

Structures symplectiques et k -symplectiques polarisées

Azzouz AWANE

F.S. Ben M'sick. UH2C

CIMPA Casablanca, 1-12 juin 2021

Sommaire

- 1 Quelques aspects de Mécanique théorique
- 2 Structures symplectiques polarisées
- 3 Sur quelques généralisations des structures
- 4 Structures k -symplectiques polarisées

Introduction

Les structures symplectiques surgissent de manière naturelle en mécanique théorique, en particulier pendant le processus de quantification, i.e., dans le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique.

- ① R. Abraham - J.E. Marsden.
- ② V. I. Arnold,
- ③ J.M. Souriau
- ④ I. Vaisman ;
- ⑤ N.M.J Woodhouse,...

Équations de Lagrange

Le but de la mécanique théorique est la découverte de principes qui permettent de décrire l'évolution temporelle de l'état d'un système physique. En mécanique classique, un tel état est donné comme un point P sur une variété Q de dimension n , Q appelée **espace de configuration** et P est décrit par les coordonnées locales q_1, \dots, q_n , appelées variables de position. L'évolution temporelle du système est alors décrit par une courbe

$$\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \mid P(t_0) = P^0.$$

Ici, il faut trouver **des principes physiques** qui permettent de déterminer cette trajectoire comme solution d'une équation différentielle.

Équations de Lagrange

Le point de départ de cette détermination est le principe mécanique classique de la moindre action. Chaque système physique est régi par une fonction (dite de Lagrange)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t).$$

Le **principe de moindre action** de Hamilton décrète que, entre deux instants t_0 et t_1 , le système physique évolue suivant une extrémale γ de l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1)$$

Équations d'Euler-Lagrange

La courbe

$$\gamma(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

est une extrémale de (1) si et seulement si, elle est solution du système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}. \quad (2)$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires dans le fibré TQ , muni des coordonnées locales

$$q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n,$$

La courbe γ désirée sur Q est la projection de la courbe de solution

Équations de Hamilton

La mécanique classique prend ensuite la formulation suivante : pour un Lagrange donné par une fonction \mathcal{L} , les coordonnées **position et vitesse**, (q, \dot{q}) , sont remplacées par la **position et l'impulsion** (q, p) , grâce à la transformation

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

La base de ce concept est la transformation de Legendre entre le fibré tangent et le fibré cotangent

$$\begin{aligned} TQ &\longrightarrow T^*Q \\ (q, \dot{q}) &\longmapsto (q, p). \end{aligned}$$

Équations de Hamilton

Ainsi, l'évolution temporelle décrite sur TQ par la fonction de Lagrange $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, est remplacé par la fonction de Hamilton H sur l'espace des phases T^*Q définie par

$$H(p, q, t) := p \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \dots p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (4)$$

Les équations de Lagrange (2) se transforment en équations de Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (5)$$

Interprétation symplectique

La fonction hamiltonienne H définit un champ de vecteurs (hamiltonien) X_H sur l'espace des phases T^*Q .

Par rapport aux coordonnées usuelles (q, p) , le champ de vecteurs X_H s'écrit :

$$X_H := \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Les courbes intégrales $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ du champ X_H :

$$\gamma'(t) = X_H(\gamma(t))$$

conduisent aux équations de Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (6)$$

Équations de Newton

Les équations de Newton s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} \end{cases}$$

Supposons que \vec{F} dérive d'un potentiel $V(\vec{r})$: $\vec{F} = -\text{grad}V$.
alors dans l'espace de phase $M = \{(q_i = x_i, p_i = mv_i) \mid i = 1, 2, 3\}$,
les équations du mouvement s'obtiennent à partir des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

où $H = \frac{1}{2}m(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3)$.

Oscillateur harmonique : $\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0$

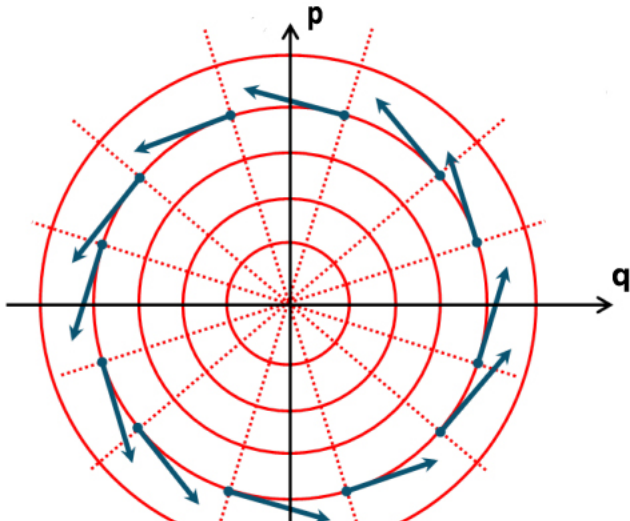
Le système hamiltonien associé à la fonction

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

est alors

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -q \end{cases}$$

Mécanique hamiltonienne



Interprétation symplectique

En introduisant la 2-forme différentielle

$$\theta = \sum dp_i \wedge dq_i$$

sur le fibré cotangent T^*Q , on voit que les équations de Hamilton (6) sont équivalentes à :

$$i(X_H)\theta = \theta(X_H, \cdot) = -dH. \quad (7)$$

J.M. Souriau a introduit la terminologie de géométrie symplectique en 1953 au colloque du CNRS de Strasbourg

Jean Marie Souriau introduit la terminologie « géométrie symplectique » et découvre le rôle central des structures symplectiques en Mécanique ; son premier travail sur le sujet, intitulé « Géométrie symplectique différentielle. Applications » , est présenté au colloque du CNRS de Strasbourg en 1953.

J.M. Souriau : la variété des mouvements d'un système hamiltonien

J.M. Souriau a montré que l'ensemble des mouvements d'un système hamiltonien possède une structure naturelle de variété symplectique ; les crochets de Lagrange des fonctions coordonnées locales sont les composantes de la forme symplectique de cette variété. L'aspect local de ces propriétés avait été découvert dès 1809 par Lagrange ; Jean-Marie Souriau leur a donné une formulation géométrique globale.

J.M. Souriau a mis en place de la mécanique quantique, dans le cadre de la géométrie symplectique en 1965

En 1965, J.M. Souriau a donné un fondement mathématique rigoureux au processus de quantification d'un système mécanique classique.

La seconde étape de la quantification, utilisant une polarisation de la variété symplectique (M, θ) , doit permettre de construire un espace de Hilbert et d'associer, à chaque observable classique d'un système mécanique, un opérateur autoadjoint sur cet espace.

Structures symplectiques polarisées

Une variété symplectique (M, θ) est dite polarisée si elle est équipée d'un feuilletage lagrangien \mathfrak{F} .

La notion de variété symplectique polarisée joue un rôle important dans la quantification géométrique de Kostant-Souriau.

Des propriétés intéressantes de la géométrie des feuillages lagrangiens sont données par A. Weinstein, P. Dazord et P. Molino. Le modèle naturel de la variété symplectique polarisée est le fibré cotangent T^*M (espace des phases), muni de la forme de Liouville et la polarisation réelle définie par le feuilletage vertical de la fibration

$$T^*M \longrightarrow M.$$

Aspect linéaire

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $2n$, θ une 2-forme extérieure sur E et soit F un sous-espace vectoriel de E de codimension n .

Définition

On dit que (θ, F) est une **structure symplectique polarisée** sur l'espace E si :

- ① θ est non-dégénérée,
- ② $\forall x, y \in F, \theta(x, y) = 0$.

Le théorème suivant donne la classification des structures linéaires symplectiques polarisées.

Base symplectique polarisée

Théorème

Si ω est une structure symplectique polarisée sur E , alors il existe une base $(e_i, e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E^ tel que*

$$\theta = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega'^j, \quad F = \ker \omega'^1 \cap \cdots \cap \ker \omega'^k,$$

où $(\omega^i, \omega'^i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de $(e_i, e'_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$(e_i, e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est **appelée base symplectique polarisée**.

Les automorphismes de E qui préservent (θ, F) est un groupe de Lie, dénotée par $Sp(1, n; E)$, et appelé groupe symplectique polarisée de E .

Groupe symplectique polarisé

Soit $Sp(1, n; \mathbb{R})$ le groupe de matrices d'automorphismes symplectiques polarisés de E , exprimés dans la base symplectique polarisée $(e_i, e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E . Le groupe $Sp(1, n; \mathbb{R})$ est constitué de toutes les matrices du type

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & (A^{-1})^T \end{pmatrix}$$

où A, C sont des matrices $n \times n$ à coefficients réels, A est inversible et $AC^T = CA^T$.

$Sp(1, n; \mathbb{R})$ est appelé **groupe symplectique polarisé**.

Algèbre de Lie symplectique polarisée

On note par $\mathfrak{sp}(1, n; E)$ l'algèbre de Lie du groupe symplectique polarisé $Sp(1, n; E)$.

$\mathfrak{sp}(1, n; E)$ est identifié avec l'espace tangent du groupe de Lie $Sp(1, n; E)$ au point Id_E de E ; elle formée de tous les endomorphismes u de E satisfaisant la relation

$$u(F) \subseteq F, \dots, \theta(u(x), y) + \theta(x, u(y)) = 0, \forall x, y \in E.$$

En termes d'ensemble de matrices, on note par $\mathfrak{sp}(1, n; \mathbb{R})$ l'algèbre de Lie du groupe symplectique polarisé $Sp(1, n; \mathbb{R})$.

Algèbre de Lie symplectique polarisée

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(1, n; \mathbb{R})$ est constituée des matrices du type

$$\begin{pmatrix} A & S \\ 0 & -A^T \end{pmatrix}$$

où A, S sont des matrices $n \times n$ avec S symétrique

On observe que $Sp(1, n; \mathbb{R})$ est de dimension $\frac{3n+1}{2}$.

Variétés symplectiques polarisées

Soient M une variété de dimension paire $2n$, munie d'un feuilletage de codimension n , $\theta \in \mathcal{A}^2(M)$ et soit $E = T\mathfrak{F}$.

Définition

On dit $(\theta, T\mathfrak{F})$ est une structure symplectique polarisée sur M , si :

- 1 θ est fermée. ($d\theta = 0$) ;
- 2 θ is non dégénérée.
- 3 $\theta(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(T\mathfrak{F})$.

Le fibré cotangent T^*M

Soit $\pi_M : T^*M \longrightarrow M$. Le fibré cotangent T^*M , muni de la 2-forme différentielle

$$\theta = d\lambda$$

est une variété symplectique, λ étant la forme de Liouville du fibré cotangent :

$$\langle X_u, \lambda_u \rangle = \langle (\pi_M)_* (X_u), \omega_x \rangle$$

pour tout $u = (x, \omega_x) \in T^*M$, $X \in \Gamma(T(T^*M))$. Par rapport à un système de coordonnées local $(\overline{U} = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n))$ de T^*M au dessus de $(U, \varphi = (q^1, \dots, q^n))$, on a

$$\lambda_{\overline{U}} = \sum_{i=1}^n p^i dq^i, \quad \theta_{\overline{U}} = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i.$$

$(\theta; \mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F} = \ker \pi_*$, est une structure symplectique polarisée sur le fibré cotangent T^*M .

La sphère S^{2n}

Les sphères S^{2n} n'admettent pas structures symplectiques polarisées pour tout $n \geq 1$.

Le théorème de Darboux

La géométrie symplectique est basée sur le théorème de Darboux qui stipule que toute variété symplectique (M, θ) admet un atlas dont les changements de coordonnées appartiennent au pseudogroupe des difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^{2n} qui laissent la forme canonique

$$\theta_0 = dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n$$

invariante, où $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ est le système de coordonnées cartésiennes.

Le théorème de Darboux

La première démonstration du théorème de Darboux est due à G. Darboux lui-même en utilisant un raisonnement par récurrence. A. Weinstein (en 1977), a démontré ce théorème en utilisant le lemme de Moser.

Le théorème de Darboux pour une variété symplectique munie d'un feuillage lagrangien, est donné par I. Vaisman en (1989) dans le contexte des structures de Poisson sur les variétés feuilletées. Dans cet exposé, je reproduis la démonstration du théorème de Darboux sur une **variété 1-symplectique**, i.e. sur une **variété symplectique munie d'un feuilletage lagrangien**, en utilisant **uniquement des quadratures**.

Le théorème de Darboux

Théorème

Soit $(M, \theta, \mathfrak{F})$ une variété symplectique polarisée de dimension $2n$. Alors, pour tout point p de M , il existe un ouvert U de M contenant p muni de coordonnées locales $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que θ soit représentée sur U par

$$\theta = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$$

et le feuilletage \mathfrak{F} est défini par les équations

$$dy^1 = 0, \dots, dy^n = 0.$$

Démonstration du théorème de Darboux

Il découle du théorème de Frobenius, qu'il existe un système de coordonnées locales $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y^1, \dots, y^n)$ défini sur un voisinage ouvert U de M contenant p tel que les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

engendrent l'espace tangent des feuilles en tout point de U .

Démonstration du théorème de Darboux

Le problème est de nature locale, on peut donc supposer que U est un voisinage ouvert de \mathbb{R}^{2n} et $p = 0$. La 2-forme θ est localement exacte (lemme de Poincaré), donc, on peut supposer que, sur l'ouvert U , la forme θ s'écrit sous la forme

$$\theta = d \left(\sum_{u=1}^n f^u dx_u + \sum_{s=1}^n g_s dy^s \right)$$

où f^u et g_s sont lisses sur U ; ainsi,

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{u,v} \frac{\partial f^u}{\partial x_v} dx_v \wedge dx_u + \sum_{u,t} \frac{\partial f^u}{\partial y^t} dy^t \wedge dx_u \\ &+ \sum_{v,s} \frac{\partial g_s}{\partial x_v} dx_v \wedge dy^s + \sum_{t,s} \frac{\partial g_s}{\partial y^t} dy^t \wedge dy^s \end{aligned}$$

Démonstration du théorème de Darboux

par suite,

$$\begin{aligned} \theta = & \sum_{u < v} \left(\frac{\partial f^v}{\partial x_u} - \frac{\partial f^u}{\partial x_v} \right) dx_u \wedge dx_v + \\ & + \sum_{v,s}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial x_u} - \frac{\partial f^u}{\partial y^s} \right) dx_u \wedge dy^s + \sum_{t < s}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial y^t} - \frac{\partial g_t}{\partial y^s} \right) dy^t \wedge dy^s \end{aligned}$$

\mathfrak{F} étant lagrangien, donc

$$\frac{\partial f^u}{\partial x_v} = \frac{\partial f^v}{\partial x_u},$$

pour tous $u, v = 1; \dots, n$.

Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on pose

$$x^i = g_i - \sum_{u=1}^n \int_0^{x_u} \frac{\partial f^u}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi.$$

Démonstration du théorème de Darboux

$$\begin{aligned}
 x^i &= g_i - \int_0^{x_1} \frac{\partial f^1}{\partial y^i}(\xi, x_2, \dots, x_n, y) d\xi \\
 &- \int_0^{x_2} \frac{\partial f^2}{\partial y^i}(0, \xi, x_3, \dots, x_n, y) d\xi \\
 &- \int_0^{x_3} \frac{\partial f^3}{\partial y^i}(0, 0, \xi, x_4, \dots, x_n, y) d\xi \\
 &- \dots \\
 &- \int_0^{x_n} \frac{\partial f^n}{\partial y^i}(0, 0, \dots, 0, \xi, y) d\xi,
 \end{aligned}$$

Démonstration du théorème de Darboux

donc, on a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial x_v} = & \frac{\partial g_i}{\partial x_v} - \sum_{u=1}^{v-1} \frac{\partial}{\partial x_v} \int_0^{x_u} \frac{\partial f^u}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \\ & - \frac{\partial}{\partial x_v} \int_0^{x_v} \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{v+1}, \dots, x_n, y) d\xi \end{aligned}$$

mais

Démonstration du théorème de Darboux

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_v} \int_0^{x_u} \frac{\partial f^u}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \\
 = & \int_0^{x_u} \frac{\partial^2 f^u}{\partial x_v \partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \\
 = & \int_0^{x_u} \frac{\partial^2 f^u}{\partial y^i \partial x_v} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \\
 = & \int_0^{x_u} \frac{\partial}{\partial x_u} \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \\
 = & \left[\frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) \right]_0^{x_u} \\
 = & \left[\frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, x_u, \dots, x_n, y) - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, x_{u+1}, \dots, x_n, y) \right]
 \end{aligned}$$

Démonstration du théorème de Darboux

par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x^i}{\partial x_v} &= \frac{\partial g_i}{\partial x_v} - \sum_{u=1}^{v-1} \left[\frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, x_u, \dots, x_n, y) - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, x_{u+1}, \dots, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (0, \dots, 0, x_v, x_{v+1}, \dots, x_n, y) \right] \\
 &= \frac{\partial g_i}{\partial x_v} - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (x_1, \dots, x_n, y) \\
 &= \frac{\partial g_i}{\partial x_v} (x, y) - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} (x, y)
 \end{aligned}$$

Démonstration du théorème de Darboux

En d'autres termes on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^s}{\partial y^t} - \frac{\partial x^t}{\partial y^s} &= \frac{\partial g_s}{\partial y^t} - \left(\sum_{u=1}^n \int_0^{x_u} \frac{\partial^2 f^u}{\partial y^t \partial y^s} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \right) \\ &\quad - \frac{\partial g_t}{\partial y^s} + \left(\sum_{u=1}^n \int_0^{x_u} \frac{\partial^2 f^u}{\partial y^s \partial y^t} (0, \dots, 0, \xi, x_{u+1}, \dots, x_n, y) d\xi \right) \\ &= \frac{\partial g_s}{\partial y^t} - \frac{\partial g_t}{\partial y^s}. \end{aligned}$$

Les relations

$$\theta = \sum_{u,s}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial x_u} - \frac{\partial f^u}{\partial y^s} \right) dx_u \wedge dy^s + \sum_{t < s}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial y^t} - \frac{\partial g_t}{\partial y^s} \right) dy^t \wedge dy^s$$

et

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_v} = \frac{\partial g_i}{\partial x_v}(x, y) - \frac{\partial f^v}{\partial y^i}(x, y); \quad \frac{\partial x^s}{\partial y^t} - \frac{\partial x^t}{\partial y^s} = \frac{\partial g_s}{\partial y^t} - \frac{\partial g_t}{\partial y^s}.$$

Démonstration du théorème de Darboux

donnent

$$\begin{aligned}
 \theta &= \sum_{v,i}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_v} - \frac{\partial f^v}{\partial y^i} \right) dx_v \wedge dy^i + \sum_{t < s}^n \left(\frac{\partial x^s}{\partial y^t} - \frac{\partial x^t}{\partial y^s} \right) dy^t \wedge dy^s \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x_v} dx_v \wedge dy^i + \sum_{s,t}^n \frac{\partial x^s}{\partial y^t} dy^t \wedge dy^s \\
 &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial x^s}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial x^s}{\partial y^t} dy^t \right) \wedge dy^s \\
 &= \sum_{s=1}^n dx^s \wedge dy^s
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\theta = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

Démonstration du théorème de Darboux

Il reste à montrer que les formes de Pfaff locales dx^i et dy^i sont linéairement indépendantes en chaque point de U . Pour cela, il suffit de montrer que les 1-formes

$$\omega_s = \sum_{u=1}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial x_u} - \frac{\partial f^u}{\partial y^s} \right) dx_u$$

($s = 1, \dots, n$) sont linéairement indépendantes en chaque point de U . Montrons à cet effet que la matrice $B = (b_s^u)$ est inversible, où $b_s^u = \frac{\partial g_s}{\partial x_u} - \frac{\partial f^u}{\partial y^s}$.

Démonstration du théorème de Darboux

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $BX^t = 0$. Alors le champ de vecteurs local

$$\bar{X} = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

appartient au sous-espace de caractéristiques $C_x(\theta)$ en chaque point de U , c'est-à-dire $i(X)\theta_x = 0$; la non dégénérescence de θ prouve que $X = 0$, par conséquent, $X = (0, \dots, 0)$; et on en déduit que la matrice B est inversible.

L'atlas de Darboux

Définition

Les systèmes de coordonnées $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ constituent un atlas de M , appelé atlas de Darboux, et les systèmes de coordonnées $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dites coordonnées adaptées.

Soient $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)_{1 \leq i \leq n}$ deux systèmes de coordonnées locales adaptées définies sur voisinage ouvert W de M tel que

$$\theta_W = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j = \sum_{i=1}^n d\bar{x}^i \wedge d\bar{y}^i.$$

Bien entendu on a

$$\bar{x}^i(x, y), \bar{y}^i(y)$$

pour tout i , car ces cartes sont feuilletées par rapport au feuilletage \mathfrak{F} . Par conséquent,

Démonstration du théorème de Darboux

$$\begin{aligned}
 \theta_W &= \sum_{i=1}^n d\bar{x}^i \wedge d\bar{y}^i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^j} dy^j \right) \wedge \sum_{r=1}^n \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} dy^r \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,r=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} dx^j dy^r \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j,r=1}^n \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} \right) dy^j dy^r \\
 &= \sum_{r=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} dx^j \right) dy^r \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j < r} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^r} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} \right) dy^j dy^r \\
 &= \sum_{r=1}^n dx^r \wedge dy^r.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^r} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j}; \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} dx^j = dx^r,$$

Démonstration du théorème de Darboux

il s'en suit que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} &= 1 \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} &= 0 \text{ for } j \neq r.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} \right) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} \right) &= 0 \text{ for } j \neq r,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} \right) &= x^r + \varphi^r(y) \\ \sum_{i=1}^n \bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} &= \psi(x^r, y)\end{aligned}$$

Démonstration du théorème de Darboux

Or

$$\bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^r} \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} = \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} x^r + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} \varphi^r(y)$$

donc,

$$\bar{x}^i \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial \bar{y}^s} = \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} x^r + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} \varphi^r(y)$$

et

$$\bar{x}^i \delta^i_s = \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} x^r + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} \varphi^r(y)$$

D'où,

$$\begin{cases} \bar{x}^s = \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} x^r + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} \varphi^r(y) = \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} x^r + \phi^r(y) \\ \bar{y}^s = \bar{y}^s(y) \end{cases}$$

Le feuilletage lagrangien \mathfrak{F} est affine

Les expressions de ces changements de coordonnées dans cet atlas permettent de déduire le théorème suivant :

Théorème

Le feuilletage lagrangien \mathfrak{F} est affine.

Cela signifie que toute feuille du feuilletage \mathfrak{F} est muni d'une structure de variété localement affine.

Ce théorème a été démontré par plusieurs auteurs (A. Weinstein, P. Dazord) moyennant la connexion de R. Bott.

Dualité $\zeta : TM \longrightarrow T^*M, v \longmapsto i(v)\theta$

La non dégénérescence de θ nous permet de voir que l'application

$$\zeta : TM \longrightarrow T^*M, v \longmapsto i(v)\theta$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de M , et par conséquent, ζ définit un isomorphisme de $\mathfrak{X}(M)$ sur $\mathcal{A}^1(M)$. On note par $\mu : \mathcal{A}^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ l'isomorphisme inverse de ζ , et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, on denote par X_α , le champ de vecteurs sur M associé à α par cet isomorphisme : $\mu(\alpha) = X_\alpha$.

Soit TM/E le fibré quotient

$$TM/E = \bigcup_{x \in M} T_x M / E_x, \quad v : TM \longrightarrow TM/E = vE$$

Dualité $\zeta : TM \longrightarrow T^*M, v \longmapsto i(v)\theta$

Et soit v^*E le fibré dual de vE :

$$v^*E = \bigcup_{x \in M} v^*E_x = \bigcup_{x \in M} (T_x M / E_x)^*.$$

L'application ζ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels de E sur v^*E . En termes de coordonnées locales, $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, v^*E est engendré par les formes de Pfaffian dy_1, \dots, dy_n et ζ exprime la dualité $\frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto dy_i$ entre la géométrie le long des feuilles et la géométrie transversale de \mathfrak{F} .

Fonctions basiques - champs de vecteurs feuilletés

Rappelons qu'une fonction réelle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est dite basique, si pour tout champ de vecteurs Y tangent à \mathfrak{F} , la fonction $Y(f)$ est identiquement nul. On note $\mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$ le sous-anneau de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui consiste en tous les les fonctions.

On rappelle aussi qu'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit feuilleté, ou qu'il s'agit d'un automorphisme infinitésimal de \mathfrak{F} , si au voisinage de chaque point de M , le un groupe à un paramètre local associé à X laisse le feuilletage \mathfrak{F} invariant.

On note par

$$\mathcal{I}(M, \mathfrak{F})$$

l'espace de tous les champs de vecteurs feuilletés.

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Définition

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit localement hamiltonien polarisé si :

- 1 X est feuilleté ;
- 2 la forme de Pfaff $\zeta(X)$ est fermée.

On note $H^0(M, \mathfrak{F})$ l'espace linéaire réel des champs de vecteurs localement hamiltonien polarisés

$$H^0(M, \mathfrak{F}) = \{X \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F}) \mid d(\zeta(X)) = 0\}.$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Un élément $X \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F})$ est appelé un champ de vecteurs hamiltonien polarisé si la forme de Pfaff $\zeta(X)$ est exacte.

On note $H(M, \mathfrak{F})$ l'espace vectoriel qui est constitué de tous les champs de vecteurs hamiltoniens polarisés.

$\zeta(H(M, \mathfrak{F}))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_1(M)$. On pose

$$\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) = d^{-1}(\zeta(H(M, \mathfrak{F}))),$$

où d est l'opérateur de différenciation extérieure.

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Théorème

Pour tout $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, les propriétés suivantes sont équivalents :

- 1 $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
- 2 il existe un unique champ de vecteurs polarisé $X_H \in H(M, \mathfrak{F})$ tel que : $i(X_H)\theta = \zeta(X_H) = -dH$.

Équations Hamilton de Champs hamiltoniens polarisés

Soit $X \in H^0(M, \mathfrak{F})$. Localement, dans une carte munie d'un S.C.L.

$$(U, (x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n})$$

il existe une application $H \in C^\infty(U)$ telle que

$$\zeta(X) = -dH.$$

Et par conséquent, **les équations du mouvement** de X sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_b^0(M). \end{cases}$$

Équations Hamilton de Champs hamiltoniens polarisés

Localement, les expressions de H et de X sont

$$H = \sum_{j=1}^n a^j(y_1, \dots, y_n) x_j + b(y_1, \dots, y_n)$$

et

$$X = - \sum_{s=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial a^j}{\partial y_s} + \frac{\partial b}{\partial y_s} \right) \frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

où $a^j, b \in \mathcal{A}_b^0(U, \mathfrak{F}_U)$.

Équations Hamilton de Champs hamiltoniens polarisés

Des équations de Hamilton on déduit la proposition suivante :

Théorème

Pour chaque $H \in C^\infty(M)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1 $H \in \mathfrak{H}(M; \mathfrak{F})$;
- 2 H est localement affine sur \mathfrak{F} .

Corollaire

$\mathfrak{H}(M; \mathfrak{F})$ est l'ensemble $\mathfrak{a}(M; \mathfrak{F})$ de toutes les fonctions réelles lisses sur M qui sont des fonctions localement affines sur le feuilletage \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{H}(M; \mathfrak{F}) = \mathfrak{a}(M; \mathfrak{F}).$$

Équations Hamilton de Champs hamiltoniens polarisés

Chaque élément de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ est appelé **application hamiltonienne polarisée** et X_H est appelé le **champ de vecteurs hamiltonien polarisé associé à H** .

On a donc une application,

$$\rho : \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \longrightarrow H(M, \mathfrak{F}); H \longmapsto X_H.$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H(M, \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{A}^1(M) \\ \swarrow \rho & & \nearrow -d \\ & \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) & \end{array}$$

Structure de Poisson subordonnée à une structure symplectique polarisée

Soient $H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ et $X_H, X_K \in H(M, \mathfrak{F})$ les champs de vecteurs hamiltoniens polarisés associés. Alors

$$[X_H, X_K] \in H(M, \mathfrak{F})$$

et

$$[X_H, X_K] = X_{\{K, H\}}$$

avec $\{K, H\} = \theta(X_H, X_K)$. On a :

- $(\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), \{, \})$ est une algèbre de Lie.
- $\{, \}$ vérifie la règle de Leibniz dans $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.

$(\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), \{, \})$: structure de Poisson polarisée subordonnée à la structure symplectique polarisée (θ, E) .

Structure de Poisson subordonnée à une structure symplectique polarisée

Théorème

On a les propriétés suivantes :

- ① $\mathcal{A}_b^0(M)$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
- ② $H(M, \mathfrak{F})$ est une algèbre de Lie.
- ③ $[H^0(M, \mathfrak{F}), H^0(M, \mathfrak{F})] \subset H(M, \mathfrak{F})$.
- ④ $H(M, \mathfrak{F})$ est un idéal de $H^0(M, \mathfrak{F})$.
- ⑤ La suite d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \xrightarrow{-\rho} H(M, \mathfrak{F}) \hookrightarrow H^0(M, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(M, \mathfrak{F})/H(M, \mathfrak{F})$$

est exacte.

Structure de Poisson subordonnée à une structure symplectique polarisée

Soit $(\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), \{, \})$ la structure de Poisson polarisée subordonnée à (θ, E) . Soit P le tenseur de Poisson naturel associé à la forme symplectique θ :

$$P(\alpha, \beta) = -\theta(X_\alpha, X_\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M).$$

Théorème

On a les propriétés suivantes :

- ❶ $P(dH, dK) = \{H, K\}, \forall H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
- ❷ $P(dH, dK) = -X_H(K), \forall H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
- ❸ P s'annule sur l'annulateur de E dans $\mathcal{A}^1(M)$.
- ❹ P is non dégénérée.

Structure de Poisson subordonnée à une structure symplectique polarisée

Par rapport à $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$, on a :

$$P = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Soit $H \in C^\infty(M)$ tel que $\zeta^{-1}(dH) \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F})$ alors

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}(dH) &= X^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = X^i(x, y) \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x_i} = -Y^i(y)$$

par suite,

$$H = - \sum Y^j(y) x^j + b(y).$$

Structure de Poisson subordonnée à une structure symplectique polarisée

et

$$\zeta^{-1}(dH) = - \sum_j x^j \frac{\partial Y^j(y)}{\partial y_i} + Y^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

On déduit le résultat suivant

Théorème

$\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ est l'ensemble des applications $H \in C^\infty(M)$ telles que le champ de vecteurs $\zeta^{-1}(dH)$ est feuilleté :

$$\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) = \{ H \in C^\infty(M) \mid \zeta^{-1}(dH) \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F}) \}$$

et l'on a : $\zeta^{-1}(dH) = X_H$

Étape des variétés de Poisson avec Lichnérowicz, Kirillov, Weinstein, Liberman,...

L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnérowicz et indépendamment Alexander Kirillov, Alan Weinstein,....

Paul Dirac et André Lichnerowicz : la nécessité de généraliser les structures symplectiques

Des considérations mathématiques et physiques ont conduit à la généralisation de la notion de structure symplectique, citons par exemples :

- 1 en 1950, Paul Dirac (colauréat avec Erwin Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933) a publié : Generalized Hamiltonian dynamics ;
- 2 à partir de 1975, l'académicien français André Lichnerowicz a défini et étudié plusieurs généralisations des variétés symplectiques : variétés canoniques, variétés de Poisson, variétés de Jacobi, variétés localement conformément symplectiques ;
- 3 En ce qui concerne les structures liées aux systèmes différentiels, Lichnérowicz a pointé la mécanique de Y.Nambu.

Generalized Hamiltonian Dynamics (Yoichiro Nambu 1973)

Les équations régissant le mouvement de la mécanique de Nambu sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{D(H_1, H_2)}{D(y, z)} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{D(H_1, H_2)}{D(z, x)} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{D(H_1, H_2)}{D(x, y)} \end{cases}$$

où le Hamiltonien

$$H : (x, y, z) \in M \longmapsto (H_1(x, y, z), H_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$$

est à valeurs vectorielles définie sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z) .

k -symplectique -Multi symplectique

- 1 Structures k -symplectique : Awane en 1984.
- 2 Manuel de Léon (Début des années 90 du siècle dernier),
Lawson Norris. à partir de 1997
- 3 Gotay, Marsden, Geoffrey Martin (1997) Multi symplectique :
 (M, θ^{k+1}) Théorie des champs. 1997.

Le théorème de DARBOUX et l'unicité des modèles locaux

Vers la géométrie symplectique vectorielle : files conducteurs

- ① **Considérations mathématiques :** Quel est le contexte géométrique dans lequel est située la 2-forme vectorielle définie également par la forme symplectique de Liouville sur la somme de Whitney

$$\theta \in \mathcal{A}^2 \left(\bigoplus^k T^*M = T^*M \oplus \cdots \oplus T^*M \right) \otimes \mathbb{R}^k$$
, qui est fermée, non dégénérée et qui est nulle sur les champs verticaux ?
- ② Dans la catégorie \mathbf{Bun}_B des espaces fibrés au dessus d'une variété B , le produit de deux espaces fibrés $M_1 \rightarrow B$ et $M_2 \rightarrow B$ est la somme de Whitney $M_1 \oplus M_2 \rightarrow B$, donc, le produit de deux fibrations lagrangiennes, n'est pas une fibration lagrangienne, ni une variété symplectique.

Vers une géométrie symplectique vectorielle

Dans cette optique, la structure symplectique vectorielle que nous proposons, repose sur l'existence d'une 2-forme vectorielle

$$\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathcal{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$$

qui relie les champs de vecteurs hamiltoniens X_H et leurs hamiltoniens $H \in \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{R}^k$, par la relation :

$$i(X_H)\theta = -dH$$

$(v_p)_{1 \leq p \leq k}$ étant la base canonique de \mathbb{R}^k .

La 2-forme différentielle $\theta \in \mathcal{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$ sera dite k -symplectique si elle est fermée et non dégénérée :

- ① $d\theta = 0_{\mathbb{R}^k}$;
- ② $i(X)\theta = 0_{\mathcal{A}^1(M) \otimes \mathbb{R}^k} \implies X = 0$.

Problème de l'unicité du modèle local (théorème de Darboux) : $\theta = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$

Diverses propriétés de la géométrie symplectique (comme par exemple les équations de Hamilton) sont mises en évidence en vertu de **l'unicité du modèle local** (théorème de Darboux) :

$$\theta = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n \quad (8)$$

Sur la somme de Whitney

$$\bigoplus^k T^*M^*$$

qui est de dimension $n(k+1)$, existe une 2-forme vectorielle $\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathcal{A}^2(\bigoplus^k T^*M) \otimes \mathbb{R}^k$, subordonnée à la forme de Liouville et qui s'écrit localement sous la forme :

$$\theta^r = \sum dp^{rj} \wedge dq^j \quad (r = 1, \dots, k). \quad (9)$$

La non unicité du modèle local d'une structure symplectique vectorielle : systèmes de 2-formes extérieurs

La première question qui se pose, est ce qu'une structure k -symplectique admet un modèle unique du type Darboux ; semblable aux modèles locaux de $\bigoplus^k T^*M$?

Sinon, quelles sont les propriétés géométriques de l'espace des phases T^*M , et de la somme de Whitney $\bigoplus^k T^*M$, qui ne sont pas satisfaites par la définition d'une structure symplectique en générale et qui peuvent être un outil pour démontrer le théorème de Darboux ?

Pour répondre à ces questions, examinons d'abord les systèmes symplectiques vectoriels en petite dimension.

La non unicité du modèle local d'une structure k -symplectique : systèmes de 2-formes extérieures

Un système $\{\theta^1, \theta^2\}$ de deux 2-formes extérieures de rang 3 dans \mathbb{R}^3 est isomorphe à :

$$\begin{cases} \theta^1 &= \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 &= \alpha^2 \wedge \alpha^3 \end{cases}$$

avec $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \neq 0$.

Remarque.

Le système $\{\theta^1, \theta^2\}$ possède une solution maximale F de dimension 2 définie par

$$F = \ker \alpha^3.$$

La non unicité du modèle local d'une structure k -symplectique : systèmes de 2-formes extérieures

Un système $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ de trois 2-formes extérieures de rang 3 dans \mathbb{R}^3 est isomorphe à :

$$\begin{cases} \theta^1 &= \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 &= \alpha^2 \wedge \alpha^3 \\ \theta^3 &= \alpha^1 \wedge \alpha^2 \end{cases}$$

avec $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \neq 0$.

La non unicité du modèle local d'une structure symplectique vectorielle : systèmes de 2-formes extérieurs

Exemples de systèmes de 2-formes extérieures de rang maximum non isomorphes

Dans \mathbb{R}^4 les systèmes suivants sont de rang 4 et non isomorphes :

$$\begin{cases} \theta^1 &= dx^1 \wedge dx^4 \\ \theta^2 &= dx^2 \wedge dx^4 \\ \theta^3 &= dx^3 \wedge dx^4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \theta^1 &= dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 &= dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^1 \\ \theta^3 &= dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta^1 &= dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 &= dx^2 \wedge dx^4 \\ \theta^3 &= dx^3 \wedge dx^4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \theta^1 &= dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \\ \theta^2 &= dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^1 \\ \theta^3 &= dx^3 \wedge dx^4 \end{cases}$$

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

On voit donc qu'une structures k -symplectique n'admet pas toujours un modèle locale unique. Donc on ne pourrait pas espérer un analogue aux équations de Hamilton par exemple. Ainsi, l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire à la définition d'une structure k -symplectique est nécessaire pour obtenir l'unicité du modèle local.

Le modèle naturel de variété symplectique, qui est le fibré cotangent T^*M , nous offre un feuilletage, dont le fibré tangent aux feuilles annule la forme symplectique de Liouville $\theta = d\lambda$; il s'agit bien du feuilletage défini par les fibres de la fibration

$$\pi_M : T^*M \longrightarrow M$$

qui fait de (T^*M, θ) une variété symplectique polarisée, i.e. une variété symplectique munie d'un feuilletage dont les feuilles sont des sous variétés lagrangiennes.

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

La notion de variété symplectique polarisée joue un rôle important dans la quantification géométrique de Kostant-Souriau (voir Nicholas Woodhouse, A. Weinstein, P. Dazord, J.M. Morvan, P. Molino et P. Libermann...)

Notons aussi que la 2-forme vectorielle

$$\theta = \left(\sum dp^{rj} \wedge dq^j \right) \otimes v_r \in \mathcal{A}^2 \left(\bigoplus^k T^*M \right) \otimes \mathbb{R}^k$$

subordonnée à la forme de Liouville s'annule sur les champs de vecteurs tangents au feuilletage de codimension n défini par la fibration

$$\pi_M : \bigoplus^k T^*M \longrightarrow M$$

Nécessité de l'ajout d'un objet géométrique supplémentaire

Nous proposons donc l'adjonction de l'objet géométrique supplémentaire suivant : l'existence sur M d'un feuilletage \mathfrak{F} de codimension n qui soit solution du système différentiel : .

Dans le cas ou $k = 1$, on retrouve la notion de variété symplectique réelle polarisée.

Aspect linéaire d'une structure k -symplectique polarisée

Soient E un \mathbb{R} - e.v. de dimension $n(k+1)$,
 $\theta = \theta^p \otimes v_p \in \mathcal{A}^2(E) \otimes \mathbb{R}^k$ et F un s.e.v. de codimension n .
 Dans tout ce chapitre, le corps de référence est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 . $(v_p)_{1 \leq p \leq k}$ étant la base canonique de \mathbb{R}^k dont la base duale est $(\bar{w}^p)_{1 \leq p \leq k}$.

(θ, F) est une structure k -symplectique polarisée, sur l'espace E si :

- ❶ θ est non dégénéré : $(\forall x \in E) (i(x)\theta = 0_{E \otimes \mathbb{R}^k} \implies x = 0_E)$;
- ❷ $\forall x, y \in F; \theta(x, y) = 0_{\mathbb{R}^k}$.

Théorème de classification des structures k -symplectiques polarisées linéaires

Si $(\theta = \theta^p \otimes \nu_p, F)$ est une structure symplectique vectorielle polarisée sur E , alors il existe une base $(\omega^{pi}, \omega^j)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E^* telle que :

$$\theta^p = \sum \omega^{pj} \wedge \omega^j, \quad F = \ker \omega^1 \cap \dots \cap \ker \omega^k.$$

La base $(e_{pi}, e_j)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ dont la base duale $(\omega^{pi}, \omega^j)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ est appelée base k -symplectique polarisée.

Le groupe k -symplectique polarisé : $Sp(k, n; E)$

Les automorphismes de E qui laissent invariants (θ, F) est un groupe noté $Sp(k, n; E)$ et appelé groupe symplectique vectoriel polarisée de E . Soit $Sp(k, n; \mathbb{R})$ le groupe des matrices des automorphismes symplectiques vectoriels polarisés de E exprimées dans la base symplectique vectorielle polarisée $(e_{pi}, e_i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E .

Le groupe k -symplectique polarisé : $Sp(k, n; E)$

Le groupe $Sp(k, n; \mathbb{R})$ est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} T & 0 & S_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & \dots & T & S_k \\ 0 & \dots & 0 & (T^{-1})^t \end{pmatrix}$$

où T, S_1, \dots, S_k sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} , T inversible et $S_p T^t = T S_p^t$ pour tout $p (p = 1, \dots, k)$.

L'algèbre de Lie du groupe k -symplectique polarisé : $\mathfrak{sp}(k, n; E)$

$Sp(k, n; E)$ est **un groupe de Lie**. L'algèbre de Lie de ce groupe sera notée par $\mathfrak{sp}(k, n; E)$. Les éléments de $\mathfrak{sp}(k, n; E)$ sont les $u \in \text{End}(E)$ qui laissent invariante la structure symplectique vectorielle polarisée : $(F; \theta)$.

Soit $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie $Sp(k, n; \mathbb{R})$.

L'algèbre de Lie du groupe k -symplectique polarisé : $\mathfrak{sp}(k, n; E)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & S_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & \dots & A & S_k \\ 0 & \dots & 0 & -{}^t A \end{pmatrix}$$

où $S_1, \dots, S_k \in M_{\text{sym}}(n \times n, \mathbb{R})$, A matrice $n \times n$.

Variétés k -symplectiques polarisées

Soit M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage \mathfrak{F} de codimension n et soient $\theta \in \mathcal{A}^2(M) \otimes \mathbb{R}^k$. Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de \mathfrak{F} sera désigné par E .

On dit que (θ, E) est une structure symplectique vectorielle polarisée, sur M si :

- 1 θ fermée : $d\theta = 0$;
- 2 θ est non dégénérée ;
- 3 $\theta^p(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$.

Structure k -symplectique polarisée sur la somme de Whitney

La somme de Whitney $\oplus^k T^*M$ est par définition le produit fibré de la fibration $\pi_M : T^*M \rightarrow M$. L'espace total de cette fibration est l'ensemble des $(k+1)$ -uplet :

$$(x, \omega_x^1, \dots, \omega_x^k)$$

où $x \in M$ et $\omega_x^1, \dots, \omega_x^k \in T_x^*M$.

Soient $W = \oplus^k T^*M$, $u = (x, \omega_x^1, \dots, \omega_x^k) \in W$, $X \in \Gamma(TW)$ et $X_u \in T_u(W)$

$$\langle X_u, \lambda_u^r \rangle = \langle (\pi_M)_*(X_u), \omega_x^r \rangle$$

Structure k -symplectique polarisée sur la somme de Whitney

Dans un s.c.l. $(\bar{U} = (q^1, \dots, q^n, p^{r1}, \dots, p^{rn})_{1 \leq r \leq k})$ dans W au dessus de $(U, \varphi = (q^1, \dots, q^n))$, où

$$q^i(x, \omega_x) = pr^i \circ \varphi \circ \pi_M(x, \omega_x^1, \dots, \omega_x^k)$$

et

$$p^{ri}(x, \omega_x^1, \dots, \omega_x^k) = \omega_x^r \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right).$$

Structure k -symplectique polarisée sur la somme de Whitney

$X_{\overline{U}}$ et ω_x s'écrivent :

$$X_{\overline{U}} = \sum_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_r b_{ri} \frac{\partial}{\partial p^{ri}} \right), \quad \omega_x^r = \sum_i c^{ri} dq^i$$

donc,

$$\langle X_u, \lambda_u^r \rangle = \sum_i a_i c^{ri}$$

Par conséquent

$$\lambda_{\overline{U}}^r = \sum_i p^{ri} dq^i$$

Structure symplectique vectorielle polarisée sur la somme de Whitney

Pour tout $r = 1, \dots, k$, on pose $\theta^r = d\lambda^r$. L'expression locale de θ^r est donnée par :

$$\theta_U^r = d\lambda_U^r = \sum_i dp^{ri} \wedge dq^i$$

Le $(k+1)$ -uplet $(\theta^r \otimes \nu_r; \mathfrak{F})$ est une structure symplectique vectorielle polarisée sur la somme de Whitney $\oplus^k T^*M$. \mathfrak{F} étant le feuilletage défini par la fibration :

$$\begin{array}{c} \oplus^k T^*M \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

Modèle local d'une structure k -symplectique polarisée : Atlas de Darboux

Si $(\theta^P \otimes \nu_p, E)$ est une structure k -symplectique polarisée sur M , alors pour tout point x_0 de M , il existe un voisinage ouvert U de M contenant x_0 de coordonnées locales $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ dites adaptées, tel que les composantes θ^P de la 2-forme vectorielle θ soient représentées dans U par :

$$\theta|_U^P = \sum_{i=1}^n dx^{pi} \wedge dy^i$$

et $E|_U$ est défini par : $dy^1 = \dots = dy^n = 0$. Les changements de coordonnées dans cet atlas sont donnés par :

$$\bar{x}^{pi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^i} x^{pj} + \varphi^{pi}(y^1; \dots, y^n), \quad \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1; \dots, y^n)$$

Fonctions basiques pour un feuilletage

Soit (M, \mathfrak{F}) une variété feuilletée munie d'un feuilletage \mathfrak{F} de dimension p et de codimension q .

Une fonction réelle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est **dite basique pour** \mathfrak{F} si pour tout champ de vecteurs Y tangent à \mathfrak{F} , la fonction $Y(f)$ est **identiquement nulle**.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ❶ f est basique pour \mathfrak{F} ;
- ❷ f est constante sur chaque feuille de \mathfrak{F} .

On note par $\mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$ le sous anneau de $\mathcal{A}^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ constitué par les fonctions basiques pour le feuilletage \mathfrak{F} .

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

Soient M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'une S.S.V.P.

$$(\theta^P \otimes \nu_P, E)$$

Soient TM/E le fibré quotient :

$$TM/E = \bigcup_{x \in M} T_x M / E_x, \quad \nu : TM \longrightarrow TM/E = \nu E$$

et soit $\nu^* E$ le fibré dual de νE :

$$\nu^* E = \bigcup_{x \in M} \nu^* E_x = \bigcup_{x \in M} (T_x M / E_x)^*$$

$(\forall x_0 \in M) (\exists U \in \mathcal{V}_O(x_0, M))$ de C.L. $(x^{pi}, x^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$:

$$\theta|_U^P = \sum_{i=1}^n dx^{pi} \wedge dy^i ; \quad E|_U = \ker dy^1 \cap \dots \cap \ker dy^n$$

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

Les distributions

$$x \longmapsto C_x(\theta^p)$$

sont des sous-fibrés intégrables de TM ($C_x(\theta^p)$ est l'espace caractéristique au point x de θ^p).

Pour chaque $p(p = 1, \dots, k)$ on pose ;

$$E^p = \bigcap_{q \neq p} C_x(\theta^q)$$

En termes des C.L.A. $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a :

- ① v^*E est engendré par les formes différentielles dy^1, \dots, dy^n ;
- ② E^p est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^{p1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{pn}}$.

Feuilletages caractéristiques d'une variété symplectique vectorielle polarisée

On a :

- ❶ pour tout $p(p = 1, \dots, k)$, le sous-fibré E^p est intégrable,
- ❷ $E = E^1 \oplus \dots \oplus E^k$ (somme directe) ;
- ❸ pour tout $p(p = 1, \dots, k)$ l'application

$$\zeta_p : E^p \longrightarrow v^*E ; X \longmapsto i(X)\theta^p$$

définit un isomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de M de E^p sur v^*E .

Les feuilletages $\mathfrak{F}^p(p = 1, \dots, k)$ de M définis par les sous-fibrés intégrables E^p sont appelés **feuilletages caractéristiques subordonnés à la structure k -symplectique polarisée**.

Structures affines des feuilles

La dualité partielle

$$\zeta_p : \frac{\partial}{\partial x^{pi}} \longmapsto dy^i$$

exprime la dualité entre la géométrie le long des feuilles de \mathfrak{F}^p et la géométrie transverse.

Les changements de coordonnées dans cet atlas sont donnés par :

$$\bar{x}^{pi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^i} x^{pj} + \phi^{pi}(y^1; \dots, y^n) \quad , \quad \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1; \dots, y^n)$$

Ces expressions permettent de voir le théorème suivant :

Toute feuille de $\mathfrak{F}^p (p = 1, \dots, k)$ est munie d'une structure localement affine.

Structures affines des feuilles

Ces changements de coordonnées, par rapport aux coordonnées locales $(x^{pj})_{1 \leq j \leq n}$, sont des transformations affines, ainsi, chaque feuille de \mathfrak{F}^p est une sous-variété de M localement affine de codimension n .

Pour tout $f \in \mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$, $\exists X_f^1, \dots, X_f^k \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaisant à :

- ❶ X_f^p est tangent aux feuilles des feuilletages caractéristiques \mathfrak{F}^p pour tout p ;
- ❷ $[X_f^p, X_f^q] = 0$.

Les fonctions f^i et les champs de vecteurs sont liés par $X_f^p = -\zeta_p^{-1}(df^i)$. Et, donc, dans un S.C.L.A. on a :

$$X_f^p = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{pi}}$$

Structures affines des feuilles

Proposition

Nous supposons qu'il existe n fonctions basiques f_1, \dots, f_n dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur M et que chaque feuille L de \mathfrak{F}^p est compacte, alors L est difféomorphe au tore \mathbb{T}^n .

L'existence de n fonctions de base dont les différentielles sont linéairement indépendantes dans M implique que, pour chaque p , il existe n champs de vecteurs $X_{f_1}^p, \dots, X_{f_n}^p \in \Gamma(L)$, indépendants sur L . Il est bien connu que si une variété compacte et connexe V de dimension d qui admet n champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point de V et dont les crochets de Lie sont deux à deux nuls, alors V est difféomorphe au tore réel de dimension d . D'où :

Structures affines des feuilles

Corollaire

Si chaque feuille F de \mathfrak{F} est compacte, alors F est isomorphe au tore \mathbb{T}^{nk} .

Champs de vecteurs feuilletés

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit feuilleté \mathfrak{F} si au voisinage de tout point de M , le groupe à un paramètre local associé à X respecte le feuilletage \mathfrak{F} .

On a l'équivalence suivante :

- ❶ X est un automorphisme infinitésimal pour \mathfrak{F} ;
- ❷ $\mathcal{L}_X Y \in \Gamma(E)$ pour tout $Y \in \Gamma(E)$;
- ❸ Dans un système de coordonnées locales distinguées $(x_i, y_j)_{1 \leq i \leq n-q, 1 \leq j \leq q}$, le champ de vecteurs X s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j(y_1, \dots, y_q) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

On note par

$$\mathcal{I}(M, \mathfrak{F}) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \mathcal{L}_X Y \in \Gamma(E), \forall Y \in \Gamma(E)\}.$$

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux pour le feuilletage \mathfrak{F} .

Notons que $\mathcal{I}(M, \mathfrak{F})$ est un module sur l'anneau $\mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$ des fonctions basiques pour \mathfrak{F} . Soient $(M; \theta; \mathfrak{F})$ une variété k -symplectique polarisée. Considérons l'application linéaire ζ

$$\zeta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M) \otimes \mathbb{R}^k$$

de $\mathfrak{X}(M)$ dans $\mathcal{A}_1(M) \otimes \mathbb{R}^k$, définie par

$$\zeta(X) = i(X)\theta, \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Définition

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit **localement hamiltonien** si la 1-forme vectorielle $\zeta(X)$ est fermée.

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Proposition.

Si k est supérieur ou égal à 2, alors tout système localement hamiltonien est feuilleté.

Démonstration.

Supposons que $k \geq 2$. Soit X un système localement hamiltonien sur $(M, \theta, \mathfrak{F})$. Le lemme de Poincaré montre qu'il existe un ouvert U de M et une fonction vectorielle différentiable

$H = H^p \otimes v_p \in C^\infty(U) \otimes \mathbb{R}^k$ telle que

$$\zeta(X) = -dH.$$



Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Démonstration.

On peut supposer que U un domaine d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n} :^i$

$$\theta|_U = \sum_{i=1}^n dx^{pi} \wedge dy^i$$

pour chaque p et $\mathfrak{F}|_U$ soit défini par les équations :
 $dy^1 = \dots = dy^n = 0$.



Écrivons

$$X = X^{pi} \frac{\partial}{\partial x^{pi}} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

La relation $\zeta(X) = i(X)\theta = -dH$ donnent pour chaque $p = 1, \dots, k$:

Champs de vecteurs localement hamiltoniens

Démonstration.

$$X^{pi} dy^i - Y^i dx^{pi} = -\frac{\partial H^p}{\partial x^{qr}} dx^{qr} - \frac{\partial H^p}{\partial y^j} dy^j$$

et puisque $k \geq 2$, alors

$$X^{pi} = -\frac{\partial H^p}{\partial y^j}, \quad Y^i = \frac{\partial H^p}{\partial x^{qr}}, \quad \frac{\partial H^p}{\partial x^{qr}} = \delta^{pq} \delta^{ij}.$$

Par conséquent, $H^p = H^p(x^{pi}, y^1, \dots, y^n)$ et

$$Y^i = \frac{\partial H^1}{\partial x^{1i}} = \dots = \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} = a_i(y^1, \dots, y^n)$$

avec $a_i \in \mathcal{A}_b^0(U, \mathfrak{F}_U)$, et donc ,



Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Démonstration.

$$\begin{aligned} H^p &= a_i(y^1, \dots, y^n) x^{pi} + b^p(y^1, \dots, y^n) \\ X &= -\frac{\partial}{\partial y^i} (a_j(y^1, \dots, y^n) x^{pj} + b^p(y^1, \dots, y^n)) \frac{\partial}{\partial x^{pi}} \\ &\quad + a_i(y^1, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Donc X est un champ de vecteurs feuilleté pour \mathfrak{F} .



Corollaire

Supposons que $k \geq 2$. Soit X un système localement hamiltonien sur $(M, \theta, \mathfrak{F})$. Alors le groupe à paramètre locale de X respecte la structure affine des feuilles de \mathfrak{F}^p .

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Définition

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ **localement hamiltonien** est dit **polarisé** s'il est en plus **feuilleté**.

On note par $H^0(M, \mathfrak{F})$ l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs localement hamiltoniens polarisés :

$$H^0(M, \mathfrak{F}) = \{X \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F}) \mid d(i(X)\theta) = 0\}$$

Champs de vecteurs localement hamiltoniens polarisés

Soit X un champ de vecteurs localement hamiltonien polarisé.
Alors, localement, pour tout $x \in M$; il existe $U \in \mathcal{O}(x, M)$, et une application $H \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ telle que :

$$i(X)\theta = -dH.$$

Par rapport aux coordonnées locales $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ défini sur un ouvert U de M , les équations du mouvement d'un tel système sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dx^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial y^i} \\ \delta_q^p \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} \\ \frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} \in \mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F}) \end{cases}$$

(Équations de Hamilton des champs de vecteurs Hamiltoniens polarisés).

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Localement, H et X s'écrivent respectivement sous la forme suivante :

$$H = H^p \otimes v_p = \left(\sum_{j=1}^n a_j(y^1, \dots, y^n) x^{pj} + b^p(y^1, \dots, y^n) \right) \otimes v_p$$

soit,

$$H = \begin{pmatrix} x^{11} & \dots & x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{k1} & \dots & x^{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ a_n(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ b^k(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix}$$

et

$$X = - \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^k \left(\sum_{j=1}^n x^{ps} \frac{\partial a_j}{\partial y^s} + \frac{\partial b^p}{\partial y^s} \right) \frac{\partial}{\partial x^{ps}} + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

où $a_j, b^p \in \mathcal{A}_b^0(U, \mathfrak{F}_U)$.

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Un élément $X \in \mathcal{J}(M, \mathfrak{F})$ est appelé **champ de vecteurs hamiltonien polarisé** si la 1-forme vectorielle

$$i(X)\theta$$

est exacte. On note par $H(M, \mathfrak{F})$ l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs hamiltoniens polarisés.

Il est clair que $\zeta(H(M, \mathfrak{F}))$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}_1(M) \otimes \mathbb{R}^k$. Posons

$$\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) = d^{-1}(\zeta(H(M, \mathfrak{F})))$$

d étant l'opérateur de différentiation

$$C^\infty(M) \otimes \mathbb{R}^k \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \otimes \mathbb{R}^k.$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

donc, pour toute application $H \in C^\infty(M) \otimes \mathbb{R}^k$ on a l'équivalence suivante :

- 1 $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$;
- 2 il existe un unique champ de vecteurs polarisé $X_H \in H(M, \mathfrak{F})$ tel que :

$$i(X_H)\theta = \zeta(X_H) = -dH$$

Champs de vecteurs hamiltoniens polarisés

Les éléments de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ sont appelés hamiltoniens polarisés, et X_H est appelé champ de vecteurs hamiltonien polarisé associé à l'hamiltonien polarisé H .

Ainsi, on a une application

$$\mu : \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \longrightarrow H(M, \mathfrak{F})$$

définie par :

$$\mu(H) = X_H$$

et, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H(M, \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{A}^1(M) \otimes \mathbb{R}^k \\ \nwarrow \mu & & \nearrow -d \\ & \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) & \end{array}$$

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

Soient $H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ et X_H , X_K les champs de vecteurs hamiltoniens polarisés associés respectivement aux hamiltoniens polarisés H et K . Le crochet de Lie $[X_H, X_K]$ est un champ de vecteurs hamiltonien polarisé qui est associé à l'hamiltonien polarisé $\{H, K\}$ défini par :

$$\{H, K\} = \{H, K\}^p \otimes v_p = -\theta^p(X_H, X_K) \otimes v_p$$

i.e. :

$$[X_H, X_K] = -X_{\{H, K\}}.$$

La correspondance $(H, K) \longmapsto \{H, K\}$ de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \times \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$, confère à $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ une structure d'algèbre de Lie réelle.

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

L'algèbre de Lie $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ opère sur $C^\infty(M)$ par

$$\{H, f\}_0 = X_H(f),$$

pour tous $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ et $f \in C^\infty(M)$. Cette action satisfait en plus l'identité de Leibniz,

$$\{H, fg\}_0 = f \{H, g\}_0 + \{H, f\}_0 g,$$

pour tous $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ et $f, g \in C^\infty(M)$.

Le triplet $(\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), \{, \}, \{, \}_0)$ est appelé **structure de Poisson polarisée subordonnée à la structure k -symplectique polarisée (θ, \mathfrak{F})** .

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

Propriétés

- ❶ $\mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F}) \otimes \mathbb{R}^k$ est une sous algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
- ❷ $H(M, \mathfrak{F})$ est une algèbre de Lie réelle ;
- ❸ $[H^0(M, \mathfrak{F}), H^0(M, \mathfrak{F})] \subset H(M, \mathfrak{F})$;
- ❹ $H(M, \mathfrak{F})$ est un idéal de $H^0(M, \mathfrak{F})$.
- ❺ la suite d'algèbres de Lie :

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \xrightarrow{-\mu} H(M, \mathfrak{F}) \hookrightarrow H^0(M, \mathfrak{F}) \\
 \longrightarrow H^0(M, \mathfrak{F}) / H(M, \mathfrak{F}) \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

est exacte.

Crochet de Poisson vectoriel polarisé

Localement, pour une fonction basique $f \in \mathcal{A}_b^0(U, \mathfrak{F}_U)$, on a

$$\{H, f\}_0 = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial y^j}$$

pour tout

$$H = \left(\sum_{j=1}^n a_j(y) x^{pj} + b^p(y) \right) \otimes v_p \in \mathfrak{H}(U, \mathfrak{F}|_U).$$

Par rapport au système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, le crochet $\{H, K\}$ s'écrit $\{H, K\}^p \otimes v_p$, où :

$$\{H, K\}^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H^p}{\partial y^i} \frac{\partial K^p}{\partial x^{pi}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} \frac{\partial K^p}{\partial y^i} \right).$$

Structure k -symplectique Polarisée sur $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie réelle de dimension n . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de \mathcal{G} et $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$ sa base duale et soit

$$\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1}) = \mathcal{G}^* \otimes \mathbb{R}^{k+1}$$

l'espace vectoriel des homomorphismes d'espaces vectoriels de \mathcal{G} dans \mathbb{R}^{k+1} . L'espace $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$ est engendré par les applications linéaires

$$\omega^i \otimes v_q, \omega^i \otimes w \quad (1 \leq q \leq k, 1 \leq i \leq n),$$

où $(v_q, w)_{1 \leq q \leq k}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{k+1} . Chaque élément u de $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$ peut s'écrire sous la forme

$$u = x_i^q \omega^i \otimes v_q + y_i \omega^i \otimes w$$

où $x_i^q, y_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq q \leq k, 1 \leq i \leq n)$.

Structure k -symplectique Polarisée sur $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$

et il peut être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^k & \vdots & x_n^k \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix},$$

On munit $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$ du système de coordonnées $(x_i^q, y_i)_{(1 \leq q \leq k, 1 \leq i \leq n)}$. $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$ est une variété de dimension $n(k+1)$. Nous munissons naturellement cet espace d'une structure k -symplectique polarisée (θ, \mathfrak{F})

$$\theta = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{i=1}^n dx_i^p \wedge dy_i \right) \otimes v_p,$$

et du feuilletage \mathfrak{F} défini par $dy_1 = 0, \dots, dy_n = 0$.

Structure k -symplectique Polarisée sur $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$

Notons que cette structure ne dépend pas de la loi d'algèbre de Lie de \mathcal{G} . La loi de \mathcal{G} apparaîtra dans l'étude des structures de Poisson polarisées sur $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{k+1})$.

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

Let $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot])$ be a real Lie algebra of dimension n endowed with a basis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Let $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$ its dual basis.

We denote by C_{ij}^k the structural constants of \mathcal{G} : $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$.

We endow $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ with the natural polarized symplectic structure (θ, \mathfrak{F}) defined by the differential 2-form

$\theta = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ and the foliation \mathfrak{F} defined by the equations $dy^1 = 0, \dots, dy^n = 0$.

Every element X of $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ can be written in the following form:

$$X = \sum_{i=1}^n (x^i \omega^i \otimes \bar{e} + y^i \omega^i \otimes \bar{f}) = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ y^1 & \dots & y^n \end{pmatrix}.$$

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

The linear mapping $X : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforms $u = \sum_{i=1}^n (u^i e_i)$ into

$$X(u) = \sum_{i=1}^n (x^i u_i) \bar{e} + \sum_{i=1}^n (y^i u_i) \bar{f}.$$

In terms of matrices we have

$$X(u) = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ y^1 & \dots & y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

The polarized Hamiltonians of the polarized symplectic structure are the differentiable functions $H \in \mathcal{C}^\infty(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2))$ defined at X by expressions of the type

$$H(X) = \sum_{j=1}^n a_j(y^1, \dots, y^n) x^j + b(y^1, \dots, y^n),$$

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

The Polarized Poisson bracket of Polarized Hamiltonians

$$H = \sum_{j=1}^n a_j(y^1, \dots, y^n) x^j + b(y^1, \dots, y^n) ; K = \sum_{j=1}^n a'_j(y^1, \dots, y^n) x^j + b'(y^1, \dots, y^n)$$

is given by

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial y^i} \frac{\partial H}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial K}{\partial y^i} \right) \\ &= \left(x^j \frac{\partial a_j}{\partial y^i} + \frac{\partial b}{\partial y^i} \right) a'_i - a_i \left(x^j \frac{\partial a'_j}{\partial y^i} + \frac{\partial b'}{\partial y^i} \right) \\ &= \left(a'_i \frac{\partial a_j}{\partial y_i} - a_i \frac{\partial a'_j}{\partial y^i} \right) x^j + a'_i \frac{\partial b}{\partial y^i} - a_i \frac{\partial b'}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

We use here the Einstein summation convention. The bracket, so defined, allows to provide $\mathfrak{H}(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F})$ with a polarized Poisson structure subordinate to the real polarization (θ, \mathfrak{F}) .

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

In addition to the Poisson structure subordinate to the real natural polarization on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$, we can define another polarized Poisson structure $(\mathfrak{a}(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F}); \{, \}^L)$, so-called the linear polarized Poisson structure of $(\mathcal{G}, [,])$.

Let $H \in \mathfrak{a}(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F})$, $X \in \text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ and $j_1 : \mathcal{G}^* \rightarrow \text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ be the mapping defined by

$$j_1(\omega^i) = \omega^i \otimes \bar{e}.$$

The composed mappings

$$\mathcal{G}^* \xrightarrow{j_1} \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{dH_X} \mathbb{R}$$

is completely defined by

$$(dH_X \circ j_1)(\omega^i) = dH_X(\omega^i \otimes \bar{e}) = \frac{\partial H}{\partial x^i}(X) = a_i.$$

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

We define

$$\{H, K\}^L(X) = pr_1 \langle [dH_X \circ j_1, dK_X \circ j_1], X \rangle$$

pr_1 being the first projection $(x, y) \mapsto x, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

Then,

$$\begin{aligned} \{H, K\}^L(X) &= pr_1 \langle [dH_X \circ j_1, dK_X \circ j_1], X \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n pr_1 \langle [a^i e_i, a^j e_j], X \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n pr_1 \langle a_i a'_j C_{ij}^k e_k, X \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i a'_j \sum_{m=1}^n C_{ij}^m x^m \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{m=1}^n C_{ij}^m (a^i a'^j - a^j a'^i) x^m. \end{aligned}$$

Theorem

$(\mathfrak{h}(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F}); \{\cdot, \cdot\}^L)$ is a polarized Poisson structure on the foliated manifold $(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F})$, called the linear polarized Poisson structure of the Lie algebra \mathcal{G} .

Associated Poisson structures with the polarized symplectic structure on $\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$

- ① \mathcal{G} is abelian Lie algebra. In this case $\{, \}^L = 0$; Consequently, $(\mathfrak{a}(\text{hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F}); \{, \}^L)$ is the abelian polarized Poisson structure.
- ② \mathcal{G} is the Heisenberg's Lie algebra \mathcal{H}_1 of dimension 3. The Lie algebra law of \mathcal{H}_1 is given by $[e_1, e_2] = e_3$. And so for all $H, K \in \mathfrak{a}(\text{hom}(\mathcal{H}_1, \mathbb{R}^2), \mathfrak{F})$ $X \in \text{hom}(\mathcal{H}_1, \mathbb{R}^2)$ where, $H(X) = a_i(y^1, y^2, y^3)x^i + b(y^1, y^2, y^3)$ and $K(X) = a'_i(y^1, y^2, y^3)x^i + b'(y^1, y^2, y^3)$, we have

$$\{H, K\}^L(X) = (a_1 a'_2 - a_2 a'_1) x^3.$$

Distributions transverses

Une distribution transversale à \mathfrak{F} est un sous-fibré vectoriel H de TM complémentaire de E dans TM

$$TM = E \oplus H = E^1 \oplus \dots \oplus E^k \oplus H$$

Pour tout p , nous considérons la distribution D^p donnée par :

$$D^p = E^p \oplus H.$$

Théorème

Supposons que D^p est intégrable. Soit \mathfrak{G}^p le feuilletage associé. Alors toute feuille W de \mathfrak{G}^p , munie de $(\theta^p, \mathfrak{F}^p)$ est une variété symplectique polarisée.

Distributions transverses

Démonstration.

Soit W une feuille de \mathfrak{G}^P . Pour toute $x \in W$ on a :donc

$$T_x W = D_x = E_x^P \oplus D_x^P$$

Puisque $x \mapsto E_x^P$ est une n -distribution intégrable contenue dans D , alors les feuilles de $E|_W$ sont contenues dans W . Comme $\theta^P(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E^P)$, et θ^P est fermée de rang $2n = \dim W$, on conclut que $(\theta^P, \mathfrak{F}^P)$ est une structure symplectique polarisée sur W . □

Métrie bundle-like au sens de Reinhart

Supposons que M est munie d'une structure riemannienne g .

Définition

La métrie g est dite **bundle-like au sens de Reinhart** pour la variété feuilletée (M, \mathfrak{F}) si chaque géodésique de (M, g) est tangente à la distribution \mathfrak{F}^\perp , normale de \mathfrak{F} , en un point reste tangent à \mathfrak{F}^\perp en tout point de la géodésique.

g définit une métrie transverse g_T sur le fibré transverse νE à E , à l'aide de la dualité $\zeta^p : E^p \longrightarrow \nu^* E$, on déduit une métrie g_p le long des feuilles de \mathfrak{F}^p .

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soient M une v.d. de dimension $n(k+1)$ munie d'une S.S.V.P. $(\theta = \theta^p \otimes \bar{e}_p, E)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$. X est dit **basiquement intégrable** s'il possède n **intégrales premières basiques** pour le feuilletage \mathfrak{F} , définies sur toute la variété M et indépendantes en tout point.

Considérons l'espace $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de la structure S.S.V.P. standard.

Pour chaque $i = 1, \dots, n$ et $a = 1, \dots, k$, Alors Le champ de vecteurs hamiltonien polarisé associé à l'hamiltonien vectoriel polarisé

$$H_a^i = -\delta_a^r y^i \otimes v_r = -y^i \otimes v_a$$

est donné par :

$$X_{H_a^i} = \frac{\partial}{\partial x^{ai}}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Pour tout $i = 1, \dots, n$, les fonctions $f_i = y^i$ ($i = 1, \dots, n$) sont des intégrales premières basiques de X_{H^p} indépendantes en tout point de M , donc, ce champ de vecteurs est basiquement intégrable.

Soient $f^1, \dots, f^n \in \mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$, indépendantes en tout point de M . Alors, $\forall x_o \in M, \exists U \in \mathcal{O}(x_o, M), (f^{pi} \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}))_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ telles que $(f^{pi}, f^i)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ soit un système de coordonnées locales adapté à la structure S.S.V.P. $(\theta = \theta^p \otimes v_p, E)$, i.e. :

$$\theta|_U^p = \sum_{i=1}^n df^{pi} \wedge df^i$$

et $\mathfrak{F}|_U$ soit défini par les équations : $df^1 = \dots = df^n = 0$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soient X un champ de vecteurs basiquement intégrable et f^1, \dots, f^n des intégrales premières de X , basiques et indépendantes en tout point de M . Alors X est un champ de vecteurs tangent au feuilletage \mathfrak{F} ; en effet, la relation

$$(X_x(f^p) = 0 \forall p = 1, \dots, k) \implies X_x \in \ker df_x^1 \cap \dots \cap \ker df_x^n$$

donc $X \in \Gamma(E)$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soit $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ un hamiltonienne vectoriel polarisé et X_H le système hamiltonien associé **supposé basiquement intégrable**. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, y^i)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H = b^p(y^1, \dots, y^n) \otimes \bar{e}_p \in \mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F}) \otimes \mathbb{R}^k$$

et

$$X_H = - \sum_{p,s} \frac{\partial b^p}{\partial y^s} \frac{\partial}{\partial x^{ps}} = - \sum_{p,s} \frac{\partial H^p}{\partial y^s}(y^1, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial x^{ps}}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Soit $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ un hamiltonien vectoriel polarisé et X_H le champ de vecteurs hamiltonien vectoriel polarisé associé **qu'on suppose basiquement intégrable**. Alors X_H est une combinaison linéaire sur M des champs de vecteurs $X_{f_i}^p (1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire de X_H .

En effet on a :

$$H^p = \tilde{H}^p \circ (f^1, \dots, f^n)$$

où \tilde{H}^p est une fonction différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Comme

$$\begin{aligned} \zeta_q \left(\sum_{i,p} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n) X_{f_i}^p \right) &= \sum_{i,p} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n) \cdot \zeta_q (X_{f_i}^p) \\ &= - \sum_i \frac{\partial \tilde{H}^q}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n) df^i \\ &= - d\tilde{H}_{(f^1, \dots, f^n)}^q \end{aligned}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

on déduit que

$$X_H = \sum_{i,p} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, \dots, f^n) X_{f^i}^p$$

Les coefficients en question sont

$$\frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i}(f^1, \dots, f^n),$$

ils sont constants sur chaque arc de trajectoire de X_H contenu dans U , puisque f^1, \dots, f^n sont des intégrales premières de X_H . Comme les trajectoires de X_H **sont connexes**, le champ de vecteurs X_H est donc une combinaison linéaire sur M des $X_{f^i}^p$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X_H .

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Les champs de vecteurs $X_{fi}^p (1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$ engendrent un champ de directions différentiable complètement intégrable puisque $[X_{fi}^p, X_{fj}^q] = 0$ pour tous $p, q = 1, \dots, k$ et $i, j = 1, \dots, n$. Chaque trajectoire de X_H (ou de X_{fi}^p) est entièrement contenue dans une de ces feuilles puisque X_H et des X_{fi}^p sont tangents à chaque feuille. On déduit :

Les champs de vecteurs $X_{fi}^p (1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$ engendrent le sous-fibré E subordonné à la structure symplectique vectorielle polarisée.

Le nombre maximum de fonctions basiques indépendantes sur M est $n = \text{codim} F$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On suppose que X_H est basiquement intégrable. Alors, localement au voisinage de chaque point a de M , la courbe intégrale de X_H passant par ce point peut être déterminée par quadratures.

Soient $a \in M$, $U \in \mathcal{O}(a, M)$, $f^{pi} \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R})$, telles que $(f^{pi}, f^i)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ soit S.C.L.A. à la SSPV, i.e. :

$$\theta|_U^P = \sum_{i=1}^n df^{pi} \wedge df^i ; \mathfrak{F}|_U \mid df^1 = \dots = df^n = 0$$

Le système différentielle du champ de vecteurs X_H s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^P}{\partial f^{pi}} \\ \frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^P}{\partial f^i} \end{cases}$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Comme

$$H^p = F_j (f^1, \dots, f^n) f^{pj} + G^p (f^1, \dots, f^n)$$

on déduit

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = F_i (f^1, \dots, f^n)$$

Les fonctions f^i sont des intégrales premières de X_H donc

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = X_H (f^1, \dots, f^n)$$

par suite $F_i (f^1, \dots, f^n) = 0$, et, donc, $H^p = G^p (f^1, \dots, f^n)$ pour tout p . Ainsi

$$\frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} = -\frac{\partial G^p}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n)$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Par suite la courbe intégrale de X_H passant par a , pour la valeur 0 du paramètre t , s'exprime au moyen des coordonnées locales $(f^{pi}, f^i)_{1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n}$ par :

$$\begin{cases} f^i(t) &= f^i(a) \\ f^{pi}(t) &= f^{pi}(a) - t \frac{\partial G^p}{\partial f^i} (f^1(a), \dots, f^n(a)) \end{cases}$$

La détermination de cette courbe intégrale ne fait intervenir que des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Il est bien connu que tout sous-groupe discret G de \mathbb{R}^m est de la forme

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^s n_i e_i, \mid (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s \right\}$$

où $e_1, \dots, e_s \in \mathbb{R}^m$ linéairement indépendants dans \mathbb{R}^m .

En complétant e_1, \dots, e_s en une base $(e_1, \dots, e_s, \dots, e_m)$, on a :

$$\mathbb{R}^m / G \simeq \mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$$

\mathbb{T}^s est le tore de dimension s .

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On conviendra de paramétrer le tore \mathbb{T}^s en l'identifiant au quotient $\mathbb{T}^s = \mathbb{R}^s / 2\pi\mathbb{Z}^s$.

Soit $p : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{T}^s$ la projection canonique. Chaque élément $(\gamma^1, \dots, \gamma^s)$ de \mathbb{R}^s définit un élément $p(\gamma^1, \dots, \gamma^s)$ du tore \mathbb{T}^s , on dira à ce propos que $(\gamma^1, \dots, \gamma^s)$ est **un système de coordonnées angulaires** de l'élément $p(\gamma^1, \dots, \gamma^s)$.

Les fonctions coordonnées usuelles de \mathbb{R}^s sont appelées **variables angulaires** sur le tore \mathbb{T}^s .

Soient

$$f = (f^1, \dots, f^n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$f^1, \dots, f^n \in \mathcal{A}_b^0(M, \mathfrak{F})$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ une valeur régulière de f et N une composante connexe de $f^{-1}(a)$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et les restrictions à cette sous variété des nk champs de vecteurs X_{fi}^p qui sont linéairement indépendants en chaque point de M , sont tangents à N et l'on a

$$[X_{fi}^p, X_{fj}^q] = 0$$

pour tous $i, j = 1, \dots, n$ et $p, q = 1, \dots, k$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Supposons que les champs de vecteurs

$$X_{f^i|N}^p$$

sont complets. On dénote par φ^{pi} le flot de $X_{f^i|N}^p$.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^{nk} \times N \longrightarrow N$ définie par :

$$\Phi(t, x) = \Phi_t(x) = \prod_{p,i} \varphi_{t_{pi}}^{pi}(x)$$

$t = (t_{pi})_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{nk}$ et $x \in N$.

L'application Φ définit une action transitive et localement libre et N est difféomorphe $T^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de $G_x = \{t \in \mathbb{R}^{nk} \mid \Phi(t, x) = x\}$.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

$[X_{f_i}^p, X_{f_j}^q] = 0 \implies \varphi^{pi} \circ \varphi^{qj} = \varphi^{qj} \circ \varphi^{pi}$, par conséquent $\Phi_0 = Id_N$ et $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$, $\forall t, t' \in \mathbb{R}^{nk}$ et Φ définit une action différentiable du groupe abélien \mathbb{R}^{nk} sur N . Pour tout $x \in N$, l'application $g_x : t \longmapsto \Phi_t(x)$ est de rang nk . Ainsi l'action Φ est **localement libre**, c'est à dire le sous groupe d'isotropie

$$G_x = \left\{ t \in \mathbb{R}^{nk} \mid \Phi(t, x) = x \right\}$$

de chaque point x de N est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^{nk} . L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de chaque point $x \in N$, est à la fois ouverte et fermée de N . Comme N est connexe on déduit que $\mathcal{O}(x) = N$ pour tout $x \in N$; ainsi, l'action Φ est transitive; par conséquent N est difféomorphe à $\mathbb{R}^{nk}/G_x \simeq T^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de G_x .

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

On suppose que les fonctions basiques f^1, \dots, f^n sont indépendantes en tout point de M .

Proposition Soient $a \in M$ et N la composante connexe de $f^{-1}(f(a))$ contenant le point a . Si N est compacte, alors N est une sous-variété lagrangienne fermée de M qui est invariante par le flot du champ de vecteurs X_H . De plus, il existe un difféomorphisme du tore T^{nk} sur N définissant un système de variables angulaires $(\psi^1, \dots, \psi^{nk})$ au moyen duquel le flot φ de $X_H|_N$ s'exprime par

$$\varphi_t(\psi^1, \dots, \psi^{nk}) = (\psi^1 + \omega^1 t, \dots, \psi^{nk} + \omega^{nk} t)$$

$\omega^1, \dots, \omega^{nk}$ étant des constantes. On dira que ce flot est quasi-périodique.

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Comme $f(a)$ est une valeur régulière de f , on déduit de ce qui précède que N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et que les champs de vecteurs $X_{fi}^p (1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)$, sont tangents à cette sous-variété. N étant compacte, les champs de vecteurs $X_{fi|N}^p$ sont complets. Comme N est difféomorphe à $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, on déduit que $s = nk$. Il en résulte que le sous-groupe d'isotropie G_a de a , pour l'action Φ , est engendré par nk éléments e_1, \dots, e_{nk} de \mathbb{R}^{nk} formant une base de cet espace. Considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}^{nk} \longrightarrow N,$$

définie par :

$$\Psi \left(\psi^1, \dots, \psi^{nk} \right) = \Phi \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{nk} \psi^s e'_s, a \right)$$

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

pour tout $(\psi^1, \dots, \psi^{nk}) \in \mathbb{R}^{nk}$. D'après la définition même de Φ , le flot ϕ^{pi} de $X_{f^i|N}^p$ en tout point $y \in N$, est donné par :

$$\phi_t^{pi}(y) = \Phi(te_{pi}, y)$$

où $(e_{pi})_{(1 \leq p \leq k; 1 \leq i \leq n)}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{nk} . L'expression de ce flot au moyen des variables ψ^1, \dots, ψ^{nk} est donné par :

$$\phi_t^{pi}(\psi^1, \dots, \psi^{nk}) = (\psi^1 + t\omega_{p,i}^1, \dots, \psi^{nk} + t\omega_{p,i}^{nk})$$

où $\left(\frac{\omega_{p,i}^1}{2\pi}, \dots, \frac{\omega_{p,i}^{nk}}{2\pi}\right)$ sont les composantes de e_{pi} dans la base e'_1, \dots, e'_{nk} de \mathbb{R}^{nk} .

On sait que tout point de M possède un voisinage ouvert sur lequel on a :~

$$H^p = \tilde{H}^p \circ (f^1, \dots, f^n),$$

où \tilde{H}^p est une fonction numérique différentiable définie sur un

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens polarisés

Le champ de vecteurs X_H a pour expression locale :

$$X_H = \sum_{p,i} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n) X_{f^i}^p = \sum_{p,i} A^{pi} X_{f^i}^p$$

où $A^{pi} = \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} (f^1, \dots, f^n)$. En utilisant la connexité de N , on voit que les coefficients A^{pi} sont constants sur N . Le flot de X_H s'exprime donc, au moyen des variables angulaires ψ^1, \dots, ψ^{nk} , selon

$$\phi_t(\psi^1, \dots, \psi^{nk}) = (\psi^1 + \omega^1 t, \dots, \psi^{nk} + \omega^{nk} t)$$

avec $\omega^s = \sum_{p,i} A^{pi} \omega_{pi}^s$, pour tout $s = 1, \dots, nk$.

Algèbres de Lie k -symplectiques polarisées

Soit G un groupe de Lie de dimension $n(k+1)$ d'algèbre de Lie \mathcal{G} , muni d'une structure k -symplectique polarisée (θ, E) invariante à gauche i.e., pour tous $g, x \in G$ on a :

$$\begin{cases} L_g^* \theta &= \theta \\ (L_g)_* E_x &= E_{gx} \end{cases}$$

Soit \mathfrak{F} le feuilletage invariant à gauche défini par le sous-fibré E . La feuille H de \mathfrak{F} passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe de G de codimension n . Désignons par \mathcal{H} l'algèbre de Lie du sous-groupe H . On a donc

$$\theta^P(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}$$

avec la notation $\theta_e^P \equiv \theta^P$.

Algèbres de Lie k -symplectiques polarisées

Réciproquement, soit \mathcal{H} une sous-algèbre de \mathcal{G} . Pour tout $x \in G$ on pose

$$P_x = \{X_x \in T_x G \mid \eta(X_x) \in \mathcal{H}\}$$

η étant la 1-forme de Maurer-Cartan de G . Le champ d'éléments de contact P , ainsi construit, définit bien un sous-fibré intégrable de TG . La feuille \mathcal{H} du feuilletage \mathfrak{F} associé au sous-fibré P passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe H de G d'algèbre de Lie \mathcal{H} tel que les orbites de H agissant par translations à droite dans G soient les feuilles de \mathfrak{F} .

Algèbres de Lie k -symplectiques polarisées

Définition Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), $\theta \in \wedge_2(\mathcal{G}, V)$ fermée et \mathcal{H} une sous- algèbre de Lie de \mathcal{G} de codimension n . On dit que $(\theta; \mathcal{H})$ est une structure k -symplectique sur \mathcal{G} si

- 1 θ est non dégénéré ;
- 2 $\theta(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathcal{H}$.

Références : Notes historiques



Patrick Iglesias-Zemmour

Aperçu des origines de la géométrie symplectique
2002



C.M. Marles

*Aux sources de la géométrie symplectique : les mémoires de
Lagrange et de Poisson sur la méthode de variation des
constantes*

Académie des sciences. Sciences mécaniques et informatiques,
29 janvier 2008



C.M. Marles

Hommage à Jean Marie Souriau
SMF – Gazette – 133, juillet 2012



B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann.
of Math.* 69 (1959) 119–132

Références : Notes historiques



J.M. Souriau

Structure des systèmes dynamiques

DUNOD PARIS 1970.



J.M. Souriau

Géométrie symplectique

Vidéo sur Youtube. Références : Notes historiques
Références : Notes historiques



A. Weinstein

symplectic geometry

BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN
MATHEMATICAL SOCIETY Volume 5, Number 1, July 1981



N. Woodhouse

Geometric quantization

Clarendon Press Oxford 1980