Lineer Cebir

Ters Matrisler

Ters matris

$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ tipindeki kare matrislerin kümesi olsun. Eğer $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ için

$$AB = BA = I_n$$

koşulunu sağlayan bir B matrisi varsa A tersinir bir matris olup A' nın tersi B' dir. Yani $B = A^{-1}$ dir.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Tersinir olmayan bir matris **tekil** (singüler) matristir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Buna göre $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ ve $C^{-1} = C$ dir.

Ters Matrislerin Temel Özellikleri

Eğer A tersinir ise A^{-1} de tersinirdir ve $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

Bir matrisin tersi varsa tektir. Yani $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ ise $B = C$ dir.
Bunu kolaylıkla gösterebiliriz:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Eğer A ve B kare matrisleri tersinir ise AB matrisi de tersinirdir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir. Bunu da kolaylıkla gösterebiliriz:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Köşegen matrisin tersi

Teorem: Köşegen bir matrisin tersinin olması için gerek ve yeter koşul köşegen elemanlarının sıfırdan faklı olmasıdır. Yani

$D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ve $d_i \neq 0$ ise

$D^{-1} = diag(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1})$ dir.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

2×2 matrisin tersi

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2×2 matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Teorem: A matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\det A \neq 0$ olmasıdır.

Eğer $\det A \neq 0$ ise

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Problem: $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ sistemini çözelim.

Bu sistemi matris formunda yazalım: $Ax = b$

Burada;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -1 \neq 0$$

olduğundan matrisin tersi vardır: O halde

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \implies (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$
$$\implies \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Buradan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Aşağıdaki $n \times n$ lineer denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Burada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Teorem: A matrisinin tersinir ise yukarıdaki sistemin tek çözümü vardır ve bu çözüm $x = A^{-1}b$ dir.

Ters matrisler yardımıyla elde edilen temel sonuçlar

Teorem1: Bir kare A matrisi için aşağıdakiler denktir.

i. A tersinirdir

ii. $x = 0, Ax = 0$ homojen denkleminin tek çözümüdür.

iii. A nın satır eşelon formu sıfır satırı içermez

iv. A nın indirgenmiş satır eşelon formu birim matristir.

Teorem2: Bir elemanter işlem sırası kare A matrisini birim matrise dönüştürüyorsa aynı işlem sırası birim matrisi A nın tersine dönüştürür.

Teorem3: Kare A ve B matrisleri için

$$BA = I \iff AB = I.$$

Bir kare matrisin satır eşelon formu

$$\begin{pmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \square \end{pmatrix}$$

Tersinir matris

$$\begin{pmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Tersinir olmayan matris

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin tersinir olup olmadığını belirlemek için öncelikle eşelon forma getirelim:

1. ve 2. satırları yer değiştirelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. satırın -3 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. satırın 2 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. satırı -0.5 ile çarpalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. satırın -3 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

3. satırı -0.4 ile çarpalım:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1.5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Şuan A nın tersinir olduğunu artık biliyoruz

3. satırın -1.5 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. satırın -1 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1} matrisini bulabilmek için biraz önce A ya uyguladığımız işlemleri sırasıyla birim matrise uygulayalım:

- 1. ve 2. satırları yer değiştir
- 1. satırın -3 katını 2. satıra ekle
- 1. satırın 2 katını 3. satıra ekle
- 2. satırı -0.5 ile çarp
- 2. satırın -3 katını 3. satıra ekle
- 3. satırı -0.4 ile çarp
- 3. satırın -1.5 katını 2. satıra ekle
- 3. satırın -1 katını 1. satıra ekle

Bu işlemleri kolaylıkla yapabilmek için A matrisini ve birim matrisi yan yana $(A|I)$ şeklinde yazarız. Daha sonra ikisine aynı anda bu işlemleri yaparız.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. ve 2. satırları yer değiştirelim:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. satırın -3 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. satırın 2 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

2. satırı -0.5 ile çarpalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

2. satırın -3 katını 3. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

3. satırı -0.4 ile çarpalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 1 & -0.4 \end{array}\right)$$

3. satırın -1.5 katını 2. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 1 & -0.4 \end{array}\right)$$

3. satırın -1 katını 1. satıra ekleyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 1 & -0.4 \end{array}\right)$$

Buradan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Yani

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu sonuç nasıl ortaya çıktı?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+3a_1 & b_2+3a_2 & b_3+3a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Önerme: Elemanter işlemler bir matrisin soldan belirli matrislerle çarpılmasıyla taklit edilebilir.

Bu sonuç nasıl ortaya çıktı?

Bir A matrisinin belirli sayıda elemanter işlem yardımıyla birim matrise dönüştürüldüğünü kabul edelim. O halde bu süreci matrisler yardımıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I,$$

Buradaki $E_1, E_2, \dots, E_k$ matrisleri elemanter işlemleri taklit eden matrislerdir.

Bu matrisleri birim matrise uygularsak aşağıdaki matrisi elde ediriz:

$$B = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1.$$

Böylece $BA = I$ olur ki bu da $A^{-1} = B$ anlamına gelir.