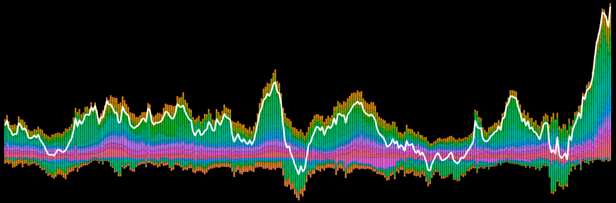
Dynare et la résolution des modèles RBC déterministes

Chapitre 2 - Modéle décentralisé à deux agents : ménage et firme



Novembre 2025

Maxime Bouter - cours master 2 - EIED - UPPA

Le modèle avec offre de travail exogène

Le modèle décentralisé

Le modèle décentralisé et sensiblement identique au modèle de croissance qui est généralement augmenté en introduisant le marché du travail. Contrairement au modèle de croissance où aucun prix n'apparaissait de manière explicite, dans cette version les prix vont apurer les marchés.
Il existe deux manières d'exprimer ce modèle:

- Soit les ménages épargnent et les firmes vont investir dans le capital, dans ce cas de figure, les entreprises sont propriétaires du capital
- Soit on considère que les ménages sont propriétaires du capital comme dans le modèle de croissance.

En CPP, les deux méthodes aboutissent au même résultat. Cependant la première est plus complexe du fait de la présence de deux fonctions d'Euler. Nous privilégierions donc la deuxième option.

Le programme du ménage

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1} \tag{1}$$

Le Lagrangien associé au programme du ménage est :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t) + \lambda_t \left(\frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} - K_t + (1-\delta) K_{t-1} \right) \tag{2}$$

Les CPO:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \iff U'(C_t) = \lambda_t \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \iff \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left(\dfrac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff \dfrac{W_t}{P_t} L_t + \dfrac{R_t}{P_t} K_{t-1} = C_t + I_t \end{cases} \tag{3}$$

La condition de transversalité:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0 \tag{4}$$

Soit la fonction d'utilité CRRA

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad \Rightarrow U'(C_t) = C_t^{-\sigma}, \quad \sigma > 1 \tag{5}$$

En utilisant ce résultat dans la CPO pour le capital physique K_t, on obtient notre équation d'Euler:

$$C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \tag{6}$$

Le programme de la firme représentative

Soit Π_t, la fonction de profit de la firme.
Le programme de la firme consiste à choisir les quantités de facteur de production qui permettent de maximiser les profits, ou de manière contraire de minimiser ses coûts sous sa contrainte de production
Dans notre cas de figure, on suppose, que la firme adresse une demande de travail L_t et une demande de capital K_t aux ménages qui eux, en tant que propriétaires du capital et du travail vont offrir ces facteurs de production sur les marchés correspondants.
En supposant une fonction de production Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{7}$$

A chaque période, le profit de la firme s'exprime:

$$\Pi_t = P_t Y_T - W_t L_t - R_t K_{t-1}$$

En remplaçant Y_t par son expression dans la fonction de profit et en dérivant par rapport aux variables de contrôles de la firme $\{K_{t-1}, L_t\}_{t=0}^{\infty}$, on obtient les CPO pour le programme de la firme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = 0 \iff \alpha \dfrac{Y_t}{K_{t-1}} = \dfrac{R_t}{P_t} \\ \dfrac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \iff (1-\alpha)\dfrac{Y_t}{L_t} = \dfrac{W_t}{P_t} \end{cases} \tag{8}$$

Le modèle

Nous avons 8 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t\}_{t=0}^{\infty}$ et deux variables exogènes $\{A_t, \bar{L}_t^S\}_{t=0}^{\infty}$. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut 8 équations. Nous réduisons la dimension du problème en choisissant le prix du bien final comme nuémraire $P_t = 1$, souvenez-vous de la loi de Walras, dans une économie où $N-1$ marchés sont à l'équilibre, alors le N^{me} marché est lui aussi équilibré. Nous pouvons donc réduire le modèle à 7 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$, il nous faut donc 7 équations :

$$\left\{\begin{array}{c} C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma}\left(R_{t+1} + 1 - \delta\right) \\ I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1} \\ Y_t = C_t + I_t \\ Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = R_t \\ (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = W_t \end{array}\right.$$

La condition d'équilibre sur les marchés emplois-ressources est obtenue en remplaçant les revenus du travail et du capital par les CPO de la firme. Nous obtenons donc un système de 6 équations pour 7 inconnues, il nous faut donc une dernière équation. Souvenez-vous, nous avons supposé que le ménage offrait de manière exogène son travail aux firmes, nous avons donc :

$$L_t = \bar{L}_t^S \tag{9}$$

Équilibre stationnaire:

$$
\begin{cases}
\bar{R} = \dfrac{1}{\beta} - 1 + \delta \\
\bar{Y} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\
\bar{K} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\
\bar{I} = \delta \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\
\bar{C} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{L}^S - \delta \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\
\bar{W} = (1-\alpha) \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{cases}
\tag{10}
$$

Implémentation dans Dynare

Afin d'éviter d'avoir à calculer et de rentrer l'équilibre stationnaire à la main lorsque :

- une solution analytique existe
- on veut tester rapidement les conséquences d'un paramètre sur le modèle ou que l'on veut faire des boucles sur un ou plusieurs paramètres

Il est fortement recommandé d'utiliser la fonction `steady_state_model` dans Dynare au lieu de `initval`

Implémentation dans Dynare:

Au lieu d'implémenter l'initialisation de l'algorithme de Newton

6ème block: l'équilibre stationnaire:

```
initval;
k = 8.7;
c = 1.82;
i = 0.2175;
y = 2.94;
A = 1;
end;
steady;
```

6ème block: l'équilibre stationnaire:

```
initval;
A = A;
L_bar = 1;
end;
steady_state_model;
l = l_bar;
r = 1/bet - 1 + delt;
y_over_k = r/alf;
y = A^(1/(1-alf))*(alf/r)^(alf/(1-alf))*l;
invest = delt*k;
c = y - invest;
w = (1-alf)*y/l;
end;
steady;
```

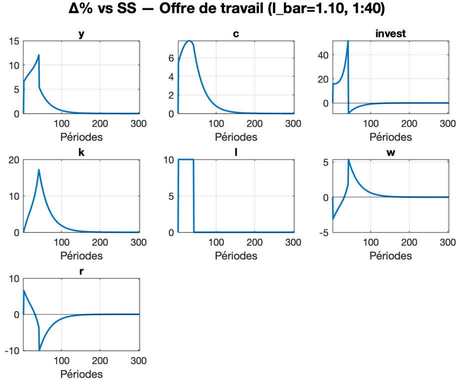
On remplace le bloc de gauche par celui de droite
Remarquez la capacité de Dynare à pouvoir utiliser des variables auxilaires.

IRF liées à une hausse de 10% de l'offre de travail

Choc : $\bar{l}_t = 1.1$ sur $t = 1:40$ (travail exogène)

Mécanismes

- **Offre de facteur** $\uparrow \Rightarrow y_t$ augmente (plus de travail disponible pour le même stock de capital k_{t-1}).
- **Travail plus abondant** $\Rightarrow$ salaire réel $w_t \downarrow$ au début.
- **Capital relativement rare** $\Rightarrow$ rendement du capital $r_t \uparrow$.
- **Euler** : $r_t \uparrow \Rightarrow$ investissement $i_t \uparrow \Rightarrow k_t \uparrow$ (progressif).
- Le capital devenant relativement moins rare / travail -> hausse du salaire réel
- Une fois le choc dissipé en $t = 40$, l'offre de travail baisse immédiatement, la production baisse
- L'investissement chute immédiatement, l'économie est trop "capitalistique" et vit sur le capital qui tend à se déprécier
- le capital se fait plus rare, le salaire baisse et le taux d'intérêt augmente



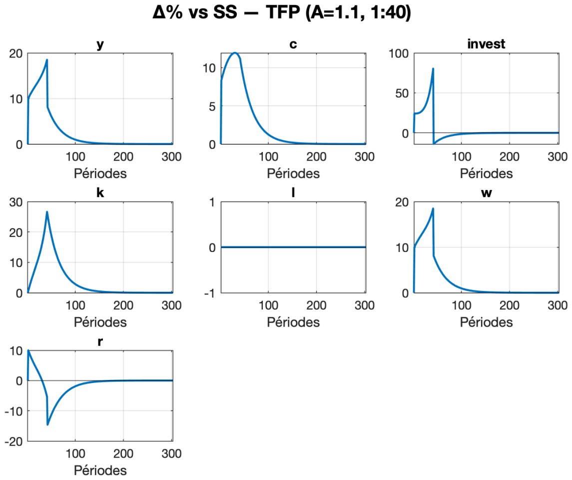
Simulation Dynare, modèle RBC (capital, travail exogène, PF), choc l_bar $= 1.10$ sur 40 périodes.

IRF liées à une hausse de 10% de la productivité

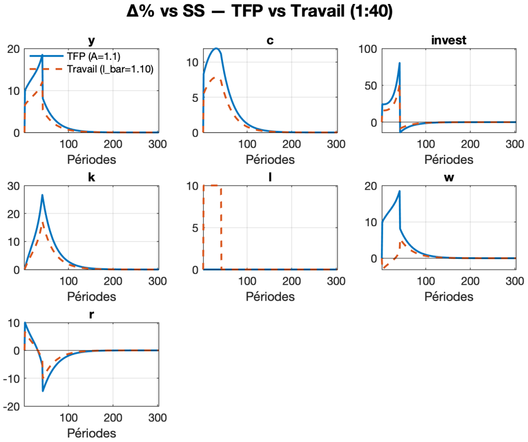
Choc : $A_t = 1.10$ sur $t = 1{:}40$ (TFP)

Mécanismes

- **Produit marginal** du capital & du travail $\uparrow \Rightarrow y_t$ augmente immédiatement.
- **Prix des facteurs** : $w_t \uparrow$ (travail plus productif), $r_t \uparrow$ (capital mieux rémunéré).
- **Contrainte ressources** : le supplément de y_t finance à la fois $c_t \uparrow$ et $i_t \uparrow$.
- **Euler** : $r_{t+1} \uparrow \Rightarrow i_t \uparrow \Rightarrow k_t \uparrow$ (accumulation graduelle).
- À la fin du choc ($A_t \to 1$) : y_t redescend mais le capital restant entretient la production.



IRF comparées : choc de TFP vs choc d'offre de travail



Simulation Dynare — même horizon (1:40), chocs de même amplitude (+10%) : TFP (A_t) vs travail ($\bar{l}_t$).

Modèle RBC avec offre de travail endogène

Le modèle avec offre de travail endogène

Jusqu'à présent on raisonnait en supposant que l'offre de travail était exogène.
L'objectif est de modifier la fonction d'utilité du ménage pour introduire une offre de travail endogène.
Le ménage va ainsi choisir l'offre de travail en faisant un arbitrage entre son temps de loisir et son temps de travail.
Ainsi, il va choisir lors de la résolution de son programme, les quantités $\{C_t, L_t, K_t\}$ qui maximisent son utilité.

Le programme du ménage

Soit $U(C_t, L_t)$ la fonction d'utilité avec ses propriétés usuelles:

- $U_c(.) > 0$
- $U_{cc}(.) < 0$,
- $U_L(.) < 0$
- $U_{LL}(.) < 0$

$$\max_{\{C_t, K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, L_t) \tag{11}$$

Le ménage est contraint par son budget:

$$C_t + I_t = \frac{W_t}{P_t} L_T + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \tag{12}$$

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1 - \delta) K_{t-1} \tag{13}$$

Le Lagrangien associé au programme du ménage est :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) + \lambda_t \left(\frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} - K_t + (1-\delta) K_{t-1} \right) \tag{14}$$

Les CPO:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \iff \dfrac{\partial U(C_t, L_t)}{\partial C_t} = \lambda_t \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \iff \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left(\dfrac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = 0 \iff \dfrac{U(C_t, L_t)}{\partial L_t} = \lambda_t \dfrac{W_t}{P_t} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff \dfrac{W_t}{P_t} L_t + \dfrac{R_t}{P_t} K_{t-1} = C_t + I_t \end{cases} \tag{15}$$

La condition de transversalité:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0 \tag{16}$$

La fontion d'utilité

King Plosser et Rebelo (1988) ont montré que, pour que la fonction d'utilité soit compatbile avec un BGP (sentier de croissance équilibré), elle doit prendre la forme

$$U(c_t, Lt) = \frac{\left(c_t^{\nu}\left(1 - L_t\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \quad \sigma > 1, \quad \nu \in (0, 1) \tag{17}$$

Où le paramètre ν correspond au poids de la consommation dans la focntion de l'utilité, et $1 - \nu$ le poids du travail en terme de désutilité. Et pouvait prendre une forme additive :

$$U(c_t, Lt) = \ln C_t + \Xi \ln\left(1 - L_t\right)$$

Correspondant au cas critique de la CRRA quand $\sigma = 1$. Cette version plus simple que la forme multiplicative ne sera pas abordée par la suite.

Fonction d'utilité et travail endogène

Les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ses deux arguments sont :

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = \nu \left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \tag{18}$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial L_t} = -\left(1-\nu\right) \left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} \left(1 - L_t\right)^{-1} \tag{19}$$

En utilisant le résultat de la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à la consommation dans la CPO pour le capital physique K_t, on obtient notre équation d'Euler:

$$\left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} = \beta \left(c_{t+1}^{\nu} \left(1 - L_{t+1}\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \tag{20}$$

En utilisant les deux dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ces deux arguments dans la CPO pour l'offre de travail, on obtient l'arbitrage entre consommation et travail:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = 0 \iff \frac{\nu - 1}{\nu} P_t C_t = W_t \left(1 - L_t\right) \tag{21}$$

L'interprétation économique de cette relation suppose que le ménage est prêt à sacrifier de l'utilité en termes de consommation pour bénéficier d'une unité d'utilité supplémentaire liée à du temps de loisir supplémentaire et est égale au salaire réel.

Le modèle avec offre de travail endogène

Le programme de la firme étant strictement le même, nous omettons volontairement cette partie.
Nous avons 8 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t\}_{t=0}^{\infty}$ et une variable exogène $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut 8 équations. Nous réduisons la dimension du problème en choisissant le prix du bien final comme nuémraire $P_t = 1$ Nous pouvons donc réduire le modèle à 7 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$, il nous faut donc 7 équations :

$$
\begin{cases}
\left(c_t^{\nu}\left(1-L_t\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} C_t^{-1} = \beta\left(c_{t+1}^{\nu}\left(1-L_{t+1}\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1}\left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}}+1-\delta\right) \\
I_t = K_t-(1-\delta)K_{t-1} \\
Y_t = C_t + I_t \\
Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
\alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = R_t \\
(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = W_t
\end{cases}
$$

Plus la condition d'abritrage du ménage entre consommation et travail:

$$
\frac{\nu-1}{\nu} P_t C_t = W_t\left(1-L_t\right) \tag{22}
$$

Équilibre stationnaire (1/3)

D'après l'Euler:

$$R = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{23}$$

De l'accumulation de capital:

$$I = \delta K \tag{24}$$

Le ratio K/Y:

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \tag{25}$$

$$Y = A^{\frac{1}{A-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \tag{26}$$

$$W = (1-\alpha) A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{27}$$

Équilibre stationnaire (2/3)

De l'équation d'arbitrage consommation-travail:

$$-\frac{1-\nu}{\nu}C = W\left(1-L\right) \tag{28}$$

De l'équation d'équilibre emplois-ressources:

$$C = Y - \delta K \tag{29}$$

$$C = Y\left(1-\delta\frac{K}{Y}\right) \tag{30}$$

$$C = Y\left(1-\delta\frac{\alpha\beta}{1-\beta\left(1-\delta\right)}\right) \tag{31}$$

De l'expression de l'équation d'arbitrage consommation-travail, en substituant les expressions précédentes de C, W et Y:

$$-\frac{1-\nu}{\nu}A^{\frac{1}{A-\alpha}}\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta\left(1-\delta\right)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L\left(1-\delta\frac{\alpha\beta}{1-\beta\left(1-\delta\right)}\right) = \left(1-\alpha\right)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta\left(1-\delta\right)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-L\right) \tag{32}$$

Équilibre stationnaire (3/3)

Après de simples calculs algébriques:

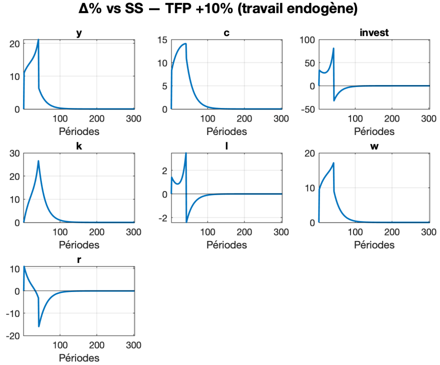
$$L = \frac{(1-\alpha)\,\nu\,(1-\beta\,(1-\delta))}{\nu\,(1-\alpha)\,[1-\beta\,(1-\delta)] - (1-\nu)\,[1-\beta\,(1-\delta)\,\delta\alpha\beta]} \tag{33}$$

Implémentation du modèle dans Dynare

IRF (travail endogène) après un choc de TFP de 10%

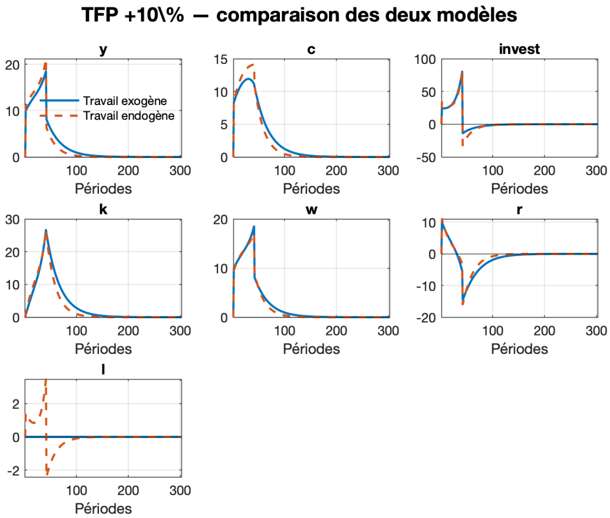
Ce que montre la simu

- **Travail réagit** : l augmente du fait d'une hausse du coût d'opportunité (substitution loisir $\rightarrow$ travail).
- **Salaire réel augmente fortement** : w conformément à la théorie, les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale
- **Taux d'intérêt** r augmente au début (capital plus productif), puis redescend avec la hausse de l'investissement et l'accumulation de k (capital relativement abondant).
- **Investissement très réactif** : i saute (rendement $\uparrow$) $\Rightarrow$ k croît de façon lisse.
- **PIB** (y) augmente via *deux* canaux : productivité + plus de travail (effet plus fort que dans le modèle à travail exogène).



Simulation Dynare, RBC avec travail endogène, choc $A_t = 1.10$ sur 40 périodes.

TFP +10% : comparaison travail exogène vs travail endogène



Quid de l’Etat?

Le rôle de l'État

L'État est un autre acteur important de la macroéconomie. Son rôle consiste à collecter des taxes sur les firmes et les ménages, et à les redistribuer sous forme de subventions ou pour assurer la protection sociale.

Il existe plusieurs manières de modéliser le comportement de l'État, notamment en tolérant la possibilité de recettes qui n'équilibrent pas les dépenses, autrement dit la possibilité d'un excédent ou déficit budgétaire.

Hypothèse retenue

On supposera dans ce modèle que le budget de l'État est équilibré à chaque période et que ce dernier ne peut s'endetter.

Nous reprenons toutes les autres hypothèses du modèle de croissance de Ramsey avec travail endogène.

Le programme de la firme représentative

L'État peut introduire des taxes distorsives sur les firmes :

- τ_t^{ss} : cotisations sociales,
- τ_t^{y} : taxe sur la production.

Reprenons les hypothèses des modèles précédents :

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{34}$$

À chaque période, le profit de la firme s'écrit :

$$\Pi_t = P_t Y_t (1 - \tau_t^y) - W_t L_t (1 + \tau_t^{ss}) - R_t K_{t-1}$$

En remplaçant Y_t par son expression dans la fonction de profit et en dérivant par rapport aux variables de contrôle $\{K_{t-1}, L_t\}$, on obtient les conditions de premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = 0 \iff \alpha \dfrac{Y_t}{K_{t-1}} = \dfrac{R_t}{P_t(1-\tau_t^y)} \\[2ex] \dfrac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \iff (1-\alpha) \dfrac{Y_t}{L_t} = \dfrac{W_t(1+\tau_t^{ss})}{P_t(1-\tau_t^y)} \end{cases} \tag{35}$$

Le programme du ménage

Le ménage est lui aussi sujet aux taxes imposées par l'Etat:

- il paye la TVA τ^{TVA} lorsqu'il consomme le bien final
- il paye l'impôt sur le revenu τ^{IR}
- En tant que propriétaire il paye l'impôt sur le capital τ^{K}
- Enfin, on suppose que l'Etat peut aussi fiscaliser les investissements. Nous reviendrons plus loin sur cette hypothèse. On introduit donc τ^{inv} la taxe sur l'investissement
- On introduit une taxe forfaitaire T_t que l'Etat peut prélever directement sur la richesse des ménages

$$\max_{\{C_t,K_t,L_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, L_t) \tag{36}$$

Le ménage est contraint par son budget:

$$P_t\left(1+\tau_t^{TVA}\right)C_t + P_t\left(1+\tau_t^{inv}\right)I_t + P_tT_t = W_tL_t\left(1-\tau_t^{IR}\right) + R_tK_{t-1}\left(1-\tau_t^{K}\right) \tag{37}$$

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1} \tag{38}$$

Programme du ménage représentatif

Lagrangien associé :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big\{ U(C_t, L_t) + \lambda_t \Big[\frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^{K}) - I_t (1 + \tau_t^{inv}) - C_t (1 + \tau_t^{TVA}) - T_t \Big] \Big\}$$

Pour dériver les CPO, on remplace I_t par son expression dans le Lagrangien **CPO (1) : arbitrage intertemporel et consommation**

$$U_C(C_t, L_t) = \lambda_t (1 + \tau_t^{TVA})$$

$$\lambda_t (1 + \tau_t^{inv}) = \beta \lambda_{t+1} \left[\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} (1 - \tau_{t+1}^{K}) + (1 - \delta) (1 + \tau_{t+1}^{inv}) \right]$$

CPO (2) : arbitrage travail/loisir et contrainte budgétaire

$$- U_L(C_t, L_t) = \lambda_t \frac{W_t}{P_t} (1 - \tau_t^{IR})$$

$$\frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^{K}) = I_t (1 + \tau_t^{inv}) + C_t (1 + \tau_t^{TVA}) + T_t$$

Condition de transversalité :

$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0$

On rappelle les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ses deux arguments lorsque l'offre de travail est endogène :

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = \nu \left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \tag{39}$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial L_t} = -\left(1-\nu\right) \left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} \left(1 - L_t\right)^{-1} \tag{40}$$

En utilisant le résultat de la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à la consommation dans la CPO pour le capital physique K_t, on obtient notre équation d'Euler:

$$\begin{aligned} &\left(c_t^{\nu} \left(1 - L_t\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \frac{\left(1+\tau_t^{inv}\right)}{\left(1+\tau_t^{TVA}\right)} \\ &= \beta \left(c_{t+1}^{\nu} \left(1 - L_{t+1}\right)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \frac{1}{\left(1+\tau_{t+1}^{TVA}\right)} \left[\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} \left(1-\tau_{t+1}^{K}\right) + \left(1-\delta\right)\left(1+\tau_{t+1}^{inv}\right) \right] \end{aligned} \tag{41}$$

En utilisant les deux dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ces deux arguments dans la CPO pour l'offre de travail, on obtient l'arbitrage entre consommation et travail:

$$\frac{1-\nu}{\nu} \frac{C_t}{1-L_t} = \frac{W_t}{P_t} \frac{\left(1-\tau_t^{IR}\right)}{\left(1+\tau_t^{TVA}\right)} \tag{42}$$

Clôture du modèle

La clôture du modèle est moins évidente que dans les cas précédents.
Pour se faire, exprimons la contrainte budgétaire de l'État. Ce dernier a pour rôle de collecter les taxes et les utilisent sous forme de dépenses publiques G_t. Dans notre cas de figure, la contrainte budgétaire de l'état s'exprime:

$$G_t = \tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \tau_t^{IR} \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^{ss} \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^K R_t K_{t-1} + \tau_t^y Y_t + T_t \tag{43}$$

L'égalité entre les dépenses publiques et les recettes nous assurent que l'État ne réalise ni déficit ni excédent en toute période.
Comme $\Pi_t = 0$, on peut légèrement modifier la contrainte budgétaire du ménage:

$$\left(1 + \tau_t^{TVA}\right) C_t + \left(1 + \tau_t^{inv}\right) I_t + T_t = \frac{W_t}{P_t} L_t \left(1 - \tau_t^{IR}\right) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \left(1 - \tau_t^K\right) + \frac{\Pi_t}{P_t} \tag{44}$$

Remplaçons Π_t par son expression:

$$\left(1 + \tau_t^{TVA}\right) C_t + \left(1 + \tau_t^{inv}\right) I_t = \frac{W_t}{P_t} L_t \left(1 - \tau_t^{IR}\right) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \left(1 - \tau_t^K\right) + \frac{T_t}{P_t} + Y_t \left(1 - \tau_t^y\right) - \frac{W_t}{P_t} L_t \left(1 + \tau_t^{ss}\right) - \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \tag{45}$$

Clôture

Après de simples calculs, en utilisant l'expression de G_t, on obtient :

$$C_t + I_t + \underbrace{\tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \left(\tau^{IR_t} + \tau_t^{ss}\right) \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^K \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} + \tau_t^y Y_t + T_t}_{G_t} = Y_t \tag{46}$$

On aboutit à l'équilibre final dans l'économie:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{47}$$

Le modèle avec Etat

Nous avons

- 9 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t, G_t\}_{t=0}^{\infty}$
- 7 variables exogènes $\{A_t, \tau_t^{TVA}, \tau_t^{inv}, \tau_t^{IR}, \tau_t^{SS}, \tau_t^{K}, \tau_t^{Y}, T_t\}_{t=0}^{\infty}$.
- le numéraire $P_t = 1$

Notre système $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, G_t\}_{t=0}^{\infty}$, nécessite donc 8 équations :

$$\left\{\begin{array}{c}
\left(c_t^{\nu}\left(1-L_t\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\
= \beta\left(c_{t+1}^{\nu}\left(1-L_{t+1}\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \frac{1}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})}\left[R_{t+1}(1-\tau_{t+1}^{K}) + (1-\delta)\left(1+\tau_{t+1}^{inv}\right)\right] \\
I_t = K_t - (1-\delta) K_{t-1} \\
Y_t = C_t + I_t + G_t \\
Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
\alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t}{(1-\tau_t^{y})} \\
(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = \frac{W_t(1+\tau^s s_t)}{(1-\tau_t^{y})} \\
\frac{1-\nu}{\nu}\frac{C_t}{1-L_t} = W_t \frac{\left(1-\tau_t^{IR}\right)}{\left(1+\tau_t^{TVA}\right)} \\
G_t = \tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \tau_t^{IR} W_t L_t + \tau_t^{ss} W_t L_t + \tau_t^{K} R_t K_{t-1} + \tau_t^{y} Y_t + T_t
\end{array}\right.$$

Équilibre stationnaire (1/4)

$$\bar{R} = \frac{\left(1+\tau^{inv}\right)\left(1-\beta\left(1-\delta\right)\right)}{\left(1-\tau^{K}\right)\beta} \tag{48}$$

$$\bar{I} = \delta\bar{K} \tag{49}$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{1}{\alpha}\frac{R}{\left(1-\tau^{y}\right)} \tag{50}$$

$$\zeta = \frac{K}{Y} \tag{51}$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{L}} = \underbrace{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha\left(1-\tau^{Y}\right)}{\bar{R}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{\phi} \tag{52}$$

Soit

$$\phi \equiv \frac{Y}{L} \tag{53}$$

$$W = \left(1-\alpha\right)\phi\frac{\left(1-\tau^{y}\right)}{\left(1+\tau^{ss}\right)} \tag{54}$$

Équilibre stationnaire (2/4)

D'après la fonction d'investissement:

$$I = \delta K \Rightarrow \frac{I}{Y} = \delta \frac{K}{Y} = \underbrace{\delta \frac{(1-\tau^y)}{R}}_{\eta} \tag{55}$$

Donc:

$$I = \eta Y \tag{56}$$

De l'arbitrage itnratemporel entre consommation et travail:

$$\frac{1-\nu}{\nu} \frac{C}{1-L} = \frac{W\left(1-\tau^{IR}\right)}{\left(1+\tau^{TVA}\right)} \Rightarrow C = \kappa\left(1-L\right) \tag{57}$$

Avec:

$$\kappa \equiv \frac{\nu}{1-\nu} W \frac{\left(1-\tau^{IR}\right)}{\left(1+\tau^{TVA}\right)} \tag{58}$$

Équilibre stationnaire (3/4)

A l'équilibre stationnaire, le budget de l'Etat s'exprime:

$$G = \tau^{TVA} C + \tau^{inv} I + \left(\tau^{IR} + \tau^{ss}\right) WL + \tau^{K} RK + \tau^{y} Y + T \tag{59}$$

L'expression précédente est linéaire en L, à l'aide des formules suivantes:

- $C = \kappa \left(1 - L\right)$
- $Y = \phi L$
- $K = \zeta Y$
- $I = \underbrace{\delta\zeta}_{\eta} Y$
- W est constant, dépend exclusivement des paramètres et pas de L

En utilisant ces variables auxiliaires dans la contrainte budgétaire de l'Etat, on obtient:

$$G(L) = \underbrace{\tau^{TVA} + T}_{a_0} + \underbrace{\left(-\tau^{TVA}\kappa + \tau^{inv}\eta\phi + \left(\tau^{IR} + \tau^{ss}\right) W + \tau^{K} R\zeta\phi + \tau^{y}\phi\right)}_{a_1} L \tag{60}$$

Équilibre stationnaire (4/4)

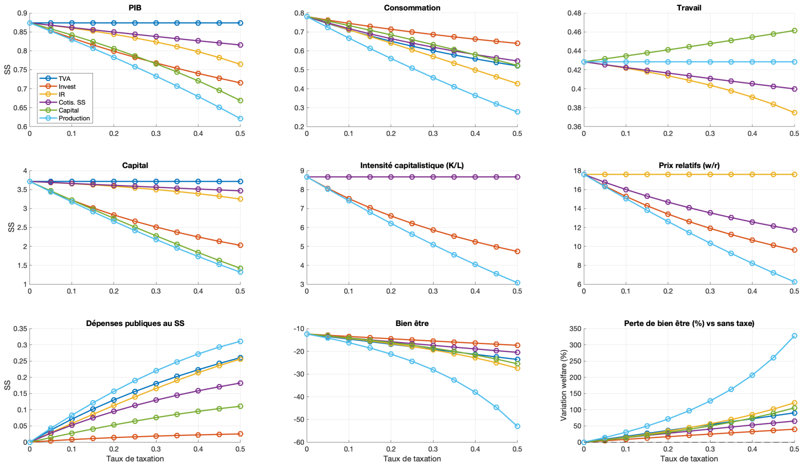
En utilisant les mêmes variables auxiliaires, on peut exprimer l'équation d'équilibre emplois-ressources dans l'économie en fonction de G et de L:

$$\phi L = \kappa\left(1 - L\right) + \eta\phi L + G\left(L\right) \tag{61}$$

En combinant les deux équations précédentes on obtient l'expression pour L:

$$L = \frac{\kappa + a_0}{\phi\left(1 - \eta\right) + \kappa - a_1} \tag{62}$$

Impact des différentes taxes sur l'équilibre stationnaire



Lecture économique : effets stationnaires des différentes taxes

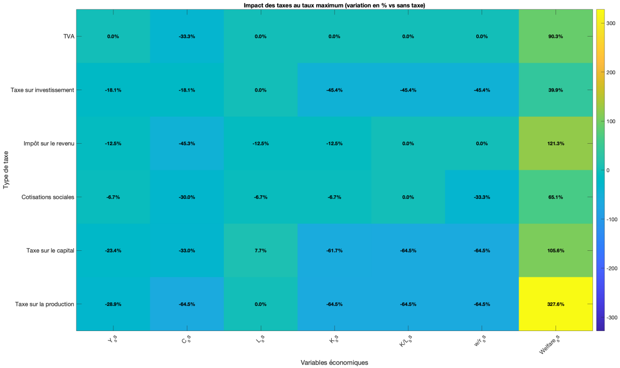
- **TVA** : impact concentré sur la consommation, plus marqué que pour la taxe sur l'investissement ou les cotisations sociales, mais moins sévère que pour l'impôt sur le revenu ou la taxe sur la production.
- **Taxes sur la production, le capital et l'investissement** : fortes contractions du capital et de l'investissement → effets négatifs durables sur le PIB.
- **Recettes publiques** : les taxes les plus « rentables » sont celles sur la **production**, puis la **TVA**, puis l'**impôt sur le revenu** (effet d'assiette fiscale).
- **Bien-être (Welfare)** : les pertes les plus importantes proviennent de la **taxe sur la production**, suivie de l'**impôt sur le revenu**, puis de la **TVA** et de la **taxe sur le capital** (quasi ex aequo). Les **cotisations sociales** ont un effet plus limité, et la **taxe sur l'investissement** est la moins pénalisante en termes de bien-être.

Lecture : toutes les taxes réduisent la consommation et le bien-être, mais à des degrés très différents selon leur assiette.

Effet des taxes sur les variables macroéconomiques

Lecture de la heatmap

- Lignes = **types de taxes** (TVA, inv., IR, cotis., K, prod.).
- Colonnes = **variables au SS** : Y, C, L, K, K/L, w/r, *welfare*.
- Couleur foncée = **contraction forte** par rapport au cas sans taxe.
- On voit une **hiérarchie claire des distorsions** :
  - taxe **production** et **capital** : pertes les plus larges (Y, K, welfare) ;
  - **IR** juste derrière (effet revenu + travail) ;
  - **TVA** : surtout sur C, structure productive presque inchangée ;
  - **taxe sur l'investissement** : la moins pénalisante en bien-être.
- Lecture politique : **ce qui taxe les facteurs** (K, Y) coûte plus qu'une taxe de demande (TVA).



Heatmap comparative des effets de 6 taxes (écart au cas sans taxe).

Définition des multiplicateurs et élasticités fiscales

1. Multiplicateur fiscal

$$M_x = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{Y(\tau_x^{(2)}) - Y(\tau_x^{(1)})}{G(\tau_x^{(2)}) - G(\tau_x^{(1)})}$$

où $x \in \{\text{TVA, INV, IR, SS, K, Y}\}$ et $\tau_x^{(1)} = 0$, $\tau_x^{(2)}$ = petit relèvement de la taxe.
Lecture : variation de PIB par unité de dépense publique supplémentaire financée par cette taxe.

2. Élasticité du PIB à une taxe

$$\varepsilon_{Y,\tau_x} = \frac{\Delta Y/Y}{\Delta \tau_x/\tau_x} \approx \frac{Y(\tau_x^{(2)}) - Y(\tau_x^{(1)})}{Y(\tau_x^{(1)})} \cdot \frac{\tau_x^{(1)}}{\tau_x^{(2)} - \tau_x^{(1)}}$$

Idée clé : plus la taxe mord sur les *facteurs* (K, production), plus le multiplicateur est négatif.

Lecture économique des multiplicateurs et élasticités fiscales

1. Pourquoi ces métriques sont utiles

- Elles quantifient la **réaction de l'économie à une variation de politique fiscale** : quelle perte d'activité pour 1 point de taxe supplémentaire ?
- Elles permettent d'évaluer le **coût d'efficacité** d'un prélèvement :

$$\text{coût marginal en PIB} = -M_X \times \Delta G$$

- Elles aident à comparer les **effets d'offre vs de demande** :
  - taxes sur les facteurs $\Rightarrow$ effets d'offre, durables, sur K et L ;
  - taxes sur la demande (TVA, inv.) $\Rightarrow$ effets transitoires sur C.

2. Interprétation des ordres de grandeur

- $|M_X|$ élevé $\Rightarrow$ taxe très distorsive, forte contraction de l'activité.
- ε_{Y,τ_X} élevé $\Rightarrow$ économie sensible à cette taxe (faible marge d'ajustement).
- $|M_X|$ faible $\Rightarrow$ levier fiscal "efficace" : recette élevée pour un coût macro limité.

3. Utilisation macroéconomique

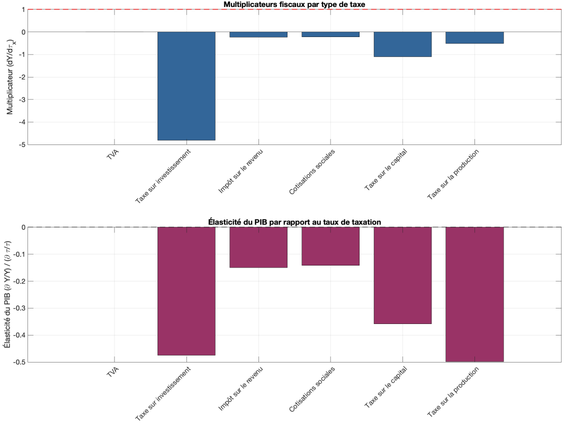
- Sert à **classer les instruments fiscaux** selon leur efficacité.
- Alimente la **modélisation des consolidations budgétaires** et des **réformes structurelles**.
- Fournit une mesure simple de la **compatibilité entre rendement budgétaire et croissance**.

Un macroéconomiste cherche les taxes à multiplicateur faible et élasticité modérée — celles qui financent l'État sans casser la croissance.

Multiplicateurs de la fiscalité et élasticité du PIB aux taxes

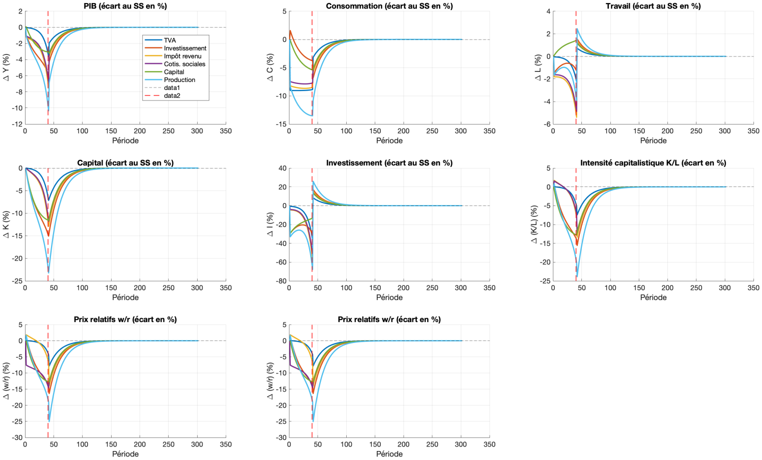
Lecture du graphique

- **Multiplicateurs fiscaux** : impact d'une hausse de taxe sur le PIB. Tous sont négatifs ⇒ la fiscalité pèse sur l'activité.
  - **1. Taxe sur l'investissement** : <u>le</u> multiplicateur le plus négatif ⇒ on tape direct dans l'accumulation.
  - **2. Taxe sur le capital** : même logique d'offre, effet durable.
  - **3. Taxe sur la production** : effet diffus via le coût de production.
  - **4. IR et cotisations sociales** : pratiquement au même niveau.
  - **TVA** : multiplicateur quasi nul (taxe de demande à assiette large).
- **Élasticités du PIB (en absolu)** : plus forte pour la **taxe sur la production**, puis **investissement**, puis **capital**, puis **IR**, et **cotisations**, enfin **TVA**.
- **Lecture politique** : taxer les **intrants / facteurs** (prod., K, inv.) est beaucoup plus coûteux en activité que taxer la demande (TVA).

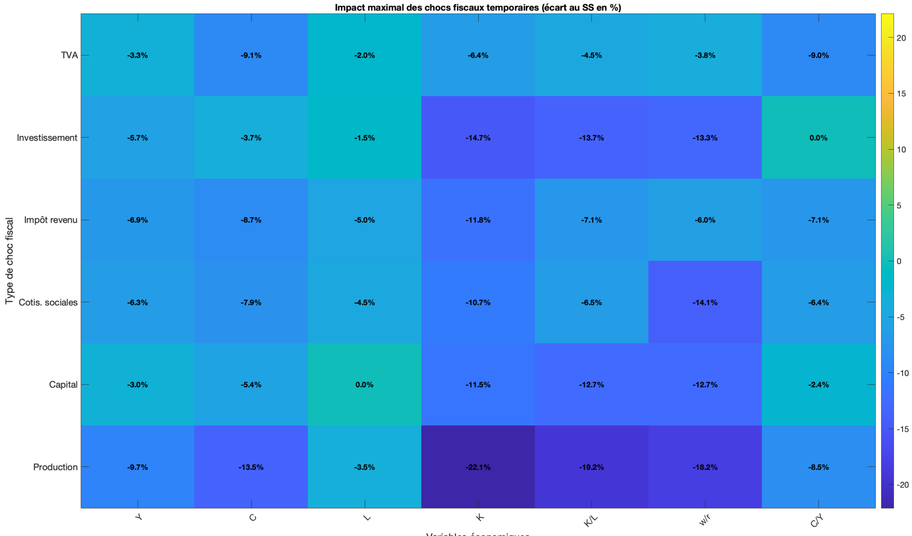


Multiplicateurs et élasticités du PIB par type de taxe — résultats de la simulation.

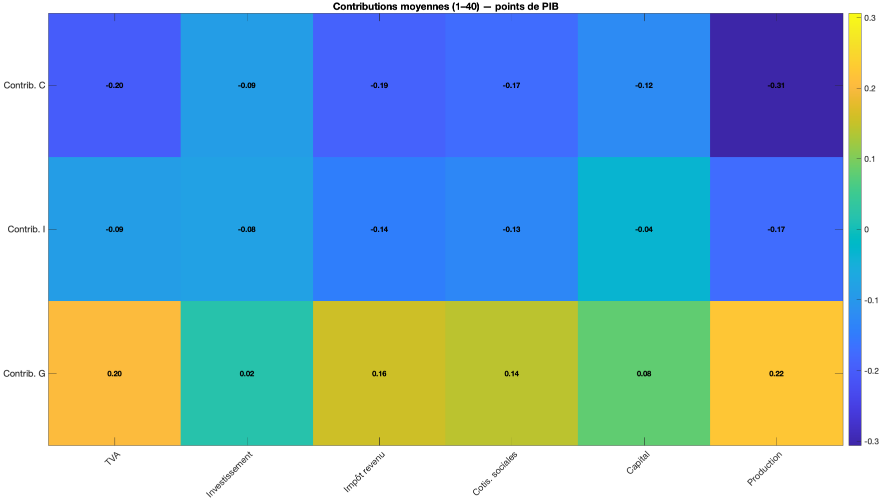
Réponses impulsionnelles pour un choc temporaire de +10% pour chaque taxe



Impacts maximaux des chocs de fiscalité



Contributions des variables macro à la croissance du PIB



le BGP, sentier de croissance équilibré

Productivité et BGP (sentier de croissance équilibré)

Trois formes standard de « productivité » :

- **Hicks-neutre :** $Y_t = A_t\, F(K_t, L_t)$
- **Augmentant le travail (Harrod) :** $Y_t = F(K_t,\, A_t L_t)$
- **Augmentant le capital (Solow) :** $Y_t = F(A_t K_t,\, L_t)$

Compatibilité BGP : sous rendements d'échelle constants et concurrence parfaite, seul le *progrès technique augmentant le travail* permet un sentier où les parts de revenu restent constantes et les taux de croissance sont stables.

Exemple Cobb–Douglas (Harrod) :

$$Y_t \;=\; K_t^{\alpha}\,(A_t L_t)^{\,1-\alpha}, \qquad A_t = A_0(1+g)^t, \quad L_t = L_0(1+n)^t$$

Implications de croissance (BGP) :

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \approx (1+g)(1+n) \quad \Rightarrow \quad \text{Y croît à } g{+}n,\ \ \frac{Y_t}{L_t} \text{ croît à } g,\ \ \frac{Y_t}{A_t L_t} \text{ est constant.}$$

La contrainte de l'économie en présence d'un trend de croissance économique équilibré

Reprenons les hypothèses des modèles précédents et intégrons une productivité du travail à la Harrod:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha} \tag{63}$$

À chaque période, la contrainte budgétaire s'exprime:

$$A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha} = C_t + I_t + G_t \tag{64}$$

Si $g > 0$, alors il existe g_k et g_c et g_G tel que:

$$A_1 \left((1+g_k)^{t-1} K_0 \right)^{\alpha} \left((1+g)^t L_1 \right)^{1-\alpha} = (1+g_c)^t C_1 + (1+g_k)^t K_1 - (1-\delta)(1+g_k)^{t-1} K_0 + G_t (1+g_G)^t \tag{65}$$

L'unique condition qui permet une croissance équilibrée est :

$$g = g_k = g_C = g_G \tag{66}$$

Variable stationnaires

$$\begin{cases} \hat{Y}_t = \frac{Y_t}{(1+g)^t} \\ \hat{C}_t = \frac{C_t}{(1+g)^t} \\ \hat{I}_t = \frac{I_t}{(1+g)^t} \\ \hat{K}_t = \frac{K_t}{(1+g)^t} \\ \hat{G}_t = \frac{G_t}{(1+g)^t} \\ \hat{W}_t = \frac{W_t}{(1+g)^t} \end{cases}$$

Remplaçons dans le modèle précédent, l'expression des variables stationnarisées

Modèle stationnaire

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\left(\hat{C}_t^{\nu}\left(1-L_t\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\hat{C}_t^{-1}\frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\
=\beta\left(\hat{C}_{t+1}^{\nu}\left(1-L_{t+1}\right)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\left(\hat{C}_{t+1}\right)^{-1}\frac{(1+g)^{\nu(1-\sigma)-1}}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})}\left[R_{t+1}(1-\tau_{t+1}^{K})+(1-\delta)\left(1+\tau_{t+1}^{inv}\right)\right] \\
\hat{I}_t=\hat{K}_t-(1-\delta)\frac{\hat{K}_{t-1}}{(1+g)} \\
\hat{Y}_t=\hat{C}_t+\hat{I}_t+\hat{G}_t \\
\hat{Y}_t=A_t\left(\frac{\hat{K}_{t-1}}{(1+g)}\right)^{\alpha}L_t^{1-\alpha} \\
\alpha\frac{\hat{Y}_t(1+g)}{\hat{K}_{t-1}}=\frac{R_t}{(1-\tau_t^{y})} \\
(1-\alpha)\frac{\hat{Y}_t}{L_t}=\frac{\hat{W}_t(1+\tau^{s}s_t)}{(1-\tau_t^{y})} \\
\frac{1-\nu}{\nu}\frac{\hat{C}_t}{1-L_t}=\hat{W}_t\frac{\left(1-\tau_t^{IR}\right)}{\left(1+\tau_t^{TVA}\right)} \\
\hat{G}_t=\tau_t^{TVA}\hat{C}_t+\tau_t^{inv}\hat{I}_t+\tau_t^{IR}\hat{W}_tL_t+\tau_t^{ss}\hat{W}_tL_t+\tau_t^{K}R_t\frac{\hat{K}_{t-1}}{(1+g)}+\tau_t^{y}\hat{Y}_t+\hat{T}_t
\end{array}
\right.
$$

Equilibre stationnaire du modèle stationnarisé

En utilisant le système de variable auxiliaires :

$$\begin{cases} \zeta \equiv \frac{\alpha(1+g)(1-\tau^{y})}{R} \\ \phi \equiv A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha(1-\tau^{y})}{R}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \eta \equiv \frac{\hat{K}}{\hat{Y}} \frac{(g+\delta)}{(1+g)} \\ \kappa \equiv \frac{\nu}{(1-\nu)} \hat{W} \frac{\left(1-\tau^{IR}\right)}{\left(1+\tau^{TVA}\right)} \end{cases}$$

Equilibre stationnaire 2/

$$R = \frac{\left(1+\tau^{inv}\right)\left[1-\beta\left(1-\delta\right)\left(1+g\right)^{1+\nu(1-\sigma)}\right]}{\left(1-\tau^{K}\right)\beta\left(1+g\right)^{\nu(1-\sigma)-1}} \tag{67}$$

$$\hat{I} = \hat{K}\frac{(g+\delta)}{(1+g)} \tag{68}$$

$$\hat{Y} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha\left(1-\tau^{y}\right)}{R}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \quad \Rightarrow \quad \hat{Y} = \phi L \tag{69}$$

$$\hat{W} = (1-\alpha)\,\phi\frac{\left(1-\tau^{y}\right)}{\left(1+\tau^{ss}\right)} \tag{70}$$

$$\frac{\hat{I}}{\hat{Y}} = \eta \tag{71}$$

$$\hat{C} = \kappa\,(1-L) \tag{72}$$

Equilibre stationnaire 3/

$$\hat{G} = \underbrace{\tau^{TVA}\kappa + \hat{T}}_{a_0} + \underbrace{\left[-\tau^{TVA\kappa} + \tau^{inv}\eta\phi + \left(\tau^{IR} + \tau^{ss}\right)\hat{W} + \tau^{K}R\frac{\zeta\phi}{1+g} + \tau^{y}\phi\right]}_{a_1} L \tag{73}$$

$$L = \frac{a_0 + \kappa}{\phi + \kappa - \eta\phi - a_1} \tag{74}$$

A placer en annexes

$$\left(\left(\hat{C}_t\,(1+g)^t\right)^{\nu}(1-L_t)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\left(\hat{C}_t\,(1+g)^t\right)^{-1}\frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})}$$

$$=\beta\left(\left((1+g)^{t+1}\,\hat{C}_{t+1}\right)^{\nu}(1-L_{t+1})^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\left((1+g)^{t+1}\,\hat{C}_{t+1}\right)^{-1}\frac{1}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})}\left[R_{t+1}(1-\tau_{t+1}^{K})+(1-\delta)\,(1+\tau_{t+1}^{inv})\right]$$

$$\Rightarrow\left(\hat{C}_t^{\nu}\,(1-L_t)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\hat{C}_t^{-1}\frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})}$$

$$=\beta\left(\hat{C}_{t+1}^{\nu}\,(1-L_{t+1})^{1-\nu}\right)^{1-\sigma}\left(\hat{C}_{t+1}\right)^{-1}\frac{(1+g)^{1+\nu(1-\sigma)}}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})}\left[R_{t+1}(1-\tau_{t+1}^{K})+(1-\delta)\,(1+\tau_{t+1}^{inv})\right]$$

$$\hat{I}_t\,(1+g)^t=\hat{K}_t\,(1+g)^t-(1-\delta)\,\frac{\hat{K}_t\,(1+g)^t}{(1+g)}\Rightarrow\hat{I}_t=\hat{K}_t-(1-\delta)\,\frac{\hat{K}_t}{(1+g)}$$

$$\hat{Y}_t\,(1+g)^t=\hat{C}_t\,(1+g)^t+\hat{I}_t\,(1+g)^t+\hat{G}_t\,(1+g)^t\Rightarrow\hat{Y}_t=\hat{C}_t+\hat{I}_t+\hat{G}_t$$

$$\hat{Y}_t\,(1+g)^t=A_t\left(\hat{K}_{t-1}\,(1+g)^{t-1}\right)^{\alpha}\left((1+g)^t\,L_t\right)^{1-\alpha}\Rightarrow\hat{Y}_t=A_t\left(\frac{\hat{K}_{t-1}}{(1+g)}\right)^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

(75)

Modèle stationnaire 2/

$$\alpha \frac{\hat{Y}_t (1+g)^t}{\hat{K}_{t-1} (1+g)^{t-1}} = \frac{R_t}{(1-\tau_t^y)} \Rightarrow \alpha \frac{\hat{Y}_t (1+g)}{\hat{K}_{t-1}} = \frac{R_t}{(1-\tau_t^y)} \tag{76}$$

$$(1-\alpha) \frac{\hat{Y}_t (1+g)^t}{L_t} = \frac{\hat{W}_t (1+g)^t (1+\tau^s s_t)}{(1-\tau_t^y)} \Rightarrow (1-\alpha) \frac{\hat{Y}_t}{L_t} = \frac{\hat{W}_t (1+\tau^s s_t)}{(1-\tau_t^y)} \tag{77}$$

$$\frac{1-\nu}{\nu} \frac{\hat{C}_t (1+g)^t}{1-L_t} = \hat{W}_t (1+g)^t \frac{(1-\tau_t^{IR})}{(1+\tau_t^{TVA})} \Rightarrow \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\hat{C}_t}{1-L_t} = \hat{W}_t \frac{(1-\tau_t^{IR})}{(1+\tau_t^{TVA})} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_t (1+g)^t = {} & \tau_t^{TVA} \hat{C}_t (1+g)^t + \tau_t^{inv} \hat{I}_t (1+g)^t + \tau_t^{IR} \hat{W}_t (1+g)^t L_t \\ & + \tau_t^{ss} \hat{W}_t (1+g)^t L_t + \tau_t^K R_t \hat{K}_{t-1} (1+g)^{t-1} + \tau_t^y \hat{Y}_t (1+g)^t + \hat{T}_t (1+g)^t \end{aligned} \tag{79}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{G}_t = \tau_t^{TVA} \hat{C}_t + \tau_t^{inv} \hat{I}_t + \tau_t^{IR} \hat{W}_t L_t + \tau_t^{ss} \hat{W}_t L_t + \tau_t^K R_t \frac{\hat{K}_{t-1}}{(1+g)} + \tau_t^y \hat{Y}_t + \hat{T}_t \tag{80}$$

Pourquoi reconstituer les niveaux non stationnaires ?

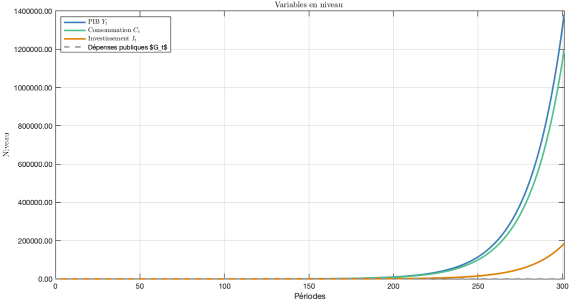
Idée générale

Dans Dynare on travaille souvent avec des variables *stationnarisées* (divisées par la tendance $(1+g)^t$) pour résoudre le modèle. Mais pour **interpréter** et **présenter** les résultats, il est utile de revenir en niveaux.

Pourquoi ?

- **Comparabilité** : on retrouve des trajectoires croissantes de Y, C, K comme dans les données (PIB trendé).
- **Lecture "macro"** : on voit si la taxe freine la **croissance de long terme**, pas seulement le niveau stationnaire.
- **Communication** : un décideur comprend mieux "le PIB croît moins vite" que "la variable stationnaire baisse".
- **Décomposition** : on peut séparer *tendance* ($(1+g)^t$) et *écart de politique* (effet de la taxe).

Règle pratique :
résoudre en stationnaire, **présenter en niveaux**.



Reconstitution des niveaux : $X_t^{\text{niv}} = \hat{X}_t \times (1+g)^t$.

Impact de g sur l'équilibre stationnaire

Rôle de g sur l et $\hat{w}$

g n'a pas d'influence directe sur l et w
En revanche, g influence indirectement l et w par r et donc les prix relatifs

- *Euler stationnaire :*

  $$r(g) = \frac{1}{\beta\,\gamma^{\nu(1-\sigma)-1}} - (1-\delta), \qquad \gamma = 1+g.$$

  Avec $\nu(1-\sigma) - 1 < 0$ (ici $= -2$) $\Rightarrow g\uparrow \Rightarrow r\uparrow$.

- *Intensité capitalistique et salaire :*

  $$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha\,\gamma}{r}, \qquad \phi \equiv \frac{Y}{L} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad \hat{w} = (1$$

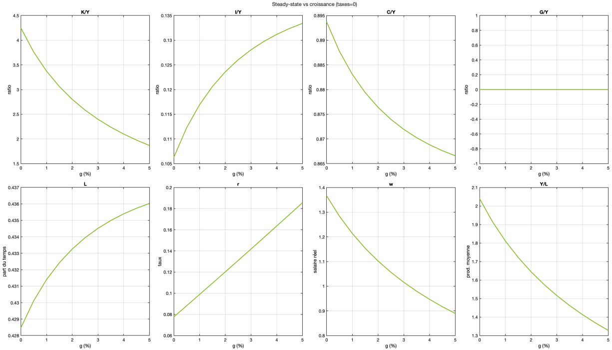
  Donc $g\uparrow \Rightarrow r\uparrow \Rightarrow \frac{K}{Y}\downarrow,\ \phi\downarrow,\ \hat{w}\downarrow$.

- *Heures au SS :*

  $$l = \frac{\chi}{1+\chi-\eta}, \quad \chi = \frac{\nu}{1-\nu}(1-\alpha), \quad \eta = \alpha\,\frac{g+\delta}{r}.$$

  Dans notre calibration, $g\uparrow$ fait légèrement monter $\eta \Rightarrow 1+\chi-\eta$ baisse $\Rightarrow l\uparrow$ (hausse modeste).

- *Rappel :* l n'est **pas** « chapeautée » ; $\hat{w}$ est le salaire *stationnarisé* (détrendé par $(1+g)^t$).



Modification de l'équilibre stationnaire en fonction de h

Merci beaucoup pour votre attention!