



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE MARRAKECH

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Géodésiques des surfaces

Auteur :

Mehdi NABIL

Encadrant :

Pr. Abdelhak ABOUQATIB

13 juin 2013

Remerciements

J'adresse très spécialement mes sincères remerciements au professeur et encadrant **Pr. Abdelhak Abouqatib** pour son dévouement à l'enseignement, le temps précieux qu'il a offert afin de soutenir ce projet et sa pédagogie remarquable qui nous a permis, et moi en particulier, d'éclaircir divers notions en mathématiques et d'élargir nos perceptions concernant le domaine en question.

Je tient à également remercier tous les professeurs au département des mathématiques de la faculté des sciences et techniques de Marrakech pour leurs contributions à la consistance de cette formation et pour leur coordination des éléments les plus importants permettant des études aisés en matières de mathématiques et facilitant ainsi la réussite.

Préface

La théorie des géodésiques se situe à l'intersection de plusieurs domaines, notamment la géométrie différentielle, la mécanique et le calcul de variations. La question sur les géodésiques fut en premier posé comme étant un problème de minimisation par **Jean Bernoulli** : *Quel est le chemin le plus court entre deux points sur une surface ?*, ce qui peut être aussi formulé, en termes de la mécanique : *Quelle est la trajectoire la plus courte que parcourt une particule contrainte à rester sur une surface sous l'effet d'une force mécanique ?*.

Bien que le problème peut sembler simple d'énoncé, en particulier lorsque la surface en question est un plan puisqu'on sait tous que le chemin le plus court reliant deux points sur un plan est un segment de droite, il n'est pas du tout le cas pour une variété quelconque. L'apparition des méthodes de résolution des équations différentielles dans le cadre du calcul variationnel et de la géométrie différentielle à fournir la possibilité d'étudier les géodésiques, ou du moins d'encadrer le problème et de démontrer quelques premières idées, œuvres de l'intuition, comme par exemple l'existence et l'unicité des géodésiques et donnant ainsi un goût *local* à la réponse. Ce n'est qu'après l'apparition d'une perspective qualitative dans l'étude des solutions d'une équation différentielle avec **Jacobi**, **Sturm** et **Liouville** qu'une analyse globale et qualitative du comportement des géodésiques n'a été mise au point, cela a effectivement atténué la férocité du problème mais il existe d'autres difficultés dont la plus abondante est l'impossibilité d'illustrer de façon exacte ces géodésiques : on a recours la plupart du temps à des approximations numériques. Mais vivement, les contributions de plusieurs mathématiciens au sujet et à des sujets voisins, comme **Euler**, **Poincaré**, **Gauss**, **Darboux**, **Riemann** ont permis au problème le titre de *théorie* et ont détaché les mathématiques des points de vue extrinsèques, permettant une étude intrinsèque des surfaces et des variétés en générales les munissant de topologies "*usuelles*" pour une analyse plus aisée et une compréhension plus profonde de l'univers. L'objectif de ce rapport de fin d'étude et de présenter les généralités sur les géodésiques dans le cas précis des surfaces en utilisant des outils principalement de la géométrie différentielle, cela nous oblige certainement à aborder divers sujets dans divers chapitre avant de nous mettre à pied afin d'étudier le problème centrale, qui est les géodésiques des surfaces, et pouvoir éventuellement l'approcher au sens du calcul variationnel vers la fin du rapport qui sera aussi, sous entendu, une présentation de ce thème. Il existe dans ce rapport des résultats importants dont nous n'avons pas énoncé les démonstrations afin de ne pas s'éloigner du cadre de travail et vu leur complexité et le bagage mathématiques qu'elles utilisent, nous avons cependant laissé des références pour le lecteur qui souhaite s'informer davantage. Pour une bonne présentation du matériel de ce rapport et une transmission plus claire de certaines notions, nous avons vu d'adopter le plan suivant :

Courbes dans l'espace

Surfaces régulières

Première forme fondamentale et courbure normale

Géodésiques des surfaces

Isométries

Géodésiques et distances : Approche variationnelle

Je vous espère une excellente lecture et une bonne compréhension.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Courbes dans l'espace | 4 |
| 1.1 | Généralités sur les courbes | 4 |
| 1.2 | Longueur d'un arc | 8 |
| 1.3 | Courbure d'une courbe dans l'espace | 12 |
| 2 | Surfaces régulières | 14 |
| 2.1 | Définition d'une surface | 14 |
| 2.2 | Plan Tangent à une surface | 24 |
| 2.3 | Orientabilité | 26 |
| 3 | Première forme fondamentale et courbure normale | 31 |
| 3.1 | Première forme fondamentale | 31 |
| 3.2 | Courbure normale | 33 |
| 4 | Géodésiques des surfaces | 34 |
| 4.1 | Généralités sur les Géodésiques | 35 |
| 4.1.1 | Géodésiques d'une surface de révolution | 39 |
| 4.2 | Courbure Géodésique | 42 |
| 4.3 | Géodésiques et distances | 49 |
| 5 | Isométries | 58 |
| 5.1 | Propriétés des isométries | 58 |
| 5.2 | Isométries et géodésiques d'une surface | 61 |
| 6 | Géodésiques et distance : Approche variationnelle | 66 |
| 6.1 | Le chemin le plus court pour joindre deux points d'une surface | 66 |
| 6.2 | Position du problème | 68 |
| 6.2.1 | L'espace des courbes de classe \mathcal{C}^1 | 68 |
| 6.2.2 | Fonctionnelle attachée à une courbe | 69 |
| 6.2.3 | Un problème de minimisation | 71 |
| 6.2.4 | Transformation de la condition de l'extrémum | 72 |
| 6.3 | Etude de l'équation d'Euler : Exemple des géodésiques d'une surface | 74 |
| | Bibliographie | 76 |

Chapitre 1

Courbes dans l'espace

1.1 Généralités sur les courbes

Cette section va se focaliser sur la définition de notions fondamentales des courbes dans l'espace sur lesquels nous allons nous appuyer tout au long de notre étude, et que nous allons développer durant les sections suivantes de ce chapitre pour aboutir à des résultats importants qui seront utilisés dans des problèmes plus générales.

Il existe différentes façons pour définir une courbe, mais ce dont nous sommes concernés est l'aspect globale d'une courbe en termes de paramétrisations globales, la définition suivante va tracer le chemin de notre approche.

Définition 1.1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $n \geq 2$, une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^n est une application $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k , où I est un intervalle de \mathbb{R} . L'image $\sigma(I)$ est appelée support de la courbe σ . Si $I = [a, b]$ et $\sigma(a) = \sigma(b)$, on dira que la courbe est fermée.

Exemple 1.1.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Son graphe correspond à :

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)) | t \in I\}$$

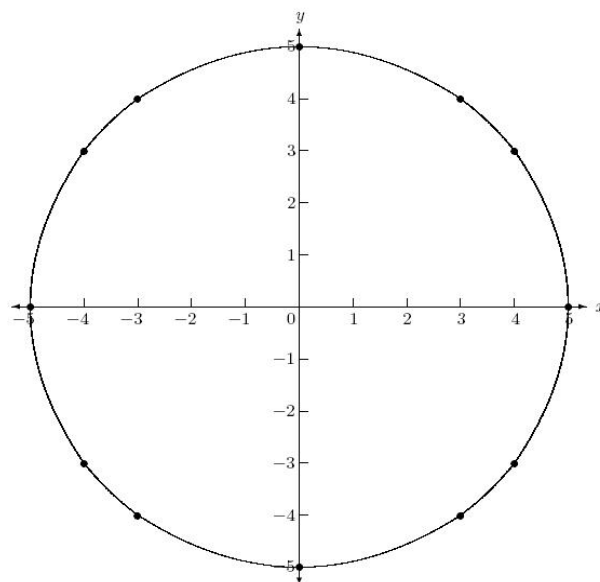
Si on considère $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par : $\sigma(t) = (t, f(t))$

Il est clair que σ est une courbe paramétrée, continue de I dans \mathbb{R}^2 son support est égal à Γ_f .

Exemple 1.1.2. L'application $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par : $\sigma(t) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$ est clairement une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ . De plus, si on note $(x(t), y(t)) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$ on constate que :

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = r^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc le support de σ correspond au cercle C de centre (x_0, y_0) et de rayon r . On peut aussi remarquer que la paramétrisation σ n'est pas injective, σ est une paramétrisation périodique du cercle C puisqu'elle parcourt le cercle tout entier sur tout intervalle de longueur 2π .



8.

FIGURE 1.1 – Un cercle

Exemple 1.1.3. Soient $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ tels que $v_1 \neq O$. La courbe paramétrée $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par : $\sigma(t) = v_0 + tv_1$, possède comme image la ligne droite passant par v_0 et de direction v_1

Exemple 1.1.4. On considère $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\sigma(t) = (r \cos(t), r \sin(t), t)$$

avec $r \geq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$. σ est une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ , son support est exactement l'hélice circulaire de rayon r et de pas a .

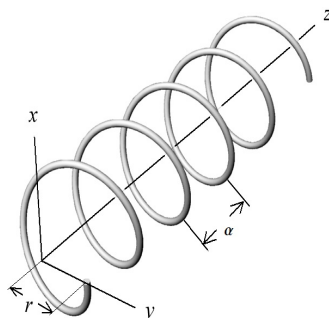


FIGURE 1.2 – L'hélice circulaire

Si on connaît désormais une paramétrisation d'une courbe (ou le support d'une courbe paramétrée) dans l'espace, on se demande s'il en existe d'autres. La réponse est généralement oui, au sens où il est question de *préserver le support de la première paramétrisation*

ainsi que ses propriétés topologique. En termes mathématique, si σ est une courbe paramétrée définie sur un intervalle I de \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^k , on peut trouver une nouvelle paramétrisation de son support en composant σ par un \mathcal{C}^k -difféomorphisme noté $h : J \rightarrow I$ où J est un intervalle de \mathbb{R} . Cette composition n'est qu'un changement de la vitesse de parcours du support de σ .

Définition 1.1.2. Deux courbes paramétrées $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme $h : \tilde{I} \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^k tel que $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h$. On dit aussi que $\tilde{\sigma}$ est reparamétrisation de σ , et que h est un changement de paramètre.

Cette dernière définition d'"équivalence" entre deux courbes paramétrées est à vrai dire une *Relation d'équivalence* : en effet, on observe clairement les propriétés de réflexivité, symétrie et de transitivité. Ceci va nous permettre de ne pas se limiter dans notre définition à une paramétrisation particulière d'une courbe dans l'espace, mais plutôt de définir la courbe (qui est effectivement un ensemble de points de \mathbb{R}^n) comme la *classe d'équivalence* de toutes les paramétrisations équivalentes conformément à la définition précédente, et qui sera d'ailleurs une définition naturelle de la notion de la courbe puisque cette dernière est indépendante de la vitesse de parcours.

Définition 1.1.3. Une courbe de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^n est une classe d'équivalence de courbes paramétrée de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^n .

Tout élément de la classe d'équivalence est une paramétrisation de la courbe. Le support d'une courbe est le support de n'importe quelle paramétrisation de la courbe.

Une courbe plane est une courbe dans \mathbb{R}^2 .

Il ne faudrait tout de même pas confondre une courbe avec son support est dire par exemple que "deux courbes sont équivalentes si et seulement si elles possèdent le même support". Cette assertion est évidemment fausse puisque pour deux courbes σ_1 et σ_2 appartenant à la même classe, Si σ_1 est injective alors σ_2 est aussi injective et donc une paramétrisation qui parcourt un chemin de fois n'est jamais équivalente à une paramétrisation que ne le parcourt qu'une seule fois bien que le chemin (donc le support) des deux paramétrisations est le même.

Définition 1.1.4. Un arc de Jordan (ou arc simple) de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^n est une courbe C admettant une paramétrisation $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est un homéomorphisme avec son image, où I est un intervalle de \mathbb{R} .

Dans ce cas σ est dite paramétrisation globale de C . Si I est un intervalle ouvert (resp. fermé), on dira que C est un arc ouvert (resp. fermé).

Cette définition d'arc simple met en cause la notion de parcours d'un chemin une et une seule fois qui donne l'injectivité de la paramétrisation.

Exemple 1.1.5. Comme on peut le remarquer dans les exemples les graphes, lignes droites et les hélices circulaires sont des arcs de Jordan

Définition 1.1.5. Une courbe de Jordan de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^n est une courbe C fermée admettant pour paramétrisation $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, injective sur $[a, b)$ et $(a, b]$. En particulier, l'image de C est homéomorphe à un cercle.

Une extension $\hat{\sigma}$ de σ sur un intervalle de \mathbb{R} contenant $[a, b]$ est dite paramétrisation périodique de C .

Exemple 1.1.6. L'ellipse $E \subset \mathbb{R}^2$ de demi-axes $a, b \geq 0$ est définie par : $E = f^{-1}\{0\}$ avec $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

Une paramétrisation périodique de classe \mathcal{C}^∞ de E est l'application $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\sigma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ comme on pourra facilement vérifier.

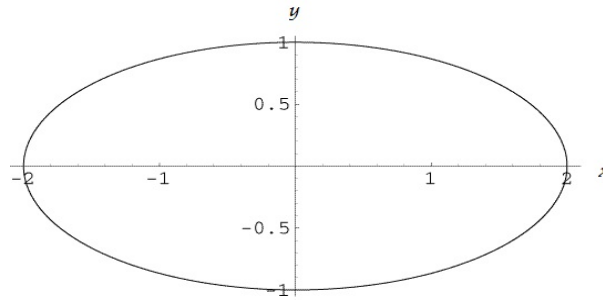


FIGURE 1.3 – Une ellipse

Exemple 1.1.7. L'hyperbole $I \subset \mathbb{R}^2$ de demi-axes $a, b \geq 0$ s'écrit sous la forme :

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

Une paramétrisation globale de la composante de I contenue dans le demi plan droit est l'application $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par : $\sigma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$.

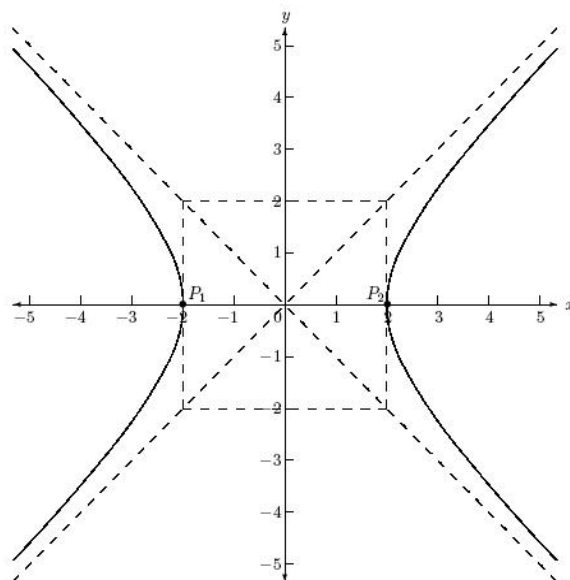


FIGURE 1.4 – Une hyperbole

On arrive à présent à la définition qui concerne le sens de parcours d'une courbe

Définition 1.1.6. Deux courbes paramétrées $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k sont équivalentes avec même orientation s'il existe un changement de paramètre $h : \tilde{I} \longrightarrow I$ de $\tilde{\sigma}$ à σ de dérivée partout positive ; les deux courbes sont équivalentes avec orientation opposée si la dérivée de h est partout négative. Une courbe orientée est donc une classe d'équivalence de courbes paramétrées avec même orientation.

Exemple 1.1.8. Si $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée, alors la paramétrisation $\sigma^- : -I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par : $\sigma^-(t) = \sigma(-t)$ avec $-I = \{t \in \mathbb{R} \mid -t \in I\}$, est équivalente à σ mais avec orientation opposée.

1.2 Longueur d'un arc

Dans cette section nous allons définir la notion de *longueur d'une courbe* et introduire une formule simple pour la calculer dans le cas des courbes de classe \mathcal{C}^1 . De plus nous allons définir une paramétrisation naturelle liée à la longueur de la courbe.

Définition 1.2.1. Soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe (au moins) \mathcal{C}^1 .

Le vecteur $\sigma'(t)$ est le vecteur tangent à la courbe au point $\sigma(t)$. Si $t_0 \in I$ est tel que $\sigma'(t) \neq O$, alors la ligne passant par $\sigma(t_0)$ et parallèle à $\sigma'(t_0)$ est la ligne tangente affine à la courbe au point $\sigma(t_0)$.

Finalement, si pour tout $t \in I$ $\sigma'(t) \neq O$, on dit que σ est régulière.

Exemple 1.2.1. Les graphes, cercles, lignes droites, hélices circulaires présentés dans les exemples sont des courbes régulières.

Définition 1.2.2. Soit $I = [a, b]$ un intervalle. Une partition \mathcal{P} de I est un $(k+1)$ -upplet $(t_0, \dots, t_k) \in [a, b]^{k+1}$ avec $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$. Si \mathcal{P} est une partition de I , on pose :

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{2 \leq j \leq k} |t_j - t_{j-1}|$$

La manière la plus normale d'approcher la longueur d'une courbe en se donnant des points voisins du support de la courbe et de calculer la longueur du segment de droite liant tous deux de ces points, la somme de ces longueurs se rapproche de la longueur réelle de la courbe d'autant plus qu'il y a de points de subdivision et on observe alors un phénomène de convergence, traduisons cela mathématiquement :

Définition 1.2.3. Etant donné une courbe paramétrée $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et une partition \mathcal{P} de $[a, b]$, on note par :

$$L(\sigma, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|$$

la longueur de la courbe polygonal fermée passant par les points $\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_k)$. On dira que σ est rectifiable si la limite

$$L(\sigma) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} L(\sigma, \mathcal{P})$$

existe et est finie. Cette limite est exactement la longueur de σ

On donne maintenant une formule permettant un calcul pratique de la longueur d'une courbe de classe \mathcal{C}^∞

Théorème 1.2.1. Toute courbe paramétrée $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 est rectifiable et on a :

$$L(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (1.1)$$

Démonstration. Puisque σ est de classe \mathcal{C}^1 , alors σ' est bornée puisqu'elle continue sur un compact. De plus on a l'inégalité :

$$\|\sigma'(t)\| \leq \max_{t \in [a, b]} (\|\sigma'(t)\|)$$

et donc l'intégrale de $\|\sigma'\|$ sur le segment $[a, b]$ existe et est de valeur finie.

On doit donc prouver que pour tout $\epsilon \geq 0$, il existe $\delta \geq 0$ tel que si \mathcal{P} est une partition de $[a, b]$ avec $\|\mathcal{P}\| \leq \delta$ alors :

$$|\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - L(\sigma, \mathcal{P})| \leq \epsilon \quad (1.2)$$

On remarque que, pour toute partition $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ de $[a, b]$ et pour tout $j = 1, \dots, k$, on a :

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(t)\| dt$$

En sommant sur j on obtient que :

$$L(\sigma, \mathcal{P}) \leq \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (1.3)$$

On fixe maintenant $\epsilon \geq 0$.

L'application σ' est continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n elle est donc uniformément continue. Cela implique l'existence d'un $\delta \geq 0$ tel que :

$$|t - s| \leq \delta \Rightarrow \|\sigma'(t) - \sigma'(s)\| \leq \frac{\epsilon}{b - a} \quad (1.4)$$

pout tout $t, s \in [a, b]$.

Soit $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ une partition de $[a, b]$ avec $\|\mathcal{P}\| \leq \delta$.

Pour tout $j = 1, \dots, k$ et $s \in [t_{j-1}, t_j]$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1}) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(s) dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sigma'(t) - \sigma'(s)) dt \\ &= (t_j - t_{j-1})\sigma'(s) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sigma'(t) - \sigma'(s)) dt \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| &\geq (t_j - t_{j-1}) \|\sigma'(s)\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(t) - \sigma'(s)\| dt \\ &\geq (t_j - t_{j-1}) \|\sigma'(s)\| - \frac{\epsilon}{b - a} (t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $s, t \in [t_j, t_{j-1}]$ signifie que $|t - s| \leq \delta$ et on peut donc appliquer (1.4). On a donc

$$\frac{\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}} \geq \|\sigma'(s)\| - \frac{\epsilon}{b - a}$$

et en intégrant sur le segment $[t_{j-1}, t_j]$ suivant la variable s on obtient que

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(s)\| ds - \frac{\epsilon}{b - a} (t_j - t_{j-1})$$

enfin, une sommation sur $j = 1, \dots, k$ donne

$$L(\sigma, \mathcal{P}) \geq \int_a^b \|\sigma'(s)\| ds - \epsilon$$

et d'après cette inégalité ainsi que l'inégalité (1.3) on obtient (1.2) qui est exactement le résultat souhaité. \square

Corollaire 1.2.1. *La longueur est une propriété géométrique des courbes de classe \mathcal{C}^1 , c'est à dire qu'elle ne dépend pas d'une paramétrisation particulière. Deux courbes paramétrées équivalentes de classe \mathcal{C}^1 (définies sur un intervalle compact) possède la même longueur.*

Démonstration. Soit $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\sigma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées équivalentes, et $h : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow [a, b]$ le changement de paramètres de $\tilde{\sigma}$ à σ . Alors

$$L(\tilde{\sigma}) = \int_a^b \|\tilde{\sigma}'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(h(t))\| |h'(t)| dt = \int_a^b \|\sigma'(\tau)\| d\tau = L(\sigma)$$

□

Il est temps d'introduire une paramétrisation *canonique* d'une courbe régulière. Si σ est une courbe régulière, on sait que ni sa longueur ni son support ne dépendent de sa vitesse de parcours, on choisit à présent un représentant de cette classe, c'est à dire une paramétrisation, définie sur intervalle de longueur égale à la longueur de la courbe, ce qui implique que la vitesse de parcours de la courbe est unitaire.

Toutes les propriétés géométriques liés à une courbe régulière seront définies à partir de sa paramétrisation canonique.

Définition 1.2.4. Soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 1$).

Si on fixe t_0 dans I , la longueur d'arc de σ (mesurée en partant de t_0) est l'application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k donnée par :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$$

On dira que σ est paramétrée par longueur d'arc ou parcourue à vitesse constante unitaire si $\|\sigma'\| := 1$. En d'autres termes, σ est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $s(t) = t - t_0$ pour tout $t \in I$.

Théorème 1.2.2. Toute courbe régulière admet une unique paramétrisation par longueur d'arc (à une constante près).

Plus précisément, soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de classe \mathcal{C}^k . En fixant $t_0 \in I$, on note par $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la longueur d'arc de σ mesurée en partant de t_0 . Alors $\tilde{\sigma} := \sigma \circ s^{-1}$ est l'unique (à une constante près) courbe de classe \mathcal{C}^k paramétrée par longueur d'arc qui est équivalente à σ et possédant la même orientation que celle-ci.

Démonstration. On remarque que $s' := \|\sigma'\|$ est partout positive, donc $s : I \longrightarrow s(I)$ est strictement croissante de classe \mathcal{C}^k possédant un inverse de classe \mathcal{C}^k entre les intervalles I et $\tilde{I} = s(I)$. Donc $\tilde{\sigma} := \sigma \circ s^{-1} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée équivalente à σ et possédant la même orientation. De plus

$$\tilde{\sigma}' = \frac{\sigma'(s^{-1}(t))}{\|\sigma'(s^{-1}(t))\|}$$

et donc, $\|\tilde{\sigma}'\| := 1$ d'où l'existence de la paramétrisation par longueur d'arc.

En ce qui concerne l'unicité, soit σ_1 une autre courbe paramétrée par longueur d'arc équivalente à σ et possédant la même orientation.

Cela signifie que σ_1 est équivalente à $\tilde{\sigma}$ et il existe alors un changement de paramètre h de dérivée positive tel que $\sigma_1 := \tilde{\sigma} \circ h$. D'après le corollaire 1.2.1 on obtient que $|h'| := 1$, mais $h' \geq 0$ et donc $h' := 1$, ce qui veut dire que $h(t) = t + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire, et donc σ_1 est obtenue à partir de $\tilde{\sigma}$ par une translation sur le paramètre.

Et donc la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe est unique à une constante près.

□

Un calcul des dérivées de la paramétrisation par longueur d'arc donne

$$\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) = \|\sigma'(t)\| \sigma(\dot{s}(t))$$

on a alors :

$$\dot{\sigma}(s) = \frac{1}{\|\sigma(s^{-1}(s))\|} \sigma'(s^{-1}(s))$$

Dans tout ce qui suit les dérivées de la paramétrisation par longueur d'arc seront notées par un point ($\dot{}$) et les dérivées d'une paramétrisation quelconque par un prime ($'$).

Exemple 1.2.2. Soit $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une ligne droite paramétrée comme dans l'exemple. Alors la longueur de l'arc de σ en commençant de 0 est $s(t) = \|v_1\| t$, et donc $s^{-1}(s) = \frac{s}{\|v_1\|}$. Donc une paramétrisation de la ligne droite par longueur d'arc est donnée par :

$$\tilde{\sigma}(s) = v_0 + sv_1 / \|v_1\|.$$

Exemple 1.2.3. Soit $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la paramétrisation du cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r \geq 0$ donnée par $\sigma(t) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$. La longueur de l'arc σ partant de la valeur 0 est $s(t) = rt$, d'où $s^{-1}(s) = \frac{s}{r}$. En particulier, une paramétrisation $\tilde{\sigma} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par longueur d'arc du cercle est donnée par

$$\tilde{\sigma}(s) = (x_0 + r \cos(s/r), y_0 + r \sin(s/r)).$$

Exemple 1.2.4. Pour l'hélice circulaire $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de rayon $r \geq 0$ et de pas $a \in \mathbb{R}^*$ décrit dans l'exemple on a : $\|\sigma'\| = \sqrt{r^2 + a^2}$. Et donc sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par

$$\tilde{\sigma}(s) = (r \cos(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}), r \sin(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}), \frac{as}{\sqrt{r^2 + a^2}}).$$

Exemple 1.2.5. Bien que la paramétrisation par longueur d'arc existe, il n'est pas toujours possible de l'expliciter puisqu'elle correspond au calcul de l'inverse d'une application définie par une intégrale. Donc notre utilisation de cette paramétrisation se limitera à introduire des quantités géométriques, et on utilisera pour le calcul de ces quantités des paramétrisations définies explicitement.

1.3 Courbure d'une courbe dans l'espace

Définition 1.3.1. Soit $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de classe \mathcal{C}^k . Le vecteur tangent unitaire associé à σ est l'application $t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^{k-1} donnée par

$$t = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$$

On dira aussi que le vecteur $t(s)$ est tangent à la courbe σ au point $\sigma(s)$.

Définition 1.3.2. Soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la courbe régulière de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 2$) paramétrée par longueur d'arc. La courbure de σ est la fonction $\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^{k-2} donnée par :

$$\kappa(s) = \| \dot{t}(s) \| = \| \ddot{\sigma}(s) \|$$

On dira que σ est birégulière si sa courbure κ est partout non nulle. Dans ce cas, le rayon de courbure de σ au point $\sigma(s)$ est $r(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$.

Exemple 1.3.1. Soit $\sigma : [0, 2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r \geq 0$, paramétrée par la longueur d'arc comme dans l'exemple alors

$$t(s) = \dot{\sigma}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)) \text{ et } \dot{t}(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))$$

et donc σ possède une courbure constante égale à $\frac{1}{r}$, c'est la raison pour laquelle l'inverse de la courbure est appelé rayon de courbure.

Exemple 1.3.2. Soit $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'hélice circulaire de rayon $r \geq 0$ et de pas $a \in \mathbb{R}^*$, paramétrée par la longueur d'arc comme dans l'exemple alors,

$$t(s) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

et

$$\dot{t}(s) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right), 0 \right)$$

et donc l'hélice circulaire est à courbure constante

$$\kappa := \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

le vecteur \dot{t} possède bien évidemment une signification géométrique, c'est la direction que suit la courbe et la variation du vecteur t , le vecteur t étant de norme constante donne principalement que :

$$\langle t, \dot{t} \rangle := 0$$

et donc \dot{t} est orthogonal au vecteur t en tout point, on énonce alors la définition suivante :

Définition 1.3.3. Soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe birégulière de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 2$) paramétrée par longueur d'arc.

Le vecteur normal à σ est l'application $n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^{k-2} donnée par :

$$n = \frac{\dot{t}}{\| \dot{t} \|} = \frac{\dot{t}}{\kappa}$$

le plan affine passant à $\sigma(s)$ et de direction $\text{vect}(t(s), n(s))$ et le plan osculateur à la courbe en $\sigma(s)$. Et donc un plan osculateur constant le long de la courbe σ signifie exactement que σ est une courbe plane.

Chapitre 2

Surfaces régulières

Ce chapitre est une initiation inévitable à notre étude principale sur les géodésiques des surfaces, elle concerne de trouver la meilleure façon, adaptée à l'étude pour représenter une surface de l'espace \mathbb{R}^3 .

Le but est d'observer la surface, localement, comme un ouvert du plan \mathbb{R}^2 , une autre manière de formuler ceci est de construire des homéomorphismes d'un ouvert du plan \mathbb{R}^2 vers un ouvert de la surface notée par exemple S , et ainsi transporter une topologie déjà connue du plan \mathbb{R}^2 sur la S .

On s'intéresse aussi à la notion de plan tangent à une surface, et dans ce cas, nous limiterons notre choix aux homéomorphismes de différentielle injective.

2.1 Définition d'une surface

Avant d'aborder directement la définition qu'on utilisera tout au long de ce projet, il est nécessaire que cette définition ait un sens, et donc on commence par la définition suivante :

Définition 2.1.1. *Une surface d'immersion dans l'espace est une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, tel que la différentielle $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soit injective en tout point $x \in U$.*

L'image $\varphi(U)$ de φ est le support de la surface d'immersion.

On va montrer que les surfaces d'immersions sont du type mentionner plus haut, des homéomorphismes locaux sur leurs supports, nous avons besoin, en un premier temps, du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface d'immersion, où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert. Alors pour tout $x_0 \in U$ il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de $(x_0, 0) \in U \times \mathbb{R}$, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^3$ de $\varphi(x_0)$, et un difféomorphisme $G : \Omega \longrightarrow W$ vérifiant :*

$$G(x, 0) = \varphi(x)$$

pour tout $(x, 0) \in \Omega \cap (U \times \{0\})$.

Démonstration. Par définition d'une surface d'immersion, on sait que sa différentielle est injective en tout point $x \in U$.

On représente la différentielle de φ par la matrice Jacobienne dans les bases canoniques

de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

On a : $d\varphi_x := (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2}$

La différentielle est injective signifie exactement qu'on peut extraire de la matrice jacobienne de φ une matrice inversible en éliminant une ligne, on suppose que c'est la troisième ligne. Donc :

$$\det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2} \neq 0$$

Soit $x_0 \in U$, On définit l'application :

$$\begin{aligned} G : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, t) &\longrightarrow \varphi(x_1, x_2) + (0, 0, t) \end{aligned}$$

On a : $\det JacG(x_0, 0) = \det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2} \neq 0$

puisque $G(x, 0) = \varphi(x)$ pour tout $x \in U$

on achève la démonstration par le théorème d'inversion locale qui nous donne un voisinage $\Omega \subset U \times \mathbb{R}$ de $(x_0, 0)$ et un voisinage $W \subset \mathbb{R}^3$ de $\varphi(x_0)$ tel que $G|_{\Omega}$ est un difféomorphisme entre Ω et W . \square

Corollaire 2.1.1. *Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface d'immersion. Alors tout $x_0 \in U$ possède un voisinage $U_0 \subset U$ tel que $\varphi|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un homéomorphisme avec son image.*

Démonstration. On conserve les notations du lemme 2.1.1 et on considère le difféomorphisme $G : \Omega \longrightarrow W$ précédemment donné.

On note $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur les deux premières coordonnées, et on pose $U_0 = \pi(\Omega \cap (U \times \{0\}))$.

Alors $\varphi(x) = G(x, 0)$ pour tout $x \in U_0$,

On en déduit que $\varphi|_{U_0}$ est un homéomorphisme avec son image \square

On est maintenant en mesure de définir la notion de surface régulière qu'on utilisera tout au long de cette étude.

Définition 2.1.2. *Un sous ensemble connexe $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière dans l'espace \mathbb{R}^3 si pour tout $p \in S$ il existe une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , avec $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, vérifiant :*

- (a)- $\varphi(U) \subset S$ est un voisinage ouvert de p dans S .
- (b)- φ est un homéomorphisme avec son image.
- (c)- la différentielle $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injective pour tout $x \in U$.

Tout application satisfaisant 2.1.2 (a)-(c) est une *paramétrisation locale* de S en p ; si $O \in U$ et $\varphi(O) = p$ on dit que la paramétrisation locale est *centrée* en p .

l'application inverse $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ est appelée *carte locale* de S en p ; le voisinage $\varphi(U)$ de p dans S est appelé *voisinage coordonné*, les coordonnés $(x_1(p), x_2(p)) = \varphi^{-1}(p)$ sont appelés *coordonnées locaux* de p , et pour $j = 1, 2$, la courbe $t \longrightarrow \varphi(x_0 + te_j)$ est appelée la *j-ième ligne coordonnée* passant par $\varphi(x_0)$.

On comprend maintenant l'intérêt de la notion de surface d'immersion, plus précisément la démonstration du Corollaire 2.1.1, car en effet, elle permet de justifier l'existence des surfaces régulières.

Définition 2.1.3. *Un atlas pour une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ est une famille $\mathcal{A} = \varphi_\alpha$ de paramétrisations locales $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow S$ telle que : $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.*

Exemple 2.1.1. Le plan $S \subset \mathbb{R}^3$ passant par $p_0 \in \mathbb{R}^3$ et parallèle à la famille libre de vecteurs $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^3 est une surface régulière consistant de l'unique paramétrisation $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par : $\varphi(x_1, x_2) = p_0 + x_1v_1 + x_2v_2$.

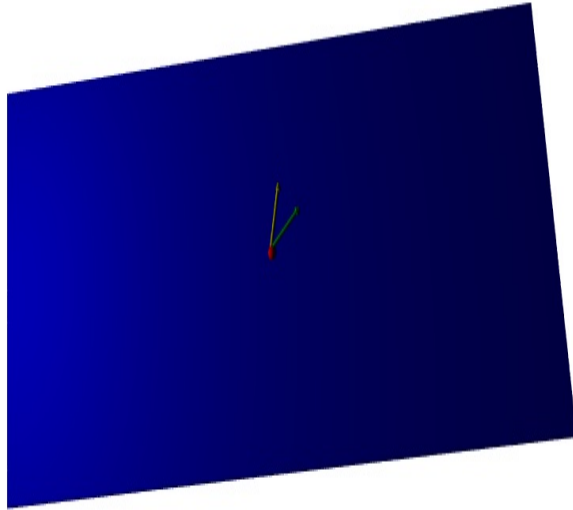


FIGURE 2.1 – Le plan

Exemple 2.1.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, et $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ une fonction arbitraire. Le graphe $\Gamma_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ de f est une surface régulière possédant un atlas défini par l'unique paramétrisation $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par : $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$. En effet la première condition pour que S soit une surface régulière (Définition 2.1.2) est clairement vérifiée. La paramétrisation φ est de classe \mathcal{C}^∞ , bijective avec $\varphi(U) = \Gamma_f$, et sa réciproque φ^{-1} qui est la projection sur les deux premières coordonnées est continue, et donc φ est un homéomorphisme de U sur Γ_f . Finalement,

$$\text{Jac}\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

est partout de rang égal à 2, et les conditions sont bien remplies.

Exemple 2.1.3. On donne ici l'exemple d'un sous ensemble de \mathbb{R}^3 qui n'est pas une surface régulière. C'est le cône infini à deux nappes noté S est donné par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2\}$$

L'ensemble S ne peut être une surface régulière, en effet, si l'origine $O \in S$ possédait un voisinage V homéomorphe à un ouvert U du plan \mathbb{R}^2 et si on note φ cet homéomorphisme, alors $V \setminus O$ devra être connexe puisque $U \setminus \varphi^{-1}(O)$ est connexe, mais ceci n'est pas le cas comme on peut facilement vérifier, et donc S n'est pas une surface régulière comme déjà prévu.

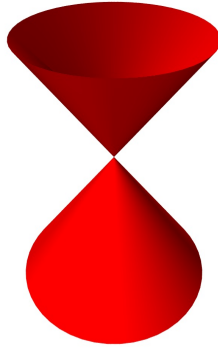


FIGURE 2.2 – Un cône à deux nappes

Exemple 2.1.4. (*Surfaces de révolution*)
Soit

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (\alpha(t), 0, \beta(t))\end{aligned}$$

Une courbe de Jordan régulière de classe C^∞ contenue dans le plan d'équation $x = 0$, vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R} : \alpha(t) \neq 0$.

On considère Σ la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe σ autour de l'axe (z) , c'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\Sigma(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

La formule de Σ est donc donnée par :

$$\Sigma(t, \theta) = (\cos(\theta)\alpha(t), -\sin(\theta)\alpha(t), \beta(t))$$

On note $S = \Sigma(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Nous allons présenter les surfaces de révolutions en termes de paramétrisations locales, ce qui va nous permettre de définir un atlas pour ce type de surfaces permettant de les étudier de façon aisée durant les chapitres à venir.

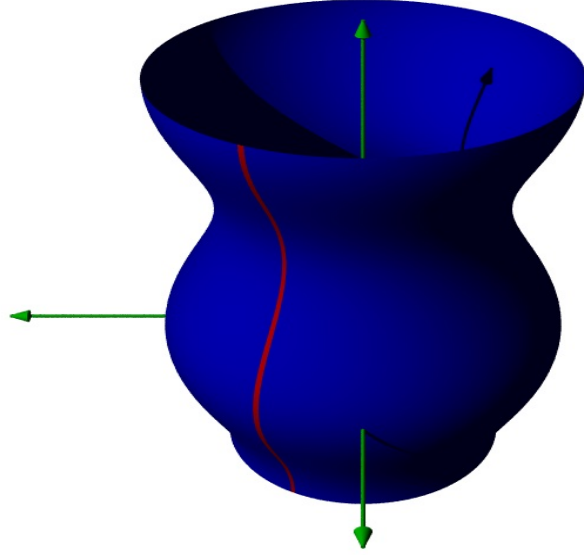


FIGURE 2.3 – Une surface de révolution

1. Montrons que S est une surface régulière

Soient $t, \theta \in \mathbb{R}$

On sait que :

$$J(\Sigma)(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\alpha'(t) & -\sin(\theta)\alpha(t) \\ -\sin(\theta)\alpha'(t) & \cos(\theta)\alpha(t) \\ \beta'(t) & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t, \theta), \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}(t, \theta) \right)$$

La surface S étant le support de Σ , il suffit de montrer que Σ est une surface d'immersion, ce qui va impliquer que Σ est un homéomorphisme locale sur le voisinage d'un point quelconque de son support, et donnera à priori un atlas de S .

Donc, on devra montrer que $J(\Sigma)(t, \theta)$ est injective, pour cela, il existe deux approches :

Une première méthode est de vérifier que la famille $\left\{ \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t, \theta), \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}(t, \theta) \right\}$ est libre, cela revient à vérifier que les droites générées par ces vecteurs sont libre, ceci est en fait équivalent à vérifier que projections de ces droites sur un plan canonique ne sont pas parallèles. Mathématiquement, cette assertion se traduit à l'existence d'un sous-déterminant d'ordre 2 non nul de $\det J(\Sigma)(t, \theta)$. On note :

$$D_1 = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\alpha'(t) & -\sin(\theta)\alpha(t) \\ -\sin(\theta)\alpha'(t) & -\cos(\theta)\alpha(t) \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\alpha'(t) & -\cos(\theta)\alpha(t) \\ \beta'(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\alpha'(t) & -\sin(\theta)\alpha(t) \\ \beta'(t) & 0 \end{vmatrix}$$

(a) Si $D_1 = 0$, alors $\alpha'(t) = 0$, mais puisque σ est régulière, alors $\beta'(t) \neq 0$

- i. Si $D_2 = 0$, alors $\cos(\theta) = 0$, donc $\sin(\theta) \neq 0$, puisque $\beta'(t) \neq 0$, on conclut que $D_3 \neq 0$

Les autres cas se font par analogie, et on déduit que $J(\Sigma)(t, \theta)$ est injective. Un résumé plus simple de ceci est que tant que la courbe σ ne coupe pas l'axe (z) , la rotation autour de (z) ne laissera aucun point de σ stable, et donc la $\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}$ ne s'annule jamais. Ce qui veut dire que l'application partielle de Σ fonction de l'angle θ en fixant $t \in \mathbb{R}$ est une courbe régulière.

La deuxième approche consiste à prendre en compte cette remarque, et de remarquer en plus que la direction de la rotation $\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}$ est tout le temps orthogonale à σ' qui est parallèle à $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$. On peut vérifier cela en calculant $\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \rangle$ et de noter que sa valeur est égale à 0 en tout point, ce qui implique directement que $J(\Sigma)(t, \theta)$.

Cette démonstration est suffisant pour dire que Σ est une paramétrisation locale de S , mais elle ne donne pas d'information sur l'atlas de S ou le nombre de ses éléments ni sur la taille des ouverts sur lesquels Σ est un homéomorphisme, en est à présent en mesure de répondre à ces questions.

2. Détermination d'un atlas pour S .

On va maintenant déterminer les ouverts sur lesquels la restriction de Σ est un homéomorphisme sur un ouvert de S , pour cela on note C le support de la courbe σ et on distingue deux cas :

- (a) Si C n'est pas compact.

Donc σ est un arc de Jordan injectif sur l'ensemble \mathbb{R} tout entier, et définit un homéomorphisme de \mathbb{R} sur C .

Soient $(t_0, \theta_0), (t_1, \theta_1)$ deux points distincts de \mathbb{R}^2

On a :

$$\begin{aligned} \Sigma(t_0, \theta_0) = \Sigma(t_1, \theta_1) &\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t_1) \cos(\theta_1) = \alpha(t_0) \cos(\theta_0) \\ \alpha(t_1) \sin(\theta_1) = \alpha(t_0) \sin(\theta_0) \\ \beta(t_1) = \beta(t_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t_1)^2 = \alpha(t_0)^2 \\ \beta(t_1) = \beta(t_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t_1) = \alpha(t_0) \\ \beta(t_1) = \beta(t_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \sigma(t_1) = \sigma(t_0) \\ &\Rightarrow t_1 = t_0 \end{aligned}$$

Ceci d'une part, et il est à noter qu'un passage dans ce calcul est consistant puisque $\alpha \neq 0$ donc $\alpha \geq 0$ ou $\alpha \leq 0$, sans nuire à la généralité on suppose $\alpha \geq 0$. D'une autre part, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \Sigma(t_1, \theta_0) = \Sigma(t_1, \theta_0) &\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_0 + 2k\pi \end{aligned}$$

Et ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$

On déduit alors que Σ est injective si l'intervalle de définition de la variable θ

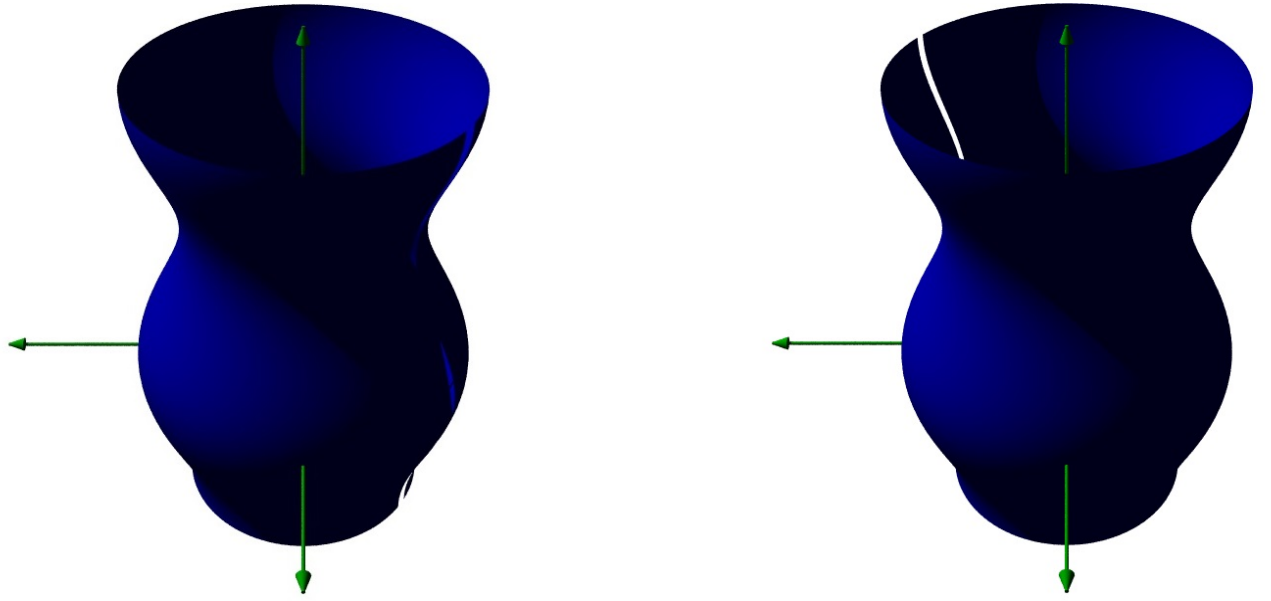


FIGURE 2.4 – Un atlas pour une surface de révolution non compact.

est ouvert de longueur égale à 2π . On définit alors l'application $\varphi_1 := \Sigma_{|\mathbb{R} \times]0, 2\pi[}$, on a :

$$\varphi_1(\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[) = S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq 0 \text{ et } y = 0\} = \varphi_1(U_1) = S_1$$

On sait que U_1 est un ouvert de \mathbb{R}^2 , et que S_1 est un ouvert de S (autant le percevoir comme l'intersection de S avec un ouvert de \mathbb{R}^3), de plus, il est clair que $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow S_1$ est une bijection continue.

Pour montrer que φ_1 est un homéomorphisme de U_1 sur S_1 il suffira de vérifier que φ_1^{-1} est continue de S_1 dans U_1 soit alors $(x, y, z) \in S_1$. On sait qu'il existe un unique couple (t, θ) dans U_1 vérifiant :

$$(x, y, z) = \varphi_1(t, \theta)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \alpha(t) \cos(\theta) \\ y = -\alpha(t) \sin(\theta) \\ z = \beta(t) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \beta(t) = z \end{cases} \\ &\Rightarrow \sigma(t) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \\ &\Rightarrow t = \sigma^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) = \lambda(x, y, z) \end{aligned}$$

Soient $(x, y, z) \in S$ tels que $y \geq 0$, alors on a :

$$0 \leq \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y/\alpha(t)}{1 + x/\alpha(t)} = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$$

et donc :

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in (0, \pi)$$

et donc θ dépend continuellement de (x, y, z) . de la même manière, si $(x, y, z) \in S$ tel que $y \leq 0$ on trouve que

$$\theta = 2\pi + 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in (\pi, 2\pi)$$

et dans les deux cas, on a démontré que φ_1 est un homéomorphisme avec son image.

Par analogie, on définit l'application $\varphi_2 := \Sigma_{|\mathbb{R} \times] - \pi, \pi[}$ et on note que

$$\varphi_2(\mathbb{R} \times] - \pi, \pi[) = S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0 \text{ et } y = 0\} = \varphi_2(U_2) = S_2$$

On a clairement : $S = S_1 \cup S_2$ et que S_2 est un ouvert de la surface S . On montre de la même manière que φ_2 est un homéomorphisme de U_2 sur S_2 , et donc $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est un atlas de la surface S .

(b) Si C est compact :

Ce cas varie légèrement du précédent, puisque la courbe σ est périodique. Si

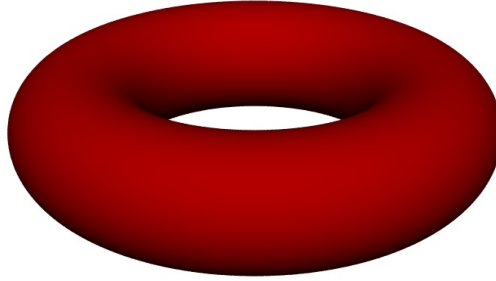


FIGURE 2.5 – Le tore est une surface de révolution compact

on note T sa période, on considère :

$$\varphi_1 = \varphi_{]0, T[\times] - \pi, \pi[, \varphi_2 = \varphi_{]0, T[\times] 0, 2\pi[}$$

$$\varphi_3 = \varphi_{]T, 2T[\times] - \pi, \pi[, \varphi_4 = \varphi_{]T, 2T[\times] 0, 2\pi[}$$

et il est facile de voir (on fait comme dans le cas précédent), que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ est un atlas pour S .

Les surfaces d'immersions étaient un exemple simple de surfaces régulières, mais bien évidemment pas le seul, on va maintenant définir un autre type de surfaces régulières fréquemment utilisés, mais avant de pouvoir les définir, on a besoin d'une définition et d'une proposition.

Définition 2.1.4. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^∞ .

On dit que $p \in V$ est un point critique de F si $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective. On notera l'ensemble de tous les points critiques de F par $\text{Crit}(F)$. Si $p \in V$ est un point critique alors $F(p) \in \mathbb{R}^m$ est appelé valeur critique.

Un point $y \in F(V) \subset \mathbb{R}^m$ qui n'est pas une valeur critique est une valeur régulière.

Proposition 2.1.1. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, et $f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$.

Si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f alors toute composante connexe de l'ensemble

$$f^{-1}\{a\} = \{p \in V | f(p) = a\}$$

est une surface régulière.

Démonstration. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}\{a\}$.

Puisque a est une valeur régulière de f , alors df_{p_0} est surjective et donc le gradient de f est non nul en p_0 . On suppose que $\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$ (si ce n'est pas le cas on aurait pu permuter les coordonnées de f et aboutir au même résultat).

Soit $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$.

Clairement, on a :

$$\det JacF(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$$

On peut alors appliquer le théorème d'inversion locale et obtenir des voisinages ouverts $\tilde{V} \subset V$ de p_0 et $W \subset \mathbb{R}^3$ de $F(p_0)$ tels que : $F|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow W$ soit un difféomorphisme.

On pose $G := (g_1, g_2, g_3) = F^{-1}$ et on obtient :

$$(u, v, w) = F \circ G(u, v, w) = (g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), f(G(u, v, w))).$$

Donc : $g_1(u, v, w) = u$, $g_2(u, v, w) = v$ et $f(G(u, v, w)) = w$ (i), pour tout $(u, v, w) \in W$.

Clairement, l'ensemble $U = \{(u, v) | (u, v, a) \in W\} = \pi(W \cap (\tilde{V} \times \{a\}))$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , et on définit l'application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(u, v) = G(u, v, a) = (u, v, g_3(u, v, a))$$

D'après (i), On sait que $\varphi(U) = f^{-1}\{a\} \cap \tilde{V}$, et on vérifie aisément que φ est une paramétrisation locale de $f^{-1}\{a\}$ en p_0 .

□

La définition suivant prend désormais un aspect naturel :

Définition 2.1.5. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$. Toute composante connexe de $f^{-1}\{a\}$, où $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f est appelée surface de niveau de l'application f .

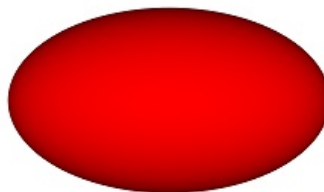
Exemple 2.1.5. l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec $a, b, c \geq 0$ est une surface régulière. En effet, elle est de la forme $f^{-1}(1)$, où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Puisque $\nabla f = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2})$, le seule point critique de f est l'origine, et donc la seule valeur régulière de f est 0, et donc $f^{-1}(1)$ est bien une surface de niveau.



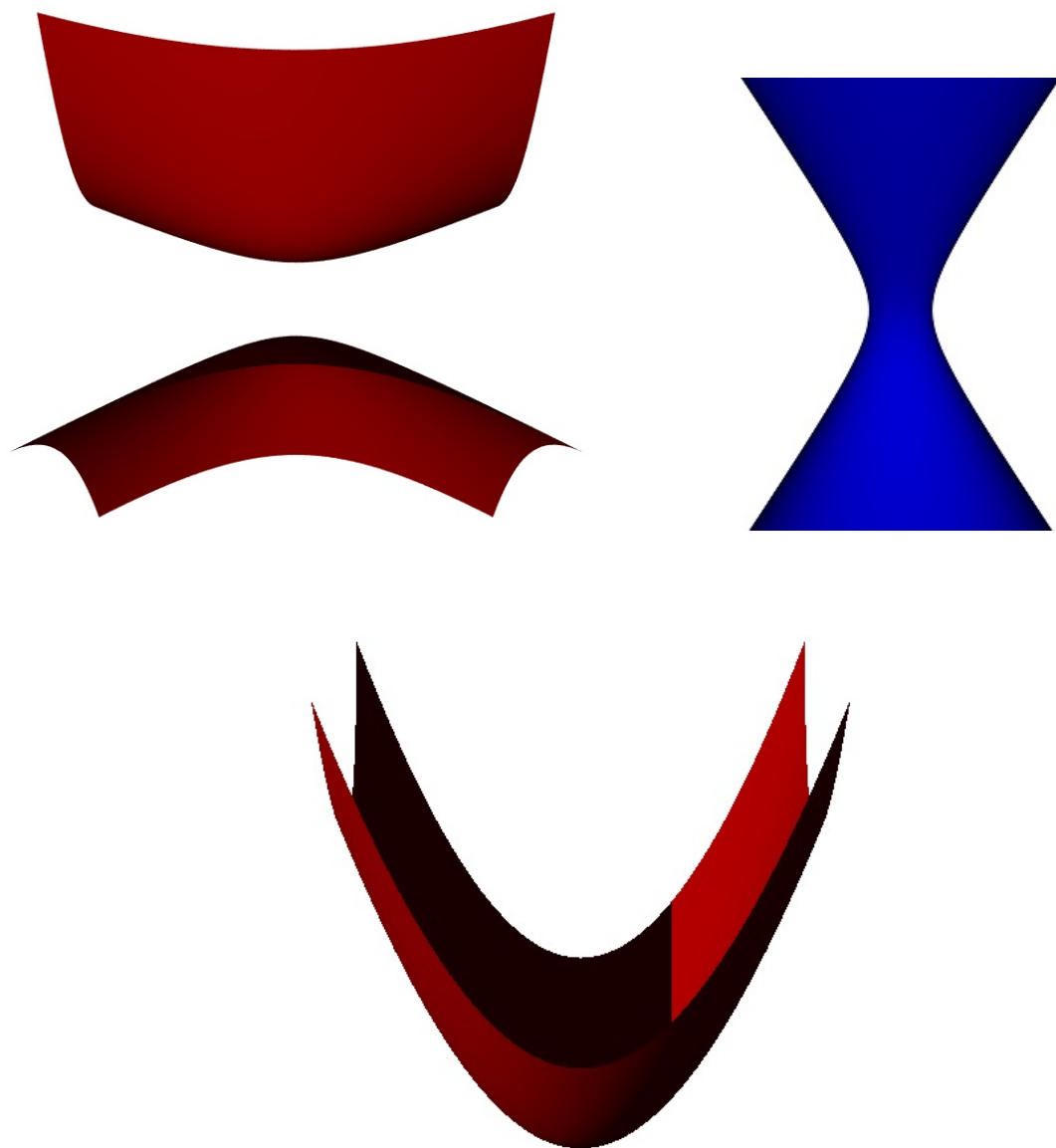


FIGURE 2.6 – Quelques quadriques

Exemple 2.1.6. Plus en général, un quadrique est un sous ensemble de \mathbb{R}^3 de points qui sont solutions de l'équation $p(x, y, z) = 0$, où p est un polynôme de degré 2. Les quadriques ne sont pas tous forcément des surfaces régulières comme on a déjà vu dans le cas du cône, mais à part cela, ils représentent de bons exemples de surfaces. Parmi les quadriques, on a défini l'ellipsoïde, par ailleurs, l'hyperboloïde elliptique est donné par l'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 + 1 = 0$, l'hyperboloïde hyperbolique par $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 - 1 = 0$, le parabolôïde elliptique par $(x/a)^2 + (y/b)^2 - z = 0$, le parabolôïde hyperbolique par $(x/a)^2 - (y/b)^2 - z = 0$.

2.2 Plan Tangent à une surface

Définition 2.2.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble, et $p \in S$. Un vecteur tangent à S en p est un vecteur de la forme $\sigma'(0)$, où $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe \mathcal{C}^∞ dont le support est inclus dans S et telle que $\sigma(0) = p$. L'espace de tout les vecteurs tangents à S en p est appelé cone tangent $T_p S$ à S en p

Notre intuition géométrique nous dit que si S est une surface régulière alors $T_p S$ est un plan, c'est d'ailleurs ce que nous allons montrer lors de cette proposition :

Proposition 2.2.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $p \in S$ et $\varphi : U \rightarrow S$ une paramétrisation locale de S au point p avec $\varphi(x_0) = p$.

Alors $d\varphi_{x_0}$ est un isomorphisme entre \mathbb{R}^2 et $T_p S$. En particulier, $T_p S = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ est un espace vectoriel de dimension 2 et $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ ne dépend pas de φ mais uniquement de S et de p .

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, puisque U est un ouvert de \mathbb{R}^2 alors il existe $\epsilon \geq 0$ tel que $x_0 + tv \in U$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

On définit la courbe $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ donnée par $\sigma_v(t) = \varphi(x_0 + tv)$.

Puisque $\sigma_v(0) = p$ et $\sigma'_v(0) = d\varphi_{x_0}(v)$, il s'en suit que $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2) \subset T_p S$ car le vecteur v a été choisi arbitrairement dans \mathbb{R}^2 .

Réciproquement si $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ est une courbe qui vérifie que $\sigma(0) = p$, on peut toujours choisir ϵ assez petit afin que le support de σ soit inclus dans $\varphi(U)$, on va alors supposer que cette assertion est vérifiée pour cet ϵ précis.

On sait que la courbe $\sigma_O = \varphi^{-1} \circ \sigma$ est une courbe de classe \mathcal{C}^∞ dans U telle que : $\sigma_O(0) = x_0$, on pose alors $v = \sigma'_O(0)$.

Alors :

$$d\varphi_{x_0}(v) = \frac{d(\varphi \circ \sigma_O)}{dt}(0) = \sigma'(0)$$

et donc $T_p S \subset d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$. On déduit alors que $d\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ est surjective, puisqu'elle est aussi injective par définition, c'est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $T_p S$. \square

Définition 2.2.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, et $p \in S$. L'espace vectoriel $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ est le plan tangent de S au point p .

La proposition précédente était utile, en effet, on peut maintenant définir une base de $T_p S$:

Définition 2.2.3. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, et $p \in S$. Si $\varphi : U \rightarrow S$ est une paramétrisation centrée en p , et $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Alors les vecteurs tangents $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p \in T_p S$ sont définis en posant :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|_p = d\varphi_O(e_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(O)$$

On notera souvent ∂_j au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Clairement $\{\partial_1, \partial_2\}$ est une base de $T_p S$.

Exemple 2.2.1. (Hélicoïde)

On se donne une hélice circulaire dans \mathbb{R}^3 , et on note $S \subset \mathbb{R}^3$ la réunion de toutes les droites passant par un point de l'hélice et orthogonales à l'axe de l'hélice, l'ensemble S est alors appelée un hélicoïde.

Soit $a \neq 0$ et $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'hélice circulaire donnée par $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), at)$. On va démontrer lors de cet exemple que l'hélicoïde est une surface régulière et du coup construire une paramétrisation locale de cette surface. Soit $p \in C = \sigma(\mathbb{R})$, On sait qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $p = (\cos(t), \sin(t), at)$, la projection orthogonale du point p sur l'axe z est le point $q = (0, 0, at)$. Si on considère la droite reliant p à q dans \mathbb{R}^3 on peut naturellement la paramétrer par $\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par la relation

$$\gamma_t(s) = sp + (1 - s)q = (s \cos(t), s \sin(t), at)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, mais on sait que $S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \gamma_t(\mathbb{R})$ et on définit alors $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\varphi(t, s) = (s \cos(t), s \sin(t), at)$$

qui est une paramétrisation locale de l'hélicoïde en question, En effet :

il est clair que φ est une bijection continue, soient $(x, y, z) \in S$, alors la relation $(x, y, z) = (s \cos(t), s \sin(t), at)$ donne que

$$\begin{cases} x = s \cos(t) \\ y = s \sin(t) \\ z = at \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} t = z/a \\ |s| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

la réciproque de φ est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \begin{cases} (z/a, \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{si } \sin(z/a) = 0 \\ (z/a, \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{si } \cos(z/a) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et est clairement continue, et donc φ est un homéomorphisme avec son image.

De plus, φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 et sa différentielle :

$$d\varphi_{(t,s)} := \begin{pmatrix} -s \sin(t) & \cos(t) \\ s \cos(t) & \sin(t) \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

est clairement de rang 2.

La démonstration étant achevée, on peut facilement déduire une base de $T_p S$ pour un point $p = \varphi(t, s)$ arbitraire dans S , cette base est exactement :

$$\partial_1|_p = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \partial_2|_p = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.2. (Catenoïde)

Soit $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par :

$$\sigma(t) = (a \cosh(t), 0, at)$$

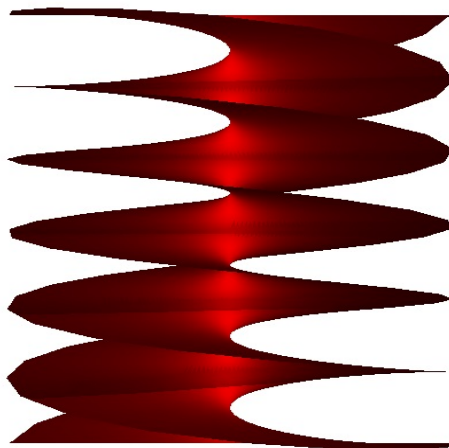


FIGURE 2.7 – Une hélicoïde

On note $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface de révolution obtenue par la rotation de σ autour de l'axe z , on appelle cette surface un caténoïde.

On peut facilement retrouver une base de $T_p S$ avec p quelconque dans S d'après l'étude faite sur les surfaces de révolution.

On donne maintenant une caractérisation du plan tangent à une surface de niveau en un point :

Proposition 2.2.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, et $a \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.

Si S est une composante connexe de $f^{-1}\{a\}$ et $p \in S$, alors $T_p S$ est le sous espace de \mathbb{R}^3 orthogonal à $\nabla f(p)$.

Démonstration. Il suffit de prendre $(v_1, v_2, v_3) \in T_p S$ et de considérer la courbe $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ une courbe avec $\sigma(0) = p$ et $\sigma'(0) = v$. En différentiant l'expression $f \circ \sigma = a$ et l'évaluant en 0 on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p)v_3 = 0$$

et donc v est orthogonal à $\nabla f(p)$. Alors $T_p S$ est inclus dans $\{\nabla f(p)\}^\perp$, mais les deux espaces sont de dimension égale à 2, et donc ils coïncident.

□

2.3 Orientabilité

L'orientabilité est une notion importante dans la théorie des surfaces, elle permet de déterminer si la surface possède deux faces différentes, une intérieure et l'autre extérieure et pour cela la surface est dite *orientable*, si autrement il n'est pas possible de distinguer

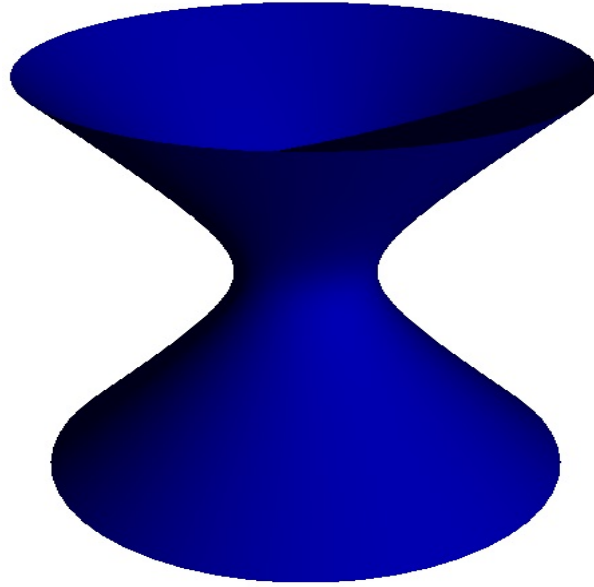


FIGURE 2.8 – Un caténoïde

les deux faces de la surface, celle-ci est dite *non orientable*.

En vocabulaire mathématique, il y a déjà deux méthodes pour déterminer l'orientation d'une surface, une intrinsèque se basant sur la paramétrisation de la surface par un atlas, et l'autre est extrinsèque et consiste à définir la notion de *champ de vecteur normal* à la surface

Il est temps de formuler ceci et de l'expliquer mathématiquement :

Définition 2.3.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. On dit que deux paramétrisations $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ et $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow S$ sont *équiorientées* si $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = \emptyset$ ou si $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) \geq 0$ sur son domaine de définition. Si en outre, $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) \leq 0$ sur son domaine de définition, les deux paramétrisations déterminent des orientations opposées.

La surface S est dite *orientable* si il existe un atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ de S formés de paramétrisations locales deux à deux équiorientées, on dit que l'atlas lui-même est orienté.

Si on fixe un tel atlas \mathcal{A} , on dit que la surface S est orientée par l'atlas \mathcal{A} .

Exemple 2.3.1. Une surface admettant un atlas qui ne consiste que d'une seule paramétrisation locale (notamment le cas d'une paramétrisation globale ou l'image d'une paramétrisation locale) est clairement orientable. Toutes les surfaces définies comme étant des graphes de fonctions sont orientables.

Exemple 2.3.2. Si une surface possède un atlas qui consiste de deux paramétrisations locales dont les images sont d'intersection connexe, alors cette surface est orientable. En effet, si $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ est un atlas d'une surface régulière S tel que $\varphi_1 : U_1 \rightarrow S$ et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow S$, alors $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)) \rightarrow U_2$ est un changement de variable et donc le déterminant de sa Jacobienne est de signe constant non nul en tout point, puisque l'image d'un connexe par une application continue, et plus précisément par l'application $f : x \mapsto \frac{\det \text{Jac}(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)}{|\det \text{Jac}(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)|}$ qui est clairement continue, est un connexe, qui sera forcément égale à $\{\pm 1\}$, et on a donc la liberté de choisir φ_1 de telle sorte que l'image f

soit égale à $\{1\}$.

En particulier, la sphère munit de l'atlas est orientable.

Vu cette définition, il est difficile de vérifier que les éléments d'un atlas sont deux à deux équi-orientés pour vérifier qu'une surface est orientable, c'est pourquoi on définit un outil qui va permettre cette détermination sans trop de calcul, de plus, on va montrer que les deux notions sont liées et même équivalentes :

Définition 2.3.2. *Un champ de vecteur normal sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est une application $N : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^∞ tel que $N(p)$ est orthogonal à $T_p S$ pour tout $p \in S$ et $\|N\| = 1$ sur S .*

Proposition 2.3.1. *Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement s'il existe un champ de vecteur normal à S .*

Démonstration. On commence par une remarque générale. Soit $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ une paramétrisation locale de la surface S ,

on pose :

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}(p)$$

pour tout $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, avec $\partial_{j,\alpha} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}$. Le vecteur N_α est bien défini, différent de 0 et orthogonal à $T_p S$. De plus il est de classe \mathcal{C}^∞ et donc N_α est un champ de vecteurs normal à $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Si maintenant $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow S$ est une autre paramétrisation locale de S avec $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ alors :

$$N_\alpha = \text{sgn}(\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) N_\beta \quad (2.1)$$

sur $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$.

On peut à présent commencer notre démonstration et on suppose que S est orientable par l'atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$.

Soit $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$, l'égalité (2.1) implique que $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$, puisque φ_α et φ_β sont équi-orientés. Ceci signifie que l'application $p \rightarrow N_\alpha(p)$ ne dépend pas d'une paramétrisation particulière et on peut alors prolonger le champ de vecteurs normal N_α de manière \mathcal{C}^∞ sur toute la surface S .

Réciproquement, Soit $N : S \rightarrow S^2$ un champ de vecteurs normal à S , et soit $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un atlas arbitraire de S tel que le domaine de définition U_α de φ_α soit connexe.

Par définition, le produit vectoriel $N_\alpha(p)$ est orthogonal à $T_p S$ pour tout $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ et $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$.

donc $\langle N, N_\alpha \rangle = \pm 1$ sur tout U_α . Puisque U_α est connexe on est certain que $\langle N, N_\alpha \rangle = \pm 1$ sur tout le domaine U_α on suppose que sa valeur est égale à 1.

Ceci implique que $N_\alpha := N$ sur U_α , et par l'égalité 2.1 on conclut que la surface S est orientée.

□

Cette caractérisation de l'orientabilité bien qu'elle dépend de l'espace ambiant, elle est néanmoins intéressante et elle va être utilisée dans ce qui suit négligeant ainsi la première caractérisation.

Exemple 2.3.3. Toute surface de révolution S est orientable. En effet, on définit le champ de vecteurs normal $N : S \rightarrow S^2$ donné par

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}|_p \wedge \frac{\partial}{\partial \theta}|_p}{\left\| \frac{\partial}{\partial t}|_p \wedge \frac{\partial}{\partial \theta}|_p \right\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\alpha'(t))^2(\beta'(t))^2}} \begin{pmatrix} -\beta'(t) \cos(\theta) \\ -\beta'(t) \sin(\theta) \\ \alpha'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour tout $p = (t, \theta) \in S$

Il faut aussi préciser qu'il existe bel est bien des surfaces non orientables, un exemple classique pour montrer ceci est l'exemple suivant :

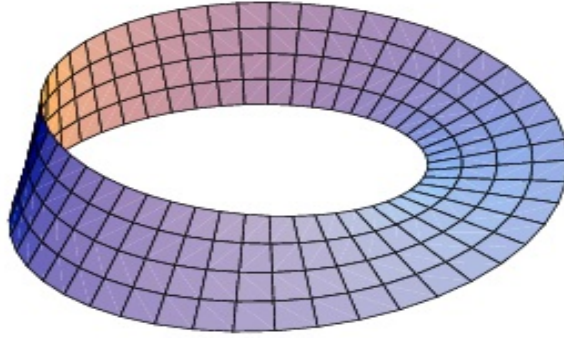


FIGURE 2.9 – Le ruban de Möbius

Exemple 2.3.4. (Ruban de Möbius)

Soit C un cercle inclus dans le plan $z = 0$ centré à l'origine et de rayon égal à 2, et ℓ_0 un segment dans le plan $x = 0$ donné par $y = 2$ et $|z| \leq 1$ et donc de centre $c = (0, 2, 0)$. On considère ℓ_θ le segment obtenu par la rotation du centre c dans le sens anti-trigonométrique le long de la courbe C par un angle θ et simultanément en faisant tourner ℓ_0 autour de c par un angle $\theta/2$.

La réunion $S = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \ell_\theta$ est appelée ruban de Möbius, et on va démontrer que c'est une surface non orientable.

On définit $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}$, et les application $\varphi, \hat{\varphi} : U \rightarrow S$ donnés par :

$$\varphi(u, v) = \left((2 - v \sin(\frac{u}{2})) \sin(u), (2 - v \sin(\frac{u}{2})) \cos(u), v \cos(\frac{u}{2}) \right),$$

$$\hat{\varphi}(u, v) = \left((2 - v \sin(\frac{2u - \pi}{4})) \cos(u), (-2 + v \sin(\frac{2u + \pi}{4})) \sin(u), v \cos(\frac{2u + \pi}{4}) \right)$$

On peut aisément vérifier que la famille $\{\varphi, \hat{\varphi}\}$ est en fait un atlas pour la surface S , qui consiste de deux paramétrisations locales dont les images possèdent une intersection non connexe, en effet : $\varphi(U) \cap (\hat{\varphi})(U) = \varphi(W_1) \cup \varphi(W_2)$ avec

$$W_1 = \{(u, v) \in U \mid \pi/2 \leq u \leq 2\pi\} \text{ et } W_2 = \{(u, v) \in U \mid 0 \leq u \leq \pi/2\}$$

Si $(u, v) \in W_1$ alors $\varphi(u, v) = \hat{\varphi}(u - \pi/2, v)$, et si $(u, v) \in W_2$ on a $\varphi(u, v) = \hat{\varphi}(u + 3\pi/2, -v)$, donc :

$$\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi(u, v) = \begin{cases} (u - \pi/2, v) & \text{si } (u, v) \in W_1 \\ (u + 3\pi/2, -v) & \text{si } (u, v) \in W_2 \end{cases}$$

et en particulier,

$$\det \text{Jac}(\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi) := \begin{cases} +1 & \text{sur } W_1 \\ -1 & \text{sur } W_2 \end{cases}$$

On raisonne à présent par l'absurde et on suppose que S est orientable. Soit N le champ de vecteur normal sur S donné par la relation $N := \frac{\partial_u \wedge \partial_v}{\|\partial_u \wedge \partial_v\|}$ sur $\varphi(U)$, où $\partial_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\partial_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

On a de plus $N := \pm \frac{\hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v}{\|\hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v\|}$ sur $\hat{\varphi}(U)$, avec $\hat{\partial}_u = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial u}$ et $\hat{\partial}_v = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial v}$, et qui garde un signe constant puisque U est connexe. Mais (2.1) appliquée à W_1 donne que le signe est $+1$, et appliquée à W_2 donne que le signe est -1 , qui est bien la contradiction que l'on cherche.

Chapitre 3

Première forme fondamentale et courbure normale

3.1 Première forme fondamentale

Dans cette section, on va introduire un outil qui va nous permettre de mesurer la longueur des courbes, l'angle entre deux courbes et l'aire d'un morceau de surface. L'espace euclidien \mathbb{R}^3 étant muni de son produit scalaire canonique. Pour $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$, Le plan tangent $T_p S$ étant un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , on peut alors le munir de la restriction du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 .

Définition 3.1.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Pour tout $p \in S$ on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ le produit scalaire sur $T_p S$ induit par le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 . La première forme fondamentale $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme quadratique, définie positive, associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$:

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p \geq 0$$

pour tout $v \in T_p S$.

Une vision quantitative des choses est l'utilisation d'une matrice pour représenter la première forme fondamentale I_p . Pour cela on utilise une paramétrisation locale de S au point p notée $\varphi : U \rightarrow S$ pour disposer de la base de $T_p S$ $\{\partial_1, \partial_2\}$ induite par φ . Soient $v, w \in T_p S$ écrits en combinaison linéaire $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2$ et $w = w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2$, et donc :

$$\langle v, w \rangle_p = v_1 w_1 \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_p + [v_1 w_2 + v_2 w_1] \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p + v_2 w_2 \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_p.$$

Ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 3.1.2. Soit $\varphi : U \rightarrow S$ une paramétrisation locale de la surface S . Les coefficients métriques de S respectivement à φ sont les applications $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ données par :

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)}, \quad F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \quad G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)} \quad (3.1)$$

pour tout $x \in U$.

Exemple 3.1.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le plan passant par $p_0 \in \mathbb{R}^3$ et parallèle aux vecteurs linéairement indépendants $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par : $\varphi(x_1, x_2) =$

$p_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2$ est une paramétrisation locale de S . Pour tout $p \in S$, la base de $T_p S$ induite par φ est $\partial_1 = v_1$ et $\partial_2 = v_2$, donc les coefficients métriques du plan respectivement à l'application φ sont :

$$E = \|v_1\|^2, \quad F = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad G = \|v_2\|^2.$$

En particulier Si les vecteurs v_1 et v_2 sont orthonormés, on trouve :

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Exemple 3.1.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$, et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la paramétrisation locale du graphe Γ_h donnée par $\varphi(x) = (x, h(x))$ pour tout $x \in U$.

Un calcul des coefficients métriques de Γ_h respectivement à φ donne :

$$E = 1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2, \quad F = \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad G = 1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_2} \right|^2.$$

Exemple 3.1.3. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre de rayon 1 centrée sur l'axe (z) . Une paramétrisation locale $\varphi :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par : $\varphi(x_1, x_2) = (\cos(x_1), \sin(x_1), x_2)$. La base induite par cette paramétrisation est $\partial_1 = (-\sin(x_1), \cos(x_1), 0)$ et $\partial_2 = (0, 0, 1)$, et donc :

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Exemple 3.1.4. Soit l'application $\varphi : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donnée par :

$$\varphi(t, \theta) = (\alpha(t) \cos(\theta), \alpha(t) \sin(\theta), \beta(t))$$

une paramétrisation locale d'une surface de révolution S obtenue dans l'exemple (I et J sont des intervalles ouverts de \mathbb{R} qui répondent au problème). Alors en utilisant une base locale on obtient :

$$E = (\alpha')^2 + (\beta')^2, \quad F = 0, \quad G = \alpha^2.$$

Pour l'exemple particulier du tore on a :

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (r \cos(t) + x_0)^2.$$

Exemple 3.1.5. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ l'hélicoïde de paramétrisation locale $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(x, y) = (y \cos(x), y \sin(x), ax)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Par l'exemple 2.2.1 un calcul des coefficients métriques de S donne

$$E(x, y) = y^2 + a^2, \quad F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 1$$

Exemple 3.1.6. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le caténoïde de paramétrisation locale $\varphi : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(x, y) = (a \cosh(x) \cos(y), a \cosh(x) \sin(y), ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. D'après l'exemple 2.2.2 on a :

$$E(x, y) = a^2 \cosh^2(x), \quad F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = a^2 \cosh^2(x)$$

Comme on l'a mentionné au début du chapitre, la première forme fondamentale nous permet de calculer la longueur des courbes sur la surface. En effet, si $\sigma : [a, b] \longrightarrow S$ est une courbe dont l'image est contenu dans la surface S , On a :

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))} dt.$$

3.2 Courbure normale

Lemme 3.2.1. *Soit S une surface, $p \in S$. On choisit un vecteur $N(p) \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à $T_p S$.*

Etant donné $v \in T_p S$ de longueur égale à 1, on note H_v le plan passant par p et parallèle à v et $N(p)$. Alors l'intersection $H_v \cap S$ est, au moins dans un voisinage de p , le support d'une courbe régulière

Démonstration. Le plan H_v possède l'équation $\langle x - p, v \wedge N(p) \rangle = 0$. Si $\varphi : U \rightarrow S$ est une paramétrisation locale centrée en p , un point $\varphi(y) \in \varphi(U)$ appartient à $H_v \cap S$ si et seulement si $y \in U$ satisfait l'équation

$$f(y) = \langle \varphi(y) - p, v \wedge N(p) \rangle = 0$$

Il suffit de démontrer que $C = \{y \in U \mid f(y) = 0\}$ est le support d'une courbe régulière σ au voisinage de O , puisque $H_v \cap \varphi(U) = \varphi(C)$ est dans ce cas le support de la courbe régulière $\varphi \circ \sigma$ sur un voisinage de p contenu dans S . On a

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(O) = \langle \partial_{i|p}, v \wedge N(p) \rangle$$

donc si O est un point critique de f , le vecteur $v \wedge N(p)$ serait orthogonal à $\partial_{1|p}$ et $\partial_{2|p}$, et donc orthogonal à $T_p S$, c'est à dire, parallèle à $N(p)$, alors que ce n'est pas le cas, donc O n'est pas un point critique de f et par le *théorème des fonctions implicites*, C est un graphe sur un voisinage de O dans U . \square

Les définitions suivantes ont un sens d'après le lemme précédent

Définition 3.2.1. *Soit S une surface régulière. Etant donné $p \in S$, on choisit le vecteur unitaire $N(p) \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à $T_p S$. Soit alors $v \in T_p S$ un vecteur unitaire de longueur égale à 1, et soit H_v le plan passant par p et parallèle à v et $N(p)$. La courbe régulière σ , paramétrée par la longueur d'arc, avec $\sigma(0) = p$ et dont le support est $H_v \cap S$ est appelée *section normale de S en p suivant v* .*

Définition 3.2.2. *Soit S une surface régulière en $p \in S$ et soit $N(p) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur orthogonal à $T_p S$. Soit $v \in T_p S$ de longueur 1, on oriente le plan H_v de façon à ce que $\{v, N(p)\}$ soit une base positive.*

La courbure normale de S en p suivant v est la courbure orientée en p de la section normale de S en p suivant v .

Définition 3.2.3. *Soit $\sigma : I \rightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc contenue dans la surface orientée S . La courbure normale de σ est l'application $\kappa_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :*

$$\kappa_n = \langle \ddot{\sigma}, N \circ \sigma \rangle = \kappa \langle n, N \circ \sigma \rangle$$

Chapitre 4

Géodésiques des surfaces

Avant de s'attaquer à ce chapitre de façon abstraite, il vaut mieux se poser dans le contexte du sujet qu'on est en train d'étudier : *nous voulons déterminer quelles sont les courbes que réalisent le trajet le plus court entre deux points sur une surface ?* ou plutôt, si on change de surface, *Qu'est ce qui est commun entre ses courbes et qu'est ce qui garantie leur existence ?* La réponse à cette question nécessite de nombreuses définitions et plusieurs résultats, cela dit, on connaît cette réponse dans des cas simples qu'on va énoncer afin de s'approcher un peu plus de l'idée.

Exemple 4.0.1. *Cas du plan Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le plan paramétrée par $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ comme dans l'exemple 2.1.1, on a :*

$$\varphi(x_1, x_2) = p_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On sait que les segments de droites réalisent le minimum des distances entre deux points du plan, soit alors $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ une droite reliant deux points p et q de S alors σ est donnée par

$$\sigma(t) = tp + (1 - t)q$$

*on a alors : $\sigma'(t) = p - q$ et donc $\sigma''(t) = 0$
cela signifie que $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)}S$.*

Exemple 4.0.2. *Cas de la sphère Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité paramétrée par $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ définie par :*

$$\varphi(\phi, \theta) = (\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\theta))$$

comme on a déjà vu dans l'exemple sur les surfaces de révolution (on obtient une sphère par la rotation d'un demi cercle dans le plan d'équation $(y = 0)$ autour de l'axe z).

On sait que les grand cercles réalisent le minimum des distances entre deux points de la sphère, soit alors $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ un grand cercle reliant deux points p et q de S alors σ est donnée par

$$\sigma(t) = (\cos(t) \cos(\theta_0), \cos(t) \sin(\theta_0), \sin(t))$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec θ_0 est une constante.

*on a alors : $\sigma'(t) = (-\sin(t) \cos(\theta_0), -\sin(t) \sin(\theta_0), \cos(t))$ et donc $\sigma''(t) = -\sigma(t)$
donc $\sigma'' \perp \sigma'$ puisque $\sigma \perp \sigma'$*

et alors $\sigma''(t) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(t, \theta_0)$

mais on sait que : $\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(t, \theta_0) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t, \theta_0)$ et donc $\sigma''(t) \not\parallel \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t, \theta_0)$ ou $\sigma''(t) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t, \theta_0)$, le premier cas n'est pas possible puisque cela signifierait que σ est une courbe plane et la sphère se réduit donc à un point. On conclut alors que $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)}S$.

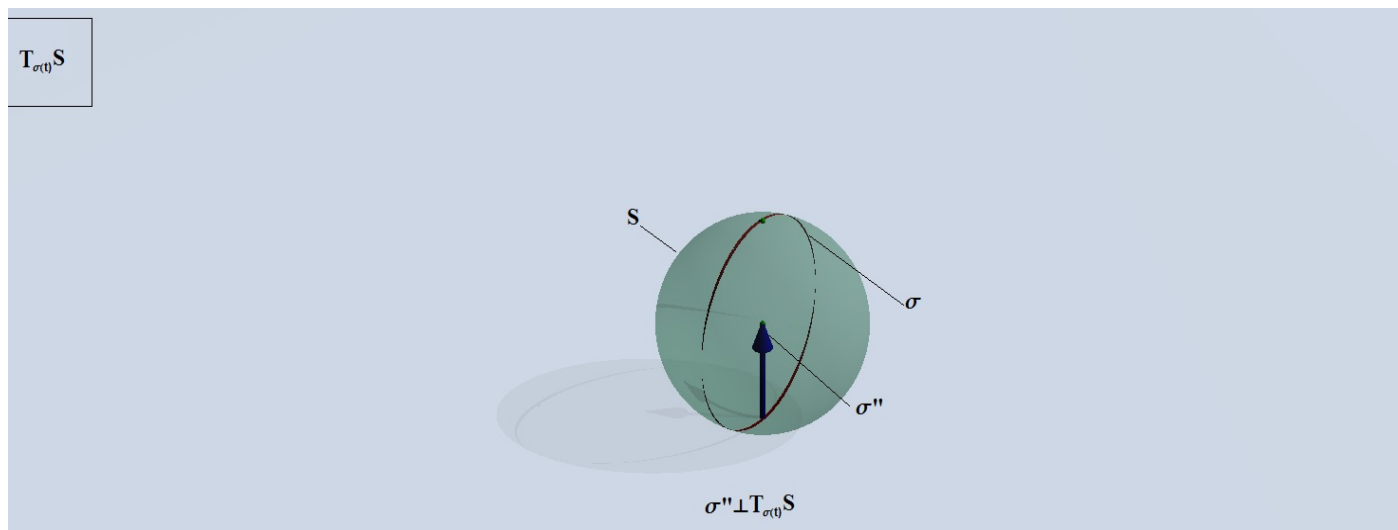


FIGURE 4.1 – Illustration de l'exemple

Le propriété en commun entre ces deux exemples est que σ réalise le chemin minimale entre deux points de S implique que :

$$\sigma(t) \perp T_{\sigma(t)}S$$

On désire prouver ceci dans le cas générale d'une surface quelconque, et démontrer de plus la réciproque à cette assertion.

4.1 Généralités sur les Géodésiques

Définition 4.1.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et S une surface régulière de \mathbb{R}^3 , $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe de classe \mathcal{C}^∞ . On appelle champ de vecteurs le long de σ une application $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant

$$V(t) \in T_{\sigma(t)}S$$

pour tout $t \in I$. En général si σ est \mathcal{C}^∞ par morceaux, un champ de vecteurs le long de σ noté V est une application continue de I dans \mathbb{R}^3 , de classe \mathcal{C}^∞ sur chaque sous intervalle de I où σ est de classe \mathcal{C}^∞ . On note $\mathcal{T}(\sigma)$ l'espace vectoriel de tous les champs de vecteurs le long de la courbe σ .

Définition 4.1.2. La dérivée covariante d'un champ de vecteurs $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ le long d'une courbe $\sigma : I \longrightarrow S$ de classe \mathcal{C}^∞ est un champ de vecteurs $DV \in \mathcal{T}(\sigma)$ définie par :

$$DV(t) = \pi_{\sigma(t)}(V'(t))$$

pour tout $t \in I$.

L'application $\pi_{\sigma(t)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\sigma(t)}S$ étant la projection orthogonale sur le plan tangent à S en $\sigma(t)$

Définition 4.1.3. Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe de classe \mathcal{C}^∞ sur une surface régulière S . Soit $V \in \mathcal{T}(\sigma)$. On dit que V est parallèle si

$$DV(t) = 0$$

pour tout $t \in I$.

En général, si σ est de classe \mathcal{C}^∞ par morceaux, V est dit parallèle s'il est le cas sur tout sous intervalle de I où σ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Proposition 4.1.1. Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe \mathcal{C}^∞ par morceaux dans une surface régulière S . Alors :

- i)- Etant donné $t_0 \in I$ et $v \in T_{\sigma(t_0)}S$, il existe un unique champ de vecteurs parallèle $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ vérifiant : $V(t_0) = v$
- ii)- Si $V, \tilde{V} \in \mathcal{T}(\sigma)$ sont deux champs de vecteurs parallèles le long de la courbe σ , le produit scalaire $\langle V(t), \tilde{V}(t) \rangle_{\sigma(t)}$ est constant pour tout $t \in I$.

Démonstration. L'idée principale de la démonstration repose sur la traduction de la notion de parallélisme en termes d'équations différentielles. Dans une première étape nous supposons que σ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $t \in I$, on se donne une paramétrisation $\varphi : U \longrightarrow S$ une paramétrisation locale de S centrée en $\sigma(t)$.

La différentielle de l'application φ étant injective, les dérivées partielles de φ constituent alors une base de $T_{\sigma(t)}S$.

On note

$$\begin{aligned}\partial_{1|\sigma(t)} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \\ \partial_{2|\sigma(t)} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\end{aligned}$$

où $\sigma(t) = \varphi(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$. Soit V un champ de vecteurs parallèle le long de σ , alors :
puisque : $V(t) \in T_{\sigma(t)}S$, on a :

$$V(t) = V_1(t)\partial_{1|\sigma(t)} + V_2(t)\partial_{2|\sigma(t)}$$

et donc :

$$V'(t) = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma'_j(t) \right) V_i(t) + \sum_{k=1}^2 V'_k(t) \partial_{k|\sigma(t)}$$

Pour $i, j \in \{1, 2\}$, On a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N$$

donc :

$$\pi_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \right) = \Gamma_{ij}^1(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \partial_{1|\sigma(t)} + \Gamma_{ij}^2(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \partial_{2|\sigma(t)}$$

pour tout $i, j = 1, 2$

Donc V est parallèle si et seulement si l'application $t \mapsto (V_1(t), V_2(t))$ définie de I dans \mathbb{R}^2 est solution de l'équation différentielle :

$$\sum_{k=1}^2 \left(V_k' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) V_i(t) \right) \partial_{k|\sigma(t)} = 0 \quad (4.1)$$

Ce qui est équivalent au système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} V_1'(t) = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) V_i(t) \\ V_2'(t) = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) V_i(t) \end{cases}$$

(i)- On considère le système d'équations différentielles linéaires (4.1).

On sait que pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $v \in T_{\sigma(t_0)}S$, (4.1) possède une unique solution (I_0, V) vérifiant $V(t_0) = v$ et I_0 est un intervalle inclus dans I et contenant t_0 tel que $\sigma(I_0)$ est contenu dans l'image d'une paramétrisation locale de S .

Pour montrer que V se prolonge sur I tout entier, on raisonne par l'absurde en supposant que I_0 est strictement inclus dans I .

Sans nuire à la généralité on considère I_0 l'intervalle maximale sur lequel la solution V est définie.

D'après la supposition on sait que I_0 admet une borne supérieure ou inférieure, car sinon $I_0 = I = \mathbb{R}$ et la contradiction est triviale, on note donc t_1 la borne supérieure de I_0 (l'étude du cas où la borne inférieure existe est analogue à celle ci).

Soit $\psi : \tilde{U} \rightarrow S$ une paramétrisation de S centrée en $\sigma(t_1)$, on sait que il existe $t_2 \in I_0$ tel que $\sigma(t_2) \in \psi(\tilde{U})$ (car $\sigma^{-1}(\psi(\tilde{U})) \cap I_0$ est en effet un ouvert non vide de I_0), et d'après 4.1.1, il existe un champ de vecteur parallèle \tilde{V} défini sur $\sigma^{-1}(\psi(\tilde{U}))$ tel que : $\tilde{V}(t_2) = V(t_2)$, en particulier \tilde{V} est aussi défini en t_1 , mais l'unicité de la solution d'un système différentiel linéaire nous garantie que V et \tilde{V} coïncide sur l'intersection de leurs domaines de définition, et donc \tilde{V} prolonge V au delà de I_0 ce qui nous amène à une contradiction. Et donc $I_0 = I$.

(ii)-Soient $V, \tilde{V} \in \mathcal{T}(\sigma)$ deux champs de vecteurs parallèles le long de σ , soit $t \in I$:

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\langle V(t), \tilde{V}(t) \rangle_{\sigma(t)} \right) &= \langle V'(t), \tilde{V}(t) \rangle_{\sigma(t)} + \langle V(t), \tilde{V}'(t) \rangle_{\sigma(t)} \\ &= \langle DV(t), \tilde{V}(t) \rangle + \langle V(t), D\tilde{V}(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $t \rightarrow \langle V(t), \tilde{V}(t) \rangle_{\sigma(t)}$ est constante.

□

La propriété (ii) illustre l'aspect géométrique d'un champ de vecteur parallèle : *L'angle entre deux champs de vecteurs parallèles le long d'une courbe est partout le même.*

L'intérêt de cette proposition est de pouvoir formuler la définition suivante :

Définition 4.1.4. Une géodésique sur une surface S est une courbe $\sigma : I \longrightarrow S$ de classe C^∞ telle que le champ de vecteurs $\sigma' \in \mathcal{T}(\sigma)$ est parallèle, en d'autres termes $D\sigma' = 0$

Proposition 4.1.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Alors pour tout $p \in S$ et $v \in T_p S$, il existe une géodésique $\sigma : I \longrightarrow S$ vérifiant $0 \in I$, $\sigma(0) = p$ et $\sigma'(0) = v$. En plus, si $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \longrightarrow S$ est une autre géodésique satisfaisant les mêmes conditions, alors σ et $\tilde{\sigma}$ coïncident sur $I \cap \tilde{I}$.

En particulier, pour tout $p \in S$ et $v \in T_p S$ il existe un intervalle maximal ouvert $I_v \subset \mathbb{R}$ et une unique géodésique $\sigma_v : I_v \longrightarrow S$ vérifiant $\sigma_v(0) = p$ et $\sigma_v'(0) = v$.

Démonstration. Comme on a déjà fait durant la proposition 4.1.1, on montre d'abord que toute géodésique vérifie un système d'équations différentielles, la preuve de la proposition se fera alors par la résolution d'un problème de Cauchy.

Soit $\varphi : U \longrightarrow S$ une paramétrisation locale de la surface S centrée en $\sigma(t)$, on conserve les notations utilisées dans la proposition 4.1.1.

Sachant que σ' est un champ de vecteurs le long de la courbe σ , l'égalité (4.1) est bien vérifiée par σ' , on obtient donc :

$$D\sigma' = \sum_{k=1}^2 \left(\sigma_k'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) \sigma_i'(t) \right) \partial_k|_{\sigma(t)} \quad (4.2)$$

pour tout $t \in I$

σ étant une géodésique, on a : $D\sigma' = 0$ et on se retrouve alors avec une système différentielle de deuxième ordre. On se ramène à un système différentiel de premier en posant :

$$v_j(t) = \sigma_j'(t)$$

pour tout $t \in I$ et pour $j = 1, 2$ d'où :

$$\begin{cases} v_j'(t) + \sum_{h,k=1}^2 \Gamma_{hk}^j(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) v_h(t) v_k(t) = 0 \\ v_j(t) = \sigma_j'(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

- On considère désormais le problème de Cauchy (4.3) et on se donne $p \in S$ et $v \in T_p S$ et une paramétrisation $\varphi : U \longrightarrow S$ de S centrée en p .

On sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipshitz, qu'il existe un intervalle I de \mathbb{R} contenant 0 et un ouvert U_0 de S contenant p telle que (4.3) possède une solution $\sigma : I \longrightarrow U_0 \subset S$

vérifiant : $\begin{cases} \sigma(0) = p \\ \sigma'(0) = v \end{cases}$

(Par abus de langage, (4.3) possède une solution signifie que le système équivalent d'ordre 2 (4.2) possède une solution)

Si $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \longrightarrow S$ est une autre géodésique satisfaisant une condition initiale identique à σ (sous entendu $0 \in \tilde{I}$). On veut montrer que $\tilde{\sigma}$ et σ coïncident sur $I \cap \tilde{I}$. On note I_0 l'intervalle maximal sur lequel coïncident σ et $\tilde{\sigma}$, et on suppose que $I_0 \subsetneq I \cup \tilde{I}$.

Soit t_1 la borne supérieure de I_0 . On peut alors trouver une solution $\hat{\sigma} : \hat{I} \longrightarrow S$ du système (4.3) avec \hat{I} un voisinage de t_1 et :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}(t_1) = \sigma(t_1) = \tilde{\sigma}(t_1) \\ \hat{\sigma}'(t_1) = \sigma'(t_1) = \tilde{\sigma}'(t_1) \end{cases}$$

et donc $\hat{\sigma}$ est un prolongement de σ et $\tilde{\sigma}$ au delà de I_0 et ceci d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui fait que σ et $\tilde{\sigma}$ coïncident au delà de l'intervalle I_0 et il en résulte une contradiction.

On conclut alors que $I_0 = I \cap \tilde{I}$. Une conséquence directe de ce résultat est que σ_v est l'unique géodésique dans S définie sur l'intervalle maximale I_v et vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma_v(0) = p \\ \sigma'_v(0) = v \end{cases}$$

□

En d'autres termes, si on fixe un point $p \in S$ il existe une unique géodésique qui suit la direction v au point p . Bien évidemment l'unicité est liée à la courbe géométrique de la géodésique, et on va démontrer d'ici peu que le fait que la courbe est une géodésique donne une condition nécessaire sur la paramétrisation de cette courbe.

Proposition 4.1.3. *Soit $\sigma : I \rightarrow S$ une courbe de classe C^∞ sur une surface S . Alors :*

- i)- σ est une géodésique si et seulement si σ'' est toujours orthogonal à la surface S , en d'autres termes, si et seulement si $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)}S$ pour tout $t \in I$.
- ii)- Si σ est une géodésique alors elle est parcourue à vitesse constante, ce qui veut dire que $\|\sigma'\|$ est constante.

Démonstration. Soit $t \in I$

- i)- On a : $\sigma''(t) = D\sigma'(t) + w(t)$ avec $w(t) \perp T_{\sigma(t)}S$
Si σ est une géodésique, on sait que par définition σ' est parallèle le long de σ
on a alors : $D\sigma'(t) = 0$
et donc : $\sigma''(t) = w(t)$

- ii)- Cette propriété a été déjà démontrée lors de la proposition 4.1.1

□

4.1.1 Géodésiques d'une surface de révolution

Lors de la proposition 4.1.2, on avait montré l'existence (et l'unicité locale) de géodésiques dans une surface régulière par la résolution d'un problème de Cauchy, bien que ces solutions sont la plupart du temps sous formes implicites. L'objectif de cette section est d'explicitier les géodésiques d'une surface de révolution, en termes de fournir un support visuel permettant de faciliter leur représentation, on va donc restreindre le système différentielle (4.2) à notre cas bien précis afin d'observer si notre intuition géométrique sur les surfaces de révolution correspond à la vision mathématique des choses.

1. **Etude Globale** : Avant de procéder, commençons par définir des courbes particulières ou ce qu'on appellera, géodésiques candidats :

Définition 4.1.5. Soit $\Sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\Sigma(t, \theta) = (\alpha(t)\cos(\theta), -\alpha(t)\sin(\theta), \beta(t))$$

pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, avec $(\alpha, 0, \beta) := \sigma$ précédemment définie. Soit $S = \Sigma(\mathbb{R}^2)$

On fixe $\theta_0 \in \mathbb{R}$, et on appelle méridien de S l'application :

$$\begin{aligned} \Sigma(\cdot, \theta_0) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (\alpha(t)\cos(\theta_0), -\alpha(t)\sin(\theta_0), \beta(t)) \end{aligned}$$

Les méridiens sont les courbes de S obtenus par la rotation de σ autour de l'axe (z) d'un angle fixe θ_0 .

On fixe maintenant $t_0 \in \mathbb{R}$ et on appelle parallèle à la surface S l'application :

$$\begin{aligned}\Sigma(t_0, \cdot) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\longrightarrow (\alpha(t_0)\cos(\theta), -\alpha(t_0)\sin(\theta), \beta(t_0))\end{aligned}$$

Les parallèles sont les courbes de S obtenus par la rotation d'un point fixé de la

courbe σ autour de l'axe (z) , se sont exactement les cercles de centre $(0, 0, \beta(t_0))$, de direction initiale $(0, -\alpha(t_0), 0)$ et de rayon $\alpha(t_0)$.

Les parallèles et les méridiens sont des courbes planes.

Dans un premier temps, tout ce qui va suivre va se centrer sur ces deux types de courbes.

Soit γ une géodésique sur S , on pose $\gamma(s) = \Sigma(t(s), \theta(s))$, On a :

$$\begin{cases} \gamma_1(s) + \sum_{h,k=1}^2 \Gamma_{hk}^1(\gamma(s))\gamma'_h(s)\gamma'_k(s) = 0 \\ \gamma_2(s) + \sum_{h,k=1}^2 \Gamma_{hk}^2(\gamma(s))\gamma'_h(s)\gamma'_k(s) = 0 \end{cases}$$

avec $(\gamma_1, \gamma_2) := (t, \theta)$

Un calcul des symboles de Kronecker donne effectivement :

$$\begin{cases} t''(s) + \left(\frac{\alpha''\alpha' + \beta''\beta'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \right) (t(s))t'^2(s) - \left(\frac{\alpha\alpha'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \right) (t(s))\theta'^2(s) = 0 \\ \theta'' + 2\theta'(s)t'(s) \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right) (t(s)) = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus que γ est paramétrée par longueur d'arc (ce qui est bien sur possible à faire puisque γ est une géodésique et est donc paramétrée par un multiple de la longueur d'arc), cela donne que $\gamma' \perp \gamma''$ et on a donc :

$$\begin{aligned}(\alpha''\alpha' + \beta''\beta')(t) &= \langle (\alpha'(t)\cos(\theta), -\alpha'(t)\sin(\theta), \beta'(t)), (\alpha''(t)\cos(\theta), -\alpha''(t)\sin(\theta), \beta''(t)) \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

donc le système se ramène à :

$$\begin{cases} t''(s) - (\alpha\alpha')(t(s))(\theta'(s))^2 = 0 \\ \theta''(s) + 2\theta'(s)t'(s) \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right) (t(s)) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

On va vérifier à présent que les méridiens de S parcourus à vitesse constante unitaire sont en fait des géodésiques.

Si γ est un méridien, alors $\gamma := \Sigma(t, \theta_0)$, θ_0 étant une constante dans $]0, 2\pi[$ et donc l'équation (2) est clairement vérifiée. Il reste à vérifier que $t'' = 0$.

Puisque γ est parcourue à vitesse constante, alors :

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\| &= \|\Sigma \circ (t, \theta)\|'(s) \|^2 \\ &= \|t'(s) \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t(s), \theta_0)\| \\ &= (t'(s))^2 \\ &= k^2 \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{R}_+$.

et donc : $2t'(s)t''(s) = 0$

donc nécessairement $t''(s) = 0$ puisque $t' \neq 0$ qui vient du fait que γ est une géodésique et impose que $\gamma' = t' \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \neq 0$.

Ceci nous mène à conclure que les méridiens de la surface S sont des géodésiques.

Qu'en est il donc des parallèles ? Si γ est un parallèle à S , alors $\gamma := \Sigma(t_0, \theta)$ avec t_0 une constante.

L'équation (2) nous dit que θ' doit être constante sur son domaine de définition, de plus, l'équation (1) est de la forme $\alpha(t_0)\alpha'(t_0)(\theta'(s))^2 = 0$, et par définition d'un parallèle on sait que $\theta' \neq 0$ puisque θ n'est pas constante, donc : $\alpha'(t_0) = 0$

et donc t_0 est forcément est forcément un point critique de α . *Un parallèle d'une surface de révolution est une géodésique si et seulement si θ' est une constante non nulle et t_0 est un point critique de α .*

Creusons un peu plus bas en ce qui concerne les parallèle : t_0 est un point critique de α signifie exactement que :

$$\sigma'(t_0) = (0, 0, \beta'(t_0))$$

en d'autres termes, le vecteur tangent à σ en t_0 est parallèle à l'axe (z). On peut par ce petit commentaire visualiser les parallèles qui sont des géodésiques de la surface S , en effet, les parallèles sont des cercles et on peut observer la variation du rayon de ces cercles en passant d'un parallèle à un autre, la longueur de ces rayons croît puis décroît au fur et à mesure, et cette transition implique l'existence de parallèle de rayon maximal et minimal (au sens local), ces parallèles sont exactement les géodésiques de la surface S .

2. Invariant de Clairaut :

A part que les mèridiens et les parallèles, il est possible de dèduire à partir du système d'èquations prècèdents des informations sur l'aspect qualitatif des gèodèsiques d'une surface de rèvolution.

Puisque α est partout non nulle, on multiplie la seconde èquation par $\alpha^2 \circ t$, et on obtient $(\theta' \alpha^2 \circ t)' = 0$, cela signifie exactement que l'expression $\alpha^2 \theta'$ est constante le long des gèodèsiques. le système (4.4)

est èquivalent à :

$$\begin{cases} t'' = c^2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^3} \circ t, & c \in \mathbb{R} \\ \theta' = \frac{c}{\alpha^2 \circ t}. \end{cases} \quad (4.5)$$

La constante c (qui dépend évidemment de la géodésique en question) possède une interprétation géométrique. On note tout d'abord que la valeur $c = 0$ correspond au cas où l'angle θ est constant, c'est à dire, le cas des méridiens.

En général, $\alpha(t(s))$ est le rayon du parallèle passant par $\gamma(s)$, paramétré par $\theta \rightarrow \varphi(t(s), \theta)$, donc l'angle $\psi(s)$ entre la géodésique γ et le parallèle passant par $\gamma(s)$ est donné par :

$$\cos(\psi) = \frac{\langle \gamma', \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle_\gamma}{\| \gamma' \| \sqrt{G}}$$

On avait supposé la norme $\| \gamma' \|$ égale à 1, ceci donne :

$$\alpha \cos(\psi) = c \quad (4.6)$$

le long de la géodésique. La relation (4.6) est appelée *Relation de Clairaut* et qui s'énonce :

Pour toute géodésique d'une surface de révolution, le produit $\alpha \cos(\psi)$ du cosinus de l'angle entre la géodésique et un parallèle avec le rayon du parallèle est constant.

Bien que l'étude précédente soit qualitatif et facilite la prévision des géodésiques, on est tout de même contraint à la résolution du système différentiel qui donne les trajectoires des géodésiques, et dans ce cas précis des surfaces de révolution, la résolution de ce système n'est certainement pas aussi compliqué que dans le cas général, mais il reste quand même d'autres difficultés.

3. Cas du tore

On se donne l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(t, \theta) = ((R + r \cos(t)) \cos(\theta), (R + r \cos(t)) \sin(\theta), r \sin(t))$$

qui est une paramétrisation du tore de rayons r et R , d'après l'étude faite sur les surfaces de révolution, on sait d'avance que le tore vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = 2 \frac{\dot{\theta} \sin(t)}{\cos(t) + R/r} \\ \ddot{t} = -\dot{\theta}^2 \sin(t) (\cos(t) + R/r) \end{cases} \quad (4.7)$$

On donne ici une visualisation des géodésiques d'un tore à partir de l'approximation numérique des solutions du système (4.7).

Remarque 1. *On pourrait penser que l'étude des géodésiques du tore serait semblable que dans le cas du cône de révolution, la réponse est non puisque la seconde surface est localement isométrique à \mathbb{R}^2 contrairement au cas du tore qui ne l'est pas à cause de la courbure de gauss (pour plus de détails veuillez consulter la bibliographie).*

4.2 Courbure Géodésique

Maintenant qu'on a introduit les généralités sur les géodésiques, on va donner une caractérisation plus géométrique à ce type de courbes :

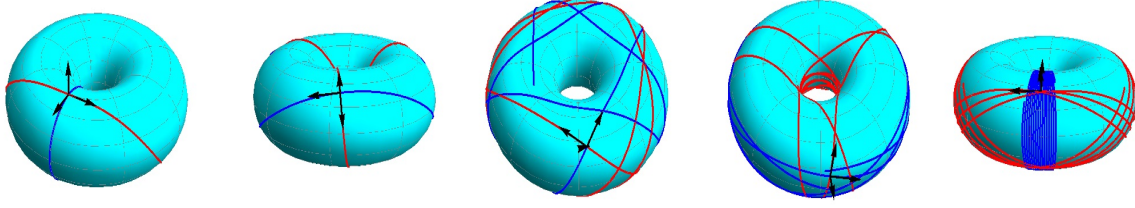


FIGURE 4.2 – Approximations numériques des géodésiques du tore pour différentes conditions initiales fixées

Proposition 4.2.1. *Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe régulière d'une surface S , alors σ est une géodésique si et seulement si elle est parcourue à vitesse constante, et que sa courbure κ coïncide avec la valeur absolue de sa courbure normale $|\kappa_n|$.*

Démonstration. Soit $N : S \longrightarrow S^2$ le champ de vecteurs normal à S défini par :

$$N(p) = \frac{\partial_{1|p} \wedge \partial_{2|p}}{\|\partial_{1|p} \wedge \partial_{2|p}\|}$$

avec $\{\partial_{1|p}, \partial_{2|p}\}$ étant une base de $T_p S$. Soit $t \in I$. Si σ est une géodésique de la surface S , alors $\|\sigma'\|$ est constante, et ceci d'après la proposition 4.1.3 (ii).

Soit $\tilde{\sigma}$ une reparamétrisation de σ par longueur d'arc. On pose $\tilde{\sigma}' := \dot{\sigma}$, on a alors :

$$\ddot{\sigma}(t) = \frac{\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\|^2}$$

d'où $\tilde{\sigma}$ est une géodésique.

On sait que $\ddot{\sigma}(t) \perp T_{\sigma(t)} S$ ce qui signifie que $\ddot{\sigma}(t)$ et $N(\sigma(t))$ sont colinéaires. et donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |\kappa_n| &= |\langle \ddot{\sigma}(t), N(\sigma(t)) \rangle| \\ &= \|\ddot{\sigma}(t)\| \|N(\sigma(t))\| \\ &= \|\ddot{\sigma}(t)\| \\ &= \kappa \end{aligned}$$

Réciproquement si σ est parcouru à vitesse constante et que $|\kappa_n| = \kappa$

Sans perdre de généralité on suppose que σ est parcourue à vitesse unitaire, et donc :

$$|\kappa_n| = |\langle \sigma''(t), N(\sigma(t)) \rangle| = k = \|\sigma''(t)\| = \|\sigma''(t)\| \|N(\sigma(t))\|$$

Cette égalité signifie exactement que $\sigma''(t)$ est colinéaire à $N(\sigma(t))$, et donc $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)} S$. On conclut alors que σ est une géodésique de la surface S . □

Définition 4.2.1. *Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe régulière sur une surface S . Un champ de vecteurs normal le long de σ est une application $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ telle que : $\|N(t)\| = 1$ et $N(t) \perp T_{\sigma(t)} S$ pour tout $t \in I$.*

Il est à évoquer lors de cette définition que les champs de vecteurs normaux le long d'une courbe $\sigma : I \longrightarrow S$ existent sur tout I et ne diffèrent que par un changement de signe. Afin de montrer cela, on se donne $N_1, N_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs normaux le long de la courbe σ , et on considère l'application $\varphi : t \longrightarrow \langle N_1(t), N_2(t) \rangle$. Puisque pour tout $t \in I$ $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont colinéaires et unitaires alors $\langle N_1(t), N_2(t) \rangle = \pm 1$. Or l'application φ est continue et donc $\varphi(I)$ est connexe, et il s'en suit que $\varphi(I) = \{\pm 1\}$ et donc : $N_1 := \pm N_2$.

En ce qui concerne l'existence, on considère le fait que toute surface régulière est localement orientable, et si on fixe $t_0 \in I$ alors il existe un champ de vecteurs normal à S sur un voisinage de $\sigma(t_0)$, on note N ce champ et U ce voisinage et on pose $I_0 = \sigma^{-1}(U)$.

Il suffit alors de définir un champ de vecteur normal le long de σ , $N_1 : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par : $N_1 := N \circ \sigma|_{I_0}$.

Si I_0 est l'intervalle maximale sur lequel N_1 est défini, alors $I_0 = I$, car sinon, en d'autres termes si $I_0 \subsetneq I$, on note t_1 la borne supérieure de I_0 .

On sait que S est localement orientable au voisinage de $\sigma(t_1)$ et on peut définir un champ de vecteurs \tilde{N} normal à S sur ce voisinage, on procède comme auparavant et on pose $N_2 := \tilde{N} \circ \sigma|_{I_1}$ avec $t_1 \in I_1 \subsetneq I$, on obtient $N_2 := N_1$ sur $I_0 \cap I_1$ (le cas où $N_2 := -N_1$ se ramène à poser $N_2 := -\tilde{N} \circ \sigma|_{I_1}$).

Cela signifie exactement que N_1 se prolonge au delà de I_0 et conduit à une contradiction.

Définition 4.2.2. Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe régulière parcourue à vitesse constante unitaire dans la surface S , et soit $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs normal le long de σ .

La courbure géodésique de σ est l'application $\kappa_g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\kappa_g = \langle D\dot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma} \rangle = \langle \ddot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma} \rangle$$

et telle que : $D\dot{\sigma} = \kappa_g N \wedge \dot{\sigma}$

Corollaire 4.2.1. Soit $\sigma : I \longrightarrow S$ une courbe parcourue à vitesse constante unitaire dans une surface S .

Alors :

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

En particulier, si σ est une géodésique alors sa courbure géodésique est partout nulle.

Démonstration. On conserve les mêmes notations de la définition 4.2.1

Tout d'abord puisque $D\dot{\sigma} = \kappa_g N \wedge \dot{\sigma}$, alors :

$$\| D\dot{\sigma} \|^2 = \kappa_g^2 \| N \wedge \dot{\sigma} \|^2 = \kappa_g^2 \quad (4.8)$$

D'ailleurs il est clair que pour tout $t \in I$, $\{D\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t), N(t) \wedge \dot{\sigma}(t)\}$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^3

$\ddot{\sigma}$ se décompose donc dans $\text{vect}\{D\dot{\sigma}, N(t)\}$ (on sait que $\ddot{\sigma} \perp \dot{\sigma}$ puisque σ est parcourue à vitesse constante unitaire), et on écrit pour tout $t \in I$:

$$\ddot{\sigma}(t) = D\dot{\sigma}(t) + \langle \ddot{\sigma}, N(t) \rangle N(t)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \kappa_g^2(t) &= \| D\dot{\sigma}(t) \|^2 \\ &= \| \ddot{\sigma}(t) \|^2 - (\langle \ddot{\sigma}(t), N(t) \rangle)^2 \\ &= (\kappa^2 - \kappa_n^2)(t) \end{aligned}$$

On conclut alors que pour tout $t \in I$:

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(t) + \kappa_g^2(t) \quad (4.9)$$

□

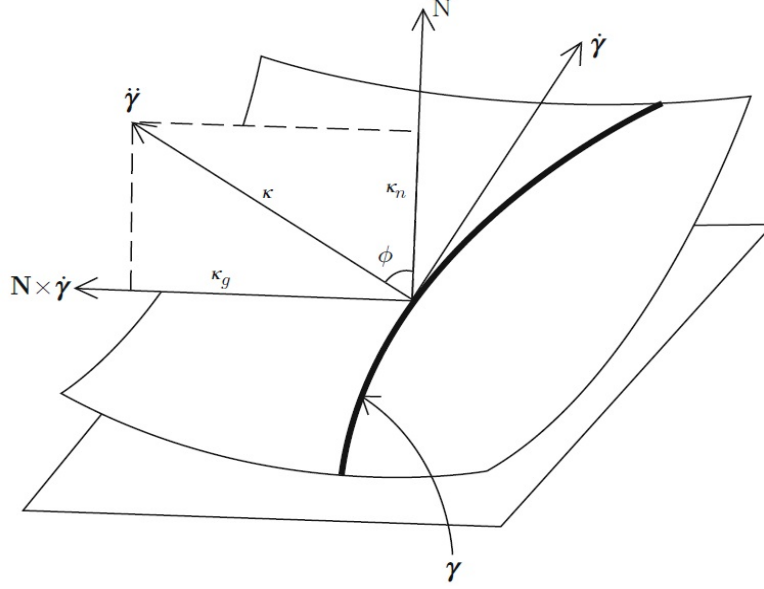


FIGURE 4.3 – Relation entre les différentes courbures d'une courbe

On va désormais expliciter une formule permettant de calculer la courbure géodésique d'une courbe

Définition 4.2.3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et S une surface régulière. Soit $\varphi : U \rightarrow S$ une paramétrisation locale de S .

φ est dite une *paramétrisation orthogonale* de S si et seulement si $\partial_1|_p \perp \partial_2|_p$ pour tout $p \in \varphi(U)$.

Nous admettons l'existence de *paramétrisations orthogonales* d'une surface régulière pour le moment, la démonstration sera indiquée dans les références pour une lecture plus approfondie.

Lemme 4.2.1. Soit $\varphi : U \rightarrow S$ une paramétrisation orthogonale d'une surface S , pour $j = 1, 2$ on note :

$$X_j = \frac{\partial_j}{\|\partial_j\|}$$

Soit $\sigma : I \rightarrow \varphi(U)$ une courbe régulière parcourue à vitesse constante unitaire. Pour tout $s \in I$, on pose :

$$\sigma(s) = \varphi(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \quad , \quad V_1 = X_1 \circ \sigma \quad , \quad V_2 = X_2 \circ \sigma$$

Alors :

$$\langle DV_1, V_2 \rangle_\sigma = \frac{1}{2\sqrt{EG}} [\dot{\sigma}_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1 \frac{\partial E}{\partial x_2}]$$

E , F et G étant les coefficients métriques de la surface S .

Démonstration. La paramétrisation φ est orthogonal implique que les champs de vecteurs ∂_1, ∂_2 sont orthogonaux en tout point de S . Soit $t \in I$

On a :

$$\begin{aligned} \langle DV_1(t), V_2(t) \rangle_{\sigma(t)} &= \langle (X_1 \circ \sigma)'(t), X_2(t) \rangle_{\sigma(t)} \\ &= \dot{\sigma}_1(t) \langle \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), X_2(t) \rangle_{\sigma(t)} \\ &\quad + \dot{\sigma}_2(t) \langle \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), X_2(t) \rangle_{\sigma(t)} \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) &= \frac{\partial}{\|\partial_1\|}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \partial_{1|\sigma(t)} \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), X_2(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \partial_{1|\sigma(t)}, \partial_{2|\sigma(t)} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \partial_{2|\sigma(t)} \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \rangle \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), X_2(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \partial_{1|\sigma(t)}, \partial_{2|\sigma(t)} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \partial_{2|\sigma(t)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \end{aligned}$$

et on conclut alors que :

$$\langle DV_1, V_2 \rangle_\sigma = \frac{1}{2\sqrt{EG}} [\dot{\sigma}_2(t) \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1 \frac{\partial E}{\partial x_2}] \quad (4.10)$$

□

Afin de pouvoir finalement expliciter les calculs de la courbure géodésique, nous avons besoin d'une dernière définition, mais avant de le faire il nous faudra éclaircir quelques

idées.

Considérons $\sigma : [a, b] \longrightarrow S$ une courbe parcourue à vitesse constante unitaire dans une surface S de \mathbb{R}^3 , et soit $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs normal le long de la courbe σ . On considère donc que V_1 et V_2 sont deux champs de vecteurs le long de σ ne s'annulant pas sur $[a, b]$. On peut alors dire que pour tout $s \in [a, b]$ la famille $\{V_1(s), V_2(s)\}$ est une base orthogonale de $T_{\sigma(s)}S$, on écrit alors :

$$\frac{V_2(s)}{\|V_2(s)\|} = \frac{\langle V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} \cdot \frac{V_1(s)}{\|V_1(s)\|} + \frac{\langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} \cdot \frac{N \wedge V_1(s)}{\|V_1(s)\|}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $s \in [a, b]$:

$$-1 \leq \frac{\langle V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{\langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} \leq 1$$

et on pose alors :

$$\begin{aligned} \frac{\langle V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} &= \cos(\theta(s)) \\ \text{et} \quad \frac{\langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} &= \sin(\theta(s)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ce qui est toujours possible puisque :

$$\begin{aligned} \frac{(\langle V_1(s), V_2(s) \rangle)^2 + (\langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle)^2}{\|V_1(s)\|^2 \|V_2(s)\|^2} &= \frac{\langle V_1(s), V_2(s) \rangle^2 + \langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle^2}{\|V_1(s)\|^2 \|V_2(s)\|^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a besoin de définir la notion de relèvement pour continuer :

Définition 4.2.4. Si $\phi : X \longrightarrow S^1$ est une application continue d'un espace topologique X à valeurs dans S^1 , un relèvement de ϕ est une application continue $\tilde{\phi} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\phi(x) = (\cos(\tilde{\phi}(x)), \sin(\tilde{\phi}(x)))$$

pour tout $x \in X$.

l'existence de tels relèvements est liée au théorème suivant :

Théorème 4.2.1. Soit $\phi : [a, b] \longrightarrow S^1$ une courbe continue, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi(a) = (\cos(x_0), \sin(x_0))$. Alors il existe un unique relèvement $\tilde{\phi} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de ϕ tel que : $\tilde{\phi}(a) = x_0$.

Démonstration. admis (voir référence) □

On peut alors définir :

$$\begin{aligned} \theta : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow \theta(s) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\Phi : [a, b] \longrightarrow S^1 \quad (4.12)$$

$$s \longrightarrow (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) = \left(\frac{\langle V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|}, \frac{\langle N \wedge V_1(s), V_2(s) \rangle}{\|V_1(s)\| \|V_2(s)\|} \right) \quad (4.13)$$

et donc :

Définition 4.2.5. Soit $\sigma : [a, b] \longrightarrow S$ une courbe parcourue à vitesse constante unitaire dans une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ et soit $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs normal le long de σ . Etant donné $V_1, V_2 \in \mathcal{T}(\sigma)$ ne s'annulant pas sur $[a, b]$, on considère l'application $\Phi : [a, b] \longrightarrow S^1$ donnée par 4.12 et on appelle détermination de l'angle entre V_1 et V_2 l'application $\theta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\Phi(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

pour tout $s \in [a, b]$. En particulier, on a :

$$\frac{V_2}{\|V_2\|} = \cos(\theta) \frac{V_1}{\|V_1\|} + \sin(\theta) \frac{N \wedge V_1}{\|V_1\|}$$

Proposition 4.2.2. Soit $\varphi : U \longrightarrow S$ une paramétrisation orthogonale locale de la surface S , et $\sigma : I \longrightarrow \varphi(U)$ une courbe parcourue à vitesse constante unitaire. On écrit pour tout $s \in I$:

$$\sigma(s) = \varphi(\sigma_1(s), \sigma_2(s))$$

alors la courbure géodésique de σ est donnée par :

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}_2(t) \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1(t) \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{d\theta}{ds} \quad (4.14)$$

Démonstration. Si $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs normal le long de la courbe σ définit par :

$$N(s) = \frac{\partial_{1|\sigma(s)} \wedge \partial_{2|\sigma(s)}}{\|\partial_{1|\sigma(s)} \wedge \partial_{2|\sigma(s)}\|}$$

soit $s \in I$.

On note :

$$V_j(s) = \frac{\partial_{j|\sigma(s)}}{\|\partial_{j|\sigma(s)}\|}$$

pour $j = 1, 2$ On a : $N \wedge V_1 = V_2$ puisque φ est une paramétrisation orthogonale. et donc :

$$\dot{\sigma}(s) = \cos(\theta(s)) V_1(s) + \sin(\theta(s)) V_2(s)$$

et on a :

$$D\dot{\sigma}(s) = -\sin(\theta(s)) \dot{\theta}(s) V_1(s) + \cos(\theta(s)) \dot{\theta}(s) V_2(s) + \cos(\theta(s)) D(V_1(s)) + \sin(\theta(s)) D(V_2(s))$$

et on a :

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = \langle V_2(s), V_2(s) \rangle = 1$$

et :

$$\langle V_1(s), V_2(s) \rangle = 0$$

de plus :

$$\langle DV_1, V_1 \rangle = \langle DV_2, V_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle DV_1, V_2 \rangle = -\langle V_1, DV_2 \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle D\dot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma} \rangle \\ &= (\sin \theta)^2 \dot{\theta} + (\cos \theta)^2 \langle DV_1, V_2 \rangle + (\cos \theta)^2 \dot{\theta} - (\sin \theta)^2 \langle V_1, DV_2 \rangle \\ &= \langle DV_1, V_2 \rangle + \dot{\theta} \end{aligned}$$

On conclut alors par le lemme 4.2.1

□

4.3 Géodésiques et distances

La section précédente avait pour but d'éclaircir la notion de géodésiques d'une surface et de montrer l'existence de telles courbes, ensuite, de leur donner un aspect géométrique par le moyen de la courbure géodésique. Dorénavant, on s'intéresse à la longueur d'une courbe géodésique, en d'autres termes, on veut prouver que le chemin minimal (au sens de la longueur) entre deux point d'une surface est une géodésique, et que la réciproque est encore vraie localement. La proposition 4.1.2 nous dit que pour tout $p \in S$ et $v \in T_p S$, il existe une unique géodésique $\sigma_v : I_v \rightarrow S$ telle que : $\sigma_v(0) = p$ et $\sigma'_v(0) = v$ (sous entendu $0 \in I_v$). On a tendance de conserver ces notations dans ce qui suit :

Lemme 4.3.1. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, $p \in S$ et $v \in T_p S$. Alors :*

(i)- *Pour tout $c, t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(t) \quad (4.15)$$

Lorsque l'un des deux termes est bien définit.

(ii)- *Si σ_v est définit en $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$, alors σ_v est définit en $s+t$ si et seulement si*

$$\sigma_{\sigma'_v(t)}(s) = \sigma_v(s+t) \quad (4.16)$$

Dans (ii), " σ_v est définie en t " signifie qu'il existe un voisinage ouvert contenant t et l'origine sur lequel σ_v est définie.

Démonstration. (i)- Soient $c, t \in \mathbb{R}$. On suppose que $I_v = \mathbb{R}$. On sait que σ_{cv} est la géodésique de S vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma_{cv}(0) = p \\ \sigma'_{cv}(0) = cv \end{cases}$$

Si on considère l'application :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longrightarrow \sigma_v(ct) \end{aligned}$$

Clairement σ est une reparamétrisation de σ_v par un multiple de longueur d'arc donc σ est une géodésique de S , de plus :

$$\begin{cases} \sigma(0) = p \\ \sigma'(0) = cv \end{cases}$$

Cela signifie que σ et σ_{cv} coïcident sur $I_{cv} \cap \mathbb{R} = I_{cv}$

mais alors σ prolonge σ_{cv} sur \mathbb{R} et I_{cv} est l'intervalle maximale sur lequel σ_{cv} est définie

donc : $I_{cv} = \mathbb{R}$ et on obtient notre égalité.

(ii)- On pose $I_v - t = \{s \in \mathbb{R} | s + t \in I_v\}$, la courbe $\sigma : I_v - t \longrightarrow S$ définie par :

$$\sigma(s) = \sigma_v(s + t)$$

est clairement une géodésique vérifiant $\sigma(0) = \sigma_v(t)$ et $\sigma'(0) = \sigma'_v(t)$, et donc $\sigma(s) = \sigma_{\sigma'_v(t)}(s)$ pour tout $s \in I_v - t$. Cela signifie que si σ_v est définie en $s + t$ alors $\sigma_{\sigma'_v(t)}$ est définie en s (ce qui veut dire que $I_v - t \subset I_{\sigma'_v(t)}$) et l'égalité (4.16) est vérifiée.

En particulier, $-t \in I_v - t \subset I_{\sigma'_v(t)}$ et donc $\sigma_{\sigma'_v(t)}(-t) = p$ et $\sigma'_{\sigma'_v(t)}(-t) = \sigma'_v(0) = v$. En appliquant le même argument à $(-t, \sigma_v(t))$ à la place de (t, p) on obtient que $I_{\sigma'_v(t)} + t \subset I_v$ et donc $I_{\sigma'_v(t)} + t = I_v$, la démonstration est alors achevée.

□

Définition 4.3.1. Soit S une surface régulière et $p \in S$, on note par :

$$\mathcal{E}_p = \{v \in T_p S | 1 \in I_v\}$$

L'ensemble des vecteurs tangents $v \in T_p S$ tel que σ_v est défini sur un voisinage de $[0, 1]$. On appelle exponentielle en $p \in S$ et on note :

$$\exp_p : \mathcal{E}_p \longrightarrow S$$

L'application définie par :

$$\exp_p(v) = \sigma_v(1)$$

pour tout $v \in \mathcal{E}_p$.

Le choix de \mathcal{E}_p prendra tout son intérêt dans ce qui suit : l'approche correspond à rechercher le chemin minimal entre $\sigma_v(0)$ et $\sigma_v(1)$. En un premier temps, on va d'abord montrer que \mathcal{E}_p est étoilé à l'origine (ce qui veut dire que l'ensemble affine associé à \mathcal{E}_p en p est étoilé en p), il est alors possible de définir une boule centrée en 0 et qui sera nécessairement incluse dans \mathcal{E}_p pour un certain rayon. Si on note $B_p(0, \delta)$ cette boule, on montrera que l'application \exp_p est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme pour un δ bien précis noté $\delta_1 \geq 0$.

Notons alors $B_{\delta_1}(p)$ l'image de $B_p(0, \delta_1)$ par l'application exponentielle, l'idée sera alors d'observer que $B_p(0, \delta_1)$ est l'ensemble de toutes les directions provenant de l'origine de norme inférieure à δ_1 , il s'en suit que $B_{\delta_1}(p)$ est la réunion de tous les géodésiques provenant du point p de longueur δ_1 .

Procédons alors :

Proposition 4.3.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$, alors :

- (i)- \mathcal{E}_p est un ouvert étoilé à l'origine dans $T_p S$
- (ii)- Pour tout $v \in T_p S$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que σ_v est défini en t_0 , il existe $\delta \geq 0$ et une paramétrisation locale $\varphi : U \longrightarrow S$ centrée en p telles que $w_0 = (d\varphi_0)^{-1}(v)$, l'application $(x, w, t) \longrightarrow \sigma_{d\varphi_x(w)}(t)$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $U \times B(w_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}^5$.
- (iii)- L'application $\exp_p : \mathcal{E}_p \longrightarrow S$ est de classe \mathcal{C}^∞

(iv)- $d(\exp_p)_O = id$ et en particulier \exp_p est un difféomorphisme entre un voisinage de O dans $T_p S$ et un voisinage de p dans S .

Démonstration. (i)- Soit $v \in \mathcal{E}_p$ un vecteur non nul, Soit $t \in [0, 1]$

On a : $\sigma_v(t) = \sigma_t v(1)$ d'après le lemme 4.3.1 (i).

et donc $1 \in I_{tv}$, donc $tv = tv + (1 - t)O \in \mathcal{E}_p$, et on en déduit que \mathcal{E}_p est étoilé à l'origine.

(ii)- On définit $\mathcal{U} = \{(u, v, t_0/p \in S, v \in T_p S, \sigma_v \text{ est défini en } t_0)\}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ l'ensemble des (p, v, t_0) pour lesquels il existe $\delta \geq 0$ et une paramétrisation $\varphi : U \rightarrow S$ centrée en p telles que :

$$(x, w, t) \rightarrow \sigma_{d\varphi_x}(t)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $U \times B(w_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ avec $w_0 = (d\varphi_0)^{-1}(v)$.

On a $\mathcal{E}_p = \pi(\mathcal{U} \cap (\{p\} \times T_p S \times \{1\}))$ avec $\pi : S \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ étant la projection sur la deuxième coordonnée, on note $\mathcal{W}_p = \pi(\mathcal{W} \cap (\{p\} \times T_p S \times \{1\}))$ est par définition un ouvert dans $T_p S$ et \exp_p est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{W}_p .

Pour obtenir alors (i)-(iii), il suffit de démontrer que $\mathcal{W} = \mathcal{U}$.

Tout d'abord, $\mathcal{W} \neq \emptyset$ puisque pour tout $p \in S$, $v \in T_p S$, on a $(p, v, 0) \in \mathcal{W}$ (Ceci est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz appliquée au système 4.2).

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $(p_0, v_0, t_0) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$. Puisque $t_0 \neq 0$ on suppose $t_0 \geq 0$ sans nuire à la généralité, car le cas de $t_0 \leq 0$ s'étudie de manière analogue.

Soit $\hat{t} = \sup\{t \in \mathbb{R} / \{p_0\} \times \{v_0\} \times [0, t] \subset \mathcal{W}\}$ (ceci est possible puisque \mathcal{W} est ouvert dans $S \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$). On a clairement $0 \leq \hat{t}_0$.

Puisque $(p_0, v_0, t_0) \in \mathcal{U}$, la géodésique σ_{v_0} est définie en \hat{t} . On pose $\hat{p} = \sigma_{v_0}(\hat{t})$ et $\hat{v} = \sigma_{v_0}'(\hat{t})$.

On sait que $(\hat{p}, \hat{v}, 0) \in \mathcal{W}$, alors il existe une paramétrisation $\hat{\varphi} : \hat{U} \rightarrow S$ centrée en \hat{p} et il existe $\delta \geq 0$ et un voisinage $\hat{W} \subset \mathbb{R}^2$ de $\hat{w} = (d\hat{\varphi}_0)(\hat{v})$ tel que $(x, w, t) \rightarrow \sigma_{d\hat{\varphi}_x(w)}(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ dans $\hat{U} \times \hat{W} \times (-\delta, \delta)$.

On choisit $t_1 \leq \hat{t}$ vérifiant $t_1 + \delta \geq \hat{t}$, $\sigma_{v_0}(t_1) \in \hat{V} = \hat{\varphi}(\hat{U})$ et $\sigma_{v_0}'(t_1) \in d\hat{\varphi}_{x_1}(\hat{W})$ avec $x_1 = \hat{\varphi}^{-1}(\sigma_{v_0}(t_1))$. On sait que $\{p_0\} \times \{v_0\} \times [0, t_1] \subset \mathcal{W}$, alors il existe une paramétrisation locale de S notée $\varphi : U \rightarrow S$ centrée en p_0 , un $\epsilon \geq 0$ et un voisinage $W \subset \mathbb{R}^2$ de $w_0 = (d\varphi_0)^{-1}(v_0)$ telles que l'application $(x, w, t) \rightarrow \sigma_{d\varphi_x(w)}(t)$ soit de classe \mathcal{C}^∞ dans $U \times W \times (-\epsilon, t_1 + \epsilon)$, de plus on suppose que $\sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1) \in \hat{V}$ et $\sigma_{d\varphi_x(w)}'(t_1) \in d\hat{\varphi}_{x'}(W')$ (ce qui est toujours faisable ne réduisant la taille de U et W), ceci pour tout $(x, w) \in U \times W$, avec $x' = \hat{\varphi}^{-1}(\sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1))$.

Si $(x, w) \in U \times W$, l'application $(x, w) \rightarrow \sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1)$ est bien définie et est de classe \mathcal{C}^∞ , donc les application

$$(x, w) \rightarrow \hat{\varphi}^{-1}(\sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1))$$

$$(x, w) \rightarrow (d\hat{\varphi}_{x'})^{-1}(\sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1))$$

donc pour tout $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$, on a :

$$\sigma_{\sigma_{d\varphi_x(w)}(t_1)'}(t - t_1) = \sigma_{d\hat{\varphi}_{x'}(w')}(t - t_1)$$

Ceci démontre que l'application $(x, w, t) \rightarrow \sigma_{d\varphi_x(w)}(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ dans $U \times W \times (-\epsilon, t_1 + \delta)$ contrairement à la définition de \hat{t} .

d'où $\mathcal{U} = \mathcal{W}$.

(iv)- L'application \exp_p est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{E}_p , soit $w \in T_p S$
On a : $d(\exp_p)_O(w) = \frac{d}{dt}(\exp_p \circ \tau) |_{t=0}$
avec

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R} &\longrightarrow T_p S \\ t &\longrightarrow tw \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_O(w) &= \frac{d}{dt} \exp_p(tw) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sigma_{tw}(1) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sigma_w(t) |_{t=0} \\ &= w \end{aligned}$$

donc $d(\exp_p)_O = id$ est inversible. On en déduit que \exp_p est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $T_p S$ et un voisinage de p dans S . (d'après le théorème d'inversion locale).

□

Définition 4.3.2. Si $p \in S$ et $\delta \geq 0$, soit $B_p(0, \delta) = \{v \in T_p S \mid \|v\|_p \leq \delta\}$ la boule centrée à l'origine et de rayon $\delta \geq 0$ dans $T_p S$.

Le rayon d'injectivité $\text{injr}(p)$ de S en p est le plus grand rayon $\delta \geq 0$ pour lequel $\exp_p : B_p(0, \delta) \longrightarrow S$ est un difféomorphisme avec son image.

Si $0 \leq \delta \leq \text{injr}(p)$, l'ensemble

$$B_\delta(p) = \exp_p(B_p(0, \delta))$$

est appelé boule géodésique de centre p et de rayon δ .

Les géodésiques incidents de p , qui sont les courbes de la forme $t \longrightarrow \exp_p(tv)$ sont appelés géodésiques radiales.

Les courbes images des cercles de centre 0 et de rayons inférieurs à $\text{injr}(p)$ par \exp_p sont appelés cercles géodésiques.

Finalement, si on pose $B_\delta^*(p) = B_\delta(p) \setminus \{p\}$, le champ radial

$$\frac{\partial}{\partial r} : B_\delta^*(p) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

est défini par :

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = \dot{\sigma}_v(1) \in T_q S$$

pour tout $q = \exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$

Lemme 4.3.2. Soit $p \in S$ et $0 \leq \delta \leq \text{injr}(p)$. Soit $B_\delta(p) \subset S$ une boule géodésique centrée en p .

Alors :

(i)- Pour tout $q = \exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$ on a :

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|} = \dot{\sigma}_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|) = \frac{1}{\|v\|} d(\exp_p)_v(v) \quad (4.17)$$

En particulier, $\left\| \frac{\partial}{\partial r} \right\| = 1$ et $\|d(\exp_p)_v\| = \|v\|$.

(ii)- Les géodésiques radiales passant par p , parcourus à vitesse constante unitaire, sont tangents au champ radial dans $B_\delta^*(p)$.

(iii)- (Lemme de Gauss) Le champ radial est orthogonal à tous les cercles géodésiques inclus dans $B_\delta^*(p)$ et en particulier :

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad (4.18)$$

pour tout $w \in T_p S$

Démonstration. Soit $q \in B_\delta^*(p)$ tel que $q = \exp_p(v)$ avec $v \in T_p S$

(i)- On a : $\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \dot{\sigma}_v(1)$

or on sait que : $\dot{\sigma}_v(1) = \frac{\sigma'_v}{\|v\|}$

puisque σ_v est une géodésique, on sait que :

$$\|\sigma'_v(t)\| = \|\sigma'_v(0)\| = \|v\|$$

pour tout $t \in I_v$ et donc :

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \frac{\sigma'_v(1)}{\sigma'_v(1)} = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|}$$

et on sait que : $[0, 1] \subset I_v$

donc : $[0, \|v\|] \subset I_{\frac{v}{\|v\|}}$

et on a : $\sigma_v(1) = \sigma_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|)$

d'où : $\dot{\sigma}_{\frac{v}{\|v\|}} = \frac{1}{\|v\|} \dot{\sigma}_v(1) = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q$

On considère désormais la géodésique radiale : $t \longrightarrow \exp_p(tv) = \sigma_v(t)$

On a : $\dot{\sigma}_v t = \frac{1}{\|v\|} \sigma'_v(t) = \frac{1}{\|v\|} d(\exp_p)_{tv}(v)$

d'où : $\dot{\sigma}_v 1 = \frac{1}{\|v\|} d(\exp_p)_v(v) = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q$

Les trois égalités sont alors démontrées et on en déduit que :

$$\left\| \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q \right\| = \|\dot{\sigma}_v(1)\| = \frac{1}{\|v\|} \|d(\exp_p)_v(v)\| = 1$$

et donc : $\|d(\exp_p)_v\| = \|v\|$

(ii)- Les géodésiques radiales parcourus à vitesse constante unitaire sont les courbes σ_v avec $\|v\| = 1$

On sait que $\sigma_v(ts) = \sigma_{sv}(t)$ pour tout $t, s \in I_v$

et donc : $\sigma'_{sv}(1) = s\sigma'_v(s), s \neq 0$

d'où : $\dot{\sigma}_{sv}(1) = \frac{1}{\|sv\|} \sigma'_{sv}(1) = \sigma'_v(s) = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\sigma_v(s)}$

On conclut alors que les géodésiques radiales sont tangents au champ radial.

(iii)- On pose : $E_1 = \frac{v}{\|v\|}$ et on considère la géodésique radial σ_{E_1} reliant p à q.
On considère $E_2 \in T_p S$ tel que :

$$E_2 \perp E_1$$

et

$$\|E_2\| = 1$$

$\{E_1, E_2\}$ forme alors une base orthonormale de $T_p S$.

On a : $q = \sigma_{E_1}(\|v\|)$ et donc le cercle géodésique passant par q est paramétré par la courbe :

$$\begin{aligned} \tau :] - \pi, \pi[&\longrightarrow S \\ s &\longrightarrow \tau(s) = \exp_p(\|v\| \cos(s)E_1 + \|v\| \sin(s)E_2) \end{aligned}$$

avec $\tau(0) = q$

Pour aboutir à notre résultat, il suffit de montrer que :

$$\langle \tau'(0), \dot{\sigma}_{E_1}(\|v\|) \rangle = 0$$

puisque q est choisi arbitrairement dans $B_\delta^*(p)$ On procède comme suit : Soit

$$\begin{aligned} \Sigma :] - \pi, \pi[\times] - \delta, \delta[&\longrightarrow S \\ (s, t) &\longrightarrow \Sigma(s, t) = \exp_p(t \cos(s)E_1 + t \sin(s)E_2) \end{aligned}$$

On sait que : $\Sigma(0, t) = \sigma_{E_1}(t)$ et $\Sigma(s, \|v\|) = \tau(s)$

On montrera que le produit scalaire :

$$\left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \right\rangle$$

est nul. On note : $v_s = \cos(s)E_1 + \sin(s)E_2$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle \\ &= \left\langle D \dot{\sigma}_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\| \dot{\sigma}_{v_s}(t) \right\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $(s, t) \in] - \pi, \pi[\times] - \delta, \delta[$

des passage dans les calculs sont possibles puisque :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) = d(\exp_p)_{tv_s}(v_s) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}_{v_s}(t)$$

et

$$\left\| \dot{\sigma}_{v_s}(t) \right\| = 1$$

pour tout $t \in]-\delta, \delta[$

et donc le produit scalaire $\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \rangle$ est indépendant de la variable t , en d'autres termes :

$$\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \rangle = \langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, 0) \rangle$$

or : $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, t) = td(\exp_p)_{tE_1}(E_2)$ pour tout $t \in]-\delta, \delta[$

d'où : $\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, 0) = 0$ et le résultat est prouvé.

En particulier, on sait que :

$$\dot{\sigma}_{E_1}(\|v\|) = \|v\| d(\exp_p)_v(v)$$

$$\tau'(0) = \|v\| d(\exp_p)_v(E_2)$$

□

Nous arrivons enfin à l'objectif de cette section, qui est de caractériser localement les géodésiques comme les courbes de distance minimale entre deux points, on énonce alors le théorème central de cette section :

Théorème 4.3.1. *Soit S une surface, et $p \in S$.*

- (i)- *Si $0 \leq \delta \leq \text{in}jrad(p)$, alors pour tout $q \in B_\delta(p)$ la géodésique radiale passant par p et q est l'unique, plus petite courbe (au sens de la distance) joignant p à q .*
- (ii)- *Si $\sigma : [0, 1] \rightarrow S$ possède la longueur minimale entre toute les courbes régulières par morceaux dans S joignant les points $p = \sigma(0)$ à $q = \sigma(1) \in S$, alors σ est une géodésique (et est en particulier de classe \mathcal{C}^∞).*
- (iii)- *Soit $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ une géodésique parcourue à vitesse constante unitaire, $t_0 \in [a, b]$ et $\delta = \text{in}jrad(\sigma(t_0))$. Alors σ est la plus petite courbe dans S de $\sigma(t_0)$ à $\sigma(t_1)$ si $|t_0 - t_1| \leq \delta$*

Démonstration. (i)- Soit $q_0 \in B_\delta(p)$ et $v_0 \in T_p S$ tel que $q_0 = \exp_p(v_0)$.

On pose $E_1 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$ tel que $\sigma_{E_1} : [0, \|v_0\|] \rightarrow S$ est une géodésique parcourue à vitesse constante unitaire joignant p à q_0

. On va démontré que si $\tau : [0, \ell] \rightarrow S$ est une autre courbe régulière par morceaux, parcourue à vitesse constante unitaire d'extrémités p et q_0 , alors $L(\tau) \geq L(\sigma_{E_1}) = \|v_0\|$ avec égalité si et seulement si les deux courbes coïncident.

Si τ passe par p plus qu'une fois, on peut clairement éliminer une portion de τ et obtenir une courbe encore plus courte entre p et q_0 . C'est pourquoi on va considérer que $\tau(s) \neq p$ pour tout $s \geq 0$.

On se restreint au cas où le support de τ est contenu dans $B_\delta(p)$, on verra plus tard dans la démonstration comment passer au cas général.

Dans ce cas, on sait que pour tout $s \in (0, \ell]$ où τ est \mathcal{C}^∞ , il existe $a(s) \in \mathbb{R}$ et $w(s) \in T_{\tau(s)} S$ orthogonal au champ radial tel que :

$$\dot{\tau}(s) = a(s) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\tau(s)} + w(s)$$

; par le lemme de Gauss 4.3.2 (iii), le vecteur $w(s)$ est tangent au cercle géodésique passant par $\tau(s)$.

Soit $r : B_\delta^*(p) \rightarrow \mathbb{R}^+$ donné par :

$$r(q) = \| \exp_p^{-1}(q) \|_p .$$

Clairement, r est de classe \mathcal{C}^∞ , est les cercles géodésiques sont les courbes de niveau de r . Alors on a :

$$dr_q(w) = 0$$

pour tout vecteur $w \in T_q S$ tangent au cercle géodésique passant par $q \in B_\delta^*(p)$. De plus, si $q = \exp_p(v)$, on a :

$$\begin{aligned} dr_q\left(\frac{\partial}{\partial r}\Big|_q\right) &= dr_{\exp_p(v)}\left(\frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt}(r \circ \exp_p)(tv)|_{t=1} \\ &= \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt}(t \|v\|)|_{t=1} = 1 \end{aligned}$$

et on obtient donc :

$$\frac{d(r \circ \tau)}{ds}(s) = dr_{\tau(s)}(\dot{\tau}(s)) = a(s)$$

On peut désormais estimer la longueur de τ . Soit $0 = s_0 \leq \dots \leq s_k = \ell$ une partition de $[0, \ell]$ telle que $\tau|_{[s_{j-1}, s_j]}$ est régulière pour $j = 1, \dots, k$. Donc :

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \|\dot{\tau}(s)\| ds = \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \sqrt{|a(s)|^2 + \|w(s)\|^2} ds \\ &\geq \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} |a(s)| ds \\ &\geq \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{d(r \circ \tau)}{ds}(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^k [r(\tau(s_j)) - r(\tau(s_{j-1}))] \\ &= r(q_0) - r(p) \\ &= \|v_0\| \\ &= L(\sigma_{E_1}) \end{aligned}$$

Donc, τ est au moins de même taille de σ_{E_1} . L'égalité à lieu si et seulement si $w(s) = 0$ et $a(s) \geq 0$ pour tout s , dans ce cas, puisque $\|\dot{\tau}\| := 1$ on obtient que $\dot{\tau} = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_\tau$. Donc τ est une courbe attachant p à q toujours tangente au champ radial, tout comme σ_{E_1} , donc σ_{E_1} et τ sont solution du système différentiel (??) vérifiant les mêmes conditions initiales, elle sont donc égales d'après le théorème de *Cauchy-Lipschitz*. Enfin, si l'image de τ n'est pas entièrement contenue dans $B_\delta(p)$, soit $t_1 \geq 0$ la première valeur pour laquelle τ coupe le bord $\partial B_\delta(p)$. Alors :

$$L(\tau) \geq L(\tau|_{[0, t_1]}) \geq \delta \geq \|v_0\|$$

et la démonstration est achevée.

(ii)- Si σ est la courbe de plus courte distance entre p et q , elle l'est aussi entre deux points quelconques de son support.

S'il n'était pas le cas, On pourrait remplacer une portion de σ par une autre plus courte, disposons ainsi d'une courbe régulière par morceaux de liant p et q encore plus courte que σ .

Mais on vient de démontrer dans (i) que localement les courbes de distance minimale sont des géodésiques, donc σ est forcément une géodésique.

(iii)- Sous ces conditions $\sigma(t_1)$ est un élément de la boule géodésique de centre $\sigma(t_0)$ et de rayon δ , et σ est la géodésique radiale joignant $\sigma(t_0)$ à $\sigma(t_1)$.

□

Chapitre 5

Isométries

5.1 Propriétés des isométries

Définition 5.1.1. Soit $H : S_1 \longrightarrow S_2$ une application de classe \mathcal{C}^∞ entre deux surfaces régulières.

On dira que H est une isométrie au point $p \in S_1$ si pour tout vecteur $v \in T_p S_1$ on a :

$$I_{H(p)}(dH_p) = I_p(v)$$

ceci implique que :

$$\langle dH_p(v), dH_p(w) \rangle_{H(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

pour tous $v, w \in T_p S_1$. On dira que H est une isométrie locale en $p \in S_1$ si p possède un voisinage U tel que H soit une isométrie en tout point de U , et que H est une isométrie locale s'il est le cas en tout point de S_1 . Finalement, on dit que H est une isométrie si elle est à la fois un difféomorphisme global et une isométrie local.

On précise lors de cette définition que si H est une isométrie au point $p \in S_1$, alors la différentielle de H au point p est clairement inversible (c'est même un endomorphisme orthogonal de déterminant égal à ± 1), et le théorème d'inversion locale implique que H est un difféomorphisme entre un voisinage de p dans S_1 et un voisinage de $H(p)$ dans S_2 .

Exemple 5.1.1. Soit $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $z = 0$, et $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, et soit $H : S_1 \longrightarrow S_2$ l'application donnée par :

$$H(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)$$

Soit $p \in S_1$ et $v \in T_p S_1$, alors :

$$dH_p(v) = v_1 \frac{\partial H}{\partial x}(p) + v_2 \frac{\partial H}{\partial y}(p) = (-v_1 \sin(x), v_1 \cos(x), v_2)$$

pour tout $p = (x, y, 0) \in S_1$ et $v = (v_1, v_2, 0) \in T_p S_1$, et donc :

$$I_{H(p)}(dH_p(v)) = \|dH_p(v)\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = \|v\|^2 = I_p(v)$$

et donc H est une isométrie locale. H n'est pas une isométrie puisqu'elle n'est pas injective.

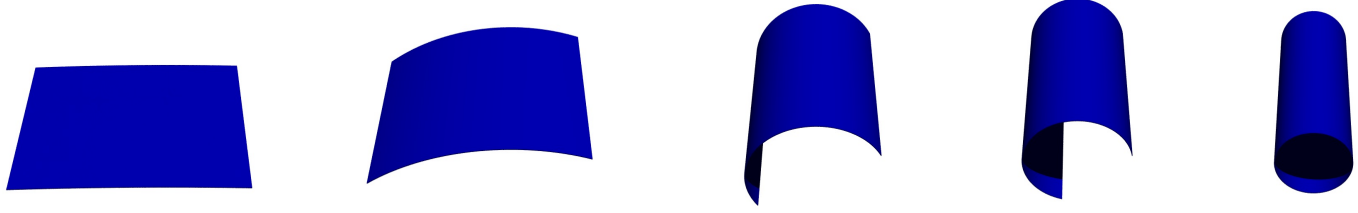


FIGURE 5.1 – Isométrie plan cylindre

Définition 5.1.2. On dira qu'une surface S_1 est localement isométrique à une surface S_2 s'il existe une isométrie pour tout $p \in S_1$ définie d'un voisinage de p dans S_1 sur un voisinage de p dans S_2 .

Proposition 5.1.1. Soient $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces régulières. Alors S est localement isométrique à \tilde{S} si et seulement pour tout point $p \in S$ il existe un point $\tilde{p} \in \tilde{S}$, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une paramétrisation locale $\varphi : U \rightarrow S$ de S centrée en p , et une paramétrisation locale $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \tilde{S}$ de \tilde{S} centrée en \tilde{p} qui vérifient $E := \tilde{E}$, $F := \tilde{F}$ et $G := \tilde{G}$, où E, F, G (respectivement $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$) sont les coefficients métrique de S par φ (respectivement par $\tilde{\varphi}$).

Démonstration. On suppose que S est localement isométrique à \tilde{S} .

Alors pour $p \in S$ fixé, il existe un voisinage V de p dans S et une isométrie $H : V \rightarrow H(V) \subset \tilde{S}$.

On se donne maintenant une paramétrisation locale $\varphi : U \rightarrow S$ centrée en p , et on note $\tilde{\varphi} := H \circ \varphi$. $\tilde{\varphi}$ est clairement une paramétrisation locale de \tilde{S} centrée au point $H(p) = \tilde{p}$. Si on note : $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base de $T_p S$ associée à φ et $\{\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2\}$ la base de $T_{H(p)} \tilde{S}$ associée à $\tilde{\varphi}$, un calcul des coefficients métrique donne que :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\partial}_{i|\tilde{p}}, \tilde{\partial}_{j|\tilde{p}} \rangle &= \langle dH_p(\partial_{i|p}), dH_p(\partial_{j|p}) \rangle \\ &= \langle \partial_{i|p}, \partial_{j|p} \rangle \end{aligned}$$

pour tout $i, j = 1, 2$. Et donc $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ et $G = \tilde{G}$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe deux paramétrisations locales φ et $\tilde{\varphi}$ comme présentées lors de la proposition, on pose $H := \tilde{\varphi} \circ \varphi : \varphi(U) \rightarrow \tilde{\varphi}(U)$.

Afin de prouver que H est une isométrie, on prend $q \in \varphi(U)$ un point arbitraire et un vecteur $v \in T_q S$, on sait que v se décompose dans la base de $T_q S$ et donc :

$$v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2$$

on sait de plus que H est un difféomorphisme sur son image et donc dH_q est inversible et transforme une base de $T_q S$ en une base de $T_{H(q)} \tilde{S}$, on note :

$$dH_q(\partial_j) = \tilde{\partial}_j, \quad dH_q(v) = v_1 \tilde{\partial}_1 + v_2 \tilde{\partial}_2$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{H(q)}(dH_q(v)) &= v_1^2 \tilde{E}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) + 2v_1 v_2 \tilde{F}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) + v_2^2 \tilde{G}(\tilde{\varphi}^{-1} \circ H(q)) \\ &= v_1^2 E(\varphi^{-1}(q)) + 2v_1 v_2 F(\varphi^{-1}(q)) + v_2^2 G(\varphi^{-1}(q)) \\ &= I_q(v) \end{aligned}$$

On conclut donc que H est une isométrie. □

Exemple 5.1.2. (*Plan-Cône*)

Soit $U_1 = \{(\theta, z) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = a_0 z^2, 0 \leq z \leq 1\} \setminus \{(a_0 z, 0, z) | 0 \leq z \leq 1\}$ un cône de rayon a_0 est de hauteur égale à 1 privé de la droite d'équation $x = a_0 z$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \Sigma_1 \\ (\theta, z) &\longrightarrow (a_0 z \cos(\theta), a_0 z \sin(\theta), z)\end{aligned}$$

on peut facilement vérifier que φ_1 est une paramétrisation locale de Σ_1 .

On note $r_0 = \sqrt{1 + a_0^2}$ et $\alpha_0 = 2\pi - \frac{2\pi a_0}{r_0}$, et on considère l'ouvert de \mathbb{R}^2 $U_2 = \{(\alpha, \rho) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \rho \leq r_0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi - \alpha_0\}$ et l'application $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\varphi_2(\alpha, \rho) = (\rho \cos(\alpha), \rho \sin(\alpha), 0)$$

on pose alors $\Sigma_2 = \varphi_2(U_2)$. On voudrait montrer que l'application $\psi : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ donnée par la formule

$$\psi(M) = (z r_0 \cos(\theta a_0 / r_0), z r_0 \sin(\theta a_0 / r_0))$$

pour tout $M = \varphi_1(\theta, z)$ est en fait une isométrie locale du cône sur la partie du plan notée Σ_2 .

Si E, F, G sont les coefficients métriques de Σ_1 associés à la paramétrisation φ_1 et $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$, les coefficients métriques de Σ_2 associés à la paramétrisation $\psi \circ \varphi_1$, alors un calcul sur ceux-ci donne que :

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} -a_0 z \sin(\theta) \\ a_0 z \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_0 z \sin(\theta) \\ a_0 z \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (a_0 z)^2 = \hat{E} = \left\langle \begin{pmatrix} -z a_0 \sin(\theta \frac{a_0}{r_0}) \\ z a_0 \cos(\theta \frac{a_0}{r_0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z a_0 \sin(\theta \frac{a_0}{r_0}) \\ z a_0 \cos(\theta \frac{a_0}{r_0}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} -a_0 z \sin(\theta) \\ a_0 z \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 \cos(\theta) \\ a_0 \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 = \hat{F} = \left\langle \begin{pmatrix} -z a_0 \sin(\theta a_0 / r_0) \\ z a_0 \cos(\theta a_0 / r_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \sin(\theta a_0 / r_0) \\ r_0 \cos(\theta a_0 / r_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} a_0 \cos(\theta) \\ a_0 \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 \cos(\theta) \\ a_0 \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a_0^2 + 1 = r_0^2 = \hat{G} = \left\langle \begin{pmatrix} r_0 \sin(\theta a_0 / r_0) \\ r_0 \cos(\theta a_0 / r_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \sin(\theta a_0 / r_0) \\ r_0 \cos(\theta a_0 / r_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et donc $E := \hat{E}$, $F := \hat{F}$ et $G := \hat{G}$ ce qui signifie d'après la proposition 5.1.1 que Σ_1 et Σ_2 sont isométriques.

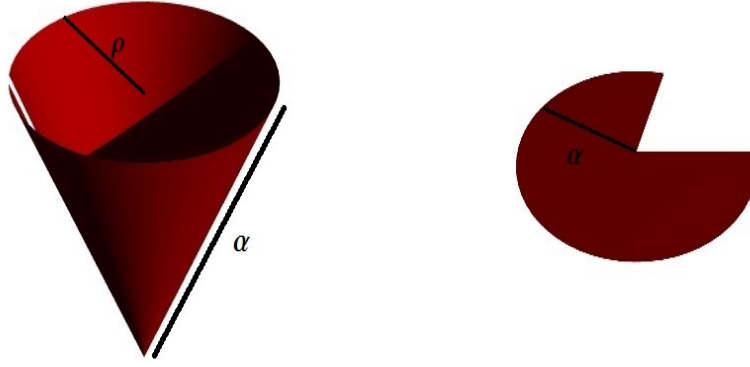


FIGURE 5.2 – Un cône privé de la droite $(a_0z, 0, z)$ est isométrique à un morceau de plan

Exemple 5.1.3. *Tout hélicoïde est localement isométrique à un caténoïde. En effet, soit S l'hélicoïde paramétré comme dans l'exemple 2.2.1 et soit \tilde{S} le caténoïde correspondant au même paramètre $a \in \mathbb{R}^*$, paramétré comme dans l'exemple 2.2.2 On choisit un point $p_0 = \varphi(x_0, y_0) \in S$, et l'application $\psi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\psi(x, y) = (y - \pi + x_0, a \sinh(x))$$

ψ est clairement un difféomorphisme avec son image, et donc $\varphi \circ \psi$ est une paramétrisation locale au point p de l'hélicoïde. Les coefficients métriques de l'hélicoïde S_1 d'après cette paramétrisation sont :

$$E(x, y) = a^2 \cosh^2(x), \quad F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = a^2 \cosh^2(x)$$

et donc la proposition 5.1.1 implique que l'hélicoïde S_1 est localement isométrique au caténoïde S_2 , et on peut prouver de manière analogue que le caténoïde S_2 est isométrique à l'hélicoïde S_2 .

5.2 Isométries et géodésiques d'une surface

Proposition 5.2.1. *Soient S_1, S_2 deux surfaces régulières telles que : $H : S_1 \longrightarrow S_2$ soit une isométrie locale, et soit $\sigma : I \longrightarrow S_1$ une courbe \mathcal{C}^∞ par morceaux. Alors pour tout $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ on a :*

$$\begin{cases} dH_\sigma(V) \in \mathcal{T}(H \circ \sigma) \\ D(dH_\sigma(V)) = dH_\sigma(DV) \end{cases} \quad (5.1)$$

En particulier V est parallèle le long de σ si et seulement si $dH_{\sigma(V)}$ est parallèle le long de $H \circ \sigma$, et σ est une géodésique dans S_1 si et seulement si $H \circ \sigma$ est une géodésique dans S_2 . En résumé, une isométrie locale transforme géodésiques en géodésiques.

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ et soit $\varphi_1 : U \longrightarrow S_1$ une paramétrisation locale de S centrée en $\sigma(t_0)$ avec U un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On note $I_0 = \sigma^{-1}(\varphi_1(U))$ et on pose

$$\sigma(t) = \varphi(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$$

pour tout $t \in I_0$.

On définit $\varphi_2 : U \longrightarrow S_2$ par : $\varphi_2 = H \circ \varphi_1$, φ_2 est alors une paramétrisation locale de S_2 centrée en $H \circ \sigma(t_0)$.

Soit $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ et soit $t \in I_0$

On a :

$$\begin{aligned} dH_{\sigma(t)}(V(t)) &= dH_{\sigma(t)}(V_1(t)\partial_{1|\sigma(t)} + V_2(t)\partial_{2|\sigma(t)}) \\ &= V_1(t)dH_{\sigma(t)}(\partial_{1|\sigma(t)}) + V_2(t)dH_{\sigma(t)}(\partial_{2|\sigma(t)}) \end{aligned}$$

or on a :

$$\begin{aligned} dH_{\sigma(t)}(\partial_{k|\sigma(t)}) &= d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_{\sigma(t)}(\partial_{k|\sigma(t)}) \\ &= d\varphi_{2(\sigma_1(t), \sigma_2(t))}(d\varphi_1^{-1}{}_{\sigma(t)}(\partial_{k|\sigma(t)})) \\ &= d\varphi_{2(\sigma_1(t), \sigma_2(t))}(e_k) \\ &= \partial_{k|H \circ \sigma(t)}^2 \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$dH_{\sigma(t)}(V(t)) = V_1(t)\partial_{1|H \circ \sigma(t)}^2 + V_2(t)\partial_{2|H \circ \sigma(t)}^2$$

donc : $dH_{\sigma(t)}(V(t)) \in T_{H \circ \sigma(t)}S_2$ pour tout $t \in I_0$

donc : $dH_{\sigma}(V) \in \mathcal{T}(H \circ \sigma)$

Il reste à montrer que $D(dH_{\sigma}(V)) = dH_{\sigma}(DV)$

Soit $N_1 : S_1 \longrightarrow S^2$ un champ de vecteurs normal à S_1 . On a :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = \Gamma_{ij}^1(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{1|\sigma(t)}^1 + \Gamma_{ij}^2(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{2|\sigma(t)}^1 + h_{ij}(\sigma_1(t), \sigma_2(t))N_1(\sigma(t))$$

et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) \right] (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(dH_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \right) \right) \right) \\ &= dH_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \right) \\ &= dH_{\sigma(t)} \left(\Gamma_{ij}^1(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{1|\sigma(t)}^1 + \Gamma_{ij}^2(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{2|\sigma(t)}^1 + h_{ij}(\sigma_1(t), \sigma_2(t))N_1(\sigma(t)) \right) \\ &= \Gamma_{ij}^1(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{1|\sigma(t)}^2 + \Gamma_{ij}^2(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\partial_{2|\sigma(t)}^2 + h_{ij}(\sigma_1(t), \sigma_2(t))dH_{\sigma(t)}(N_1(\sigma(t))) \end{aligned}$$

Si on pose $N_2 := dH_{\sigma}(N \circ \sigma)$, on obtient que

$$\pi_{H \circ \sigma(t)}(N_2(t)) = 0$$

en effet, H étant une isométrie, l'endomorphisme $dH_{\sigma(t)}$ est orthogonal et on a alors :

$$\begin{aligned}\langle N_2(t), \partial_{k|\sigma(t)}^2 \rangle &= \langle dH_{\sigma(t)}(N_1(\sigma(t))), dH_{\sigma(t)}(\partial_{k|\sigma(t)}^1) \rangle \\ &= \langle N_1 \circ \sigma(t), \partial_{k|\sigma(t)}^1 \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

pour $k = 1, 2$ et :

$$\langle N_2(t), N_2(t) \rangle = \langle N_1 \circ \sigma(t), N_1 \circ \sigma(t) \rangle = 1$$

En appliquant l'égalité (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}D(dH_{\sigma(t)}(V(t))) &= \sum_{k=1}^2 \left(V_k' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) V_i(t) \right) \partial_{k|H \circ \sigma(t)}^2 \\ &= dH_{\sigma(t)} \left(\sum_{k=1}^2 \left(V_k' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \sigma_j'(t) V_i(t) \right) \partial_{k|\sigma(t)}^1 \right) \\ &= dH_{\sigma(t)}(DV(t))\end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration. □

En particulier puisque $dH_{\sigma(t)}$ est injective alors :

$$dH_{\sigma(t)}(DV(t)) = 0 \text{ si et seulement si } DV(t) = 0$$

donc V est parallèle le long de σ si et seulement si $dH_{\sigma}(V)$ est parallèle le long de $H \circ \sigma$, et σ est une géodésique dans S_1 si et seulement si $H \circ \sigma$ est une géodésique dans S_2 (puisque : $(H \circ \sigma)'(t) = dH_{\sigma(t)}(\sigma'(t))$).

Exemple 5.2.1. *L'exemple 5.1.1 nous permet une étude plus souple des géodésiques du cylindre (autres que les droites et les parallèles) qu'on peut déduire, en termes d'isométrie locale, à partir des géodésiques du plan comme on peut le voir dans les figures suivantes*

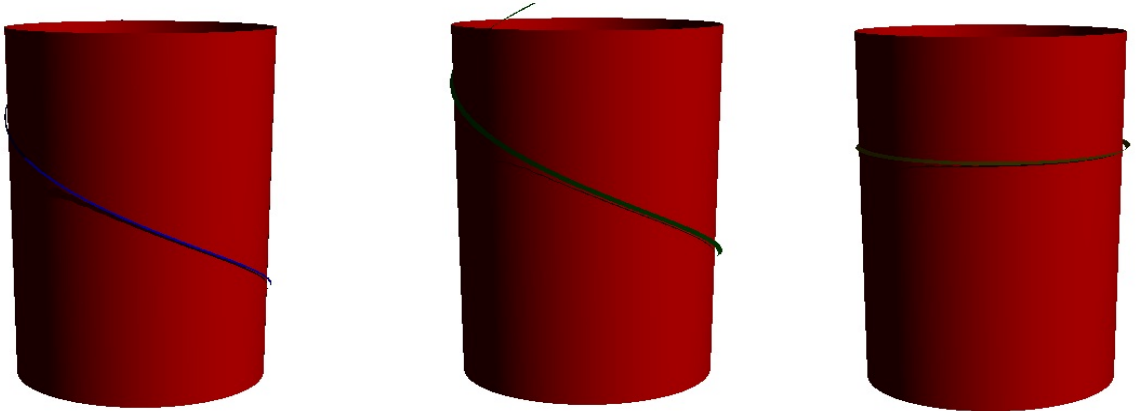


FIGURE 5.3 – Géodésiques du cylindre avec différentes directions initiales

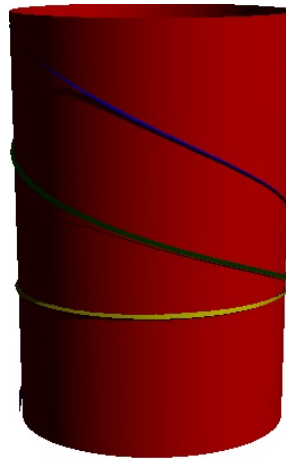


FIGURE 5.4 – Géodésiques du cylindre réunies

Exemple 5.2.2. *D'après l'étude faites lors de l'exemple 5.1.2 et la proposition 5.2.1, on peut visualiser les géodésiques du cône sans problème à partir des segments de droites tracés dans Σ_2 , en effet il suffit de considérer l'homéomorphisme $\phi : U_2 \longrightarrow U_1$ donné par*

$$\phi(\alpha, \rho) = \left(\frac{2\pi\alpha}{2\pi - \alpha}, \rho/r_0 \right)$$

et de remarquer que $\psi^{-1} := \varphi_1 \circ \phi \circ \varphi_2^{-1}$ et donc

$$\psi^{-1} \circ \varphi_2 := \varphi_1 \circ \phi$$

et si $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow U_2$ est telle que $\varphi_2 \circ \sigma$ soit une paramétrisation d'un segment de droite tracé dans Σ_2 , alors on peut facilement retrouver la géodésique du cône Σ_1 associée à ce segment qui est l'image de l'application $\varphi_1 \circ \phi \circ \sigma$, comme on peut voir sur cette figure

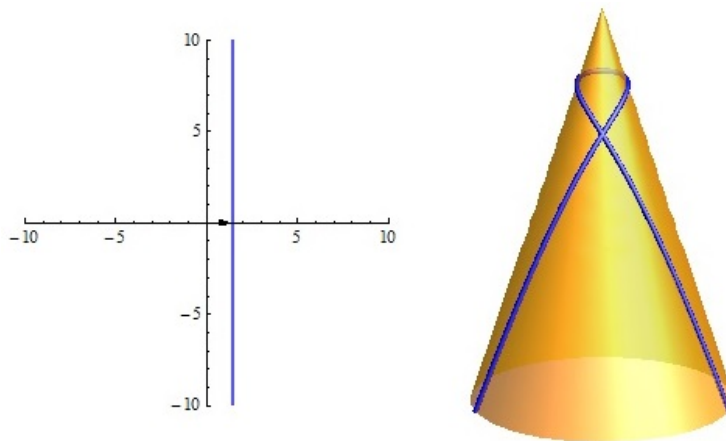


FIGURE 5.5 – Géodésique sur le cône associée au segment de direction l'axe des ordonnées

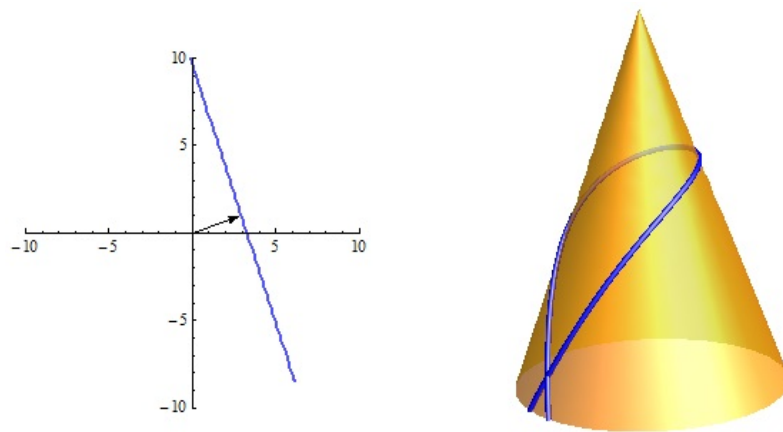


FIGURE 5.6 – Une autre géodésique sur le cône mais cette fois le segment change de direction

Chapitre 6

Géodésiques et distance : Approche variationnelle

Nous nous proposons dans ce chapitre d'effectuer une étude plus souple de la propriété précédemment énoncée, et qui lie les géodésiques d'une surface à la longueur. Au lieu d'aborder le problème de la façon intrinsèque que nous avons déjà faite, c'est à dire la définition des géodésiques en termes de champs de vecteurs parallèles et ensuite démontré que ces géodésiques réalisent le minimum des distances sur une surface, on va le percevoir en tant que problème de minimisation, et considérer ainsi une étude plus général qui fera de notre problème juste un cas particulier. Durant les premières section de ce chapitre nous allons sortir un peu du cadre dont nous nous intéressons afin de préparer le terrain par des outils et des résultats indispensables, notamment l'équation d'*Euler-Lagrange* et les conditions nécessaires pour qu'elle soit résoluble, et qui définira la clé pour aboutir à nos intentions.

6.1 Le chemin le plus court pour joindre deux points d'une surface

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p, q \in S$, on définit :

$$d(p, q) = \inf \{ L(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \mid \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \gamma([0, 1]) \subset S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \} \quad (6.1)$$

l'infimum des courbes de classe \mathcal{C}^1 tracées sur S joignant p et q .

On voudrait calculer la distance $d(p, q)$ et trouver les chemins les plus courts pour joindre p à q . Un premier problème est que la longueur d'une courbe est indépendant du paramétrage de celle-ci, et donc, cet infimum une fois réalisé par une courbe, il est réalisé par une infinité de courbes par un éventuel changement de paramètre. Pour remédier à cet inconvénient, on introduit la notion de *l'énergie* dont l'intérêt va se préciser dans peu de temps :

$$E(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \quad (6.2)$$

on va montrer que l'infimum sur L est atteint en une courbe γ si et seulement si l'infimum sur E est atteint par la même courbe γ .

Grâce à l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$L(\gamma)^2 \geq E(\gamma)$$

avec égalité si et seulement si la vitesse $\|\dot{\gamma}(t)\|$ est constante. En particulier

$$d(p, q) \leq \inf\{E(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \gamma([0, 1]) \subset S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \quad (6.3)$$

Si γ est une courbe dont la vitesse ne s'annule pas, nous verrons comment la reparamétriser afin que sa vitesse soit constante. Cela dit, on peut reparamétriser γ pour que sa vitesse soit presque constante : fixons $\epsilon \geq 0$, on introduit alors :

$$\sigma(t) = \frac{\int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds + \epsilon t}{L(\gamma) + \epsilon}$$

alors σ est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée :

$$\sigma'(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\| ds + \epsilon}{L(\gamma) + \epsilon}$$

est strictement positive et $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$. Par un changement de paramètre on peut donc se ramener à la courbe $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma^{-1}$, $\tilde{\gamma}$ est alors une courbe tracée sur S joignant p et q , et on peut aisément vérifier que

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$$

et on a :

$$\frac{d}{dt}\sigma^{-1}(t) = \frac{L(\gamma) + \epsilon}{\|\dot{\gamma}(\sigma^{-1}(t))\| + \epsilon}$$

donc

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(\sigma^{-1}(t)) \frac{L(\gamma) + \epsilon}{\|\dot{\gamma}(\sigma^{-1}(t))\| + \epsilon}$$

cette dernière égalité exprime ce qui fut déjà dit à propos de *paramétrisation avec vitesse presque constante*, ainsi

$$\begin{aligned} E(\tilde{\gamma}) &= (L(\gamma) + \epsilon)^2 \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(\sigma^{-1}(t))}{\|\dot{\gamma}(\sigma^{-1}(t))\| + \epsilon} \\ &\leq (L(\gamma) + \epsilon)^2 \end{aligned}$$

et si on suppose que γ est telle que $L(\gamma) \leq d(p, q) + \epsilon$ alors :

$$E(\tilde{\gamma}) \leq (L(\gamma) + \epsilon)^2 \leq (d(p, q) + 2\epsilon)^2$$

et on obtient par suite l'inégalité

$$(d(p, q) + 2\epsilon)^2 \geq \inf\{E(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \gamma([0, 1]) \subset S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \quad (6.4)$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon \geq 0$, les deux inégalités (6.3) et (6.4) donnent exactement

$$d(p, q)^2 = \inf\{E(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \gamma([0, 1]) \subset S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \quad (6.5)$$

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow S$ une paramétrisation locale de S au point p , on va supposer pour simplifier que $q \in \varphi(U)$ et on pose $\varphi(m_0) = p$ et $\varphi(m_1) = q$, puisque toute courbe γ tracée dans $\varphi(U) \subset S$ est de la forme $\varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \left\| \dot{\gamma}_1(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + \dot{\gamma}_2(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \right\| \\ &= E(\gamma_1(t), \gamma_2(t))(\dot{\gamma}_1(t))^2 + 2F(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) + G(\gamma_1(t), \gamma_2(t))(\dot{\gamma}_2(t))^2 \end{aligned}$$

où E , F et G sont les coefficients métriques de S associés à la paramétrisation φ , et on note plus généralement pour ne pas alourdir les notations :

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u, v) \right\rangle \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u, v) \right\rangle$$

et

$$G(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u, v) \right\rangle$$

pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Si $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$F(u, v, u', v') = E(u, v)(u')^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)(v')^2$$

et

$$\tilde{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2)$$

et

$$f(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) dt$$

alors

$$d(p, q)^2 = \inf \{ f(\tilde{\gamma}) \mid \tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^2), \gamma([0, 1]) \subset S, \tilde{\gamma}(0) = m_0, \tilde{\gamma}(1) = m_1 \}$$

Nous allons désormais traiter un problème plus général.

6.2 Position du problème

6.2.1 L'espace des courbes de classe \mathcal{C}^1

Dans tout ce qui va suivre, on définit $I = [a, b]$ un intervalle compact de l'ensemble \mathbb{R} . On notera l'application :

$$\sigma : I \longrightarrow E$$

une courbe de classe \mathcal{C}^1 où E est un espace de Banach.

Il est clair que l'ensemble de toutes les courbes de I dans E est muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} , on notera V cet ensemble. On va munir V d'une structure d'espace de Banach, il suffira donc de définir une norme bien adaptée à V et de montrer que V est complet pour cette norme.

Définition 6.2.1. Pour $\sigma : I \longrightarrow E$, on définit l'application $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par :

$$\| \sigma \| = \sup_{t \in I} \| \sigma(t) \| + \sup_{t \in I} \| \sigma'(t) \|$$

Cette application est bien définie puisque les applications σ et σ' sont continues sur un compact et donc bornées, et elle définit clairement une norme sur V .

Proposition 6.2.1. V muni de la norme $\| \cdot \|$ définit dans 6.2.1 est un espace complet.

Démonstration. Soit $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace V , on sait que :

$$\| \sigma_n - \sigma_m \|_{\infty} \leq \| \sigma_n - \sigma_m \|$$

pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. La suite $(\sigma_n)_n$ est donc aussi de Cauchy pour la norme de convergence uniforme et il en résulte $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers une application σ continue (ceci est vrai puisque $(\mathcal{C}^0([a, b], E), \| \cdot \|_{\infty})$ est complet du fait que E est complet et $[a, b]$ est compact).

De plus on a l'inégalité :

$$\| \sigma'_n - \sigma'_m \|_{\infty} \leq \| \sigma_n - \sigma_m \|$$

et par le même raisonnement on déduit que la suite $(\sigma'_n)_n$ est de Cauchy pour la norme de convergence uniforme et donc converge uniformément vers une application γ continue. Ceci donne que l'application σ est de classe \mathcal{C}^1 et que $\sigma' = \gamma$, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \sigma_n - \sigma \|_{\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \| \sigma'_n - \sigma' \|_{\infty} = 0$$

et on conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \sigma_n - \sigma \| = 0$$

□

6.2.2 Fonctionnelle attachée à une courbe

On se donne désormais une application, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$ notée :

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe \mathcal{C}^k (k aussi grand que l'on veut). On notera $F(t, x, y)$ sa valeur au point $(t, x, y) \in U$.

Etant donnée une courbe $\sigma : I \longrightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 telle que l'on ait :

$$(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \in U \tag{6.6}$$

pour tout $t \in I$.

On va attacher à la courbe σ un nombre réel qu'on note :

$$f(\sigma) = \int_a^b F(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \tag{6.7}$$

et on note Ω l'ensemble des courbes σ vérifiant la relation (6.6), et par suite on définit la fonctionnelle $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par (6.7).

En va s'intéresser à présent au *comportement infinitésimal* de la fonction f d'où apparaît la nécessité de l'opération de différentiation, mais pour que cette opération ait un sens, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 6.2.2. Ω est un ouvert de l'espace de Banach V .

Démonstration. Soit $\sigma_0 \in \Omega$, on veut montrer qu'il existe un voisinage de σ_0 inclus dans Ω .

Soit $K \subset U$ l'image de l'application

$$t \longrightarrow (t, \sigma_0(t), \sigma'_0(t))$$

définie de I dans Ω . La continuité de cette application donne que K est un compact de Ω , puisque I est un compact de \mathbb{R} , il existe donc $\rho \geq 0$ qui est la constante de Lebesgue tel que pour tout point $(t, x, y) \in I \times E \times E$ on ait :

$$\|x - \sigma_0(t)\|_E \leq \rho, \quad \|y - \sigma'_0(t)\|_E \leq \rho$$

appartienne à U (???) . Soit alors $\sigma \in V$ telle que $\|\sigma_0 - \sigma\| \leq \rho$, on a :

$$\|\sigma_0(t) - \sigma(t)\|_E \leq \rho \quad \text{et} \quad \|\sigma'_0(t) - \sigma'(t)\| \leq \rho$$

pour tout $t \in I$, ceci d'après la définition de la norme $\|\cdot\|$ sur V . et on a donc :

$$(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \in U$$

pour tout $t \in I$. On conclut donc que la boule $B(\sigma_0, \rho) \subset \Omega$ qui signifie exactement que Ω est un ouvert de V . □

On peut à présent étudier la différentiabilité de la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ en toute liberté, on a besoin d'énoncer un lemme avant de pouvoir le faire correctement :

Lemme 6.2.1. (*Différentiation sous le signe d'intégration*) Soient E et F deux espaces de Banach, I le segment $[0, 1]$ et soit :

$$\varphi : U \times I \longrightarrow F$$

U étant un ouvert de l'espace E . Pour $x \in U$, posons :

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi(x, t) dt$$

Alors $\psi : U \longrightarrow F$ est continue. Si $\varphi'_x : U \times I \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ existe et est continue en tout point $(x, t) \in U \times I$, alors ψ est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\psi'(x) = \int_0^1 \varphi'_x(x, t) dt \tag{6.8}$$

Proposition 6.2.3. Si $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), l'application $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définit précédemment par (6.7) est aussi de classe \mathcal{C}^k , de plus la dérivée $df : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ est donnée par :

$$df_\sigma(u) = \int_a^b F'_x(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u(t)) dt + \int F'_y(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u'(t)) dt \tag{6.9}$$

où $u \in V$

Démonstration. Tout d'abord, on va montrer que si F est de classe \mathcal{C}^1 , f possède une dérivée df donnée par la formule (6.9) qui met en évidence que $\sigma \longrightarrow df(\sigma)$ est continue de Ω dans $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, et f est évidemment de classe \mathcal{C}^1 .

Pour ce qui est du corps de la démonstration, on utilisera le *lemme de différentiation sous le signe intégrale* 6.2.1. Pour cela on introduit l'application :

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\sigma, t) &\longrightarrow F(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \end{aligned}$$

On a alors :

$$f(\sigma) = \int_a^b \lambda(\sigma, t) dt$$

Le lemme 6.2.1 nous dit que si λ'_x existe et est continue en tout point de $U \times I$, alors df existe et satisfait à :

$$df(\sigma)(u) := \int_a^b \lambda'_x(\sigma, t)(u) dt \quad (6.10)$$

On commence donc par montrer l'existence de la dérivée de λ et la calculer. On note $\lambda := \mu \circ F$ où :

$$\mu : \Omega \times I \longrightarrow U$$

est définie par $\mu(\sigma, t) = (t, \sigma(t), \sigma'(t))$ pour tout $(\sigma, t) \in \Omega \times I$. Pour montrer que λ'_x existe il suffit de montrer que μ'_x existe. On note $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, et on va montrer que toutes ses composantes possèdent des différentielles partielles par rapport à σ .

On sait que μ_1 est indépendante de la variable σ et ceci se traduit en $\mu'_{1x} := 0$, la seconde composante μ_2 est linéaire continue en $\sigma \in V$, et donc elle possède une différentielle partielle par rapport à la variable σ qui est constante, elle en tout point un élément de $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, et on a

$$\mu'_{2x}(\sigma, t)(u) = u(t)$$

pour tout $u \in V$. Enfin la troisième composante μ_3 est une fonction linéaire continue de $\sigma \in V$ (à cause de la norme choisie sur V), et elle possède aussi une dérivée constante qui est en tout point un élément de $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ et qui vérifie

$$\mu'_{3x}(\sigma, t)(u) = u'(t)$$

pour tout $u \in V$. La fonction F étant de classe \mathcal{C}^1 donne nécessairement que :

$$\lambda'_x(\sigma, t)(u) = F'_x(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u(t)) + F'_y(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u'(t)) \quad (6.11)$$

pour tout $u \in V$, cette égalité montre que λ'_x est une fonction continue de $\Omega \times I$ dans $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, et la relation (6.9) est une conséquence directe de (6.10) et (6.11).

Le même lemme 6.2.1 nous dit que λ est k fois différentiable en σ , et si ses dérivées sont continues en tout point de $\Omega \times I$ alors f est de classe \mathcal{C}^k , et ceci achève effectivement la démonstration. \square

6.2.3 Un problème de minimisation

L'ensemble des courbes $\sigma : I \longrightarrow E$ telles que :

$$\sigma(a) = \alpha, \quad \sigma(b) = \beta$$

où $\alpha, \beta \in E$ sont deux points fixés dans E est un *sous-espace affine* qu'on note $W(\alpha, \beta)$ de l'espace de Banach V de *codimension* 2, en effet : Si on note W_a et W_b les noyaux respectifs des formes linéaires continues :

$$\sigma \longrightarrow \sigma(a), \quad \sigma \longrightarrow \sigma(b)$$

On note $W(0, 0) = W_a \cap W_b$ le sous espace vectoriel de V qui est exactement de codimension 2, et si on choisit désormais σ_0 vérifiant $\sigma_0(a) = \alpha$ et $\sigma_0(b) = \beta$ on obtient que :

$$W(\alpha, \beta) = \sigma_0 + W(0, 0)$$

Il est clair d'après ce raisonnement que $W(\alpha, \beta)$ est fermé dans l'espace de Banach V , c'est donc un espace *complet*. On s'intéresse à présent à l'ensemble :

$$\Omega(\alpha, \beta) = W(\alpha, \beta) \cap \Omega$$

qui est un ouvert de $W(\alpha, \beta)$. Lorsque F est de classe \mathcal{C}^k , la fonction f est aussi de classe \mathcal{C}^k et donc sa restriction à $\Omega(\alpha, \beta)$ est de classe \mathcal{C}^k , on note $f_{\alpha, \beta}$ la restriction de f sur $W(\alpha, \beta)$.

Les outils nécessaires pour l'étude étant présentés, on énonce notre définition :

Définition 6.2.2. *Considérons une courbe $\sigma_0 \in W(\alpha, \beta)$.*

On dit que σ_0 est extrémale pour l'intégrale

$$\int_a^b F(t, \sigma(t), \sigma'(t)) dt$$

si et seulement si σ_0 est un extrémum local de $f_{\alpha, \beta}$.

Mais si σ_0 présente un *minimum local* de $f_{\alpha, \beta}$ (c'est d'ailleurs le seul cas qui nous intéresse), on sait qu'il existe un voisinage V_0 de σ_0 dans $W(\alpha, \beta)$ tel que :

$$f(\sigma) \geq f(\sigma_0)$$

pour tout $\sigma \in V_0$, on cherche à présent une *condition nécessaire* pour un tel minimum.

On sait que $f_{\alpha, \beta}$ possède une dérivée $df_{\alpha, \beta} : \mathcal{W}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{L}(W(0, 0), \mathbb{R})$ et qui vérifie évidemment :

$$df_{\alpha, \beta}(\sigma_0)(u) = df(\sigma_0)(u) \quad \text{pour } u \in W(0, 0)$$

et donc $df_{\alpha, \beta}(\sigma_0)$ est l'élément de $\mathcal{L}(W(0, 0), \mathbb{R})$ déduit de $df(\sigma_0) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ par restriction au sous-espace vectoriel $W(0, 0)$.

Or on sait qu'une condition nécessaire pour que $f_{\alpha, \beta}$ admette un *minimum relatif* en σ_0 est que :

$$df_{\sigma_0}(u) = 0$$

pour tout $u \in W(0, 0)$. Ceci, s'ajoutant à la relation (6.9) est la preuve du théorème suivant :

Théorème 6.2.1. *Pour que $\sigma \in W(\alpha, \beta)$ soit extrémale, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$\int [F'_x(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u(t)) + F'_y(t, \sigma(t), \sigma'(t))(u'(t))] dt = 0 \quad (6.12)$$

pour toute fonction $u : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $u(a) = 0$ et $u(b) = 0$.

6.2.4 Transformation de la condition de l'extrémum

On note $A(t) = F'_x(t, \sigma(t), \sigma'(t))$ et $B(t) = F'_y(t, \sigma(t), \sigma'(t))$, et on définit ainsi deux applications continues :

$$A, B : I \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Le théorème 6.2.1 nous a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extrémale de f , mais on sait qu'explicitement les calculs dans le cas de la relation (6.12)

n'est pas toujours possible, c'est pourquoi nous nous proposons de trouver une *meilleure condition* qui vérifie que :

$$\int_a^b (A(t)(u(t)) + B(t)(u'(t)))dt = 0 \quad (6.13)$$

pour toute fonction $u : I \longrightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 nulle pour $t = a$ et $t = b$. Cette condition donnée sous forme d'une relation nommée *Equation d'Euler*. Le théorème suivant donne la réponse :

Théorème 6.2.2. *Pour que (6.13) soit vérifiée, il faut et il suffit que la fonction B admette une dérivée B' égale à A*

On a besoin d'un résultat donné par le lemme suivant pour prouver ce théorème :

Lemme 6.2.2. *Soit $D : I \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une fonction continue telle que l'on ait :*

$$\int_a^b D(t)v(t) = 0$$

pour toute fonction continue $v : I \longrightarrow E$ vérifiant $\int_a^b v(t)dt = 0$. Alors D est une constante

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que D n'est pas constante, il existe donc $t_1, t_2 \in I$ telles que :

$$a \leq t_1 \leq t_2 \leq b, \quad D(t_1) \neq D(t_2)$$

Soit $u_0 \in E$ tel que $D(t_1)(u_0) \neq D(t_2)(u_0)$; on peut supposer que $D(t_1)(u_0) \geq D(t_2)(u_0)$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $D(t_1)(u_0) \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq D(t_2)(u_0)$. Pour $\epsilon \geq 0$ assez petit, on a d'après la continuité de $t \longrightarrow D(t)(u_0)$:

$$\begin{cases} D(t)(u_0) \geq \alpha_1 \text{ pour } |t - t_1| \leq \epsilon \\ D(t)(u_0) \leq \alpha_2 \text{ pour } |t - t_2| \leq \epsilon \end{cases} \quad (6.14)$$

et on peut supposer $\epsilon \geq 0$ assez petit pour que :

$$a \leq t_1 - \epsilon \leq t_1 + \epsilon \leq t_2 - \epsilon \leq t_2 + \epsilon \leq b$$

Soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , nulle pour $|t| \geq \epsilon$, et telle que $\lambda(t) \geq 0$ pour $|t| \leq \epsilon$. La fonction

$$\mu(t) = \lambda(t - t_1) - \lambda(t - t_2)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ et satisfait à $\int_a^b \mu(t)dt = 0$. Le terme $\mu(t)$ est strictement positif pour $|t - t_1| \leq \epsilon$ et strictement négatif pour $|t - t_2| \leq \epsilon$ et nul partout ailleurs. Posons

$$v(t) = \mu(t)u_0$$

la fonction v est continue de I dans E , et on a $\int_a^b v(t)dt = 0$, et de plus :

$$\int_a^b D(t)(v(t))dt = \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \lambda(t - t_1)D(t)(u_0)dt - \int_{t_2-\epsilon}^{t_2+\epsilon} \lambda(t - t_2)D(t)(u_0)dt$$

et d'après les inégalités (6.14), on a

$$\begin{aligned}\int_a^b D(t)(v(t))dt &\geq \alpha_1 \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \lambda(t-t_1)dt - \alpha_2 \int_{t_2-\epsilon}^{t_2+\epsilon} \lambda(t-t_2)dt \\ &\geq (\alpha_1 - \alpha_2) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda(t)dt\end{aligned}$$

contrairement à l'hypothèse, d'où la contradiction cherchée et le lemme 6.2.2 est établi. \square

Démonstration. du théorème 6.2.1

Soit $t \in I$ et soit A_1 une primitive de A qui s'annule en 0, celle ci est donnée par :

$$A_1(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau$$

On a :

$$A(t)(u(t)) = A'_1(t)(u(t)) = \frac{d}{dt}(A_1(t)(u(t))) - A_1(t)(u'(t))$$

d'où :

$$\int_a^b (A(t)(u(t)) + B(t)(u'(t)))dt = [A_1(t)(u(t))]_a^b + \int_a^b (B(t) - A_1(t))(u'(t))dt$$

On veut que ceci soit nul pour toute fonction $u : I \longrightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 nulle en $t = a$ et $t = b$, la fonction u' est alors continue de I dans E et on la note v , telle que :

$$\int_a^b v(t)dt = 0 \tag{6.15}$$

et réciproquement une telle fonction v est la dérivée d'une fonction u telle que $u(a) = u(b) = 0$. La condition cherchée est donc

$$\int_a^b (B(t) - A_1(t))(u'(t))dt = 0 \tag{6.16}$$

Or d'après le lemme 6.2.2, on obtient que :

$$A_1(t) = B(t) + c$$

avec c une constante dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, et cela signifie exactement que B à une dérivée égale à A , d'où la fin de la démonstration. \square

6.3 Etude de l'équation d'Euler : Exemple des géodésiques d'une surface

On revient maintenant à notre problème de départ. Si $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$ minimise l'énergie $E|_{\Omega_{p,q}}$ où on a noté $\Omega_{p,q}$ l'ensemble des courbes \mathcal{C}^1 tracées sur S joignant p à q . On sait que

$$E(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) + F(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle$$

et

$$F(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) + G(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle$$

On peut alors réécrire les équations d'Euler-Lagrange sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle &= \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle &= \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

Puisque :

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle = \langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle$$

et que de même

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle = \langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle$$

Les équations d'Euler-Lagrange signifient exactement :

$$\langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle = \langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rangle = 0$$

C'est à dire que $\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t)$ est orthogonal au plan tangent à la surface en $\gamma(t)$, ce qui est bien évidemment en accord avec la définition précédente des *géodésiques d'une surface*.

Bibliographie

Les références suivantes furent d'un grand intérêt pour la réalisation de ce document, nous les citons pour plus d'approfondissement et pour la révision de certaines démonstrations :

- (1) M.Abate, F.Tovena, Curves and Surfaces, Springer Verlag, Italia, 2012.
- (2) M. P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- (3) H.Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, Paris, 1977.