Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 5 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 2n(1-nx) & si \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. *Montrer que f_n est continue par morceaux et donner sa représentation graphique.*
2. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.*
3. *Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.*
4. *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$?*

Solution -

1. Il est claire que f_n est continue sur $]0, \frac{1}{n}[$ et $]\frac{1}{n}, 1[$ et on a

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f_n(x) = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{n}^+} f_n(x) = \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{n}^-} f_n(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 1^-} f_n(x) = 0$$

ce qui montre que f_n est continue par morceaux sur $[0,1]$.

2. Nous allons montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

En effet, si $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n(0) = 0.$$

Si $0 < x \leq 1$ et puisque $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < x$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, \quad f_n(x) = 0$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

3. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} 2n(1 - nx)dx \\ &= \left[2nx - n^2x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

4. Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)dx$$

la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformémeent vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. *Calculer* I_0, I_1, I_2, I_3.
2. *Etablir une relation entre* I_n *et* I_{n+2} *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *En déduire* I_{2p} *et* I_{2p+1}.
4. *Montrer que la suite* $(I_n)_{n \geq 1}$ *est décroissante.*
5. *Calculer* nI_nI_{n+1}.

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}, \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \\
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t) dt, \\
&= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \\
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1-\cos^2 t) dt = \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. On fait une intégration par parties en posant $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n+1} t$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t dt \\
&= \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^n t dt \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

et donc

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n. \tag{1}$$

3. D'après (1), on a

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2(p+1)} I_{2p} \quad \text{et} \quad I_{2(p+1)+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3)} I_{2p+1}.$$

Nous allons alors montrer par récurrence que

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{1\times 3\times \ldots \times (2p-1)}{2^p p!}\frac{\pi}{2}, \quad (p \geq 1), & (2) \\
I_{2p+1} &= \frac{2^p p!}{1\times 3\times \ldots \times (2p+1)}, \quad (p \geq 0). & (3)
\end{aligned}$$

Pour $p=1$, on a

$$I_2=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^1 1!}\frac{\pi}{2}.$$

Pour $p=0$, on a

$$I_{2\times 0+1}=I_1=1=\frac{2^0 0!}{1}.$$

Ainsi les formules (2)-(3) sont vraies au premier rang. Supposons que ces deux formules sont vérifiées. On a d'après (1)

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= \frac{2p+1}{2(p+1)}I_{2p}\\
&= \frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2p-1)}{2^p p!}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{1\times 3\times\ldots\times(2p-1)(2(p+1)-1)}{2^{p+1}(p+1)!}\frac{\pi}{2}\\
I_{2(p+1)+1} &= \frac{2(p+1)}{2p+3)}I_{2p+1}\\
&= \frac{2(p+1)}{2p+3)}\frac{2^p p!}{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}\\
&= \frac{2^{p+1}(p+1)!}{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)(2(p+1)+1)}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence et montre (2)-(3).

4. On a

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(\sin t-1)dt.$$

or, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sin^n t(\sin t-1)\le 0$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(\sin t-1)dt\le 0$$

ce qui montre que suite $(I_n)_{n\ge 1}$ est décroissante.

5. • Si $n=2p$, on a d'après (2)-(3),

$$\begin{aligned}
nI_nI_{n+1} &= 2pI_{2p}I_{2p+1}\\
&= 2p\frac{1\times 3\times\ldots\times(2p-1)}{2^p p!}\frac{\pi}{2}\frac{2^p p!}{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}\\
&= \frac{2p}{2p+1}\frac{\pi}{2}=\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $n = 2p+1$, on a d'après (2)-(3),

$$\begin{aligned} nI_nI_{n+1} &= (2p+1)I_{2p+1}I_{2(p+1)} \\ &= (2p+1)\frac{2^p p!}{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}{2^{p+1}(p+1)!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$nI_nI_{n+1} = \frac{n\pi}{2(n+1)}.$$

Exercice 3 *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.*

1. *Montrer que $\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.*
2. *En déduire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que*

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

Solution -

1. Posons $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = 2x-1$ et utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-2x)f'(x)dx &= [(1-2x)f(x)]_0^1 + 2\int_0^1 f(x)dx \\ &= -f(1) - f(0) + 2\int_0^1 f(x)dx, \\ &= 2\int_0^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$2\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx\right| \leq \left(\int_0^1 (1-2x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Or

$$\int_0^1 (1-2x)^2 dx \quad = \quad -\frac{1}{6}\left[(1-2x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

En remplaçant dans (4), on obtient

$$2\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et finalement

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

Exercice 4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.*

1. *Calculer I_0, I_1, I_2.*
2. *Calculer $I_n + I_{n+1}$.*
3. *Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et convergente et calculer sa limite.*
4. *Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 dt = 1,\\
I_1 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt,\\
&= [t-\ln(1+t)]_0^1 = 1-\ln 2,\\
I_2 &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = \int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt\\
&= \left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\ln 2.
\end{aligned}$$

2. On a
$$I_{n+1}+I_n=\int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t}dt=\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}. \tag{5}$$
On a
$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1+t}dt\leq 0$$
car, pour tout $t\in[0,1]$,
$$\frac{t^n(1-t)}{1+t}\leq 0.$$
Ceci montre que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. D'un autre côté, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$,
$$\frac{t^n}{1+t}\geq 0$$
et donc $I_n\geq 0$. Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc convergente et en passant à la limite dans (5), on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n=0. \tag{6}$$

3. En utilisant (5), on obtient
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(I_k+I_{k-1})\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{k-1}\\
&\overset{h=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_k+\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^{h+2}I_h\\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}I_k+\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^{h}I_h\\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}I_k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}I_k\\
&= I_0-(-1)^nI_n.
\end{aligned}$$
En utilisant (6), on déduit alors que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=I_0=1.$$

Exercice 5 *Pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, on pose* $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. *Calculer* $I_{0,1}, I_{1,1}, I_{1,2}$.
2. *Montrer que pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, on a* $I_{p,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$.
3. *En déduire que* $I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
4. *Montrer*
$$\sum_{k=0}^{q} C_k^q\frac{(-1)^k}{p+k+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Solution -

1. On a
$$\begin{aligned}
I_{0,1} &= \int_0^1(1-t)dt=\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2},\\
I_{1,1} &= \int_0^1 t(1-t)dt=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{6},\\
I_{1,2} &= \int_0^1 t(1-t)^2dt=\int_0^1(t^3-2t^2+t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

2. Nous allons utiliser une intégration par parties avec $u'=t^p$ et $v=(1-t)^q$. On a, pour $q\geq 1$,
$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1+\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt\\
&= \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}.
\end{aligned}$$
En conclusion,
$$I_{p,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}. \tag{7}$$

3. Nous montrer la relation par récurrence sur q. On a
$$I_{p,0}=\int_0^1 t^p dt=\frac{1}{p+1}=\frac{p!0!}{(p+0+1)!}.$$

On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

On a

$$\begin{aligned} I_{p,q+1} &\overset{(7)}{=} \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q} \\ &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q+1)!} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q+1)!}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}. \qquad (8)$$

4. Pour tout $p, q \in N$, d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} t^p(1-t)^q &= t^p \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-t)^k 1^{q-k} \\ &= t^p \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-1)^k t^{k+p}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 t^{k+p} dt = \frac{1}{1+k+p}.$$

Il en résulte que

$$I_{p,q} = \sum_{k=0}^{q} C_k^q \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

et donc d'après (8),

$$\sum_{k=0}^{q} C_k^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 6 *On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.*

1. *Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.*
2. *Déterminer le signe de $F(x)$ et $F'(x)$ sur $]0,+\infty[$.*
3. *Calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3.*
4. *Montrer que, pour tout $x>0$, $F(\frac{1}{x})=F(x)$.*
5. *Montrer que, pour tout $t\geq 1$,*

$$0\leq \frac{\ln t}{1+t^2}\leq \frac{2\sqrt{t}}{t^2}$$

   et en déduire de F est majorée sur $[1,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ existe.
6. *Que peut-t-on dire de $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x)$?*
7. *F est-elle bornée sur $]0,+\infty[$?*

Solution -

1. La fonction $t\mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc, d'après le théorème **??**, F est la primitive de f qui s'annule en 1. Il en découle que F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Pour tout $x\in]0,1]$, on a

$$F(x)=-\int_x^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

   Or, pour tout $t\in[x,1]$, $\frac{\ln t}{1+t^2}\leq 0$ et donc $F(x)\geq 0$.
   Pour $x>1$ et pour tout $t\in[1,x]$, $\frac{\ln t}{1+t^2}\geq 0$ et donc $F(x)\geq 0$. Finalement, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $F(x)\geq 0$.
   D'un autre côté, pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   Il en résulte que $F'(x)$ est du signe de $\ln x$ sur $]0,+\infty[$, elle est donc strictement négative sur $]0,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$.
3. Pour calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3, nous allons calculer le développement limité de F' en 1 à l'ordre 2. On pose $u=x-1$ et on écrit

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}=\frac{\ln(1+u)}{1+(1+u)^2}=\frac{\ln(1+u)}{2+2u+u^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}}.$$

Or, les formules classiques du développement limité en 0 donnent

$$\begin{aligned}\ln(1+u) &= u-\frac{u^2}{2}+o_0(u^2),\\ \frac{1}{1+u+\frac{u^2}{2}} &= 1-u-\frac{u^2}{2}+(u+\frac{u^2}{2})^2+o_0(u^2)\\ &= 1-u+\frac{u^2}{2}+o_0(u^2).\end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient

$$\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}}=u-\frac{3}{2}u^2+o_0(u^2).$$

Ainsi

$$F'(x)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(x-1)^2+o_1((x-1)^2),$$

et finalement

$$F(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}(x-1)^3+o_1((x-1)^3).$$

4. On a

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

On fait le changement de variable $u=\frac{1}{t}$. On a alors $du=-u^2dt$ et donc

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x\frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}}(-\frac{du}{u^2})=\int_1^x\frac{\ln u}{u^2+1}du=F(x).$$

5. Pour tout $t\geq 1$, $\ln t\geq 0$. Pour montrer la deuxième inégalité, et puisque $\frac{1}{1+t^2}\leq\frac{1}{t^2}$, il suffit de montrer que $\ln t\leq 2\sqrt{t}$. Pour cela considérons la fonction $f(t)=\ln t-2\sqrt{t}$. Cette fonction est dérivable sur $[1,+\infty[$ et, pour tout $t\in[1,+\infty[$,

$$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1-\sqrt{t}}{t}\leq 0,$$

et donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$ et par suite, pour tout $t\in[1,+\infty[$, $f(t)\leq f(1)=-2<0$ et l'inégalité est vérifiée. Nous avons alors montré que, pour tout $t\geq 1$,

$$0\leq\frac{\ln t}{1+t^2}\leq\frac{2\sqrt{t}}{t^2}.$$

Par passage à l'intégrale, on déduit que, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt \quad = \quad 2\int_1^x t^{-\frac{3}{2}} dt = -4\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4.$$

Finalement, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4 \leq 4,$$

et donc F est majorée sur $[1, +\infty[$.
D'un autre côté, nous avons vu que F' est positive sur $[1, +\infty[$ et donc F est croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi F est croissante majorée sur $[1, +\infty[$ et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$ existe.

6. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x) = \lim_{X \longrightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{X}\right) \overset{4.}{=} \lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X),$$

et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ existe en vertu de 5.

7. Nous avons vu que, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$0 \leq F(x) \leq 4.$$

Pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x} \in [1, +\infty[$ et donc $0 \leq F(\frac{1}{x}) \leq 4$ et puisque, $F(\frac{1}{x}) = F(x)$, on déduit que

$$0 \leq F(x) \leq 4.$$

Nous avons alors établi que F est bornée sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + (n-k)^2}$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solution - Nous allons la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale donnée par la formule

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})=\int_a^b f(x)dx. \tag{9}$$

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})\end{aligned}$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\sqrt{x}$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+(n-k)^2} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2+(n-k)^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2(1+(\frac{n}{k}-1)^2)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{n^2}{k^2}}{1+(\frac{n}{k}-1)^2}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})\end{aligned}$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{1+(x-1)^2}$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+(n-k)^2} = \int_0^1\frac{x^2}{1+(x-1)^2}dx$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(t=x-1)}{=} \int_{-1}^{0} \frac{t^2+1+2t}{1+t^2}dt \\
&= \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \left[t+\ln(1+t^2)\right]_{-1}^{0} = 1-\ln 2.
\end{aligned}$$

3. Puisque $\cos\dfrac{n\pi}{2n} = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n} \\
&= \frac{1}{n}+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})
\end{aligned}$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} = \int_0^1 \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+2k}{n}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\ln(1+2x)$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right) &= \int_0^1 \ln(1+2x)dx \\
&= [x\ln(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x}\right) dx \\
&= \ln 3 - \left[x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\ln 3 - 1.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{3}{2}\ln 3 - 1} = 3\sqrt{3}e^{-1}.
$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
TD bis 7
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle*

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2. \qquad (E)$$

1. *Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).*
2. *On pose $y = y_0 - \frac{1}{z}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle*

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1. \qquad (E_1)$$

3. *Résoudre (E_1).*
4. *Déterminer toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$*

Solution -

1. y_0 est solution si et seulement si

$$a - a - a^2x^2 = -9x^2$$

soit $a = 3$.

2. $y = y_0 - \frac{1}{z}$ est solution de (E) si et seulement si

$$y_0' + \frac{z'}{z^2} - \frac{y_0}{x} + \frac{1}{xz} - y_0^2 - \frac{1}{z^2} + 2\frac{y_0}{z} = -9x^2. \qquad (1)$$

Puisque y_0 est solution de (E), on déduit que (1) est équivalente à

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} - \frac{1}{z^2} + 2\frac{y_0}{z} = 0$$

soit en multipliant par z^2,

$$z' + (\frac{1}{x} + 6x)z = 1. \qquad (E_1)$$

3. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sont de la forme

$$z(x) = Ce^{-A(x)} + z_0,$$

où $A(x) = \int(\frac{1}{x} + 6x)dx$ et z_0 est une solution particulière. Or

$$A(x) \quad = \quad \int(\frac{1}{x} + 6x)dx = \ln x + 3x^2.$$

Cherchons z_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$z_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-\ln x - 3x^2} = \frac{C(x)e^{-3x^2}}{x}.$$

On a

$$z_0'(x) \quad = C'(x)\tfrac{e^{-3x^2}}{x} + C(x)e^{-3x^2}(-6 - \tfrac{1}{x^2}) \quad .$$

Donc z_0 est solution de (E_1) si et seulement si

$$C'(x)\frac{e^{-3x^2}}{x} + C(x)e^{-3x^2}(-6 - \frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x} + 6x)\frac{C(x)e^{-3x^2}}{x} = 1,$$

soit

$$C'(x) = xe^{3x^2}.$$

Donc

$$C(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2}.$$

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{Ce^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'après 2. et 3., l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{6x}{Ce^{-3x^2} + 1}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2 *Résoudre sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *les deux équations différentielles*

$$y' \cos x - y \sin x = 1. \qquad (E_1) \qquad y' - y \tan x = 1 \qquad (E_2).$$

Solution -

1. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{\cos x}.$$
Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si
$$\left(\frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\cos x - \frac{C(x)}{\cos x}\sin x = 1,$$
soit
$$C'(x) = 1,$$
et donc $C(x) = x$ et
$$y_0(x) = \frac{x}{\cos x}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{C+x}{\cos x}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$
2. (E_2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = -\int \tan x dx = \ln(\cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{\cos x}.$$
Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si
$$\frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\tan x = 1,$$

soit
$$C'(x) = \cos x,$$
et donc $C(x) = \sin x$ et
$$y_0(x) = \tan x.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{C}{\cos x} + \tan x, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*
$$\begin{array}{l} xy' - 2y = x^4, \quad (E_1), \quad x(1+x^2)y' = y, \quad (E_2), \\ (x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1, \quad (E_3), \\ (e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x \quad (E_4). \end{array}$$

Solution -

1. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
   (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = \int \frac{-2}{x} dx = -\ln x^2,$$
   et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
   $$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)x^2.$$
   Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si
   $$(C'(x)x^2 + 2xC(x))x - 2C(x)x^2 = x^4,$$
   soit
   $$C'(x) = x,$$
   et donc $C(x) = \frac{1}{2}x^2$ et
   $$y_0(x) = \frac{1}{2}x^4.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $]-\infty, 0[$ est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ Cx^2 + \frac{1}{2}x^4, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

De la même manière on obtient les mêmes solutions sur $]0, +\infty[$ et donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Cx^2 + \frac{1}{2}x^4, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
   (E_2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_2) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = -\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+1} = -\ln(-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$
   et y_0 est une solution particulière. Remarquons que $y_0 = 0$ est une solution particulière de (E_2). En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_2) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
   $$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
   De la même manière on obtient les mêmes solutions sur $]0, +\infty[$ et donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donné par
   $$\mathcal{S} = \left\{ \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. (E_3) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2+1} dx = x - \ln(x^2+1),$$
   et y_0 est une solution particulière. On remarque que $y_0 = x$ est une solution particulière de (E_3). En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ est donné par
   $$\mathcal{S} = \left\{ C(x^2+1)e^{-x} + x, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
(E_4) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_4) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx,$$
et y_0 est une solution particulière.
Posons $u = e^x$, $du = udx$ et donc
$$\begin{aligned} A(x) = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx &= \int \frac{u+1}{u(u-1)}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du + \int \frac{2}{u-1}du \\ &= -\ln|u| + 2\ln|u-1| = -x + 2\ln(1-e^x). \end{aligned}$$
Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)e^x}{(e^x-1)^2}.$$
Donc y_0 est solution de (E_4) si et seulement si
$$(e^x-1)\left(C'(x)\frac{e^x}{(e^x-1)^2} - C(x)\frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}\right) + \frac{C(x)e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = 3+2e^x,$$
soit
$$C'(x) = \frac{(3+2e^x)(e^x-1)}{e^x} = 1 + 2e^x - 3e^{-x},$$
soit
$$y_0 = \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_4) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{Ce^x}{(e^x-1)^2} + \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
Un calcul analogue donne que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E_4) sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{Ce^x}{(e^x-1)^2} + \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4 *On considère l'équation différentielle*

$$xy' + 2y = \frac{x+1}{x^2+1}. \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Solution -

1. (E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{2}{x} dx = \ln(x^2),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{x^2}.$$
Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$x\left(\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}\right) + 2\frac{C(x)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2+1},$$
soit
$$C'(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1},$$
et donc
$$C(x) = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x.$$
et
$$y_0(x) = \frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{C}{x^2} + \frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Un calcul analogue donne que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S}_2=\left\{\frac{C}{x^2}+\frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donc il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x)=\begin{cases}\frac{C_1}{x^2}+\frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x<0\\ \frac{C_2}{x^2}+\frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x>0.\end{cases}$$

En effectuant un développement limité en 0, on obtient

$$\frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x+o_0(x).$$

Puisque y est continue et dérivable en 0, on déduit que $C_1=C_2=0$ et que

$$y(x)=\begin{cases}\frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x\neq 0\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

Exercice 5 *Résoudre dans chacun des cas suivants l'équation différentielle*

$$y''-2y'-3y=f(x), \tag{E}$$

$$1.\ f(x)=x, \qquad 2.\ f(x)=xe^{-x}, \qquad 3.\ f(x)=\sin x.$$

Solution - C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y=y_0+y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y''-2y'-3y=0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X)=X^2-2X-3.$$

Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta=4+12=16$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1=3$ et $r_2=-1$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H=\alpha e^{3x}+\beta e^{-x} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant dans chacun des cas ci-dessus une solution particulière de (E).

1. $f(x) = x$. Comme $f(x) = xe^{0x}$ et 0 n'est pas racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = ax + b$. Ainsi y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$-2a - 3(ax + b) = x,$$
soit $-3a = 1$ et $3b + 2a = 0$ et donc $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{9}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = x$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. $f(x) = xe^{-x}$. Comme -1 est racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = x(ax + b)e^{-x}$. On a
$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & (2ax + b - ax^2 - bx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ y_0'' & = & (-2ax + 2a - b + ax^2 - (2a - b)x - b)e^{-x} \\ & = & (ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b)e^{-x}. \end{array}$$
Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$(ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b) - 2(-ax^2 + (2a - b)x + b) - 3(ax^2 + bx) = x,$$
soit $a = -\frac{1}{8}$ et $b = -\frac{1}{16}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = xe^{-x}$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{16}x(2x + 1)e^{-x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. $f(x) = \sin x$. Comme $\sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - {}^{-\imath x})$ et comme $\imath$ et -$\imath$ ne sont pas racines de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = a \sin x + b \cos x$. On a
$$y_0' = a \cos x - b \sin x \quad \text{et} \quad y_0'' = -a \sin x - b \cos x,$$
et donc y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$-a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) - 3(a \sin x + b \cos x) = \sin x,$$
soit $-4a + 2b = 1$ et $-4b - 2a = 0$. Ainsi $a = -\frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{10}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = \sin x$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{10}(2 \sin x - \cos x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 6 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + 4y = x^2 e^x. \qquad (E)$$

1. *Déterminer l'ensemble de solutions de* (E)*.*
2. *Déterminer les solutions* h *de* (E) *vérifiant* $h(0) = 0$ *et* $h'(0) = 0$*.*

Solution -

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \qquad (H)$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X + 4.$$

Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 4 - 16 = -12$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 1 + \sqrt{3}\imath$ et $r_2 = 1 - \sqrt{3}\imath$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & (ax^2 + (2a + b)x + c + b)e^x, \\ y_0'' & = & (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)e^x. \end{array}$$

Donc y_0 est solution si et seulement si

$$(3ax^2 + 3bx + (2a + 3c))e^x = x^2 e^x,$$

soit $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = -\frac{2}{9}$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit $h = Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x$ une solution de (E). On a

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & A - \dfrac{2}{9}, \\ h'(0) & = & A + \sqrt{3}B - \dfrac{2}{9}. \end{array}$$

Donc $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$ donne $A = \frac{2}{9}$ et $B = 0$ et donc

$$h(x) = \frac{2}{9}e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x.$$

Exercice 7 *Résoudre les équations différentielles*

1. $y'' - y = x^3 + x^2. \quad (E_1).$

2. $y'' - 2y' + y = e^x \quad (E_2).$

3. $y'' - 4y = 4e^{-2x} \quad (E_3).$

Solution -

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 1.$$

et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^x + Be^{-x} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & 3ax^2 + 2bx + c, \\ y_0'' & = & 6ax + 2b. \end{array}$$

Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si

$$-ax^3 - bx^2 + (6a - c)x + d - 2b = x^3 + x^2.$$

Ainsi $a = -1$, $b = -1$, $c = -6$ et $d = -2$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^x + Be^{-x} - x^3 - x^2 - 6x - 2, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = (Ax + B)e^x \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_0 = ax^2e^x$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & a(x^2 + 2x)e^x, \\ y_0'' & = & a(x^2 + 4x + 2)e^x. \end{array}$$

Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si

$$2ae^x = e^x$$

et donc $a = \frac{1}{2}$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 4y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{-2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E_3) sous la forme $y_0 = axe^{-2x}$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & a(1-2x)e^{-2x}, \\ y_0'' & = & a(-4+4x)e^{-2x}. \end{array}$$

Donc y_0 est solution de (E_3) si et seulement si

$$-4ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

et donc $a = -1$.

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_3) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^{2x} + Be^{-2x} - xe^{-2x}, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 5 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 2n(1-nx) & si \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. *Montrer que f_n est continue par morceaux et donner sa représentation graphique.*
2. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.*
3. *Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.*
4. *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$?*

Solution -

1. Il est claire que f_n est continue sur $]0, \frac{1}{n}[$ et $]\frac{1}{n}, 1[$ et on a

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f_n(x) = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{n}^+} f_n(x) = \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{n}^-} f_n(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 1^-} f_n(x) = 0$$

ce qui montre que f_n est continue par morceaux sur $[0,1]$.

2. Nous allons montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

En effet, si $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n(0) = 0.$$

Si $0 < x \leq 1$ et puisque $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < x$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, \quad f_n(x) = 0$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

3. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} 2n(1 - nx)dx \\ &= \left[2nx - n^2x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

4. Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)dx$$

la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformémeent vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.*

1. *Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.*
2. *Etablir une relation entre I_n et I_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.*
4. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
5. *Calculer nI_nI_{n+1}.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}, \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \\
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t) dt, \\
&= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \\
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1-\cos^2 t) dt = \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. On fait une intégration par parties en posant $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n+1} t$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t dt \\
&= \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^n t dt \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

et donc

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n. \tag{1}$$

3. D'après (1), on a

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2(p+1)} I_{2p} \quad \text{et} \quad I_{2(p+1)+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3)} I_{2p+1}.$$

Nous allons alors montrer par récurrence que

$$I_{2p} = \frac{1\times 3\times \ldots \times (2p-1)}{2^p p!}\frac{\pi}{2}, \quad (p \geq 1), \tag{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^p p!}{1\times 3\times \ldots \times (2p+1)}, \quad (p \geq 0). \tag{3}$$

Pour $p = 1$, on a

$$I_2 = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^1 1!} \frac{\pi}{2}.$$

Pour $p = 0$, on a

$$I_{2\times 0+1} = I_1 = 1 = \frac{2^0 0!}{1}.$$

Ainsi les formules (2)-(3) sont vraies au premier rang. Supposons que ces deux formules sont vérifiées. On a d'après (1)

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= \frac{2p+1}{2(p+1)} I_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2(p+1)} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p-1)}{2^p p!} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p-1)(2(p+1)-1)}{2^{p+1}(p+1)!} \frac{\pi}{2} \\
I_{2(p+1)+1} &= \frac{2(p+1)}{2p+3)} I_{2p+1} \\
&= \frac{2(p+1)}{2p+3)} \frac{2^p p!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2p+1)} \\
&= \frac{2^{p+1}(p+1)!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2p+1)(2(p+1)+1)}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence et montre (2)-(3).

4. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(\sin t - 1)dt.$$

or, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sin^n t(\sin t - 1) \leq 0$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(\sin t - 1)dt \leq 0$$

ce qui montre que suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

5. • Si $n = 2p$, on a d'après (2)-(3),

$$\begin{aligned}
nI_nI_{n+1} &= 2pI_{2p}I_{2p+1} \\
&= 2p\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p-1)}{2^p p!} \frac{\pi}{2} \frac{2^p p!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2p+1)} \\
&= \frac{2p}{2p+1} \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $n = 2p+1$, on a d'après (2)-(3),

$$\begin{aligned} nI_nI_{n+1} &= (2p+1)I_{2p+1}I_{2(p+1)} \\ &= (2p+1)\frac{2^p p!}{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2p+1)}{2^{p+1}(p+1)!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$nI_nI_{n+1} = \frac{n\pi}{2(n+1)}.$$

Exercice 3 *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.*

1. *Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.*
2. *En déduire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que*

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

Solution -

1. Posons $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = 2x-1$ et utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-2x)f'(x)dx &= [(1-2x)f(x)]_0^1 + 2\int_0^1 f(x)dx \\ &= -f(1) - f(0) + 2\int_0^1 f(x)dx, \\ &= 2\int_0^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$2\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (1-2x)f'(x)dx\right| \leq \left(\int_0^1 (1-2x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Or

$$\int_0^1 (1-2x)^2 dx \quad = \quad -\frac{1}{6}\left[(1-2x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

En remplaçant dans (4), on obtient

$$2\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et finalement

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

Exercice 4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.*

1. *Calculer I_0, I_1, I_2.*
2. *Calculer $I_n + I_{n+1}$.*
3. *Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et convergente et calculer sa limite.*
4. *Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 dt = 1,\\
I_1 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt,\\
&= [t-\ln(1+t)]_0^1 = 1-\ln 2,\\
I_2 &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = \int_0^1 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt\\
&= \left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\ln 2.
\end{aligned}$$

2. On a
$$I_{n+1}+I_n=\int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t}dt=\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}. \tag{5}$$
On a
$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1+t}dt \leq 0$$
car, pour tout $t \in [0,1]$,
$$\frac{t^n(1-t)}{1+t} \leq 0.$$
Ceci montre que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. D'un autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,
$$\frac{t^n}{1+t} \geq 0$$
et donc $I_n \geq 0$. Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc convergente et en passant à la limite dans (5), on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0. \tag{6}$$

3. En utilisant (5), on obtient
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(I_k+I_{k-1})\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{k-1}\\
&\overset{h=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_k+\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^{h+2}I_h\\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}I_k+\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^{h}I_h\\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}I_k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}I_k\\
&= I_0-(-1)^n I_n.
\end{aligned}$$
En utilisant (6), on déduit alors que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=I_0=1.$$

Exercice 5 *Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on pose* $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. *Calculer* $I_{0,1}, I_{1,1}, I_{1,2}$.
2. *Montrer que pour tout* $p, q \in \mathbb{N}$, *on a* $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
3. *En déduire que* $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
4. *Montrer*
$$\sum_{k=0}^{q} C_k^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Solution -

1. On a
$$\begin{aligned} I_{0,1} &= \int_0^1 (1-t)dt = \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}, \\ I_{1,1} &= \int_0^1 t(1-t)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}, \\ I_{1,2} &= \int_0^1 t(1-t)^2 dt = \int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2. Nous allons utiliser une intégration par parties avec $u' = t^p$ et $v = (1-t)^q$. On a, pour $q \geq 1$,
$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt \\ &= \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}. \end{aligned}$$
En conclusion,
$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}. \tag{7}$$

3. Nous montrer la relation par récurrence sur q. On a
$$I_{p,0} = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} = \frac{p!0!}{(p+0+1)!}.$$

On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

On a

$$\begin{aligned}
I_{p,q+1} &\overset{(7)}{=} \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q} \\
&= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q+1)!} \\
&= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q+1)!}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}. \tag{8}$$

4. Pour tout $p, q \in N$, d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}
t^p(1-t)^q &= t^p \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-t)^k 1^{q-k} \\
&= t^p \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{q} C_k^q (-1)^k t^{k+p}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 t^{k+p} dt = \frac{1}{1+k+p}.$$

Il en résulte que

$$I_{p,q} = \sum_{k=0}^{q} C_k^q \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

et donc d'après (8),

$$\sum_{k=0}^{q} C_k^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 6 *On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.*

1. *Montrer que F est définie, continue et dérivable sur* $]0,+\infty[$.
2. *Déterminer le signe de $F(x)$ et $F'(x)$ sur* $]0,+\infty[$.
3. *Calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3.*
4. *Montrer que, pour tout $x>0$, $F(\frac{1}{x})=F(x)$.*
5. *Montrer que, pour tout $t\geq 1$,*

$$0\leq \frac{\ln t}{1+t^2}\leq \frac{2\sqrt{t}}{t^2}$$

   et en déduire de F est majorée sur $[1,+\infty[$ *et que* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ *existe.*
6. *Que peut-t-on dire de* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x)$ *?*
7. *F est-elle bornée sur* $]0,+\infty[$ *?*

Solution -

1. La fonction $t\mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc, d'après le théorème **??**, F est la primitive de f qui s'annule en 1. Il en découle que F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Pour tout $x\in]0,1]$, on a

$$F(x)=-\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

   Or, pour tout $t\in[x,1]$, $\frac{\ln t}{1+t^2}\leq 0$ et donc $F(x)\geq 0$.
   Pour $x>1$ et pour tout $t\in[1,x]$, $\frac{\ln t}{1+t^2}\geq 0$ et donc $F(x)\geq 0$. Finalement, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $F(x)\geq 0$.
   D'un autre côté, pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   Il en résulte que $F'(x)$ est du signe de $\ln x$ sur $]0,+\infty[$, elle est donc strictement négative sur $]0,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$.
3. Pour calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3, nous allons calculer le développement limité de F' en 1 à l'ordre 2. On pose $u=x-1$ et on écrit

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}=\frac{\ln(1+u)}{1+(1+u)^2}=\frac{\ln(1+u)}{2+2u+u^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}}.$$

Or, les formules classiques du développement limité en 0 donnent

$$\begin{aligned}\ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2),\\ \frac{1}{1+u+\frac{u^2}{2}} &= 1 - u - \frac{u^2}{2} + (u + \frac{u^2}{2})^2 + o_0(u^2)\\ &= 1 - u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2).\end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient

$$\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}} = u - \frac{3}{2}u^2 + o_0(u^2).$$

Ainsi

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2),$$

et finalement

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3).$$

4. On a

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. On a alors $du = -u^2 dt$ et donc

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}}(-\frac{du}{u^2}) = \int_1^x \frac{\ln u}{u^2+1}du = F(x).$$

5. Pour tout $t \geq 1, \ln t \geq 0$. Pour montrer la deuxième inégalité, et puisque $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, il suffit de montrer que $\ln t \leq 2\sqrt{t}$. Pour cela considérons la fonction $f(t) = \ln t - 2\sqrt{t}$. Cette fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1-\sqrt{t}}{t} \leq 0,$$

et donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et par suite, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $f(t) \leq f(1) = -2 < 0$ et l'inégalité est vérifiée. Nous avons alors montré que, pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{2\sqrt{t}}{t^2}.$$

Par passage à l'intégrale, on déduit que, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt \quad = \quad 2\int_1^x t^{-\frac{3}{2}} dt = -4\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4.$$

Finalement, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4 \leq 4,$$

et donc F est majorée sur $[1, +\infty[$.
D'un autre côté, nous avons vu que F' est positive sur $[1, +\infty[$ et donc F est croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi F est croissante majorée sur $[1, +\infty[$ et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$ existe.

6. On a
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x) = \lim_{X \longrightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{X}\right) \overset{4.}{=} \lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X),$$
et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ existe en vertu de 5.

7. Nous avons vu que, pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$0 \leq F(x) \leq 4.$$
Pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x} \in [1, +\infty[$ et donc $0 \leq F(\frac{1}{x}) \leq 4$ et puisque, $F(\frac{1}{x}) = F(x)$, on déduit que
$$0 \leq F(x) \leq 4.$$
Nous avons alors établi que F est bornée sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + (n-k)^2}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solution - Nous allons la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale donnée par la formule

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})=\int_a^b f(x)dx. \tag{9}$$

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})\end{aligned}$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\sqrt{x}$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+(n-k)^2} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2+(n-k)^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2(1+(\frac{n}{k}-1)^2)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{n^2}{k^2}}{1+(\frac{n}{k}-1)^2}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})\end{aligned}$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{1+(x-1)^2}$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+(n-k)^2} = \int_0^1\frac{x^2}{1+(x-1)^2}dx$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(t=x-1)}{=} \int_{-1}^{0} \frac{t^2+1+2t}{1+t^2}dt \\
&= \int_{-1}^{0} \left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) dt \\
&= \left[t+\ln(1+t^2)\right]_{-1}^{0} = 1-\ln 2.
\end{aligned}
$$

3. Puisque $\cos\dfrac{n\pi}{2n}=0$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n} \\
&= \frac{1}{n}+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})
\end{aligned}
$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} = \int_0^1 \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.
$$

4. On a

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+2k}{n}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})
$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\ln(1+2x)$. On déduit alors en vertu de (9) que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right) &= \int_0^1 \ln(1+2x)dx \\
&= \left[x\ln(1+2x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x}dx
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x}\right) dx \\ &= \ln 3 - \left[x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\ln 3 - 1. \end{aligned}$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{3}{2}\ln 3 - 1} = 3\sqrt{3}e^{-1}.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
TD bis 7
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle*

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2. \qquad (E)$$

1. *Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).*
2. *On pose $y = y_0 - \frac{1}{z}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle*

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1. \qquad (E_1)$$

3. *Résoudre (E_1).*
4. *Déterminer toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$*

Solution -

1. y_0 est solution si et seulement si

$$a - a - a^2x^2 = -9x^2$$

soit $a = 3$.

2. $y = y_0 - \frac{1}{z}$ est solution de (E) si et seulement si

$$y_0' + \frac{z'}{z^2} - \frac{y_0}{x} + \frac{1}{xz} - y_0^2 - \frac{1}{z^2} + 2\frac{y_0}{z} = -9x^2. \qquad (1)$$

Puisque y_0 est solution de (E), on déduit que (1) est équivalente à

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} - \frac{1}{z^2} + 2\frac{y_0}{z} = 0$$

soit en multipliant par z^2,

$$z' + (\frac{1}{x} + 6x)z = 1. \qquad (E_1)$$

3. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sont de la forme
$$z(x) = Ce^{-A(x)} + z_0,$$
où $A(x) = \int(\frac{1}{x} + 6x)dx$ et z_0 est une solution particulière. Or
$$A(x) \quad = \quad \int(\frac{1}{x} + 6x)dx = \ln x + 3x^2.$$
Cherchons z_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$z_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-\ln x - 3x^2} = \frac{C(x)e^{-3x^2}}{x}.$$
On a
$$z_0'(x) \quad = C'(x)\tfrac{e^{-3x^2}}{x} + C(x)e^{-3x^2}(-6 - \tfrac{1}{x^2}) \quad .$$
Donc z_0 est solution de (E_1) si et seulement si
$$C'(x)\frac{e^{-3x^2}}{x} + C(x)e^{-3x^2}(-6 - \frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x} + 6x)\frac{C(x)e^{-3x^2}}{x} = 1,$$
soit
$$C'(x) = xe^{3x^2}.$$
Donc
$$C(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2}.$$
Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{Ce^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$
D'après 2. et 3., l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{6x}{Ce^{-3x^2} + 1}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 2 *Résoudre sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *les deux équations différentielles*
$$y' \cos x - y \sin x = 1. \qquad (E_1) \qquad y' - y \tan x = 1 \qquad (E_2).$$

Solution -

1. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{\cos x}.$$
Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si
$$\left(\frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\cos x - \frac{C(x)}{\cos x}\sin x = 1,$$
soit
$$C'(x) = 1,$$
et donc $C(x) = x$ et
$$y_0(x) = \frac{x}{\cos x}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{C+x}{\cos x}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. (E_2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = -\int \tan x dx = \ln(\cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{\cos x}.$$
Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si
$$\frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\tan x = 1,$$

soit
$$C'(x) = \cos x,$$
et donc $C(x) = \sin x$ et
$$y_0(x) = \tan x.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{C}{\cos x} + \tan x, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{l} xy' - 2y = x^4, \quad (E_1), \quad x(1+x^2)y' = y, \quad (E_2), \\ (x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1, \quad (E_3), \\ (e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x \quad (E_4). \end{array}$$

Solution -

1. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
   (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_1) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = \int \frac{-2}{x} dx = -\ln x^2,$$
   et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
   $$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)x^2.$$
   Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si
   $$(C'(x)x^2 + 2xC(x))x - 2C(x)x^2 = x^4,$$
   soit
   $$C'(x) = x,$$
   et donc $C(x) = \frac{1}{2}x^2$ et
   $$y_0(x) = \frac{1}{2}x^4.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $]-\infty, 0[$ est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ Cx^2 + \frac{1}{2}x^4, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

De la même manière on obtient les mêmes solutions sur $]0, +\infty[$ et donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Cx^2 + \frac{1}{2}x^4, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
   (E_2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_2) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = -\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+1} = -\ln(-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$
   et y_0 est une solution particulière. Remarquons que $y_0 = 0$ est une solution particulière de (E_2). En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_2) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
   $$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
   De la même manière on obtient les mêmes solutions sur $]0, +\infty[$ et donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donné par
   $$\mathcal{S} = \left\{ \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. (E_3) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2+1}dx = x - \ln(x^2+1),$$
   et y_0 est une solution particulière. On remarque que $y_0 = x$ est une solution particulière de (E_3). En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ est donné par
   $$\mathcal{S} = \left\{ C(x^2+1)e^{-x} + x, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Nous allons trouver les solutions sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et voir si les solutions se recollent.
   (E_4) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E_4) sur $]-\infty,0[$ sont de la forme
   $$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
   où
   $$A(x) = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx,$$
   et y_0 est une solution particulière.
   Posons $u = e^x$, $du = udx$ et donc
   $$\begin{aligned} A(x) = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx &= \int \frac{u+1}{u(u-1)}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du + \int \frac{2}{u-1}du \\ &= -\ln|u| + 2\ln|u-1| = -x + 2\ln(1-e^x). \end{aligned}$$
   Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
   $$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)e^x}{(e^x-1)^2}.$$
   Donc y_0 est solution de (E_4) si et seulement si
   $$(e^x-1)\left(C'(x)\frac{e^x}{(e^x-1)^2} - C(x)\frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}\right) + \frac{C(x)e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = 3+2e^x,$$
   soit
   $$C'(x) = \frac{(3+2e^x)(e^x-1)}{e^x} = 1 + 2e^x - 3e^{-x},$$
   soit
   $$y_0 = \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}.$$
   En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_4) sur $]-\infty,0[$ est donné par
   $$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{Ce^x}{(e^x-1)^2} + \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Un calcul analogue donne que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E_4) sur $]0,+\infty[$ est donné par
   $$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{Ce^x}{(e^x-1)^2} + \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3}{(e^x-1)^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4 *On considère l'équation différentielle*

$$xy' + 2y = \frac{x+1}{x^2+1}. \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Solution -

1. (E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème **??**, les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{2}{x} dx = \ln(x^2),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{x^2}.$$
Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$x\left(\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}\right) + 2\frac{C(x)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2+1},$$
soit
$$C'(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1},$$
et donc
$$C(x) = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x.$$
et
$$y_0(x) = \frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{C}{x^2} + \frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Un calcul analogue donne que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{C}{x^2} + \frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donc il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x^2} + \frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{C_2}{x^2} + \frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

En effectuant un développement limité en 0, on obtient

$$\frac{x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o_0(x).$$

Puisque y est continue et dérivable en 0, on déduit que $C_1 = C_2 = 0$ et que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 5 *Résoudre dans chacun des cas suivants l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' - 3y = f(x), \tag{E}$$

$$1.\ f(x) = x, \qquad 2.\ f(x) = xe^{-x}, \qquad 3.\ f(x) = \sin x.$$

Solution - C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X - 3.$$

Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 4 + 12 = 16$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant dans chacun des cas ci-dessus une solution particulière de (E).

1. $f(x) = x$. Comme $f(x) = xe^{0x}$ et 0 n'est pas racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = ax + b$. Ainsi y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-2a - 3(ax + b) = x,$$

soit $-3a = 1$ et $3b + 2a = 0$ et donc $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{9}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = x$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $f(x) = xe^{-x}$. Comme -1 est racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = x(ax + b)e^{-x}$. On a

$$\begin{aligned} y_0' &= (2ax + b - ax^2 - bx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ y_0'' &= (-2ax + 2a - b + ax^2 - (2a - b)x - b)e^{-x} \\ &= (ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b)e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$(ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b) - 2(-ax^2 + (2a - b)x + b) - 3(ax^2 + bx) = x,$$

soit $a = -\frac{1}{8}$ et $b = -\frac{1}{16}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = xe^{-x}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{16}x(2x + 1)e^{-x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. $f(x) = \sin x$. Comme $\sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - {}^{-\imath x})$ et comme $\imath$ et -$\imath$ ne sont pas racines de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = a \sin x + b \cos x$. On a

$$y_0' = a \cos x - b \sin x \quad \text{et} \quad y_0'' = -a \sin x - b \cos x,$$

et donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) - 3(a \sin x + b \cos x) = \sin x,$$

soit $-4a + 2b = 1$ et $-4b - 2a = 0$. Ainsi $a = -\frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{10}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = \sin x$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{10}(2 \sin x - \cos x), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 6 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + 4y = x^2 e^x. \tag{E}$$

1. *Déterminer l'ensemble de solutions de* (E)*.*
2. *Déterminer les solutions* h *de* (E) *vérifiant* $h(0) = 0$ *et* $h'(0) = 0$*.*

Solution -

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X + 4.$$

Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 4 - 16 = -12$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 1 + \sqrt{3}\imath$ et $r_2 = 1 - \sqrt{3}\imath$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & (ax^2 + (2a+b)x + c + b)e^x, \\ y_0'' & = & (ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c)e^x. \end{array}$$

Donc y_0 est solution si et seulement si

$$(3ax^2 + 3bx + (2a + 3c))e^x = x^2 e^x,$$

soit $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = -\frac{2}{9}$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit $h = Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x$ une solution de (E). On a

$$\begin{aligned} h(0) &= A - \frac{2}{9}, \\ h'(0) &= A + \sqrt{3}B - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Donc $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$ donne $A = \frac{2}{9}$ et $B = 0$ et donc

$$h(x) = \frac{2}{9}e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{1}{9}(3x^2 - 2)e^x.$$

Exercice 7 *Résoudre les équations différentielles*

1. $y'' - y = x^3 + x^2$. (E_1).

2. $y'' - 2y' + y = e^x$ (E_2).

3. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$ (E_3).

Solution -

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - y = 0. \qquad (H)$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 1.$$

et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^x + Be^{-x} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a

$$\begin{aligned} y_0' &= 3ax^2 + 2bx + c, \\ y_0'' &= 6ax + 2b. \end{aligned}$$

Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si

$$-ax^3 - bx^2 + (6a - c)x + d - 2b = x^3 + x^2.$$

Ainsi $a = -1$, $b = -1$, $c = -6$ et $d = -2$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^x + Be^{-x} - x^3 - x^2 - 6x - 2, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = (Ax + B)e^x \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_0 = ax^2e^x$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & a(x^2 + 2x)e^x, \\ y_0'' & = & a(x^2 + 4x + 2)e^x. \end{array}$$

Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si

$$2ae^x = e^x$$

et donc $a = \frac{1}{2}$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème **??**, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 4y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Ainsi, d'après le théorème **??**, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{-2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E_3) sous la forme $y_0 = axe^{-2x}$. On a

$$\begin{array}{rcl} y_0' & = & a(1-2x)e^{-2x}, \\ y_0'' & = & a(-4+4x)e^{-2x}. \end{array}$$

Donc y_0 est solution de (E_3) si et seulement si

$$-4ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

et donc $a = -1$.

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_3) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ae^{2x} + Be^{-2x} - xe^{-2x}, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 1 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Soient a, b deux réels strictement positifs. Montrer que*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}.$$

Solution - Puisque $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b} \quad \text{et} \quad \sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$$

et donc

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 2 *Montrer que*

$$\left(7+\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(7-\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

(Utiliser la formule du binôme : $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$**).**

Solution - Posons $a = \left(7+\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $b = \left(7-\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}}$. On a

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50} = 14, \\ ab &= \left[(7+\sqrt{50})(7-\sqrt{50})\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= [49-50]^{\frac{1}{3}} = -1. \end{aligned}$$

On déduit que

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 14-3(a+b).$$

Ainsi $a+b$ est solution de l'équation

$$x^3+3x-14 = 0. \qquad (E)$$

On voit que $x = 2$ est solution de cette équation et que

$$x^3+3x-14 = x^3-8+3(x-2) = (x-2)(x^2+2x+4)+3(x-2) = (x-2)(x^2+2x+7).$$

Maintenant, l'équation $x^2+2x+7 = 0$ n'a pas de solution réelle ($\Delta = -24 < 0$) et donc $x = 2$ est la seule solution réelle de (E) ce qui permet de conclure.

Exercice 3 *Trouver* $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ *et* $\min A$ *quand ils existent dans chacun des cas suivants :*

$$A = \left\{\frac{\cos n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},\ A = \{n^2 - n - \frac{1}{n^3}, n \in \mathbb{N}\},\ A = \{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^*\},$$
$$A = \{x \in \mathbb{R}, |2x^2 + x + 1| < 5\}.$$

Solution -

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq \frac{\cos n}{n} \leq 1$$

et donc admet A est borné et admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Malheureusement, il n'est pas facile de calculer ces deux nombres. Le tableau suivant donne quelques éléments de A.

n	$\frac{\cos n}{n}$
1	0.5403
2	-0.2080
3	-0.3299
4	-0.1634
5	0.0567
6	0.1600
7	0.1077
8	-0.0181
9	-0.1012
10	-0.0939

On peut conjecturer à partir de ce tableau que

$$\inf A = \min A = \frac{\cos(3)}{3} \quad \text{et} \quad \sup A = \max A = \frac{\cos(1)}{1}.$$

Mais il est difficile de montrer ce fait rigoureusement.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$n^2 - n - \frac{1}{n^3} + 1 = \frac{n^4(n-1) + n^3 - 1}{n^3} \geq 0$$
et donc pour tout $x \in A$, $x \geq -1$. Ainsi A est une partie non vide minorée donc admet une borne inférieure. Or -1 et un minorant de A et $-1 = 1^2 - 1 - \frac{1}{1^3} \in A$ et donc
$$\inf A = \min A = -1.$$
D'un autre côté, la suite $\left(n^2 - n - \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ est une suite de points de A qui tend vers $+\infty$ et donc A n'est pas majorée, d'après la proposition **??**.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$0 \leq \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \leq 1$$
et donc A est une partie bornée et par suite admet une borne inférieure et une borne supérieure. D'un autre côté 0 est un minorant de A et $0 \in A$ et donc
$$\inf A = \min A = 0.$$
Aussi 1 est un majorant de A et la suite $\left(\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et une suite de points de A et on a
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1.$$
Donc, d'après la proposition **??**,
$$\sup A = 1.$$

4. On a $x \in A$ si et seulement si
$$2x^2 + x + 6 > 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 + x - 4 < 0.$$
En résolvant ce système d'inéquations on obtient
$$A = \left] \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \right[$$
et donc
$$\inf A = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad \sup A = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}.$$

Exercice 4 *Soit*

$$A = \left\{ \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}, p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < q \right\}.$$

1. *Montrer que A est minoré par -3 et majoré par 2.*
2. *Calculer* $\sup A$ *et* $\inf A$.

Solution -

1. Soit $\frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ un élément de A. On a

$$\begin{aligned} \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} + 3 &= \frac{2p^2 - 3q + 3p^2 + 3q}{p^2 + q} = \frac{5p^2}{p^2 + q} \geq 0, \\ \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} - 2 &= \frac{2p^2 - 3q - 2p^2 - 2q}{p^2 + q} = \frac{-5q}{p^2 + q} \leq 0. \end{aligned}$$

Ces deux relations montrent que, pour tout $x \in A$,

$$-3 \leq x \leq 2$$

et donc -3 est un minorant de A et 2 est un majorant de A.

2. • Pour tout $n \geq 2$, prenons $p = 1$ et $q = n$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc

$$\frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{1 - 3n}{1 + n} \in A.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{1-3n}{1+n}\right)_{n \geq 2}$ est une suite de points de A et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 - 3n}{1 + n} = -3.$$

Ainsi -3 est un minorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers -3 donc, d'après la proposition **??**,

$$\inf A = -3.$$

• Pour tout $n \geq 1$, prenons $p = n$ et $q = n + 1$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc

$$\frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{2n^2 - 3n - 3}{n^2 + n + 1} \in A.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{2n^2-3n-3}{n^2+n+1}\right)_{n \geq 2}$ est une suite de points de A et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n - 3}{n^2 + n + 1} = 2.$$

Ainsi 2 est un majorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers 2 donc, d'après la proposition **??**,

$$\sup A = 2.$$

Exercice 5 *1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \textit{et} \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

(a) $0 \leq [nx] - n[x] \leq n-1$

(b) $[x] = \left[\frac{[nx]}{n}\right]$,

(c) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Solution -

1. On distingue deux cas :
   - $a \leq b$. Dans ce cas $|a-b| = b-a$ et donc

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = b = \max(a,b) \quad \text{et} \quad \frac{a+b-|a-b|}{2} = a = \min(a,b).$$

$b \leq a$. Dans ce cas $|a-b| = a-b$ et donc

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = a = \max(a,b) \quad \text{et} \quad \frac{a+b-|a-b|}{2} = b = \min(a,b).$$

(a) D'après (**??**), on a

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

En multipliant par $n \geq 0$, on obtient

$$n[x] \leq nx < n[x] + n.$$

De l'inégalité $n[x] \leq nx$ et puisque $n[x] \in \mathbb{Z}$, on déduit que

$$n[x] \leq [nx]$$

et donc

$$[nx] - n[x] \geq 0. \tag{1}$$

De l'inégalité $nx < n[x] + n$, on déduit que

$$[nx] < n[x] + n$$

soit

$$[nx] - n[x] < n.$$

Comme les deux membres de cette inégalités sont dans $\mathbb{Z}$, on déduit que

$$[nx] - n[x] \leq n-1. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent l'inégalité souhaitée.

(b) Pour $n = 1$, la relation est évidente. Supposons que $n \geq 2$. Nous avons vu dans la question précédente que

$$0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1.$$

En multipliant par $\frac{1}{n} > 0$, on déduit que

$$0 \leq \frac{[nx]}{n} - [x] \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Cette double inégalité s'écrit aussi

$$[x] \leq \frac{[nx]}{n} < [x] + 1,$$

ce qui montre la relation souhaitée.

(c) On a

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad [y] \leq y < [y] + 1.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient

$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2.$$

On distingue deux cas :

- $[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 1$. Dans ce cas

$$[x + y] = [x] + [y]$$

et la double inégalité est vérifiée.

- $[x] + [y] + 1 \leq x + y < [x] + [y] + 2$. Dans ce cas

$$[x + y] = [x] + [y] + 1$$

et la double inégalité est vérifiée.

Exercice 6 *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}^{*+}$.*

1. *On définit $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et une borne inférieure et que l'on a les relations*

$$\inf(AB) = \inf A \inf B \qquad \textit{et} \qquad \sup(AB) = \sup A \sup B.$$

2. *On définit $A^{-1} = \{\frac{1}{a}, a \in A\}$. Montrer que si $\inf A \neq 0$ A^{-1} admet une borne supérieure et une borne inférieure et que*

$$\inf(A^{-1}) = \frac{1}{\sup(A)} \quad \textit{et} \quad \sup(A^{-1}) = \frac{1}{\inf(A)}.$$

Solution -

1. Puisque A et B sont non vides alors AB est non vide. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a

$$\inf A \leq a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b \leq \sup B.$$

En faisant le produit de ces inégalités on obtient, puisque $a > 0$, $b > 0$, $\inf A \geq 0$ et $\sup A > 0$,

$$\inf A \inf B \leq ab \leq \sup A \sup B.$$

Ces inégalités montrent que AB est borné et, d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire, AB admet une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, $\inf A \inf B$ est un minorant de AB et $\sup A \sup B$ est un majorant de AB. Nous allons maintenant utiliser la proposition 7. D'après cette proposition il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \inf A \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \inf B.$$

La suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de AB et on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n b_n = \inf A \inf B.$$

D'après la proposition 7,

$$\inf(AB) = \inf A \inf B.$$

Un raisonnement analogue montre que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

2. Puisque A est non vide alors A^{-1} est non vide. Pour tout $a \in A$, on a

$$\inf A \leq a \leq \sup A.$$

Puisque $0 < \inf A \leq \sup A$, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{1}{\sup(A)} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf(A)}.$$

Ces inégalités montrent que A^{-1} est borné et, d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire, A^{-1} admet une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, $\frac{1}{\sup(A)}$ est un minorant de A^{-1} et $\frac{1}{\inf(A)}$ est un majorant de A^{-1}. D'après la proposition 7, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \inf A \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \sup A.$$

Les suites $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de A^{-1} et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\inf(A)}\quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1}{b_n})=\frac{1}{\sup(A)}.$$

D'après la proposition 7,

$$\inf(A^{-1})=\frac{1}{\sup(A)}\quad \text{et}\quad \sup(A^{-1})=\frac{1}{\inf(A)}.$$

Exercice 7 *On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

1. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq S_n\leq 1$.*
2. *Etudier la monotonie de cette suite et en déduire qu'elle est convergente.*

Solution -

1. Pour tout $k=1,\dots,n$,

$$0\leq\frac{1}{n+k}\leq\frac{1}{n}$$

et donc

$$0\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leq\frac{n}{n}=1,$$

soit $0\leq S_n\leq 1$.

2. Pour tout $n\geq 1$, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &\overset{(h=k+1)}{=} \sum_{h=2}^{n+2}\frac{1}{n+h}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}\\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0. \end{aligned}$$

Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante majorée donc elle est convergente, d'après le théorème des suites monotones (*cf.* Théorème 2).

Exercice 8 *On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.*
2. *Etudier la monotonie de $(S_n)_{n\geq 1}$.*
3. *Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.*

Solution -

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} &= \frac{n-1-n^2+n(n-1)}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{-1}{n^2(n-1)} \leq 0, \end{aligned}$$

   et donc

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2. On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

   et donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

3. Pour tout $k = 2, \ldots, n$, on a d'après la première question

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   et donc

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

   Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante majorée donc elle est convergente, d'après le théorème des suites monotones (*cf.* Théorème 2).

Exercice 9 *On définit les deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ *et pour tout* $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \quad et \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n).$$

1. *On pose* $w_n = v_n - u_n$. *Montrer que* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométriques dont on déterminera la raison et la limite.*
2. *Montrer que le deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*
3. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes et convergent vers la même limite* ℓ.
4. *Montrer que la suite* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $t_n = 3u_n + 8v_n$ *est constante et en déduire la valeur de* ℓ.

Solution -

1. On a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12}w_n.$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = 11$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{11}{(12)^n}. \tag{1}$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 0.$$

2. D'après (1), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq u_n \tag{2}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Etudions maintenant la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n), \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n). \end{aligned}$$

De ces deux relations et de (2), on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Le suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes donc convergent vers la même limite ℓ.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n.$$

Ainsi $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3u_n + 8v_n = t_0 = 99.$$

Par passage à la limite, on déduit que

$$3\ell + 8\ell = 99,$$

et donc $\ell = 9$.
Finalement,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 9.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 2 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Calculer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x^2-3x+2},\quad f_2(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+3x-4}},\quad f_3(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}},\\ f_4(x) &= \ln\Big(\ln(x^2+3x-4)\Big),\quad f_5(x)=\sqrt{\ln^2 x+5\ln x-6}. \end{aligned}$$

Solution -

1. Domaine de définition de f_1. On a

$$x\in D_{f_1} \iff x^2-3x+2\geq 0.$$

Or le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta=1$ et ses racines sont 1 et 2 et donc

$$D_{f_1}=]-\infty,1]\cup[2,+\infty[.$$

2. Domaine de définition de f_2. On a

$$x\in D_{f_2} \iff \Big(x^2-1\geq 0 \text{ et } x^2+3x-4>0\Big).$$

Le discriminant de x^2+3x-4 est $\Delta=25$ et donc ses racines sont 1 et -4 et donc

$$\Big(x^2-1\geq 0 \text{ et } x^2+3x-4>0\Big) \iff x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\text{ et } x\in]-\infty,-4[\cup]1,+\infty[.$$

Finalement

$$D_{f_2}=]-\infty,-4[\cup]1,+\infty[.$$

3. Domaine de définition de f_3. On a

$$x\in D_{f_3} \iff \Big((x^2-1)(x^2+3x-4)\geq 0 \text{ et } x^2+3x-4\neq 0\Big).$$

Le discriminant de x^2+3x-4 est $\Delta=25$ et donc ses racines sont 1 et -4. Ainsi

$$D_{f_3}=]-\infty,-4[\cup[-1,1[\cup]1,+\infty[.$$

4. Domaine de définition de f_4. On a
$$x \in D_{f_4} \iff \left(x^2+3x-4>0 \text{ et } x^2+3x-4>1\right).$$
Soit
$$x \in D_{f_4} \iff x^2+3x-5>0.$$
Le discriminant est $\Delta = 29$ et donc
$$D_{f_4} =]-\infty, \frac{-3-\sqrt{29}}{2}[\cup]\frac{-3+\sqrt{29}}{2}, +\infty[.$$
5. Domaine de définition de f_5. On a
$$x \in D_{f_5} \iff \left(y^2+5y-6 \geq 0 \text{ et } y = \ln x\right).$$
Les racines de y^2+5y-6 sont 1 et -6 et donc
$$x \in D_{f_5} \iff \ln x \in]-\infty, -6] \cup [1, +\infty[.$$
Comme ln est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, +\infty[$ on déduit que
$$D_{f_5} =]0, e^{-6}] \cup [e, +\infty[.$$

Exercice 2 *Calculer les limites suivantes :*
$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right], \ \lim_{x\longrightarrow -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right], \ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}, \ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})},$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right), \ \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}, \ \lim_{x\longrightarrow -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right),$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2}, \ \lim_{x\longrightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4x+\pi}, \ \lim_{x\longrightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}.$$

Solution -

1. D'après la caractérisation de la partie entière (voir (**??**)), on a, pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$
On déduit alors que pour $x > 0$, $1 - x \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$ et donc, en vertu de la proposition **??**, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. De la même manière, pour $x < 0$, on a $1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 - x$ et donc $\lim_{x\longrightarrow 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. En conclusion, $\lim_{x\longrightarrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

2. Pour $x < -1$, on a $-1 < \frac{1}{x} < 0$ et donc $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$ et par suite
$$x\left[\frac{1}{x}\right] = -x.$$
Il en résulte que
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty.$$

3. On a
$$\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}\frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}},$$
et puisque
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$$
on déduit que
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}.$$

4. On a
$$\begin{aligned}
\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})} &= \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2})} \times \frac{1}{\cos x} \times \frac{1 - \cos x}{\sin^2(\frac{x}{2})}.\\
\frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2})} &= 2\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}\\
\frac{1 - \cos x}{\sin^2(\frac{x}{2})} &= 4\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2}.
\end{aligned}$$
Puisque
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
on déduit que
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})} = 4.$$

5. On a
$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}.$$
Ainsi
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

6. On a
$$\frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} = e^x \frac{1 - e^{x^2-x}}{x^2 - x}.$$
En posant $X = x^2 - x$, on obtient
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1 - e^{x^2-x}}{x^2 - x} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{X} - \frac{e^X}{X} \right) = -\infty.$$
Il en résulte alors que
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} = -\infty.$$

7. Pour $x < 0$, on a
$$x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - x} = \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}.$$
Ainsi
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = -\frac{1}{2}.$$

8. On a
$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2} &= \frac{\sin x - 2\cos x \sin x}{x^2} \\ &= \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x} \times (1 - 2\cos x). \end{aligned}$$
Puisque
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} (1 - 2\cos x) = -1$$
on déduit que
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2} = +\infty.$$

9. On a
$$\frac{\cos x + \sin x}{4x + \pi} = \frac{1}{4} \frac{\cos x + \sin x}{x + \frac{\pi}{4}}.$$
On pose $f(x) = \cos x + \sin x$. On a $f(-\frac{\pi}{4}) = 0$ et donc
$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{x + \frac{\pi}{4}} = f'(-\frac{\pi}{4}).$$
Or $f'(x) = -\sin x + \cos x$ et donc $f'(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.
En conclusion
$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4x + \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

10. On pose $X = x - \pi$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} &= \frac{\sin^2(X+\pi)}{1+\cos(X+\pi)} \\ &= \frac{\sin^2 X}{1-\cos X} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2}{\frac{1-\cos X}{X^2}}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{X\longrightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X\longrightarrow 0} \frac{1-\cos X}{X^2} = \frac{1}{2},$$

on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = 2.$$

Exercice 3 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x-1)}{x-1}, \ si\ x < 1; \\ f(x) &= x^2 + b, \ si\ x \in [1,2]\,; \\ f(x) &= \frac{x^2 - a}{x^2+x+1}, \ si\ x > 2. \end{aligned}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution - La restriction de f à $]-\infty, 1[$ est le quotient de deux fonctions continues et donc elle est continue. La restriction de f à $]1,2[$ est un polynôme de degré 2 et donc f est continue. De même pour la restriction de f à $]1,+\infty[$. Ainsi f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en 1 et 2. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{X\longrightarrow 0^-} \frac{\sin X}{X} = 1, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = 1+b, \\ \lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) &= 5+b, \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \frac{4-a}{7}. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition **??**, f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1),$$

soit $b = 0$. De même, f est continue en 2 si et seulement si

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = f(2),$$

soit $5 = \frac{4-a}{7}$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $(a,b) = (-31, 0)$.

Exercice 4 *Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad et \quad g(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et g sur $\mathbb{R}$.

Solution -

1. Nous avons vu dans l'exercice 2 que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$ et donc f est continue en 0. D'un autre côte, la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et donc la fonction composée qui à $x \mapsto \left[\frac{1}{x}\right]$ est continue sur
$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Z}^*\right\}$$
et par suite f est continue sur cet ensemble.

   Etudions maintenant la continuité de f en un point $\frac{1}{p}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$. On a
$$f\left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$
   La suite $\left(\frac{1}{p-\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 2}$ convergent vers $\frac{1}{p}$ et on a
$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{p-\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{p-\frac{1}{n}}\left[p - \frac{1}{n}\right] \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{p-\frac{1}{n}}(p-1) = \frac{p-1}{p} \neq f\left(\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$
   et donc f n'est pas continue en $\frac{1}{p}$.
   En conclusion f est continue sur
$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Les fonctions x, $\sin x$ et $\frac{1}{x}$ sont sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et donc, en vertu des propositions **??** et **??**, g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de g en 0. On a, pour tout $x \neq 0$,
$$0 \leq \left|\sin x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |\sin x|,$$

et donc, en vertu de la proposition **??**,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

et par suite f est continue en 0. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Etudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 :*

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2}),\ x_0 = 0 \quad g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ x_0 = 1 \quad h(x) = \frac{x^2(x - [x])}{\sin x} \quad x_0 = 0.$$

Solution - Il s'agit d'étudier les limites de ces fonctions en x_0.

1. On pose $h(x) = \ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})$. On a $h(0) = 0$ et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0).$$

Or

$$h'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et donc $h'(0) = 0$. Finalement

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. On a, pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 1} g(x) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 1 et son prolongement est la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & \text{si} \quad x \neq 1, \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

3.

4. D'après la caractérisation de la partie entière (voir (**??**)), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq x - [x] \leq 1.$$
D'un autre côté,
$$|h(x)| = |x|(x - [x])\frac{|x|}{|\sin x|}.$$
On déduit alors que
$$0 \leq |h(x)| \leq |x|\frac{|x|}{|\sin x|}$$
et donc, puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{|x|}{|\sin x|} = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x) = 0$. Ainsi h est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction
$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-[x])}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 6 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* **continue en 0** *telle que*
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

1. *Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.*
2. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.*
4. *Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.*
5. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.*

Solution -

1. En prenant $x = y = 0$ dans (1), on obtient
$$f(0) = f(0) + f(0)$$
soit
$$f(0) = 0.$$
D'un autre côté, en prenant $y = -x$ dans (1), on obtient
$$f(0) = f(x) + f(-x)$$
ce qui montre que $f(-x) = -f(x)$ et donc f est une fonction impaire.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que f est continue en x_0 en montrant que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x_0)$.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x_0. La suite $(x_n - x_0)_{n\geq 0}$ qui converge vers 0 et puisque f est continue en 0 on a
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n - x_0) = f(0) = 0.$$
Or, d'après (1),
$$f(x_n - x_0) = f(x_n) + f(-x_0) = f(x_n) - f(x_0).$$
En conclusion
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$
ce qui achève de montrer que f est continue en x_0.
3. Soit x un réel fixé. Nous allons commencer par montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(nx) = nf(x).$$
Pour $n = 0$, on a clairement $f(0) = 0 \times f(0)$. Supposons que la relation est vraie jusqu'au rang n. On a
$$\begin{array}{rcl} f((n+1)x) & = & f(nx + x) \\ & \stackrel{(1)}{=} & f(nx) + f(x) \\ & = & nf(x) + f(x) = (n+1)f(x), \end{array}$$
ce qui achève la récurrence.
D'un autre côté, pour $n \in \mathbb{Z}^-$,
$$f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = nf(x),$$
car $-n \in \mathbb{N}$ et f est impaire. Finalement, nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$f(nx) = nf(x). \tag{2}$$
4. Soit $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On a
$$qf(r) \stackrel{(2)}{=} f(qr) = f(p) \stackrel{(2)}{=} pf(1),$$
et donc $f(r) = \dfrac{p}{q} f(1) = rf(1)$.
5. Nous allons utilisé la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème **??**, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ et
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = x.$$

Puisque f est continue en x, on déduit, en vertu de la proposition **??**, que $f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(r_n)$. Or, d'après la question précédente, $f(r_n) = r_n f(1)$. Il en découle alors que

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n f(1) = x f(1).$$

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.*

Solution - Soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ il existe $b > 0$ tel que

$$\forall x > b \quad a - \epsilon \leq f(x) \leq a + \epsilon.$$

Ceci montre que f est borné sur $]b, +\infty[$. Maintenant f est continue sur $[0, b]$ et donc f est bornée sur $[0, b]$. En conclusion, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

1. *Montrer que l'équation*

$$x^2 = \sin x$$

admet au moins une solution réelle non nulle.

2. *Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $] - 1, 1[$.*
3. *Montrer que tout polynôme réel de degré impaire admet une racine réelle.*

Solution -

1. La fonction $f(x) = \sin x - x^2$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ et

$$f(-\frac{\pi}{2}) < 0, \quad f(\frac{\pi}{4}) = 0.090 > 0.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire **??**), il existe un $x_0 \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ tel que $f(x_0) = 0$.

2. La fonction $h(x) = x^7 - 3x^2 + 4x - 1$ est continue sur $[-1, 1]$ et

$$h(-1) = -9 < 0, \quad h(1) = 1 > 0.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire **??**), il existe un $x_0 \in] - 1, 1[$ tel que $h(x_0) = 0$.

3. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré impaire avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $a_n > 0$. On a

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty.$$

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. Puisque P est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_0 compris entre a et b tel que $P(x_0) = 0$.
Si $a_n < 0$, on peut faire un raisonnement analogue.

Exercice 9 *Soit $b > 0$. Soit $f : [0, b] \longrightarrow [0, b]$ une fonction continue.*

1. *Montrer qu'il existe $c \in [0, b]$ tel que $f(c) = c$.*
2. *Donner un exemple de fonction continue de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ n'ayant pas de point fixe.*

Solution -

1. On considère la fonction $g : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - x.$$

Cette fonction est continue sur $[0, b]$ et $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(0), f(b) \in [0, b]$. Si $f(0) = 0$ ou $f(b) = b$ le problème est résolu. Sinon $g(0)g(b) < 0$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire **??**), il existe un $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

2. La fonction de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ qui à $x \mapsto x + 1$ est continue mais n'admet pas de point fixe.

Exercice 10 *Montrer que $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ réalise une bijection de son domaine de définition sur un intervalle qu'on calculera. Expliciter f^{-1}.*

Solution -
On a

$$x \in D_f \iff (x > 0 \quad \text{et} \quad \ln x < 1),$$

soit

$$x \in D_f \iff (x > 0 \quad \text{et} \quad x < e).$$

Ainsi

$$D_f =]0, e[.$$

f est continue sur D_f, nous allons montrer que f est strictement monotone sur $]0, e[$.
Soient $x_1, x_2 \in]0, e[$ tels que $x_1 < x_2$. On a alors

$$\ln x_1 < \ln x_2$$

et donc

$$1 - \ln x_1 > 1 - \ln x_2$$

finalement

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, e[$ On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) = -\infty.$$

Ainsi f réalise une bijection de $]0, e[$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = y \quad \text{et} \quad x \in]0, e[$$

est équivalent à

$$e^y = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad x \in]0, e[$$

soit

$$x = e^{1-e^y}.$$

Finalement, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, e[$ est donnée par

$$f^{-1}(x) = e^{1-e^x}.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 3 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $f(x) = (x-a)g(x)$. Montrer que f est dérivable au point a et calculer $f'(a)$.*

Solution - On a

$$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = g(a)$$

puisque g est continue en a. On déduit que f est dérivable en a et $f'(a) = g(a)$.

Exercice 2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^2.

Solution -

- La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté, on a

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = f(0)$$

car, pour tout $x \neq 0$, $0 \leq \left| x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x^5|$ et donc f est continue en 0, en vertu de la proposition **??**. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition **??** et du théorème **??** et on a, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad = \quad \lim_{x\longrightarrow 0} x^4\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

et donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
La fonction f' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et puisque

$$\lim_{x\longrightarrow 0} 5x^4\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

et $\lim_{x\longrightarrow 0} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$, on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f'(x)=f'(0).$$

Ainsi f' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f' est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition **??** et du théorème **??** et on a, pour tout $x\neq 0$,

$$f''(x)=(20x^3+x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-8x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} \quad = \quad \lim_{x\longrightarrow 0} 5x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

et donc f' est dérivable en 0 et $f''(0)=0$.
La fonction f'' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et puisque

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(20x^3+x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

et $\lim_{x\longrightarrow 0} 8x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$, on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f''(x)=f''(0).$$

Ainsi f'' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$.*

Solution - Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Pour $n = 1$, on a $\sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. On suppose la formule vraie au rang n. On a

$$\begin{aligned} \sin^{(n+1)}(x) &= (\sin^{(n)})'(x) = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Exercice 4 *Montrer les inégalités suivantes*

1. $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$

Solution -

1. Si $x = 0$ les inégalités sont clairement vérifiées. Supposons $x \neq 0$. On distingue deux cas :
   - $-1 < x < 0$. La fonction $t \longrightarrow \ln(1+t)$ est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$ et donc d'après le théorème des accroissement finis il existe $c \in]x, 0[$ tel que

     $$\ln(1+x) - \ln(1+0) = (x-0)\frac{1}{1+c},$$

     soit

     $$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

On a

$$-1 < x < c < 0. \tag{3}$$

On a

$$\frac{x}{1+c} - x = \frac{-cx}{1+c} \leq 0$$

en vertu de (3). On déduit alors que

$$\ln(1+x) \leq x.$$

D'un autre côté,

$$\frac{x}{1+c} - \frac{x}{1+x} = \frac{x(x-c)}{(1+x)(1+c)} \geq 0$$

en vertu de (3). On déduit alors que

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}.$$

Finalement,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- $x > 0$. La fonction $t \longrightarrow \ln(1+t)$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ et donc d'après le théorème des accroissement finis il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = (x-0)\frac{1}{1+c},$$

soit

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

On a

$$0 < c < x. \tag{4}$$

On a

$$\frac{x}{1+c} - x = \frac{-cx}{1+c} \leq 0$$

en vertu de (4). On déduit alors que

$$\ln(1+x) \leq x.$$

D'un autre côté,

$$\frac{x}{1+c} - \frac{x}{1+x} = \frac{x(x-c)}{(1+x)(1+c)} \geq 0$$

en vertu de (4). On déduit alors que

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}.$$

Finalement,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Pour tout $x > 0$, la fonction cosinus vérifie les hypothèses du théorème **??** sur l'intervalle $[0, x]$. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 et il existe donc un réel $c(x) \in]0, x[$ tel que

$$\cos x = \cos 0 + \cos'(0)x + \frac{1}{2}\cos^{(2)}(c(x))x^2.$$

Puisque $\cos'(0) = 0$, $\cos'' = -\sin$, on déduit que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin(c(x))x^2$ et donc

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}(1 - \sin(c(x))) \geq 0,$$

car $1 - \sin(c(x)) \geq 0$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

3. • Soit $x > 0$. La fonction $t \longrightarrow \sin t$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ et donc d'après le théorème des accroissement finis il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin x - \sin 0 = x \cos c \leq x$$

puisque $x > 0$ et $\cos c \leq 1$ et ainsi

$$\sin x \leq x.$$

• Pour tout $x > 0$, la fonction sinus vérifie les hypothèses du théorème **??** sur l'intervalle $[0, x]$. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3 et il existe donc un réel $c(x) \in]0, x[$ tel que

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{1}{2}\sin''(0)x^2 + \frac{1}{6}\sin^{(3)}(c(x))x^3.$$

Puisque $\sin(0) = \sin''(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et $\sin^{(3)} = -\cos$, on déduit que $\sin x = x - \frac{1}{6}\cos(c(x))x^3$ et donc

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6}(1 - \cos(c(x))) \geq 0,$$

car $x > 0$ et $1 - \cos(c(x)) \geq 0$, ce qui montre que

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

Exercice 5 *En utilisant la formule de Leibniz calculer les dérivées d'ordre 6 des fonctions* $f(x) = x^2 \sin x$, $g(x) = x^2(1+x)^6$ *et* $h(x) = e^x \cos x$.

Solution - On obtient

$$\begin{array}{rcl} f^{(6)}(x) & = & 30 \sin x + 12x \cos x - x^2 \sin x, \\ g^{(6)}(x) & = & 10800 + 30240x + 20160x^2, \\ h^{(6)}(x) & = & 8e^x \sin x. \end{array}$$

Exercice 6 *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $g(x) = x^4 e^{\frac{1}{x}}$. *En utilisant la formule de Leibniz montrer que*

$$g^{(5)}(x) = -\frac{1}{x^6} e^{\frac{1}{x}}.$$

Solution - Posons $f(x) = x^4$ et $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On a

$$f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f^{(3)}(x) = 24x,\ f^{(4)}(x) = 24,\ f^{(5)}(x) = 0.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \\ h''(x) & = & \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}}, \\ h^{(3)}(x) & = & -\left(\frac{6}{x^4} + \frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) e^{\frac{1}{x}}, \\ h^{(4)}(x) & = & \left(\frac{24}{x^5} + \frac{36}{x^6} + \frac{12}{x^7} + \frac{1}{x^8}\right) e^{\frac{1}{x}}, \\ h^{(5)}(x) & = & -\left(\frac{120}{x^6} + \frac{240}{x^7} + \frac{120}{x^8} + \frac{20}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right) e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Donc, d'après la formule de Leibniz (voir théorème **??**),

$$\begin{aligned}
g^{(5)}(x) &= f^{(5)}(x)h(x) + C_5^1 f^{(4)}(x)h'(x) + C_5^2 f^{(3)}(x)h''(x) + C_5^3 f''(x)h^{(3)}(x) \\
&\quad + C_5^4 f'(x)h^{(4)}(x) + f(x)h^{(5)}(x) \\
&= 120h'(x) + 240xh''(x) + 120x^2h^{(3)}(x) + 4x^3h^{(4)}(x) + x^4h^{(5)}(x) \\
&= \Big(-\frac{120}{x^2} + \frac{480}{x^2} + \frac{240}{x^3} - \frac{720}{x^2} - \frac{720}{x^3} - \frac{120}{x^4} \\
&\quad + \frac{480}{x^2} + \frac{720}{x^3} + \frac{240}{x^4} + \frac{20}{x^5} - \frac{120}{x^2} - \frac{240}{x^3} - \frac{120}{x^4} - \frac{20}{x^5} - \frac{1}{x^6}\Big) e^{\frac{1}{x}} \\
&= -\frac{1}{x^6} e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 *Calculer les limites suivantes :*

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^3 \sin x}$,

2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$.

Solution - Nous allons utiliser la règle de l'Hôpital

1. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin x} &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x\sin(x^2)}{3x^2\sin x + x^3\cos x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\sin(x^2)}{3x\sin x + x^2\cos x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4x\cos(x^2)}{5x\cos x + 3\sin x - x^2\sin x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-8x^2\sin(x^2)}{8\cos x - 7x\sin x - x^2\cos x} \\
&= \frac{0}{8} = 0.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8 *Soit f une fonction 3 fois dérivable sur $]a,b[$ et s'annulant en 4 points distincts de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(3)}$ est continue sur $[a,b]$ il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(3)}(c) = 0$.*

Solution - Nous allons montrer d'abord un résultat général. Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Nous allons montrer que si l'équation $f(x) = 0$ admet n solutions distinctes alors l'équation $f'(x) = 0$ admet $n-1$ solutions distinctes. En effet, on suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tels que

$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0.$$

Maintenant, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, nous allons appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_i, a_{i+1}]$. On a f continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $f(a_i) = f(a_{i+1}) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle il existe $c_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$. Ainsi

$$f'(c_1) = f'(c_2) = \ldots = f'(c_{n-1}) = 0$$

ce qui montre que l'équation $f'(x) = 0$ admet $n-1$ solutions distinctes.
Revenons maintenant à l'exercice. Puisque f s'annule en 4 points distincts, f' s'annule ne 3 points distincts, f'' s'annule en 2 points distincts et finalement $f^{(3)}$ s'annule une fois.

Exercice 9 *Montrer les inégalités suivantes :*

1) Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq |x-y|.$$

2) Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

Solution - Nous allons appliquer l'inégalité des accroissements finis.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|1-t^2| \leq 1+t^2 \leq (1+t^2)^2$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f'(t)| \leq 1.$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq |x-y|.$$

2. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \arctan t.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)} \leq 1.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

Exercice 10 *1. On considère l'application $f : [0, +\infty[$ définie par*

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que, pour tout $x \geq 0$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange (avec reste à l'ordre n) pour l'application f sur $[0, 1]$.

3. *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définie en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$*
$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}.$$
Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Solution -

1. Raisonnons par récurrence.
   - On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ce qui montre que la formule est vraie pour $k = 1$.
   - Supposons (hypothèse de récurrence), que pour un entier $k \geq 1$, on ait
   $$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$
   Calculons
   $$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[(-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right]' \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^k \frac{(k)!}{(1+x)^{k+1}}. \end{aligned}$$
2. La formule de Taylor-Lagrange (avec reste d'ordre n) appliquée à la restriction de f à $[1, 0]$ s'écrire
$$f(1) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) + \frac{1^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{1^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n),$$
où $c_n \in]0, 1[$. Puisque, d'après la première question
$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$
cette formule s'écrit
$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}.$$
3. D'après la question précédente, on a
$$\ln 2 = u_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}.$$

Posons
$$v_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}$$
puisque $c_n > 0$, on déduit que
$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}$$
et donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

Exercice 11 *1. Soit $a > 0$. Montrer, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange (avec un reste à l'ordre 5) à l'application $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle $[0, a]$ que*
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{120}.$$

2. En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Solution -

1. La fonction cosinus étant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, la restriction de cette fonction à l'intervalle $[0, a]$ vérifie largement les hypothèses requises pour l'application de la formule de Taylor-Lagrange avec un reste d'ordre 5, il existe donc un nombre réel $c \in]0, a[$ tel que
$$\cos a = \cos 0 - a \sin 0 - \frac{a^2}{2}\cos 0 + \frac{a^3}{6}\sin 0 + \frac{a^4}{24}\cos 0 - \frac{a^5}{120}\sin c,$$
soit encore
$$\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} = -\frac{a^5}{120}\sin c$$
d'où
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right| \leq \frac{a^5}{120}.$$

2. En choisissant $a = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\left|\cos\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{384}\right| \leq \frac{1}{3840},$$

soit en effectuant les calculs :

$$\left|\cos\frac{1}{2} - \frac{337}{384}\right| \leq \frac{1}{3840},$$

d'où

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Ceci donne un bon encadrement de $\cos\frac{1}{2}$ puisque

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \simeq 0.87734 \quad \text{et} \quad \frac{337}{384} + \frac{1}{3840} \simeq 0.87786.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 4 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Trouver un développement limité au voisinage de a à l'ordre n de chacune des fonctions suivantes*

1. $e^x + \cos 3x - \dfrac{1}{2}\sin x,\ \ a = 0,\ n = 5;$
2. $\sin x \ln(1+x),\ \ a = 0,\ n = 5;$
3. $\cosh x \sin x,\ a = 0,\ n = 5;$
4. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}},\ \ a = 1,\ n = 3;$
5. $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{1+x},\ \ a = \infty,\ n = 6;$
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}},\ \ a = 0,\ n = 3;$
7. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}},\ a = 0,\ n = 3;$
8. $\ln(1+\cos x),\ a = \frac{\pi}{2}\ n = 5.$

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5),\\
\cos(3x) &= 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} + o_0(x^5)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e^x + \cos 3x - \frac{1}{2}\sin x = 2 + \frac{1}{2}x - 4x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{41}{12}x^4 + \frac{1}{240}x^5 + o_0(x^5).$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5).
\end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degré supérieur à 5 on obtient

$$\sin x \ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o_0(x^5).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5), \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5) \end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degré supérieur à 5 on obtient

$$\cosh x \sin x = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o_0(x^5).$$

4. On pose $u = x - 1$. On a alors

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = \frac{ee^u}{\sqrt{2+u}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{e^u}{\sqrt{1+\frac{u}{2}}}.$$

On a

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3), \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{u}{2}}} &= (1+\frac{u}{2})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4}u + \frac{3}{32}u^2 - \frac{5}{128}u^3 + o_0(u^3). \end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient

$$\frac{e^u}{\sqrt{1+\frac{u}{2}}} = 1 + \frac{3}{4}u + \frac{11}{32}u^2 + \frac{37}{384}u^3 + o_0(u^3).$$

On obtient finalement

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = e\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(x-1) + \frac{11}{64}(x-1)^2 + \frac{37}{768}(x-1)^3\right) + o_1((x-1)^3).$$

5. On pose $u = \frac{1}{x}$. On a

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{1+x} = \frac{u\sin u}{1+u}.$$

On a

$$\begin{aligned} u\sin u &= u^2 - \frac{u^4}{6} + \frac{u^6}{120} + o_0(u^6), \\ \frac{1}{1+u} &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 + o_0(u^6). \end{aligned}$$

En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degré supérieur à 6 on obtient

$$\frac{u\sin u}{1+u} = u^2 - u^3 + \frac{5}{6}u^4 - \frac{5}{6}u^5 + \frac{101}{120}u^6 + o_0(u^6).$$

On obtient finalement

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{1+x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \frac{101}{120x^6} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

6. On a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4), \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o_0(x^3), \\ e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} &= ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o_0(x^3)}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3).$$

En posant $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient finalement

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) + o_0(x^3).$$

7. On a

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4), \\
\ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o_0(u^4), \\
\ln(1+\sin x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o_0(x^4), \\
\frac{\ln(1+\sin x)}{x} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o_0(x^3), \\
e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} &= ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+o_0(x^3)}.
\end{aligned}$$

Maintenant

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3).$$

En posant $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12}$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient finalement

$$(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{16}x^3\right) + o_0(x^3).$$

8. On pose $u = x - \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\ln(1+\cos x) = \ln(1-\sin u).$$

On a

$$\begin{aligned}
-\sin u &= -u + \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{120} + o_0(u^5), \\
\ln(1+v) &= v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} + o_0(v^5).
\end{aligned}$$

En posant $v = -u + \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{120}$ dans cette expression et en en tronquant les termes de degré supérieur à 5 on obtient que

$$\ln(1-\sin u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{12}u^4 - \frac{1}{24}u^5 + +o_0(u^5).$$

Finalement

$$\ln(1+\cos x) = -(x-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^5 + +o_{\frac{\pi}{2}}((x-\frac{\pi}{2})^5).$$

Exercice 2 *1. Donner le développement limité à l'ordre* 4 *de* $(1+x)^\alpha$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *au voisinage de* 0.

2. En déduire le développement limité au voisinage de 0 *à l'ordre* n *des fonctions suivantes*

a. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $n=8$; *b.* $\arcsin x$ $n=9$;

c. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $n=9$; *d.* $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{\arcsin x}{2}$ $n=9$.

Solution -

1. On a

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3+\frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4+o_0(x^4).$$

2. • Pour $\alpha=-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2-\frac{5}{16}u^3+\frac{35}{128}u^4+o_0(u^4). \qquad (1)$$

• En posant $u=-x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+o_0(x^8).$$

• Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la dérivée de $\arcsin x$, on déduit par primitivation

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+o_0(x^9).$$

• La dérivée de $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est

$$(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\times\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En posant $u=x^2$ dans (1), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+o_0(u^8).$$

Par primitivation on déduit que

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+o_0(x^9).$$

- En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans la formule de 1., on obtient

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o_0(u^4).$$

En prenant $u = -x^2$, on obtient

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + o_0(u^8).$$

Finalement,

$$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 + o_0(x^9).$$

Exercice 3 *1. Donner le développement limité à l'ordre quatre de la fonction $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1.*

2. En déduire la limite de $\dfrac{x \ln x}{x^2-1}$ quand x tend vers 1.

Solution -

1. On a

$$\ln x = \ln(1+x-1) = x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+o_1((x-1)^4).$$

2. On a alors

$$\frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}\left(1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)\right)$$

et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 *Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.*

Solution - On a

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

et donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o_0(x^3)}.$$

Maintenant

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o_0(u^3).$$

En posant dans cette expression $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}$ et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o_0(x^3).$$

Exercice 5 *1. Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.

2. *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 5 *de* $f(x) = e^{\cos x}$.
3. *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $f(x) = x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$.
4. *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 3 *de* $f(x) = (1 + \cos x)^x$.
5. *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\ln(2x+1)}}$.

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4), \\ \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o_0(u^4). \end{aligned}$$

En posant $u = x - \frac{x^3}{6}$ et en tronquant les termes de degré supérieur à 5 on obtient

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + o_0(x^4).$$

2. On a

$$\cos x \;=\; 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^5),$$

et donc

$$e^{\cos x}=ee^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^5)}.$$

Maintenant

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^5}{120}+o_0(u^5).$$

En posant $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 5 on obtient finalement

$$e^{\cos x}=e\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4\right)+o_0(x^5).$$

3. On a

$$(\cosh x\,)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln\cosh x}{x}},$$

et

$$\cosh x \;=\; 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^5),$$
$$\ln(1+u) \;=\; u-\frac{u}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o_0(u^4).$$

En posant $u=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 4 on obtient

$$\ln\cosh x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o_0(x^4)$$

et donc

$$\frac{\ln\cosh x}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o_0(x^3).$$

Maintenant

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o_0(u^3).$$

En posant $u=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient finalement

$$x(\cosh x\,)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^4).$$

4. On a
$$(1+\cos x)^x = e^{x\ln(1+\cos x)},$$
et
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2).$$
Donc
$$\begin{aligned}\ln(1+\cos x) &= \ln(2 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)) \\ &= \ln 2 + \ln(1 - \frac{x^2}{4} + o_0(x^2)) \\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + o_0(x^2).\end{aligned}$$
Ainsi
$$x\ln(1+\cos x) = \ln 2x - \frac{x^3}{4} + o_0(x^3).$$
Maintenant
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3).$$
En posant $u = \ln 2x - \frac{x^3}{4}$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 3 on obtient finalement
$$(1+\cos x)^x = 1 + \ln(2)x + \frac{1}{2}\ln(2)^2x^2 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\ln(2)^3)x^3 + o_0(x^3).$$

5. On a
$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2), \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o_0(x^4), \\ \ln(1+2x) &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o_0(x^4), \\ (1+u)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \frac{35}{128}u^4 + o_0(u^4).\end{aligned}$$
En posant $u = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 4 on obtient
$$\frac{1}{\sqrt{1+\ln(1+2x)}} = 1 - x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{41}{6}x^3 + \frac{155}{8}x^4 + o_0(x^4).$$

Maintenant en multipliant $1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$ par $1-x+\frac{5}{2}x^2-\frac{41}{6}x^3+\frac{155}{8}x^4$ et en tronquant les termes de degré supérieur à 4 on obtient finalement

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\ln(2x+1)}} = 1-x+3x^2-\frac{22}{3}x^3+\frac{41}{2}x^4+o_0(x^3).$$

Exercice 6 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1+x)^{\frac{1}{3}}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4\arctan x-x^4}{\cos(x^2)-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$.

Solution -

1. En effectuant un développement limité à l'ordre 4 de $3(1+x)^{\frac{1}{3}}-2\sqrt{1+x}-1$ on obtient

$$\frac{3(1+x)^{\frac{1}{3}}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2} = -\frac{1}{12}x^2+o_0(x^2)$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(1+x)^{\frac{1}{3}}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o_0(x^2)}{x^2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

2. On a

$$x^4\arctan x-x^4 = -x^4+o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \cos(x^2)-1 = -\frac{1}{2}x^4+o_0(x^4)$$

et donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^4\arctan x-x^4}{\cos(x^2)-1} = 2.$$

3. On a

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

et

$$x - \ln(1+x) = \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) \quad \text{et} \quad x\ln(1+x) = x^2 + o_0(x^2)$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}.$$

4. On a

$$\cos(x) - \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{6}x^4 + o_0(x^4)$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

5. On a

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 3 on obtient

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)$$

et donc

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6} + o_0(x).$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

6. On a

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x = -x^2 + o_0(x^2) \quad \text{et} \quad 1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} = -2.$$

Exercice 7 *Soit la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{e^{\cos x} - e}{x^2}$

1. *Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.*
2. *Peut on prolonger f par continuité en 0. Si oui, soit g ce prolongement.*

3. g est elle dérivable en 0 *?.*

4. Donner l'équation de la tangente de g *en* 0 *et préciser la position de la courbe représentative de* f *par rapport à sa tangente au voisinage de* 0.

Solution -

1. Nous avons vu dans l'exercice 5 que

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) + o_0(x^5)$$

et donc

$$f(x) = e\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x^2\right) + o_0(x^2). \tag{2}$$

2. De (2), on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \frac{e}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{e}{2}}{x} = 0.$$

On déduit alors que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction g et que g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

3. L'équation de la tangente de g en 0 est $y = \frac{e}{2}$ et on a, d'après (2),

$$g(x) - \frac{e}{2} = x^2\left(\frac{e}{6} + \frac{o_0(x^2)}{x^2}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{o_0(x^2)}{x^2} = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[, \ \frac{e}{6} + \frac{o_0(x^2)}{x^2} > 0.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\setminus\{0\}, \ g(x) - \frac{e}{2} > 0$$

et donc la courbe représentative de g est au dessus de sa tangente en 0, en particulier, puisque $g'(0) = 0$, $g(0)$ est un minimum local.

Exercice 8 *Soit la fonction* $g(x) = \dfrac{\arctan x}{x^2 + \sin x}$.

1. *Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et soit f ce prolongement.*
2. *Montrer que f est dérivable en 0 et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente en 0.*

Solution -

1. Nous allons effectuer un développement limité à l'ordre 2 de g en 0. On a On a
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o_0(x^2)$$
et par primitivation
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3),$$
$$x^2 + \sin x = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$
Ainsi
$$\frac{\arctan x}{x^2 + \sin x} = \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)}{1 + x - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)}.$$
En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $1 - \frac{1}{3}x^2$ par $1 + x - \frac{x^2}{6}$, on obtient finalement que
$$g(x) = 1 - x + \frac{5}{6}x^2 + o_0(x^2).$$
De cette relation on déduit que
$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = -1.$$
On déduit alors que g se prolonge par continuité en 0 en une fonction f et que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.
2. L'équation de la tangente de f en 0 est $y = 1 - x$ et on a
$$f(x) - (1 - x) = x^2 \left(\frac{5}{6} + \frac{o_0(x^2)}{x^2} \right).$$
Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{o_0(x^2)}{x^2} = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x \in]-\delta, \delta[, \ \frac{5}{6} + \frac{o_0(x^2)}{x^2} > 0.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\backslash\{0\},\ f(x) - (1-x) > 0$$

et donc la courbe représentative de f est au dessus de sa tangente en 0.

Exercice 9 *1. Donner le DL asymptotique au voisinage de* $+\infty$ *de* $f(x) = x^2 \arctan(\dfrac{1}{1+x})$ *à l'ordre* 1

2. Donner l'asaymptôte au voisinage de $+\infty$*, et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptôte.*

Solution -

1. On pose $u = \frac{1}{x}$. On a

$$f(x) = \frac{1}{u^2} \arctan\left(\frac{u}{1+u}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{u}{1+u} &= u - u^2 + u^3 + o_0(u^3), \\ \arctan v &= v - \frac{1}{3}v^3 + o_0(v^3), \end{aligned}$$

En posant $v = u - u^2 + u^3$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 3, on obtient

$$\arctan\left(\frac{u}{1+u}\right) = u - u^2 + \frac{2}{3}u^3 + o_0(u^3).$$

Ainsi

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3}$$

2. De la relation (3) on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$$

et donc la droite $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. En plus

$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3} + x o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x > a,\ \frac{2}{3} + x o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) > 0.$$

On déduit que

$$\forall x > a,\ f(x) - (x-1) > 0$$

et donc la courbe de f est au dessus de son asymptote.

Exercice 10 *1. Déterminer le développement limité en* 0 *à l'ordre* 5 *de* $(\tan x)$*. En déduire un développement limité généralisé de* $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ *en* 0*.*

2. Déterminer le réel a tel que $(\tan x + a \tan 3x)$ *admette une limite finie quand* $x \to \dfrac{\pi}{2}$*.*

Solution -

1. On a

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^5)$$

et donc

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o_0(x^4)}.$$

Maintenant

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4).$$

En posant $u = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4$ dans cette expression et en tronquant les termes de degré supérieur à 4 on obtient

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o_0(x^4)} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o_0(x^4).$$

Ainsi

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o_0(x^3).$$

2. On pose $u = x - \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\tan x + a\tan 3x &= \tan(u + \frac{\pi}{2}) + a\tan 3(u + \frac{\pi}{2}) \\
&= -\cot u - a\cot(3u) \\
&= \frac{1}{u}(-1 - \frac{a}{3}) + \frac{1}{3}u + \frac{1}{45}u^3 + u + \frac{3}{5}u^3 + o_0(u^3).
\end{aligned}$$

Ainsi $(\tan x + a\tan 3x)$ admette une limite finie quand $x \to \dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $-1 - \frac{a}{3} = 0$ soit $a = -1$.

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction TD 6 bis
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}dx,\ \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6},\ \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Solution -

1. Nous allons d'abord décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{4x^2}{x^4-1}$.On a

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}. \quad (1)$$

En multipliant les deux membres de (1) par $x-1$ et en prenant $x=1$, on obtient $a=1$. De la méme manière, en multipliant les deux membres de (1) par $x+1$ et en prenant $x=-1$, on obtient $b=-1$. Maintenant, on prend $x=0$ dans (1) et on obtient $d+b-a=0$, soit $d=2$. D'un autre côté, on multiplie les deux membres de (1) par x et on fait tendre x vers l'infini, on obtient $c+b+a=0$, soit $c=0$. Finalement,

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}dx &= [\ln|x-1|]_2^3 - [\ln|x+1|]_2^3 + [2\arctan x]_2^3 \\ &= \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 + 2\arctan 3 - 2\arctan 2.\end{aligned}$$

2. Nous allons d'abord décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{x^3-7x+6}$. On a

$$x^3-7x+6 = x^3-x-6x+6 = x(x-1)(x+1)-6(x-1) = (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x-2)(x+3).$$

On alors

$$\frac{1}{x^3-7x+6}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+3}. \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de (2), respectivement, par $x-1$, $x-2$ et $x+3$ et en prenant $x=1$, $x=2$ et $x=-3$, on obtient

$$a=-\frac{1}{4},\quad b=\frac{1}{5}\quad \text{et}\quad c=\frac{1}{20}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^3-7x+6} &= -\frac{1}{4}\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{5}\left[\ln|x-2|\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{20}\left[\ln|x+3|\right]_{-2}^{0}\\ &= \frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\ln 4+\frac{1}{20}\ln 3=\frac{3}{10}\ln 3-\frac{1}{5}\ln 2.\end{aligned}$$

3. Nous allons d'abord décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$. On a

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+1}.$$

En multipliant les deux membres de (2) par $(x-1)^2$ et en faisant $x=1$, on obtient $a=\frac{1}{2}$. En multipliant les deux membres de (2) par x^2+1 et en faisant $x=\imath$, on obtient

$$c\imath+d=-\frac{1}{(\imath-1)^2}=-\frac{1}{-2\imath}=-\frac{1}{2}\imath$$

et donc $d=0$ et $c=-\frac{1}{2}$. En prenant $x=0$, on obtient $d-b+a=0$ soit $b=a=\frac{1}{2}$. Finalement

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{4}\left[\ln|x^2+1|\right]_{-1}^{0}\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\ln 2\end{aligned}$$

Exercice 2 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}$ *(indication : trouver* a, b, c, d *telles que* $\displaystyle\frac{x}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}$*)*

Solution -

1. On a

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \;=\; [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

2. En faisant le changement de variables $u = \sqrt{x}$, on a $du = \frac{dx}{2u}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx &= \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \left(1+\frac{1}{1+u^2}\right)du \\ &= 2\left[u+\arctan u\right]_0^1 = 2(1+\frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

3. Remarquons d'abord que

$$x^4+1 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

et donc la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{1+x^4}$ s'écrit On a

$$\frac{x}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

En remplaçant x par $-x$ on obtient

$$\frac{-ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{-cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1} = -\frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

soit

$$a = c \quad \text{et} \quad b = -d.$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^4} &= \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{ax-b}{x^2-x\sqrt{2}+1}\\ &= \frac{(ax+b)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(ax-b)(x^2+x\sqrt{2}+1)}{x^4+1}.\end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que $a=0$ et $b=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ et finalement

$$\frac{x}{1+x^4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}x^2-x\sqrt{2}+1 &= (x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left((\sqrt{2}x-1)^2+1\right),\\ x^2+x\sqrt{2}+1 &= (x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left((\sqrt{2}x+1)^2+1\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)\right]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{4}\right),\\ \int_0^1\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)\right]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

et finalement

$$\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{8}\left(\arctan(\sqrt{2}-1)-\arctan(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 3 *Montrer que pour tout $x>0$, on a :*

1. $\displaystyle\int_1^x\frac{e^t}{t}\,dt=\int_e^{e^x}\frac{dt}{\ln t}$
2. $\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$

Solution -

1. On fait le changement de variables $u = e^t$. On a $du = e^t dt$ et donc
$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \int_e^x \frac{du}{\ln u}.$$
2. On fait le changement de variables $u = \frac{1}{t}$. On $du = -u^2 dt$ et donc
$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{du}{u^2(1+\frac{1}{u^2})} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Exercice 4 *Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Solution - En utilisant une intégration par parties, on obtient
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx &= \left[-f(x)\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx \\ &= -\frac{1}{n}\left(f(b)\cos(nb) - f(a)\cos(na)\right) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx.\end{aligned}$$

La fonction f étant de classe C^1 et donc f' est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème **??**, f' est bornée sur $[a,b]$ et donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq M$. En utilisant les propriétés de l'intégrale (*cf.* Théorème **??**), on déduit que
$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)\cos(nx)|dx \leq \frac{M(b-a)}{n},$$
et ainsi
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx = 0.$$
D'un autre côté,
$$\left|\frac{1}{n}\left(f(b)\cos(nb) - f(a)\cos(na)\right)\right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n},$$

et donc
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\left(f(b)\cos(nb)-f(a)\cos(na)\right)=0.$$
Finalement,
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=0.$$

Exercice 5 *Calculer les deux intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,dx$

Solution -

1. On a
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\cos^5 x\,dx\\ &\overset{u=\cos x}{=} -\int_1^0(1-u^2)u^5du\\ &= \int_0^1 u^5-u^7du=\left[\frac{1}{6}u^6-\frac{1}{8}u^8\right]_0^1=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2=\frac{1}{4}(\cos 2x+1)^2\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}(1+\cos 4x)\\ &= \frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}.$$

3. On a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx \overset{u=\cos x}{=} -\int_1^0 u^5 du = \frac{1}{6}.$$

Exercice 6 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2+\sin^2 x}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\sin 3x}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x+\sin 3x}\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

Solution -

1. On pose
$$E(x) = \frac{dx}{2+\sin^2 x}.$$
On a $E(\pi+x) = E(x)$ car $\sin(\pi+x) = -\sin x$ et $d(\pi+x) = dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \tan x$. Ainsi $du = (1+\tan^2 x)dx$ et
$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{u^2}{1+u^2}.$$
Donc
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2+\sin^2 x} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(u^2+1)(2+\frac{u^2}{1+u^2})} \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{3u^2+2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u\right)^2+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan(\frac{1}{2}\sqrt{2}).$$

2. On pose
$$E(x) = \frac{\tan x}{1+\sin 3x}\,dx.$$
On a $E(\pi-x) = E(x)$ car $\sin(3\pi-3x) = \sin 3x$, $\tan(\pi-x) = -\tan x$ et $d(\pi-x) = -dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \sin x$. Ainsi $du = \cos x dx$ et
$$\begin{aligned}
\tan x dx &= \frac{\sin x}{\cos x}\frac{du}{\cos x} = \frac{udu}{1-u^2},\\
1+\sin 3x &= 1+\sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x\\
&= 1+\sin x(1-2\sin^2 x) + 2\cos^2 x \sin x\\
&= 1+u(1-2u^2)+2(1-u^2)u = 1+u(1-u^2)-u^3+2(1-u^2)u\\
&= (1-u)(1+u+u^2+u+u^2+2u+2u^2) = (1-u)(1+4u+4u^2)\\
&= (1-u)(2u+1)^2.
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\sin 3x}\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{udu}{(1-u)^2(1+u)(1+2u)^2}.$$
Pour calculer cette intégrale, nous allons décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{u}{(u-1)^2(1+u)(1+2u)^2}$. On a
$$\frac{u}{(u-1)^2(1+u)(1+2u)^2} = \frac{a}{(u-1)^2}+\frac{b}{u-1}+\frac{c}{1+u}+\frac{d}{(1+2u)^2}+\frac{e}{1+2u}.$$
En utilisant les techniques de décompositions en éléments simples on obtient
$$\begin{aligned}
\frac{u}{(u-1)^2(1+u)(1+2u)^2} &= \frac{1}{18(u-1)^2} - \frac{5}{108(u-1)} - \frac{1}{4(1+u)}\\
&\quad -\frac{4}{9(1+2u)^2} + \frac{16}{27(1+2u)}.
\end{aligned}$$
On déduit alors que
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{udu}{(1-u)^2(1+u)(1+2u)^2} = -\frac{1}{18}\left[\frac{1}{u-1}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{5}{108}\left[\ln|u-1|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\left[\ln|1+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{2}{9}\left[\frac{1}{2u+1}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
& +\frac{8}{27}\left[\ln|2u+1|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{4}\left[\ln|1+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \\
= \; & -\frac{7}{18} + \frac{5}{18}\sqrt{2} + \frac{8}{27}\ln(2) - \frac{5}{108}\ln(2-\sqrt{2}) \\
& +\frac{8}{27}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

3. On pose

$$E(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \sin 3x}\,dx.$$

On a $E(\pi - x) = E(x)$ car $\sin(3\pi - 3x) = \sin 3x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $d(\pi - x) = -dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \sin x$. Ainsi $du = \cos x dx$ et

$$
\begin{aligned}
\cos x dx &= du, \\
\sin x + \sin 3x &= \sin x + \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\
&= \sin x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\cos^2 x \sin x \\
&= u + u(1 - 2u^2) + 2(1 - u^2)u \\
&= u + u(1 - u^2) - u^3 + 2(1 - u^2)u \\
&= 4u(1 - u^2)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \sin 3x}\,dx \quad = \quad \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{4u(1-u)(1+u)}.$$

Pour calculer cette intégrale, nous allons décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{4u(1-u)(1+u)}$. On obtient alors

$$\frac{1}{4u(1-u)(1+u)} = \frac{1}{4u} - \frac{1}{8(u-1)} - \frac{1}{8(u+1)}.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{4u(1-u)(1+u)} &= \frac{1}{4}\left[\ln u\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{8}\left[\ln|u-1|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{8}\left[\ln|u+1|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\frac{1}{8}\ln(2) + \frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\ln(2-\sqrt{2}) \\
&\quad +\frac{1}{8}\ln(3) - \frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{8}\ln(2-\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

et finalement

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x+\sin 3x}\,dx &= -\frac{1}{8}\ln(2)+\frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{2})+\frac{1}{8}\ln(2-\sqrt{2})\\ &\quad +\frac{1}{8}\ln(3)-\frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{8}\ln(2-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

4. On remarque qu'aucune des trois règles de Bioche n'est valable dans ce cas. On pose alors $u=\tan\frac{x}{2}$. On a

$$du=\frac{1}{2}(1+u^2)dx,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}\quad \text{et}\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x} &= -2\int_0^1 \frac{du}{u^2-2u-1}\\ &= -2\int_0^1 \frac{du}{(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})}.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{u-1-\sqrt{2}}-\frac{1}{u-1+\sqrt{2}}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left(\frac{|u-1+\sqrt{2}|}{|u-1-\sqrt{2}|}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

Exercice 7 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^x (\sinh t)^4\,dt$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

6. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{3}}\,dx$

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}\sinh^4 t &= (\sinh^2 t)^2 = \frac{1}{4}\left(\cosh(2t)-1\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\big(\cosh^2(2t)-2\cosh(2t)+1\big)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\cosh(4t)+1)-2\cosh(2t)+1\right)\\ &= \frac{1}{8}\cosh(4t)-\frac{1}{2}\cosh(2t)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^x (\sinh t)^4\,dt = \frac{1}{32}\sinh(4x)-\frac{1}{4}\sinh(2x)+\frac{3}{8}x.$$

2. On a

$$\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{(x+1)^2+4} = 2\sqrt{(\frac{1}{2}(x+1))^2+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \Big[\arg\sinh(\frac{1}{2}(x+1))\Big]_0^1\\ &= \arg\sinh(1)-\arg\sinh\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\arg\sinh x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \tag{3}$$

et finalement

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \ln(1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{5})+\ln 2.$$

3. On pose $\sinh t = \sqrt{2}x$ et donc $\sqrt{2}dx = \cosh t dt$. Pour $x = 0$, on $t = \arg\sinh(0) = 0$ et pour $x = 1$, $t = \arg\sinh(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (voir (3). Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\,dx &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \cosh^2 t dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} (1+\cosh(2t))dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\sinh(2t)\right]_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{2}}{8}\sinh\left(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right) &= \sinh(\ln(5+2\sqrt{6})) \\
&= \frac{1}{2}\left((5+2\sqrt{6})) - \frac{1}{(5+2\sqrt{6}))}\right) \\
&= \frac{24+10\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. On pose $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2 - 1$ et donc $2udu = dx$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}dx &= 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)^2 u^2 du \\
&= 2\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{44\sqrt{2}-16}{105}.
\end{aligned}$$

5. On pose $u = e^x$ et donc $du = udx$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int_1^e \frac{du}{u\sqrt{1+u}}.$$

On pose maintenant $t = \sqrt{1+u}$, $u = t^2 - 1$ et $2tdt = du$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{du}{u\sqrt{1+u}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2tdt}{t(t^2-1)} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2dt}{(t-1)(t+1)}.\end{aligned}$$

Or, en faisant la décompostion en éléments simples, on obtient

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{du}{u\sqrt{1+u}} &= \left[\ln\left(\frac{[t-1|}{|t+1|}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

6. On pose $u = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$, $x = \frac{2}{1+u^2}$ et donc $dx = \frac{-4udu}{(1+u^2)^2}$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx &= \int_1^0 \frac{-4u^2du}{(1+u^2)^2} \\ &= 4\int_0^1 \frac{(u^2+1-1)du}{(1+u^2)^2} \\ &= 4\left(\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} - \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} &= \left[u\frac{1}{(1+u^2)}\right]_0^1 - \int_0^1 u \times \frac{-2u}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^2}du \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2},\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$
Finalement
$$\int_1^2 \sqrt{\frac{2-x}{x}}\, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7. On pose $u = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $x = u^3 - 1$ et $dx = 3u^2 du$ et donc
$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{3}}\, dx &= \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}} \frac{3u^3 du}{u^3-1} \\ &= \left(33^{\frac{1}{3}} - 32^{\frac{1}{3}} + \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}} \frac{3du}{u^3-1}\right). \end{aligned}$$
Décomposons en éléments simples $\frac{3}{u^3-1}$. On a
$$\frac{3}{u^3-1} = \frac{1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{u+2}{u^2+u+1}$$
On a
$$\begin{aligned} \frac{u+2}{u^2+u+1} &= \frac{1}{2}\frac{2u+4}{u^2+u+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2u+1}{u^2+u+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{u^2+u+1}. \end{aligned}$$
Maintenant
$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2+u+1} &= \frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1}. \end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}} \frac{3du}{u^3-1} &= [\ln|u-1|]_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\left[\ln|u^2+u+1|\right]_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}} \\ &\quad -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}})\right]_{2^{\frac{1}{3}}}^{3^{\frac{1}{3}}.} \simeq 0.38. \end{aligned}$$
Finalement
$$\int_1^2 \frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{3}}\, dx \simeq 0.932.$$

Université Cadi-Ayyad **2010-2011**
F.S.T.G

Filière Mathématique, Informatique
Physique et Chimie
Module Analyse I
Correction Devoir 1
Mohamed Boucetta

Exercice 1 *1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. En utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ écrire les propriétés suivantes :*
1. 10 *est un majorant de A.* *2. m est un minorant de A.*
3. P n'est pas un majorant de A. *4. A est majoré.*
5. A n'est pas majoré. *6. A est borné.* *7. A n'est pas borné.*

2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad x \leq y. \tag{1}$$

Montrer que $\sup A$ *et* $\inf B$ *existent que* $\sup A \leq \inf B$.

Solution -

1. 1. $\forall a \in A,\ a \leq 10$.
   2. $\forall a \in A,\ a \geq m$.
   3. $\exists a \in A$ tel que $a > P$.
   4. $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall a \in A,\ a \leq M$.
   5. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a > M$.
   6. $\exists M \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que $\forall a \in A,\ |a| \leq M$.
   7. $\forall M \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists a \in A,\ a > |M|$.
2. Puisque A et B sont non vides, il existe $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$. D'après (1), on a
$$(\forall x \in A,\ x \leq y_0) \quad \text{et} \quad (\forall y \in B,\ x_0 \leq y).$$
Ces deux propositions montrent que A est majoré par y_0 et B est minorée par x_0. Donc d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire $\sup A$ et $\inf B$ existent.
La relation (1) montre que pour tout $y \in B$, y est un majorant de A et puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants on déduit que
$$\forall y \in B,\ \sup A \leq y.$$

Cette proposition montre que $\sup A$ est un minorant de B et puisque $\inf B$ est le plus grand des minorants on déduit que

$$\sup A \leq \inf B.$$

Exercice 2 *Soit*

$$A = \left\{ \frac{4n^2 - 3m}{2n^2 + 6m}, n, m \in \mathbb{N}, 0 < n < m \right\}.$$

1. *Montrer que A est minoré par $-\frac{1}{2}$ et majoré par 2.*
2. *Calculer $\sup A$ et $\inf A$.*

Solution -

1. Soit $\frac{4n^2-3m}{2n^2+6m}$ un élément de A. On a

$$\begin{aligned} \frac{4n^2 - 3m}{2n^2 + 6m} + \frac{1}{2} &= \frac{8n^2 - 6m + 2n^2 + 6m}{2(2n^2 + 6m)} = \frac{10n^2}{2(2n^2 + 6m)} \geq 0, \\ \frac{4n^2 - 3m}{2n^2 + 6m} - 2 &= \frac{4n^2 - 3m - 4n^2 - 12m}{2n^2 + 6m} = \frac{-15m}{2n^2 + 6m} \leq 0. \end{aligned}$$

Ces deux relations montrent que, pour tout $x \in A$,

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

et donc $-\frac{1}{2}$ est un minorant de A et 2 est un majorant de A.

2. • Pour tout $n \geq 2$, prenons $p = 1$ et $q = n$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc

$$\frac{4p^2 - 3q}{2p^2 + 6q} = \frac{4 - 3n}{2 + 6n} \in A.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{4-3n}{2+6n}\right)_{n \geq 2}$ est une suite de points de A et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4 - 3n}{2 + 6n} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $-\frac{1}{2}$ est un minorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers $-\frac{1}{2}$ donc, d'après la proposition **??**,

$$\inf A = -\frac{1}{2}.$$

- Pour tout $n \geq 1$, prenons $p = n$ et $q = n + 1$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc
$$\frac{4p^2 - 3q}{2p^2 + 6q} = \frac{4n^2 - 3n - 3}{2n^2 + 6n + 6} \in A.$$
Ainsi la suite $\left(\frac{4n^2-3n-3}{2n^2+6n+6}\right)_{n\geq 2}$ est une suite de points de A et on a
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 3}{2n^2 + 6n + 6} = 2.$$
Ainsi 2 est un majorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers 2 donc, d'après la proposition **??**,
$$\sup A = 2.$$

Exercice 3 *Construire une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.*

Solution - On considère la suite $u_n = \sqrt{n}$. On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Exercice 4 *Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue et strictement décroissante.*

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = (a_n)^n$.*
2. *A l'aide d'un raisonnement par absurde montrer que*
$$\forall n \geq 1, \quad a_n \leq a_{n+1}.$$
En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera ℓ sa limite.
3. *Montrer que $0 \leq \ell \leq 1$.*
4. *Montrer que $0 \leq \ell < 1$ alors $f(\ell) = 0$.*
5. *En déduire la valeur de ℓ.*

Solution -

1. On considère la fonction $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$g_n(x) = f(x) - x^n.$$
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et $g_0(0) = f(0) \geq 0$ et $g_n(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(0), f(1) \in [0,1]$. Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ le problème est résolu. Sinon $g_n(0)g_n(1) < 0$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire **??**), il existe un $a_n \in]0,1[$ tel que $g_n(a_n) = 0$, soit $f(a_n) = (a_n)^n$.
2. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $a_n > a_{n+1}$. Puisque f est strictement décroissante, on aura
$$f(a_n) = (a_n)^n < f(a_{n+1}) = (a_{n+1})^{n+1}.$$
Or, puisque $a_n > a_{n+1}$, on déduit que
$$(a_{n+1})^n < (a_n)^n < (a_{n+1})^{n+1}.$$
Si $a_{n+1} = 0$, on aura $0 < 0$ ce qui est absurde. On suppose $1 \leq a_{n+1} > 0$. En appliquant la fonction ln qui est strictement croissante, on déduit que
$$n \ln(a_{n+1}) < (n+1) \ln(a_{n+1})$$
soit
$$\ln(a_{n+1}) > 0.$$
Ceci n'est pas vrai car $a_{n+1} \in]0,1]$ et par suite $\ln(a_{n+1}) < 0$.
En conclusion, pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq a_{n+1}$ et donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et étant majorée par 1 elle est convergente vers ℓ.
3. Puisque pour tout $n \geq 1$, $a_n \in [0,1]$, par passage à la limite, on déduit que $\ell \in [0,1]$.
4. On suppose que $0 \leq \ell < 1$. De la relation
$$\forall n \geq 1 \quad f(a_n) = (a_n)^n$$
et puisque f est continue, on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n) = f(\ell) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (a_n)^n.$$
Or
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (a_n)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n \ln a_n} = 0$$
car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln a_n = \ln \ell < 0$. Ainsi $f(\ell) = 0$.

5. Nous allons montrer que $\ell = 1$. Raisonnons par absurde et supposons que $\ell < 1$. D'après la question précédente on aura $f(\ell) = 0$. Or puisque f est strictement décroissante on aura $f(1) < f(\ell) = 0$ ce qui est absurde puisque $f(1) \in [0, 1]$.

Exercice 5 *1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.*

(a) Montrer que $f(]0,1[) \subset]0,1[$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\frac{e^\alpha}{\alpha + 2} = \alpha.$$

2. Soit $u_0 \in]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $]0,1[$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution -

1. (a) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f'(x) = e^x \left(-\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} \right) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0$$

et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]f(0), f(1)[$. Or $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{e}{3} \simeq 0.90$. On conclusion,

$$f\left(]0,1[\right) \subset]f(0), f(1)[\subset]0,1[.$$

(b) On considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - x.$$

Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et $g(0)g(1) < 0$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) = \alpha$. Pour montrer que α est unique nous allons étudier les variations de g sur $[0,1]$. On a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1, \\ g''(x) &= f''(x) = e^x \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)^3} \right) > 0. \end{aligned}$$

Donc g' est strictement croissante sur $[0,1]$ et donc pour tout $x \in [0,1[$,

$$g'(x) < g'(1) = \frac{2e}{9} - 1 < 0$$

et donc g est strictement croissante sur $[0,1]$ et donc bijective ce qui montre que la solution est unique.

On remarque aussi que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc f' est strictement croissante sur $[0,1]$ et donc, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(0) = \frac{e}{4} \leq f'(x) \leq f'(1) = \frac{2e}{9}. \tag{1}$$

2. Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[.$$

On a $u_0 \in]0,1[$. On suppose que $u_n \in]0,1[$. On a

$$u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$$

car $u_n \in]0,1[$ et, d'après 1. (a) $f(]0,1[) \subset]0,1[$.

3. Preuve par récurrence. Pour $n = 0$, on a, puisque $u_0, \alpha \in]0,1[$,

$$|u_0 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{2e}{9}\right)^0.$$

On suppose que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$

Or

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|,$$

et donc en vertu de (1) et l'inégalité des accroissements finis, on déduit que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2e}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{2e}{9}\left(\frac{2e}{9}\right)^n = \left(\frac{2e}{9}\right)^{n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

4. On déduit d'après la question précédente puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2e}{9}\right)^n = 0$ que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$