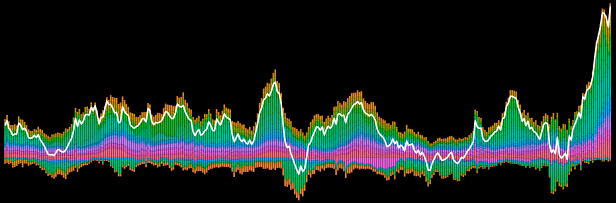
Dynare et la résolution des modèles RBC déterministes

Chapitre 1 - Implémentation dans Dynare



Novembre 2025

Maxime Bouter - cours master 2 - EIED - UPPA

Introduction

- modèles structurels ,
- microfondés,
- optimisation inter-temporelle => hypothèse d'anticipation rationnelle.
  - déterministes => parfaitement anticipés;
  - stochastiques => non anticipés.
- difficulté mathématique: résolution des modèles stochastiques non linéaires.

forme réduite

modèle déterministe, anticipation parfaite

$$f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, u_t) = 0$$

modèle stochastique

$$\mathbb{E}_t f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, u_t) = 0$$

où y est un vecteur des variables endogènes
et u un vecteur des variables exogènes

modèle déterministe

- anticipation parfaite => les agents anticipent tous les chocs pour $t > 1$
- adaptation du comportement des agents en prévision du choc futur.

modèle déterministe

$$f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, u_t) = 0 \tag{1}$$

où y est un vecteur des variables endogènes
et u un vecteur des variables exogènes
Règle d'identification: autant d'équations que de variables endogènes y

Equations récurrentes et problème des valeurs initiales

$$
\begin{cases}
f(y_2, y_1, y_0, u_1) = 0 \\
f(y_3, y_2, y_1, u_2) = 0 \\
f(y_4, y_3, y_2, u_3) = 0 \\
\qquad \vdots \\
f(y_{T-1}, y_{T-2}, y_{T-3}, u_{T-2}) = 0 \\
f(y_T, y_{T-1}, y_{T-2}, u_{T-1}) = 0 \\
f(y_{T+1}, y_T, y_{T-1}, u_T) = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

Où y_0 et y_{T+1} sont données.

Équilibre stationnaire:

Un équilibre stationnaire se définit par $y_{t-1} = y_t = y_{t+1} = \bar{y}$.
En remplaçant dans l'équation (2), on aboutit à:

$$f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{y}, \bar{u}) = 0 \tag{3}$$

Un équilibre stationnaire se caractérise en outre par:

- une valeur d'équilibre pour les variables exogènes $\bar{u}$,
- les différents paramètres du modèle.

Solution des modèles déterministes:

- Solution calcule la trajectoire suite à un choc pour un nombre de périodes fixées
- Solution du système linéaire utilise un algorithme de type Newtonien:
  - méthode Newtonienne utilisant une matrice creuse ou ”sparse matrix”
  - méthode Newtonienne utilisant une décomposition LU
  - méthode Newtonienne utilisant la généralisation de la Méthode de Minimisation du Résidu (GMRES)
  - méthode Newtonienne utilisant la méthode du gradient biconjugué stabilisé (BICGSTAB)
  - méthode Newtonienne utilisant l’élimination de Gauss.

Principe de la méthode de Newton

- solution de l'équation $f(x) = 0$ par approximation successive
- la condition initiale x_0 doit être proche de la solution
- on calcule x_1, abscisse à l'origine de la tangente en $f(x_0)$, en utilisant un développement limité de Taylor à l'ordre de 1 de f

$$f(b) = f(a) + (b - a)\frac{df}{dx}(a)$$

- si $|x_1 - x_0| > 0$, on réitère l'étape précédente en x_1
- on cherche x_2 abscisse à l'origine de la tangente en $f(x_1)$,
- si $|x_2 - x_1| > 0$, on réitère alors l'étape précédente
- ...
- si $|x_k - x_{k-1}| = 0$, alors x_k est racine de la fonction $f(x_k) = 0$

My first Mickey Mouse RBC model

Modèle de croissance néoclassique déterministe

Soit $U(C_t)$ la fonction d'utilité qui dépend exclusivement de la consommation des ménages, $\beta \in (0, 1)$ est le facteur d'escompte et renseigne sur le niveau d'utilité futur lié à la consommation future C_{t+j}. La fonction $U(.)$ doit respecter les propriétés usuelles $U'(.) > 0$ et $U''(.) < 0$

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{4}$$

s.c.

$$\begin{cases} c_t + i_t = y_t \\ i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1} \\ y_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} \end{cases} \tag{5}$$

Où la production est utilisée soit pour consommer soit pour investir dans du capital physique. La consommation et l'investissement sont des variables de contrôles, alors que le stock de capital est la variable d'état. Le capital physique se déprecie au rythme $\delta \in (0, 1)$.
On suppose que le seul facteur de production est le capital physique. La fonction de production y est de type "Cobb-Douglas", et à les propriétés suivantes : $y'(.) > 0$ et $y''(.) < 0$. La variable A est un facteur exogène augmentant la productivité du capital.

Le Lagrangien associé à ce programme:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) + \lambda_t (A_t k_{t-1}^{\alpha} - c_t - k_t + (1-\delta) k_{t-1}) \tag{6}$$

Les CPO:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \iff U'(c_t) = \lambda_t \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \iff \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} (\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff A_t k_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} = c_t - k_t \end{cases} \tag{7}$$

La condition de transversalité:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t k_t = 0 \tag{8}$$

Cette condition représente la valeur actualisée du stock de capital à l'infini, qui doit être nulle.
Si cette limite était strictement positive, cela signifierait que l'agent accumule du capital qui conserve une valeur positive même à l'horizon infini. Or, accumuler du capital a un coût d'opportunité : on renonce à de la consommation aujourd'hui.
La CT garantit qu'à l'optimum, l'agent n'accumule pas de richesse "inutile". Tout le capital doit être utilisé de manière productive pour générer de la consommation et de l'utilité.
En d'autres termes : "Il ne sert à rien de mourir riche" dans un modèle à horizon infini.

Soit la fonction d'utilité CRRA:

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad \sigma > 1 \tag{9}$$

Où σ est le paramètre d'aversion au risque. L'écriture du modèle sous sa forme réduite est:

$$\mathbf{y_t} = \begin{pmatrix} c_t \\ k_t \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{u_t} = A_t \tag{11}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y_{t+1}}, \mathbf{y_t}, \mathbf{y_{t-1}}, \mathbf{u_t}) = \begin{pmatrix} c_t^{-\sigma} - \beta c_{t+1}^{-\sigma} (\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ \\ A_t k_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - c_t + k_t \end{pmatrix} \tag{12}$$

Le modèle

Nous avons 4 variables endogènes $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ et une variable exogène $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut 4 équations :

$$\begin{cases} y_t & = & c_t + i_t \\ i_t & = & k_t - (1-\delta)k_{t-1} \\ y_t & = & A_t k_{t-1}^{\alpha} \\ c_t^{-\sigma} & = & \beta c_{t+1}^{-\sigma}(\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \end{cases}$$

Équilibre stationnaire:

A l'équilibre stationnaire:

$$
\begin{cases}
c_=t = c_{t+1} = \bar{c} \\
k_{t-1} = k_t = k_{t+1} = \bar{k} \\
A_t = \bar{A} \\
y_t = \bar{y} \\
i_t = i
\end{cases}
\tag{13}
$$

En remplaçant dans le système d'équations, on obtient les valeurs à l'équilibre stationnaire:

$$
\begin{cases}
\bar{c} = \bar{A}\bar{k}^{\alpha} - \delta\bar{k} \\
\bar{k} = \left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha\bar{A}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
\bar{y} = \bar{A}\bar{k}^{\alpha} \\
i = \delta\bar{k}
\end{cases}
\tag{14}
$$

Equilibre stationnaire 2/

En remplaçant de $\bar{K}$ par son expression, on obtient un équilibre qui ne dépend que des paramètres du modèle et des variables exogènes:

$$\begin{cases} \bar{c} = \bar{A}\left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha \bar{A}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \delta\left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha \bar{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \bar{k} = \left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha \bar{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \bar{y} = \bar{A}\left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha \bar{A}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ i = \delta\left(\dfrac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha \bar{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{cases} \tag{15}$$

Qu'observe-t-on?

Soit:

$$\begin{cases} \alpha = 0.33 \\ \beta = 0.99 \\ \delta = 0.1 \\ \sigma = 2 \end{cases} \tag{16}$$

Calculez l'équilibre stationnaire.
Sur DBnomics, récupérez:

- une série de stock de capital pour une année donnée hors période de crise,
- le PIB pour la même économie et la même année,
- la demande totale dans l'économie
- la FBCF.

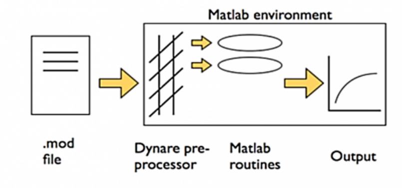
Calculez dans un deuxième temps:

- la part du capital dans le PIB (cela devrait représenter une valeur supérieure à 1)
- la propension à consommer
- la part de l'investissement dans le PIB

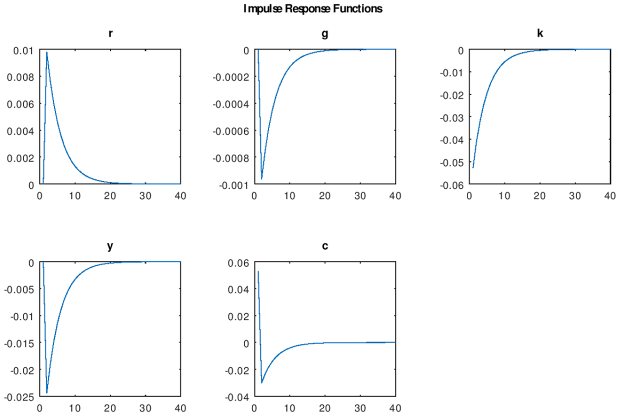
Let's dive in Dynare

Dynare

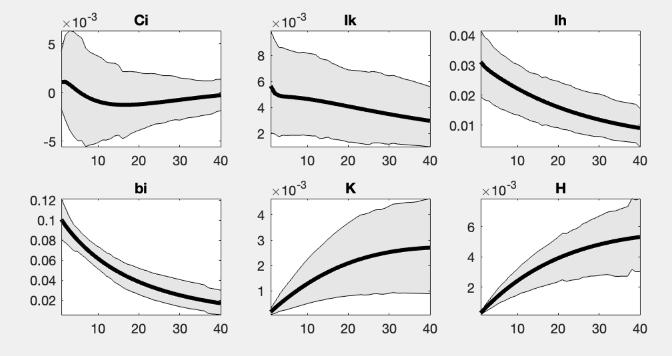
In a ”nutshell”, Dynare comment ça marche?



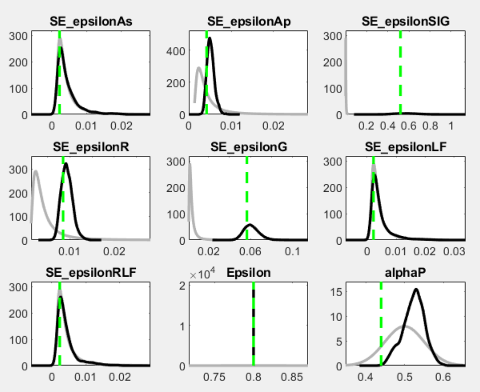
Quelques sorties Dynare



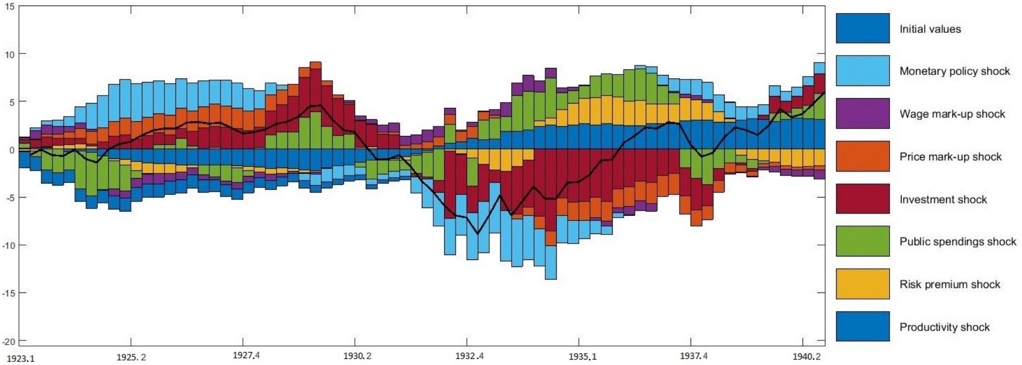
Quelques sorties Dynare



Quelques sorties Dynare



Quelques sorties Dynare



Code Dynare:

Le fichier contenant le modèle doit contenir l'extension *.mod:

1er block: définitions des variables endogènes:

```
var y i c k;
```

2ème block: définitions des variables exogènes:

```
varexo A;
```

3ème block: définitions des paramètres du modèle :

```
parameters alf bet gam delt;
```

Remarque: attention au nom des paramètres. Dans les logiciels comme MatLab, on associe souvent des nombres aux lettres grecques. Ce qui peut poser un problème.

Code Dynare:

4ème block: on attribue les valeurs aux paramètres:

```
alf=0.33;
bet=0.95;
sig=2;
delt=0.025;
```

5ème block: le modèle:

```
model;
y=A*k(-1)^(alf);
c^(-sig)-bet*c(+1)^(-sig)*(alf*A(+1)*k^(alf-1)+1-delt)=0;
i=k-(1-delt)*k(-1);
A*k(-1)^(alf)+(1-delt)*k(-1)-c+k=0;
end;
```

Remarque: attention à la convention de temps dans Dynare. Le capital utilisé en t à été déterminé en $t-1$ On écrit donc bien $y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha}$ et non pas $y_t = A_t K_t^{\alpha}$

Code Dynare:

Il existe plusieurs manières d'introduire l'équilibre stationnaire dans Dynare dont l'introduction de l'équilibre sous forme de calcul formel. Rappelons-nous que l'on va initier l'algorithme de Newton et que le meilleur guess pour l'équilibre... est l'équilibre lui même

6ème block: l'équilibre stationnaire:

```
initval;
k = 8.7;
c = 1.82;
i = 0.2175;
y = 2.94;
A = 1;
end;
steady;
```

La commande `steady` permet de vérifier l'équilibre et bien l'équilibre stationnaire.

Il existe plusieurs options en fonction des différentes situations que l'on voudrait étudier. Lorsque l'on travaille avec des modèles déterministes, on peut vouloir étudier différents types de chocs.

- L'option `histval;` pour des valeurs différentes de l'équilibre stationnaire
- L'option `initval; endval;` pour des chocs permanents
- L'option `shocks;` pour des chocs temporaires.

Convergence vers l'état stationnaire

Exemple: utilisation de l'option `histval`. Supposons que le stock de capital soit à l'état initial inférieur à son état stationnaire:

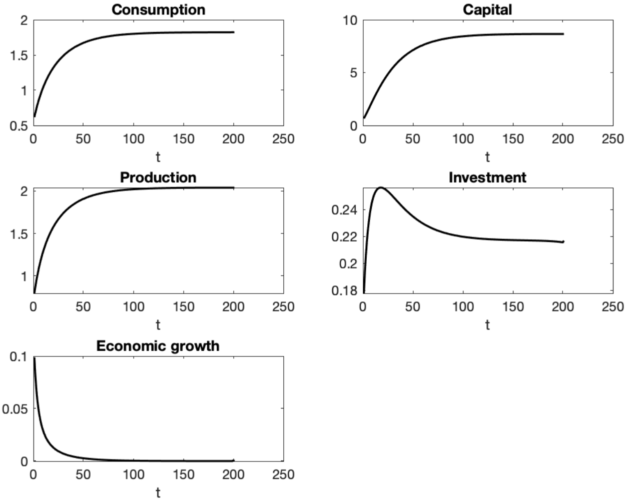
me block: option histval:

```
histval;
k(0)=.5;
end;
simul(periods=200);
```

Dans ce cas, on spécifie la valeur des variables d'états à Dynare à l'état initial en $t = 1$. Il faut donc spécifier l'état initial pour le capital, variable d'état prédéterminée avec un retard en `t=0`.

Exemple avec l'option histval:

code dynare **chap_1_histval.mod**



Simulation de chocs permanents

Exemple: utilisation de l'option `initval; endval;` pour simuler un choc négatif permanent de productivité

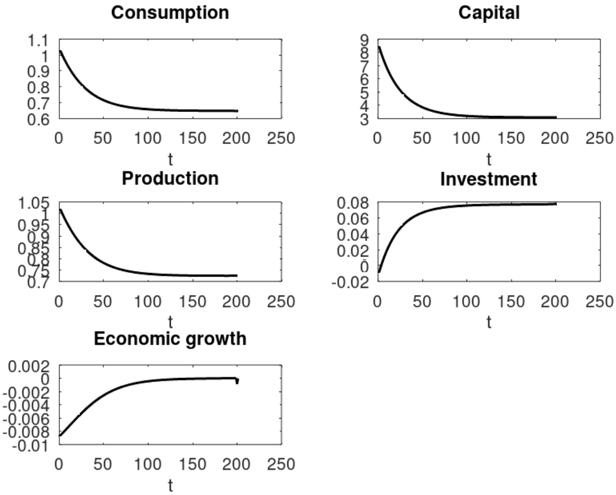
bloc

```
endval;
 k = 3.08;
 c = 0.65;
 A = 0.5; end;
steady;
```

Cette fois, la variable exogène A_t a été utilisée pour trouver un nouvel équilibre stationnaire (pour $A = 0.5$), différent de l'état stationnaire initial ($A = 1$).

Exemple avec l'option endval:

code dynare **chap_1_endval.mod**



Simulation de chocs temporaires

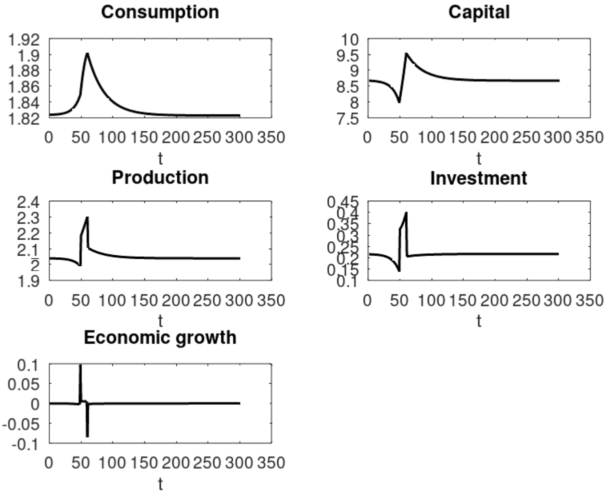
Exemple: utilisation de l'option `shocks;` pour simuler un choc positif temporaire de 10% de productivité entre t=50 et t=60

bloc

```
shocks;
 var A ; periods 50:60;
 values 1.1;
 end; end;
```

Cette fois, la variable exogène A_t a été utilisée pour créer un choc temporaire de 10 ($A = 1.1$)

code dynare **chap1_temp**$_s$*hock.mod*



Merci beaucoup pour votre attention!