Structures $k-$symplectiques polarisées

Azzouz AWANE

F.S. Ben M'sick. UH2C

EST Khénifra - 20 Avril 2019-

Sommaire

1. Naissance de la géométrie symplectique
2. Sur quelques généralisations des structures symplectiques
3. Structures $k-$symplectiques polarisées

Hermann Weyl (1885 – 1955) introduit l'adjectif « symplectique » pour la première fois

- L'adjectif **symplectique** (provenant du grec) signifie être entrelacé ; ce qui réunit les choses ensemble. **(J.M. Souriau)**
- Ce terme « **symplectique** » a été utilisé pour la première fois par **Hermann Weyl** (1885 – 1955) dans « Classical groups » pour désigner **le groupe symplectique** :

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{ M \in Gl(2n; \mathbb{R}) \mid M^T JM = J \right\}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Calcul symplectique apparu dans **trois mémoires de Jean Louis Lagrange** (1736-1813) **sur la théorie des perturbations des planètes du système solaire** publiés en 1808 ; 1809 et 1810 **dans les CRAS et dans l'ouvrage « Mécanique analytique tome 2 »** en 1811.
La mécanique classique était très géométrique à l'époque de Huygens (1629-1695) et Newton (1642-1727) .
[2]**Lagrange se vante que son traité sur la mécanique ne contienne aucune image.** "*Alan Weinstein*"

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Période de la mécanique analytique : Euler (1707-1783), Lagrange, Jacobi (1804-1851) et Hamilton (1805-1865), techniques analytiques pour l'étude des équations différentielles décrivant les systèmes mécaniques.
Reprise de la géométrisation de la mécanique : avec Poincaré (1854-1912) et Birkhoff (1884-1944).

J.M. Souriau a introduit la géométrie symplectique en 1953 au colloque du CNRS de Strasbourg

Jean Marie Souriau **introduit la terminologie « géométrie symplectique » et découvre le rôle central des structures symplectiques** en **Mécanique** ; **son premier travail sur le sujet, intitulé « Géométrie symplectique différentielle. Applications » , est présenté au colloque du CNRS de Strasbourg en 1953.**

J.M. Souriau : la variété des mouvements d'un système hamiltonien

J.M. Souriau a montré que **l'ensemble des mouvements d'un système hamiltonien possède une structure naturelle de variété symplectique** ; les crochets de Lagrange des fonctions coordonnées locales sont les composantes de la forme symplectique de cette variété. **L'aspect local de ces propriétés avait été découvert dès 1809 par Lagrange ; Jean-Marie Souriau leur a donné une formulation géométrique globale.**

J.M. Souriau **a mis en place de la mécanique quantique, dans le cadre de la géométrie symplectique** en 1965

En 1965, J.M. Souriau donne un fondement mathématique rigoureux au processus de quantification d'un système mécanique classique.
La seconde étape de la quantification, utilisant une polarisation de la variété symplectique (M, θ), doit permettre de construire un espace de Hilbert et d'associer, à chaque observable classique d'un système mécanique, un opérateur autoadjoint sur cet espace.

La mécanique hamiltonienne est une géométrie de l'espace des Phases (Arnold, Abraham-Mardsen, Godbillon)

Un processus d'évolution est **déterministe** si son **évolution et son passé** sont univoquement sont définis par **son état présent**.
L'ensemble de tous les états de ce processus est appelé **espace des phases**.

1. En mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement déterminés par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système. L'espace de phase de ce système mécanique est un ensemble dont dont les éléments sont constitués par l'ensemble des positions et vitesse de tous les points du système considéré.
2. En mécanique classique, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires.

Équations de Hamilton

La mécanique hamiltonienne est une géométrie de l'espace de phase

$$M = \{(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\}$$

dans laquelle les équations du mouvement sont régies par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

où $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Équations de Newton

Les équations de Newton s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} & = \overrightarrow{v} \\ \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} & = \frac{1}{m}\overrightarrow{F} \end{cases}$$

Supposons que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel $V\left(\overrightarrow{r}\right)$: $\overrightarrow{F} = -gradV$. alors dans l'espace de phase $M = \{(q_i = x_i, p_i = mv_i) \mid i = 1, 2, 3\}$, les équations du mouvement s'obtiennent à partir des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

où $H = \frac{1}{2}m(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V\left(q_1, q_2, q_3\right)$.

Oscillateur harmonique : $\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0$

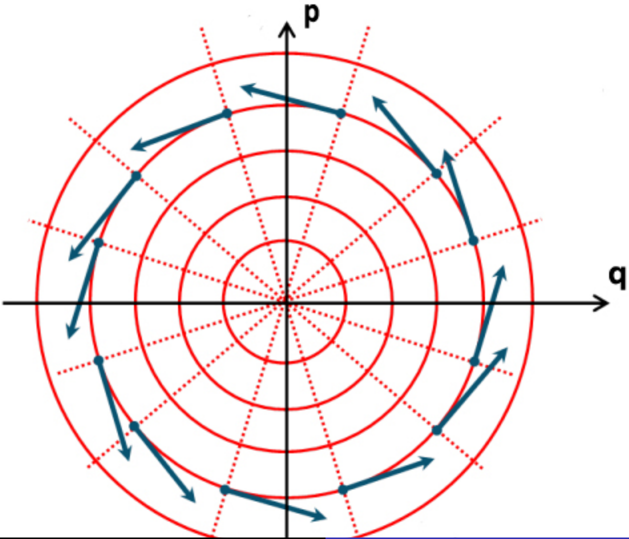
Le système hamiltonien associé à la fonction

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

est alors

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} & = p \\ \frac{dp}{dt} & = -q \end{cases}$$

Mécanique hamiltonienne



Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \omega_x) \mid x \in M \text{ } et \text{ } \omega_x \in T_x^*M\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & T(T^*M) & \xrightarrow{(\pi_M)_*} & T^*M & \\ \pi_{T^*M} & \downarrow & & \downarrow & \pi_M \\ & T^*M & \xrightarrow[\pi_M]{} & M & \end{array}$$

M étant une v.d. $\dim M = n$.

Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

$u = (x, \omega_x) \in T^*M$, $X \in \mathfrak{X}(T^*M)$ et $X_u \in T_u(T^*M)$

$$\langle X_u, \lambda_u \rangle = \langle (\pi_M)_* (X_u), \omega_x \rangle$$

Dans un s.c.l. $(\overline{U} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n))$ dans T^*M au dessus de $(U, \varphi = (q_1, \ldots, q_n))$, où

$$q_i(x, \omega_x) = pr_i \circ \varphi \circ \pi_M (x, \omega_x) \ \ et \ \ p_i(x, \omega_x) = \omega_x \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

$X_{\overline{U}}$ et ω_x s'écrivent :

$$X_{\overline{U}} = \sum_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \omega_x = \sum_i c_i dq_i$$

Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

donc,

$$\langle X_u, \lambda_u \rangle = \sum_i a_i c_i$$

Par conséquent

$$\lambda_{\overline{U}} = \sum_i p_i dq_i$$

sur le fibré cotangent T^*M est la forme de Pfaff λ .
La forme différentielle extérieure $\theta = d\lambda$ s'appelle forme symplectique canonique sur le fibré cotangent, son expression locale est donnée par :

$$\theta_{\overline{U}} = d\lambda_{\overline{U}} = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

Équations de Hamilton sur l'espace des phases : T^*M

La dualité symplectique permet d'associer à tout hamiltonien H (i.e. *un fonction différentiable*), un champ de vecteurs X_H (champ de vecteurs hamiltonien associé à H) tel que

$$i(X_H)\theta = -dH$$

et donc les équations de mouvement de X_H sont données par :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

On obtient ainsi les équations de Hamilton qui régissent la mécanique hamiltonienne.

En définissant le crochet de Poisson de deux fonctions $f, g \in C^\infty(M)$ par :

$$\{f, g\} = -X_f(g).$$

Étape des variétés de Poisson avec Lichnérowicz, Kirillov, Weinstein, Liberman,...

on obtient les propriétés suivantes qui conduis*ent aux structures de* Poisson :

1. $\{g,f\} = -\{f,g\}$;
2. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ (Identité de Jacobi) ;
3. $\{f,gh\} = \{f,g\}\,h + g\,\{f,h\}$. (Formule de Leibnitz)

L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnérowicz et indépendamment Alexander Kirillov, Alan Weinstein,....

Paul Dirac et André Lichnerowicz : la nécessité de généraliser les structures symplectiques

Des considérations mathématiques et physiques ont conduit à la généralisation de la notion de structure symplectique, citons par exemples :

1. en 1950, Paul Dirac (colauréat avec Erwin Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933) a publié : Generalized Hamiltonian dynamics ;
2. à partir de 1975, l'académicien français André Lichnerowicz a défini et étudié plusieurs généralisations des variétés symplectiques : variétés canoniques, variétés de Poisson, variétés de Jacobi, variétés localement conformément symplectiques ;
3. En ce qui concerne les structures liées aux systèmes différentiels, Lichnérowicz a pointé la mécanique de Y.Nambu.

Generalized Hamiltonian Dynamics (Yoichiro Nambu 1973)

Les équations régissant le mouvement de la mécanique de Nambu sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = \frac{D(H_1,H_2)}{D(y,z)} \\ \frac{dy}{dt} & = \frac{D(H_1,H_2)}{D(z,x)} \\ \frac{dz}{dt} & = \frac{D(H_1,H_2)}{D(x,y)} \end{cases}$$

où le Hamiltonien

$$H : (x, y, z) \in M \longmapsto (H_1(x, y, z), H_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$$

est à valeurs vectorielles définie sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z).

$k-$symplectique -Multi symplectique

1. Structures $k-$symplectique : Awane en 1984.
2. Manuel de Léon (1992), Lawson Norris. à partir de 1997
3. Gotay, Mardsen, Geoffrey Martin (1997) Multi symplectique : (M, θ^{k+1}) Théorie des champs. 1997.

Le théorème de DARBOUX et l'unicité des modèles locaux

Vers la géométrique symplectique vectorielle : files conducteurs

1. **Considérations mathématiques :** Quel est le contexte géométrique dans lequel est située **la 2-forme vectorielle** subordonnée à la **forme symplectique de Liouville** sur la somme de Whitney $\theta \in \mathscr{A}^2\left(\oplus^k T^*M = T^*M \oplus \cdots \oplus T^*M\right) \otimes \mathbb{R}^k$, qui est fermée, non dégénérée et qui est nulle sur les champs verticaux ?
2. Dans **la catégorie $\mathbf{Bun_B}$** des espaces fibrés au dessus d'une variété **B**, **le produit** de deux espaces fibrés $M_1 \longrightarrow B$ et $M_2 \longrightarrow B$ est la somme de Whitney $M_1 \oplus M_2 \longrightarrow B$), donc, **le produit** de deux fibrations lagrangiennes, n'est pas une fibration lagrangienne, ni une variété symplectique.

Vers une géométrique symplectique vectorielle

Dans cette optique, la structure symplectique vectorielle que nous proposons, repose sur l'existence d'une $2-$**forme vectorielle**

$$\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathscr{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$$

qui relie les champs de vecteurs hamiltoniens X_H et leurs hamiltoniens $H \in \mathscr{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{R}^k$, par la relation :

$$i(X_H)\theta = -dH$$

$(v_p)_{1\leq p\leq k}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

La 2-forme différentielle $\theta \in \mathscr{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$ sera dite $k-$symplectique si elle est fermée et non dégénérée :

1. $d\theta = 0_{\mathbb{R}^k}$;
2. $i(X)\theta = 0_{\mathscr{A}^1(M)\otimes\mathbb{R}^k} \Longrightarrow X = 0.$

Problème de l'unicité du modèle local (théorème de Darboux : $\theta = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$)

Diverses propriétés de la géométrie symplectique (comme par exemple les équations de Hamilton) sont mises en évidence en vertu de **l'unicité du modèle local** (théorème de Darboux) :

$$\theta = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n \tag{1}$$

Sur la somme de Whitney

$$\bigoplus^k T^* M^*$$

qui est de dimension $n(k+1)$**, existe une 2-forme vectorielle** $\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathscr{A}^2 \left(\bigoplus^k T^* M\right) \otimes \mathbb{R}^k$**, subordonnée à la forme de Liouville** qui s'écrit localement sous la forme :

$$\theta^r = \sum dp^{rj} \wedge dq^j \ \ (r = 1, \cdots, k). \tag{2}$$

La non unicité du modèle local d'une structure symplectique vectorielle : systèmes de 2-formes extérieurs

La première question qui se pose, est ce qu'une structure $k-$symplectique admet un modèle unique du type Darboux ; semblable aux modèles locaux de $\bigoplus^k T^*M$?
Sinon, peut emprunter une ou plusieurs propriétés géométriques de l'espace des phases T^*M ou de la somme de Whitney $\bigoplus^k T^*M$ au dessus d'une variété M, qui ne soient pas satisfaites par la définition d'une structure $k-$symplectique en générale ?
Pour répondre à ces questions, examinons d'abord les systèmes symplectiques vectorielles en petite dimension.

La non unicité du modèle local d'une structure $k-$symplectique : systèmes de 2-formes extérieures

Un système $\{\theta^1, \theta^2\}$ de deux 2-formes extérieures de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ est isomorphe à :

$$\begin{cases} \theta^1 & = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 & = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \end{cases}$$

avec $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \neq 0$.

Remarque Le système $\{\theta^1, \theta^2\}$ possède une solution maximale F de dimension 2 définie par

$$F = \ker \alpha^3.$$

La non unicité du modèle local d'une structure $k-$symplectique : systèmes de 2-formes extérieures

Un système $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ de trois 2-formes extérieures de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ est isomorphe à :

$$\begin{cases} \theta^1 & = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 & = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \\ \theta^3 & = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \end{cases}$$

avec $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \neq 0$.

La non unicité du modèle local d'une structure symplectique vectorielle : systèmes de 2-formes extérieurs

Exemples de systèmes de 2-formes extérieures de rang maximum non isomorphes Dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants sont de rang 4 et non isomorphes :

$$\begin{cases} \theta^1 & = dx^1 \wedge dx^4 \\ \theta^2 & = dx^2 \wedge dx^4 \\ \theta^3 & = dx^3 \wedge dx^4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \theta^1 & = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 & = dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^1 \\ \theta^3 & = dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta^1 & = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 & = dx^2 \wedge dx^4 \\ \theta^3 & = dx^3 \wedge dx^4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \theta^1 & = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 & = dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^1 \\ \theta^3 & = dx^3 \wedge dx^4 \end{cases}$$

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

On voit donc qu'une structures $k-$symplectique n'admet pas toujours un modèle locale unique. Donc on ne pourrait pas espérer un analogue aux équations de Hamilton par exemple. Ainsi, l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire à la définition d'une structure $k-$symplectique est nécessaire pour obtenir l'unicité du modèle local.
Le modèle naturel de variété symplectique, qui est le fibré cotangent T^*M, nous offre un feuilletage, dont le fibré tangent aux feuilles annule la forme symplectique de Liouville $\theta = d\lambda$; il s'agit bien du feuilletage défini par les fibres de la fibration

$$\pi_M : T^*M \longrightarrow M$$

qui fait de (T^*M, θ) une variété symplectique polarisée, i.e. une variété symplectique munie d'un feuilletage dont les feuilles sont des sous variétés lagrangiennes.

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

La notion de variété symplectique polarisée joue un rôle important dans la quantification géométrique de Kostant-Souriau (voir Nicholas Woodhouse, A. Weinstein, P. Dazord, J.M. Morvan, P. Molino et P. Libermann...)
Notons aussi que $2-$**forme vectorielle**

$$\theta = \left(\sum dp^{rj} \wedge dq^j\right) \otimes v_r \in \mathscr{A}^2\left(\oplus^k T^*M\right) \otimes \mathbb{R}^k$$

subordonnée à la forme de Liouville s'annule sur les champs de vecteurs tangents au feuilletage de codimension n défini par la fibration

$$\pi_M : \oplus^k T^*M \longrightarrow M$$

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

Nous proposons donc l'adjonction de l'objet géométrique supplémentaire suivant : l'existence sur M d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n qui soit solution du système différentiel : .

Dans le cas ou $k = 1$, on retrouve la notion de variété symplectique réelle polarisée.

Aspect linéaire d'une structure $k-$symplectique polarisée

Soient E un $\mathbb{R}-$ e.v. de dimension $n(k+1)$,
$\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathscr{A}^2(E) \otimes \mathbb{R}^k$ et F un s.e.v. de codimension n. Dans tout ce chapitre, le corps de référence est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 . $(v_p)_{1\leq p\leq k}$étant la base canonique de $\mathbb{R}^k$ dont la base duale est $(\overline{\omega}^p)_{1\leq p\leq k}$.

(θ, F) est une structure $k-$symplectique polarisée,sur l'espace E si :

1. θ est non dégénéré : $(\forall x \in E)\left(i(x)\theta = 0_{E\otimes\mathbb{R}^k} \Longrightarrow x = 0_E\right)$;
2. $\forall x, y \in F; \theta(x,y) = 0_{\mathbb{R}^k}$.

Théorème de classification des structures $k-$symplectiques polarisées linéaires

Si $(\theta = \theta^p \otimes v_p, F)$ est une structure symplectique vectorielle polarisée sur E , alors il existe une base $(\omega^{pi}, \omega^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E^* telle que :

$$\theta^p = \sum \omega^{pj} \wedge \omega^j, \; F = \ker \omega^1 \cap \cdots \cap \ker \omega^k.$$

La base $(\mathrm{e}_{pi}, e_i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ dont la base duale $(\omega^{pi}, \omega^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ est appelée base $k-$symplectique polarisée.

Le groupe $k-$symplectique polarisé : $Sp(k,n;E)$

Les automorphismes de E qui laissent invariants (θ,F) est un groupe noté $Sp(k,n;E)$ et appelé groupe symplectique vectoriel polarisée de E. Soit $Sp(k,n;\mathbb{K})$ le groupe des matrices des automorphismes symplectiques vectoriels polarisés de E exprimées dans la base symplectique vectorielle polarisée $(e_{pi},e_i)_{1\leq p\leq k,1\leq i\leq n}$ de E.

Le groupe $Sp(k,n;\mathbb{R})$ est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} T & & 0 & S_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & \cdots & T & S_k \\ 0 & \ldots & 0 & \left(T^{-1}\right)^t \end{pmatrix}$$

où $T,S_1,\cdots,S_k$ sont des matrices n$\times$n à coefficients dans $\mathbb{R}$, T inversible et $S_pT^t=TS_p^t$ pour tout $p(p=1,...,k)$.

L'algèbre de Lie du groupe $k-$symplectique polarisé : $\mathfrak{sp}(k,n;E)$

$Sp(k,n;E)$ est **un groupe de Lie**. L'algèbre de Lie de ce groupe sera notée par $\mathfrak{sp}(k,n;E)$. Les éléments de $\mathfrak{sp}(k,n;E)$ sont les $u \in End(E)$ qui laissent invariante la structure symplectique vectorielle polarisée : $(F;\theta)$.
Soit $\mathfrak{sp}(k,n;\mathbb{K})$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie $Sp(k,n;\mathbb{K})$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(k,n;\mathbb{K})$ est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A & & 0 & S_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & \dots & A & S_k \\ 0 & \dots & 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$$

où $S_1,\cdots,S_k \in M_{sym}(n\times n,\mathbb{K})$, A matrice n×n.

Variétés $k-$symplectiques polarisées

Soit M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n et soient $\theta \in \mathscr{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$. Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ sera désigné par E.

On dit que (θ, E) est une structure symplectique vectorielle polarisée, sur M si :

1. θ fermée : $d\theta = 0$;
2. θ est non dégénérée ;
3. $\theta^p(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$.

Structure $k-$symplectique polarisée sur la somme de Whitney

La somme de Whitney $\oplus^k T^*M$ est par définition le produit fibré de la fibration $\pi_M : T^*M \longrightarrow M$. L'espace total de cette fibration est l'ensemble des $(k+1)-$uplet :

$$(x, \omega_x^1, \ldots, \omega_x^k)$$

où $x \in M$ et $\omega_x^1, \ldots, \omega_x^k \in T_x^*M$.

Soient $W = \oplus^k T^*M$, $u = (x, \omega_x^1, \ldots, \omega_x^k) \in W$, $X \in \Gamma(TW)$ et $X_u \in T_u(W)$

$$\langle X_u, \lambda_u^r \rangle = \langle (\pi_M)_* (X_u), \omega_x^r \rangle$$

Dans un s.c.l. $\left(\overline{U} = (q^1, \ldots, q^n, p^{r1}, \ldots, p^{rn})_{1 \leq r \leq k}\right)$ dans W au dessus de $\left(U, \varphi = (q^1, \ldots, q^n)\right)$, où

Structure $k-$symplectique polarisée sur la somme de Whitney

$$q^i(x,\omega_x) = pr^i \circ \varphi \circ \pi_M(x,\omega_x^1,\ldots,\omega_x^k) \text{ et } p^{ri}(x,\omega_x^1,\ldots,\omega_x^k) = \omega_x^r\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)$$

$X_{\overline{U}}$ et ω_x s'écrivent :

$$X_{\overline{U}} = \sum_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_r b_{ri} \frac{\partial}{\partial p^{ri}} \right), \omega_x^r = \sum_i c^{ri} dq^i$$

donc,

$$\langle X_u, \lambda_u^r \rangle = \sum_i a_i c^{ri}$$

Par conséquent

$$\lambda_{\overline{U}}^r = \sum_i p^{ri} dq^i$$

Structure symplectique vectorielle polarisée sur la somme de Whitney

Pour tout $r = 1, \dots, k$, on pose $\theta^r = d\lambda^r$. L'expression locale de θ^r est donnée par :

$$\theta^r_U = d\lambda^r_U = \sum_i dp^{ri} \wedge dq^i$$

Le (k+1)-uplet $(\theta^r \otimes v_r; \mathfrak{F})$ est une structure symplectique vectorielle polarisée sur la somme de Whitney $\oplus^k T^*M$. $\mathfrak{F}$ étant le feuilletage défini par la fibration :

$$\begin{array}{c} \oplus^k T^*M \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

Modèle local d'une structure $k-$symplectique polarisée : Atlas de Darboux

Si $(\theta^p \otimes v_p, E)$ est une structure $k-$symplectique polarisée sur M, alors pour tout point x_0 de M, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x_0 de coordonnées locales $(x^{pi}, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ dites adaptées, tel que les composantes θ^P de la 2$-$forme vectorielle θ soient représentées dans U par :

$$\theta^P_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dy^i$$

et $E_{|U}$ est défini par : $dy^1 = ... = dy^n = 0$. Les changements de coordonnées dans cet atlas sont donnés par :

$$\overline{x}^{pi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial \overline{y}^i} x^{pj} + \varphi^{pi}\left(y^1; \cdots, y^n\right) \ , \ \overline{y}^i = \overline{y}^i\left(y^1; \cdots, y^n\right)$$

Fonctions basiques pour un feuilletage

Soit $(M, \mathfrak{F})$ une variété feuilletée munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de dimension p et de codimension q.
Une fonction réelle $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ est ***dite basique pour*** $\mathfrak{F}$ si pour tout champ de vecteurs Y tangent à $\mathfrak{F}$, **la fonction $Y(f)$ est identiquement nulle.**

Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est basique pour $\mathfrak{F}$;
2. f est constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$.

On note par $\mathscr{A}^0_b(M, \mathfrak{F})$ le sous anneau de $\mathscr{A}^0(M) = \mathscr{C}^\infty(M)$ constitué par les fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$.

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

Soient M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'une S.S.V.P.

$$(\theta^p \otimes v_p, E)$$

Soient TM/E le fibré quotient :

$$TM/E = \bigcup_{x \in M} T_x M/E_x \quad , \quad \nu : TM \longrightarrow TM/E = \nu E$$

et soit $\nu^* E$ le fibré dual de νE :

$$\nu^* E = \bigcup_{x \in M} \nu^* E_x = \bigcup_{x \in M} (T_x M/E_x)^*$$

$(\forall x_0 \in M)(\exists U \in V_O(x_0, M))$ de C.L. $(x^{pi}, x^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$:

$$\theta^P_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dy^i \quad ; \quad E_{|U} = \ker dy^1 \cap \ldots \cap \ker dy^n$$

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

Les distributions

$$x \longmapsto C_x(\theta^p)$$

sont des sous-fibrés intégrables de TM ($C_x(\theta^p)$ est l'espace caractéristique au point x de θ^p).
Pour chaque $p(p = 1, ..., k)$ on pose ;

$$E^p = \bigcap_{q \neq p} C_x(\theta^q)$$

En termes des C.L.A. $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a :

1. v^*E est engendré par les formes différentielles $dy^1, ..., dy^n$;
2. E^p est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^{p1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{pn}}$.

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

On a :

1. pour tout $p (p = 1, ..., k)$, le sous-fibré E^p est intégrable,
2. $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k$ (somme directe) ;
3. pour tout $p (p = 1, ..., k)$ l'application

$$\zeta_p : E^p \longrightarrow \nu^* E \ ; \ \ X \longmapsto i(X)\theta^p$$

définit un isomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de M de E^p sur $\nu^* E$.

Les feuilletages $\mathfrak{F}^p (p = 1, ..., k)$ de M définis par les sous-fibrés intégrables E^p sont appelés **feuilletages caractéristiques subordonnés à la structure k-symplectique polarisée**.

Structures affines des feuilles

La dualité partielle

$$\zeta_p : \frac{\partial}{\partial x^{pi}} \longmapsto dy^i$$

exprime la dualité entre la géométrie le long des feuilles de $\mathfrak{F}^p$ et la géométrie transverse.
Les changements de coordonnées dans cet atlas sont donnés par :

$$\overline{x}^{pi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial \overline{y}^i} x^{pj} + \varphi^{pi}\left(y^1;\cdots,y^n\right) \ , \ \overline{y}^i = \overline{y}^i\left(y^1;\cdots,y^n\right)$$

Ces expressions permettent de voir le théorème suivant :

Toute feuille de $\mathfrak{F}^p(p = 1,...,k)$ est munie d'une structure localement affine.

Structures affines des feuilles

Ces changements de coordonnées, par rapport aux coordonnées locales $\left(x^{pj}\right)_{1\leq j\leq n}$, sont des transformations affines, ainsi, chaque feuille de $\mathfrak{F}^p$ est une sous-variété de M localement affine de codimension n.

Pour tout $f\in\mathscr{A}_b^0(M,\mathfrak{F})$, $\exists X_f^1,\ldots,X_f^k\in\mathfrak{X}(M)$ satisfaisant à :

1. X_f^p est tangent aux feuilles des feuilletages caractéristiques $\mathfrak{F}^p$ pour tout p ;
2. $\left[X_f^p,X_f^q\right]=0$.

Les fonctions f^i et les champs de vecteurs sont liés par

$$X_f^p=-\zeta_p^{-1}\left(df^i\right)$$

Et, donc, dans un S.C.L.A. on a :

$$X_f^p=-\sum^n\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}}$$

Structures affines des feuilles

Proposition.

Nous supposons qu'il existe n fonctions basiques $f_1, \ldots, f_n$ dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur M et que chaque feuille L de $\mathfrak{F}^p$ est compacte, alors L est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$.

L'existence de n fonctions de base dont les différentielles sont linéairement indépendantes dans M implique que, pour chaque p, il existe n champs de vecteurs $X^p_{f_1}, \ldots, X^p_{f_n} \in \Gamma(L)$, indépendants sur L. Il est bien connu que si une variété compacte et connexe V de dimension d qui admet n champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point de V et dont les crochets de Lie sont deux à deux nuls, alors V est difféomorphe au tore réel de dimension d. D'où :

Corollaire

Si chaque feuille F de $\mathfrak{F}$ est compacte, alors F est isomorphe au

Distributions transverses

Une distribution transversale à $\mathfrak{F}$ est un sous-fibré vectoriel H de TM complémentaire de E dans TM

$$TM = E \oplus H = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k \oplus H$$

Pour tout p, nous considérons la distribution D^p donnée par :

$$D^p = E^p \oplus H.$$

Théorème

Supposons que D^p est intégrable. Soit $\mathfrak{G}^p$ le feuilletage associé. Alors toute feuille W de $\mathfrak{G}^p$,munie de $(\theta^p, \mathfrak{F}^p)$ est une variété symplectique polarisée.

Distributions transverses

Démonstration.

Soit W une feuille de $\mathfrak{G}^p$. Pour toute $x \in W$ on a :donc

$$T_x W = D_x = E_x^p \oplus D_x^p$$

Puisque $x \longmapsto E_x^p$ est une $n-$distribution intégrable contenue dans D, alors les feuilles de $E^p_{|W}$ sont contenues dans W. Comme $\theta^p(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E^p)$,et θ^p est fermée de rang $2n = \dim W$, on conclut que $(\theta^p, \mathfrak{F}^p)$ est une structure symplectique polarisée sur W. $\square$

Métrique bundle-like au sens de Reinhart

Supposons que M est munie d'une structure riemannienne g.

Définition

La métrique g est dite **bundle-like au sens de Reinhart** pour la variété feuilletée $(M, \mathfrak{F})$ si chaque géodésique de (M, g) est tangente à la distribution $\mathfrak{F}^{\perp}$, normale de $\mathfrak{F}$, en un point reste tangent à $\mathfrak{F}^{\perp}$ en tout point de la géodésique.
g définit une métrique transverse g_T sur le fibré transverse νE à E, à l'aide de la dualité $\zeta^p : E^p \longrightarrow \nu^* E$, on déduit une métrique g_p le long des feuilles de $\mathfrak{F}^p$.

Champs de vecteurs feuilletés

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit feuilleté $\mathfrak{F}$ si au voisinage de tout point de M, le groupe à un paramètre local associé à X respecte le feuilletage $\mathfrak{F}$.

On a l'équivalence suivante :

1. X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$;
2. $\mathscr{L}_X Y \in \Gamma(E)$ pour tout $Y \in \Gamma(E)$;
3. Dans un système de coordonnées locales distinguées $(x_i, y_j)_{1\leq i\leq n-q, 1\leq j\leq q}$, le champ de vecteurs X s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} \eta^j(y_1, \ldots, y_q)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

On note par

$$\mathscr{I}(M, \mathfrak{F}) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \mathscr{L}_X Y \in \Gamma(E), \forall Y \in \Gamma(E)\}$$

l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux pour le feuilletage $\mathfrak{F}$.

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Soient $(M;\theta;\mathfrak{F})$ une variété $k-$symplectique polarisée. Considérons l'application linéaire ζ

$$\zeta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{A}^1(M) \otimes \mathbb{R}^k$$

de $\mathfrak{X}(M)$ dans $\mathscr{A}_1(M) \otimes \mathbb{R}^k$, définie par

$$\zeta(X) = i(X)\theta$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Définition Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit **localement hamiltonien** si la 1-forme vectorielle $\zeta(X)$ est fermée.

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Proposition.

Si k est supérieur ou égal à 2, alors tout système localement hamiltonien est feuilleté.

Démonstration.

Supposons que $k \geq 2$. Soit X un système localement hamiltonien sur $(M, \theta, \mathfrak{F})$. Le lemme de Poincaré montre qu'il existe un ouvert Ude M et une fonction vectorielle différentiable $H = H^p \otimes v_p \in C^\infty(U) \otimes \mathbb{R}^k$telle que

$$\zeta(X) = -dH.$$

$\square$

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Démonstration.

On peut supposer que U un domaine d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$:^{i}

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dy^i$$

pour chaque p et $\mathfrak{F}_{|U}$ soit défini par les équations : $dy^1 = ... = dy^n = 0$. □

Écrivons

$$X = X^{pi} \frac{\partial}{\partial x^{pi}} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

La relation $\zeta(X) = i(X)\theta = -dH$ donnent pour chaque $p = 1, \dots, k$ on a :

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Démonstration.

et puisque $k \geq 2$, alors

$$X^{pi} = -\frac{\partial H^p}{\partial y^j},\ Y^i = \frac{\partial H^p}{\partial x^{qr}},\ \frac{\partial H^p}{\partial x^{qr}} = \delta^{pq}\delta^{ij}.$$

Par conséquent, $H^p = H^p\left(x^{pi}, y^1, \cdots, y^n\right)$ et

$$Y^i = \frac{\partial H^1}{\partial x^{1i}} = \ldots = \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} = a_i\left(y^1, \cdots, y^n\right)$$

avec $a_i \in \mathscr{A}_b^0\left(U, \mathfrak{F}_U\right)$, et donc ,

$$\begin{array}{rcl} H^p & = & a_i\left(y^1, \cdots, y^n\right) x^{pi} + b^p\left(y^1, \cdots, y^n\right) \\ X & = & -\frac{\partial}{\partial y^i}\left(a_j\left(y^1, \cdots, y^n\right) x^{pj} + b^p\left(y^1, \cdots, y^n\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^{pi}} \\ & & + a_i\left(y^1, \cdots, y^n\right) \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{array}$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Démonstration.

On déduit que X est un champ de vecteurs feuilleté pour le feuilletage $\mathfrak{F}$.

$\square$

Corollaire

Supposons que $k \geq 2$. Soit X un système localement hamiltonien sur $(M, \theta, \mathfrak{F})$. Alors le groupe à paramètre locale de X respecte la structure affine des feuilles de $\mathfrak{F}^p$.

Définition. Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ **localement hamiltonien est dit polarisé** s'il est en plus **feuilleté**.
On note par $H^0(M, \mathfrak{F})$ l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs localement hamiltoniens polarisés :

$$H^0(M, \mathfrak{F}) = \{X \in \mathcal{L}(M, \mathfrak{F}) \mid L(i(X)\theta) = 0\}$$

Champs de vecteurs localement hamiltoniens polarisés

Soit X un champ de vecteurs localement hamiltonien polarisé. Alors, localement, pour tout $x \in M$; il existe $U \in O(x, M)$, et une application $H \in C^\infty\left(U, \mathbb{R}^k\right)$ telle que :

$$i(X)\theta = -dH.$$

Par rapport aux coordonnées locales $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ défini sur un ouvert U de M, les équations du mouvement d'un tel système sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dx^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial y^i} \\ \delta^p_q \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} \\ \frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} \in \mathscr{A}^0_b(M, \mathfrak{F}) \end{cases}$$

(Équations de Hamilton des champs de vecteurs Hamiltoniens polarisés).

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Localement, H et X s'écrivent respectivement sous la forme suivante :

$$H = H^p \otimes v_p = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(y^1, ..., y^n) x^{pj} + b^p(y^1, ..., y^n) \right) \otimes v_p$$

soit,

$$H = \begin{pmatrix} x^{11} & \dots & x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{k1} & \dots & x^{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(y^1, ..., y^n) \\ \vdots \\ a_n(y^1, ..., y^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1(y^1, ..., y^n) \\ \vdots \\ b^k(y^1, ..., y^n) \end{pmatrix}$$

et

$$X = -\sum_{s=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} x^{ps} \frac{\partial a_j}{\partial y^s} + \frac{\partial b^p}{\partial y^s} \right) \frac{\partial}{\partial x^{ps}} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

où $a_j, b^p \in \mathscr{A}_b^0(U, \mathfrak{F}_U)$.

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Un élément $X \in \mathscr{I}(M,\mathfrak{F})$ est appelé **champ de vecteurs hamiltonien polarisé** si la $1-$forme vectorielle

$$i(X)\theta$$

est exacte. On note par $H(M,\mathfrak{F})$ l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs hamiltoniens polarisés.

Il est claire que $\zeta(H(M,\mathfrak{F}))$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{A}_1(M)\otimes\mathbb{R}^k$. Posons

$$\mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}) = d^{-1}(\zeta(H(M,\mathfrak{F})))$$

d étant l'opérateur de différentiation

$$C^\infty(M)\otimes\mathbb{R}^k \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1(M)\otimes\mathbb{R}^k.$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

donc, pour toute application $H \in C^{\infty}(M) \otimes \mathbb{R}^k$ on a l'équivalence suivante :

1. $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$;
2. il existe un unique champ de vecteurs polarisé $X_H \in H(M, \mathfrak{F})$ tel que :

$$i(X_H)\,\theta = \zeta(X_H) = -dH$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Les éléments de $\mathfrak{H}(M,\mathfrak{F})$ sont appelés hamiltoniens polarisés, et X_H est appelé champ de vecteurs hamiltonien polarisé associé à l'hamiltonien polarisé H.
Ainsi, on a une application

$$\mu : \mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow H(M,\mathfrak{F})$$

définie par :

$$\mu\,(H) = X_H$$

et, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H(M,\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\zeta} & \mathscr{A}^1(M)\otimes\mathbb{R}^k \\ \nwarrow & & \nearrow \\ \mu & \mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}) & -d \end{array}$$

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

Soient $H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ et X_H , X_K les champs de vecteurs hamiltoniens polarisés associés respectivement aux hamiltoniens polarisés H et K. Le crochet de Lie $[X_H, X_K]$ est un champ de vecteurs hamiltonien polarisé qui est associé à l'hamiltonien polarisé $\{H, K\}$ défini par :

$$\{H, K\} = \{H, K\}^p \otimes v_p = -\theta^p (X_H, X_K) \otimes v_p$$

i.e. :

$$[X_H, X_K] = -X_{\{H,K\}}.$$

La correspondance $(H, K) \longmapsto \{H, K\}$ de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \times \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$, confère à $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ une structure d'algèbre de Lie réelle.

$\{H, K\}$est appelée crochet de Poisson vectoriel polarisé

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

L'algèbre de Lie $(\mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}),\{,\})$ est dite structure de Poisson vectorielle polarisée subordonnée à la structure symplectique vectorielle polarisée (θ, E).

On a les propriétés suivantes :

1. $H(M,\mathfrak{F})$ est une algèbre de Lie réelle ;
2. $\left[H^0(M,\mathfrak{F}), H^0(M,\mathfrak{F})\right] \subset H(M,\mathfrak{F})$;
3. $H(M,\mathfrak{F})$ est un idéal de $H^0(M,\mathfrak{F})$.
4. la suite d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}) \xrightarrow{-\mu} H(M,\mathfrak{F}) \hookrightarrow H^0(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(M,\mathfrak{F}) / H(M$$

est exacte.

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

Par rapport au système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, le crochet $\{H, K\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\{H, K\}^p \otimes v_p &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H^p}{\partial y^i} \frac{\partial K^p}{\partial x^{pi}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} \frac{\partial K^p}{\partial y^i} \right) v_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H^p}{\partial y^i} \frac{\partial K^p}{\partial x^{pi}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} \frac{\partial K^p}{\partial y^i} \right) v_p \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \overline{\omega}^p \right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{pi}} \otimes \overline{\omega}^p \right) \left(dH^l \otimes v_r, dK^r \otimes \overline{e}_r \right) \otimes v_p.
\end{aligned}$$

$(\overline{\omega}^p)_{1\leq p\leq k}$ étant la base duale de la base canonique $(v_p)_{1\leq p\leq k}$de $\mathbb{R}^k$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soient M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'une S.S.V.P. $(\theta = \theta^p \otimes \overline{e}_p, E)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$. X est dit **basiquement intégrable** s'il possède n **intégrales premières basiques** pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, définies sur toute la variété M et indépendantes en tout point.

Considérons l'espace $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de la structure S.S.V.P. standard.
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ et $a = 1, \ldots, k$, Alors Le champ de vecteurs hamiltonien polarisé associé à l'hamiltonien vectoriel polarisé

$$H_a^i = -\delta_a^r y^i \otimes v_r = -y^i \otimes v_a$$

est donné par :

$$X_{H_a^i} = \frac{\partial}{\partial x^{ai}}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Pour tout $i = 1, ..., n$, les fonctions $f_i = y^i$ $(i = 1, ..., n)$ sont des intégrales premières basiques de $X_{H^{pi}}$ indépendantes en tout point de M, donc, ce champ de vecteurs est basiquement intégrable.

Soient $f^1, \cdots, f^n \in \mathscr{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$, indépendantes en tout point de M. Alors, $\forall x_o \in M, \exists U \in \mathscr{O}(x_o, M), \left(f^{pi} \in \mathscr{D}(U, \mathbb{R})\right)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ telles que $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ soit un système de coordonnées locales adapté à la structure S.S.V.P. $(\theta = \theta^p \otimes v_p, E)$, i.e. :

$$\theta^P_{|U} = \sum_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i$$

et $\mathfrak{F}_{|U}$ soit défini par les équations : $df^1 = \cdots = df^n = 0$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soient X un champ de vecteurs basiquement intégrable et $f^1, \cdots, f^n$ des intégrales premières de X, basiques et indépendantes en tout point de M. Alors X est un champ de vecteurs tangent au feuilletage $\mathfrak{F}$; en effet, la relation

$$(X_x(f^p) = 0 \forall p = 1, \ldots, k) \Longrightarrow X_x \in \ker df_x^1 \cap \ldots \cap \ker df_x^n$$

donc $X \in \Gamma(E)$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soit $H \in \mathfrak{H}(M,\mathfrak{F})$ un hamiltonienne vectoriel polarisé et X_H le système hamiltonien associé **supposé basiquement intégrable**. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1\leq p\leq k;1\leq i\leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H = b^p(y^1,\dots,y^n)\otimes \overline{e}_p \in \mathscr{A}_b^0(M,\mathfrak{F})\otimes\mathbb{R}^k$$

et

$$X_H = -\sum_{p,s}\frac{\partial b^p}{\partial y^s}\frac{\partial}{\partial x^{ps}} = -\sum_{p,s}\frac{\partial H^p}{\partial y^s}(y^1,\dots,y^n)\frac{\partial}{\partial x^{ps}}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soit $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ un hamiltonien vectoriel polarisé et X_H le champ de vecteurs hamiltonien vectoriel polarisé associé **qu'on suppose basiquement intégrable**. Alors X_H est une combinaison linéaire sur M des champs de vecteurs $X^p_{f^i}(1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire de X_H .

En effet on a :

$$H^p = \widetilde{H}^p \circ (f^1, ..., f^n)$$

où $\widetilde{H}^p$ est une fonction différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme

$$\begin{aligned} \zeta_q \left(\sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, ..., f^n) X^p_{f^i} \right) &= \sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, ..., f^n) . \varsigma_q \left(X^p_{f^i} \right) \\ &= -\sum_i \frac{\partial \widetilde{H}^q}{\partial f^i}(f^1, ..., f^n) df^i \\ &= -d\widetilde{H}^q_{(f^1, ..., f^n)} \end{aligned}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

on déduit que

$$X_H = \sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, ..., f^n) X^p_{f^i}$$

Les coefficients en question sont

$$\frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, ..., f^n),$$

ils sont constants sur chaque arc de trajectoire de X_H contenu dans U, puisque $f^1, \cdots, f^n$ sont des intégrales premières de X_H . Comme les trajectoires de X_H **sont connexes**, le champ de vecteurs X_H est donc une combinaison linéaire sur M des $X^p_{f^i}$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X_H.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Les champs de vecteurs $X^p_{f^i}(1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$ engendrent un champ de directions différentiable complètement intégrable puisque $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ pour tous $p, q = 1, ..., k$ et $i, j = 1, ..., n$. Chaque trajectoire de X_H (ou de $X^p_{f^i}$ est entièrement contenue dans une de ces feuilles puisque X_H et des $X^p_{f^i}$ sont tangents à chaque feuille.
On déduit :
Les champs de vecteurs $X^p_{f^i}(1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$ engendrent le sous-fibré E subordonné à la structure symplectique vectorielle polarisée.

Le nombre maximum de fonctions basiques indépendantes sur M est $n = \mathrm{codim} F$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On suppose que X_H est basiquement intégrable. Alors, localement au voisinage de chaque point a de M, la courbe intégrale de X_H passant par ce point peut être déterminée par quadratures.

Soient $a \in M$, $U \in \mathscr{O}(a, M)$, $f^{pi} \in \mathscr{D}(U, \mathbb{R})$, telles que $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ soit S.C.L.A. à la SSPV, i.e. :

$$\theta^P_{|U} = \sum_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i \ ; \ \mathfrak{F}_{|U} \mid df^1 = \cdots = df^n = 0$$

Le système différentielle du champ de vecteurs X_H s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} & = & \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} \\ \frac{df^{pi}}{dt} & = & -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} \end{cases}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Comme

$$H^p = F_j\left(f^1, ..., f^n\right) f^{pj} + G^p\left(f^1, ..., f^n\right)$$

on déduit

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = F_i\left(f^1, ..., f^n\right)$$

Les fonctions f^i sont des intégrales premières de X_H donc

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = X_H\left(f^1, ..., f^n\right)$$

par suite $F_i\left(f^1, ..., f^n\right) = 0$, et, donc, $H^p = G^p\left(f^1, ..., f^n\right)$ pour tout p. Ainsi

$$\frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} = -\frac{\partial G^p}{\partial f^i}\left(f^1, ..., f^n\right)$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Par suite la courbe intégrale de X_H passant par a, pour la valeur 0 du paramètre t, s'exprime au moyen des coordonnés locales $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1\leq p\leq k; 1\leq i\leq n}$ par :

$$\begin{cases} f^i(t) & = & f^i(a) \\ f^{pi}(t) & = & f^{pi}(a) - t\frac{\partial G^p}{\partial f^i}\left(f^1(a), ..., f^n(a)\right) \end{cases}$$

La détermination de cette courbe intégrale ne fait intervenir que des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Il est bien connu que tout sous-groupe discret G de $\mathbb{R}^m$ est de la forme

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{s} n_i e_i, \mid (n_1, ..., n_s) \in \mathbb{Z}^s \right\}$$

où $e_1, ..., e_s \in \mathbb{R}^m$ linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$.
En complétant $e_1, ..., e_s$ en une base $(e_1, ..., e_s, ..., e_m)$, on a :

$$\mathbb{R}^{\mathrm{m}}/G \simeq \mathbb{T}^{\mathrm{s}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{m-s}}$$

$\mathbb{T}^s$ est le tore de dimension s.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On conviendra de paramétrer le tore $\mathbb{T}^{s}$ en l'identifiant au quotient $\mathbb{T}^{s} = \mathbb{R}^{s}/2\pi\mathbb{Z}^{s}$.
Soit $p : \mathbb{R}^{s} \longrightarrow \mathbb{T}^{s}$ la projection canonique. Chaque élément $\left(\gamma^{1}, \cdots, \gamma^{s}\right)$ de $\mathbb{R}^{s}$ définit un élément $p\left(\gamma^{1}, \cdots, \gamma^{s}\right)$ du tore $\mathbb{T}^{s}$, on dira à ce propos que $\left(\gamma^{1}, \cdots, \gamma^{s}\right)$ est **un système de coordonnées angulaires** de l'élément $p\left(\gamma^{1}, \cdots, \gamma^{s}\right)$.
Les fonctions coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^{s}$ sont appelées **variables angulaires** sur le tore $\mathbb{T}^{s}$.
Soient

$$f = \left(f^{1}, \cdots, f^{n}\right) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$$

$f^{1}, \cdots, f^{n} \in \mathscr{A}_{b}^{0}\left(M, \mathfrak{F}\right)$, $a = \left(a_{1}, ..., a_{n}\right) \in \mathbb{R}^{n}$ une valeur régulière de f et N **une composante connexe** de $f^{-1}(a)$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et les restrictions à cette sous variété des nk champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ qui sont linéairement indépendants en chaque point de M, sont tangents à N et l'on a

$$\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$$

pour tous $i, j = 1, ..., n$ et $p, q = 1, ..., k$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Supposons que les champs de vecteurs

$$X^p_{f^i|N}$$

sont complets. On dénote par φ^{pi} le flot de $X^p_{f^i|N}$.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^{\mathrm{nk}} \times N \longrightarrow N$ définie par :

$$\Phi(t,x) = \Phi_t(x) = \prod_{p,i} \varphi^{pi}_{t_{pi}}(x)$$

$t = (t_{pi})_{1 \le p \le k, 1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^{\mathrm{nk}}$ et $x \in N$.

L'application Φ définit une action transitive et localement libre et N est difféomorphe $T^{\mathrm{s}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{nk-s}}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de $G_x = \{ t \in \mathbb{R}^{nk} \mid \Phi(t,x) = x \}$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

$\left[X_{f^i}^p, X_{f^j}^q\right] = 0 \Longrightarrow \varphi^{pi} \circ \varphi^{qj} = \varphi^{qj} \circ \varphi^{pi}$, par conséquent $\Phi_0 = Id_N$ et $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$, $\forall t, t' \in \mathbb{R}^{nk}$ et Φ définit une action différentiable du groupe abélien $\mathbb{R}^{nk}$ sur N. Pour tout $x \in N$, l'application $g_x : t \longmapsto \Phi_t(x)$ est de rang nk. Ainsi l'action Φ est **localement libr**e, c'est à dire le sous groupe d'isotropie

$$G_x = \left\{ t \in \mathbb{R}^{nk} \mid \Phi(t, x) = x \right\}$$

de chaque point x de N est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{nk}$. L'orbite $\mathscr{O}(x)$ de chaque point $x \in N$, est à la fois ouverte et fermée de N. Comme N est connexe on déduit que $O(x) = N$ pour tout $x \in N$; ainsi, l'action Φ est transitive ; par conséquent N est difféomorphe à $\mathbb{R}^{\mathrm{nk}}/G_x \simeq T^{\mathrm{s}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{nk-s}}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de G_x.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On suppose que les fonctions basiques $f^1, \ldots, f^n$ sont indépendantes en tout point de M.

Proposition Soient $a \in M$ et N la composante connexe de $f^{-1}(f(a))$ contenant le point a. Si N est compacte, alors N est une sous-variété lagrangienne fermée de M qui est invariante par le flot du champ de vecteurs X_H . De plus, il existe un difféomorphisme du tore T^{nk} sur N définissant un système de variables angulaires $\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right)$ au moyen duquel le flot φ de $X_{H|N}$ s'exprime par

$$\varphi_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 t, \ldots, \Psi^{nk} + \omega^{nk} t\right)$$

$\omega^1, \ldots, \omega^{nk}$ étant des constantes. On dira que ce flot est quasi-périodique.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Comme $f(a)$ est une valeur régulière de f , on déduit de ce qui précède que N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et que les champs de vecteurs $X^p_{f^i}(1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$, sont tangents à cette sous-variété. N étant compacte, les champs de vecteurs $X^p_{f^i|N}$ sont complets. Comme N est difféomorphe à $\mathbb{T}^{\mathrm{s}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{nk-s}}$, on déduit que $s = nk$. Il en résulte que le sous-groupe d'isotropie G_a de a, pour l'action Φ, est engendré par nk éléments $e_1, \ldots, e_{nk}$ de $\mathbb{R}^{\mathrm{nk}}$ formant une base de cet espace.
Considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}^{\mathrm{nk}} \longrightarrow N,$$

définie par :

$$\Psi\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{nk} \Psi^s e'_s, a\right)$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

pour tout $\left(\Psi^1,\ldots,\Psi^{nk}\right)\in\mathbb{R}^{nk}$. D'après la définition même de Φ, le flot ϕ^{pi} de $X^p_{f^i|N}$ en tout point $y\in N$, est donné par :

$$\phi^{pi}_t(y)=\Phi(te_{pi},y)$$

où $(e_{pi})_{(1\leq p\leq k;1\leq i\leq n)}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{nk}$. L'expression de ce flot au moyen des variables $\Psi^1,\ldots,\Psi^{nk}$ est donné par :

$$\phi^{pi}_t\left(\Psi^1,\ldots,\Psi^{nk}\right)=\left(\Psi^1+t\omega^1_{p,i},\ldots,\Psi^{nk}+t\omega^{nk}_{p,i}\right)$$

où $\left(\frac{\omega^1_{p,i}}{2\pi},\cdots,\frac{\omega^{nk}_{p,i}}{2\pi}\right)$ sont les composantes de e_{pi} dans la base $e'_1,\ldots,e'_{nk}$ de $\mathbb{R}^{nk}$.
On sait que tout point de M possède un voisinage ouvert sur lequel on a :~

$$H^p=\widetilde{H}^p\circ\left(f^1,\ldots,f^n\right),$$

où $\widetilde{H}^p$ est une fonction numérique différentiable définie sur un

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Le champ de vecteurs X_H a pour expression locale :

$$X_H = \sum_{p,i} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i} \left(f^1, ..., f^n\right) X^p_{f^i} = \sum_{p,i} A^{pi} X^p_{f^i}$$

où $A^{pi} = \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i} \left(f^1, ..., f^n\right)$. En utilisant la connexité de N, on voit que les coefficients A^{pi} sont constants sur N. Le flot de X_H s'exprime donc, au moyen des variables angulaires $\Psi^1, ..., \Psi^{nk}$, selon

$$\phi_t\left(\Psi^1, ..., \Psi^{\mathrm{nk}}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 \mathrm{t}, ..., \Psi^{\mathrm{nk}} + \omega^{\mathrm{nk}} \mathrm{t}\right)$$

avec $\omega^s = \sum_{p,i} A^{pi} \omega^s_{pi}$, pour tout $s = 1, ..., nk$.

Algèbres de Lie $k-$symplectiques polarisées

Soit G un groupe de Lie de dimension $n(k+1)$ d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, muni d'une structure $k-$symplectique polarisée (θ, E) invariante à gauche i.e., pour tous $g, x \in G$ on a :

$$\begin{cases} L_g^* \theta & = \theta \\ (L_g)_* E_x & = E_{gx} \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{F}$ le feuilletage invariant à gauche défini par le sous-fibré E. La feuille H de $\mathfrak{F}$ passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe de G de codimension n. Désignons par $\mathscr{H}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe H. On a donc

$$\theta^p(X, Y) = 0 \; \forall X, Y \in \mathscr{H}$$

avec la notation $\theta_e^p \equiv \theta^p$.

Algèbres de Lie $k-$symplectiques polarisées

Réciproquement, soit $\mathscr{H}$ une sous-algèbre de $\mathscr{G}$. Pour tout $x \in G$ on pose

$$P_x = \{X_x \in T_a G \mid \eta(X_x) \in \mathscr{H}\}$$

η étant la 1-forme de Maurer-Cartan de G. Le champ d'éléments de contact P, ainsi construit, définit bien un sous-fibré intégrable de TG. La feuille $\mathscr{H}$ du feuilletage $\mathfrak{F}$ associé au sous-fibré P passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe H de G d'algèbre de Lie $\mathscr{H}$ tel que les orbites de H agissant par translations à droite dans G soient les feuilles de $\mathfrak{F}$.

Algèbres de Lie $k-$symplectiques polarisées

Définition Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\theta \in \bigwedge_2(\mathscr{G}, V)$ fermée et $\mathscr{H}$ une sous- algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ de codimension n. On dit que $(\theta; \mathscr{H})$ est une structure k-symplectique sur $\mathscr{G}$ si

1. θ est non dégénéré ;
2. $\theta(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathscr{H}$.

Références : Notes historiques

Patrick Iglesias-Zemmour
Aperçu des origines de la géométrie symplectique
2002

C.M. Marles
Aux sources de la géométrie symplectique : les mémoires de Lagrange et de Poisson sur la méthode de variation des constantes
Académie des sciences. Sciences mécaniques et informatiques, 29 janvier 2008

C.M. Marles
Hommage à Jean Marie Souriau
SMF – Gazette – 133, juillet 2012

B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math. 69 (1959) 119–132.

Références : Notes historiques

J.M. Souriau
Structure des systèmes dynamiques
DUNOD PARIS 1970.

J.M. Souriau
Géométrie symplectique
Vidéo sur Youtube.Références : Notes historiques Références : Notes historiques

A.Weinstein
symplectic geometry
BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 5, Number 1, July 1981

N. WoodhouseA.
Geometric quantization
Clarendon Press Oxford 1980.