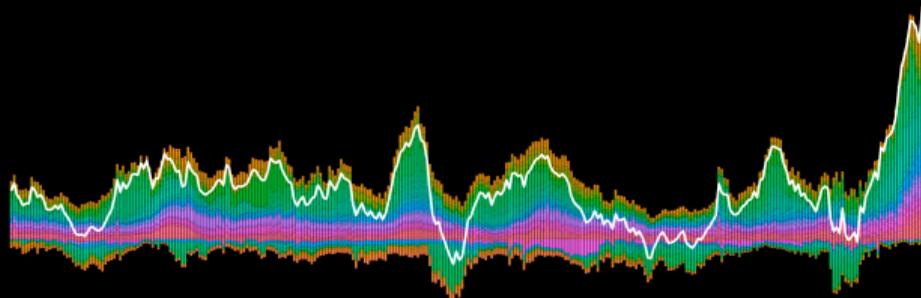


Dynare et la résolution des modèles RBC déterministes

Chapitre 2 - Modèle décentralisé à deux agents : ménage et firme



Novembre 2025

The background features a dark, monochromatic wireframe rendering of a mountain range. The mountains are composed of numerous thin, light-colored lines that create a sense of depth and perspective, converging towards the top right. The peaks are rugged and craggy. The overall aesthetic is minimalist and modern.

Le modèle avec offre de travail exogène

Le programme du ménage

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (1)$$

Le Lagrangien associé au programme du ménage est :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t) + \lambda_t \left(\frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} - K_t + (1 - \delta) K_{t-1} \right) \quad (2)$$

Les CPO:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \iff U'(C_t) = \lambda_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \iff \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff \frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} = C_t + I_t \end{cases} \quad (3)$$

La condition de transversalité:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0 \quad (4)$$

Soit la fonction d'utilité CRRA

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \Rightarrow U'(C_t) = C_t^{-\sigma}, \quad \sigma > 1 \quad (5)$$

En utilisant ce résultat dans la CPO pour le capital physique K_t , on obtient notre équation d'Euler:

$$C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \quad (6)$$

Le programme de la firme représentative

Soit Π_t , la fonction de profit de la firme.

Le programme de la firme consiste à choisir les quantités de facteur de production qui permettent de maximiser les profits, ou de manière contraire de minimiser ses coûts sous sa contrainte de production

Dans notre cas de figure, on suppose, que la firme adresse une demande de travail L_t et une demande de capital K_t aux ménages qui eux, en tant que propriétaires du capital et du travail vont offrir ces facteurs de production sur les marchés correspondants.

En supposant une fonction de production Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (7)$$

A chaque période, le profit de la firme s'exprime:

$$\Pi_t = P_t Y_t - W_t L_t - R_t K_{t-1}$$

En remplaçant Y_t par son expression dans la fonction de profit et en dérivant par rapport aux variables de contrôles de la firme $\{K_{t-1}, L_t\}_{t=0}^{\infty}$, on obtient les CPO pour le programme de la firme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = 0 \iff \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t}{P_t} \\ \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \iff (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t} = \frac{W_t}{P_t} \end{cases} \quad (8)$$

Le modèle

Nous avons 8 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t\}_{t=0}^{\infty}$ et deux variables exogènes $\{A_t, \bar{L}_t^S\}_{t=0}^{\infty}$. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut 8 équations. Nous réduisons la dimension du problème en choisissant le prix du bien final comme numéraire $P_t = 1$, souvenez-vous de la loi de Walras, dans une économie où $N - 1$ marchés sont à l'équilibre, alors le N^{me} marché est lui aussi équilibré. Nous pouvons donc réduire le modèle à 7 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$, il nous faut donc 7 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma} (R_{t+1} + 1 - \delta) \\ I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \\ Y_t = C_t + I_t \\ Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = R_t \\ (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} = W_t \end{array} \right.$$

La condition d'équilibre sur les marchés emplois-ressources est obtenue en remplaçant les revenus du travail et du capital par les CPO de la firme. Nous obtenons donc un système de 6 équations pour 7 inconnues, il nous faut donc une dernière équation. Souvenez-vous, nous avons supposé que le ménage offrait de manière exogène son travail aux firmes, nous avons donc :

$$L_t = \bar{L}_t^S \tag{9}$$

Équilibre stationnaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \\ \bar{Y} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\ \bar{K} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\ \bar{I} = \delta \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\ \bar{C} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{L}^S - \delta \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{L}^S \\ \bar{W} = (1 - \alpha) \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{array} \right. \quad (10)$$

The background of the slide features a dark gray or black wireframe graphic of a mountain range. The mountains are rendered with numerous thin, light-colored lines that create a sense of depth and perspective, with the peaks appearing sharper and more defined at the top.

Modèle RBC avec offre de travail endogène

Le programme du ménage

Soit $U(C_t, L_t)$ la fonction d'utilité avec ses propriétés usuelles:

- $U_c(.) > 0$
- $U_{cc}(. < 0,$
- $U_L(.) < 0$
- $U_{LL}(< 0)$

$$\max_{\{C_t, K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, L_t) \quad (11)$$

Le ménage est contraint par son budget:

$$C_t + I_t = \frac{W_t}{P_t} L_T + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \quad (12)$$

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1 - \delta) K_{t-1} \quad (13)$$

Le Lagrangien associé au programme du ménage est :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) + \lambda_t \left(\frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} - K_t + (1 - \delta) K_{t-1} \right) \quad (14)$$

Les CPO:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \iff \frac{\partial U(C_t, L_t)}{\partial C_t} = \lambda_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \iff \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = 0 \iff \frac{\partial U(C_t, L_t)}{\partial L_t} = \lambda_t \frac{W_t}{P_t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff \frac{W_t}{P_t} L_t + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} = C_t + I_t \end{cases} \quad (15)$$

La condition de transversalité:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0 \quad (16)$$

La fonction d'utilité

King Plosser et Rebelo (1988) ont montré que, pour que la fonction d'utilité soit compatible avec un BGP (sentier de croissance équilibré), elle doit prendre la forme

$$U(c_t, Lt) = \frac{\left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu}\right)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \quad \sigma > 1, \quad \nu \in (0, 1) \quad (17)$$

Où le paramètre ν correspond au poids de la consommation dans la fonction de l'utilité, et $1 - \nu$ le poids du travail en terme de désutilité. Et pouvait prendre une forme additive :

$$U(c_t, Lt) = \ln C_t + \Xi \ln (1 - L_t)$$

Correspondant au cas critique de la CRRA quand $\sigma = 1$. Cette version plus simple que la forme multiplicative ne sera pas abordée par la suite.

Fonction d'utilité et travail endogène

Les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ses deux arguments sont :

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = \nu \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \quad (18)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial L_t} = - (1 - \nu) \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} (1 - L_t)^{-1} \quad (19)$$

En utilisant le résultat de la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à la consommation dans la CPO pour le capital physique K_t , on obtient notre équation d'Euler:

$$\left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} = \beta \left(c_{t+1}^\nu (1 - L_{t+1})^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \quad (20)$$

En utilisant les deux dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ces deux arguments dans la CPO pour l'offre de travail, on obtient l'arbitrage entre consommation et travail:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = 0 \iff \frac{\nu - 1}{\nu} P_t C_t = W_t (1 - L_t) \quad (21)$$

L'interprétation économique de cette relation suppose que le ménage est prêt à sacrifier de l'utilité en termes de consommation pour bénéficier d'une unité d'utilité supplémentaire liée à du temps de loisir supplémentaire et est égale au salaire réel.

Le modèle avec offre de travail endogène

Le programme de la firme étant strictement le même, nous omettons volontairement cette partie.

Nous avons 8 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t\}_{t=0}^{\infty}$ et une variable exogène $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut 8 équations. Nous réduisons la dimension du problème en choisissant le prix du bien final comme numéraire $P_t = 1$. Nous pouvons donc réduire le modèle à 7 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$, il nous faut donc 7 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} = \beta \left(c_{t+1}^\nu (1 - L_{t+1})^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \left(\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta \right) \\ I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \\ Y_t = C_t + I_t \\ Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \\ \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = R_t \\ (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} = W_t \end{array} \right.$$

Plus la condition d'abrégrage du ménage entre consommation et travail:

$$\frac{\nu - 1}{\nu} P_t C_t = W_t (1 - L_t) \tag{22}$$

Équilibre stationnaire (1/3)

D'après l'Euler:

$$R = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \quad (23)$$

De l'accumulation de capital:

$$I = \delta K \quad (24)$$

Le ratio K/Y:

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \quad (25)$$

$$Y = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \quad (26)$$

$$W = (1 - \alpha) A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (27)$$

Équilibre stationnaire (2/3)

De l'équation d'arbitrage consommation-travail:

$$-\frac{1-\nu}{\nu}C = W(1-L) \quad (28)$$

De l'équation d'équilibre emplois-ressources:

$$C = Y - \delta K \quad (29)$$

$$C = Y \left(1 - \delta \frac{K}{Y} \right) \quad (30)$$

$$C = Y \left(1 - \delta \frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right) \quad (31)$$

De l'expression de l'équation d'arbitrage consommation-travail, en substituant les expressions précédentes de C , W et Y :

$$-\frac{1-\nu}{\nu} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \left(1 - \delta \frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right) = (1 - \alpha) A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - L) \quad (32)$$

Équilibre stationnaire (3/3)

Après de simples calculs algébriques:

$$L = \frac{(1 - \alpha) \nu (1 - \beta (1 - \delta))}{\nu (1 - \alpha) [1 - \beta (1 - \delta)] - (1 - \nu) [1 - \beta (1 - \delta) \delta \alpha \beta]} \quad (33)$$



Quid de l'Etat?

Le programme de la firme représentative

L'État peut introduire des taxes distorsives sur les firmes :

- τ_t^{ss} : cotisations sociales,
- τ_t^y : taxe sur la production.

Reprendons les hypothèses des modèles précédents :

$$Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (34)$$

À chaque période, le profit de la firme s'écrit :

$$\Pi_t = P_t Y_t (1 - \tau_t^y) - W_t L_t (1 + \tau_t^{ss}) - R_t K_{t-1}$$

En remplaçant Y_t par son expression dans la fonction de profit et en dérivant par rapport aux variables de contrôle $\{K_{t-1}, L_t\}$, on obtient les conditions de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = 0 \iff \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t}{P_t(1 - \tau_t^y)} \\ \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \iff (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} = \frac{W_t(1 + \tau_t^{ss})}{P_t(1 - \tau_t^y)} \end{cases} \quad (35)$$

Le programme du ménage

Le ménage est lui aussi sujet aux taxes imposées par l'Etat:

- il paye la TVA τ^{TVA} lorsqu'il consomme le bien final
- il paye l'impôt sur le revenu τ^{IR}
- En tant que propriétaire il paye l'impôt sur le capital τ^K
- Enfin, on suppose que l'Etat peut aussi fiscaliser les investissements. Nous reviendrons plus loin sur cette hypothèse. On introduit donc τ^{inv} la taxe sur l'investissement
- On introduit une taxe forfaitaire T_t que l'Etat peut prélever directement sur la richesse des ménages

$$\max_{\{C_t, K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, L_t) \quad (36)$$

Le ménage est contraint par son budget:

$$P_t (1 + \tau_t^{TVA}) C_t + P_t (1 + \tau_t^{inv}) I_t + P_t T_t = W_t L_t (1 - \tau_t^{IR}) + R_t K_{t-1} (1 - \tau_t^K) \quad (37)$$

L'investissement obéit à la loi habituelle:

$$I_t = K_t - (1 - \delta) K_{t-1} \quad (38)$$

Programme du ménage représentatif

Lagrangien associé :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(C_t, L_t) + \lambda_t \left[\frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^K) - I_t (1 + \tau_t^{inv}) - C_t (1 + \tau_t^{TVA}) - T_t \right] \right\}$$

Pour dériver les CPO, on remplace I_t par son expression dans le Lagrangien **CPO (1) : arbitrage intertemporel et consommation**

$$U_C(C_t, L_t) = \lambda_t (1 + \tau_t^{TVA})$$

$$\lambda_t (1 + \tau_t^{inv}) = \beta \lambda_{t+1} \left[\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} (1 - \tau_{t+1}^K) + (1 - \delta) (1 + \tau_{t+1}^{inv}) \right]$$

CPO (2) : arbitrage travail/loisir et contrainte budgétaire

$$-U_L(C_t, L_t) = \lambda_t \frac{W_t}{P_t} (1 - \tau_t^{IR})$$

$$\frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^K) = I_t (1 + \tau_t^{inv}) + C_t (1 + \tau_t^{TVA}) + T_t$$

Condition de transversalité :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t K_t = 0$$

On rappelle les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ses deux arguments lorsque l'offre de travail est endogène :

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = \nu \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \quad (39)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial L_t} = - (1 - \nu) \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} (1 - L_t)^{-1} \quad (40)$$

En utilisant le résultat de la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à la consommation dans la CPO pour le capital physique K_t , on obtient notre équation d'Euler:

$$\begin{aligned} & \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \frac{(1 + \tau_t^{inv})}{(1 + \tau_t^{TVA})} \\ &= \beta \left(c_{t+1}^\nu (1 - L_{t+1})^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \frac{1}{(1 + \tau_{t+1}^{TVA})} \left[\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} (1 - \tau_{t+1}^K) + (1 - \delta) (1 + \tau_{t+1}^{inv}) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

En utilisant les deux dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à ces deux arguments dans la CPO pour l'offre de travail, on obtient l'arbitrage entre consommation et travail:

$$\frac{1 - \nu}{\nu} \frac{C_t}{1 - L_t} = \frac{W_t}{P_t} \frac{(1 - \tau_t^{IR})}{(1 + \tau_t^{TVA})} \quad (42)$$

Clôture du modèle

La clôture du modèle est moins évidente que dans les cas précédents.

Pour se faire, exprimons la contrainte budgétaire de l'État. Ce dernier a pour rôle de collecter les taxes et les utilisent sous forme de dépenses publiques G_t . Dans notre cas de figure, la contrainte budgétaire de l'état s'exprime:

$$G_t = \tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \tau_t^{IR} \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^{ss} \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^K R_t K_{t-1} + \tau_t^Y Y_t + T_t \quad (43)$$

L'égalité entre les dépenses publiques et les recettes nous assurent que l'État ne réalise ni déficit ni excédent en toute période.

Comme $\Pi_t = 0$, on peut légèrement modifier la contrainte budgétaire du ménage:

$$(1 + \tau_t^{TVA}) C_t + (1 + \tau_t^{inv}) I_t + T_t = \frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^K) + \frac{\Pi_t}{P_t} \quad (44)$$

Remplaçons Π_t par son expression:

$$(1 + \tau_t^{TVA}) C_t + (1 + \tau_t^{inv}) I_t = \frac{W_t}{P_t} L_t (1 - \tau_t^{IR}) + \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} (1 - \tau_t^K) + \frac{T_t}{P_t} + Y_t (1 - \tau_t^Y) - \frac{W_t}{P_t} L_t (1 + \tau_t^{ss}) - \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} \quad (45)$$

Clôture

Après de simples calculs, en utilisant l'expression de G_t , on obtient :

$$C_t + I_t + \underbrace{\tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \left(\tau_t^{IR_t} + \tau_t^{ss} \right) \frac{W_t}{P_t} L_t + \tau_t^K \frac{R_t}{P_t} K_{t-1} + \tau_t^y Y_t + T_t}_{G_t} = Y_t \quad (46)$$

On aboutit à l'équilibre final dans l'économie:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (47)$$

Le modèle avec Etat

Nous avons

- 9 variables endogènes $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, P_t, G_t\}_{t=0}^{\infty}$
- 7 variables exogènes $\{A_t, \tau_t^{TVA}, \tau_t^{inv}, \tau_t^{IR}, \tau_t^{SS}, \tau_t^K, \tau_t^Y, T_t\}_{t=0}^{\infty}$.
- le numéraire $P_t = 1$

Notre système $\{Y_t, C_t, I_t, L_t, K_t, W_t, R_t, G_t\}_{t=0}^{\infty}$, nécessite donc 8 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(c_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_t^{-1} \frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\ = \beta \left(c_{t+1}^\nu (1 - L_{t+1})^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} C_{t+1}^{-1} \frac{1}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})} [R_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^K) + (1 - \delta)(1 + \tau_{t+1}^{inv})] \\ I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \\ Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \\ \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t}{(1-\tau_t^Y)} \\ (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} = \frac{W_t(1+\tau_t^S s_t)}{(1-\tau_t^Y)} \\ \frac{1-\nu}{\nu} \frac{C_t}{1-L_t} = W_t \frac{(1-\tau_t^{IR})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\ G_t = \tau_t^{TVA} C_t + \tau_t^{inv} I_t + \tau_t^{IR} W_t L_t + \tau_t^{SS} W_t L_t + \tau_t^K R_t K_{t-1} + \tau_t^Y Y_t + T_t \end{array} \right.$$

Équilibre stationnaire (1/4)

$$\bar{R} = \frac{(1 + \tau^{inv})(1 - \beta(1 - \delta))}{(1 - \tau^K)\beta} \quad (48)$$

$$\bar{I} = \delta \bar{K} \quad (49)$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{1}{\alpha} \frac{R}{(1 - \tau^y)} \quad (50)$$

$$\zeta = \frac{K}{Y} \quad (51)$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{L}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \underbrace{\left(\frac{\alpha(1 - \tau^Y)}{\bar{R}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{\phi} \quad (52)$$

Soit

$$\phi \equiv \frac{Y}{L} \quad (53)$$

$$W = (1 - \alpha) \phi \frac{(1 - \tau^y)}{(1 + \tau^{ss})} \quad (54)$$

Équilibre stationnaire (2/4)

D'après la fonction d'investissement:

$$I = \delta K \Rightarrow \frac{I}{Y} = \delta \frac{K}{Y} = \delta \underbrace{\frac{(1 - \tau^Y)}{R}}_{\eta} \quad (55)$$

Donc:

$$I = \eta Y \quad (56)$$

De l'arbitrage itinratemporel entre consommation et travail:

$$\frac{1 - \nu}{\nu} \frac{C}{1 - L} = \frac{W(1 - \tau^{IR})}{(1 + \tau^{TVA})} \Rightarrow C = \kappa(1 - L) \quad (57)$$

Avec:

$$\kappa \equiv \frac{\nu}{1 - \nu} W \frac{(1 - \tau^{IR})}{(1 + \tau^{TVA})} \quad (58)$$

Équilibre stationnaire (3/4)

A l'équilibre stationnaire, le budget de l'Etat s'exprime:

$$G = \tau^{TVA} C + \tau^{inv} I + (\tau^{IR} + \tau^{ss}) WL + \tau^K RK + \tau^Y Y + T \quad (59)$$

L'expression précédente est linéaire en L , à l'aide des formules suivantes:

- $C = \kappa(1 - L)$
- $Y = \phi L$
- $K = \zeta Y$
- $I = \underbrace{\delta \zeta}_{\eta} Y$
- W est constant, dépend exclusivement des paramètres et pas de L

En utilisant ces variables auxiliaires dans la contrainte budgétaire de l'Etat, on obtient:

$$G(L) = \underbrace{\tau^{TVA} + T}_{a_0} + \underbrace{(-\tau^{TVA}\kappa + \tau^{inv}\eta\phi + (\tau^{IR} + \tau^{ss})W + \tau^K R\zeta\phi + \tau^Y\phi)}_{a_1} L \quad (60)$$

Équilibre stationnaire (4/4)

En utilisant les mêmes variables auxiliaires, on peut exprimer l'équation d'équilibre emplois-ressources dans l'économie en fonction de G et de L :

$$\phi L = \kappa (1 - L) + \eta \phi L + G(L) \quad (61)$$

En combinant les deux équations précédentes on obtient l'expression pour L :

$$L = \frac{\kappa + a_0}{\phi (1 - \eta) + \kappa - a_1} \quad (62)$$

The background features a dark, minimalist landscape composed of a dense network of thin white lines forming a wireframe model of a mountain range. Two prominent peaks rise in the center, with a smaller peak to the left. The base of the mountains is obscured by a layer of fine lines, creating a sense of depth and perspective.

le BGP, sentier de croissance équilibré

Productivité et BGP (sentier de croissance équilibré)

Trois formes standard de « productivité » :

- **Hicks-neutre** : $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
- **Augmentant le travail (Harrod)** : $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$
- **Augmentant le capital (Solow)** : $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$

Compatibilité BGP : sous rendements d'échelle constants et concurrence parfaite, seul le *progrès technique augmentant le travail* permet un sentier où les parts de revenu restent constantes et les taux de croissance sont stables.

Exemple Cobb-Douglas (Harrod) :

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}, \quad A_t = A_0 (1+g)^t, \quad L_t = L_0 (1+n)^t$$

Implications de croissance (BGP) :

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \approx (1+g)(1+n) \Rightarrow Y \text{ croît à } g+n, \quad \frac{Y_t}{L_t} \text{ croît à } g, \quad \frac{Y_t}{A_t L_t} \text{ est constant.}$$

La contrainte de l'économie en présence d'un trend de croissance économique équilibré

Reprendons les hypothèses des modèles précédents et intégrons une productivité du travail à la Harrod:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha \left((1 + g)^t L_t \right)^{1-\alpha} \quad (63)$$

À chaque période, la contrainte budgétaire s'exprime:

$$A_t K_{t-1}^\alpha \left((1 + g)^t L_t \right)^{1-\alpha} = C_t + I_t + G_t \quad (64)$$

Si $g > 0$, alors il existe g_k et g_c et g_G tel que:

$$A_1 \left((1 + g_k)^{t-1} K_0 \right)^\alpha \left((1 + g)^t L_1 \right)^{1-\alpha} = (1 + g_c)^t C_1 + (1 + g_k)^t K_1 - (1 - \delta) (1 + g_k)^{t-1} K_0 + G_t (1 + g_G)^t \quad (65)$$

L'unique condition qui permet une croissance équilibrée est :

$$g = g_k = g_c = g_G \quad (66)$$

Variables stationnaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Y}_t = \frac{Y_t}{(1+g)^t} \\ \hat{C}_t = \frac{C_t}{(1+g)^t} \\ \hat{l}_t = \frac{l_t}{(1+g)^t} \\ \hat{K}_t = \frac{K_t}{(1+g)^t} \\ \hat{G}_t = \frac{G_t}{(1+g)^t} \\ \hat{W}_t = \frac{W_t}{(1+g)^t} \end{array} \right.$$

Remplaçons dans le modèle précédent, l'expression des variables stationnarisées

Modèle stationnaire

$$\left\{
 \begin{aligned}
 & \left(\hat{C}_t^\nu (1 - L_t)^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} \hat{C}_t^{-1} \frac{(1+\tau_t^{inv})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\
 = \beta \left(\hat{C}_{t+1}^\nu (1 - L_{t+1})^{1-\nu} \right)^{1-\sigma} & \left(\hat{C}_{t+1} \right)^{-1} \frac{(1+g)^{\nu(1-\sigma)-1}}{(1+\tau_{t+1}^{TVA})} [R_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^K) + (1 - \delta)(1 + \tau_{t+1}^{inv})] \\
 \hat{l}_t &= \hat{K}_t - (1 - \delta) \frac{\hat{k}_{t-1}}{(1+g)} \\
 \hat{Y}_t &= \hat{C}_t + \hat{l}_t + \hat{G}_t \\
 \hat{Y}_t &= A_t \left(\frac{\hat{k}_{t-1}}{(1+g)} \right)^\alpha L_t^{1-\alpha} \\
 \alpha \frac{\hat{Y}_t(1+g)}{\hat{K}_{t-1}} &= \frac{R_t}{(1-\tau_t^y)} \\
 (1 - \alpha) \frac{\hat{Y}_t}{L_t} &= \frac{\hat{W}_t(1+\tau^s s_t)}{(1-\tau_t^y)} \\
 \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\hat{C}_t}{1-L_t} &= \hat{W}_t \frac{(1-\tau_t^{IR})}{(1+\tau_t^{TVA})} \\
 \hat{G}_t &= \tau_t^{TVA} \hat{C}_t + \tau_t^{inv} \hat{l}_t + \tau_t^{IR} \hat{W}_t L_t + \tau_t^{ss} \hat{W}_t L_t + \tau_t^K R_t \frac{\hat{k}_{t-1}}{(1+g)} + \tau_t^y \hat{Y}_t + \hat{T}_t
 \end{aligned}
 \right.$$

Équilibre stationnaire du modèle stationnarisé 1/3

En utilisant le système de variable auxiliaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta \equiv \frac{\alpha(1+g)(1-\tau^Y)}{R} \\ \phi \equiv A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha(1-\tau^Y)}{R} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \eta \equiv \frac{\hat{K}}{\hat{Y}} \frac{(g+\delta)}{(1+g)} \\ \kappa \equiv \frac{\nu}{(1-\nu)} \hat{W} \frac{(1-\tau^{LR})}{(1+\tau^{TVA})} \end{array} \right.$$

Équilibre stationnaire 2/3

$$R = \frac{(1 + \tau^{inv}) \left[1 - \beta (1 - \delta) (1 + g)^{1+\nu(1-\sigma)} \right]}{(1 - \tau^K) \beta (1 + g)^{\nu(1-\sigma)-1}} \quad (67)$$

$$\hat{l} = \hat{K} \frac{(g + \delta)}{(1 + g)} \quad (68)$$

$$\hat{Y} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha (1 - \tau^y)}{R} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \quad \Rightarrow \quad \hat{Y} = \phi L \quad (69)$$

$$\hat{W} = (1 - \alpha) \phi \frac{(1 - \tau^y)}{(1 + \tau^{ss})} \quad (70)$$

$$\frac{\hat{l}}{\hat{Y}} = \eta \quad (71)$$

$$\hat{C} = \kappa (1 - L) \quad (72)$$

Équilibre stationnaire 3/3

$$\hat{G} = \underbrace{\tau^{TVA}\kappa + \hat{T}}_{a_0} + \underbrace{\left[-\tau^{TVA\kappa} + \tau^{inv}\eta\phi + (\tau^{IR} + \tau^{ss})\hat{W} + \tau^K R \frac{\zeta\phi}{1+g} + \tau^Y\phi \right] L}_{a_1} \quad (73)$$

$$L = \frac{a_0 + \kappa}{\phi + \kappa - \eta\phi - a_1} \quad (74)$$

Merci beaucoup pour votre attention!