N°
d'ordre

Zouhair SAASSAI

Géométrie Riemannienne des
Variétés de Poisson

Année Initiale du dpt (P, C, B, G, I, M)

UNIVERSITÉ CADI AYYAD
FACULTÉ DES SCIENCES
SEMLALIA - MARRAKECH

N° d'ordre :

****

THÈSE

présentée à la Faculté pour obtenir le grade de :

Docteur

CED : Sciences et Techniques

Spécialité : Mathématiques

TITRE

Géométrie Riemannienne des Variétés de Poisson

par :

Zouhair SAASSAI

(Master : Mathématiques)

Directeur de Thèse

Mohamed BOUCETTA (FSTG)

Géométrie Riemannienne des Variétés de Poisson

Zouhair SAASSAI

Table des matières

Inroduction

Le point de départ de cette thèse est l'étude des interactions entre la géométrie riemannienne et la géométrie de Poisson telles qu'elles apparaissent dans [36], [38], [39], [40], [16]. Plus précisément, on s'est intéressé aux deux situations suivantes relativement indépendantes.

Partie I

Dans la première partie de cette thèse, on s'est intéressé à une classe de structures de Poisson définies naturellement sur le fibré cotangent de toute variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne. On appellera un tel triplet variété de Riemann-Poisson.
Étant donné une variété de Riemann-Poisson (M, π, g), le tenseur de Poisson π définit sur T^*M une structure d'algèbroïde de Lie dont l'application d'ancrage est définie par

$$\beta(\pi_\sharp(\alpha)) = \pi(\alpha, \beta) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Omega^1(M),$$

et dont le crochet de Lie est donné par

$$[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)).$$

Il est connu (voir, e.g., [35]) que sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ d'un algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est définie une structure de Poisson (linéaire). Notons Π (resp. Π_0) le tenseur de Poisson défini sur TM (resp. T^*M), dual de l'algébroïde de Lie $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ (resp. $(TM, [\ ,\ ], \mathrm{Id}_{TM})$ [1]). Grâce à la métrique g, on peut identifier le fibré tangent et le fibré cotangent via l'isomorphisme musical $\#_g^{-1} : TM \to T^*M$. Ce qui permet de définir un tenseur de Poisson Π^g sur T^*M, en prenant Π^g comme étant l'image de Π par $\#_g^{-1}$. Par ailleurs, le (1,1)-tenseur $J = \pi_\sharp \circ \#_g^{-1}$ reliant π à

1. Ici $[\ ,\ ]$ désigne le crochet de Lie usuel des champs de vecteurs et Id_{TM} dénote l'application identique de TM.

g définit un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M qui est de Poisson si et seulement si la torsion de Nuijenhuis de J est nulle (cf. [17]) ; dans ce cas, Π_J est compatible [2] avec Π_0. On est donc devant la situation suivante. Sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson canonique Π_0 ; le champ de bivecteurs Π_J ; et le tenseur de Poisson Π^g. On peut se poser alors les deux questions naturelles suivantes :

1. *Quand Π^g est compatible avec Π_0 ?*
2. *Quelle relation y-a-t-il entre Π^g et Π_J ?*

On démontre le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Π^g *est compatible avec* Π_0.
2) $\Pi^g = \Pi_J$.
3) π *est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de* g.

Si de plus π est symplectique alors l'une des conditions 1)-3) *est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nuijenhuis.*

Une conséquence immédiate de ce résultat est l'existence sur le fibré cotangent de toute variété kählérienne d'une structure de Poisson compatible avec sa structure de Poisson canonique.
Dans le cas d'un groupe de Lie connexe G muni d'une métrique riemannienne g et d'une structure de Poisson π, invariantes à gauche, on exprime grâce au théorème 0.1 et sa preuve, la condition $\nabla\pi = 0$ au niveau de l'algèbre de Lie de G. Ceci nous permet d'établir le théorème suivant.

Théorème 0.2. *Si π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose en somme directe (d'espaces vectoriels), $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, d'une sous-algèbre de Lie kählérienne $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$. En outre, Il existe deux représentations d'algèbres de Lie $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{k})$ telles que, pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ sont antisymétriques, respectivement, par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec I.*

Partie II

Le problème mathématique traité dans la deuxième partie de cette thèse trouve son origine dans un travail récent d'Eli Hawkins [15, 16]. Animé par des motivations physiques, Hawkins a étudié les déformations noncommutatives de l'algèbre

2. On rappelle que deux tenseurs de Poisson σ et σ' sont dits *compatibles* si $\sigma + \sigma'$ est aussi un tenseur de Poisson.

extérieure des formes différentielles d'une variété M. Il a montré que s'il existe une déformation noncommutative de $\Omega^*(M)$, alors il existe sur $\Omega^*(M)$ un crochet de Poisson gradué différentiel $\{\,,\,\}$ de degré 0, appelé par Hawkins *crochet de Poisson généralisé*. Ce dernier est entièrement déterminé par un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante sans torsion et plate $\mathcal{D}$ via :

$$\pi(df, dg) := \{f, g\}\,; \quad \mathcal{D}_{df}\alpha := \{f, \alpha\}\,. \tag{1}$$

Inversement, étant donné un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante sans torsion ni courbure $\mathcal{D}$, les formules (1) s'étendent pour définir sur $\Omega^*(M)$ un unique crochet $\{\,,\,\}$ ayant toutes les propriétés d'un crochet de Poisson gradué différentiel de degré 0, à l'exception de l'identité de Jacobi graduée. Hawkins a mis en évidence un (2,3)-tenseur $\mathcal{M}$ vérifiant

$$\mathcal{M}(df, \alpha, \beta) = \{f, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{f, \alpha\}, \beta\} - \{\alpha, \{f, \beta\}\}\,,$$

et a montré que l'identité de Jacobi est équivalente à $\mathcal{M}$ identiquement nul. Le tenseur $\mathcal{M}$ est appelé *métacourbure* de $\mathcal{D}$.

Sur un autre registre, Hawkins a montré que, sur une variété riemannienne (M, g), si une déformation noncommutative de l'algèbre $\Omega^*(M)$ provienne d'une déformation du triplet spectral [3] décrivant la structure riemannienne, alors le tenseur de Poisson π (associé à la déformation) et la métrique riemannienne g satisfont les conditions de compatibilité suivantes :

(H_1) *Platitude* : la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée à (π, g) est plate ;

(H_2) *Métaplatitude* : la métacourbure de $\mathcal{D}$ est identiquement nulle ;

(H_3) *Unimodularité* : le tenseur de Poisson π est compatible avec le volume riemannien μ, i.e.,

$$d(i_\pi \mu) = 0.$$

La connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π, g) est l'analogue de la connexion de Levi-Civita classique ; elle a été introduite dans [36].
Le résultat pricipal de Hawkins est

Théorème 0.3 (Hawkins)**.** *Soit (M, π, g) un triplet vérifiant (H_1)-(H_3). Si M est compacte alors, au voisinage de tout point régulier de M de rang $2r$, il existe une famille libre, $\{X_1, \ldots, X_{2r}\}$, de champs de Killing qui commutent deux à deux et tels que*

$$\pi = \sum_{i<j} a_{ij}\, X_i \wedge X_j\,,$$

où la matrice (a_{ij}) est constante et inversible.

3. Voir, e.g., [34] pour une discussion détaillée au sujet de triplets spectraux.

Bien que la conclusion de ce théorème soit simple, sa démonstration est par contre difficile. Selon Hawkins, la raison derrière la complexité de la preuve est le fait que la compacité entraîne des simplifications considérables, mais de manière indirecte.

D'un autre côté, Boucetta a donné dans [37] une méthode de construction d'une large classe de triplets (M, π, g) vérifiant (H_1)-(H_3) ou (H_1)-(H_2). Voici une brève description de cette méthode. Soit $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(M)$ une action d'une algèbre de Lie de dimension finie et $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ une solution de l'équation de Yang-Baxter classique. Notons π^r le tenseur de Poisson sur M image de r par ζ, i.e., $\pi^r = \zeta(r)$. Écrivons $r = \sum_{i<j} a_{ij}\, u_i \wedge u_j$ où $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, et posons, pour toutes 1-formes α, β,

$$\mathcal{D}^r_\alpha \beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha(\zeta(u_i)) \mathcal{L}_{\zeta(u_j)} \beta \,. \tag{2}$$

Théorème 0.4 (Boucetta)**.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(a) *L'application $\mathcal{D}^r : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ dépend uniquement de r et de ζ et définit une connexion contravariante sans torsion et plate associée à π^r.*

(b) *Si g est une métrique riemannienne sur M telle que, pour tout $u \in Im\, r$, $\zeta(u)$ est un champ de Killing, alors $\mathcal{D}^r$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associé à (π^r, g).*

(c) *Si les sous-algèbres d'isotropie de la restriction de ζ à $\mathrm{Im}\, r$ sont triviales alors la métacourbure de $\mathcal{D}^r$ est nulle.*

En regardant de plus près les Théorèmes 0.3-0.4 et leurs démonstrations, on a fait les remarques importantes suivantes :

1. Le théorème de Hawkins s'exprime en disant que $\pi = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$ avec $\mathfrak{g}$ est abélienne et ζ est libre. De plus, comme $\mathfrak{g}$ est abélienne, π est $\mathcal{D}$-parallèle, i.e., $\mathcal{D}\pi = 0$. Dans [38], Boucetta a étudié les variétés de Riemann-Poisson (M, π, g) vérifiant $\mathcal{D}\pi = 0$ et a montré alors que, pour ces variétés, $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion (*cf.* [46]).
2. Si (M, π, g) est une variété de Riemann-Poisson dont la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion plate alors il existe sur l'ouvert régulier de π un $(2, 2)$-tenseur $\mathbf{T}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathbf{T}$.
3. Sous les hypothèses du Théorème 0.4-(c), $\mathcal{D}^r$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T}$ est nul.

En vu de ces remarques, il est alors naturel de se poser le problème suivant.

Problème 1. *Étant donné une variété de Riemann-Poisson (M, π, g) dont la connexion de Levi-Civita contravariante est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion plate et telle que $\mathbf{T} = 0$, le tenseur de Poisson π est-il donné localement par une solution de l'équation de Yang-Baxter classique et une action d'une algèbre de Lie de champs de Killing ?*

Le théorème suivant, résultat principal de la deuxième partie de cette thèse, répond positivement à cette question dans un cadre plus général.

Théorème 0.5. *Soit* $(M, \pi, \mathcal{D})$ *une variété de Poisson munie d'une connexion contravariante sans torsion ni courbure.*

(1) *Si* $\mathcal{D}$ *est une* $\mathcal{F}^{reg}$*-connexion et* $\mathbf{T} = 0$ *alors, pour tout point régulier* x_0 *de rang* $2r$*, il existe une action libre* $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$ *d'une algèbre de Lie réelle* $\mathfrak{g}$ *de dimension* $2r$ *sur un voisinage ouvert* U *de* x_0*, et une solution inversible* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *de l'équation de Yang-Baxter classique telles que* $\pi = \zeta(r)$ *et* $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$.

(2) *Si de plus* $\mathcal{D}$ *est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à* π *et à une métrique riemannienne* g*, alors les champs fondamentaux de* ζ *sont de Killing.*

On va donner maintenant l'état du problème étudié par Hawkins après le résultat ci-dessus. Il apparaît et dans le travail de Hawkins et dans le travail qu'on a fait que l'hypothèse (H_3) n'est pas très importante. Donc, le problème mathématique important issu de la déformation noncommutative des triplets spectraux est celui de la caractérisation des variétés de Riemann-Poisson (M, π, g) vérifiant (H_1) et (H_2). Le Théorème 0.5 donne une caractérisation locale d'une classe particulière de ces variétés, à savoir, celle des variétés de Riemann-Poisson dont la connexion de Levi-Civita contravariante est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et dont $\mathbf{T}$ est nul. À noter, compte tenu des remarques (1)-(3), que sous les hypothèses du Théorème 0.3, $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Autrement dit, la classe des variétés de Riemann-Poisson étudiée dans le Théorème 0.3 est une sous-classe de celle qu'on a étudiée. Le problème général reste encore ouvert et constitue un bon thème de recherche futur. Il faut signaler à ce niveau le travail fait par Amine Bahayou [2]. On espère aussi utiliser les méthodes développées dans cette thèse et celles développées par Hawkins pour trouver une démonstration simple du Théorème 0.3.

Cette thèse consiste en trois chapitres. Le premier chapitre est une introduction succincte à la géométrie de Poisson. On y donne les notions de base ainsi que quelques résultats fondamentaux en géométrie de Poisson, notamment le théorème de Weinstein, le feuilletage symplectique, le calcul de Poisson : algébroïde de Lie sur le fibré cotangent d'une variété de Poisson, connexions contravariante, etc. Le deuxième chapitre est consacré aux démonstrations des Théorème 0.1 et 0.2. Dans le troisième chapitre, on expose de manière détaillée la notion de métacourbure, on définit le tenseur $\mathbf{T}$ et on calcule ces deux tenseurs. Chemin faisant, on établit quelques lemmes importants préparant la preuve du Théorème 0.5.

Notations

Toutes les structures qui apparaissent dans ce texte (variétés, fibrés, tenseurs, etc...) sont supposées de classe C^∞.

Au long de ce texte nous utilisons les notations suivantes

M	variété lisse de dimension d
TM	fibré tangent de M
T^*M	fibré cotangent de M
$\mathfrak{X}^k(M) := \Gamma(\bigwedge^k TM)$	espace des champs de k-vecteurs sur M
$\Omega^k(M) := \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$	espace des k-formes différentielles sur M
$\mathfrak{X}^0(M) = \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$	espace des fonctions lisses sur M à valeurs réelles
$\mathfrak{X}^*(M) := \bigoplus_{k=0}^d \mathfrak{X}^k(M)$	espace des champs de multivecteurs sur M
$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^d \Omega^k(M)$	espace des formes différentielles sur M
$\lvert\omega\rvert$	degré d'une forme différentielle ω
$d\omega$	différentielle extérieure de ω
$X(f) = X \cdot f = df(X)$	différentielle de f appliquée sur X
F_*	application linéaire tangente de F
i_P	produit intérieur par P
$\mathcal{L}_X$	dérivée de Lie dans la direction de X
Φ_X^t	flot local de X
X_f	champ hamiltonien d'une fonction f
$\displaystyle\oint_{i_1,\ldots,i_s}$	somme circulaire sur $i_1, \ldots, i_s$

Rappelons également quelques formules utiles du calcul différentiel.

1. *Formule de Cartan* pour la différentielle : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout

$X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \,, \end{aligned} \tag{3}$$

où le chapeau $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant est omis.

2. *Dérivée de Lie* : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_n) &= X \cdot \omega(X_1, \dots, X_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_n) \,, \end{aligned} \tag{4}$$

et pour tout $P \in \mathfrak{X}^n(M)$, et tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= X \cdot P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_1, \dots, \mathcal{L}_X \alpha_i, \dots, \alpha_n) \,. \end{aligned} \tag{5}$$

3. *Formule de Cartan* pour la dérivée de Lie : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega) \,. \tag{6}$$

Chapitre 1

Introduction à la géométrie de Poisson

La géométrie de Poisson trouve son origine dans la formulation mathématique de la mécanique Hamiltonienne. Bien que les structures de Poisson remontent au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, notamment, avec les travaux de Poisson et Hamilton sur l'équation de mouvement, et ceux de Sophus Lie sur la géométrie des E.D.P, la théorie mathématique des variétés de Poisson n'a fait ses débuts qu'aux années quatre-vingts avec les travaux de Lichnerowizc, Weinstein, etc. Depuis, la théorie s'est développée rapidement, stimulée par des connexions avec d'autres domaines de mathématiques et de physique mathématique, y compris la géométrie différentielle, la théorie de Lie, la théorie de quantization, la géométrie noncommutative, la théorie des representations, les groupes quantiques, les systèmes intégrables, la mécanique classique/quantique, la théorie des cordes, etc.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le lecteur au domaine de la géométrie de Poisson, et ce, en présentant quelques aspects fondamentaux du sujet. Pour un traitement détaillé du thème le lecteur intéressé pourra consulter [13, 32, 25]. Le lecteur désirant avoir un aperçu d'ensemble rapide sur la géométrie de Poisson pourra se référer à [11].

Dans la première section, on définit ce qu'est une variété de Poisson et on explicite quelques exemples. La deuxième section porte sur le théorème de Weinstein, qui permet de décrire l'aspect local d'une structure de Poisson. Il permet aussi de montrer que toute variété de Poisson est une réunion disjointe de sous-variétés symplectiques immergées dites feuilles symplectiques. La troisième section est consacrée au calcul de Poisson. On y verra que le fibré cotangent de toute variété de Poisson jouit naturellement d'une structure d'algébroïde de Lie, ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan. La dernière section porte sur les structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie.

1.1 Crochets et tenseurs de Poisson

Définition 1.1. Une ***structure de Poisson*** sur une variété lisse M, est la donnée d'un ***crochet de Poisson*** sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M, c'est-à-dire une application

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)\,,\ \text{notée } (f,g) \mapsto \{f,g\}\,,$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $\{\ ,\ \}$ est un crochet de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$: elle est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique

$$\{f,g\} = -\{g,f\}\,,$$

et vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0\,.$$

(b) Elle vérifie la règle de Leibniz :

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}\,.$$

Munie d'une telle structure, M est dite ***variété de Poisson***.

Remarque 1.2. Par antisymétrie, le crochet de Poisson satisfait également la règle de Leibniz suivante :

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}\,.$$

Exemple 1.3 (STRUCTURES DE POISSON TRIVIALES)**.** Toute variété lisse M peut être équipée d'une structure de Poisson triviale via : $\{f,g\} = 0\,, \forall\, f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Bien entendu, il existe des variétés de Poisson non triviales, voici quelques exemples.

Exemple 1.4 (VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES)**.** Une *variété symplectique* est une variété lisse M munie d'une 2-forme différentielle ω fermée (i.e. $d\omega = 0$) et non dégénérée, i.e., l'homomorphisme $\omega^\flat : TM \to T^*M$ qui à $v \mapsto \omega(v,.)$ est un isomorphisme ; on notera $\omega^\sharp$ son inverse.
Soit (M,ω) une variété symplectique. Définissons, pour toutes fonctions f et g sur M,

$$\{f,g\} := \omega(X_f, X_g) = X_f(g) = -X_g(f)\,, \tag{1.1}$$

où X_f est le *champ Hamiltonien* de f relativement à ω défini par

$$X_f = -\omega^\sharp(df)\,. \tag{1.2}$$

L'application $\{\,,\,\}$ ainsi définie est un crochet de Poisson, dit *crochet de Poisson* de la forme symplectique ω. En effet, $\{\,,\,\}$ est clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifie la règle de Leibniz. En utilisant la formule de Cartan (3), on obtient, pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\
&\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g) \\
&= X_f\{g, h\} + X_g\{h, f\} + X_h\{f, g\} \\
&\quad - [X_f, X_g](h) - [X_g, X_h](f) - [X_h, X_f](g) \\
&= X_f\{g, h\} + X_g\{h, f\} + X_h\{f, g\} \\
&\quad - X_f(X_g(h)) + X_g(X_f(h)) - X_g(X_h(f)) \\
&\quad + X_h(X_g(f)) - X_h(X_f(g)) + X_f(X_h(g)) \\
&= -(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) \,. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\{\,,\,\}$ satisfait l'identité de Jacobi ; par fermeture de ω.

Un crochet de Poisson sera dit *symplectique*, s'il est le crochet de Poisson d'une forme symplectique.

L'exemple suivant montre qu'un crochet de Poisson n'est en général pas symplectique.

Exemple 1.5 (Crochet de Poisson classique sur $\mathbb{R}^n$)**.** Prenons $M = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) avec coordonnées globales $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_s)$, où r et s sont des entiers naturels tels que $2r + s = n$, et définissons, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) . \qquad (1.4)$$

▶ **Exercice 1.6.** Vérifier que (1.4) définit un crochet de Poisson et montrer qu'il est symplectique si et seulement si s est nul.

Le crochet ci-dessus est appelé *crochet de Poisson classique*, et a été défini originalement par Siméon Denis Poisson lui-même [47] afin d'étudier l'équation de mouvement dans la mécanique céleste.

Soit $(M, \{\,,\,\})$ une variété de Poisson. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, l'application $g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$, en vertu de la règle de Leibniz. Il existe donc un champ de vecteurs unique X_f tel que, pour toute fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f) \,. \qquad (1.5)$$

Le champ de vecteurs X_f est appelé ***champ hamiltonien***[1] de f. Lorsque $X_f = 0$, on dit que f est une ***fonction de Casimir***.
Par bilinéarité du crochet de Poisson, on a

$$X_{tf+sg} = t\,X_f + s\,X_g\,, \quad (\forall\, t, s \in \mathbb{R})$$

ce qui montre que l'ensemble des champs hamiltoniens est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{X}^1(M)$.
L'identité de Jacobi implique que, pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} \\ &= X_{\{f,g\}}(h)\,, \end{aligned}$$

soit

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}\,. \tag{1.6}$$

En d'autres termes, l'application $f \mapsto X_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\,,\,\})$ dans $\mathfrak{X}^1(M)$. L'espace des champ hamiltoniens est, en particulier, une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}^1(M)$.

D'un autre côté, par antisymétrie du crochet de Poisson et (1.5), on a

$$\{f, g\} = -df(X_g) = dg(X_f)\,,$$

ce qui montre que la valeur en un point $x \in M$ du crochet de Poisson de deux fonctions f et g ne dépend que des valeurs de df et dg en x. Il existe donc une unique section π de $\bigwedge^2 T^*M$ telle que, pour tout $x \in M$,

$$\pi_x(d_x f, d_x g) = \{f, g\}(x) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)\,.$$

En coordonnées locales $(U, x_1, \ldots, x_d)$, π s'écrit

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}\,, \tag{1.7}$$

où $\pi_{ij} = \pi(dx_i, dx_j) = \{x_i, x_j\}$ qui sont lisses sur U. Il en résulte que π est un champ de bivecteurs sur M. De plus, π est l'unique champ de bivecteurs sur M vérifiant

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M). \tag{1.8}$$

1. Notez que si M est symplectique les formules (1.2) et (1.5) définissent le même champ de vecteurs.

On appelle π le *tenseur de Poisson* de la variété de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$.
Le crochet de Poisson est donné donc localement, d'après (1.7) et (1.8), par

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i<j} \pi_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{1.9}$$

et

$$X_f = \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.10}$$

est l'expression locale du champ hamiltonien d'une fonction f.
Inversement, étant donné un champ de bivecteurs π sur une variété M, on peut définir un crochet

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)\,, \quad (f, g) \mapsto \{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)\,,$$

qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifie la règle de Leibniz. En général, $\{\ ,\ \}_\pi$ n'est pas un crochet de Poisson, puisque l'identité de Jacobi peut ne pas être satisfaite, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.7. Prenons $M = \mathbb{R}^3$ et π le champ de bivecteurs défini par $\pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge (\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z})$. Alors, $\{x, y\}_\pi = 1$, $\{x, z\}_\pi = x$, et $\{y, z\}_\pi = 0$. Donc, $\{x, \{y, z\}\}_\pi + \{y, \{z, x\}\}_\pi + \{z, \{x, y\}\}_\pi = 1 \neq 0$.

D'où la définition suivante :

Définition 1.8. On appelle ***tenseur de Poisson*** sur une variété M un champ de bivecteurs π sur M dont le crochet correspondant $\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)$ est de Poisson, c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité de Jacobi.

Exemple 1.9. Avec les notations de Exemple 1.4, si ω est une 2-forme non dégénérée sur une variété M, $\omega^\flat$ réalise une identification entre TM et T^*M, et on peut définir donc un champ de bivecteurs π sur M, en posant, pour tout $\alpha, \beta \in T^*M$:

$$\pi(\alpha, \beta) := \alpha\left(\omega^\sharp(\beta)\right) = -\beta\left(\omega^\sharp(\alpha)\right)\,.$$

D'après (1.3), π est un tenseur de Poisson si et seulement si $d\omega = 0$.

Dans le cas général, il est possible d'exprimer, à l'instar de l'exemple ci-dessus, l'identité de Jacobi convenablement. L'outil principal pour ce faire est le crochet de Schouten-Nijenhuis défini dans le paragraphe suivant.

1.1.1 *Le Crochet de Schouten-Nijenhuis*

Le crochet de Schouten-Nijenhuis est une extension graduée naturelle du crochet de Lie des champs de vecteurs aux champs de multivecteurs, qui permet la caractérisation des tenseurs de Poisson.

Soit M une variété lisse. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le couplage de dualité entre $T_x M$ et $T_x^* M$, c'est-à-dire,

$$\langle a, v\rangle = \langle v, a\rangle := a(v) \quad \forall\, a \in T_x^* M,\ v \in T_x M.$$

Ce couplage s'étend, de manière naturelle, en un couplage de $\Omega^*(M)$ avec $\mathfrak{X}^*(M)$ comme suit : d'abord, si f et g sont deux fonctions sur M, on prend $\langle f, g\rangle$ égal à fg. Ensuite, si α et X sont, respectivement, une 1-forme et un champ de vecteurs sur M, $\langle \alpha, X\rangle$ sera l'élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$ donné, pour tout $x \in M$, par :

$$\langle \alpha, X\rangle(x) = \langle X, \alpha\rangle(x) := \langle \alpha(x), X(x)\rangle\,.$$

Si maintenant $\eta \in \Omega^q(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ avec η et P sont décomposables, i.e.,

$$\eta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q \qquad \text{et} \qquad P = X_1 \wedge \cdots \wedge X_p\,,$$

où $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ et $X_j \in \mathfrak{X}^1(M)$, on définit

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p\rangle := \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q\,, \\ \det\left(\langle \alpha_i, X_j\rangle\right) & \text{si } p = q\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

La valeur en un point $x \in M$ de $\langle \eta, P\rangle$ ne dépend que des valeurs de η et P en x. Comme tout champ de multivecteurs et toutes formes différentielles sur M, s'écrivent localement comme sommes finies de champs de multivecteurs et de formes différentielles décomposables, le couplage (1.11) s'étend, de manière unique, en un couplage $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire sur $\Omega^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M)$ tout entier.
Avec cette définition du couplage $\langle\ ,\ \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \langle \eta, X_1 \wedge \cdots \wedge X_q\rangle &= \eta(X_1, \ldots, X_q)\,, \\ \langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, P\rangle &= P(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\,, \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q$, toutes 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, toute q-forme η et tout champ de p-vecteurs P.
Le couplage $\langle\ ,\ \rangle$ permet de définir, pour tout champ de multivecteurs $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, une application $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, $i_P : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, dite *produit intérieur* par P, en posant pour toute k-forme différentielle ω et tout champ de $(k-p)$-vecteurs R

$$\langle i_P\omega, R\rangle = \langle \omega, P \wedge R\rangle \tag{1.12}$$

si $k \geq p$; $i_P\omega = 0$ sinon. Quand P est un champ de vecteurs X, i_X n'est rien d'autre que le produit intérieur par X usuel.
On vérifie immédiatement que

$$i_{P\wedge Q} = i_Q \circ i_P = (-1)^{pq}\, i_P \circ i_Q \,, \tag{1.13}$$

pour tous champ de multivecteurs P et Q.
Le couplage $\langle\ ,\ \rangle$ permet aussi d'exprimer la dérivée $\mathcal{L}_X\eta$ d'une forme $\eta \in \Omega^q(M)$ par :

$$\langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle = X \cdot \langle \eta, Q\rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle \quad \forall\, Q \in \mathfrak{X}^q(M)\,. \tag{1.14}$$

En vertu de la formule de Cartan (3), on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned}\langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle &= X \cdot \langle \eta, Q\rangle - \langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle \\ &= \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle i_X(d\eta) + d(i_X\eta), Q\rangle \,,\end{aligned}$$

soit

$$\langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle = \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle d(i_X\eta), Q\rangle - \langle d\eta, X\wedge Q\rangle \,. \tag{1.15}$$

L'avantage de cette équation est le fait que son membre droit a toujours un sens quand on remplace X par un champ de multivecteurs quelconque. Ceci permet d'étendre la dérivé de Lie $\mathcal{L}_X Q$ (et donc le crochet de Lie des champs de vecteurs) en un crochet gradué sur les champs de multivecteurs, dit crochet de Schouten-Nijenhuis, de la manière suivante [8, 7] : pour tous $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ et $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$, le *crochet de Schouten-Nijenhuis* de P et Q est le champs de $(p+q-1)$-vecteurs, noté $[P, Q]$, donné par

$$\begin{aligned}\langle \eta, [P, Q]\rangle = (-1)^{(p-1)(q-1)}&\langle d(i_Q\eta), P\rangle \\ &-\langle d(i_P\eta), Q\rangle + (-1)^p \langle d\eta, P\wedge Q\rangle \,,\end{aligned} \tag{1.16}$$

pour toute $(p+q-1)$-forme η.

Théorème 1.10 ([26, 8])**.** *Le crochet de Schouten-Nijenhuis est $\mathbb{R}$-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes :*

(a) *Pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$,*

$$[f, P] = -i_{df} P \,, \qquad [X, P] = \mathcal{L}_X P \,. \tag{1.17}$$

(b) *L'antisymétrie graduée : pour tous $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ et $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$,*

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P] \,. \tag{1.18}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour tous* $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ *et* $R \in \mathfrak{X}^r(M)$,

$$[P\,, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]\,, \tag{1.19}$$

$$[P \wedge Q\,, R] = P \wedge [Q, R] + (-1)^{(r-1)q} [P, R] \wedge Q\,. \tag{1.20}$$

(d) *L'identité de Jacobi graduée :*

$$\begin{aligned}(-1)^{(p-1)(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q, [R, P]]& \\ +(-1)^{(r-1)(q-1)}[R, [P, Q]] = 0\,.&\end{aligned} \tag{1.21}$$

Preuve. La première égalité de (a) est immédiate, la deuxième n'est autre que (1.15) ; quant à (b), elle est évidente.
Pour montrer (c), il suffit de montrer (1.19), puisque (1.20) s'en déduit par anti-symétrie. Si $q = 0$, i.e. $Q = f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, un calcul direct donne

$$[P, f\, R] = (-1)^{(p-1)(r-1)} R \wedge (i_{df} P) + f\, [P, R]\,,$$

soit en utilisant (1.17) et (1.18),

$$[P, f\, R] = [P, f] \wedge R + f[P, R]\,, \tag{$*$}$$

ce qui établit (1.19) dans ce cas.
Si $q = 1$, i.e. $Q = X$ est un champ de vecteurs alors, en utilisant la formule de Cartan (6), on calcule

$$\begin{aligned}
&\langle \eta, [P, X \wedge R] \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_{X \wedge R}\eta), P \rangle - \langle d(i_P \eta), X \wedge R \rangle + (-1)^p \langle d\eta, P \wedge X \wedge R \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_X \eta)), P \rangle - \langle i_X(d(i_P \eta)), R \rangle + \langle i_X(d\eta), P \wedge R \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_X \eta)), P \rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_P \eta) - (-1)^p\, d(i_P(i_X \eta)), R \rangle \\
&\qquad + \langle \mathcal{L}_X \eta - d(i_X \eta), P \wedge R \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)} \langle i_X \eta, [P, R] \rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_P \eta), R \rangle + \langle \mathcal{L}_X \eta, P \wedge R \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)} \langle \eta, X \wedge [P, R] \rangle + \langle i_P \eta, \mathcal{L}_X R \rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X(P \wedge R) \rangle \\
&\quad = \langle \eta, (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] - (\mathcal{L}_X P) \wedge R \rangle\,,
\end{aligned}$$

soit en utilisant (1.17) et (1.18),

$$[P, X \wedge R] = [P, X] \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] \tag{$**$}$$

ce qui établit (1.19) dans ce cas aussi.
Supposons maintenant par récurrence sur le degré de Q que la propriété est vraie

jusqu'à $q \geq 1$ et montrons la quand le degré de Q est égal à $q+1$. On commence d'abord par le cas particulier où Q est de la forme $Q = X \wedge Q'$ avec Q' est un champ de q-vecteurs. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence et $(**)$, on a

$$\begin{aligned}[P, (X \wedge Q') \wedge R] &= [P, X \wedge (Q' \wedge R)] \\ &= [P, X] \wedge Q' \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, Q' \wedge R] \\ &= [P, X] \wedge Q' \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge ([P, Q'] \wedge R \\ &\quad + (-1)^{(p-1)q} Q' \wedge [P, R]) \\ &= [P, X \wedge Q'] \wedge R + (-1)^{(p-1)(q+1)} (X \wedge Q') \wedge [P, R] .\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que le crochet de Schouten-Nijenhuis est de type local : les valeurs de $[S, T]$ sur un ouvert U de M, dependent uniquement des valeurs de S et T sur cet ouvert. En effet, vu la bilinéarité et l'antisymétrie du crochet de Schouten-Nijenhuis, il suffit de vérifier que $[S, T] = 0$ sur U si T s'annule sur U. Soit alors $x \in U$ arbitraire, et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de U. Alors, $f\,T$ est identiquement nulle sur M, et on a d'après $(*)$,

$$0 = [S, f\,T](x) = [S, f](x) \wedge T_x + f(x)[S, T](x) = [S, T](x).$$

Pour conclure, tout champ de $(q+1)$-vecteurs peut s'écrire localement comme produit extérieur d'un champ de vecteurs et un champ de q-vecteurs.
Reste à montrer (d). Pour cela, considérons le *Jacobiateur* du crochet de Schouten-Nijenhuis, i.e., l'application $\mathcal{J} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ définie par :

$$\mathcal{J}(P, Q, R) := [P, [Q, R]] - [[P, Q], R] - (-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, [P, R]] . \tag{1.22}$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis satisfait donc (d) si et seulement si son Jacobiateur est identiquement nul.
En utilisant (b) et (c), on peut vérifier immédiatement que le Jacobiateur satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(P, Q, R) &= -(-1)^{(p-1)(q-1)} \mathcal{J}(Q, P, R) \\ &= -(-1)^{(q-1)(r-1)} \mathcal{J}(P, R, Q) ,\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\mathcal{J}(P \wedge Q, R, S) = P \wedge \mathcal{J}(Q, R, S) + (-1)^{q(r+s)}\, \mathcal{J}(P, R, S) \wedge Q . \tag{1.24}$$

En particulier, le Jacobiateur est de type local (se démontre de la même manière qu'en haut). On peut donc travailler dans le domaine d'une carte, dans le quel P, Q et R sont des sommes finies de produits extérieurs de champs de vecteurs (ou éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés (1.23) et (1.24) permettent alors de réduire le calcul du Jacobiateur au calcul de $\mathcal{J}(P, Q, R)$ avec P, Q et R sont de degré inférieur ou égal à 1 ; ce qui permet de conclure. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer convenablement l'identité de Jacobi.

Lemme 1.11 ([7]). *Soit π un champ de bivecteurs sur une variété M. Pour toutes fonctions lisses sur M, f, g et h, on a*

$$\{f,\{g,h\}_\pi\}_\pi + \{g,\{h,f\}_\pi\}_\pi + \{h,\{f,g\}_\pi\}_\pi = \frac{1}{2}\langle df\wedge dg\wedge dh, [\pi,\pi]\rangle\,.$$

Preuve. Remarquons d'abord que pour tout champ de vecteurs X, on a

$$\begin{aligned}\langle i_\pi(df\wedge dg\wedge dh), X\rangle &= \langle df\wedge dg\wedge dh, \pi\wedge X\rangle\\ &= \pi\wedge X(df,dg,dh)\\ &= \pi(df,dg)\,dh(X) - \pi(df,dh)\,dg(X)\\ &\quad + \pi(dg,dh)\,df(X)\\ &= \langle \{f,g\}_\pi\,dh + \{h,f\}_\pi\,dg + \{g,h\}_\pi\,df, X\rangle\,,\end{aligned}$$

soit

$$i_\pi(df\wedge dg\wedge dh) = \{f,g\}_\pi\,dh + \{g,h\}_\pi\,df + \{h,f\}_\pi\,dg\,.$$

Ainsi, compte tenu de (1.16), on a

$$\begin{aligned}\langle df\wedge dg\wedge dh, [\pi,\pi]\rangle &= -2\langle d\left(i_\pi(df\wedge dg\wedge dh)\right), \pi\rangle\\ &= -2\langle d\left(\{f,g\}_\pi\,dh + \{g,h\}_\pi\,df + \{h,f\}_\pi\,dg\right), \pi\rangle\\ &= -2\langle d\{f,g\}_\pi\wedge dh + d\{g,h\}_\pi\wedge df\\ &\quad + d\{h,f\}_\pi\wedge dg, \pi\rangle\\ &= 2\left(\{f,\{g,h\}_\pi\}_\pi + \{g,\{h,f\}_\pi\}_\pi + \{h,\{f,g\}_\pi\}_\pi\right)\,,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1.12. *Un champ de bivecteurs π sur une variété M est un tenseur de Poisson si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) *Le crochet correspondant, $\{\,,\,\}_\pi$, satisfait l'identité de Jacobi sur les fonctions coordonnées.*

(ii) *Le crochet de Schouten-Nijenhuis de π avec lui-même est nul : $[\pi,\pi]=0$.*

(iii) *Relativement à tout système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_d)$, les composantes de π obéissent au système d'équations*

$$\sum_{l=1}^{d}\left(\pi_{il}\frac{\partial\pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{jl}\frac{\partial\pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{kl}\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_l}\right) = 0\,,\quad \forall\, i,j,k. \tag{1.25}$$

Preuve. Relativement à un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$, le champ de tri-vecteurs $[\pi, \pi]$ s'écrit,

$$[\pi, \pi] = \sum_{i<j<k} \Lambda_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k} \ ,$$

où, d'après Lemme 1.11,

$$\begin{aligned} \Lambda_{ijk} &= [\pi, \pi](dx_i, dx_j, dx_k) \\ &= 2\left(\{x_i, \{x_j, x_k\}_\pi\}_\pi + \{x_j, \{x_k, x_i\}_\pi\}_\pi + \{x_k, \{x_i, x_j\}_\pi\}_\pi\right) \ . \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout i, j, k,

$$\begin{aligned} \{x_i, \{x_j, x_k\}_\pi\}_\pi &= \pi(dx_i, d\{x_j, x_k\}) = \pi(dx_i, d\pi_{jk}) \\ &= \pi\left(dx_i\,, \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l}\, dx_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{d} \pi_{il} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} \ , \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Une structure de Poisson est déterminée donc, de manière unique, par la donnée d'un champ de bivecteurs vérifiant les propriétés du corollaire ci-dessus.

Exemple 1.13. Tout champ de bivecteurs π sur une variété M de dimension 2 est un tenseur de Poisson, puisque $[\pi, \pi]$ est de degré $3 > 2 = \dim M$ et donc $[\pi, \pi] = 0$.

Exemple 1.14 (Structures de Poisson constantes sur $\mathbb{R}^n$)**.** Toute matrice antisymétrique à coefficients réels, $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, détermine un champ de bivecteurs sur $\mathbb{R}^n$ par : $\pi = \sum_{i<j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ qui est de Poisson; par (1.25).

Plus généralement,

Exemple 1.15. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des champs de vecteurs sur une variété M qui commutent deux à deux et $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice antisymétrique à coefficients réels, le champ de bivecteurs $\pi = \sum_{i<j} a_{ij}\, X_i \wedge X_j$ définit sur M un tenseur de Poisson, puisque le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\pi, \pi]$ est nul.

L'exemple suivant montre que le dual d'une algèbre de Lie jouit naturellement d'une structure de Poisson.

Exemple 1.16 (Structure de Lie-Poisson sur l'espace dual d'une algèbre de Lie)**.** Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie de dimension finie n et soit π le champ de bivecteurs défini sur $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ par :

$$\pi_a(u, v) = \langle a, [u, v] \rangle \quad \forall\, a \in \mathfrak{g}^*,\ u, v \in \mathfrak{g}\,,$$

où u et v sont considérés comme des éléments de $\mathfrak{g}^{**}$ via l'identification $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$. Le crochet correspondant est donné, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et tout $a \in \mathfrak{g}^*$, par :

$$\{f, g\}_\pi(a) = \langle a, [d_a f, d_a g] \rangle\,.$$

Le champ de bivecteurs π ainsi défini est un tenseur de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$, dit *structure de Lie-Poisson* associée à $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$. En effet, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$, elle définit un système de coordonnées linéaires globales $(z_1, \ldots, z_n)$ sur $\mathfrak{g}^*$ dans lequel, par définition, on a $\pi_{ij} = \{z_i, z_j\}_\pi = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k\, z_k$, où c_{ij}^k sont les constantes de structures de $\mathfrak{g}$ définies par $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k\, e_k$. Il est alors immédiat de vérifier que (1.25) est équivalente à

$$\sum_{m=1}^{n} \left(c_{im}^l c_{jk}^m + c_{jm}^l c_{ki}^m + c_{km}^l c_{ij}^m \right) = 0 \quad \forall\, i, j, k, l,$$

qui n'est rien d'autre que l'identité de Jacobi du crochet de Lie $[\ ,\ ]$ de $\mathfrak{g}$, exprimée en fonction des constantes de structures c_{ij}^k.

1.2 Feuilles symplectiques et structure locale des variétés de Poisson

Le but de cette section est de mettre en évidence le théorème de Weinstein qui permet de décrire l'aspect local d'une structure de Poisson, ainsi que la notion de feuilles symplectiques associées à une variété de Poisson.

1.2.1 *Définitions et vocabulaire*

Étant donné un tenseur de Poisson π sur une variété M, on peut définir un morphisme de fibrés vectoriels $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, dit *application d'ancrage*, en posant, pour tout $x \in M$, et tout $a, b \in T_x^*M$:

$$b\,(\pi_\sharp(x)(a)) = \pi_x(a, b)\,.$$

Celui-ci induit une application $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire sur les sections, notée encore $\pi_\sharp$: $\Omega^1(M) \to \mathfrak{X}^1(M)$, et définie, pour toute 1-forme différentielle α, par :

$$\pi_\sharp(\alpha) := i_\alpha \pi = \pi(\alpha, .) = -\pi(., \alpha)\,.$$

En particulier, si $\alpha = df$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors le champ de vecteurs $\pi_\sharp(df)$ n'est autre que le champ hamiltonien de f, en effet, pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\pi_\sharp(df)(g) = dg(\pi_\sharp(df)) = \pi(df, dg) = \{f, g\}_\pi = X_f(g)$. Ainsi, compte tenu de (1.17),

$$X_f = \pi_\sharp(df) = -[f, \pi] = -[\pi, f]\,. \tag{1.26}$$

L'image $\mathcal{C} = \operatorname{Im} \pi_\sharp$ du morphisme de fibrés $\pi_\sharp$ est appelée le *champ caractéristique* de la variété de Poisson (M, π). Pour tout $x \in M$, la fibre

$$\mathcal{C}_x = \operatorname{Im} \pi_\sharp(x) = \{X_f(x) : f \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$$

du champ caractéristique est appelée l'*espace caractéristique* en x ; sa dimension, notée $\rho_\pi(x) = \dim \mathcal{C}_x$, est appelée le *rang* de π en x. Autrement dit, $\rho_\pi(x)$ est le rang de l'application linéaire $\pi_\sharp(x) : T_x^*M \to T_xM$. Si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système de coordonnées autour de x, on a

$$\pi_\sharp(dx_i) = \sum_{j=1}^{d} \pi_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\,,$$

où les fonctions π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, \ldots, x_d)$. Donc $\rho_\pi(x)$ est le rang de la matrice antisymétrique $(\pi_{ij}(x))_{1 \le i,j \le d}$, et est donc paire.
Puisque $\{\pi_\sharp(dx_i)(x)\}_{1 \le i \le d}$ engendre $\mathcal{C}_x$, on peut en extraire une base de $\mathcal{C}_x$, disons $\{\pi_\sharp(dx_{i_j})(x)\}_{1 \le j \le \rho_\pi(x)}$, et donc la famille $\{\pi_\sharp(dx_{i_j})\}_{1 \le j \le \rho_\pi(x)}$ est libre au voisinage de x. Ce qui montre que le rang de π est au moins égal à $\rho_\pi(x)$ au voisinage de x. Un point $x \in M$ est dit *régulier* s'il s'agit d'un maximum local de ρ_π, ou d'une manière équivalente, si ρ_π est constante au voisinage de x. Un point de M qui n'est pas réguliers est dit *point singulier* de π. On notera M^{reg} l'ensemble des points réguliers de (M, π). Quand $M = M^{reg}$, on dit de π qu'il est *régulier*. L'ensemble M^{reg} est clairement ouvert ; il est aussi dense dans M. En effet, si $y \in M$ est un point singulier de π et U est un voisinage ouvert quelconque de y, la restriction sur U de ρ_π admet un maximum en un point $x \in U$ (puisque la fonction ρ_π est bornée et à valeurs dans $\mathbb{N}$), qui est donc un point régulier.

Exemple 1.17. Prenons $M = \mathbb{R}^2$ et $\pi = f(x)\, \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, où f est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[-1, 1]$ et strictement positive ailleurs. Alors, M^{reg} est la réunion de : $]-1, 1[\times\mathbb{R}$ où le rang est nul, et les demi-plans $|x| > 1$ où le rang est égal à 2 ; l'ensemble des points singuliers de π est la réunion des droites d'équations $|x| = 1$. En général, si $\pi = h(x, y)\, \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, où h est une fonction lisse sur $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble des points singuliers de π est le bord de l'ensemble des points où s'annule h.

Sur l'espace caractéristique $\mathcal{C}_x$, on peut définir une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique ω_x en posant pour tout $u, v \in \mathcal{C}_x$,

$$\omega_x(u, v) = \pi(a, b) = b(u) = -a(v)\,, \tag{1.27}$$

où a et b sont respectivement des antécédents de u et v par $\pi_\sharp(x)$. On vérifie facilement que ω_x est bien définie indépendamment du choix de a et de b, et qu'elle est non-dégénérée, ce qui signifie que ω_x est une forme symplectique sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_x$.

Soient (M,π), (N,π') deux variétés de Poisson, $\{\ ,\ \}_\pi$ et $\{\ ,\ \}_{\pi'}$ les crochets de Poisson respectifs. Une application $\phi : M \to N$ est dite *morphisme de Poisson* si

$$\{f\circ\phi, g\circ\phi\}_\pi = \{f,g\}_{\pi'}\circ\phi \quad \forall\, f,g\in\mathcal{C}^\infty(N)\,.$$

En d'autres termes, l'application : $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $f \mapsto f\circ\phi$, est un homomorphisme d'algèbres de Lie. De manière équivalente, ϕ est un morphisme de Poisson si

$$\phi_*\pi = \pi'\circ\phi\,;$$

en effet, $\phi_*\pi(df,dg) = \pi(\phi^*(df),\phi^*(dg)) = \pi(df\circ\phi, dg\circ\phi) = \pi'(df,dg)\circ\phi$.

Exemple 1.18. Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors l'application dual $\phi^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$ est un morphisme de Poisson ($\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ étant munis de leurs structures de Lie-Poisson).

Un champ de vecteurs Y sur une variété de Poisson (M,π) est dit *champ de Poisson* si la dérivée de Lie de π dans la direction de Y est nulle, ou de manière équivalente, si le flot local Φ_Y^t de Y préserve π : Φ_Y^t est un morphisme de Poisson là où il est défini. Par exemple, les champs hamiltoniens sont des champs de Poisson, puisque, pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = [X_f,\pi] \overset{(1.26)}{=} -[[f,\pi],\pi] \overset{(1.22)}{=} -[f,[\pi,\pi]] - [\pi,[f,\pi]] = -\mathcal{L}_{X_f}\pi\,,$$

soit

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = 0 \quad \forall\, f\in\mathcal{C}^\infty(M). \tag{1.28}$$

La réciproque n'est en général pas vraie, même localement. Par exemple, si π est trivial alors tout champ de vecteurs est de Poisson alors que le seul champ hamiltonien est le champ de vecteurs nul.
Si Y est un champ de Poisson sur variété de Poisson (M,π), alors pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$[Y,X_f] = X_{Y(f)}\,; \tag{1.29}$$

en effet, d'après (1.26),

$$[Y,X_f] = -[Y,[\pi,f]] = -[[Y,\pi],f] - [\pi,[Y,f]] = -[\pi,Y(f)] = X_{Y(f)}\,.$$

1.2.2 *Le théorème de Weinstein*

Théorème 1.19 ([10]). *Autour de tout point x d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_s)$ centré en x dans lequel π a pour expression locale*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j} \,,$$

avec φ_{ij} dépendent uniquement des coordonnées z_i et s'annulent en x.

Les coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_s)$ sont appelées *coordonnées de Darboux-Weinstein.*

Preuve. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur $r = \frac{1}{2}\rho_\pi(x)$. Le théorème étant trivialement vérifié si $r = 0$, supposons qu'il est vrai jusqu'à $r-1 \geq 0$ et montrons le quand le rang en x est égal à $2r$.
Puisque $\pi(x) \neq 0$, il existe deux fonctions f et g telles que $\{f, g\}_\pi(x) \neq 0$. Prenons $q_1 = f - f(x)$, alors $X_{q_1}(g)(x) = \{f, g\}_\pi(x) \neq 0$ et donc $X_{q_1}(x) \neq 0$. Il existe donc, en vertu du théorème de redressement des champs de vecteurs (voir, e.g., [30, Thm. 17.13, p. 447]), un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ centré en x dans lequel $X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Posons $p_1 = x_1$, alors $\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 1$. De plus, X_{q_1} et X_{p_1} sont linéairement indépendants (sinon on aurait $X_{q_1} = \lambda X_{p_1}$ et donc $\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \lambda X_{p_1}(p_1) = 0$) et commutent :

$$[X_{q_1}, X_{p_1}] = X_{\{q_1, p_1\}_\pi} = 0 \,.$$

Il existe donc, d'après le théorème de redressement simultané de Frobenius (voir, e.g., [30, Thm. 18.6, p. 471]), un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_d)$ centré en x tel que

$$X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \text{et} \quad X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_2} \,.$$

L'application $(y_1, \ldots, y_d) \mapsto (q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d)$ est de matrice Jacobienne de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{d-2} \end{array} \right) ,$$

où I_{d-2} est la matrice identité d'ordre $d-2$; son déterminant est égal à 1, donc $q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d$ définissent un système de coordonnées sur un voisinage ouvert U de x. Dans ce nouveau système de coordonnées, on a

$$\begin{aligned} &\{q_1, p_1\}_\pi = 1 \,, \\ &\{q_1, y_i\}_\pi = \{p_1, y_i\}_\pi = 0 \quad \forall\, i \geq 3 \,, \end{aligned}$$

et pour tout $i, j \geq 3$,

$$\{q_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = \{y_i, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi - \{y_j, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi = 0\,.$$

De même, $\{p_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = 0$. En d'autres termes,

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}\,, \tag{$*$}$$

avec

$$X_{q_1}(\pi_{ij}) = X_{p_1}(\pi_{ij}) = 0 \quad \forall\, i, j \geq 3. \tag{$**$}$$

Considérons maintenant l'application $\Phi := (y_3, \ldots, y_d)$ définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^{d-2}$. Puisque $dy_3, \ldots, dy_d$ sont linéairement indépendantes, Φ réalise une submersion surjective de U sur un ouvert U' de $\mathbb{R}^{d-2}$. De plus, $\ker \Phi_* = \mathrm{vect}\{X_{q_1}, X_{p_1}\}$, et donc d'après $(**)$, les fonctions π_{ij} sont constantes sur les fibres $\Phi^{-1}(c)$ de Φ. Il existe alors des fonctions uniques $\pi'_{ij} : U' \to \mathbb{R}$ telles que $\pi_{ij} = \pi'_{ij} \circ \Phi$ pour tout $i, j \geq 3$; ce qui permet de définir un tenseur de Poisson π' sur U' par

$$\pi' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi'_{ij} \frac{\partial}{\partial y'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y'_j}\,,$$

où $(y'_3, \ldots, y'_d)$ sont les coordonnées canoniques sur U'. Notez que Φ est un morphisme de Poisson : $\Phi_*\pi = \pi' \circ \Phi$. D'après $(*)$, la matrice de $\pi_\sharp(x)$ relativement à $(q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d)$ est donnée par

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \multirow{2}{*}{0} \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \Pi \end{array}\right)$$

où Π est la matrice carrée d'ordre $d-2$ de coefficients $\pi_{ij}(x) = \pi'_{ij}(\Phi(x))$. Ceci montre que le rang de π' en $\Phi(x)$ est $2(k-1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un système de coordonnées $(q'_2, \ldots, q'_r, p'_2, \ldots, p'_r, z'_1, \ldots, z'_s)$ autour de $\Phi(x)$ tel que

$$\pi' = \sum_{i=2}^{r} \frac{\partial}{\partial q'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p'_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi'_{ij} \frac{\partial}{\partial z'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z'_j}\,, \qquad \varphi'_{ij}(\Phi(x)) = 0$$

et φ'_{ij} ne dépendent que des coordonnées $z'_1, \ldots, z'_s$. En posant

$$q_i = q'_i \circ \Phi\,, \quad p_i = p'_i \circ \Phi \quad \forall\, i = 2, \ldots, r \quad \text{et} \quad z_j = z'_j \circ \Phi \quad \forall\, j = 1, \ldots, s$$

on obtient finalement le système de coordonnées souhaité. $\square$

Exemple 1.20. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} c_{ij}^k\, z_k\, \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$ la structure de Lie-Poisson sur le dual $\mathfrak{g}^*$ correspondante (voir Exemple 1.16). Alors, π est de rang nul à l'origine (puisqu'il s'y annule) et donc $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système de coordonnées de Darboux-Weinstein autour de l'origine dans lequel le terme $\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$ n'apparaît pas et $\varphi_{ij} = \sum_k c_{ij}^k\, z_k$ sont linéaires.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de Weinstein.

Corollaire 1.21. *Autour de tout point régulier x de rang $2r$ d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_l)$ centré en x dans lequel π s'écrit*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}\,.$$

Un cas particulier important est celui où le rang du tenseur de Poisson est partout égal à la dimension de la variété.

Proposition 1.22. *Un tenseur de Poisson π sur une variété M est symplectique si et seulement s'il est de rang constant égal à la dimension de M.*

Preuve. Si π est symplectique et ω la forme symplectique correspondante, alors $\pi_\sharp = -\omega^\sharp$, qui est inversible par non dégénérescence de ω. Inversement, si π est de rang constant égal à la dimension de M, alors $\pi_\sharp$ est un isomorphisme de TM dans T^*M et donc le champ caractéristique $\mathcal{C}$ de π coïncide avec le fibré tangent TM tout entier. Ainsi (1.27) définit une 2-forme ω sur M, qui est non dégénérée par définition. D'après Corollaire 1.21, il existe autour de tout point $x \in M$ un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r)$ dans lequel π s'écrit

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}\,.$$

Ainsi, pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$\pi_\sharp(dq_i) = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \pi_\sharp(dp_i) = -\frac{\partial}{\partial q_i}\,.$$

On en déduit que $\omega = \sum_{i=1}^{r} dq_i \wedge dp_i$ et est donc fermée. □

Exemple 1.23. La structure de Poisson définie dans Exemple 1.5 est de rang constant égal à $2r$ et est donc symplectique si et seulement si $s = 0$.

Exemple 1.24. Toute structure de Lie-Poisson est de rang nul à l'origine et donc n'est jamais symplectique.

Nous retrouvons le théorème classique de Darboux pour les formes symplectiques.

Théorème 1.25 (Darboux). *Soit* (M,ω) *une variété symplectique de dimension* $2r$*. Alors, autour de tout point* $x \in M$*, il existe un système de coordonnées* $(q_1,\dots,q_r,p_1,\dots,p_r)$ *tel que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} dq_i \wedge dp_i \,.$$

1.2.3 Feuilles symplectiques

Étant donné un tenseur de Poisson π de rang partout constant sur une variété M, son champ caractéristique $\mathcal{C} = \operatorname{Im}\pi_\sharp$ est une distribution (régulière) involutive, en vertu de (1.6), et donc intégrable par le théorème d'intégrabilité de Frobenius (e.g, [30, Théorème 19. 10]). En général, $\mathcal{C}$ est une distribution *singulière* dans le sens où ses fibres $\mathcal{C}_x = \operatorname{Im}\pi_\sharp(x)$ ne sont pas de dimension constante. Cependant, $\mathcal{C}$ est intégrable : pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété immergée connexe $\mathcal{S}$ contenant x et telle que, pour tout $y \in \mathcal{S}$, $T_y\mathcal{S} = \mathcal{C}_y$. En effet, en munissant M de la relation : x et y sont *en relation* s'il existe une famille de fonctions $f_1,\dots,f_k$ sur M telle que

$$y = \Phi^{t_1}_{X_{f_1}} \circ \cdots \circ \Phi^{t_k}_{X_{f_k}}(x)\,,$$

on obtient une relation d'équivalence sur M. Notons $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha\in I}$ la partition correspondante de M en classes d'équivalences. D'après (1.28), les flots des champs hamiltoniens préservent π et donc préservent le rang de π. On en déduit que le rang de π est constant le long de chaque $\mathcal{S}_\alpha$; on notera $2r_\alpha$ la valeur commune du rang de π le long de $\mathcal{S}_\alpha$.

Théorème 1.26 ([1]). *Soit* (M,π) *une variété de Poisson et soit* $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *la partition définie ci-dessus. Pour tout* $\alpha \in I$*,* $\mathcal{S}_\alpha$ *est une sous-variété immergée de* M *de dimension* $2r_\alpha$ *et, pour tout* $x \in \mathcal{S}_\alpha$*, l'espace tangent de* $\mathcal{S}_\alpha$ *en* x *est l'espace caractéristique en* x *de* π *:* $T_x\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{C}_x$*. De plus,* $\mathcal{S}_\alpha$ *jouit d'une structure symplectique telle que* $i : \mathcal{S}_\alpha \hookrightarrow M$ *est un morphisme de Poisson.*

Les sous-variétés immergées $\mathcal{S}_\alpha$ sont appelées les *feuilles symplectiques* de la variété de Poisson (M,π).

Preuve. Voir [13] pour une démonstration basée sur le théorème de Weinstein. □

1.3 Calcul de Poisson

Dans cette section nous allons voir que toute structure de Poisson sur une variété M définit, de manière naturelle, un crochet de Lie sur l'espace des 1-formes, qui avec l'application d'ancrage font du fibré cotangent T^*M un "algébroïde de Lie" ; ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan.

1.3.1 Algébroïdes de Lie

La notion d'algébroïde de Lie est une généralisation de celles de fibré tangent et d'algèbre de Lie.

Définition 1.27. On appelle *pseudo-algébroïde de Lie* sur une variété M un triplet $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ où $\mathcal{A} \to M$ est un fibré vectoriel sur M, $\# : \mathcal{A} \longrightarrow TM$ est un morphisme de fibrés, dit l'*ancrage*, et $[\ ,\ ]$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des sections $\Gamma(\mathcal{A})$, tels que la règle de Leibniz suivante soit satisfaite :

$$[\alpha, f\beta] = \#(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta] ,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Si, de plus, $[\ ,\ ]$ est un crochet de Lie, c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité de Jacobi

$$[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0 ,$$

on dit que $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un ***algébroïde de Lie*** sur M.

La propriété suivante est une conséquence immédiate, mais fondamentale, de la définition d'un algébroïde de Lie.

Proposition 1.28. *Si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie sur une variété M, l'ancrage $\#$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\Gamma(\mathcal{A})$ dans $\mathfrak{X}^1(M)$: pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$,*

$$\#[\alpha, \beta] = [\#(\alpha), \#(\beta)] .$$

Preuve. En vertu de la règle de Leibniz, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$
\begin{aligned}
&[[\alpha,\beta],f\gamma]+[[\beta,f\gamma],\alpha]+[[f\gamma,\alpha],\beta]\\
&=\#([\alpha,\beta])(f)\gamma+f\,[[\alpha,\beta],\gamma]+[\#(\beta)(f)\gamma+f\,[\beta,\gamma],\alpha]\\
&\quad+[-\#(\alpha)(f)\gamma+f\,[\gamma,\alpha],\beta]\\
&=\#([\alpha,\beta])(f)\gamma+f\,[[\alpha,\beta],\gamma]\\
&\quad-\#(\alpha)(\#(\beta)(f))\gamma+\#(\beta)(f)[\gamma,\alpha]-\#(\alpha)(f)[\beta,\gamma]+f\,[[\beta,\gamma],\alpha]\\
&\quad+\#(\beta)(\#(\alpha)(f))\gamma-\#(\alpha)(f)[\gamma,\beta]-\#(\beta)(f)[\gamma,\alpha]+f\,[[\gamma,\alpha],\beta]\\
&=(\#([\alpha,\beta])-[\#(\alpha),\#(\beta)])\,(f)\gamma\\
&\quad+f([[\alpha,\beta],\gamma]+[[\beta,\gamma],\alpha]+[[\gamma,\alpha],\beta])\;, \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

ce qui établit l'égalité cherchée, vu l'identité de Jacobi. □

Exemple 1.29 (Fibrés tangents)**.** Muni du crochet usuel de Lie sur les champs de vecteurs et de l'identité comme ancrage, le fibré tangent d'une variété M est un algébroïde de Lie, dit *algébroïde tangent* de M.

Exemple 1.30 (Algèbres de Lie)**.** Toute algèbre de Lie peut être vue comme un algébroïde de Lie sur un point.

Exemple 1.31 (Distributions involutives)**.** Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier sur une variété M, la distribution involutive correspondante, $T\mathcal{F}$, munie du crochet de Lie des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ et de l'inclusion $i : T\mathcal{F} \to TM$, est un algébroïde de Lie, dit *algébroïde de Lie tangent* à $\mathcal{F}$.

Exemple 1.32. Toute action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur une variété M, i.e., un homomorphisme d'algèbres de Lie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(M)$, définit une structure d'algébroïde de Lie sur le fibré vectoriel trivial $\mathfrak{g} \times M \to M$: l'ancrage $\# : \mathfrak{g} \times M \to TM$ étant défini, pour tout $(u, v) \in \mathfrak{g} \times M$, par $\#(u, x) = \zeta(u)(x)$, et le crochet de Lie est donné par

$$[\alpha,\beta](x)=[\alpha(x),\beta(x)]+\alpha_*(\zeta(\beta(x)))(x)-\beta_*(\zeta(\alpha(x)))(x)\;,$$

où l'on a considéré les section α et β de $\mathfrak{g} \times M \to M$ comme application de M dans $\mathfrak{g}$.

1.3.2 Le fibré cotangent d'une variété de Poisson est un algébroïde de Lie

Soit M une variété équipée d'une structure de Poisson π. Considérons l'application $[\ ,\ ]_\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$, dite *crochet de Koszul* associée à π, définie pour toutes 1-formes différentielles α et β par :

$$[\alpha,\beta]_\pi=\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta-\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha-d(\pi(\alpha,\beta))\,. \qquad (1.31)$$

Théorème 1.33. *Le crochet de Koszul est l'unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des 1-formes, qui vérifie*

$$[df, dg]_\pi = d\{f, g\}_\pi \,, \tag{1.32}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, et la règle de Leibniz

$$[\alpha, f\beta]_\pi = f\,[\alpha, \beta]_\pi + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta \,, \tag{1.33}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. En outre, $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ est un algébroïde de Lie, en particulier,

$$\pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi = [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)] \,. \tag{1.34}$$

Preuve. Le crochet de Koszul étant clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique, montrons (1.32) et (1.33). D'une part, en utilisant le fait que $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$, et que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\pi_\sharp(df) = X_f$, on obtient

$$\begin{aligned}
[df, dg]_\pi &= \mathcal{L}_{\pi_\sharp(df)} dg - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(dg)} df - d(\pi(df, dg)) \\
&= d(X_f(g)) - d(X_g(f)) - d\{f, g\}_\pi \\
&= d\{f, g\}_\pi - d\{g, f\}_\pi - d\{f, g\}_\pi \\
&= d\{f, g\}_\pi \,.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule : $\mathcal{L}_{fX}\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \alpha(X)df$ pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, on calcule

$$\begin{aligned}
[\alpha, f\beta]_\pi &= \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}(f\beta) - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(f\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, f\beta)) \\
&= f\,\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\,\beta - f\,\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha + \alpha(\pi_\sharp(\beta))df \\
&\quad - f\,d(\pi(\alpha, \beta)) - \pi(\alpha, \beta)df \\
&= f\,[\alpha, \beta]_\pi + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta \,.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'unicité, remarquons qu'en vertu de l'antisymétrie et la règle de Leibniz, le crochet de Koszul est de type locale : la valeur de $[\alpha, \beta]_\pi$ en un point $x \in M$ dépend uniquement des valeurs de α et β au voisinage de x [2], et vérifie aussi

$$[f\alpha, g\,\beta]_\pi = fg\,[\alpha, \beta]_\pi + f\,\pi_\sharp(\alpha)(g)\beta - g\,\pi_\sharp(\beta)(f)\alpha \,.$$

En particulier, pour tous $f, g, h, k \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[f dh, g\,dk]_\pi &= fg\,[dh, dk]_\pi + f\,\pi_\sharp(dh)(g)\,dk - g\,\pi_\sharp(dk)(f)\,dh \\
&= fg\,d\{h, k\}_\pi + f\,\pi_\sharp(dh)(g)\,dk - g\,\pi_\sharp(dk)(f)\,dh \,,
\end{aligned}$$

2. Se démontre de la même manière que dans Théorème 1.10.

où l'on utilisé (1.32) dans la dernière ligne. Ceci détermine totalement, compte tenu de la bilinéarité, le crochet $[\ ,\ ]_\pi$, puisque toute 1-forme s'écrit localement comme somme finie de 1-forme de type $f\,dg$.
Reste à montrer que $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ est un algébroïde de Lie, c'est-à-dire que le crochet de Koszul vérifie l'identité de Jacobi. Pour cela, on va montrer d'abord (1.34). En posant, pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$,

$$H(\alpha, \beta) = \pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi - [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)]\,,$$

on vérifie immédiatement, en utilisant la règle de Leibniz, que H est tensoriel en α et β. Donc, $H = 0$ si et seulement si $H(df, dg) = 0$, $\forall\, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Or,

$$\pi_\sharp[df, dg]_\pi \overset{(1.32)}{=} \pi_\sharp(d\{f, g\}_\pi) = X_{\{f,g\}_\pi} \overset{(1.6)}{=} [X_f, X_g] = [\pi_\sharp(df), \pi_\sharp(dg)]\,.$$

Maintenant, posons pour toutes 1-formes α, β et γ,

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = [[\alpha, \beta]_\pi, \gamma]_\pi + [[\beta, \gamma]_\pi, \alpha]_\pi + [[\gamma, \alpha]_\pi, \beta]_\pi\ .$$

D'après (1.30), pour toute fonction f,

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, f\,\gamma) &= \left(\pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi - [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)]_\pi\right)(f)\gamma + f\,J(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\overset{(1.34)}{=} f\,J(\alpha, \beta, \gamma)\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que J est tensoriel en γ et donc en α et β également, puisque il est antisymétrique. Ainsi, J est identiquement nul si et seulement s'il s'annule sur les 1-formes exactes. Pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} J(df, dg, dh) &= [[df, dg]_\pi, dh]_\pi + [[dg, dh]_\pi, df]_\pi + [[dh, df]_\pi, dg]_\pi \\ &= [d\{f, g\}_\pi, dh]_\pi + [d\{g, h\}_\pi, df]_\pi + [d\{h, f\}_\pi, dg]_\pi \\ &= d\left(\{\{f, g\}_\pi, h\}_\pi + \{\{g, h\}_\pi, f\} + \{\{h, f\}_\pi, g\}_\pi\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

L'algébroïde $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ sera appelée l'*algébroïde cotangent* de (M, π).

▶ **Exercice 1.34.** Soit $(T^*M, [\ ,\ ], \#)$ un algébroïde de Lie sur le fibré cotangent d'une variété M. On suppose que, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $x \in M$,

$$[df, dg](x) = d_x(\#(df)(g))\ .$$

Montrer que : $\{f, g\}(x) = \#(d_x f)(g)$ définit une structure de Poisson sur M dont l'algébroïde cotangent est $(T^*M, [\ ,\ ], \#)$.

La structure d'algébroïde de Lie cotangent sur le fibré cotangent de (M, π) permet de définir des versions contravariantes des opérateurs d, i_X, $\mathcal{L}_X$ et ∇_X, et ce, en copiant leurs définitions algébriques.
D'abord, la différentielle contravariante, notée $d_\pi : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p+1}(M)$, se définit par :

$$\begin{aligned} d_\pi P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) = & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \pi_\sharp(\alpha_i) \cdot P(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{p+1}) \\ & + \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+j} P([\alpha_i, \alpha_j]_\pi, \alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_i, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{p+1}), \end{aligned} \tag{1.35}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ sont des 1-formes.

Proposition 1.35. *Pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M)$,*

$$d_\pi P = [\pi, P],$$

où $[\ ,\ ]$ dénote le crochet de Schouten-Nijenhuis.

Preuve. De la même manière que dans le cas de la différentielle extérieure on montre que, pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $d_\pi P$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire et alterné, i.e., $d_\pi P$ est un champ de $(p+1)$-vecteurs (voir, e.g., [30, p. 311]). Il suffit donc de montrer qu'à chaque fois appliqués sur une forme différentielle de la forme $df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}$ ($f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$), d_π et $[\pi, P]$ coïncident . Pour cela, en remarquant que

$$i_P(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) = (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \, P(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) \, df_i$$

et

$$\begin{aligned} i_\pi(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) = \sum_{1 \le i,j \le p+1} (-1)^{i+j-1} \{f_i, f_j\}_\pi \, df_1 \wedge \ldots \wedge \\ \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{df_j} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, \end{aligned}$$

on a

$$
\begin{aligned}
&\langle df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, [\pi, P] \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \, d\left(P(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) \right) \wedge df_i, \pi \right\rangle \\
&- \left\langle \sum_{1 \leq i,j \leq p+1} (-1)^{i+j-1} \, d\{f_i, f_j\}_\pi \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{df_j} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, P \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \, \pi_\sharp(df_i) \cdot P\left(df_1, \ldots, \widehat{df_i}, \ldots, df_{p+1} \right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i,j \leq p+1} (-1)^{i+j} \, P\left([df_i, df_j]_\pi, df_1, \ldots, \widehat{df_i}, \ldots, \widehat{df_j}, \ldots, df_{p+1} \right) \\
&= \langle df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, d_\pi P \rangle \, . \quad \square
\end{aligned}
$$

Par conséquent, d_π vérifie, à l'exemple de la différentielle extérieure, les propriétés suivantes :

$$
d_\pi(P \wedge Q) = d_\pi P \wedge Q + (-1)^{degP} P \wedge d_\pi Q \, , \tag{1.36}
$$

$$
d_\pi \circ d_\pi = 0 \, . \tag{1.37}
$$

La cohomologie associée à d_π

$$
H^p_\pi(M) := \frac{\ker(d_\pi : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p+1}(M))}{\mathrm{Im}(d_\pi : \mathfrak{X}^{p-1}(M) \to \mathfrak{X}^p(M))}
$$

est appelée la *cohomologie de Poisson* de (M, π). En étendant l'application d'ancrage $\pi_\sharp$ sur l'espace des formes différentielles en posant, $\pi_\sharp(f) = f$ pour toute fonction f, et

$$
\pi_\sharp(\eta)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (-1)^k \eta(\pi_\sharp(\alpha_1), \ldots, \pi_\sharp(\alpha_k)) \, ,
$$

on obtient un homomorphisme $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire $\pi_\sharp : \Omega^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ qui entrelace d et d_π, i.e.,

$$
\pi_\sharp(d\eta) = -d_\pi(\pi_\sharp \eta) \, ,
$$

ce qui induit un homomorphisme $\pi_\sharp : H^*_{dR}(M) \to H^*_\pi(M)$ de la cohomologie de Rham dans la cohomologie de Poisson, qui est un isomorphisme si π est symplectique.
Ensuite, la dérivée de Lie dans la direction d'une 1-forme différentielle α, notée $\mathcal{L}_\alpha : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^p(M)$, et le produit intérieur par α, noté $i_\alpha : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p-1}(M)$,

se définissent par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha P(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) &= \pi_\sharp(\alpha)\cdot P(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{p} P(\alpha_1,\ldots,[\alpha,\alpha_i]_\pi,\ldots,\alpha_p)\,,\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$i_\alpha P(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}) = P(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\,, \tag{1.39}$$

et on a les mêmes formules usuelles

$$i_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha i_\beta - i_\beta \mathcal{L}_\alpha\,, \tag{1.40}$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha\,, \tag{1.41}$$

$$\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_\pi + d_\pi i_\alpha\,, \tag{1.42}$$

$$\mathcal{L}_\alpha d_\pi = d_\pi \mathcal{L}_\alpha\,. \tag{1.43}$$

Ces opérateurs sont liés aux opérateurs usuels par l'application d'ancrage :

$$i_\alpha \pi_\sharp(\eta) = -\pi_\sharp(i_{\pi_\sharp(\alpha)}\eta)\,, \tag{1.44}$$

$$\mathcal{L}_\alpha \pi_\sharp(\eta) = \pi_\sharp(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\eta)\,, \tag{1.45}$$

$$\mathcal{L}_{df} P = \mathcal{L}_{X_f} P\,, \tag{1.46}$$

pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\eta \in \Omega^k(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$.
Finalement, on peut étendre la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\alpha$ aux formes différentielles en définissant, pour tout $\eta \in \Omega^k(M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha \eta(X_1,\ldots,X_k) &= \pi_\sharp(\alpha)\cdot \eta(X_1,\ldots,X_k)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{k} \eta(X_1,\ldots,\mathcal{L}_\alpha X_i,\ldots,X_k)\,,\end{aligned} \tag{1.47}$$

où $X_1,\ldots,X_k$ sont des champs de vecteurs. En particulier,

$$\mathcal{L}_\alpha \beta = [\alpha,\beta]_\pi\,, \quad \forall \beta \in \Omega^1(M)\,. \tag{1.48}$$

Cette dérivée de Lie peut s'étendre en un crochet de Lie gradué sur l'espace des formes différentielles analogue au crochet de Schouten-Nijenhuis, appelé crochet de Koszul-Schouten, qui peut être défini de la même manière : pour tous $\eta \in \Omega^k(M)$ et $\rho \in \Omega^l(M)$, le *crochet de Koszul-Schouten* de η et ρ est la $(k+l-1)$-forme, notée $[\eta,\rho]_\pi$ et donnée par

$$\begin{aligned}\langle [\eta,\rho]_\pi, P\rangle &= (-1)^{(k-1)(l-1)}\langle \eta, d_\pi(i_\rho P)\rangle\\ &\quad -\langle \rho, d_\pi(i_\eta P)\rangle + (-1)^k \langle \eta\wedge\rho, d_\pi P\rangle\,,\end{aligned} \tag{1.49}$$

pour tout champ de $(k+l-1)$-vecteurs P. Ici, $i_\eta : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ est le produit intérieur par ρ, i.e. $\langle \omega, i_\eta P\rangle = \langle \eta\wedge\omega, P\rangle$ pour tout champ de p-vecteurs P et toute $(p-k)$-forme ω, si $k<p\,;\ i_\eta P = 0$ sinon.

Théorème 1.36 ([28]). *Le crochet de Koszul-Schouten est $\mathbb{R}$-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes :*

(a) *Pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $\eta \in \Omega^k(M)$,*

$$[f, \eta]_\pi = i_{X_f}\eta\,, \qquad [\alpha, \eta]_\pi = \mathcal{L}_\alpha \eta\,. \tag{1.50}$$

(b) *L'antisymétrie graduée : pour tous $\eta \in \Omega^k(M)$ et $\omega \in \Omega^l(M)$,*

$$[\eta, \omega]_\pi = -(-1)^{(k-1)(l-1)}[\omega, \eta]_\pi\,. \tag{1.51}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour tous $\eta \in \Omega^k(M)$, $\omega \in \Omega^l(M)$ et $\rho \in \Omega^r(M)$,*

$$[\eta\,, \omega \wedge \rho]_\pi = [\eta, \omega]_\pi \wedge \rho + (-1)^{(k-1)l}\omega \wedge [\eta, \rho]_\pi\,, \tag{1.52}$$

$$[\eta \wedge \omega\,, \rho]_\pi = \eta \wedge [\omega, \rho]_\pi + (-1)^{(r-1)l}[\eta, \rho]_\pi \wedge \omega\,. \tag{1.53}$$

(d) *L'identité de Jacobi graduée :*

$$\begin{aligned}(-1)^{(k-1)(r-1)}[\eta, [\omega, \rho]_\pi]_\pi + (-1)^{(l-1)(k-1)}[\omega, [\rho, \eta]_\pi]_\pi \\ +(-1)^{(r-1)(l-1)}[\rho, [\eta, \omega]_\pi]_\pi = 0\,.\end{aligned} \tag{1.54}$$

En outre, la différentielle extérieure est une dérivation de $[\ ,\ ]_\pi$:

$$d\,[\eta, \omega]_\pi = [d\eta, \omega]_\pi + (-1)^{k-1}[\eta, d\omega]_\pi\,. \tag{1.55}$$

Preuve. Les propriétés (a)-(d) se démontrent de la même manière que dans le cas du crochet de Schouten-Nijenhuis (voir Théorème 1.10).
Pour voir que d est une dérivation de $[\ ,\ ]_\pi$, posons pour tous $\eta \in \Omega^k(M)$ et $\omega \in \Omega^l(M)$,

$$\mathcal{I}(\eta, \omega) = d\,[\eta, \omega]_\pi - [d\eta, \omega]_\pi - (-1)^{k-1}[\eta, d\omega]_\pi\,.$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}(\eta, \omega) = -(-1)^{(k-1)(l-1)}\mathcal{I}(\omega, \eta)$$

et

$$\mathcal{I}(\eta, \omega \wedge \rho) = \mathcal{I}(\eta, \omega) \wedge \rho + (-1)^{kl}\omega \wedge \mathcal{I}(\eta, \rho)\,,$$

pour toute forme différentielle ρ. En particulier, $\mathcal{I}$ est de type local. Il suffit donc de vérifier (1.55) dans les trois cas suivants : (i) η et ω sont des 0-formes, c'est-à-dire qu'elles sont des fonctions ; (ii) η est une fonction et ω est la différentielle d'une fonction ; (iii) η et ω sont les différentielles de deux fonctions. Le premier cas étant trivial, vérifions le deuxième. D'après (1.50) et (1.32), on a

$$\mathcal{I}(f, dg) = d\,[f, dg]_\pi - [df, dg]_\pi = d(i_{X_f}dg) - d\{f, g\}_\pi = 0\,.$$

Dans le troisième cas, on a : $\mathcal{I}(df, dg) = d[df, dg]_\pi = d^2\{f, g\}_\pi = 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

1.3.3 Connexions Contravariantes

Un autre élément du calcul de Poisson est la notion de connexion contravariante. Ces connexions ont été introduites par Vaismann [23, 25] ; elles jouent un rôle important dans la géométrie de Poisson, e.g., [44], [9], [46], etc, et deviennent de plus en plus très utiles dans différents domaines de mathématiques [15, 16, 20, 36]. (Pour une étude détaillée des connexions contravariantes, voir [46])

Une connexion contravariante se définit d'une manière similaire à celle d'une connexion ordinaire (covariante), sauf que l'algébroïde cotangent remplace l'algébroïde tangent. Plus précisément,

Définition 1.37. Une ***connexion contravariante*** sur une variété de Poisson (M, π) est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, notée $(\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{D}_\alpha\beta$, vérifiant, pour toute fonction f sur M,

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_\alpha(f\beta) = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta\,.$$

$\mathcal{D}_\alpha\beta$ est appelée la *dérivée contravariante* de β dans la direction de α.

Exemple 1.38. Toute connexion covariante ∇ sur M induit deux connexions contravariantes définies par : $\mathcal{D}_\alpha\beta := \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta\,,\quad \tilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta := \nabla_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha + [\alpha, \beta]_\pi\,.$
En particulier, les connexions contravariantes existent sur toute variété de Poisson. Quand π est symplectique, toute connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur M est induite par une connexion covariante : $\mathcal{D}_\alpha\beta = \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$ avec $\nabla_X Y := \mathcal{D}_{{\pi_\sharp}^{-1}(X)}Y$.

Lorsqu'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur (M, π) est induite par une connexion covariante, elle vérifie la propriété suivante :

$$(\forall\, a \in T^*M,\ \pi_\sharp(a) = 0) \implies \mathcal{D}_a = 0\,, \tag{1.56}$$

on dit que $\mathcal{D}$ est une *$\mathcal{F}$-connexion.* Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur l'ouvert M^{reg} des points régulier de (M, π), on dit que $\mathcal{D}$ est *$\mathcal{F}^{reg}$-connexion.*
En général, il existe des connexions contravariantes qui ne sont pas des $\mathcal{F}$-connexions (voir Exemple 1.40), et donc une connexion contravariante peut ne pas être induite par une connexion covariante.

La définition d'une connexion contravariante étant similaire à la définition d'une connexion covariante, on peut développer les notions usuelles de torsion, courbure, transport parallèle, géodésique, etc. Néanmoins, il y a quelques différences surprenantes dans la géométrie de Poisson contravariante (voir [46]).
Si $(U, x_1, \ldots, x_d)$ est une carte locale de M, on définit les *symboles de Christoffel* Γ_{ij}^k d'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ par :

$$\mathcal{D}_{dx_i}dx_j = \sum_{k=1}^{d} \Gamma_{ij}^k\, dx_k\,. \tag{1.57}$$

Il est facile de voir que, sous un changement de coordonnées, ces symboles se transforment suivant la règle

$$\tilde{\Gamma}^t_{rs} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial x_i} \frac{\tilde{x}_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_t} \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \tilde{x}_s}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_t} \pi_{ik} \,, \tag{1.58}$$

où π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, \ldots, x_d)$. Inversement, la donnée d'une famille de symboles qui se transforment suivant cette règle sous un changement de coordonnées, définit une connexion contravariante.
La *torsion* et la *courbure* de la connexion contravariante $\mathcal{D}$ sont définies respectivement par :

$$T(\alpha, \beta) = \mathcal{D}_\alpha \beta - \mathcal{D}_\beta \alpha - [\alpha, \beta]_\pi \,, \tag{1.59}$$

$$R(\alpha, \beta)\gamma = \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \gamma - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha \gamma - \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi} \gamma \,. \tag{1.60}$$

On vérifie immédiatement que T et R sont des tenseurs de types (2,1) et (3,1), respectivement. Quand T (resp. R) est identiquement nulle, on dit de $\mathcal{D}$ qu'elle est *sans torsion* (resp. *plate*). En utilisant (1.59) et (1.60), en trouve que la torsion et la courbure ont, respecitivement, pour expressions locales

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} \,, \tag{1.61}$$

$$R^l_{ijk} = \sum_{m=1}^{d} \Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} + \pi_{im} \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_m} - \pi_{jm} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_m} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_m} \Gamma^l_{mk} \,. \tag{1.62}$$

À l'instar du cas covariant, la donnée d'une métrique riemannienne sur la variété de Poisson (M, π) donne naissance à une connexion contravariante analogue à la connexion de Levi-Civita.
Soit g une métrique riemannienne sur M, et soit $\#_g^{-1} : TM \to T^*M$ l'isomorphisme musical associé à g, i.e. $\#_g^{-1}(u) := g(u, .)$. La métrique g définit sur le fibré cotangent une métrique, que l'on notera g^*, par :

$$g^*(a, b) = g(\#_g(a), \#_g(b)) \quad \forall\, a, b \in T^*M \,.$$

Proposition 1.39 ([36])**.** *Il existe une unique connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur M vérifiant*

(i) *$\mathcal{D}$ est sans torsion :* $\quad \mathcal{D}_\alpha \beta - \mathcal{D}_\beta \alpha = [\alpha, \beta]_\pi \,;$

(ii) *$\mathcal{D}$ est métrique :* $\quad \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) = g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) + g^*(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma) \,.$

Cette connexion est donnée par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) + \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\alpha, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\alpha, \beta) \\ &\quad + g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) - g^*([\beta, \gamma]_\pi, \alpha) + g^*([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) \,. \end{aligned} \tag{1.63}$$

On appelle $\mathcal{D}$ la *connexion de Levi-Civita contravariante* associée au couple (π, g).

Preuve. Puisque g^* est non dégénérée, il suffit de calculer $g^*(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma)$ pour toutes 1-formes α, β et γ. En utilisant (i) et (ii), on calcule

$$\begin{aligned}
g^*(\mathcal{D}_\alpha\beta,\gamma) &= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - g^*(\beta,\mathcal{D}_\alpha\gamma)\\
&= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - g^*(\beta,\mathcal{D}_\gamma\alpha) - g^*(\beta,[\alpha,\gamma]_\pi)\\
&= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - \pi_\sharp(\gamma)\cdot g^*(\beta,\alpha) + g^*(\mathcal{D}_\gamma\beta,\alpha) - g^*(\beta,[\alpha,\gamma]_\pi)\\
&= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - \pi_\sharp(\gamma)\cdot g^*(\beta,\alpha) + g^*(\mathcal{D}_\beta\gamma,\alpha)\\
&\quad + g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha) - g^*(\beta,[\alpha,\gamma]_\pi)\\
&= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - \pi_\sharp(\gamma)\cdot g^*(\beta,\alpha) + \pi_\sharp(\beta)\cdot g^*(\gamma,\alpha)\\
&\quad - g^*(\gamma,\mathcal{D}_\beta\alpha) + g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha) - g^*(\beta,[\alpha,\gamma]_\pi)\\
&= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) - \pi_\sharp(\gamma)\cdot g^*(\beta,\alpha) + \pi_\sharp(\beta)\cdot g^*(\gamma,\alpha)\\
&\quad - g^*(\gamma,\mathcal{D}_\alpha\beta) - g^*(\gamma,[\beta,\alpha]_\pi) + g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha) - g^*(\beta,[\alpha,\gamma]_\pi)\,,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
2g^*(\mathcal{D}_\alpha\beta,\gamma) &= \pi_\sharp(\alpha)\cdot g^*(\beta,\gamma) + \pi_\sharp(\beta)\cdot g^*(\alpha,\gamma) - \pi_\sharp(\gamma)\cdot g^*(\alpha,\beta)\\
&\quad + g^*([\alpha,\beta]_\pi,\gamma) - g^*([\beta,\gamma]_\pi,\alpha) + g^*([\gamma,\alpha]_\pi,\beta)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité. L'existence se montre immédiatement en vérifiant que la connexion $\mathcal{D}$ définie par la formule de Koszul (1.63) est sans torsion et métrique. □

Exemple 1.40. Prenons $M = \mathbb{R}^3$ munie de sa métrique euclidienne et du tenseur de Poisson $\pi = \frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})\wedge\frac{\partial}{\partial z}$. La connexion de Levi-Civita contravariante correspondante est donnée par :

$$\mathcal{D}_{dx}dx = \mathcal{D}_{dx}dy = \mathcal{D}_{dx}dz = \mathcal{D}_{dy}dx = \mathcal{D}_{dy}dy = \mathcal{D}_{dy}dz = \mathcal{D}_{dz}dz = 0\,,$$

$$\mathcal{D}_{dz}dx = -dy\,, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{dz}dy = dx\,.$$

$\mathcal{D}$ est plate, mais pas une $\mathcal{F}$-connexion, puisqu'à l'origine, $\pi_\sharp(dz)$ s'annule, alors que $\mathcal{D}_{dz}dx$ et $\mathcal{D}_{dz}dy$ ne s'annulent pas.

1.4 Structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie de dimension n, e son élément neutre et $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. Un champ de multivecteurs P sur G est dit *invariant à gauche*, s'il est invariant sous les translations à gauche $L_g : h \mapsto gh$ sur G, c'est-à-dire,

$$(L_g)_*P(h) = P(gh) \quad \forall\, g, h \in G.$$

Une structure de Poisson *invariante à gauche* sur G est la donnée d'un champ de bivecteurs π sur G invariant à gauche et vérifiant $[\pi, \pi] = 0$. Une telle structure de Poisson est nécessairement de rang constant sur G, égal à son rang en l'élément neutre e de G.
Si G est connexe, un champ de multivecteurs P est invariant à gauche si et seulement si la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X P$ de P dans la direction de tout champ invariant à droite X est nulle[3] (puisque le flot de X est le sous-groupe à un paramètre des translations à gauche $L_{\exp(tX_e)}$). Par conséquent, le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ de deux champs de multivecteurs invariants à gauche P et Q est aussi invariant à gauche. En effet, d'après (1.17) et (1.22), pour tout champ de vecteurs invariant à droite X,

$$\mathcal{L}_X[P, Q] = [\mathcal{L}_X P, Q] + [P, \mathcal{L}_X Q] = 0\,.$$

Puisque l'évaluation en e, i.e. $P \mapsto P(e)$, est un isomorphisme de l'espace des champs de multivecteurs invariants à gauche sur l'espace $\wedge^* \mathfrak{g} = \oplus_{k=0}^{n} \wedge^k \mathfrak{g}$ (son inverse étant l'application $x \mapsto x^l$ où $x^l(g) := (L_g)_* x \quad \forall\, g \in G$), le crochet de Schouten-Nijenhuis définit sur $\wedge^* \mathfrak{g}$ un crochet, que l'on appellera le *crochet de Schouten-Nijenhuis* de $\mathfrak{g}$; ses propriétés sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 1.41. *Le crochet de Schouten-Nijenhuis d'une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\wedge^* \mathfrak{g}$ qui étend le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ et qui vérifie*

(a) *Pour tous $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$ et $y \in \wedge^j \mathfrak{g}$, $[x, y] \in \wedge^{i+j-1} \mathfrak{g}$.*

(b) *L'antisymétrie graduée : pour tous $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$ et $y \in \wedge^j \mathfrak{g}$,*

$$[x, y] = -(-1)^{(i-1)(j-1)} [y, x]\,. \tag{1.64}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour tous $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$, $y \in \wedge^j \mathfrak{g}$ et $z \in \wedge^k \mathfrak{g}$,*

$$[x\,, y \wedge z] = [x, y] \wedge z + (-1)^{(i-1)j} y \wedge [x, z]\,, \tag{1.65}$$

$$[x \wedge y\,, z] = x \wedge [y, z] + (-1)^{(k-1)j} [x, z] \wedge y\,. \tag{1.66}$$

(d) *Le crochet d'un élément de $\wedge^* \mathfrak{g}$ et un élément de $\wedge^0 \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ est nul.*

En outre, le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathfrak{g}$ vérifie l'identité de Jacobi graduée :

$$\begin{aligned}(-1)^{(i-1)(k-1)}[x, [y, z]] + (-1)^{(j-1)(i-1)}[y, [z, x]]&\\ +(-1)^{(k-1)(j-1)}[z, [x, y]] = 0\,,&\end{aligned} \tag{1.67}$$

3. On rappelle que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \tau$ d'un tenseur τ dans la direction d'un champ de vecteurs X est nulle ssi τ est invariant sous le flot de X.

et pour tout $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \in \mathfrak{g}$,

$$[u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_s] = \sum_{k,l} (-1)^{k+l} [u_k, v_l] \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_l \wedge \cdots \wedge v_s \,. \tag{1.68}$$

Remarque 1.42. Une manière directe de définir le crochet de Schouten-Nijenhuis sur $\wedge^* \mathfrak{g}$ consiste à étendre (1.68), par $\mathbb{R}$-bilinéarité, aux sommes de multivecteurs décomposables de $\wedge^* \mathfrak{g}$.

Conte tenu de ce qui précède, on a :

Proposition 1.43. *Une structure de Poisson invariante à gauche sur un groupe de Lie connexe G est équivalente à la donnée d'un élément $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ vérifiant l'équation suivante, dite l'équation de Yang-Baxter classique (en abrégé EYBC) :*

$$[r, r] = 0 \,. \tag{1.69}$$

Les éléments de $\wedge^2 \mathfrak{g}$ vérifiant (1.69) sont appelés *solutions de l'EYBC.*

Exemple 1.44. Si la dimension de $\mathfrak{g}$ est égal à 2, alors tout élément de $\wedge^2 \mathfrak{g}$ est une solution de l'EYBC.

Exemple 1.45. Si $u, v \in \mathfrak{g}$ tel que $[u, v] = 0$, alors $r = u \wedge v$ est une solution de l'EYBC ; la structure de Poisson invariante à gauche correspondante sur G est de rang constant égal à 0 si $u \wedge v = 0$, 2 sinon.

Par la suite, nous allons donné une caractérisation des solutions de l'EYBC qui peut être très utile.
Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension n, $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$ et r un élément de $\wedge^2 \mathfrak{g}$. On notera $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ l'application linéaire définie par

$$b(r(a)) = -a(r(b)) = r(a, b) \quad \forall\, a, b \in \mathfrak{g}^*, \tag{1.70}$$

$\mathcal{S}_r$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ image de r et $[\,,\,]_r$ le crochet défini sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$[a, b]_r = \mathrm{ad}^*_{r(b)} a - \mathrm{ad}^*_{r(a)} b \quad \forall\, a, b \in \mathfrak{g}^* \,, \tag{1.71}$$

où $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathrm{ad}^*_u a\,(v) = a([u, v]) \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g},\ a \in \mathfrak{g}^* \,.$$

Lemme 1.46. *Pour tout $a, b, c \in \mathfrak{g}^*$, on a :*

$$\frac{1}{2}\,[r, r](a, b, c) = a([r(b), r(c)]) + b([r(c), r(a)]) + c([r(a), r(b)]). \tag{1.72}$$

Preuve. Puisque le membre droit de (1.72) est linéaire en a, b et c, il suffit de montrer (1.72) sur une base de $\mathfrak{g}^*$. Pour cela, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale sur $\mathfrak{g}^*$. Écrivons

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, e_k \ , \qquad r = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \, e_i \wedge e_j \, .$$

En utilisant (1.68), on obtient par calcul direct

$$[r, r] = \sum_{i,j,k,l,m} a_{il} a_{jm} c_{ij}^k \, e_k \wedge e_l \wedge e_m \, .$$

Ainsi, pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$,

$$[r, r](e_i^*, e_j^*, e_k^*) = 2 \sum_{l,m} \oint_{i,j,k} a_{il} a_{jm} c_{lm}^k = 2 \oint_{i,j,k} e_i^*([r(e_j^*), r(e_k^*)]) \, ,$$

où $\oint_{i,j,k}$ désigne la somme circulaire sur i, j, k. D'où le résultat. □

Lemme 1.47. *Si r est solution de l'EYBC, alors $[\,,\,]_r$ définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$ et $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. En particulier, $\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Preuve. Supposons que r est solution de l'EYBC. D'après (1.72), pour tout $a, b, c \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$\begin{aligned} c\,(r([a, b]_r)) &= -\mathrm{ad}^*_{r(b)} a \,(r(c)) + \mathrm{ad}^*_{r(a)} b \,(r(c)) \\ &= -a([r(b), r(c)]) - b([r(c), r(a)]) \\ &= c([r(a), r(b)]). \end{aligned}$$

Donc

$$r([a, b]_r) = [r(a), r(b)] \, , \tag{1.73}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} [[a, b]_r, c]_r &= \mathrm{ad}^*_{r(c)} [a, b]_r - \mathrm{ad}^*_{r([a,b]_r)} c \\ &= \mathrm{ad}^*_{r(c)} \mathrm{ad}^*_{r(b)} a - \mathrm{ad}^*_{r(c)} \mathrm{ad}^*_{r(a)} b + \mathrm{ad}^*_{r(a)} \mathrm{ad}^*_{r(b)} c - \mathrm{ad}^*_{r(b)} \mathrm{ad}^*_{r(a)} c \, . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\oint_{a,b,c} [[a, b]_r, c]_r = 0 \, ,$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.48. Une autre manière d'établir le lemme ci-dessus consiste à remarquer que le crochet $[\,,\,]_r$ peut être défini à l'aide du crochet de Koszul : si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π le tenseur de Poisson invariant à gauche associé à la solution de l'EYBC r alors, pour toutes 1-formes α, β invariantes à gauche et tout champ de vecteurs X invariant à gauche, on a

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]_\pi(X) &= \big(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta\big)\,(X) - \big(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha\big)(X)\\ &= -\beta\big([\pi_\sharp(\alpha), X]\big) + \alpha\big([\pi_\sharp(\beta), X]\big),\end{aligned} \tag{$*$}$$

car $\pi(\alpha,\beta)$, $\alpha(X)$ et $\beta(X)$ sont des fonctions constantes sur G ; par invariance à gauche. Donc, $[\alpha,\beta]_\pi(X)$ est aussi une fonction constante sur G, puisque $\pi_\sharp(\alpha)$ et $\pi_\sharp(\beta)$ sont invariants à gauche. Il en résulte que $\mathcal{L}_Y[\alpha,\beta]_\pi\,(X) = 0$, pour tout champ de vecteurs invariant à droite Y, et donc $[\alpha,\beta]_\pi$ est une 1-forme invariante à gauche. Ainsi, en identifiant $\mathfrak{g}^*$ avec l'espace des 1-formes invariantes à gauche, le crochet de Koszul définit sur $\mathfrak{g}^*$ un crochet de Lie qui n'est rien d'autre, d'après $(*)$, que $[\,,\,]_r$.

Maintenant, définissons sur $\mathcal{S}_r$ la 2-forme ω_r par

$$\omega_r(u,v) = r(a,b) = b(u) = -a(v) \quad \forall\, u,v \in \mathcal{S}_r\,, \tag{1.74}$$

où a et b sont des antécédents de u et v, respectivement, par r. Il est clair que ω_r est bien définie et non-dégénérée ; il s'agit donc d'une forme symplectique sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}_r$.
Inversement, si $(\mathcal{S},\omega)$ est un sous-espace symplectique de $\mathfrak{g}$, alors la forme symplectique ω définit un isomorphisme $\omega^\flat : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ par $\omega^\flat(u) = \omega(u,.)$. L'application

$$r : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^* \xrightarrow{\omega^\sharp} \mathcal{S} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{g}\,,$$

où $\omega^\sharp$ est l'inverse de $\omega^\flat$ et i^* l'application duale de l'inclusion $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, définit un élément $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ tel que $(\mathcal{S}_r,\omega_r) = (\mathcal{S},\omega)$. Les éléments de $\wedge^2\mathfrak{g}$ sont donc en correspondance biunivoque avec les sous-espaces symplectique de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.49. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *r est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique.*
2. *$\mathcal{S}_r$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et pour tout $u,v,w \in \mathcal{S}_r$,*

$$\omega_r\big(u,[v,w]\big) + \omega_r\big(v,[w,u]\big) + \omega_r\big(w,[u,v]\big) = 0\,. \tag{1.75}$$

Preuve. Remarquons que si $\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ alors, d'après (1.74), pour tous $u = r(a)$, $v = r(b)$ et $w = r(c)$ dans $\mathcal{S}_r$, on a

$$\omega_r(u,[v,w]) = -a([r(b),r(c)]).$$

Donc

$$\oint_{u,v,w} \omega_r(u,[v,w]) = -\oint_{a,b,c} a([r(b),r(c)])\,.$$

Il suffit alors d'utiliser lemme 1.47 et (1.72), pour conclure. □

La donnée d'une solution de l'équation de Yang-Baxter classique sur $\mathfrak{g}$ est équivalente donc à la donnée d'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ munie d'une forme symplectique vérifiant (1.75).

Exemple 1.50. Avec les mêmes notations de Exemple 1.45, $\mathcal{S}_r = \mathrm{vect}\{u,v\}$ qui est abélienne, et $\omega_r(u,v) = 1$ si $u \wedge v \neq 0$; 0 sinon.

Chapitre 2

Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent d'une variété de Riemann-Poisson

Il est bien connu que le fibré cotangent de toute variété M possède une structure symplectique dite canonique et donc un tenseur de Poisson Π_0. Le couple (T^*M, Π_0) est le modèle fondamentale de la mécanique hamiltonienne [1]. Il est alors naturel de chercher des situations où ce modèle est bi-hamiltonien au sens de Magri [18], c'est-à-dire, il existe sur T^*M un autre tenseur de Poisson compatible avec Π_0. Dans [17], Turiel a associé à tout tenseur J de type (1,1) un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M et a montré que Π_J est de Poisson si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis. Dans ce cas, Π_J est compatible avec Π_0.

Dans ce chapitre nous considérons la situation suivante. Soit M une variété lisse munie d'un tenseur de Poisson π et d'une métrique riemannienne g et soit $J = \pi_\sharp \circ \#^{-1}$ le $(1,1)$-tenseur reliant π à g. La structure d'algébroïde de Lie sur T^*M associée à π définit par dualité un tenseur de Poisson Π sur TM et donc un tenseur de Poisson Π^g sur T^*M, image de Π par l'isomorphisme musical associé à g. Ainsi, sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson canonique Π_0 ; le champ de bivecteurs Π_J ; et le tenseur de Poisson Π^g. Nous démontrons (voir Théorème 2.10) que les trois assertions suivantes sont équivalentes : (a) Π^g est compatible avec Π_0 ; (b) $\Pi^g = \Pi_J$; (c) π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g. Dans le cas d'un groupe de Lie G muni d'une métrique riemannienne et d'une structures de Poisson invariantes à gauche, on exprime grâce au Théorème 2.10 et sa preuve, la condition $\nabla\pi = 0$ au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Ceci nous permet d'établir que $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe d'une sous-algèbre kählérienne et d'une sous-algèbre euclidienne (voir Théorème 2.14).

1. C'est l'espace des phases.

2.1 Tenseur de Poisson dual d'un algébroïde de Lie

Dans cette section, nous rappelons (cf. e.g., [5, p. 119], [32, p. 240-241], [35, p. 391-392]) que la donnée d'un pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ donne naissance à un champ de bivecteurs (linéaire) Π sur l'espace total du fibré dual $\mathcal{A}^*$, qui est de Poisson si et seulement si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie, et vice versa.

Soit $p : \mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel sur une variété M. Une *fonction basique* sur $\mathcal{E}$ est une fonction de type $f \circ p$ où f est une fonction sur M. Une fonction *linéaire* sur $\mathcal{E}$ est une fonction dont la restriction sur chaque fibre de $\mathcal{E}$ est linéaire. Un champ de bivecteurs Π sur $\mathcal{E}$ est dit *linéaire* si les conditions suivantes sur le crochet $\{F, G\}_\Pi = \Pi(dF, dG)$ sont satisfaites :

(i) Le crochet de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire.

(ii) Le crochet d'une fonction linéaire et une fonction basique est une fonction basique.

(iii) Le crochet de deux fonctions basiques est nul.

En particulier, une structure de Poisson sur $\mathcal{E}$ est linéaire si le tenseur de Poisson correspondant est linéaire.

Soit $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ un pseudo-algébroïde de Lie sur une variété M et soit $p : \mathcal{A} \to M$ la projection canonique. Sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ est défini, de manière naturelle, un champ de bivecteurs linéaire qui peut être décrit de la manière suivante [41] : pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}^*)$ et toute section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$, on définit une section $F_\xi \in \Gamma(\mathcal{A})$ en posant, pour tout $x \in M$ et tout $\mu \in \mathcal{A}^*_x$,

$$\langle \mu, F_\xi(x) \rangle = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\xi(x) + t\mu)\ . \tag{2.1}$$

Considérons, pour toutes fonctions F et $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}^*)$, le crochet $\{F, G\}$ ainsi défini : pour toute section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$,

$$\begin{aligned} \{F, G\} \circ \xi = \langle \xi, [F_\xi, G_\xi] \rangle - \#(F_\xi)(\langle \xi, G_\xi \rangle - G \circ \xi) \\ + \#(G_\xi)(\langle \xi, F_\xi \rangle - F \circ \xi)\ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le crochet $\{F, G\}$ ne dépend pas du choix de la section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$; en effet, si ξ et ξ' sont deux sections de $\mathcal{A}^*$ qui coïncident en un point $x \in M$ alors, par définition, pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}^*)$, $F_\xi(x) = F_{\xi'}(x)$. Ainsi, en choisissant une base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ de sections locales de $\mathcal{A}$ définies au voisinage de x, avec $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ comme base duale, on peut écrire

$$\xi = \sum_{i=1}^r z_i\, \varepsilon_i \quad \xi' = \sum_{i=1}^r z'_i\, \varepsilon_i$$

$$F_\xi = \sum_{i=1}^{r} f_i\,\epsilon_i \quad F_{\xi'} = \sum_{i=1}^{r} f'_i\,\epsilon_i \quad G_\xi = \sum_{i=1}^{r} g_i\,\epsilon_i \quad G_{\xi'} = \sum_{i=1}^{r} g'_i\,\epsilon_i$$

avec $z_i(x) = z'_i(x)$, $f_i(x) = f'_i(x)$ et $g_i(x) = g'(x)$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\{F,G\}\,(\xi(x)) = \sum_{1\le i,j\le r} & f_i(x)g_j(x)\,\langle \xi(x), [\epsilon_i,\epsilon_j](x)\rangle \\ & - z_i(x)g_j(x)\,d_{\xi(x)}F\,((\varepsilon_i)_*\#(\epsilon_j)(x)) \\ & + z_i(x)f_j(x)\,d_{\xi(x)}G\,((\varepsilon_i)_*\#(\epsilon_j)(x)) \\ = \{F,G\}\,(\xi'(x))\ .&\end{aligned}$$

Ce crochet est clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique. En outre, pour tous $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}^*)$ et $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$,

$$(FG)_\xi = (F\circ\xi)\,G_\xi + (G\circ\xi)\,F_\xi\,,$$

et donc $\{,\}$ vérifie la règle de Leibniz. Il existe donc un unique champ de bivecteurs Π sur $\mathcal{A}^*$ tel que $\Pi(dF, dG) = \{F, G\}$. En plus, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$,

$$\{f\circ p, g\circ p\} = 0\,, \quad \{\alpha, f\circ p\} = \#(\alpha)(f)\circ p \quad \text{et} \quad \{\alpha,\beta\} = [\alpha,\beta]\,, \tag{2.3}$$

où une section de $\mathcal{A}$ est vue comme une fonction linéaire sur $\mathcal{A}^*$. En conclusion, Π est un champ de bivecteurs linéaire sur $\mathcal{A}^*$.
En coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_d, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ sur $\mathcal{A}^*$, avec $(x_1, \ldots, x_d)$ un système de coordonnées sur M et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ une base de sections locales sur $\mathcal{A}$, le champ de bivecteurs Π s'écrit

$$\Pi = \sum_{i,j} -b_{ji}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial \epsilon_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} c_{ij}^k \epsilon_k\,\frac{\partial}{\partial \epsilon_i}\wedge\frac{\partial}{\partial \epsilon_j}\,, \tag{2.4}$$

où b_{ji} et c_{ij}^k sont les fonctions de structures définies par

$$\#(\epsilon_j) = \sum_{i=1}^{d} b_{ji}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad [\epsilon_i,\epsilon_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k\,\epsilon_k\,. \tag{2.5}$$

Ceci montre, en particulier, que Π est l'unique champ de bivecteurs (linéaire) sur $\mathcal{A}^*$ vérifiant (2.3).
Inversement, étant donné un champ de bivecteurs linéaire Π sur $\mathcal{A}^*$, (2.3) définira un ancrage et un crochet $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des sections $\Gamma(\mathcal{A})$, qui satisfont la règle de Leibniz (qui n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la règle de Leibniz du crochet correspondant à Π) et définissent donc une structure

de pseudo-algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}$.
En vertu de Corollaire 1.12, le champ de bivecteurs Π est de Poisson si et seulement si $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi sur les fonctions coordonnées. Puisqu'autour de tout point de $\mathcal{A}^*$ on peut trouver un système de coordonnées composé de fonctions basiques et de fonctions linéaires, il suffit que $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi sur les fonctions basiques et les fonctions linéaires. Il est clair que l'identité de Jacobi est satisfaite si les trois fonctions sont toutes basiques ou si deux d'entre elles sont basiques et l'autre linéaire. Par ailleurs, pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned}\{\{\alpha,\beta\}, f\circ p\} + \{\{\beta, f\circ p\},\alpha\} + \{\{f\circ p,\alpha\},\beta\}\\ = \left(\#[\alpha,\beta] - [\#(\alpha),\#(\beta)]\right)(f)\circ p\,,\end{aligned}$$

$$\{\{\alpha,\beta\},\gamma\} + \{\{\beta,\gamma\},\alpha\} + \{\{\gamma,\alpha\},\beta\} = [[\alpha,\beta],\gamma] + [[\beta,\gamma],\alpha] + [[\gamma,\alpha],\beta]\,.$$

Donc, compte tenu de Proposition 1.28, Π est un tenseur de Poisson sur $\mathcal{A}^*$ si et seulement si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie.
Pour résumer, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1. *À tout pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ correspond un et un seul champ de bivecteurs linéaire Π sur $\mathcal{A}^*$ vérifiant (2.3). Inversement, tout champ de bivecteurs linéaire sur $\mathcal{A}^*$ définit une structure de pseudo-algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}$ par (2.3).On appellera Π tenseur dual du pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$. Le pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie si et seulement si son tenseur dual est de Poisson.*

Exemple 2.2. Si $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors son tenseur de Poisson dual sur $\mathcal{A}^* = \mathfrak{g}$ est la structure de Lie-Poisson associée à $\mathfrak{g}$.

Exemple 2.3 (Structure symplectique canonique du fibré cotangent)**.** Si $\mathcal{A} = TM$ est le fibré tangent d'une variété M, les fonctions de structures sont données relativement à tout système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_d)$ sur M par $b_{ij} = \delta_{ij}$ et $c_{ij}^k = 0$. Ainsi, si $(x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d)$ est le système de coordonnées correspondant sur $\mathcal{A}^* = T^*M$, alors le tenseur de Poisson dual sur T^*M, qu'on notera Π_0, est donné par $\Pi_0 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial \xi_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}$ et est donc symplectique. Le tenseur Π_0 est appelé *structure de Poisson canonique* du fibré cotangent.

Exemple 2.4 (Structure de Poisson tangente)**.** Le fibré cotangent de toute variété de Poisson (M, π) étant un algébroïde de Lie (voir chapitre 1), il existe, en vertu du Théorème 2.1, une structure de Poisson linéaire duale sur TM, donnée localement par :

$$\Pi = \sum_{i,j=1}^d \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}\,,$$

où $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système de coordonnées sur M, $(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$ est le système de coordonnées linéaires correspondant sur TM et π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, \ldots, x_d)$. On appellera Π *structure de Poisson tangente* associée à (M, π).

2.2 Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent

Dans cette section nous allons développer le matériel nécessaire pour la preuve du Théorème 2.10, résultat principal de ce chapitre.

Rappelons que deux structures de Poisson π et π' sur une variété M sont dites *compatibles* si leur crochet de Schouten-Nijenhuis est nul, $[\pi, \pi'] = 0$, ou de manière équivalente, si $\pi + \pi'$ est un tenseur de Poisson. Une *structure bi-hamiltonienne* sur M est la donnée deux tenseurs de Poisson compatibles sur M.

Exemple 2.5. Les deux tenseurs de Poisson π et π' donnés sur $\mathbb{R}^3$ par : $\pi = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \wedge \frac{\partial}{\partial z}$ et $\pi' = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ sont compatibles, puisque $\pi + \pi' = x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ est de Poisson.

La proposition suivante permet d'exprimer la compatibilité de deux tenseurs de Poisson linéaires sur le dual d'un fibré vectoriel en termes des algébroïdes de Lie correspondantes.

Proposition 2.6. *Soit $p : \mathcal{A} \to M$ un fibré vectoriel sur une variété M, Π, Π' deux tenseurs de Poisson linéaires sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$, $([\ ,\ ], \#)$ et $([\ ,\ ]', \#')$ les structures d'algébroïdes de Lie correspondantes sur $\mathcal{A}$. Alors, Π et Π' sont compatibles ssi $([\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \# + \#')$ est une structure d'algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}$. Si tel est le cas, le dual de $(\mathcal{A}, [\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \# + \#')$ n'est rien d'autre que $\Pi + \Pi'$.*

Preuve. Évidente. □

On dira que deux structures d'algébroïdes de Lie sur un fibré vectoriel sont *compatibles* si elles satisfont les conditions de la proposition ci-dessus.

2.2.1 *Cas d'une variété munie d'un (1,1)-tenseur*

Dans [17], Turiel a montré que la donné d'un (1,1)-tenseur A sur une variété M définit sur T^*M un champ de bivecteurs Π_A qui est de Poisson si et seulement si la torsion de Nijenhuis de A est nulle ; dans ce cas, Π_A est compatible avec la structure de Poisson canonique de T^*M. Dans ce qui suit nous allons retrouver ce résultat en utilisant le langage des algébroïdes de Lie adapté à notre situation.

Soit $A : TM \to TM$ un tenseur de type (1,1) sur une variété M. Considérons θ_A la 1-forme définie sur T^*M par :

$$\langle \theta_A(a), \zeta \rangle = \langle a, A(p_*(\zeta)) \rangle \quad \forall\, a \in T^*M,\ \zeta \in T_a(T^*M)\,, \tag{2.6}$$

où $p : T^*M \longrightarrow M$ est la projection canonique. Si $(x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d)$ est un système de coordonnées linéaires sur T^*M, alors θ_A a pour expression locale

$$\theta_A = \sum_{i,j=1}^{d} A_i^j \xi_j \, dx_i, \tag{2.7}$$

où A_i^j sont les composantes de A dans $(x_1, \dots, x_d)$.
Si $A = \mathrm{Id}_{TM}$, $\theta := \theta_{\mathrm{Id}_{TM}}$ est la 1-forme dite de *Liouville*, et la 2-forme $\omega := d\theta$ est la forme symplectique canonique du fibré cotangent définie dans Exemple 2.3.
Pour tout $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$, notons X_F le champ hamiltonien de F par rapport à ω.
La formule

$$\Pi_A(dF, dG) = d\theta_A(X_F, X_G) \tag{2.8}$$

définit un champ de bivecteurs Π_A sur T^*M. En utilisant (2.7), on obtient

$$\Pi_A = \sum_{i,j=1}^{d} -A_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{d} \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^k}{\partial x_j} \right) \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_j}\,. \tag{2.9}$$

Donc Π_A est linéaire et, en vertu du Théorème 2.1, il est le dual d'un pseudo-algébroïde de Lie sur le fibré tangent. Considérons $[\ ,\ ]_A$ le crochet défini sur $\mathfrak{X}^1(M)$ par

$$[X, Y]_A = [AX, Y] + [X, AY] - A[X, Y]\,. \tag{2.10}$$

On vérifie immédiatement que $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un pseudo-algébroïde de Lie. Puisque

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{d} A_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]_A = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.11}$$

et compte tenu de (2.4) et (2.9), Π_A est le tenseur dual de $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$.

Proposition 2.7 ([43]). *Soit $A : TM \to TM$ un (1,1)-tenseur sur une variété M. Alors, $[\ ,\ ]_A$ défini par (2.10) vérifie l'identité de Jacobi ssi A est sans torsion de Nijenhuis, i.e.,*

$$\mathcal{N}_A(X, Y) := [AX, AY] - A[AX, Y] - A[X, AY] + A^2[X, Y] = 0.$$

Dans ce cas, $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un algébroïde de Lie compatible avec l'algébroïde tangent de M.

Preuve. Si le crochet $[\ ,\ ]_A$ vérifie l'identité de Jacobi, alors $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un algébroïde de Lie et, en particulier, on a : $A[X,Y]_A = [AX, AY]$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, soit $\mathcal{N}_A(X,Y) = 0$. Pour montrer l'inverse, on vérifie immédiatement que pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, on a

$$\oint_{X,Y,Z} ([X, [Y,Z]_A]_A - [N_A(X,Y), Z] - N_A([X,Y], Z)) = 0\,,$$

ce qui établit l'identité de Jacobi pour le crochet $[\ ,\ ]_A$ quad A est de torsion de Nijenhuis nulle. On vérifie aussi, par calculs directs, que quand $([\ ,\ ]_A, A)$ est une structure d'algébroïde de Lie sur TM, alors elle est compatible avec sa structure d'algébroïde de Lie tangent. □

La réciproque de la proposition précédente est aussi vraie.

Proposition 2.8 ([43]). *Si* $([\ ,\ ]', A)$ *est une structure d'algébroïde de Lie sur le fibré tangent* TM *compatible avec sa structure d'algébroïde de Lie tangent, alors* $[\ ,\ ]' = [\ ,\ ]_A$. *De plus,* A *est sans torsion de Nijenhuis.*

Preuve. On a $(TM, [\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \mathrm{Id}_{TM} + A)$ est un algébroïde de Lie et donc, pour tous champs de vecteurs X et Y,

$$(\mathrm{Id}_{TM} + A)([X,Y] + [X,Y]') = [(\mathrm{Id}_{TM} + A)X, (\mathrm{Id}_{TM} + A)Y]$$

soit en utilisant l'égalité : $A[X,Y]' = [AX, AY]$,

$$[X,Y]' = [AX, Y] + [X, AY] - A[X,Y] = [X,Y]_A\,.$$

Finalement, $[AX, AY] = A[X,Y]' = A[X,Y]_A$, et donc $\mathcal{N}_A = 0$. □

2.2.2 *Cas d'une variété de Riemann-Poisson*

Soit (M, π, g) une variété de Riemann-Poisson. Notons ∇ la connexion de Levi-Civita de g et $\#_g : T^*M \to TM$ l'isomorphisme musical associé à g.
En posant

$$J = \pi_\sharp \circ \#_g^{-1}\,, \tag{2.12}$$

on définit un (1,1)-tenseur sur M et donc, d'après le paragraphe précédent, un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M, dual du pseudo-algébroïde de Lie $(TM, [\ ,\ ]_J, J)$. Si la torsion de Nijenhuis de J est identiquement nulle, Π_J est un tenseur de Poisson compatible avec Π_0. D'un autre côté, en notant Π le tenseur de Poisson tangent associé à π, c'est-à-dire, le tenseur de Poisson sur TM, dual de l'algébroïde de Lie cotangent $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ associé à π, on peut définir un tenseur de Poisson Π^g

sur T^*M, en prenant Π^g comme étant l'image de Π par $\#_g^{-1}$. On est donc devant la situation suivante. Sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson canonique Π_0 ; le champ de bivecteurs Π_J ; et le tenseur de Poisson Π^g. On peut se poser alors les deux questions naturelles suivantes :

1. *Quand Π^g est compatible avec Π_0 ?*
2. *Quelle relation y-a-t-il entre Π^g et Π_J ?*

Le résultat principal de ce chapitre donne une réponse à ces deux questions. Considérons d'abord le crochet $[\ ,\ ]_\pi^g$ défini sur $\mathfrak{X}^1(M)$ par :

$$[X,Y]_\pi^g = \#_g[\#_g^{-1}(X), \#_g^{-1}(Y)]_\pi \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}^1(M)\,. \tag{2.13}$$

Ici $[\ ,\ ]_\pi$ est le crochet de Koszul associé à π (donné par (1.31)). Muni du crochet $[\ ,\ ]_\pi^g$ et de $J = \pi_\sharp \circ \#_g$ comme ancrage, TM est clairement un algébroïde de Lie dont le tenseur de Poisson dual est Π^g. D'après Proposition 2.6, Π^g est compatible avec Π_0 si et seulement si l'algébroïde de Lie $(TM, [\ ,\ ]_\pi^g, J)$ est compatible avec l'algébroïde de Lie tangent de M, ce qui est équivalent, en vertu des Propositions 2.7-2.8, au fait que

$$[X,Y]_\pi^g = [X,Y]_J \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}^1(M)\,, \tag{2.14}$$

soit encore au fait que $\Pi^g = \Pi_J$. Comparons maintenant les crochets $[\ ,\ ]_\pi^g$ et $[\ ,\ ]_J$.

Lemme 2.9. *Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, on a :*

$$\begin{aligned} g([X,Y]_\pi^g - [X,Y]_J, Z) = &- g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)X, Z) \\ &- g((\nabla_Z J)Y, X)\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. D'une part, en utilisant (2.12), (2.13) et la formule classique de la dérivée de Lie (4), on trouve :

$$\begin{aligned} g([X,Y]_\pi^g, Z) = &\, J(X)\cdot g(Y,Z) - J(Y)\cdot g(X,Z) - Z\cdot g(JX,Y) \\ &+ g(X,[JY,Z]) - g(Y,[JX,Z])\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$g([X,Y]_J, Z) = g([JX,Y],Z) + g([X,JY],Z) - g(J[X,Y],Z)\,.$$

Maintenant, en utilisant les propriétés de ∇ et le fait que J est antisymétrique par rapport à g, i.e., $g(JX,Y) = -g(X,JY)$, on calcule

$$\begin{aligned}
g([X,Y]^g_\pi - [X,Y]_J, Z) &= J(X)\cdot g(Y,Z) - J(Y)\cdot g(X,Z) - Z\cdot g(JX,Y) \\
&\quad + g(X,[JY,Z]) - g(Y,[JX,Z]) - g([JX,Y],Z) \\
&\quad - g([X,JY],Z) + g(J[X,Y],Z) \\
&= g(\nabla_{JX}Y,Z) + g(Y,\nabla_{JX}Z) - g(\nabla_{JY}X,Z) \\
&\quad - g(X,\nabla_{JY}Z) - g(\nabla_Z(JX),Y) - g(JX,\nabla_Z Y) \\
&\quad + g(X,\nabla_{JY}Z) - g(X,\nabla_Z(JY)) - g(Y,\nabla_{JX}Z) \\
&\quad + g(Y,\nabla_Z(JX)) - g(\nabla_{JX}Y,Z) + g(\nabla_Y(JX),Z) \\
&\quad - g(\nabla_X(JY),Z) + g(\nabla_{JY}X,Z) + g(J\nabla_X Y,Z) \\
&\quad - g(J\nabla_Y X,Z) \\
&= -g(\nabla_X(JY),Z) + g(J(\nabla_X Y),Z) \\
&\quad + g(\nabla_Y(JX),Z) - g(J(\nabla_Y X),Z) \\
&\quad - g(\nabla_Z(JY),X) + g(J(\nabla_Z Y),X)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui établit l'égalité cherchée, puisque $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$. □

Maintenant on est en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.10 ([43]). *Soit (M,π,g) une variété de Riemann-Poisson. Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Π^g est compatible avec Π_0.*

(2) *$\Pi^g = \Pi_J$;*

(3) *π est ∇-parallèle : $\nabla\pi = 0$.*

Si de plus π est symplectique alors l'une des conditions 1)-3) *est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis.*

Preuve. Nous avons déjà vu que (1) ⇔ (2) ⇔ (2.14).

(3) ⇔ (2) : Si π est ∇-parallèle alors, par définition, J est aussi ∇-parallèle et donc, en vertu du Lemme 2.9, $[\,,\,]^g_\pi = [\,,\,]_J$, soit $\Pi^g = \Pi_J$.
Inversement, si $\Pi^g = \Pi_J$ ou de manière équivalente $[\,,\,]^g_\pi = [\,,\,]_J$ alors, en posant pour tous champs de vecteurs X,Y,Z, $\Lambda(X,Y,Z) := g((\nabla_X J)Y, Z)$, (2.15) s'écrit

$$\Lambda(X,Y,Z) + \Lambda(Z,Y,X) = \Lambda(Y,X,Z)\,.$$

Puisque le membre gauche de cette égalité est symétrique en X et Z, Λ est symétrique par rapport aux deux dernières variables, i.e.,

$$\Lambda(X,Y,Z) = \Lambda(X,Z,Y) \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}^1(M)\,.$$

Maintenant, en utilisant le fait que J est antisymétrique par rapport à g, on peut écrire

$$\begin{aligned} 0 &= X.(g(JY,Z) + g(Y,JZ)) \\ &= g(\nabla_X(JY),Z) + g(JY,\nabla_X Z) + g(\nabla_X Y,JZ) + g(Y,\nabla_X(JZ)) \\ &= (g(\nabla_X(JY),Z) - g(J(\nabla_X Y),Z)) + (g(Y,\nabla_X(JZ)) - g(Y,J(\nabla_X Z))) \\ &= g((\nabla_X J)Y,Z) + g((\nabla_X J)Z,Y)\,, \end{aligned}$$

soit

$$\Lambda(X,Y,Z) = -\Lambda(X,Z,Y) \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}^1(M)\,.$$

Par conséquent, $\Lambda = 0$, soit $\nabla J = 0$, soit encore $\nabla\pi = 0$.

Finalement, si π est symplectique alors J est inversible. Dans ce cas, l'équation (2.14) est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis, ce qui permet de conclure. □

Une conséquence immédiate du Théorème 2.10 est l'existence sur le fibré cotangent de toute variété kählérienne d'une structure symplectique compatible avec la structure canonique.

Rappelons qu'une *variété kählérienne* est une variété M munie d'une *structure presque complexe*, i.e., un (1,1)-tenseur J sur M tel que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$, et d'une métrique riemannienne g telle que $g(u,v) = g(Ju,Jv)$ pour tout $u,v \in TM$ et $\nabla J = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g. La 2-*forme fondamentale* d'une variété kählérienne (M,J,g) est définie par $\Omega(u,v) := g(Ju,v)$. Il est bien connu que la forme fondamentale d'une variété kählérienne est une forme symplectique (voir, e.g., [48]).

Corollaire 2.11. *Soit (M,J,g) une variété kählérienne et soit π le tenseur de Poisson associé à la forme fondamentale de (M,J,g). Alors, $\Pi^g = \Pi_J$ et (Π^g,Π_0) sont compatibles.*

2.3 Groupes de Lie munis d'une métrique invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche parallèle

Cette section concerne le cas particulier où la variété de Riemann-Poisson de départ est un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne et d'un tenseur de Poisson invariants à gauche.

Soit (G,π,g) un groupe de Lie connexe muni d'une structure de Poisson et d'une métrique riemannienne invariantes à gauche, $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie, $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ la solution de l'EYBC associée à π et $\langle\ ,\ \rangle = g(e)$ le produit scalaire défini sur $\mathfrak{g}$ par g. Considérons $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la connexion de Levi-Civita infinitésimale associée à l'algèbre de Lie euclidienne [2] $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$, i.e., l'application bilinéaire définie par :

$$2\langle A_u v, w\rangle = \langle [u,v], w\rangle + \langle [w,u], v\rangle + \langle [w,v], u\rangle. \tag{2.16}$$

A est l'unique application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ vérifiant :

1. Pour tout $u, v \in \mathfrak{g}$,
$$A_u v - A_v u = [u,v]\,. \tag{2.17}$$
2. Pour tout $u \in \mathfrak{g}$, A_u est antisymétrique, i.e.,
$$\langle A_u v, w\rangle + \langle v, A_u w\rangle = 0 \quad \forall\, v, w \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.18}$$

Elle est reliée à la connexion de Levi-Civita ∇ de g par

$$\nabla_{u^l} v^l = (A_u v)^l \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}\,, \tag{2.19}$$

où u^l dénote le champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé à u.
Par invariance à gauche, la condition $\nabla\pi = 0$ est équivalente à

$$r(A_u^* a, b) + r(a, A_u^* b) = 0 \quad \forall\, u \in \mathfrak{g}, a, b \in \mathfrak{g}^*, \tag{2.20}$$

où $A_u^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ est l'application duale de $A_u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Le Lemme qui suit détaille encore plus cette équation. Notons d'abord $J = r \circ \#^{-1}$, où $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ est l'application linéaire donnée par (1.70) et $\#^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ est l'isomorphisme : $\#^{-1}(u) = \langle u, \cdot\rangle$. Le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ décompose $\mathfrak{g}$ orthogonalement en :

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Im} r \oplus (\operatorname{Im} r)^\perp\,, \tag{2.21}$$

avec $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} J$ (qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, d'après Proposition 1.49) et $(\operatorname{Im} r)^\perp = \ker J$.

Lemme 2.12. *Avec les notations ci-dessus, le tenseur de Poisson π est parallèle par rapport à g si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(\operatorname{Im} r)^\perp$ *est une sous algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*,*

(ii) *Pour tout* $u, v \in \operatorname{Im} r$*,*
$$[Ju, Jv] - J[Ju, v] - J[u, Jv] + J^2[u,v] = 0\,.$$

(iii) *Pour tous* $u \in \operatorname{Im} r$*,* v *et* $w \in (\operatorname{Im} r)^\perp$*,*
$$\langle \mathrm{ad}_u v, w\rangle + \langle v, \mathrm{ad}_u w\rangle = 0\,.$$

2. Par algèbre de Lie euclidienne, en entend toute algèbre de Lie munie d'un produit scalaire.

(iv) *Pour tous* $u \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp$, v *et* $w \in \mathrm{Im}\, r$,

$$\langle \mathrm{ad}_u v, w\rangle + \langle v, \mathrm{ad}_u w\rangle = 0\,.$$

(v) *Pour tous* $u \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp$, v *et* $w \in \mathrm{Im}\, r$,

$$\langle (\mathrm{ad}_u \circ J - J \circ \mathrm{ad}_u) v, w\rangle = 0\,.$$

Preuve. La démonstration est basée sur celle du Théorème 2.10 : nous avons vu que le tenseur de Poisson π est parallèle par rapport à g si et seulement si l'équation (2.14) est satisfaite. Celle-ci est équivalente, par invariance à gauche, à l'équation

$$[u, v]_r^{\#} = [u, v]_J \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}\,, \tag{$*$}$$

où $[\ ,\ ]_r^{\#}$ et $[\ ,\ ]_J$ sont définis par :

$$[u, v]_r^{\#} := \#[\#^{-1}(u), \#^{-1}(v)]_r\,; \quad [u, v]_J := [Ju, v] + [u, Jv] - J[u, v].$$

Ici $[\ ,\ ]_r$ est le crochet de Lie défini sur $\mathfrak{g}^*$ par (1.71).

($\Leftarrow$). Compte tenu de (2.21), il suffit de montrer $(*)$ dans les trois cas suivants :

• <u>Premier cas</u> : u et $v \in \mathrm{Im}\, r$. D'après (ii), on a :

$$0 = [Ju, Jv] - J[u, v]_J = J([u, v]_r^{\#} - [u, v]_J)\,,$$

ce qui implique que $[u, v]_r^{\#} - [u, v]_J \in \ker(J) = (\mathrm{Im}\, r)^\perp$. Par ailleurs, on a :

$$[u, v]_J = [Ju, v] + [u, Jv] - J[u, v] \in \mathrm{Im}\, r\,,$$

car $\mathrm{Im}\, r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Et, pour tout $w \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp$,

$$\begin{aligned}
\langle [u, v]_r^{\#}, w\rangle &\overset{(1.71)}{=} \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle - \langle u, \mathrm{ad}_w \circ J(v)\rangle \\
&\overset{(\mathrm{v})}{=} \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle - \langle u, J \circ \mathrm{ad}_w(v)\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle + \langle J(u), \mathrm{ad}_w(v)\rangle \\
&\overset{(\mathrm{iv})}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

Donc $[u, v]_r^{\#} \in \mathrm{Im}\, r$. Il en résulte que $[u, v]_r^{\#} - [u, v]_J \in \mathrm{Im}\, r \cap (\mathrm{Im}\, r)^\perp = \{0\}$.

• <u>Deuxième cas</u> : u et $v \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp$. Dans ce cas, on a :

$$[u, v]_r^{\#} = 0\,, \quad [u, v]_J = J[u, v] \overset{(\mathrm{i})}{=} 0\,.$$

• <u>Troisième cas</u> : $u \in \mathrm{Im}\, r$ et $v \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp$.

Si $w \in \mathrm{Im}\, r$ (arbitraire), alors $\langle [u, v]_r^{\#}, w\rangle = -\langle [Ju, w], v\rangle = 0$, et

$$\langle [u, v]_J, w\rangle = -\langle (\mathrm{ad}_v \circ J - J \circ \mathrm{ad}_v) u, w\rangle \overset{(\mathrm{v})}{=} 0\,.$$

Donc $\langle [u,v]_r^\# - [u,v]_J, w\rangle = 0$ pour tout $w \in \operatorname{Im} r$.
Si maintenant $w \in (\operatorname{Im} r)^\perp$, alors

$$\langle [u,v]_r^\#, w\rangle = -\langle \mathrm{ad}_{J(u)} w, v\rangle\,; \quad \langle [u,v]_J, w\rangle = \langle \mathrm{ad}_{J(u)} v, w\rangle\,.$$

Donc $\langle [u,v]_r^\# - [u,v]_J, w\rangle = 0$ pour tout $w \in (\operatorname{Im} r)^\perp$, d'après (iii).

($\Rightarrow$). Se démontre de la même manière. □

Remarque 2.13. Compte tenu de (iv) et (v) du lemme ci-dessus et de l'antisymétrie de J, on a aussi :

$$\langle \mathrm{ad}_u \circ J(v), w\rangle - \langle v, \mathrm{ad}_u \circ J(w)\rangle = 0 \quad \forall\, u \in (\operatorname{Im} r)^\perp,\ v, w \in \operatorname{Im} r\,.$$

On rappelle qu'une *algèbre de Lie kählérienne* est une algèbre de Lie euclidienne $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ munie d'une *structure complexe*, i.e., un endomorphisme $I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant $I^2 = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, telle que

- Pour tout $u, v \in \mathfrak{g}$, $\langle Iu, Iv\rangle = \langle u, v\rangle$.
- La torsion de Nijenhuis de I est nulle, i.e.,

$$[Iu, Iv] - I[Iu, v] - I[u, Iv] + I^2[u,v] = 0\,.$$

- la forme fondamentale $\omega(u,v) := \langle Ju, v\rangle$ satisfait

$$\omega(u, [v,w]) + \omega(v, [w,u]) + \omega(w, [u,v]) = 0 \quad \forall\, u, v, w \in \mathfrak{g}\,.$$

Le théorème suivant montre que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche parallèle, se décompose en somme direct d'une sous-algèbre de Lie kählérienne et d'une sous-algèbre euclidienne.

Théorème 2.14. *Soit (G, π, g) un groupe de Lie connexe muni d'une structure de Poisson et d'une métrique riemannienne invariantes à gauche. On suppose que π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g. Alors, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose en somme directe (d'espaces vectoriels), $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, d'une sous-algèbre de Lie kählérienne $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$. En outre, Il existe deux représentations d'algèbres de Lie $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{k})$ telles que, pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ sont antisymétriques, respectivement, par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec I.*

Preuve. Posons $\mathfrak{k} = \operatorname{Im} r$, $\mathfrak{h} = (\operatorname{Im} r)^\perp$, et notons $\langle\ ,\ \rangle_0$ (resp. $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$) la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{h}$), J_0 la restriction de J sur $\mathfrak{k}$ et ω_0 la forme symplectique définie sur $\mathfrak{k}$ par (1.74). On vérifie immédiatement que, pour tout $u, v \in \mathfrak{k}$,

$$\omega_0(u, J_0 v) = \langle u, v\rangle_0. \tag{2.22}$$

Il est bien connu (cf. e.g., [24, p. 41-42]) que $I = J_0(-J_0^2)^{-1/2}$ est une structure complexe sur $\mathfrak{k}$, compatible avec ω_0, i.e.,

$$\langle u, v\rangle_{\mathfrak{k}} := \omega_0(u, Iv) \overset{(2.22)}{=} \big\langle u, (-J_0^2)^{-1/2}(v)\big\rangle_0 , \qquad (u, v \in \mathfrak{k}) \tag{2.23}$$

est un produit scalaire. Puisque $(-J_0^2)^{-1/2}$ est un polynôme en J_0 [3], il en est de même pour I. Ainsi, compte tenu de Lemme 2.12-(ii), I est sans torsion de Nijenhuis [4]. Il est alors clair que $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ est une sous-algèbre de Lie kählérienne de $\mathfrak{g}$. D'après Lemme 2.12-(i), $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$ est une sous-algèbre de Lie euclidienne de $\mathfrak{g}$. Ceci établit la décomposition désirée.
Maintenant, posons pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$,

$$[u, v] = \rho_{\mathfrak{k}}(u)(v) + \rho_{\mathfrak{h}}(v)(u) \tag{2.24}$$

avec $\rho_{\mathfrak{k}}(u)(v) \in \mathfrak{h}$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)(u) \in \mathfrak{k}$. On obtient ainsi deux applications linéaires $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{k})$. En utilisant l'identité de Jacobi du crochet de Lie $[\ ,\ ]$ de $\mathfrak{g}$ et le fait que $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, on trouve facilement que $\rho_{\mathfrak{k}}$ et $\rho_{\mathfrak{h}}$ sont des représentations d'algèbres de Lie. D'après Lemme 2.12-(iii), $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ $(u \in \mathfrak{k})$ est clairement antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$. D'un autre côté, pour tout $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec J_0 (par Lemme 2.12-(v)) et par suite commute avec $(-J_0^2)^{-1/2}$ et I puisqu'ils sont polynomials en J_0. Finalement, d'après Lemme 2.12-(iv), $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ est antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_0$ et donc par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, vu (2.23). □

Nous allons maintenant donner une méthode de construction d'exemples. Soit $(\mathfrak{g}_1, \langle\ ,\ \rangle_1, J)$ une algèbre de Lie kählérienne (voir, e.g., [29] pour des exemples d'algèbres de Lie kählériennes) et $(\mathfrak{g}_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ une algèbre de Lie euclidienne. On suppose qu'il existe une représentation d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_2)$ telle que pour tout $u \in \mathfrak{g}_1$, $\rho(u)$ est une dérivation d'algèbres de Lie antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_2$. Définissons sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ le crochet de Lie

$$[u_1 + u_2, v_1 + v_2] = [u_1, v_1] + [u_2, v_2] + \rho(u_1)(v_2) - \rho(v_1)(u_2),$$

et le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$. D'après Proposition 1.49, la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_1$, $\omega(u, v) := \langle Ju, v\rangle_1$, définit un solution de l'équation de Yang-Baxter classique r sur $\mathfrak{g}$, et il est évident que $(\mathfrak{g}, r, \langle\ ,\ \rangle)$ vérifie (2.20).

---

3. En effet, $(-J_0^2)^{-1/2} = P(-J_0^2)$ où P est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P(\lambda_i) = \lambda_i^{-1/2}$ avec les $\lambda_i > 0$ sont les valeurs propres de $-J_0^2$.

4. On rappelle que si $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est endomorphisme d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de torsion de Nijenhuis nulle, alors pour tout polynôme P, $P(T)$ est aussi sans torsion de Nijenhuis, voir, e.g., [50, Lemme 1.2]

Chapitre 3

Géométrie des variétés de Riemann-Poisson plates et métaplates

Ce chapitre est entièrement consacré à la démonstration du Théorème 0.5. Comme la notion importante et moins connue apparaissant dans le théorème de Hawkins, qui est le point de départ de notre travail, est la notion de métacourbure, on va consacrer une partie importante pour la définir et donner ses propriétés. On va aussi définir le tenseur $\mathbf{T}$ ingrédient essentiel de notre résultat principal. Le calcul de la métacourbure et de $\mathbf{T}$ dans le cas d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, objet des Théorèmes 3.13-3.14, est l'étape clef vers la démonstration du Théorème 0.5.

3.1 Qu'est ce que la métacourbure ?

Introduite par Hawkins [16], la métacourbure apparaît naturellement dans l'étude des déformations noncommutatives de l'algèbre extérieure des formes différentielles. Géométriquement parlant, la métacourbure est un (2,3)-tenseur (symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariant) associé naturellement à toute connexion contravariante sans torsion et plate. Le but de cette section est de définir cette notion et d'étudier ses propriétés. Pour les besoins de notre résultat principal, on introduira aussi, à l'issue de cette section, le tenseur $\mathbf{T}$.

3.1.1 Le crochet de Hawkins

L'extension du crochet de Poisson des fonctions lisses d'une variété de Poisson en un crochet (de Poisson) gradué sur l'algèbre extérieure des formes différentielles est une question à laquelle se sont intéressés plusieurs auteurs ([27, 31, 49]). Le crochet de Hawkins, que nous allons présenter, en est un exemple.

Définition 3.1. Un *crochet de Poisson gradué* de degré $k \in \mathbb{Z}$ sur l'algèbre extérieure des formes différentielles d'une variété M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\{\ ,\ \} : \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $|\{\sigma, \tau\}| = |\sigma| + |\tau| + k$
2. $\{\sigma, \tau\} = -(-1)^{(|\sigma|+k)(|\tau|+k)}\{\tau, \sigma\}$ (antisymétrie graduée)
3. $\{\sigma, \tau \wedge \rho\} = \{\sigma, \tau\} \wedge \rho + (-1)^{(|\sigma|+k)|\tau|}\tau \wedge \{\sigma, \rho\}$ (règle de Leibniz)
4. $\{\sigma, \{\tau, \rho\}\} = \{\{\sigma, \tau\}, \rho\} + (-1)^{(|\sigma|+k)(|\tau|+k)}\{\tau, \{\sigma, \rho\}\}$ (identité de Jacobi graduée).

Si de plus d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$, c'est-à-dire,

$$d\{\sigma, \tau\} = \{d\sigma, \tau\} + (-1)^{|\sigma|+k}\{\sigma, d\tau\}\,,$$

on dit que $\{\ ,\ \}$ est un *crochet de Poisson gradué différentiel.*

Hawkins a montré dans [16] le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Étant donné une connexion contravariante sans torsion $\mathcal{D}$ sur une variété de Poisson (M, π), il existe un unique crochet $\{\ ,\ \}$ sur l'espace $\Omega^*(M)$ des formes différentielles, ayant les propriétés suivantes :*

(a) $\{\ ,\ \}$ *est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et de degré 0, c'est-à-dire,*

$$\{\sigma, \tau\} = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\{\tau, \sigma\} \quad et \quad |\{\alpha, \beta\}| = |\alpha| + |\beta|\,, \tag{3.1}$$

(b) *Pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et tout $\alpha \in \Omega^1(M)$,*

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad et \quad \{f, \alpha\} = \mathcal{D}_{df}\alpha\,, \tag{3.2}$$

(c) $\{\ ,\ \}$ *satisfait la règle de Leibniz*

$$\{\sigma, \tau \wedge \rho\} = \{\sigma, \tau\} \wedge \rho + (-1)^{|\sigma||\tau|}\tau \wedge \{\sigma, \rho\}\,, \tag{3.3}$$

(d) *d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$*

$$d\{\sigma, \tau\} = \{d\sigma, \tau\} + (-1)^{|\sigma|}\{\sigma, d\tau\}\,. \tag{3.4}$$

Le crochet $\{\ ,\ \}$ sera appelée ***crochet de Hawkins***.

Preuve. On commence par un cas particulier : supposons que M peut être couverte par une seule carte. Définissons $\{\,,\,\}$ comme suit : le crochet de deux fonctions est leur crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \ ,$$

le crochet d'une fonction f et une forme différentielle σ est la dérivée contravariante de σ dans la direction de df

$$\{f, \sigma\} = -\{\sigma, f\} = \mathcal{D}_{df}\, \sigma \ , \tag{3.5}$$

et le crochet de deux 1-formes est donné par la formule [1] :

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, d\beta]_\pi \, , \tag{3.6}$$

où $[\ ,\ ]_\pi$ est le crochet de Koszul-Schouten (voir chapitre 1) ; notez que

$$\begin{aligned}
\{\beta, \alpha\} &= -\,\mathcal{D}_\beta d\alpha - \mathcal{D}_\alpha d\beta + d(\mathcal{D}_\alpha \beta) + [\beta, d\alpha]_\pi \\
&= -\,\mathcal{D}_\beta d\alpha - \mathcal{D}_\alpha d\beta + d(\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, \beta]_\pi) - [d\alpha, \beta]_\pi \\
&= -\,\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, d\beta]_\pi \\
&= \{\alpha, \beta\} \, ,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

et, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\{\alpha, f\beta\} = -(\mathcal{D}_{df}\alpha) \wedge \beta + f\,\{\alpha, \beta\} \, . \tag{3.8}$$

En choisissant un système de coordonnées globales sur M, on peut écrire toute forme différentielle sur M comme somme finie de produits extérieurs de 1-formes. On peut donc étendre (3.6) aux formes différentielles de degrés supérieurs, en prenant

$$\begin{aligned}
\{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_l\} = (-1)^{k+1} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \{\alpha_i, \beta_j\} \wedge \\
\wedge\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta}_j \wedge \cdots \wedge \beta_l \, ,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

où le chapeau $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant est omis.
Il est clair que l'application $\{\,,\,\}$ ainsi définie est de degré 0 et satisfait (3.2). Par définition de $\{\,,\,\}$, et grâce aux formules (3.7), (3.8) et (3.9), on montre, sans trop de difficulté, que $\{\,,\,\}$ est antisymétrique et vérifie (3.3).
Pour prouver (3.4), posons pour toutes formes différentielles σ et τ,

$$\mathcal{I}(\sigma, \tau) = d\,\{\sigma, \tau\} - \{d\sigma, \tau\} - (-1)^{|\sigma|}\{\sigma, d\tau\} \, .$$

1. Cette formule apparaît pour la première fois dans [4]

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}(\sigma,\tau) = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\mathcal{I}(\tau,\sigma)$$

et

$$\mathcal{I}(\sigma,\tau\wedge\rho) = \mathcal{I}(\sigma,\tau)\wedge\rho + (-1)^{(|\sigma|+1)|\tau|}\tau\wedge\mathcal{I}(\sigma,\rho)\,,$$

pour toutes forme différentielles σ,τ et ρ. Il suffit donc de vérifier (3.4) dans les trois cas suivants : σ et τ sont des 0-formes, c'est-à-dire des fonctions ; σ est une fonction et τ est la différentielle d'une fonction ; σ et τ sont les différentielles de deux fonctions. Pour le premier cas, puisque $\mathcal{D}$ est sans torsion,

$$\begin{aligned} d\{f,g\} &= [df,dg]_\pi = \mathcal{D}_{df}dg - \mathcal{D}_{dg}df \\ &= -\{dg,f\} + \{df,g\}\,. \end{aligned}$$

D'après (3.5) et (3.6), on a :

$$d\{f,dg\} = d\mathcal{D}_{df}dg = \{df,dg\} \quad \text{et} \quad d\{df,dg\} = d(d\mathcal{D}_{df}dg) = 0\,,$$

ce qui montre (3.4) dans le deuxième et le troisième cas.
Montrons que $\{\,,\}$ est unique. Pour cela, supposons que $\{\,,\}'$ est un autre crochet vérifiant (a)-(d). En utilisant (3.1) et (3.3), on obtient immédiatement

$$\{f,\sigma\}' = \mathcal{D}_{df}\sigma = \{f,\sigma\},$$

pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ et tout $\sigma\in\Omega^*(M)$.
Si α et β sont deux 1-formes, alors en supposant que $\beta = fdg$ avec $f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)$, on calcule

$$\begin{aligned} \{\alpha,fdg\}' &= \{\alpha,f\}'\wedge dg + f\{\alpha,dg\}' \\ &= -\mathcal{D}_{df}\alpha\wedge dg + f(d\mathcal{D}_{dg}\alpha - \mathcal{D}_{dg}d\alpha) \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - \mathcal{D}_{df}\alpha\wedge dg - df\wedge\mathcal{D}_{dg}\alpha \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - \mathcal{D}_{\alpha}(df\wedge dg) - [df,\alpha]_\pi\wedge dg - df\wedge[dg,\alpha]_\pi \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha - \mathcal{D}_{\alpha}(d(fdg)) + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - [df,\alpha]_\pi\wedge dg - df\wedge[dg,\alpha]_\pi \\ &= -\mathcal{D}_{\alpha}(d(fdg)) - \mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha + [\alpha,d(fdg)]_\pi. \\ &= \{\alpha,fdg\}\,. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$, $\{\alpha,\beta\}' = \{\alpha,\beta\}$. En utilisant (3.3), on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} \{\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k,\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_l\}' = (-1)^{k+1}\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\{\alpha_i,\beta_j\}'\wedge \\ \wedge\,\alpha_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha}_i\wedge\cdots\wedge\alpha_k\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\beta}_j\wedge\cdots\wedge\beta_l\,, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_l \in \Omega^1(M)$. Il s'ensuit que $\{\ ,\ \}'$ et $\{\ ,\ \}$ coïncident. Ceci implique, en particulier, qu'on obtient le même crochet indépendamment du choix du système de coordonnées (globales) utilisé pour le définir. Ce qui achève la démonstration de l'existence et de l'unicité de $\{,\}$ dans le cas particulier considéré.

Soit maintenant M une variété lisse quelconque. Si $\{,\}$ existe sur M, il doit être de type local, c'est-à-dire, les valeurs de $\{\sigma, \tau\}$ sur un ouvert U de M, dépendent uniquement des valeurs de σ et τ sur cet ouvert. En effet, vu la bilinéarité et l'antisymétrie de $\{\ ,\ \}$, il suffit de montrer que si τ s'annule sur U, alors $\{\sigma, \tau\} = 0$ sur U. Soit alors $x \in U$ arbitraire, et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de U. Alors, $f\tau$ est identiquement nulle sur M, et on a

$$0 = \{\sigma, f\tau\}(x) \overset{(3.3)}{=} \{\sigma, f\}(x) \wedge \tau_x + f(x)\{\sigma, \tau\}(x) = \{\sigma, \tau\}(x).$$

Sur le domaine U de toute carte de M, $\{\ ,\ \}$ induira un crochet $\{\ ,\ \}_{|U} : \Omega^*(U) \times \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ donné, pour tout $\omega, \eta \in \Omega^*(U)$ et tout $x \in U$, par

$$\{\omega, \eta\}_{|U}(x) = \{\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}\}(x)\,,$$

où $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}$ sont des formes différentielles sur M qui coïncident avec ω et η sur un voisinage de x [2]. Puisque $\{,\}$ est de type local, $\{,\}_{|U}$ est bien défini, indépendamment du choix des extensions $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}$. Le fait que $\{\ ,\ \}$ vérifie les propriétés (a)-(d) implique immédiatement que $\{\ ,\ \}_{|U}$ vérifie les même propriétés. Or nous avons vu plus haut que, sur le domaine $U \subseteq M$ de toute carte, il existe un unique crochet $\{\ ,\ \}_U$ vérifiant (a)-(d) ; il en résulte que $\{\ ,\ \}_{|U} = \{\ ,\ \}_U$. Ainsi, si $\{\ ,\ \}$ existe sur M, il est déterminé de manière unique par :

$$\{\sigma, \tau\}(x) = \{\sigma_{|U}, \tau_{|U}\}_U(x), \tag{$*$}$$

où σ, $\tau \in \Omega^*(M)$, $x \in M$, U est le domaine d'une carte autour de x et $\{\ ,\ \}_U$ est l'unique crochet sur U vérifiant (a)-(d).

Il s'agit maintenant de vérifier que $(*)$ convient. D'après ce qui précède, $\{\ ,\ \}_U$ est de type local, et pour tout ouvert $U' \subseteq U$,

$$\{\ ,\ \}_{U\,|U'} = \{\ ,\ \}_{U'}\ .$$

Donc, si V est le domaine d'une autre carte autour de x, alors

$$\{\sigma_{|U}, \tau_{|U}\}_U(x) = \{\sigma_{|U\cap V}, \tau_{|U\cap V}\}_{U\cap V}(x) = \{\sigma_{|V}, \tau_{|V}\}_V(x)\ ,$$

2. De telles formes différentielles existent : si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors en choisissant une fonction plateau φ sur M de support dans U, la fonction $\widetilde{f} := \varphi f$ sur U, 0 en dehors de U, est lisse sur M. Comme $\omega = \sum \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, où x_{i_j}, $\omega_{i_1\cdots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, il suffit d'étendre les fonctions x_{i_j}, $\omega_{i_1\cdots i_k}$ en $\widetilde{x}_{i_j}$, $\widetilde{\omega}_{i_1\cdots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, et de prendre $\widetilde{\omega} = \sum \widetilde{\omega}_{i_1\cdots i_k} d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\widetilde{x}_{i_k}$.

ce qui montre que le crochet $\{\ ,\ \}$ donné par $(*)$ est bien défini. Les propriétés (a)-(d) sont clairement satisfaites, puisque chaque $\{\ ,\ \}_U$ les vérifie. Ceci achève la démonstration de l'existence et de l'unicité de $\{\ ,\ \}$ dans le cas général. $\square$

Remarque 3.3. En utilisant (3.1) et (3.3), on voit que le crochet de Hawkins satisfait aussi la propriété :

$$\{\sigma \wedge \tau, \rho\} = (-1)^{|\tau||\rho|}\{\sigma, \rho\} \wedge \tau + \sigma \wedge \{\tau, \rho\}\ , \tag{3.10}$$

pour toutes formes différentielles σ, τ et ρ.

3.1.2 *La métacourbure*

Une question naturelle qu'on peut se poser est : sous quelles conditions le crochet de Hawkins satisfait l'identité de Jacobi graduée ? Pour cela, considérons le Jacobiateur du crochet de Hawkins $\{\ ,\ \}$, c'est-à-dire, l'application

$$\mathcal{J} : \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

définie par :

$$\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) := \{\sigma, \{\tau, \rho\}\} - \{\{\sigma, \tau\}, \rho\} - (-1)^{|\sigma||\tau|}\{\tau, \{\sigma, \rho\}\}\ . \tag{3.11}$$

Le crochet de Hawkins satisfait donc l'identité de Jacobi si et seulement si son Jacobiateur est identiquement nul.

Comme conséquence des propriétés du crochet de Hawkins, son Jacobiateur jouit de propriétés remarquables.

Lemme 3.4. *Le Jacobiateur du crochet de Hawkins est $\mathbb{R}$-trilinéaire et vérifie, pour tout $\sigma, \tau, \rho, \lambda \in \Omega^*(M)$,*

$$\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\mathcal{J}(\tau, \sigma, \rho) = -(-1)^{|\tau||\rho|}\mathcal{J}(\sigma, \rho, \tau)\ , \tag{3.12}$$

$$\mathcal{J}(\sigma \wedge \tau, \rho, \lambda) = \sigma \wedge \mathcal{J}(\tau, \rho, \lambda) + (-1)^{|\tau|(|\rho|+|\lambda|)}\mathcal{J}(\sigma, \rho, \lambda) \wedge \tau\ , \tag{3.13}$$

et

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) = \mathcal{J}(d\sigma, \tau, \rho) &+ (-1)^{|\sigma|}\mathcal{J}(\sigma, d\tau, \rho) \\ &+ (-1)^{|\sigma|+|\tau|}\mathcal{J}(\sigma, \tau, d\rho)\ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

En outre, pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et tout $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\mathcal{J}(f, g, h) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(f, g, \alpha) = K(df, dg)\alpha\ , \tag{3.15}$$

où K est la courbure de $\mathcal{D}$.

Preuve. Par vérifications immédiates. □

D'après ce lemme, la platitude de $\mathcal{D}$ est une condition nécessaire pour que $\mathcal{J}$ soit nul. Dans le lemme qui suit, nous allons voir que lorsque $\mathcal{D}$ est plate, un tenseur de type (2,3) apparaît naturellement.

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, si $\mathcal{D}$ est plate il existe un tenseur $\mathcal{M}$ de type (2,3) symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariant, tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on ait*

$$\mathcal{M}(df, \alpha, \beta) = \{f, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{f, \alpha\}, \beta\} - \{\{f, \beta\}, \alpha\}\ , \tag{3.16}$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Hawkins associé à $\mathcal{D}$.

Le tenseur $\mathcal{M}$ est appelé ***métacourbure*** de $\mathcal{D}$. On dira de $\mathcal{D}$ qu'elle est *métaplate* si $\mathcal{M}$ est identiquement nulle.

Preuve. Définissons, pour toutes 1-formes α, β et γ, $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ comme étant la section de $\bigwedge^2 T^*M$ donnée pour tout $x \in M$ par :

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)(x) = \mathcal{J}(f, \beta, \gamma)(x)\ ,$$

où f est une fonction lisse telle que $\alpha(x) = d_x f$. Cette définition ne dépend pas du choix de f. En effet, si g est une autre fonction telle que $d_x g = \alpha(x)$, alors $d_x(f - g) = 0$ donc on peut écrire $f - g = c + \sum_i x_i\, h_i$ où c est une constante, x_i et h_i sont des fonctions lisses qui s'annulent en x. En vertu de (3.13),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(f-g, \beta, \gamma)(x) = \mathcal{J}(c, \beta, \gamma)(x) + \sum_i\, & x_i(x)\mathcal{J}(h_i, \beta, \gamma)(x)\\ &+ h_i(x)\mathcal{J}(x_i, \beta, \gamma)(x) = 0\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{M}$ est bien définie. Il est clair que $\mathcal{M}$ vérifie (3.16) et est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en α. Elle est aussi symétrique par rapport à β et γ; par (3.12). Ainsi, pour montrer que $\mathcal{M}$ est un tenseur, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en β. D'après (3.12), (3.13) et (3.15), pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(df, g\beta, \gamma) &= \mathcal{J}(f, g\beta, \gamma)\\ &= g\mathcal{M}(df, \beta, \gamma) + \beta \wedge K(df, dg, \gamma)\\ &= g\mathcal{M}(df, \beta, \gamma)\ ,\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{D}$ est de courbure nulle. Donc $\mathcal{M}(\alpha, g\beta, \gamma) = g\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$, pour toutes 1-formes α, β et γ.
Maintenant, puisque $\mathcal{D}$ est plate, pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= d(K(df, dg)dh) = d\mathcal{J}(f, g, dh) \\ &\overset{(3.14)}{=} \mathcal{J}(df, g, dh) + \mathcal{J}(f, dg, dh) \overset{(3.12)}{=} -\mathcal{M}(dg, df, dh) + \mathcal{M}(df, dg, dh) \,. \end{aligned}$$

Par le caractère tensoriel de $\mathcal{M}$, ceci implique $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{M}(\beta, \alpha, \gamma)$. □

La proposition suivante fournit une condition nécessaire et suffisante pour que le crochet de Hawkins vérifie l'identité de Jacobi.

Proposition 3.6. *Le crochet de Hawkins associé à une connexion contravariante sans torsion, $\mathcal{D}$, vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et métaplate.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{D}$ est plate et métaplate, et montrons que le Jacobiateur du crochet de Hawkins est identiquement nul. En utilisant (3.12) et (3.13), on montre aisément que le Jacobiateur $\mathcal{J}$ est de type local. Ceci nous permet de travailler dans le domaine d'une carte, dans lequel σ, τ et ρ sont des sommes finies de produits extérieurs de fonctions et de différentielles de fonctions (où éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés (3.12) et (3.13) permettent d'exprimer $\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho)$ comme sommes finies de produits extérieurs faisant intervenir des fonctions, des différentielles de fonctions et des Jacobiateurs de la forme :

$$\mathcal{J}(f, g, h), \quad \mathcal{J}(f, g, dh), \quad \mathcal{J}(f, dg, dh), \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(df, dg, dh) \,,$$

où f, g et h sont des fonctions lisses. Ces Jacobiateurs sont tous nuls, en effet, d'après (3.15) et (3.14),

$$\mathcal{J}(f, g, h) = 0, \quad \mathcal{J}(f, g, dh) = K(df, dg)dh = 0 \,,$$

$$\mathcal{J}(f, dg, dh) = \mathcal{M}(df, dg, dh) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(df, dg, dh) = d\mathcal{J}(f, dg, dh) = 0 \,.$$

Il en résulte que $\mathcal{J}$ est identiquement nul.
Inversement, si $\mathcal{J}$ est identiquement nul, $\mathcal{D}$ est clairement plate et métaplate. Ceci achève la démonstration. □

3.1.3 *Le tenseur* $\mathbf{T}$

Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion et sans courbure sur une variété de Poisson (M, π). Posons, pour tous $x \in M^{reg}$, $a, b \in T^*_x M$,

$$\mathbf{T}_x(a, b) := \{\alpha, \beta\}(x) \,, \tag{3.17}$$

où α, β sont des 1-formes $\mathcal{D}$-parallèles : $\mathcal{D}\alpha = \mathcal{D}\beta = 0$, définies au voisinage de x telles que $\alpha(x) = a$ et $\beta(x) = b$ [3], et $\{\ ,\ \}$ dénote le crochet de Hawkins associé à $\mathcal{D}$.

Lemme 3.7. *La formule (3.17) définit sur M^{reg} un tenseur $\mathbf{T}$ de type (2,2), symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariant. De plus,*

(i) $\mathcal{D}\mathbf{T} = \mathcal{M}$ *(métacourbure de $\mathcal{D}$) ;*

(ii) $\mathbf{T}$ *est identiquement nul si et seulement si toute 1-forme $\mathcal{D}$-parallèle est de différentielle $\mathcal{D}$-parallèle aussi.*

Preuve. Remarquons d'abord que si α est une 1-forme $\mathcal{D}$-parallèle, alors puisque $\mathcal{D}$ est sans torsion, $[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{D}_\alpha \beta$ pour toute 1-forme β, et donc, pour toute forme différentielle η, le crochet de Koszul-Schouten de α et η est égal à la dérivée contravariante de η dans la direction de α : $[\alpha, \eta]_\pi = \mathcal{D}_\alpha \eta$. Ainsi

$$\{\alpha, \beta\} \overset{(3.6)}{=} -\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, d\beta]_\pi = -\mathcal{D}_\beta d\alpha\,,$$

soit par symétrie du crochet de Hawkins de deux 1-formes,

$$\{\beta, \alpha\} = -\mathcal{D}_\beta d\alpha\,. \tag{3.18}$$

Donc pour toutes 1-formes $\mathcal{D}$-parallèles α, β,

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = -\mathcal{D}_\alpha d\beta = -\mathcal{D}_\beta d\alpha\,, \tag{3.19}$$

ce qui implique que $\mathbf{T}$ est bien défini.
Montrons (i). D'après (3.16) et (3.5), pour toute fonction f et toutes 1-formes $\mathcal{D}$-parallèles α, β, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(df, \beta, \alpha) &= \mathcal{D}_{df}\{\beta, \alpha\} - \{\beta, \mathcal{D}_{df}\alpha\} - \{\mathcal{D}_{df}\beta, \alpha\} \\ &= \mathcal{D}_{df}\{\beta, \alpha\} \overset{(3.18)}{=} -\mathcal{D}_{df}\mathcal{D}_\beta d\alpha\,,\end{aligned}$$

soit par le caractère tensoriel de $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}(\gamma, \beta, \alpha) = -\mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}_\beta d\alpha\,, \tag{3.20}$$

pour toute 1-forme γ. D'ou $\mathcal{M}(\gamma, \beta, \alpha) = \big(\mathcal{D}_\gamma \mathbf{T}\big)(\beta, \alpha)$.
Quant à (ii), il résulte immédiatement de (3.19). □

3. De telles 1-formes existent comme on le verra dans la Proposition 3.10.

3.2 Calcul des tenseurs $\mathcal{M}$ et $\mathbf{T}$

Le calcul de la métacourbure est en général difficile. Dans le cas d'un tenseur de Poisson symplectique, Hawkins a établi une formule simple de la métacourbure [16, Thm. 2.4, p. 393]. Boucetta et Bahayou [4] ont également établi une formule de la métacourbure dans le cas d'un groupe de Lie-Poisson muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Dans cette section, on va établir une formule de la métacourbure et du tenseur $\mathbf{T}$ lorsque la connexion contravariante est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion (voir Théorèmes 3.13-3.14). On va procéder en trois étapes : étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion et sans courbure $\mathcal{D}$,

1. on démontre que le fibré cotangent se décompose différentiablement, autour de tout point régulier x, sous la forme :
$$T^*M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}$$
avec $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable : $\mathcal{D}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$. Ceci permet de définir un isomorphisme de fibrés $\varpi^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est le champ caractéristique de π.
2. on montre qu'il exist un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$ autour de x tel que $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^{2r}$ et, pour toute décomposition comme ci-dessus, la famille $\mathbf{F}^* = \left\{\phi_i := \varpi^{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) ; dy_u\right\}$ forme un corepère $\mathcal{D}$-plat : $\mathcal{D}\phi_i = \mathcal{D}dy_u = 0$.
3. on calcule le repère dual de $\mathbf{F}^*$.

Les formules de la métacourbure et de $\mathbf{T}$ sont données dans $\mathbf{F}^*$.

Dans ce qui suit, on considère $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion.

Lemme 3.8. *Pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M^{reg})$,*
$$\pi_\sharp(\beta) = 0 \implies \pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha\beta) = 0$$
et, dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha\beta = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$.

Preuve. (i) : Si $\beta \in \ker \pi_\sharp$, alors $\mathcal{D}_\beta\alpha = 0$ et donc, comme $\mathcal{D}$ est sans torsion, $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha\beta) = \pi_\sharp([\alpha, \beta]_\pi) = [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)] = 0$ et $\mathcal{D}_\alpha\beta = [\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$ par définition du crochet de Koszul. □

Lemme 3.9. *Si $\mathcal{D}$ est plate, alors pour tout $x \in M^{reg}$ et tout $\mathcal{H}_0$ tel que $T_x^*M = (\ker \pi_\sharp)_x \oplus \mathcal{H}_0$, le fibré cotangent se décompose différentiablement au voisinage de x sous la forme*
$$T^*M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}\,,$$
avec $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable : $\mathcal{D}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$, et $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0$.

Preuve. Soit $(U, x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$ une carte locale autour de x dans laquelle

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

avec les composantes π_{ij} sont constantes. Notez que, dans ce cas, la matrice antisymétrique $(\pi_{ij})_{1\leq i,j\leq 2r}$ est une matrice inversible puisque elle est de rang $2r$; notons $(\pi^{ij})_{1\leq i,j\leq 2r}$ sa matrice inverse. La restriction de $\ker \pi_\sharp$ à U est un sous-fibré vectoriel de $T^*_{|U}M$ de rang $d-2r$, on peut donc trouver une décomposition lisse

$$T^*_{|U}M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0.$$

Il est clair que

$$\ker \pi_\sharp = \mathrm{Vect}\{dy_1, \ldots, dy_{d-2r}\}$$

et qu'il existe des fonctions $A_i^u \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telles que

$$\mathcal{H} = \mathrm{Vect}\left\{\theta_i := dx_i + \sum_{u=1}^{d-2r} A_i^u\, dy_u\right\}_{1\leq i\leq 2r}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur U, alors, pour tout $u = 1, \ldots, d-2r$, $\mathcal{D}_{dy_u} = 0$ et donc, comme $\mathcal{D}$ est sans torsion, d'après Lemme 3.8,

$$\mathcal{D}_{\theta_i} dy_u = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\theta_i)} dy_u = d(\pi_\sharp(\theta_i)(y_{d-2r})) = 0\,.$$

Ainsi $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable sur U si et seulement si $\mathcal{D}_{\theta_i}\theta_j \in \mathcal{H}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, 2r$. Notons $\Gamma_{ij}^k, \Gamma_{ij}^u$ les symboles de Christoffel de $\mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\theta_i}\theta_j &= \mathcal{D}_{dx_i}\left(dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} A_j^u\, dy_u\right)\\
&= \mathcal{D}_{dx_i} dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} \pi_\sharp(dx_i)(A_j^u)\, dy_u\\
&= \left(\sum_{k=1}^{2r} \Gamma_{ij}^k\, dx_k + \sum_{u=1}^{d-2r} \Gamma_{ij}^u\, dy_u\right) + \sum_{u=1}^{d-2r}\sum_{k=1}^{2r} \pi_{ik} \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k}\, dy_u\\
&= \sum_{k=1}^{2r} \Gamma_{ij}^k\, \theta_k + \sum_{u=1}^{d-2r}\left(\Gamma_{ij}^u + \sum_{k=1}^{2r}\left(\pi_{ik}\frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} - \Gamma_{ij}^k A_k^u\right)\right) dy_u\,.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable si et seulement si

$$\Gamma_{ij}^u + \sum_{k=1}^{2r}\left(\pi_{ik}\frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} - \Gamma_{ij}^k A_k^u\right) = 0 \quad \forall\, i, j, u\,,$$

ce qui équivaut au système linéaire d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial A^u_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2r}\left(\sum_{l=1}^{2r}\pi^{il}\Gamma^k_{lj}\right)A^u_k - \sum_{l=1}^{2r}\pi^{il}\Gamma^u_{lj} \quad \forall\, u,i,j\,, \tag{$*$}$$

avec les fonctions A^u_j sont considérées comme fonctions de variables $x_1,\dots,x_{2r}$ et de paramètres $y_1,\dots,y_{d-2r}$. Ainsi la décomposition souhaitée existe si et seulement si le système $(*)$ admet des solutions. En posant, pour tout $u=1,\dots,d-2r$ et tout $i=1,\dots,2r$,

$$A^u = \begin{pmatrix} A^u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A^u_{2r}\end{pmatrix}, \; \Gamma_i = \left(\sum_{m=1}^{2r}\pi^{im}\Gamma^l_{mk}\right)_{1\le k,l\le 2r} \quad \text{et} \quad Y^u_i = -\sum_{j=1}^{2r}\pi^{ij}\begin{pmatrix}\Gamma^u_{j1}\\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma^u_{j\,2r}\end{pmatrix},$$

le système $(*)$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}A^u = \Gamma_i A^u + Y^u_i\,,$$

qui, d'après le théorème de Frobenius (cf. e.g., [21, Théorème 1.1]), peut être résolu si et seulement si les conditions d'intégrabilité suivantes sont satisfaites pour tout $u=1,\dots,d-2r$ et tout $i,j=1,\dots,2r$:

$$\Gamma_i\Gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_i = \Gamma_j\Gamma_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_j\,, \quad \Gamma_i Y^u_j + \frac{\partial}{\partial x_j}Y^u_i = \Gamma_j Y^u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}Y^u_j$$

soit pour tout u,i,j,k,

$$\sum_{m=1}^{2r}\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} + \pi_{im}\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x_m} - \pi_{jm}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x_m} = 0\,,$$
$$\sum_{m=1}^{2r}\Gamma^u_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^u_{jm}\Gamma^m_{ik} + \pi_{im}\frac{\partial\Gamma^u_{jk}}{\partial x_m} - \pi_{jm}\frac{\partial\Gamma^u_{ik}}{\partial x_m} = 0\,.$$

Ce qui signifie, d'après (1.62), que la courbure de $\mathcal{D}$ est nulle. D'où le système $(*)$ a des solutions (qui dépendent différentiablement des paramètres et des valeurs initiales). Ceci achève la démonstration. □

Pour toute décomposition telle que dans le lemme précédent, $\pi_\sharp : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ est un isomorphisme de fibrés ; on notera $\varpi^{\mathcal{H}} : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ son inverse.

La première étape étant accomplie, on passe à l'étape suivante.

Proposition 3.10. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$\mathcal{D}$ est plate.*

(b) *Pour tout $x \in M^{reg}$ et tout $a \in T_x^*M$, il existe une 1-forme α définie au voisinage de x telle que $\alpha(x) = a$ et $\mathcal{D}\alpha = 0$.*

(c) *Pour tout point $x \in M^{reg}$, il existe une famille de 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ définies sur un voisinage ouvert U de x telles que $\mathcal{D}\alpha_i = 0$ et, pour tout $y \in U$, $\{\alpha_1(y), \ldots \alpha_d(y)\}$ est une base de T_y^*M. Une telle famille sera appelée co-repère $\mathcal{D}$-plat.*

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b) : Soit U un voisinage ouvert de x sur lequel le rang de π est constant. Sur U, le champ caractéristique $\mathcal{C}$ est une distribution (régulière) involutive de rang $2r$ et $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sans torsion ; la formule

$$\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)} \pi_\sharp(\beta) \quad (\alpha, \beta \in \Omega^1(U)) \tag{3.21}$$

définit donc sur $\mathcal{C}$ une connexion partielle ∇. On vérifie immédiatement que les tenseurs de courbure R^∇ et $R^\mathcal{D}$ de ∇ et $\mathcal{D}$, respectivement, sont reliés par la formule :

$$R^\nabla\big(\pi_\sharp(a), \pi_\sharp(b)\big)\pi_\sharp(c) = \pi_\sharp\left(R^\mathcal{D}(a,b)c\right) \quad \forall\, a,b,c \in T^*_{|U}M\,,$$

et donc ∇ est de courbure nulle puisque $\mathcal{D}$ l'est par hypothèse. En utilisant le théorème de Frobenius, on peut montrer comme dans le cas classique que pour tout $v \in \mathcal{C}_x$, il existe un champ de vecteurs X défini au voisinage de x tel que $X(x) = v$, $X(y) \in \mathcal{C}_y$ pour tout y voisin de x, et $\nabla X = 0$.
Soit maintenant $a \in T_x^*M$. D'après Lemme 3.9, on peut décomposer de manière lisse le fibré cotangent au voisinage de x en :

$$T^*M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}\,,$$

avec $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable. Écrivons $a = b + c$ avec $b \in \ker \pi_\sharp(x)$ et $c \in \mathcal{H}_x$, considérons un champ de vecteurs X sur un voisinage de x, tangent à $\mathcal{C}$ tel que $X(x) = \pi_\sharp(c)$ et $\nabla X = 0$, et posons $\gamma = \varpi^\mathcal{H}(X) \in \mathcal{H}$. Alors, $\gamma(x) = c$ et pour toute 1-forme ϕ, $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\phi \gamma) = \nabla_{\pi_\sharp(\phi)} X = 0$ donc $\mathcal{D}_\phi \gamma \in \ker \pi_\sharp$. Comme $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable, $\mathcal{D}_\phi \gamma \in \ker \pi_\sharp \cap \mathcal{H} = \{0\}$ ce qui montre que γ est $\mathcal{D}$-parallèle. En posant $\alpha = \sum_{u=1}^{d-2r} b_u\, dy_u + \gamma$, où les b_u sont les coordonnées de b dans $\{dy_1(x), \ldots, dy_{d-2r}(x)\}$, on obtient la 1-forme cherchée.

(b)$\Rightarrow$(c) : Si $a_1, \ldots, a_d$ est une base de T_x^*M, on peut prolonger chaque covecteur a_i en une 1-forme (locale) $\mathcal{D}$-parallèle α_i. Puisque $a_1, \ldots, a_d$ sont linéairement indépendants, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont linéairement indépendantes au voisinage de x.

(c)$\Rightarrow$(a) : Par hypothèse le tenseur de courbure $R^\mathcal{D}$ s'annule sur l'ouvert dense M^{reg} des points réguliers de (M, π) et donc s'annule partout, par continuité. $\square$

On suppose désormais que $\mathcal{D}$ est plate. Soit $x \in M^{reg}$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ un corepère $\mathcal{D}$-plat autour de x. La famille des champs de vecteurs $\{\pi_\sharp(\alpha_i)(x)\}_{i=1}^d$ engendre $\mathcal{C}_x$ et donc on peut en extraire une base, disons $\{\pi_\sharp(\alpha_{i_j})(x)\}_{j=1}^{2r}$. Par continuité, $\{\pi_\sharp(\alpha_{i_1}), \ldots, \pi_\sharp(\alpha_{i_{2r}})\}$ est libre au voisinage de x. Comme $\mathcal{D}$ est sans torsion, pour tout $j, k = 1, \ldots, 2r$, on a

$$[\pi_\sharp(\alpha_{i_j}), \pi_\sharp(\alpha_{i_k})] = \pi_\sharp([\alpha_{i_j}, \alpha_{i_k}]_\pi) = \pi_\sharp(\mathcal{D}_{\alpha_{i_j}}\alpha_{i_k} - \mathcal{D}_{\alpha_{i_k}}\alpha_{i_j}) = 0\,.$$

Il existe alors, en vertu du théorème de redressement simultané, un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$ centré en x tel que

$$\pi_\sharp(\alpha_{i_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \forall\, j = 1, \ldots, 2r\,.$$

Ainsi $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\,\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^{2r}$ et $\ker \pi_\sharp = \mathrm{Vect}\,\{dy_u\}_{u=1}^{d-2r}$. De plus, $\mathcal{D}dy_u = 0$ pour tout $u = 1, \ldots, d-2r$. Si on choisit maintenant une décomposition autour de x, $T^*M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable, alors $\phi_j := \varpi^{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ est la projection de α_{i_j} sur $\mathcal{H}$ parallèlement à $\ker \pi_\sharp$ et donc $\mathcal{D}\phi_j = 0$ puisque $\mathcal{D}\,\alpha_{i_j} = 0$ et que $\ker \pi_\sharp$ et $\mathcal{H}$ sont $\mathcal{D}$-stables. On obtient ainsi le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$, qu'on appellera *système de coordonnées plat*, et le corepère plat $\mathbf{F}^* = \{\phi_i, dy_u\}$ désirés. Ceci achève la deuxième étape.

Remarque 3.11. Si le tenseur de Poisson π est symplectique, alors $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion et il n'y a qu'un seul choix pour $\mathcal{H}$, à savoir, $\mathcal{H} = T^*M$. Dans ce cas, un système de coordonnées plat est un système $(x_1, \ldots, x_d)$ tel que $\nabla\,\partial/\partial x_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, où ∇ est la connexion (covariante) définie sur M par (3.21).

Maintenant, calculons le repère dual de $\mathbf{F}^*$. Notons $(\pi^{kl})_{1\leq k, l\leq 2r}$ la matrice inverse de celle de coefficients $\pi_{kl} = \pi(dx_k, dx_l)$. Pour tout $i = 1, \ldots, 2r$, il existe des fonctions uniques, $A_i^1, \ldots, A_i^{d-2r}$, définies au voisinage de x telles que :

$$dx_i + \sum_{u=1}^{d-2r} A_i^u\, dy_u \in \mathcal{H}\,. \tag{3.22}$$

Considérons pour tout $i = 1, \ldots, 2r$ et tout $u = 1, \ldots, d-2r$,

$$X_i := -X_{x_i} = -\pi_\sharp(dx_i)\,; \quad Y_u := \frac{\partial}{\partial y_u} - \sum_{i=1}^{2r} A_i^u\, \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.23}$$

Lemme 3.12. *Avec les mêmes notations précisées ci-dessus, $\{X_i, Y_u\}$ est le repère dual de $\mathbf{F}^*$. De plus, les champs de vecteurs X_i et Y_u sont, respectivement, hamil-*

toniens et de Poisson, et vérifient :

$$
\begin{aligned}
&[X_i, X_j] = -\sum_{k=1}^{2r} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} X_k \,; \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \frac{\partial A_i^u}{\partial x_j} X_j \,; \\
&[Y_u, Y_v] = \sum_{i,j=1}^{2r} \pi^{ij} \left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} \right) X_i \,.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Preuve. Pour tout $i, j = 1, \dots, 2r$, $u, v = 1, \dots, d-2r$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\phi_j(X_i) = -\phi_j(\pi_\sharp(dx_i)) = dx_i(\pi_\sharp(\phi_j)) = dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij} \,, \\
&dy_v(X_i) = -dy_v(\pi_\sharp(dx_i)) = dx_i(\pi_\sharp(dy_v)) = 0 \,, \quad dy_v(Y_u) = \delta_{uv} \,.
\end{aligned}
$$

De plus, comme $\phi_i(X_j) = \delta_{ij}$, on déduit que

$$
\mathcal{H} \ni \phi_i = \sum_j \pi^{ij} \left(dx_j + \sum_{k,u} \pi_{jk} \, \phi_k \left(\frac{\partial}{\partial y_u} \right) dy_u \right) .
$$

Donc, par unicité des fonctions A_i^u,

$$
A_i^u = \sum_{j=1}^{2r} \pi_{ij} \, \phi_j \left(\frac{\partial}{\partial y_u} \right) \quad \text{soit} \quad \phi_i \left(\frac{\partial}{\partial y_u} \right) = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij} \, A_j^u \,.
$$

Ainsi

$$
\phi_i = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij} \left(dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} A_j^u \, dy_u \right)
\tag{3.25}
$$

et donc

$$
\phi_i(Y_u) = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij} (-A_j^u + A_j^u) = 0 \,.
$$

Ce qui montre que $\{X_i, Y_u\}$ est le repère dual de $\mathbf{F}^*$.
Les champs de vecteurs X_i sont, par définition, des champs hamiltoniens. Montrons que les champs de vecteurs Y_u sont de Poisson. À partir de l'équation $[\phi_i, \phi_j]_\pi = 0$,

on obtient :

$$\begin{aligned}
Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j) &= \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \phi_j\,(Y_u) - \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \phi_i\,(Y_u) \\
&= -\phi_j\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, Y_u\right]\right) + \phi_i\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, Y_u\right]\right) \\
&= -\mathcal{L}_{Y_u}\phi_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j) \\
&\quad + \mathcal{L}_{Y_u}\phi_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - Y_u \cdot \pi(\phi_j, \phi_i) \\
&= -\pi(\phi_i, \mathcal{L}_{Y_u}\phi_j) - \pi(\mathcal{L}_{Y_u}\phi_i, \phi_j) + 2Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j)\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}_{Y_u}\pi\,(\phi_i, \phi_j) = 0\,.$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{L}_{Y_u}\pi\,(\phi_i, dy_v) = -\pi(\phi_i, \mathcal{L}_{Y_u} dy_v) = -\pi(\phi_i, d(Y_u(y_v)) = 0\,,$$

et on a clairement $\mathcal{L}_{Y_u}\pi\,(dy_v, dy_w) = 0$. Donc les champs de vecteurs Y_u sont bien de Poisson.
Comme X_i et Y_u sont, respectivement, hamiltoniens et de Poisson,

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &\overset{(1.6)}{=} X_{\{x_i, x_j\}} = X_{\pi_{ij}} = -\sum_{k=1}^{2r} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} X_k\,; \\
[X_i, Y_u] &\overset{(1.29)}{=} X_{Y_u(x_i)} = -X_{A_i^u} = \sum_{j=1}^{2r} \frac{\partial A_i^u}{\partial x_j} X_j\,.
\end{aligned}$$

La dernière égalité de (3.24) s'établit immédiatement par calcul direct. □

On est maintenant en mesure de donner l'expression de la métacourbure et de **T** dans le corepère $\mathbf{F}^*$.

Théorème 3.13. *Avec les mêmes hypothèses et notations déjà précisées plus haut, on a :*

(a) *Pour tout* $u = 1, \ldots, d - 2r$, $\mathcal{M}(dy_u, \cdot\,, \cdot\,) = 0$.

(b) *Pour tout* $i, j, k = 1, \ldots, 2r$,

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\sum_{l<m} \frac{\partial^3\, \pi_{lm}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\, \phi_l \wedge \phi_m + \sum_{l,u} \frac{\partial^3\, A_l^u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\, \phi_l \wedge dy_u$$
$$+\sum_{u<v,\,l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\pi^{kl}\left(\frac{\partial A_l^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_l^v}{\partial y_u} + \sum_m A_m^u \frac{\partial A_l^v}{\partial x_m} - A_m^v \frac{\partial A_l^u}{\partial x_m}\right)\right) dy_u \wedge dy_v.$$

Preuve. (a) : Pour tout $u = 1, \ldots, d-2r$ et pour toutes 1-formes α, β,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(dy_u, \alpha, \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \{y_u, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{y_u, \alpha\}, \beta\} - \{\{y_u, \beta\}, \alpha\}\\ &= \mathcal{D}_{dy_u}\{\alpha, \beta\} - \{\mathcal{D}_{dy_u}\alpha, \beta\} - \{\mathcal{D}_{dy_u}\beta, \alpha\}\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et que $\pi_\sharp(dy_u) = 0$.

(b) : D'après (3.20), pour tout $i, j, k = 1, \ldots, 2r$, on a

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\mathcal{D}_{\phi_i}\mathcal{D}_{\phi_j} d\phi_k\,.$$

Par ailleurs, d'après (3.24),

$$d\phi_i(X_j, X_k) = -\phi_i([X_j, X_k]) = \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i}\,, \quad d\phi_i(X_j, Y_u) = -\phi_i([X_j, Y_u]) = -\frac{\partial A_j^u}{\partial x_i}$$

et

$$\begin{aligned}d\phi_i(Y_u, Y_v) &= -\phi_i([Y_u, Y_v])\\ &= -\sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij}\left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k}\right).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}d\phi_i &= \sum_{j<k} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i}\, \phi_j \wedge \phi_k - \sum_{j,u} \frac{\partial A_j^u}{\partial x_i}\, \phi_j \wedge dy_u\\ &\quad - \sum_{u<v,\, j} \pi^{ij}\left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_k A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k}\right) dy_u \wedge dy_v\end{aligned} \tag{3.26}$$

ce qui permet de conclure. □

Si le tenseur de Poisson π est symplectique, alors $\mathcal{M}$ est identiquement nul sur M si et seulement si les composantes de π relativement à tout système de coordonnées plat sont polynomiales de degré au plus 2, ce qui est exactement la conclusion de [16, Thm. 2.4, p. 393].

Théorème 3.14. *Avec les hypothèses et notations du Théorème 3.13, on a :*

(i) *Pour tout* $u = 1, \ldots, d-2r$, $\mathbf{T}(dy_u, \cdot\,) = 0\,;$

(ii) *Pour tout* $i, j, k = 1, \ldots, 2r$,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\phi_i, \phi_j) &= -\sum_{k<l} \frac{\partial^2 \pi_{kl}}{\partial x_i \partial x_j}\, \phi_k \wedge \phi_l + \sum_{k,u} \frac{\partial^2 A_k^u}{\partial x_i \partial x_j}\, \phi_k \wedge dy_u\\ &+ \sum_{u<v,\, k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi^{jk}\left(\frac{\partial A_k^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_k^v}{\partial y_u} + \sum_l A_l^u \frac{\partial A_k^v}{\partial x_l} - A_l^v \frac{\partial A_k^u}{\partial x_l}\right)\right) dy_u \wedge dy_v.\end{aligned}$$

Preuve. Se démontre de manière similaire à celle du Théorème 3.13, en utilisant (3.19). □

Si le tenseur de Poisson π est symplectique, alors $\mathbf{T}$ est identiquement nul sur M si et seulement si les composantes de π relativement à tout système de coordonnées plat sont polynomiales de degré au plus 1.

Exemple 3.15. Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(G)$ l'action de $\mathfrak{g}$ sur G par champs de vecteurs invariants à gauche et $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ une solution de l'EYBC. Pour tout tenseur τ sur $\mathfrak{g}$, notons τ^+ le tenseur invariant à gauche sur G correspondant à τ. Il est facile de voir que la connexion contravariante $\mathcal{D}^r$ associée au tenseur de Poisson invariant à gauche $\pi^+ = \zeta(r)$, définie par (2), est donnée par :

$$\mathcal{D}^r_{\alpha^+}\beta^+ = -(\mathrm{ad}^*_{r(\alpha)}\beta)^+ \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^* \,.$$

De plus, comme ζ est une action libre, $\mathcal{D}^r$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T}$ est identiquement nul. Si r est inversible, alors π^+ est un tenseur de Poisson symplectique et la connexion ∇ reliée à $\mathcal{D}^r$ par (3.21) est donnée par :

$$\omega^+(\nabla_{u^+}v^+, w^+) = -\omega^+(v^+, [u^+, w^+]) \quad \forall\, u, v, w \in \mathfrak{g} \,,$$

où ω^+ est la forme symplectique invariante à gauche correspondante à π^+. On retrouve ainsi un résultat de Boucetta et Medina (cf. [42, Thm 1.1-(1)]) qui affirme que les composantes de π^+ relativement à la structure affine définie par ∇ sont polynomiales de degré au plus 1.

3.2.1 *Cas d'une variété de Riemann-Poisson*

Soit (M, π, g) une variété de Riemann-Poisson et soit $\mathcal{D}$ la connexion de Levi-Civita contravariante associée. Autour de tout point régulier de M, on a une décomposition lisse canonique du fibré cotangent :

$$T^*M = \ker \pi_\sharp \oplus (\ker \pi_\sharp)^\perp \,,$$

où $(\ker \pi_\sharp)^\perp$ est l'orthogonal de $\ker \pi_\sharp$ par rapport à g^*.

Lemme 3.16. *Soit $x \in M^{reg}$ un point régulier de M et U un voisinage ouvert de x sur lequel le rang de π est constant. On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur U. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$,*

$$\beta \in (\ker \pi_\sharp)^\perp \Longrightarrow \mathcal{D}_\alpha\beta \in (\ker \pi_\sharp)^\perp \,.$$

Preuve. Si $\beta \in (\ker \pi_\sharp)^\perp$, alors puisque $\mathcal{D}$ est métrique, pour tout $\gamma \in \Omega^1(U)$ tel que $\pi_\sharp(\gamma) = 0$, on a

$$g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) = \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - g^*(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma) = 0\,,$$

puisque $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha \gamma) = 0$ d'après Lemme 3.8. □

Ainsi, si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion plate, alors autour de tout point régulier (de rang $2r$), il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$ tel que $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\,\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^{2r}$ et la famille $\left\{\phi_i := \varpi^\perp(\partial/\partial x_i);\, dy_u\right\}$ forme un corepère $\mathcal{D}$-plat (Ici $\varpi^\perp : \mathcal{C} \to (\ker \pi_\sharp)^\perp$ est l'inverse de l'isomorphisme $\pi_\sharp : (\ker \pi_\sharp)^\perp \to \mathcal{C}$). De plus, les fonctions A_i^u définies par (3.22) peuvent être calculées à l'aide de la métrique ; en effet, en utilisant (3.25) et le fait que $g^*(\phi_i, dy_u) = 0$, on voit facilement que $A_i^u = -\sum_v g^*_{iv} g^{*\,uv}$ où $g^*_{iv} = g^*(dx_i, dy_u)$ et $(g^{*\,uv})$ est la matrice inverse de celle de coefficients $g^*_{uv} = g^*(dy_u, dy_v)$. Notez que $g^{*\,uv}$ sont de Casimir puisque $\partial g^*_{uv}/\partial x_i = (\mathcal{D}_{\phi_i} g^*)(dy_u, dy_v) = 0$.

3.3 Résultat principal

Cette section est entièrement consacrée à la preuve du théorème suivant, résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.17. *Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une connexion contravariante sans torsion ni courbure.*

(1) *Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T} = 0$ alors, pour tout point régulier x_0 de rang $2r$, il existe une action libre $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$ d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension $2r$ sur un voisinage ouvert U de x_0, et une solution inversible $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ de l'équation de Yang-Baxter classique telles que $\pi = \zeta(r)$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$.*

(2) *Si de plus $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et à une métrique riemannienne g, alors les champs fondamentaux de ζ sont de Killing.*

Preuve. Soit $(x_1, \ldots, x_{2r}, y_1, \ldots, y_{d-2r})$ un système de coordonnées plat autour du point régulier x_0, choisissons une décomposition lisse du fibré cotangent au voisinage de x_0, $T^*M = (\ker \pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable et considérons $\{X_i, Y_u\}$ le repère défini par (3.23), dual du corepère $\mathcal{D}$-plat $\mathbf{F}^* = \{\phi_i, dy_u\}$. On va construire une famille $\{Z_1, \ldots, Z_{2r}\}$ de champs de vecteurs sur un voisinage ouvert U de x_0, linéairement indépendants, tangents au feuilletage symplectique $\mathcal{S}$ et qui commutent avec les X_i et les Y_u. Dans ce cas,

- la famille $\{Z_1, \ldots, Z_{2r}\}$ formera une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension $2r$ qui agit librement sur U ; en effet, $[Z_i, Z_j] = \sum_k c_{ij}^k Z_k$ avec $c_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$, et

$$[[Z_i, Z_j], X_l] = [[Z_i, Z_j], Y_u] = 0 \quad \forall\, i, j, l, u$$

puisque Z_i commutent avec X_j et Y_u. Donc $X_l(c_{ij}^k) = Y_u(c_{ij}^k) = 0$, ce qui montre que c_{ij}^k sont constantes.
- le tenseur de Poisson π s'écrira

$$\pi = \sum_{i<j} a_{ij}\, Z_i \wedge Z_j$$

avec la matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2r}$ est constante et inversible, puisque les champs de vecteurs X_i, Y_u sont de Poisson (d'après Lemme 3.12) et commutent avec les Z_i.
- la connexion $\mathcal{D}$ sera donnée sur U par :

$$\mathcal{D}_\alpha \beta = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i)\, \mathcal{L}_{Z_j} \beta\,.$$

En effet, la différence des deux membres de cette égalité est tensorielle en β. Il suffit donc de la vérifier pour $\beta \in \mathbf{F}^*$. Or $\mathcal{L}_{Z_i}\phi_j = \mathcal{L}_{Z_i} dy_u = 0$. Ceci permet de conclure.

On va procéder en deux étapes. On va d'abord construire une famille libre de champs de vecteurs tangents à $\mathcal{S}$ qui commutent avec les X_i, et à partir de celle-ci, on va construire ensuite la famille désirée.
D'après Lemmes 3.14-3.12, on a :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{ij}^k\, X_k\,, \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \mu_{iu}^j\, X_j\ ,, \quad [Y_u, Y_v] = \sum_{i=1}^{2r} \nu_{uv}^i\, X_i$$

où les fonctions $\lambda_{ij}^k, \mu_{iu}^j, \nu_{uv}^i$ sont toutes de Casimir. Soit $\mathcal{T} \subset M$ une transversale à $\mathcal{S}$ passant par x_0. Pour tout $y \in \mathcal{T}$, les restrictions $X_1^y, \ldots, X_{2r}^y$ des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_{2r}$ sur la feuille symplectique $\mathcal{S}_y$ passant par y forment une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_y$ qui agit librement et transitivement sur $\mathcal{S}_y$. Donc, d'après [14], il existe un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie $\hat{\Gamma}_y : \mathfrak{g}_y \to \mathfrak{X}^1(\mathcal{S}_y)$ libre et transitive dont l'image est

$$\hat{\Gamma}_y(\mathfrak{g}_y) = \left\{ T \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{S}_y) :\ [T, X_i^y] = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 2r \right\}\,,$$

et tel que $\hat{\Gamma}_y(X_i^y)(y) = X_i(y)$ pour tout $i = 1, \ldots, 2r$. En posant, pour tout $i = 1, \ldots, 2r$,

$$T_i(z) := \hat{\Gamma}_y(X_i^y)(z) \quad \forall\, z \in \mathcal{S}_y\,,$$

et en faisant varier y le long de $\mathcal{T}$, on obtient une famille libre, $\{T_1, \dots, T_{2r}\}$, de champs de vecteurs tangents à $\mathcal{S}$, vérifiant

$$[T_i, X_j] = 0 \quad \forall\, i, j = 1, \dots, 2r$$

et tels que $T_i(y) = X_i(y)$ pour tous $i = 1, \dots, 2r$, $y \in \mathcal{T}$. Ces champs de vecteurs sont lisses puisque les solutions du système

$$[T, X_i] = 0\,, \quad i = 1, \dots, 2r$$

dépendent différentiablement du paramètre $y \in \mathcal{T}$ est des valeurs initiales le long de la transversale $\mathcal{T}$. Puisque μ_{iu}^j sont des fonctions de Casimir,

$$[X_i, [T_j, Y_u]] = [[X_i, T_j], Y_u] + [T_j, [X_i, Y_u]] = 0 \quad \forall\, i, j, u\,.$$

Donc pour tous $i = 1, \dots, 2r$, $u = 1, \dots, d - 2r$,

$$[T_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iu}^j\, T_j$$

où γ_{ju}^i sont des fonctions de Casimir. Par ailleurs,

$$[T_i, [Y_u, Y_v]] = 0 \quad \forall\, i, u, v$$

car ν_{uv}^i sont de Casimir, et

$$\begin{aligned}
[T_i, [Y_u, Y_v]] &= [[T_i, Y_u], Y_v] + [Y_u, [T_i, Y_v]] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iu}^j\, T_j, Y_v\right] + \left[Y_u, \sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iv}^j\, T_j\right] \\
&= \sum_{j=1}^{2r} \left(-\frac{\partial \gamma_{iu}^j}{\partial y_v} + \frac{\partial \gamma_{iv}^j}{\partial y_u} - \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^j \gamma_{iv}^k - \gamma_{kv}^j \gamma_{iu}^k \right) T_j\,,
\end{aligned}$$

d'après (3.23) et le fait que γ_{iu}^j sont de Casimir. Il en résulte

$$\frac{\partial \gamma_{ju}^i}{\partial y_v} - \frac{\partial \gamma_{jv}^i}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^i \gamma_{jv}^k - \gamma_{kv}^i \gamma_{ju}^k = 0 \quad \forall\,, i, j, u, v\,. \tag{$*$}$$

On va maintenant chercher une matrice inversible $\xi = (\xi_{ij})_{1 \le i,j \le 2r}$ avec ξ_{ij} sont des fonctions de Casimir et telle que les champs de vecteurs

$$Z_i := \sum_{j=1}^{2r} \xi_{ji}\, T_j\,, \quad i = 1, \dots, 2r$$

vérifient $[Z_i, Y_u] = 0 \ \forall\, i, u$, ou de manière équivalente,

$$Y_u(\xi_{ji}) = \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^{j}\, \xi_{ki} \quad \forall\, i, j, u\,. \tag{$**$}$$

Compte tenu de (3.23) et le fait que ξ_{ji} sont cherchées de sorte qu'elles soient de Casimir, $(**)$ équivaut le système

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial y_u} = \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^{j}\, \xi_{ki} \quad \forall\, i, j, u\,,$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y_u}\, \xi_i = \Gamma_u\, \xi_i$$

où $\xi_1, \dots, \xi_{2r}$ sont les vecteurs colonnes de ξ et $\Gamma_u := (\gamma_{ju}^{i})_{1 \leq i,j \leq 2r}$. Il s'agit donc de résoudre ce système. Comme toutes les données sont de Casimir et $(y_1, \dots, y_{d-2r})$ est un système de coordonnées sur $\mathcal{T}$, on peut le résoudre sur $\mathcal{T}$. D'après le théorème de Frobenius, celui-ci peut être résolu si et seulement si les conditions d'intégrabilité suivantes sont satisfaites :

$$\Gamma_u \Gamma_v + \frac{\partial}{\partial y_v} \Gamma_u = \Gamma_v \Gamma_u + \frac{\partial}{\partial y_u} \Gamma_v$$

pour tout $u, v = 1, \dots, d-2r$, ce qui est exactement $(*)$. Il suffit alors de prendre $\xi_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ comme conditions initiales pour conclure.
Finalement, si $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et une à métrique riemannienne g, alors en choisissant $\mathcal{H} = (\ker \pi_\sharp)^\perp$, on a

$$\mathcal{L}_{Z_i} g\,(\phi_j, \phi_k) = \mathcal{L}_{Z_i} g\,(\phi_j, dy_u) = \mathcal{L}_{Z_i} g\,(dy_u, dy_v) = 0$$

puisque $\mathcal{L}_{Z_i} \phi_j = \mathcal{L}_{Z_i} dy_u = 0$, $g(\phi_i, \phi_j)$ et $g(dy_u, dy_v)$ sont de Casimir. Ceci montre que Z_i sont des champs de Killing. $\square$

Bibliographie

[1] A. A. Kirillov, *Local Lie algebras*, Russian Math. Surveys **31** (1976) 55-75.

[2] A. Bahayou, *Connexions contravariantes sur les groupes de Lie-Poisson*, Thèse de l'Université d'Ourgla (Algérie) 2011,

[3] A. Bahayou & M. Boucetta, *Multiplicative noncommutative deformations of left invariant Riemannian metrics on Heisenberg groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 347 (2009), 791-796.

[4] ———, *Metacurvature of Riemannian Poisson-Lie groups*, Journal of Lie Theory, Vol. 19 (2009) 439-462.

[5] A. C. da Silva & A. Weinstein, *Geometric models for noncommutative algebras*,

[6] A. Diatta & A. Medina, *Classical Yang-Baxter equation and left invariant geometry on Lie groups*, Manuscripta Math. 114, 477-486 2004.

[7] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. **12** (1977) 253-300.

[8] A. Nijenhuis, *Jocobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tesor fields*, J. Indag. Math. **17** (1955) 390-403.

[9] A. V. Karabegov, *Fedosov's formal symplectic groupoïd and contravariant connections*, Journal of Geometry and Physics, Vol 56, Issue 10 (2006) 1985-2009.

[10] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983) no. 3, 523-557.

[11] ———, *Poisson geometry*, Differential Geometry and its Applications, 9 (1998) 213-238 North-Holland.

[12] B.-Y. Chu, *Symplectic homogeneous spaces*, Transactions of the AMS, 197 (1974), 145-159.

[13] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau & P. Vanhaecke, *Poisson structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **347**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

[14] D. V. Alekseevsk & P. W. Michor, *Differential geometry of $\mathfrak{g}$-manifolds*, Differantial Geometry and its Applications, 5 (1995) 371-403 North-Holland.

[15] E. Hawkins, *Noncommutative rigidity*, Commun. Math. Phys. **246** (2004) 211-235.

[16] ———, *The structure of noncommutative deformations*, J. Diff. Geom. **77** (2007) 385-424.

[17] F.-J. Turiel, *Structures bihamiltoniennnes sur le fibré contangent*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **315**, Série I, p. 1085-1088, 1992.

[18] F. Magri, *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. **19** (1978) 1156-1162.

[19] F. Magri, P. Casati, G. Falqui & M. Pedroni, *Eight lectures on integrable systems*, In : Integrability of Nonlinear Systems, Lecture Notes in Physics **495** (2nd edition), 2004, pp. 209-250.

[20] H. Bursztyn, *Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections*, `http://arxiv.org/abs/math/0207255`.

[21] H. A. Hakopian & M. G. Tonoyan, *Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems*, New York J. Math. **10** (2004) 89-116.

[22] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973) 171-188.

[23] I. Vaismann, *On the geometric quantization of Poisson manifolds*, J. of Math. Physics, **32** (1991) 3339-3345.

[24] ———, *Symplectic geometry and secondary caracteristic classes*, Progress in Math. **72**, Birkhäuser, Boston, 1987.

[25] ———, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progr. in Math. Vol. **118**, Birkhäsher, Berlin 1994.

[26] J. A. Nijenhuis, *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convengo Int. Geometria differenziale Italia, 1953, Ed. Cremonese, Roma, 1954, pp 1-7.

[27] J. Grabawski, *$\mathbb{Z}$-graded extensions of Poisson brackets*, Reviews in Math. Phys . **9** (1997) 1-27.

[28] J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie.* Dans : Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque hors série, (1985) 257-271.

[29] J. M. Dardié & A. Medina, *Algèbres de Lie Kählériennes et double extension*, J. Algebra 3, **185** (1996) 774-795.

[30] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifilods*, Graduate text in Math., **218**, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.

[31] J. Monterde & J. A. Vallejo, *Poisson brackets of even symplectic forms on the algebra of differential forms*, Ann. Global Anal. Geom. **22** (2002) 267-289.

[32] J.-P. Dufour & N. T. Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Math. Vol. **242**, Birkhäuser Verlag Berlin 2005.

[33] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math. **264** (1967) 245-248.

[34] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várily, H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, 2001.

[35] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Series **213**, Cambridge University Press, New York, 2005.

[36] M. Boucetta, *Compatibilités des structures pseudo-riemanniennes et des structrues de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **333** (2001) 763-768.

[37] ———, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation and non-commutative deformations*, Letters in Mathematical Physics (2008) 83 :69-81.

[38] ———, *Poisson manifolds with compatible pseudo-metric and pseudo-Riemannian Lie algebras*, Differential Geometry and its Applications, **Vol. 20**, Issue 3(2004), 279-291.

[39] ———, *Riemann-Poisson manifolds and Kähler-Riemann foliations*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **336**, Série I, (2003) 423-428.

[40] ———, *On the Riemann-Lie algebras and Riemann-Poisson Lie groups*, J. Lie Theory 15 (2005), no. 1, 183-195.

[41] ———, *Riemannian geometry of Lie algebroïds*, Journal of the Egyptian Mathematical society (2011).

[42] M. Boucetta & A. Medina, *Polynomial Poisson structures on affine solvmanifolds*, J. Symplectic Geom. Vol. 9, Number 3 (2011), 387-401.

[43] M. Boucetta & Z. Saassai, *A class of Poisson structures compatible with the canonical Poisson structure on the cotangent bundule*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **349** (2011) 331-335.

[44] M. Crainic & I. Marcut, *On the existence of symplectic realizations*, J. Symplectic Geom. Vol. 9, Number 4 (2011), 435-444.

[45] P. Stefan, *Accessible sets, orbits, and foliations with singularities*, Proc. London Soc. (3) **29** (1974) 699-713.

[46] R. L. Fernandes, *Connections in Poisson Geometry I : holonomy and invariants*, J. Diff. Geom. **54** (2000) 303-366.

[47] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, J. école Polytechnique **8** Cah. 15 (1805) 1414-1444.

[48] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Fondations of differential geometry*, Vol. I, II, Interscience Publ., New York-London, 1969.

[49] Y. Kosmann-Schwarzbach, *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Annals Inst. Fourier, **46**, 5 (1996) 1243-1274.

[50] Y. Kosmann-Schwarzbach & F. Magri, *Poisson-Nijenhuis structures*, Annales de l'I. H. P., section A, tome 53, n° 1 (1990), p. 35-81.

[51] Y. Matsushima, *Differentiable manifolds*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1972.