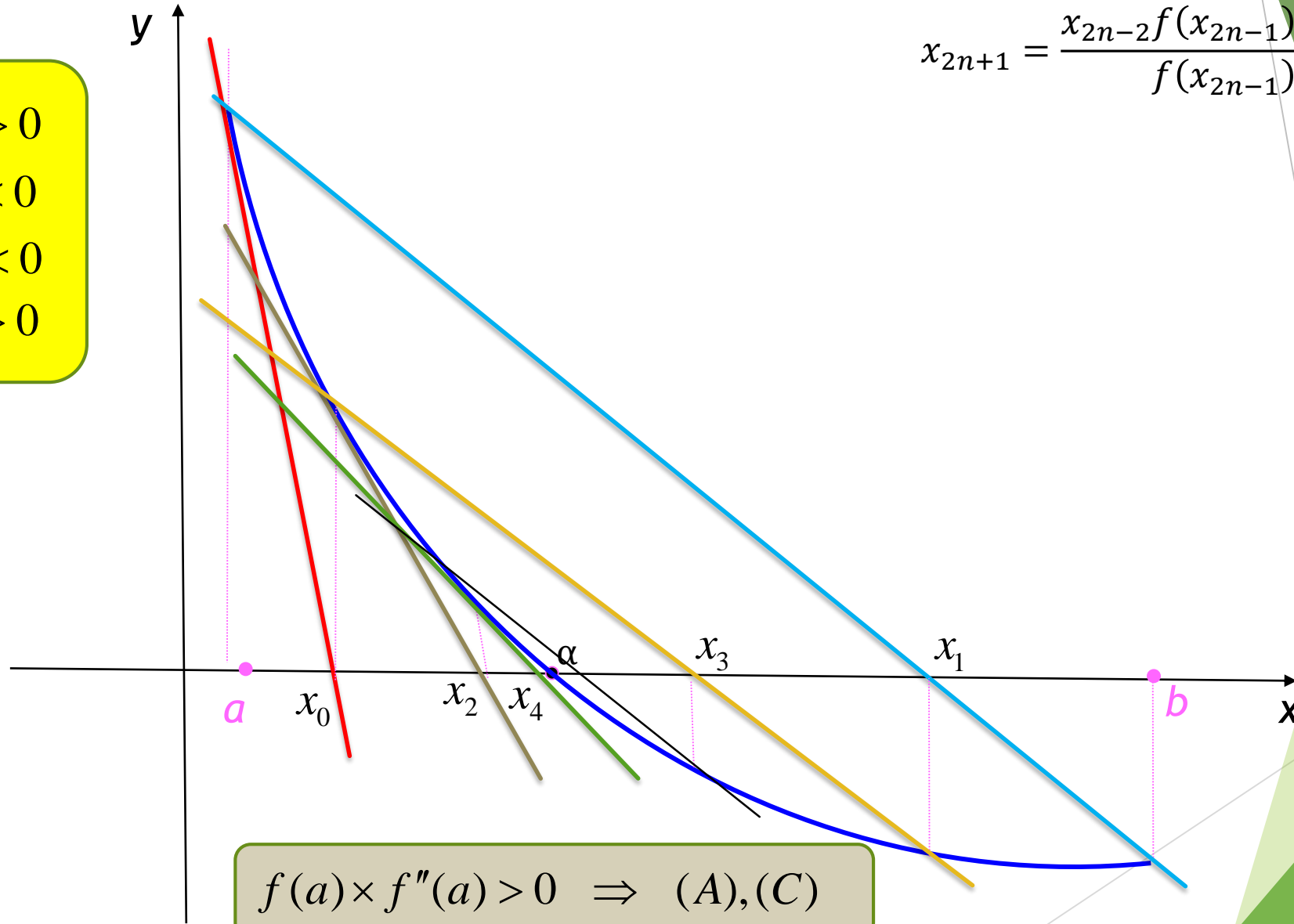
$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ f(b) &< 0 \\ f'(x) &< 0 \\ f''(x) &< 0 \end{aligned}$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow (B), (C)$$

TEĞETLER + KİRİŞLER

c)

$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ f(b) &< 0 \\ f'(x) &< 0 \\ f''(x) &> 0 \end{aligned}$$

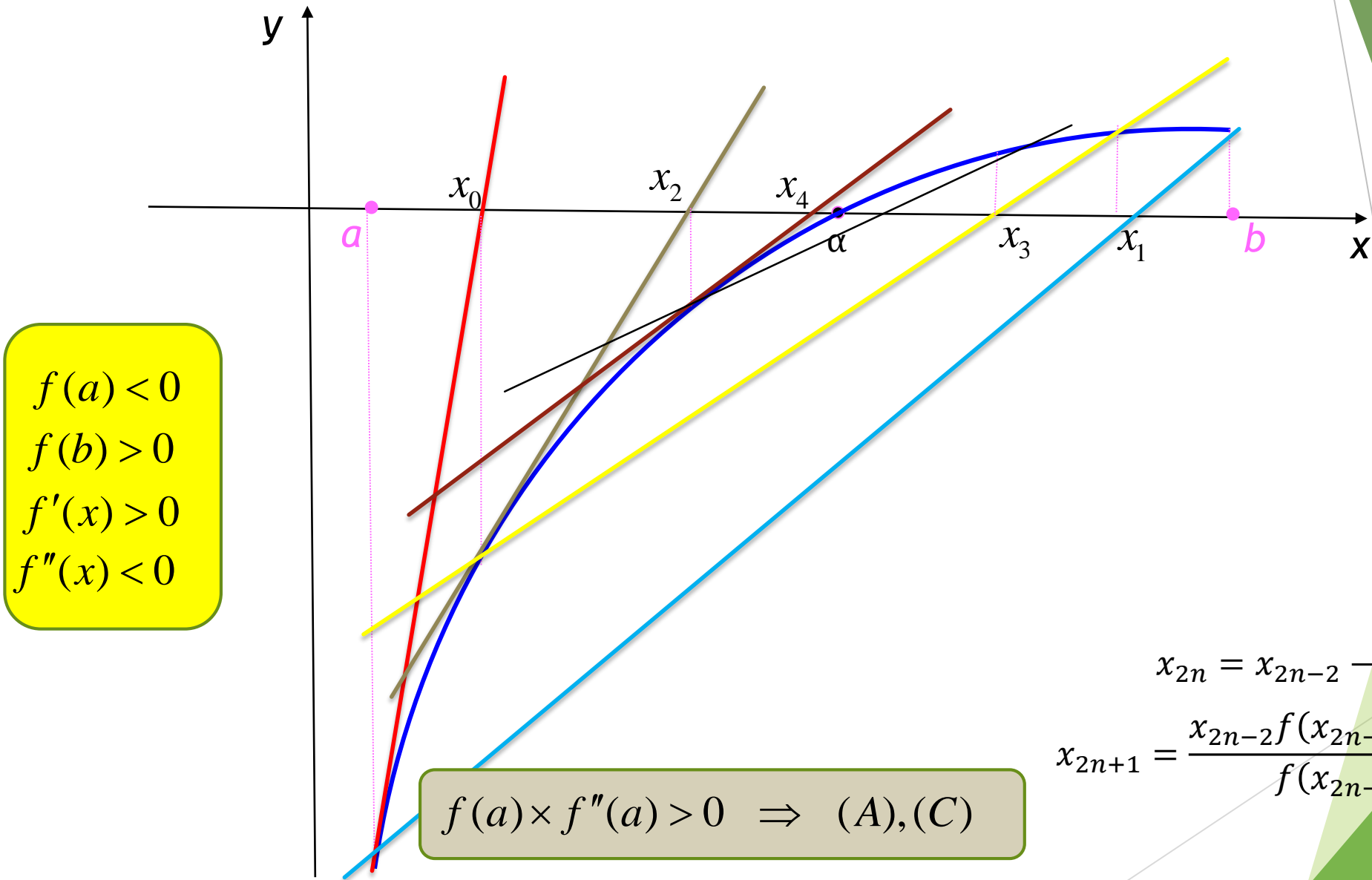


$$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow (A), (C)$$

$$\begin{aligned} x_{2n} &= x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \\ x_{2n+1} &= \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} \end{aligned}$$

TEĞETLER + KİRİŞLER

d)



$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

ÖRNEK: $x - \cos x = 0$ denkleminin çözümünü teğetler ve kirişler yöntemini aynı zamanda uygulamakla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile bulunuz.

$$x = \cos x$$

denklemin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - \cos x$ fonksiyonu için

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4397 > 0$$

$$f(0)f(1) < 0 \text{ elde edilir.}$$

Yani denklemin $[0, 1]$ aralığında çözümü vardır.

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f''(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$$

$$f''(0) = \cos 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4597 > 0$$

$$f''(1) = \cos 1 = 0.5403 > 0$$

$$f''(x) > 0 \quad (\text{iç bükümlü})$$

$$f(1)f''(1) > 0 \quad \text{olduğundan} \quad \Rightarrow \quad (B), (C)$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (\text{B})$$

$$x_0 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}, \quad x_1 = \frac{0 \times f(1) - 1 \times f(0)}{f(1) - f(0)}$$

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4597$$

$$f'(1) = 1 + \sin 1 = 1.8415$$

$$x_0 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{0.4597}{1.8415} = \mathbf{0.7504}$$

$$x_1 = \frac{0 \times f(1) - 1 \times f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{0 \times 0.4597 - 1 \times (-1)}{0.4597 - (-1)} = \mathbf{0.6851}$$

$$|x_1 - x_0| > \varepsilon$$

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_3 = \frac{x_0f(x_1) - x_1f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 0.7504$$

$$x_1 = 0.6851$$



$$f(x_0) = f(0.7504) = 0.7504 - \cos 0.7504 = 0.019$$

$$f(x_1) = f(0.6851) = 0.6851 - \cos 0.6851 = -0.0892$$

$$f'(x_0) = f'(0.7504) = 0.7504 + \sin 0.7504 = 1.6819$$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.7504 - \frac{f(0.7504)}{f'(0.7504)} = 0.7504 - \frac{0.019}{1.6819} = 0.7391$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_3 = \frac{x_0f(x_1) - x_1f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0.7504 \times f(0.6851) - 0.6851 \times f(0.7504)}{f(0.6851) - f(0.7504)}$$

$$= \frac{0.7504 \times (-0.0892) - 0.6851 \times 0.019}{-0.0892 - 0.019} = 0.7389$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0002 < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_4 = 0.7389$$