Quelques problèmes sur les algèbres réelles de division

Conférence présentée par le Professeur Abdellatif ROCHDI

Université Cadi Ayyad Marrakech,
Séminaire d'Algèbre, Géométrie, Topologie et application

Marrakech, 27 Mars 2021

Sir William Rowan Hamilton
(1805 - 1865)

Découverte des QUATERNIONS
(16 Octobre 1843)

John Thomas Graves
(1806 - 1870)

Découverte des OCTONIONS
(Décembre 1843)

Arthur Cayley
1821-1895

Découverte indépendante des OCTONIONS
(publiée en 1845)

Definition 1

Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.* $\mathcal{A}$ *muni d'une application bilinéaire* $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad (x, y) \mapsto xy$ *dite produit de* $\mathcal{A}$*.* $\mathcal{A}$ *est dite* algèbre réelle de division *si elle est de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *et si les opérateurs de multiplication* $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto xy$*,* $R_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto yx$ *sont bijectifs pour tout* $x \in \mathcal{A} - \{0\}$*. Les algèbres réelles*

$$
\begin{aligned}
{}^*\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \odot) : &\qquad x \odot y = \overline{x} y, \\
\overset{*}{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, \diamond) : &\qquad x \diamond y = \overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}
$$

sont non associatives et non unitaires.

Hamilton (1843)
(découverte des quaternions $\mathbb{H}$)

Graves (1843), Cayley (1845)
(découverte des octonions $\mathbb{O}$)

Frobenius (1878)

Ostrowski (1918)

Zorn (1931)

Dickson (1935)

Hopf (1940)

Albert (1942, 47, 48, 49)

Bruck (1944)

Rees (1950)

Raffin (1950)

Wright (1953)

Segre (1954)

Bott-Milnor, Kervaire (1958)

Urbanik-Wright (1960)

Urbanik (1961)

Osborn (1962)

Schafer (1966)

Okubo (1978)
(découverte des pseudo-octonions $\mathbb{P}$)

Yang (1981)

Benkart-Osborn (1981)

Benkart-Britten-Osborn (1982)

Petro (1987)

Hübner-Petersson (2004)

Rodríguez (2004)

Dieterich (2005)

Darpö (2006)

Cabrera-Rodríguez (2014)

Autres

Livres

[BD 73] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, (1973).

[BK 66] H. Braun and M. Koecher, *Jordan Algebren.* Springer-Verlag, (1966).

[CR 14] F M. Cabrera and Á. Rodríguez, *Non-associative normed algebras. Volume 1 : The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark Theorems.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **154**. Cambridge University Press, 2014.

[CR 18] F M. Cabrera and Á. Rodríguez, *Non-associative normed algebras. Volume 2 : Representation Theory and the Zel'manov Approach.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **167**. Cambridge University Press, 2018.

[HKR 90] F. Hirzebruch, M. Koecher, and R. Remmert, *Numbers.* Graduate texts in Mathematics **123**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ka 77] A. M. Kaïdi, *Bases para una teoria de las algebras no asociativas normadas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain (1977).

Livres

[Ku 67] A. G. Kurosh, *Algèbre Générale.* Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod, Paris (1967).

[Ri 60] C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras.* Princeton (1960)

[Roc 94] A. Rochdi, *Algèbres non associatives normées de division. Classification des algèbres réelles de Jordan non commutatives de division linéaire de dimension 8.* Thèse Doctorale, Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat (1994).

[Sc 66] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press, New York (1966).

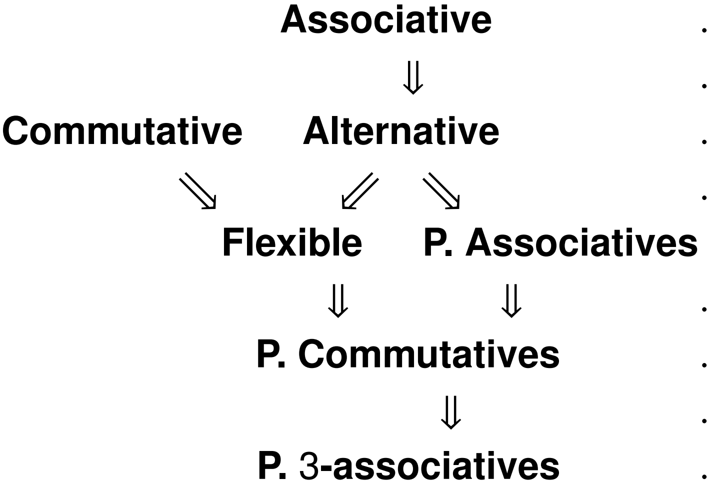
[Ram 99] M. I. Ramírez, *On four dimensional absolute valued algebras.* Proceedings of the International Conference on Jordan Structures (Málaga, June 1997) (Ed. A. Castellón, J. A. Cuenca, A. Fernández, and C. Martín), 169-173, Málaga, (1999).

Definitions 2

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre.

1. *Elle est dite* ***alternative*** *si* $x^2y = x(xy)$ *et* $yx^2 = (yx)x$.
2. *Elle est dite* ***à puissances associatives*** *si pour tout* $x \in \mathcal{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *engendrée par* x *est associative.*
3. *Elle est dite* ***à puissances commutatives*** *si pour tout* $x \in \mathcal{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *engendrée par* x *est commutative.*
4. *Elle est dite* ***flexible*** *si elle satisfait à l'identité* $(xy)x = x(yx)$.
5. *Elle est dite* ***à puissances*** 3***-associatives*** *si* $xx^2 = x^2x := x^3$.

L'organigramme suivant illustre la hiérarchie entre ces identités :



Associative

Commutative **Alternative**

Flexible **P. Associatives**

P. Commutatives

P. 3-associatives

Definition 3. (Mutation)

Soit $\mathcal{A}$ *une algèbre et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On appelle mutation* λ *de* $\mathcal{A}$ *et on note* $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ *l'algèbre ayant pour espace vectoriel sous-jacent* $\mathcal{A}$ *et pour produit* $x \overset{\lambda}{\odot} y = \lambda xy + (1-\lambda)yx$.

Definition 4. (Isotopie)

Soit $\mathcal{A}$ *une algèbre et soient* $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *deux applications linéaires bijectives. On définit sur l'espace vectoriel* $\mathcal{A}$ *un nouveau produit en posant* $x \odot y = \varphi(x)\psi(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathcal{A}$*. L'algèbre* $(\mathcal{A}, \odot)$ *ainsi obtenue est dite isotope de* $\mathcal{A}$ *qu'on note* $\mathcal{A}_{\varphi,\psi}$*. Notons que* $\mathcal{A}_{\varphi,\psi}$ *est de division si et seulement si* $\mathcal{A}$ *est de division.* L'algèbre $\overset{*}{\mathbb{C}}$ est isotope à $\mathbb{C}$. ▪

Definitions 5

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre à élément unité e.

1. $\mathcal{A}$ est dite quadratique si pour tout $x \in \mathcal{A}$ les éléments e, x, x^2 sont liés. C'est le cas pour l'algèbre réelle $M_2(\mathbb{R})$: $M^2 - tr(M)M + det(M)I_2 = 0$. $\mathcal{A}$ s'obtient à partir d'une algèbre anti-commutative $(V, \wedge)$ munie d'une forme bilinéaire $(.,.)$ en définissant sur le $\mathbb{K}$−espace vectoriel $\mathbb{K}e \oplus V$ le produit
$$(\alpha e + u)(\beta e + v) = \Big(\alpha\beta + (u, v)\Big)e + \Big(\alpha v + \beta u + u \wedge v\Big).$$
$(V, \wedge)$ est dite l'algèbre anti-commutative associée à $\mathcal{A} = \mathbb{K}e \oplus V$ et $(.,.) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ $(\alpha + x, \beta + y) \mapsto \alpha\beta + (x, y)$ est dite la forme bilinéaire associée à $\mathcal{A}$. On notera $(V, \wedge, (.,.))$ l'algèbre quadratique $\mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ est dite cayleyenne si elle est munie d'une involution $\sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $x \mapsto \overline{x}$ telle que $x + \overline{x}, x\overline{x} \in \mathbb{K}e$.

Definition 6. (Procédé de Cayley-Dickson)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle cayleyenne munie de son involution cayleyenne $\sigma_{\mathcal{A}} : x \mapsto \overline{x}$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ du produit :

$$(x, y)(x', y') = (xx' - \overline{y'}y, y\overline{x'} + y'x).$$

L'algèbre obtenue est cayeyenne dite extension cayleyenne de $\mathcal{A}$ notée $E(\mathcal{A})$. Elle munie de son involution cayleyenne $\sigma_{E(\mathcal{A})} : (x, y) \mapsto (\overline{x}, -y)$.

Examples 1

En partant de l'algèbre réelle cayeleyenne $\mathbb{R}$ *munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{R}} = I_{\mathbb{R}}$ *on ontient :*

1. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ *des nombres complexes munie de sa conjugaison cayleyenne standard* $\sigma_{\mathbb{C}}$*,*
2. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{C}) = \mathbb{H}$ *des quaternions munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{H}}$*,*
3. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{H}) = \mathbb{O}$ *des octonions munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{O}}$.

Les algèbres réelles $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ *sont de division de dimension* $1, 2, 4, 8$ *respectivement. Seules* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *sont associatives et commutatives,* $\mathbb{H}$ *est associative mais non commutative,* $\mathbb{O}$ *est alternative mais non associative et non commutative.*

Theorem 1. (FROBENIUS 1878)

$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ classifie les algèbres réelles **associatives** de division.

FROBENIUS Georg Ferdinand

1849-1917

Theorem 2. (ZORN 1931)

$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ classifie les algèbres réelles **alternatives** de division.

Max Zorn

(1906 - 1993)

Theorem 3. (HOPF 1940)

La dimension d’une algèbre réelle de division est une puissance de 2. Elle est ≤ 2 si de plus l’algèbre est commutative.

Heinz Hopf

Heinz Wilhelm Hopf
(1894 - 1971)

Theorem 4. (SEGRE 1954)

Toute algèbre réelle de division contient au moins un idempotent non nul.

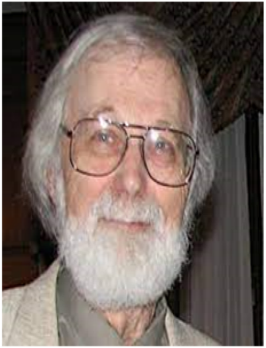
Beniamino Segre
1903-1977

Theorem 5. (KERVAIRE-MILNOR-BOTT 1958)

Si l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit sans diviseurs de zéro alors $n = 1, 2, 4$ ou 8.

Michel Kervaire

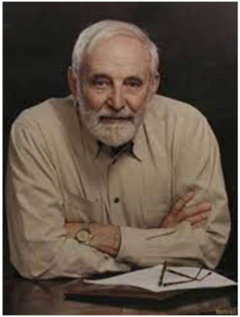
1927-2007



John Milnor

1931 -

Prix Abel 2011



Raoul Bott

1926-2005

Prix Oswald Veblen en géométrie de l'AMS (1964)
Prix Jeffery-Williams de la SM du Canada (1983)
National Medal of Science (1987)
Prix Wolf de mathématiques (2000)
Membre étranger de la Royal Society (2005)

Theorem 6. (YANG 1981-PETRO 1987)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle ***unitaire*** de division de dimension ≥ 2. Alors $\mathcal{A}$ contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Chung Tao Yang
1923 – 2005

Open problem 1

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre réelle de division de dimension ≥ 2 à idempotent non nul central. Est ce que $\mathscr{A}$ contient une sous-algèbre de dimension 2 ?

Theorem 7

Les algèbres réelles quadratiques flexibles de division de dimension ≤ 4 sont à isomorphisme près $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^{(\lambda)}$ où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. De plus, $\mathbb{H}^{(\lambda)} \simeq \mathbb{H}^{(\mu)}$ *(*$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$*)* si et seulement si $\lambda = \mu$ ou $\lambda = 1 - \mu$.

Theorem 8. (DE LOS SANTOS-CUENCA-KAIDI-ROCHDI 1999)

Les algèbres réelles quadratiques flexibles de division de dimension 8 s'obtiennent, à partir de l'algèbre réelle $\mathbb{O} = \big(W, (.|.), \wedge\big)$ de Cayley-Dickson, par isotopie vectorielle et sont à isomorphisme près $\mathbb{O}(s)$ où s est un automorphisme symétrique de l'espace euclidien $\big(W, -(.|.)\big)$, défini positif. De plus, $\mathbb{O}(s') \simeq \mathbb{O}(s)$ *(*s et s' étant deux automorphismes symétriques de l'espace euclidien $\big(W, -(.|.)\big)$, définis positifs*)* si et seulement si il existe $f \in Aut(\mathbb{O})$ tel que $\tilde{s}' = f^{-1}\tilde{s}f$.

Open problem 2

Fournir une classification des algèbres réelles de division à idempotent non nul central qui satisfont à $(x^2, y^2, x^2) = 0$.

Theorem 9. (DARPÖ-ROCHDI 2011)

Toute algèbre réelle à puissances commutatives de division de dimension 4 s'obtient à partir d'une algèbre quadratique par isotopie plane.

Associative → $\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}$

$$\Downarrow$$

Alternative → $\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H},\ \mathbb{O}$

$$\Downarrow$$

Flexible et à P. Associatives → $\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}^{(\lambda)},\ \mathbb{O}(s)$

$$\Swarrow \qquad \Searrow$$

Flexible (complètement) **P. A. → 1, 2, 4 et p. en dim 8**

⇘ ⇙

P. Commutatives → uniquement en dim 1, 2, 4

⇓

P. 3-associatives → en dim 1, 2 et p. en dim 4.

Abraham Adrian Albert
1905 – 1972

Susumu Okubo
1930 - 2015

Georgia McClure Benkart

1949 -

Contribution à la classification des algèbres de Lie modulaires simples

Ángel Rodríguez Palacios

Bibliographie

[A 47] A. A. Albert, *Absolute valued real algebras.* Ann. Math. **48** (1947), 495-501.

[B 01] J. C. Baez, *The octonions.* Bulletin (New Series) of the AMS **39** (2) (2001), 145-205.

[BM 58] R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.

[CKMMRR 11] A. Calderón, A. Kaidi, C. Martín, A. Morales, M. Ramírez, and A. Rochdi, *Finite dimensional absolute valued algebras.* Israel J. Math. **184** (2011), 193-220.

[CR 08] A. Chandid, and A. Rochdi, *A survey on absolute valued algebras satisfying* $(x^i, x^j, x^k) = 0$. Int. J. Algebra, **2** (2008), 837-852.

[Cu 92] A. Cuenca Mira, *On one-sided division infinite-dimensional normed real algebras.* Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 485-488.

[Cu 06] J. A. Cuenca, *On composition and absolute valued algebras.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **136A**, (2006) 717-731.

[CDKR 99] J. A. Cuenca, R. De Los Santos Villodres, A. Kaidi, and A. Rochdi, *Real quadratic flexible division algebras.* Linear Algebra Appl. **290**, (1999) 1-22.

[Da 06] E. Darpö, *On the classification of the real flexible division algebras.* Colloq. Math. **105**, (2006) 1-17.

[Da-R 11] E. Darpö, and A. Rochdi, *Classification of the four-dimensional power-commutative real division algebras.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **141** A, 1207-1223, (2011)

[DDLR 16] A. S. Diabang, O. Diankha, M. Ly and A. Rochdi, *A Note on the Real Division Algebras with Non-trivial Derivations.* Int. J. Algebra, **10** (1) (2016), 1-11.

[DDR 16] A. S. Diabang, O. Diankha and A. Rochdi, *On the Automorphisms of Absolute-Valued Algebras.* Int. J. Algebra, **10** (3) (2016), 113-123.

[DDRR 13] O. Diankha, A. Diouf, M. I. Ramírez and A. Rochdi, *Absolute Valued Algebras with One Sided Unit Satisfying* $(x^2, x^2, x^2) = 0$. IJA, **7** (19) (2013), 935-958.

[DDR 13] O. Diankha, A. Diouf and A. Rochdi, *A Brief Statement on the Absolute-valued Algebras with One-sided Unit.* Int. J. Algebra, **7** (17) (2013), 833-838

[DDTR 13] O. Diankha, A. Diouf, M. Traoré and A. Rochdi, *Division Algebras Satisfying* $(x^p x^q)x^r = x^p(x^q x^r)$. Int. J. Algebra, **7** (20), (2013), 959-972.

- **[DTRR 16]** O. Diankha, M. Traoré, M. I. Ramírez, and A. Rochdi, *Four-Dimensional Real Third-Power Associative Division Algebras.* Communications in Algebra, **44** (2016), 3397-3406.
- **[Die 05]** E. Dieterich, *Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras.* Journal of Algebra and its applications, **4** (2005), 517-538.
- **[E 83]** M. L. El-Mallah, *Sur les algèbres absolument valuées qui vérifient l'identité* $(x, x, x) = 0$. J. Algebra **80** (1983), 314-322.
- **[E 87]** M. L. El-Mallah, *On finite dimensional absolute valued algebras satisfying* $(x, x, x) = 0$. Arch. Math. **49** (1987), 16-22.
- **[E 01]** M. L. El-Mallah, *Absolute valued algebras satisfying* $(x, x, x^2) = 0$. Arch. Math. **77** (2001), 378-382.
- **[EE 04]** M. L. El-Mallah and M. El-Agawany, *Absolute valued algebras satisfying* $(x^2, x^2, x^2) = 0$. Comm. Algebra **32** (2004), 3537-3541.

[EERR 06] M. L. El-Mallah, H. Elgendy, A. Rochdi and Á. Rodríguez Palacios. *On absolute valued algebras with involution.* Linear Algebra and its Applications **414** (2006), 295-303.

[Ho 40] H. Hopf, *Ein topologischer beitrag zur reellen algebra.* Comment. Math. Helvet. (1940), 219-239.

[HP 04] M. Hübner and H. P. Petersson, *Two-dimensional real division algebras revisited.* Beiträge Algebra Geom., **45**, (2004) 29-36.

[Ke 58] M. Kervaire, *Non-paralleliability of the $n-$Sphere for $n > 7$.* Proc. Nat. Acad. Sci. Usa **44** (1958), 280283.

[Ok 78] S. Okubo, *Pseudo-quaternion and pseudo octonion algebras.* Hadronic J. **1** (1978), 1250-1278.

[On 02] Á. Oneto, Alternative Real Division Algebras of Finite Dimension. Divulgaciones Matem¶aticas **10** (2) (2002), 161-169.

- **[P 87]** J. Petro, *Real division algebras of dimension* > 1 *contain* $\mathbb{C}$. Amer. Math., (1987) 445-449.
- **[Roc 03]** A. Rochdi, *Eight-dimensional real absolute valued algebras with left unit whose automorphism group is trivial.* IJMMS **70**, (2003) 4447-4454.
- **[RR 09]** A. Rochdi and Á. Rodríguez Palacios. *Absolute valued algebras with involution.* Comm. Algebra, **37** (4) (2009), 1151-1159.
- **[Rod 92]** Á. Rodríguez Palacios, *One Sided Division Absolute Valued Algebras.* Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 925-954.
- **[Rod 93]** Á. Rodríguez Palacios, *Números Hipercomplejos en Dimensión Infinita.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, Granada, 1993.
- **[Rod 04]** Á. Rodríguez Palacios, *Absolute valued algebras, and absolute valuable Banach spaces.* Advanced courses of

[Rod 04] Á. Rodríguez Palacios, *Absolute valued algebras, and absolute valuable Banach spaces.* Advanced courses of mathematical analysis I, 99-155, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2004).

[Se 54] B. Segre, *La teoria delle algebre ed alcune questione di realta.* Univ. Roma, Ist. Naz. Alta. Mat., Rend. Mat. E Appl. Serie 5, **13** (1954), 157-188.

[UW 60] K. Urbanik and F. B. Wright, *Absolute valued algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 861-866.

[Wr 53] F. B. Wright, *Absolute valued algebras.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **39** (1953), 330-332.

[Y 81] C. T. Yang, *Division algebras and fibrations of spheres by great spheres.* Journal of Differential Geometry, V **16** N 4, (1981) 577-593.

[Z 31] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **8**, (1931), 123-147.