Some extensions in the theory of real division algebras

Elhassan IDNAROUR
Sous la direction du
Professeur Abdellatif ROCHDI

le laboratoire Algèbre, Géométrie, Topologie et Applications, faculté des sciences et techniques (FST), 13 Mars 2021 Université CADI AYYAD, Marrakech

13 Mars 2021

PLAN DE MON EXPOSE

1. Algèbres réelles de division
2. Extensions d'un théorème de Yang-Petro
3. Extensions du théorème commutatif de Hopf

Algèbres réelles de division

Définitions 1

Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.* $\mathcal{A}$ *muni d'une application bilinéaire* $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad (x, y) \mapsto xy$ *dite produit de* $\mathcal{A}$*.* $\mathcal{A}$ *est dite* algèbre réelle de division *si elle est de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *et si les opérateurs de multiplication* $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto xy,$ $R_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto yx$ *sont bijectifs pour tout* $x \in \mathcal{A} - \{0\}$. Il est bien connu que la dimension d'une algèbre réelle de division est $1, 2, 4$ ou 8 ([BM 58], [K 58], [HKR 91]).

Exemple 1

Les algèbres réelles

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C} && (\text{ Nombres complexes }),\\
&\mathbb{H} && (\text{ Quaternions }),\\
&\mathbb{O} && (\text{ Octonions }),\\
&{}^{*}\mathbb{C} &= & (\mathbb{C}, \odot) : x \odot y = \overline{x}y,\\
&\overset{*}{\mathbb{C}} &= & (\mathbb{C}, \diamond) : x \diamond y = \overline{x}\ \overline{y}
\end{aligned}
$$

sont de division.

Dans tout ce qui suit $\mathcal{A}$ désignera une algèbre réelle de division de dimension $n \geq 2$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ sa sphère unité.

Lemme 1. [Y 81]

Si $\mathcal{A}$ est unitaire alors l'application $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $x \mapsto x^2$ est surjective.

Corollaire 1.1

Si $\mathcal{A}$ contient un élément non nul central e, alors l'application $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $x \mapsto x^2$ est surjective.

Démonstration.

L'espace vectoriel réel $\mathcal{A}$ muni du produit $x \diamond y = L_e^{-1}(xy)$ est une algèbre unitaire de division. Donc l'application $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\ x \mapsto x \diamond x$ est surjective et il en est de même pour $L_e \circ g = \varphi$. $\square$

Théorème 1. [Y 81], [P 87]

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle ***unitaire*** de division de dimension $n \geq 2$. Alors $\mathcal{A}$ contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u^2 = -e$. Alors u engendre une sous algèbre de $\mathcal{A}$ isomorphe à $\mathbb{C}$

	e	u
e	e	u
u	u	$-e$

$\square$

Extensions du théorème de Yang-Petro

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de division de dimension finie $n > 1$.
L'ensemble $I(\mathcal{A})$ des idempotents non nuls de $\mathcal{A}$ est non vide [Se 54].
On considère les trois conditions suivantes où $e \in I(\mathcal{A})$:

(I) $(ex)e = e(xe)$, pour tout $x \in \mathcal{A}$.

(II) $e(ex) = x = (xe)e$, pour tout $x \in \mathcal{A}$.

(III) $ex, xe \in Lin\{e, x\}$, pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Les conditions (I), (II), (III) sont trivialement satisfaites si e est un élément unité. Cependant, elles peuvent être satisfaites sans que e soit un élément unité.

Soit $\mathbb{A}$ l'une des algèbres réelles de division $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ munie de son involution $x \mapsto \overline{x}$.

1. On note $\overset{*}{\mathbb{A}}$, ${}^*\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^*$ les algèbres réelles de division dont l'espace vectoriel sous-jacent $\mathbb{A}$ est muni des produits $x \diamond y = \overline{x}\,\overline{y}$, $x \odot y = \overline{x}y$, $x \star y = x\overline{y}$ respectivement. Alors $e = 1$ est un idempotent non nul, pour ces trois algèbres, qui satisfait aux conditions (I), (II), (III).

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, on considère les algèbres réelles $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu := (\mathbb{C}, \overset{\mu}{\diamond})$, ${}^*\mathbb{C}_\mu := (\mathbb{C}, {}_\mu\diamond)$, $\mathbb{C}^*_\mu := (\mathbb{C}, \diamond_\mu)$ dont les tables de multiplication par rapport à la base $\{1, i\}$ sont données par :

$\overset{\mu}{\diamond}$	1	i
1	1	$-i$
i	$-i$	$-1+\mu i$

${}_\mu\diamond$	1	i
1	1	i
i	$-i$	$1+\mu i$

$\diamond_\mu$	1	i
1	1	$-i$
i	i	$1+\mu i$

Les algèbres réelles $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu := (\mathbb{C}, \overset{\mu}{\diamond})$, ${}^*\mathbb{C}_\mu := (\mathbb{C}, {}_\mu\diamond)$ et $\mathbb{C}_\mu^* := (\mathbb{C}, \diamond_\mu)$ sont de division si et seulement si $0 \leq \mu < 2$. Elles sont obtenues à partir de $\mathbb{R}$ par une duplication :

$$(a,b) \overset{\mu}{\diamond} (c,d) = (ac - bd, -ad - bc + \mu bd)$$

$$(a,b)_\mu \diamond (c,d) = (ac + bd, ad - bc + \mu bd)$$

$$(a,b) \diamond_\mu (c,d) = (ac + bd, -ad + bc + \mu bd).$$

Lemme 1

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \mu < 2$ et soit $e = 1$ alors :

1. $I({}^*\mathbb{C}_\mu) = I(\mathbb{C}_\mu^*) = \{e\}$.
2. Si $\mu \neq 0$ alors $I(\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu) = \{e\}$.
3. $I(\overset{*}{\mathbb{C}}_0) = \left\{e, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Notons que $\overset{*}{\mathbb{C}}_0 = \overset{*}{\mathbb{C}}$.

Corollaire 2.1

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ *avec* $0 < \mu < 2$ *alors les algèbres réelles* $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu$ *et* $\overset{*}{\mathbb{C}}_0$ *ne sont pas isomorphes.*

Proposition 1

Les algèbres réelles $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu$ *et* $\overset{*}{\mathbb{C}}_\lambda$ *avec* $0 \leq \mu, \lambda < 2$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mu = \lambda$.

Démonstration.

On peut supposer $\lambda, \mu \neq 0$, d'après le corollaire 2.1. Soit $\varphi : \overset{*}{\mathbb{C}}_\mu \rightarrow \overset{*}{\mathbb{C}}_\lambda$ un isomorphisme d'algèbres réelles alors $\varphi(1) = 1$, car $I(\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu) = I(\overset{*}{\mathbb{C}}_\lambda) = \{1\}$. De plus l'espace propre de L_1 associé à la valeur propre -1 est de dimension 1, ainsi $1 \overset{\mu}{\diamond} i = -i$ donne $\varphi(i) = \varepsilon i$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$. De ce fait l'égalité $\varphi(i \overset{\mu}{\diamond} i) = \varphi(i) \overset{\lambda}{\diamond} \varphi(i)$ donne :

$$-1 + \mu\varepsilon i = \varepsilon^2(-1 + \lambda i)$$

c'est à dire $\varepsilon = 1$ et $\mu = \lambda$. $\square$

Proposition 2

Les algèbres réelles ${}^*\mathbb{C}_\mu$ *et* ${}^*\mathbb{C}_\lambda$ *avec* $0 \leq \mu, \lambda < 2$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mu = \lambda$.

Démonstration.

Identique à celle de la proposition 1. □

De même pour $\mathbb{C}^*_\mu$ et $\mathbb{C}^*_\lambda$ avec $0 \leq \mu, \lambda < 2$, il suffit de remarquer que $x \diamond_\mu y = y_\mu \diamond x$.

Théorème 2. ([IR 1])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de division de dimension 2 et soit $e \in I(\mathcal{A})$ qui satisfait à (I) et (II). Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu$, ${}^*\mathbb{C}_\mu$ ou $\mathbb{C}^*_\mu$ avec $0 \leq \mu < 2$. De plus $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu \simeq \overset{*}{\mathbb{C}}_\lambda$ (resp. ${}^*\mathbb{C}_\mu \simeq {}^*\mathbb{C}_\lambda$, $\mathbb{C}^*_\mu \simeq \mathbb{C}^*_\lambda$) avec $0 \leq \lambda, \mu < 2$ si et seulement si $\lambda = \mu$.

Démonstration.

Les opérateurs L_e et R_e sont diagonalisables de valeurs propres 1 et -1 car e satisfait à (II). Comme e vérifie (I), les opérateurs L_e et R_e admettent une base commune $\{e, u\}$ formée de vecteurs propres. Il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$ tels que $eu = \varepsilon u$, $ue = \varepsilon' u$. Il existe également $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 = \lambda e + \mu u$. On obtient $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu$, ${}^*\mathbb{C}_\mu$ ou $\mathbb{C}^*_\mu$ avec $0 \leq \mu < 2$ en considérant les quatres cas :

$$\begin{aligned} eu &= ue = u, \\ eu &= -ue = u, \\ eu &= -ue = -u, \\ eu &= ue = -u. \end{aligned}$$

La deuxième affirmation est dûe aux Propositions 1, 2. □

Théorème 3. ([IR 1])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de division de dimension $n > 1$ et soit $e \in I(\mathcal{A})$. Si e est central et satisfait à (III). Alors il existe une sous algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ commutative de dimension 2 qui contient e. Si, de plus, e satisfait à (II) alors $\mathcal{B}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu$ avec $0 \leq \mu < 2$. De plus $\overset{*}{\mathbb{C}}_\mu \simeq \overset{*}{\mathbb{C}}_\lambda$ avec $0 \leq \lambda, \mu < 2$ si et seulement si $\lambda = \mu$.

Démonstration.

Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u^2 = -e$. Comme e satisfait à (III) la sous algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par u est commutative de dimension 2 et contient e. Le reste de la démonstration est identique à celle du Théorème 2. □

Extensions du théorème commutatif de Hopf

Théorème 4. [H 40]

La dimension d'une algèbre réelle commutative de division est ≤ 2.

Démonstration.

On considéré l'application continue

$$g : \mathcal{A} - \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1} \quad x \mapsto \frac{x^2}{||x^2||}.$$

Trivialement $g(\alpha x) = g(x)$ pour tous $x \in \mathcal{A} - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et nous avons la fameuse "application de Hopf"

$$h : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}.$$

Ceci étant pour une algèbre arbitraire $\mathcal{A}$ de division. Si, de plus, $\mathcal{A}$ est commutative alors h est une application injective. Donc $n = 2$. □

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{A}$ désignera une algèbre réelle de dimension finie qui vérifiée la propriété (P) : $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$.

Exemple 2

L'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ muni du produit :

$$(a+ib) \diamond (c+id) = (ac-bd) + i(ad)$$

est une algèbre non commutative qui n'est pas de division car par exemple $i \diamond 1 = 0$, mais elle est vérifiée la propriété (P). En effet, soient $a+ib,\, c+id \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = (c+id)^2 \quad & \Rightarrow \quad a^2-b^2 = c^2-d^2 \;\text{ et }\; ab = cd \\
& \Rightarrow \quad (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 = (c^2-d^2)^2 + (2cd)^2 \text{ et } a^2-b^2 = c^2-d^2 \\
& \Rightarrow \quad a^2+b^2 = c^2+d^2 \text{ et } a^2-b^2 = c^2-d^2 \\
& \Rightarrow \quad a^2 = c^2 \text{ et } \; b^2 = d^2.
\end{aligned}$$

ce qui donne $a+ib = \pm(c+id)$.

Exemple 3

La table de multiplication de l'algèbre réelle des quaternions $\mathbb{H}$ est :

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

.

L'algèbre réelle $(\mathbb{H}, \diamond) := \mathbb{H}^+$, avec $x \diamond y = xy + yx$, n'est pas de division car par exemple $i \diamond j = 0$.

Théorème 5. ([IR 2])

Toute algèbre réelle $\mathcal{A}$ de dimension finie qui vérifie la propriété (P) est de dimension ≤ 2.

Démonstration.

On muni l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ du produit

$$x \diamond y = xy + yx$$

Soient $x, y \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} x \diamond y = 0 \quad & \Rightarrow \quad xy + yx = 0 \\ & \Rightarrow \quad (x+y)^2 - (x-y)^2 = 0 \\ & \Rightarrow \quad x + y = \pm(x - y) \\ & \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $(\mathcal{A}, \diamond)$ est une algèbre commutative de division. D'après le théorème commutatif de Hopf la dimension de $\mathcal{A}$ est ≤ 2. $\square$

Proposition 3. ([IR 2])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle commutative qui vérifie la propriété (P).
Alors $\mathcal{A}$ est de division.

Démonstration.

Soient $x, y \in \mathcal{A}$ tels que $xy = 0$, alors $\left(x+y\right)^2 - \left(x-y\right)^2 = 4xy = 0$.
Donc $x + y = \pm\left(x - y\right)$ c'est à dire x=0 ou y=0. $\square$

Remarque 3.1

L'algèbre réelle dont la table de multiplication est donnée par :

	e	i
e	e	i
i	$2i$	$-e$

est non commutative de division qui vérifie la propriété (P).

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de dimension finie.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A}\ \textbf{est de division} & & \\
 & \Nearrow & & \Nwarrow & \\
\mathcal{A}\ \textbf{est commutative et vérifie (P)} & & & & \mathcal{A}\ \textbf{est commutative de division} \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\mathcal{A}\ \textbf{vérifie (P)} & & \Leftrightarrow & & \mathcal{A}^{+}\ \textbf{vérifie (P)} \\
 & \Searrow & & \Swarrow & \\
 & & \textbf{dim}(\mathcal{A}) \leq 2 & &
\end{array}
$$

.

Théorème 6. ([IR 2])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de dimension finie qui vérifie (P). Alors $\mathcal{A}$ ou bien isomorphe à $\mathbb{R}$ ou bien sa multiplication de $\mathcal{A}$ est donnée par :

	e	u
e	e	$a_{12}e + b_{12}u$
u	$a_{21}e + b_{21}u$	$-e$

avec $b_{12} + b_{21} \neq 0$.

Démonstration.

L'espace vectoriel réel $\mathcal{A}$ muni du produit $x \diamond y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ est une algèbre réelle commutative de division de dimension 2. D'après le corollaire 1.1 il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u^2 = u \diamond u = -e$. Donc

	e	u
e	e	$a_{12}e + b_{12}u$
u	$a_{21}e + b_{21}u$	$-e$

On peut montrer que $b_{12} + b_{21} \neq 0$ à l'aide d'un calcul simple. $\square$

Bibliographie

- **[BM 58]** R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.
- **[HKR 91]** F. Hirzebruch, M. Koecher and R. Remmert, *Numbers.* Springer-Verlag, (1991).
- **[H 40]** H. Hopf, *Ein topologischer beitrag zur reellen algebra.* Comment. Math. Helvet. **13** (1940), 219-239.
- **[IR 1]** E. Idnarour and A. Rochdi, *Extensions of a YANG-PETRO theorem using simple algebraic arguments.* (Preprint).
- **[IR 2]** E. Idnarour and A. Rochdi, *Finite-dimensional real algebras satisfying* $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$. (Preprint).
- **[K 58]** M. Kervaire, *Non-parallelizability of the n-sphere for* $n > 7$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280-283.

- **[P 87]** J. Petro, *Real division algebras of dimension* > 1 *contain* $\mathbb{C}$. Amer. Math. Monthly, **94** (1987), 445-449.
- **[Se 54]** B. Segre, *La teoria delle algebre ed alcune questione di realta.* Univ. Roma, Ist. Naz. Alta. Mat., Rend. Mat. E Appl. Serie 5, **13** (1954), 157-188.
- **[Y 81]** C. T. Yang, *Division algebras and fibrations of spheres by great spheres.* J. Differential Geometry, **16** (1981), 577-593.

Merci pour votre attention !