Bu kesimde, bir V vektör uzayının bir kümesi yardımıyla tanımlanan bir vektör uzayı yapısını incelemeye devam edeceğiz. Bu yapı V vektör uzayı yapısını tamamen belirler.

0.1 BAZ

Tanım 1. Bir V vektör uzayının bir $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ altkümesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse V nin bir **bazı** veya **tabanı** adını alır.

(a) S, V yi gerer **(b)** S lineer bağımsızdır.

Uyarı 1. Eğer $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ kümesi bir V vektör uzayının bazı ise, bu kümedeki her bir vektör birbirinden ve sıfır vektöründen farklıdır.

Örnek 1. $V = R^3$ olsun. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ kümesi R^3 için bir baz olup, bu baza R^3 ün **doğal** veya **standart bazı** adı verilir. R^n nin doğal bazını elde etmek için bu tanımın genelleştirilelim. R^n nin doğal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ biçiminde gösterilim. Burada

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i.satır$$

dır. Yani, $e_i, i.$satırı 1 ve diğer satırları 0 olan $n \times 1$ tipinde bir matristir.

R^3 için doğal baz çoğu kez

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde de gösterilir. Bu vektörler yardımıyla herhangi bir $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in R^3$ vektörü

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

biçiminde yazılır.

Örnek 2. $S = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ kümesinin P_2 vektör uzayı için bir baz olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bunun için S nin V yi gerdiğini ve lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. S nin V yi gerdiğini göstermek için V de herhangi bir vektör, yani bir $at^2 + bt + c$ polinomu alıp,

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) \\ &= a_1 t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanacak şekilde a_1, a_2, a_3 sabitlerini bulmalıyız. İki polinom sadece aynı dereceli t lerin katsayılarının eşit olması halinde özdeş olacağından

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$a_1 = a, a_2 = \frac{a+b-c}{2}, a_3 = \frac{c+b-a}{4}$$

olur. Böylece S, V vektör uzayını gerer.

Bu sonucu açıklamak için, $2t^2 + 6t + 13$ vektörünü gözönüne alalım. Burada $a = 2, b = 6$ ve $c = 13$ tür. Bu değerler a_1, a_2 ve a_3 için yukarıda verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$a_1 = 2, a_2 = -\frac{5}{2}, a_3 = \frac{17}{4}$$

bulunur. Bu sebepten

$$2t^2 + 6t + 13 = 2(t^2 + 1) - \frac{5}{2}(t - 1) + \frac{17}{4}(2t + 2)$$

dir. S nin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$$a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) = 0$$

bağıntısını ele alalım. Bu halde

$$a_1t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3) = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlikten sadece

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

olması halinde bütün t değerleri sağlanır. Bu homogen sistemin tek çözümü $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olup bu da S nin lineer bağımsız olmasını gerektirir. Böylece S, P_2 için bir bazdır. ■

$\{t^n, t^{n-1}, ..., t, 1\}$ vektör kümesi P_n için bir baz olup, bu baza P_n nin **doğal** veya

standart bazı adı verilir.

Örnek 3. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesinin R^4 uzayı için bir baz olduğunu gösteriniz.

Çözüm. S nin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$$

denklemini ele alarak, a_1, a_2, a_3, a_4 katsayılarını bulalım. v_1, v_2, v_3, v_4 değerleri bu denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 2a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

lineer sistemi elde edilir. Bu sistemin tek çözümü $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ dır. Bu da S nin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

S nin R^4 uzayını gerdiğini göstetmek için R^4 uzayında herhangi bir $v = [a \ b \ c \ d]$ vektörü alalım. Şimdi

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = v$$

olacak biçimdeki a_1, a_2, a_3, a_4 sabitlerini bulalım. Yukarıdaki eşitlikte v_1, v_2, v_3, v_4 ve v değerleri yerlerine yazılırsa elde edilen lineer denklem sisteminden a_1, a_2, a_3 ve a_4 için bir çözüm bulunur (Sağlayınız). Böylece S, R^4 uzayını gerer ve R^4 için bir bazdır.

Örnek 4. P_2 vektör uzayının, $c = a - b$ olmak üzere $at^2 + bt + c$ biçimindeki bütün vektörlerinin oluşturduğu $\mathbf{V}$ altuzayının bir bazını bulunuz.

Çözüm. **V** altuzayının her bir vektörü

$$at^2 + bt + a - b$$

biçiminde olup

$$a\left(t^2 + 1\right) + b\,(t - 1) = 0$$

olarak yazılabilir. Böylece $t^2 + 1$ ve $t - 1$ vektörleri V alt uzayını gerer. Üstelik, biri diğerinin bir katı olmadığından bu iki vektör lineer bağımsızdır. Lineer bağımsızlık

$$a_1\left(t^2 + 1\right) + a_2\,(t - 1) = 0$$

veya

$$t^2 a_1 + t a_2 + (a_1 - a_2) = 0$$

denklemi yazılarak da elde edilebilir. Bu denklem t nin bütün değerleri için sağlandığından $a_1 = 0$ olmak zorundadır. ■

Bir V vektör uzayının bir bazı olacak biçimde sonlu bir alt kümesi varsa, V ye **sonlu boyutludur** denir. V nin böyle sonlu bir alt kümesi yoksa V ye **sonsuz boyutlu vektör uzayı** adı verilir.

Şimdi sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir bazındaki vektör sayısı, farklı iki bazının karşılaştırılması ve bazlarının özellikleri hakkında bilgi edinebileceğimiz bazı sonuçlar vereceğiz. İlk olarak, $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ bir V vektör uzayının bir bazı ise, bu halde $c \neq 0$ iken $\{cv_1, v_2, ..., v_k\}$ kümesinin de V nin bir bazı olduğu gösterilebilir. Böylece sıfırdan farklı bir vektör uzayı için baz tek değildir.

Teorem 1. $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bir V vektör uzayının bir bazı ise, bu halde V nin her vektörü S nin elemanlarının bir lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilir.

Teorem 2. Bir V vektör uzayının sıfırdan farklı vektörlerinin bir kümesi $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve $W = SpS$ olsun. Bu halde S nin bir altkümesi W için bir bazdır.

1.İspat.

(a) S lineer bağımsız ise, bu halde W yi gerdiğinden W için bir bazdır.

(b) S lineer bağımlı ise, bu halde

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0 \tag{1}$$

dır. Burada $a_1, a_2, ..., a_n$ katsayılarının tamamı sıfır değildir. Böylece v_j vektörü, S de kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. Şimdi, S den v_j vektörü atıldığında elde edilen kümeyi S_1 ile gösterelim. Bu halde, $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ...v_n\}$ küme de W yi gerdiği sonucuna varılır.

S_1 lineer bağımsız ise, bu halde S_1 bir bazdır. S_1 lineer bağımlı ise, kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimi olan bir vektörü S_1 den çıkararak W yi geren yeni bir S_2 kümesi elde ederiz. Bu şekilde devam ederek, S sonlu bir küme olduğundan lineer bağımsız olan ve W yi geren S nin bir T altkümesi bulunur. T, W için bir bazdır.

2.İspat. $V = R^m$ veya $V = R_m$ olsun. S nin vektörleri olarak $m \times 1$ tipindeki matrisleri alıp, yukarıdaki (1) denklemini oluşturalım. Bu denklemden $a_1, a_2, ..., a_n$ $n-$bilinmeyenli homogen sistem elde edilir. Bu sistemin $m \times n$ tipinden A katsayılar matrisinin sütunları $v_1, v_2, ..., v_n$ dir. Şimdi, A matrisini $1 \leq r \leq m$ için B nin r satırı sıfırdan farklı olacak şekildeki satırca indirgenmiş eşelon formu olan B matrisine dönüştürelim. Genelliği bozmaksızın, B nin sıfırdan farklı r satırındaki ilk r tane 1 in , ilk r sütunda olduğunu kabul edelim. Böylece

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1\ r+1} & \cdots & b_{1\ n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2\ r+1} & \cdots & b_{2\ n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{3\ r+1} & \cdots & b_{3\ n} \\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r\ r+1} & \cdots & b_{r\ n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

yazabiliriz. B matrisindeki ilk 1 lere karşılık gelen $a_1, a_2, ..., a_r$ bilinmeyenleri diğer $a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_n$ bilinmeyenleri cinsinden çözülürse

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_{1\ r+1}a_{r+1} - b_{1\ r+2}a_{r+2} - ... - b_{1n}a_n \\ a_2 &= -b_{2\ r+1}a_{r+1} - b_{2\ r+2}a_{r+2} - ... - b_{2n}a_n \\ &\cdots \\ a_r &= -b_{r\ r+1}a_{r+1} - b_{r\ r+2}a_{r+2} - ... - b_{rn}a_n \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Burada $a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_n$ keyfi değerler olarak alınabilir. (2) eşitliklerinde

$$a_{r+1} = 1, a_{r+2} = 0, ..., a_n = 0$$

seçerek, bulunan değerler (1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-b_{1\ r+1}v_1 - b_{2\ r+1}v_2 - ... - b_{r\ r+1}v_r + v_{r+1} = 0$$

olur. Bu da v_{r+1} vektörünün $v_1, v_2, ..., v_r$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olması demektir. S den v_{r+1} vektörünün atılmasıyla elde edilen vektörler kümesinin W yi gerdiği bulunur. Bu şekilde devam edilirse $v_{r+2}, v_{r+3}, ..., v_n$ vektörlerinin $v_1, v_2, ..., v_r$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olduğu ve böylece $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ kümesinin W yi gerdiği gösterilmiş olur.

Şimdi $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. B matrisinde ilk 1 leri kapsamayan bütün sütunları atarak elde edilen B_D matrisini ele alalım. Bu durumda B_D matrisi, B nin ilk r sütunundan meydana gelir. Böylece

$$B_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

B den B_D yi elde etmek için atılanlara karşılık gelen sütunların A dan atılmasıyla bulunan matris A_D olsun. Bu durumda, A_D nin sütunlarının A nın ilk $v_1, v_2, ..., v_r$ sütunlarıdır. A ve B satırca denk olduklarından, A_D ve B_D matrisleri de satırca denktirler. Bu halde

$$A_D x = 0, B_D x = 0$$

homogen sistemleri denktir. Ayrıca $B_D x = 0$ homogen sisteminin, bu sisteme denk olarak

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_r y_r = 0 \tag{3}$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz. Burada $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$ ve $y_1, y_2, ..., y_r,$ B_D nin sütunlarıdır. B_D nin sütunları, R^m de lineer bağımsız vektörlerin bir kümesini oluşturduğundan (3) ün sadece aşikar (sıfır) çözümü vardır. Bu nedenle $A_D x = 0$ homogen sisteminin de sadece aşikar çözümü vardır. Böylece A_D nin sütunları, yani $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ lineer bağımsızdır. ■

Teorem 2 nin ilk ispatı, T, SpS nin bir bazı olacak biçimde, bir S kümesinin bir T altkümesini bulmak için basit bir yöntem verir. Bir V vektör uzayının sıfırdan farklı vektörlerinin bir kümesi $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olsun. T, $W = SpS$ nin bir bazı olacak biçimde, S nin bir T altkümesi aşağıdaki şekilde bulunabilir:

ADIM 1 (1) de verilen

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

denkleminden $a_1, a_2, ..., a_n$ bilinmeyenleri çözülür. Bu bilinmeyenlerin hepsi 0 (sıfır) ise, bu halde S lineer bağımsız olup W için bir bazdır.

ADIM 2 $a_1, a_2, ..., a_n$ katsayılarının tamamı 0 (sıfır) değilse, bu halde S lineer bağımlıdır. Böylece S de bir v_j vektörü kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimi olur. S den v_j vektörünün atılmasıyla elde edilen S_1 kümesi de W yi gerer.

ADIM 3 S yerine S_1 alınarak 1.Adım tekrarlanır. S nin vektörlerini atmaya devam ederek, W yi geren ve lineer bağımsız olan S nin bir T altkümesi elde edilir. Böylece, T, W için bir bazdır.

Her seferinde S den bir vektör attığımız için bir lineer denklem sistemi çözmek zorunda olduğumuz için bu yöntem oldukça sıkıcı olabilir. İleriki kesimde $W = SpS$ nin bir bazını bulmak için çok daha kullanışlı olan bir yöntem vereceğiz. Fakat bu baz S nin bir alt kümesi olmayabilir. $W = SpS$ nin bu bazı diğer bazları kadar kullanışlı olduğundan bir çok durumda bu sorun olmaz. Ancak $W = SpS$ nin bazının, S deki vektörlerin sağladığı bazı özelliklere sahip olmasının istendiği durumlar vardır. Böylece S nin bir alt kümesi olan bir baz bulmak isteriz. ■

$V = R^m$ veya $V = R_m$ ise Teorem 2 nin ikinci ispatı, S deki vektörlerden oluşan, $W = SpS$ nin bir bazını bulmak için çok kullanışlı bir yöntem verir.

$V = R^m$ veya $V = R_m$ ve V nin sıfırdan farklı vektörlerinin bir kümesi $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olsun. $W = SpS$ nin bir T bazını S nin bir altkümesi olarak elde etmek için şu yöntem verilebilir:

ADIM 1 Denklem (1) i

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

oluşturunuz.

ADIM 2 Denklem (1) in homogen sistemine karşılık gelen ilaveli matris oluşturulur ve bu matris satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürülür.

ADIM 3 İlk 1'leri bulunduran sütunlara karşılık gelen vektörler $W = SpS$ nin bir T bazını oluşturur.

Hatırlanacağı gibi, Teorem 2 nin 2.ispatında genelliği bozmaksızın, B nin sıfırdan farklı r satırındaki ilk r tane 1, ilk r sütunda kabul edilmişti. Böylece, eğer $S = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$ ve ilk 1 ler 1.ci, 3. cü ve 4.cü kolonlarda ise, bu halde $\{v_1, v_3, v_4\}$, SpS için bir bazdır.

Uyarı 2. Yukarıdaki yöntemin Adım 2 den ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürmek yeterlidir.

Örnek 5. $V = R^3$ ve $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ olsun. Burada $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $v_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dir. S, R^3 uzayını gerer (sağlayınız). Şimdi son verdiğimiz yöntem yardımıyla, R^3 için S nin bir altkümesi olacak biçimde bir baz bulalım.

ADIM 1

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0]$$

ADIM 2 Karşılıklı bileşenleri eşitleyerek

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_4 - a_5 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 - 2a_5 &= 0 \end{aligned}$$

homogen sistemini elde ederiz. İlaveli matrisin satırca indirgenmiş eşelon formu

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 \end{array}\right]$$

olur (sağlayınız).

ADIM 3 Satırdaki ilk 1ler, 1.ci, 2.ci ve 4.cü kolonlarda bulunduğundan $[v_1, v_2, v_4]$, R_3 için bir bazdır.

Teorem 3. Bir V vektör uzayının bir bazı $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve V nin lineer bağımsız vektörlerinin bir kümesi $T = \{w_1, w_2, ..., w_r\}$ ise, o zaman $r \leq n$ dir.

Sonuç 1. $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve $T = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ bir V vektör uzayının bazları ise, bu halde $m = n$ dir.

0.2 BOYUT

Bir V vektör uzayının birden fazla bazının olmasına rağmen, bütün bazlarındaki vektör sayısının aynı olduğunu gösterdik. Bu halde, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2. Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının bir bazındaki vektörlerin sayısına, V nin boyutu denir. V nin boyutu genellikle *boy* V biçiminde gösterilir. $\{0\}$ aşikar vektör uzayının boyutu sıfır olarak tanımlanır.

Örnek 6. $S = \{t^2, t, 1\}$ kümesi P_2 için bir baz olduğundan *boy* $P_2 = 3$ tür.

Örnek 7. R^3 vektör uzayının, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi tarafından gerilen bir altuzayı V olsun. Böylece V deki her vektör

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

biçimindedir. Burada a_1, a_2 ve a_3 keyfi reel sayılardır. S nin lineer bağımlı ve $v_3 =$

$v_1 + v_2$ olduğunu buluruz (gösteriniz). Böylece $S_1 = \{v_1, v_2\}$ kümesi de V uzayını gerer. S_1 lineer bağımsız olduğundan (gösteriniz) S_1, V nin bir bazıdır. Bu nedenle *boy* $V = 2$ dir.

Tanım 3. Bir V vektör uzayının bir altkümesi S olsun. S nin lineer bağımsız bir T altkümesini, S nin lineer bağımsız başka hiçbir altkümesi kapsamıyorsa, T ye S nin bir **maksimal bağımsız alt kümesi** denir.

Tanım 4. S bir V vektör uzayını geren vektörlerin bir kümesi olsun. S, V yi geren başka bir alt küme kapsamıyorsa, S ye V yi **geren bir minimal küme** denir.

Örnek 8. $V = R^3$ ve

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesini ele alalım.

$$\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}$$

kümeleri S nin maksimal bağımsız altkümeleridir.

Sonuç 2. $V, n-$boyutlu bir vektör uzayı ise, V nin maksimal bağımsız bir alt kümesinde n vektör vardır.

Sonuç 3. $V, n-$boyutlu bir vektör uzayı ise, V yi geren bir minimal kümede n vektör vardır.

Sonuç 4. $V, n-$boyutlu bir vektör uzayı ise, bu halde $m > n$ olmak üzere, V nin m vektör bulunduran herhangi bir altkümesi lineer bağımlıdır.

Sonuç 5. $V, n-$boyutlu bir vektör uzayı ise, bu halde $m < n$ olmak üzere, V nin m vektör bulunduran herhangi bir altkümesi V yi geremez.

Teorem 4. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve V nin lineer bağımsız bir altkümesi

S ise, bu halde V nin S yi kapsayan bir T bazı vardır.

Örnek 9. R^4 için

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerini bulunduran bir baz elde edelim.

Çözüm. Bunun için Teorem 4 den şu şekilde yararlanalım: İlk olarak, $\left\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}, e_4^{'}\right\}$, R^4 için doğal baz olsun. Burada

$$e_1^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $S = \left\{v_1, v_2, e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}, e_4^{'}\right\}$ kümesini alalım. $\left\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}, e_4^{'}\right\}$, R^4 ü gerdiğinden S de R^4 ü gerer. Şimdi R^4 ün bir bazını S nin bir altkümesi olarak elde etmek için Teorem 2 nin ikinci ispatından yararlanacağız. Böylece (1) denklemini

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 e_1^{'} + a_4 e_2^{'} + a_5 e_3^{'} + a_6 e_4^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_4 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \end{aligned}$$

homogen denklem sistemi bulunur. İlaveli matris satırca indirgenmiş eşelon forma dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir (gösteriniz). İlk l ler 1.ci, 2.ci, 3.cü ve 6.cı kolonlarda olduğundan $\left\{v_1, v_2, e_1^{'}, e_4^{'}\right\}$, R^4 iç

v_1, v_2 vektörlerini bulunduran bir bazdır sonucuna varılır. ■

W, sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir altuzayı ise, bu halde W nın da sonlu boyutlu olduğu ve $boyW \leq boyV$ sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Daha önce tanımlandığı gibi, bir V vektör uzayının verilen bir S altkümesi, V yi gerer ve lineer bağımsız ise V nin bir bazıdır. Ancak, ek olarak V nin boyutunun n olduğu verilirse, baz için iki şarttan sadece birinin sağlanması yeterlidir. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 5. $V, n-$ boyutlu bir vektör uzayı olsun.

(a) $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, V$ nin lineer bağımsız bir altkümesi ise, bu halde S, V nin bir bazıdır.

(b) $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, V$ yi gererse, bu halde S, V nin bir bazıdır.

Örnek 10. Örnek 5 de, $boyR^3 = 3$ ve S kümesinde beş vektör olduğundan, Teorem 5 gereğince S, R^3 için bir baz değildir sonucu elde edilir. Örnek 3 de, $boyR^4 = 4$ ve S kümesinde dört vektör olduğundan, S, R^4 için bir baz olabilir. S lineer bağımsız veya R^4 ü gererse R^4 ün bir bazıdır, aksi halde baz değildir. Teorem 5 deki iki şarttan sadece birini kontrol etmek yeterlidir.

Teorem 6. V vektör uzayını geren sonlu bir altkümesi S olsun. S nin maksimal bağımsız bir T altkümesi V nin bir bazıdır.