UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Géométrie Différentielle et Algèbres de Lie

Intitulée

GROUPES DE LIE LORENTZIENS PLATS

Par

Hicham LEBZIOUI

soutenue le 15 novembre 2014 devant le jury composé de :

Youssef RAMI	PES, Faculté des sciences, Meknès	Président
Saïd BENAYADI	Maître de Conférences(HDR), Université de Lorraine, Metz	Rapporteur
Martin BORDEMANN	Professeur, Université de Haute Alsace, Mulhouse	Rapporteur
Aziz IKEMAKHEN	PES, Faculté des sciences et techniques, Marrakech	Rapporteur
Mohamed BOUCETTA	PES, Faculté des sciences et techniques, Marrakech	Examinateur
Mohammed RAOUYANE	PES, Ecole normale supérieure, Rabat	Examinateur
Malika AIT BEN HADDOU	PES, Faculté des sciences, Meknès	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail est le fruit d'une coopération entre mes directeurs de thèse, les Professeurs *Malika Ait Ben Haddou* et *Mohamed Boucetta*. Cette coopération a commencé depuis 2009 lorsqu'ils m'ont proposé de travailler sur le célèbre article de *J. Milnor* : "*Curvature of left-invariant metrics on Lie groups*" lors de mon mémoire de Master, et ceci pour me préparer pour entamer ce sujet de groupes de Lie lorentziens plats. J'ai une grande chance de travailler un tel sujet avec une algébriste comme *Malika Ait Ben Haddou* et un géomètre comme *Mohamed Boucetta*. Je tiens à les remercier de tout mon cœur pour cette tâche qu'ils m'ont facilité, et d'abord, pour leur confiance en moi.

Je suis très reconnaissant envers mon Professeur *Malika Ait Ben Haddou* qui a accepté de diriger mon mémoire de Master et puis, ma thèse. Je la remercie vivement pour son grand aide morale et scientifique, son sérieux, la liberté qu'elle m'a offerte durant ces années et les grands efforts qui a fait pour organiser beaucoup de séminaires et des écoles dont j'ai profité d'y participer et de parler de mon sujet.

Je dois beaucoup à mon Professeur *Mohamed Boucetta*, qui m'a appris mes premiers pas de la recherche scientifique, et surtout, qui m'a fait aimer cette recherche scientifique. J'ai pu apprendre et profité vraiment, pendant ces années, de son grande expérience dans la recherche, j'aimerais le remercier infiniment pour son aide, sa gentillesse, ses conseils et pour ses réponses importantes et rapides à mes questions.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes rapporteurs, les Professeurs *Saïd Benayadi*, *Martin Bordemann*, et *Aziz Ikemakhen*. C'est un immense honneur pour moi que ces experts de géométrie et d'algèbres non associatives aient relue mon travail. Merci à *Saïd Benayadi* pour l'invitation et pour l'accueil chaleureux lors de mon séjour à Metz. À ce propos, je voudrais remercier le CIMPA et le GGTM pour la bourse dont j'ai bénéficié pendant ce séjour.

Je tiens à remercier chaleureusement *Youssef Rami* pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury, et *Mohammed Raouyane*, d'une part, d'avoir accepter de faire partie de mon jury, et d'autre part, pour m'avoir aidé et soutenu tout au long de l'élaboration de cette thèse, surtout lors du séminaire mensuel à Meknès et les cinq écoles de géométries organisées à Meknès et à Rabat. Je voudrais aussi remercier, à ce propos, l'équipe "Algèbre et Géométrie" de Meknès pour l'organisation de ce séminaire. Je voudrais également remercier l'équipe "Géométrie, Topologie et Applications" de la FST de Marrakech pour leurs accueils lors de l'organisation de son séminaire mensuel pendant mes premières années de ma thèse.

Je souhaite également remercier mes Professeurs du Master, en particulier son responsable Abdellatif Bentaleb et *Abdelatif Chaira*.

Merci aussi à mes collègues doctorants *Said Boulmane, Khaled Boutahir, Khaled Tigma, Hassan Asensouyis, Ali Hafidi, Asmaa Drihma...* je leurs souhaite un bon courage.

Pour finir, un immense merci à mon père, ma mère, ma sœur Nora, ma famille, mes beaux parents pour leur soutien et encouragement. Un grand merci à ma femme *Bergui Meryam* qui m'a accompagné, soutenu et qui a pu s'occuper -presque toute seule- de nos enfants *Zyad* et *Israa* pendant cette longue période.

Merci ,enfin, à tous ceux qui ont apporté -de près ou de loin- leur contribution à cette thèse.

Introduction

"Unlike the Riemannian case, the existence of a flat left-invariant Lorentz metric seems to be a more frequent phenomenon." Katsumi Nomizu [27]

L'étude des métriques pseudo-riemanniennes plates ou Ricci-plates constitue un domaine de recherche très vaste, que ce soit en mathématique ou en physique. Beaucoup de mathématiciens se sont intéressés à ce sujet. Ces métriques sont importantes en physique théorique et notamment en théorie des cordes.

Un groupe de Lie pseudo-riemannien est un groupe de Lie muni d'une métrique pseudo-riemannienne [1] invariante à gauche. Son algèbre de Lie munie de la valeur de la métrique à l'élément neutre sera appelée algèbre de Lie pseudo-riemannienne. Les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats constituent une classe importante des variétés pseudo-riemanniennes plates, et la détermination de ces groupes de Lie reste jusqu'à maintenant un problème ouvert. Le seul cas résolu complètement est celui où la métrique est riemannienne. En effet, en 1976 dans un article devenu un classique [25], J. Milnor a montré qu'un groupe de Lie admet une métrique riemannienne plate invariante à gauche si et seulement si son algèbre de Lie se décompose en une somme orthogonale d'un idéal abélien $\mathfrak{U}$ et

1. Dans ce travail, une métrique est dite pseudo-riemannienne si elle est de signature quelconque, riemannienne si elle est définie positive et lorentzienne si elle est de signature $(+, \ldots, +, -)$.

d'une sous-algèbre abélienne $\mathfrak{B}$ et l'action de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{U}$ se fait par des endomorphismes antisymétriques. Parmi les conséquences de ce théorème, les groupes de Lie non abéliens qui possèdent une telle métrique sont unimodulaires, 2-résolubles et non nilpotents et la métrique est géodésiquement complète. Noter qu'un groupe de Lie pseudo-riemannien plat est géodésiquement complet si et seulement si il est unimodulaire.

Après le cas riemannien, il est alors naturel de s'intéresser aux groupes de Lie lorentziens plats. En 1977, K. Nomizu a remarqué dans [27] que, contrairement au cas riemannien, l'existence des métriques lorentziennes plates invariantes à gauche semble être un phénomène plus fréquent et qui donne naissance à des situations qui n'apparaissent pas dans le cas riemannien. Le groupe de Lie de Heisenberg H_3 possède une telle métrique, ce qui montre que les groupes de Lie lorentziens plats peuvent être nilpotents non commutatifs et le groupe affine $GA(\mathbb{R})$ admet une métrique lorentzienne plate invariante à gauche ce qui montre que ces groupes de Lie peuvent être non unimodulaires (et donc la métrique est géodésiquement incomplète). D'un autre côté, nous donnons dans le chapitre 3 une classe de groupes de Lie 3-résolubles et lorentziens plats. D'autre part, alors qu'une métrique riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie est Ricci-plate si et seulement si elle est plate [5], il existe des métriques lorentziennes invariantes à gauche Ricci-plates et non plates. En effet, considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{vect}\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ où les seuls crochets non nuls sont

$$[e_2, f_1] = [f_1, f_2] = e_1 \quad \text{et} \quad [e_2, f_2] = f_1,$$

munie de la métrique lorentzienne $\langle\ ,\ \rangle$ donné dans la base précédente par la matrice

$$\langle\ ,\ \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ est une algèbre de Lie lorentzienne Ricci-plate mais qui n'est pas plate.

Cette thèse est consacrée à l'étude des algèbres de Lie lorentziennes plates que nous allons partager en deux classes, celles qui sont unimodulaires où complètes et celles qui ne le sont pas. Avant de donner les résultats que nous avons obtenues, nous allons rappeler ceux obtenus par d'autres auteurs.

En 1996, A. Aubert et A. Medina dans [2] et [3] ont étudié les algèbres de Lie nilpotentes lorentziennes plates. Ils ont introduit le procédé de *double extension d'algèbres de Lie pseudo-riemanniennes plates* qui est une variante de la méthode de double extension des algèbres de Lie quadratiques due à A. Medina et P. Revoy [23]. Ils ont montré que toute algèbre de Lie nilpotente lorentzienne plate s'obtient par double extension d'une algèbre abélienne riemannienne et, en particulier, son indice de nilpotence ne dépasse pas 3. D'un autre côté, en 2003, M. Guediri a déterminé les groupes de Lie lorentziens plats 2-nilpotents, il a montré dans [16] que l'algèbre de Lie d'un tel groupe est une extension triviale de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ et la restriction de la métrique à $\mathcal{H}_3$ est lorentzienne avec centre dégénéré. En étudiant les groupes de Lie qui agissent isométriquement et transitivement sur l'espace de Minkowski [15], Guediri a donné une description très précise des algèbres de Lie nilpotentes lorentziennes plates. Tous ces résultats concernent la classe des algèbres de Lie lorentziennes plates nilpotentes et le problème reste intéressant.

Dans ce travail, nous allons déterminer toutes les algèbres de Lie lorentziennes plates dont le centre est dégénéré. Nous allons montrer qu'elles sont unimodulaires et que cette classe contient les algèbres de Lie nilpotentes lorentziennes plates. Nous allons aussi déterminer les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires. Dans les deux cas, le procédé de double extension est l'outil principale. Avant d'énoncer nos résultats d'une manière précise, nous allons rappeler brièvement ce procédé, les détails seront donnés dans le chapitre 2.

Soit $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate et soit "." le produit de Levi-Civita associé. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0 \in B$ et $D, \xi \in \mathrm{End}(B)$ vérifiant $D - \xi \in \mathrm{so}(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$, et pour tous $a, b \in B$,

$$\xi([a,b]) = a.\xi(b) - b.\xi(a),\ a.\xi(b) - \xi(a.b) = D(a).b + a.D(b) - D(a.b),\ [D,\xi] = \xi^2 - \mu\xi - R_{b_0}.$$

Soit l'espace vectoriel $A = \mathbb{R}e \oplus B \oplus \mathbb{R}\bar{e}$ muni du crochet de Lie définie par

$$\begin{cases} [\bar{e}, e] &= \mu e, \\ [\bar{e}, a] &= D(a) - \langle b_0, a\rangle e, \\ [a, b] &= [a,b]_B + \langle (\xi - \xi^*)(a), b\rangle e, \end{cases}$$

et de la métrique qui étend $\langle\ ,\ \rangle_B$ telle que $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$ et $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ et $\mathrm{vect}\{e, \bar{e}\}^\perp = B$. Alors $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate appelée algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate *double extension* de $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ suivant (D, ξ, μ, b_0).

Nous allons maintenant énoncer notre premier résultat concernant les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré.

Théorème 0.1 *Une algèbre de Lie lorentzienne de centre dégénéré est plate si et seulement si elle est double extension d'une algèbre de Lie riemannienne plate suivant* $\mu = 0$, D, ξ *et* b_0 *avec* $(D, b_0) \neq (0, 0)$. *De plus, dans ce cas l'algèbre de Lie est unimodulaire et donc la métrique sur le groupe de Lie connexe associé est complète.*

En utilisant le théorème précédent, et en résolvant les équations reliant (D, ξ, b_0) dans une algèbre de Lie riemannienne plate de dimension ≤ 4, nous donnons la liste complète de toutes les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré de dimension ≤ 6. La résolution des équations reliant (D, ξ, b_0) est difficile en général.

Le deuxième théorème principale dans cette thèse concerne les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires.

Théorème 0.2 *Soit* $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *une algèbre de Lie lorentzienne plate non unimodulaire. Alors* $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *est une double extension d'une algèbre de Lie riemannienne plate suivant* (μ, D, ξ, b_0) *avec* $\mu \neq 0$.

La situation ici est plus rigide à cause du fait que $\mu \neq 0$ et on peut résoudre les équations reliant (μ, D, ξ, b_0) dans le cas où ξ est inversible ce qui résout le problème, dans ce cas, pour les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires et aussi les groupes de Lie lorentziens plats non complets. Nous déduisons que, dans ce cas, tous ces groupes sont 2-résolubles.

Nous avons aussi déterminé d'autres classes sans utiliser la méthode de double extension, comme les groupes de Lie lorentziens plats qui contiennent un champ de Killing invariant à gauche de type temps. Nous montrons que ces groupes de Lie sont exactement les groupes de Lie qui peuvent posséder une métrique riemannienne plate invariante à gauche. Par conséquent, ces groupes de Lie sont au plus 2-résolubles, unimodulaires et donc la métrique est complète.

Ce mémoire est partagé en quatre chapitres. Dans le chapitre 1, nous rappelons quelques notions de base de géométrie différentielle, en particulier les variétés affines et les groupes de Lie affines dont les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats constituent un cas particulier. Ce chapitre se termine par un rappel sur les espaces vectoriels lorentziens.

Le chapitre 2 est consacré aux groupes de Lie pseudo-riemanniens plats. Nous commençons ce chapitre par donner des résultats connus sur ces groupes de Lie. En particulier le théorème qui caractérise les métriques pseudo-riemanniennes plates invariantes à gauche complètes. Puis, nous traitons le cas riemannien et nous montrons une version plus précise du théorème de Milnor avec une démonstration différente. Dans ce chapitre également, on donne une description de la méthode de la double extension qui constitue un outil fondamental dans cette thèse. Et on termine ce chapitre par une première application de cette méthode pour les groupes de Lie de Heisenberg qui peuvent posséder une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche.

Dans le chapitre 3, nous caractérisons les groupes de Lie lorentziens plats : nilpotents, de centre dégénéré ou qui contiennent un champ de Killing invariant à gauche de type temps... Nous montrons en particulier que toutes ces classes sont unimodulaires et donc la métrique est géodésiquement complète. La preuve du théorème 0.1 est donné dans ce chapitre.

Enfin dans le chapitre 4, on traite les groupes de Lie lorentziens plats non unimodulaires. Dans un premier temps, nous montrons que ces groupes de Lie s'obtiennent par la méthode de double extension (Théorème 0.2). Puis nous résolvons les équations qui relient les "ingrédients" de cette méthode dans certaines conditions, ce qui va nous permettre de caractériser une classe importante des groupes de Lie lorentziens plats non unimodulaires.

Pour finir, il est important de noter que notre travail a permis de résoudre une grande partie du problème puisque la seule classe qui reste à déterminer c'est celle des algèbres de Lie lorentziennes plates unimodulaires à centre non dégénéré. Nous pouvons ramener cette classe au cas où le centre est trivial et nous pensons que les méthodes que nous avons utilisé peuvent être adaptées pour déterminer cette classe. Ceci constituera une suite naturelle de ce travail.

Notations

Toutes les structures qui apparaissent dans ce texte (variétés, champ de vecteurs, tenseurs,...) sont supposées de classe C^∞.

Au long de ce texte nous utilisons les notations suivantes :

M	variété lisse de dimension n.
$\mathfrak{X}(M)$	L'espace des champs de vecteurs sur M.
$C^\infty(M)$	L'algèbre des fonctions différentiables sur M.
$X(f)$	La dérivée de $f \in C^\infty(M)$ dans la direction du champ de vecteur X.
T_pM	L'espace tangent à M en p.
$(df)_p$	L'application linéaire tangente à f en p.
$(V, \langle\ ,\ \rangle)$	Espace vectoriel V, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$.
L^*	L'adjoint de $L \in End(V)$ relativement à $\langle\ ,\ \rangle$.
$\mathrm{so}(V, \langle\ ,\ \rangle)$	L'algèbre de Lie des endomorphismes antisymétriques de V relativement à $\langle\ ,\ \rangle$.
$\mathrm{tr}(L)$	La trace de $L \in End(V)$.
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$	L'idéal dérivé de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Toutes les variétés et les groupes de Lie dans ce texte sont supposés de dimension finie, et sur le corps des réels $\mathbb{R}$, et sauf mention du contraire ils sont supposés connexes. De même, tous les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils qu'on va utiliser dans cette thèse. En premier, nous commençons par un rappel de géométrie différentielle où on va montrer une caractérisation des variétés affines par les connexions linéaires. Puis, nous traitons le cas des groupes de Lie affines et leurs relations avec les algèbres symétriques à gauche. Nous revenons ensuite sur l'existence et l'unicité de la connexion de Levi-Civita dans une variété pseudo-riemannienne. Enfin, nous terminons ce chapitre par un rappel d'algèbre linéaire sur les espaces vectoriels lorentziens. Nous nous sommes inspirés des références suivants [28, 19, 33].

1.1 Variétés affines

1.1.1 Rappel de géométrie différentielle

Définition 1.1 *Une connexion linéaire sur une variété lisse M est une application $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ qu'on écrit $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$, vérifiant les propriétés :*

1. *$\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X :*

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \qquad f, g \in C^\infty(M);$$

2. *$\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y :*

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

3. ∇ vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \qquad f \in C^\infty(M);$$

$\nabla_X Y$ est appelé la dérivé covariante de Y dans la direction de X.

Exemple 1.1 Dans $\mathbb{R}^n$, il y a une connexion naturelle, qu'on notera ∇^0, définie par :

$$\nabla^0_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(Y_i)\partial_i$$

où X et $Y = \sum_{j=1}^n Y_j\partial_j$ sont deux champs de vecteurs quelconques sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2 La règle de Leibniz entraîne qu'une connexion est locale, et donc dans un système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, si $X = \sum_{i=1}^n X_i\partial_i$ et $Y = \sum_{j=1}^n Y_j\partial_j$, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{j=1}^{n}(X(Y_j)\partial_j + Y_j\nabla_X\partial_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} X(Y_j)\partial_j + \sum_{i,j=1}^{n} X_iY_j\nabla_{\partial_i}\partial_j.\end{aligned}$$

Ainsi ∇ est entièrement déterminée sur le domaine des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ par les *symboles de Christoffel* (Γ^k_{ij}) donnés par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k \ , \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Inversement, si $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées sur un ouvert U, la donné d'une famille de fonctions (Γ^k_{ij}) sur U permet de définir une connexion linéaire sur U.

Exemple 1.3 Dans $\mathbb{R}^n$, les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇^0 sont tous nuls.

Définition 1.2 *Un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{X}(M)$ est dit parallèle par rapport à ∇ si $\nabla_X Y = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$.*

Définition 1.3 *Soit n un entier $\geqslant 1$. Un tenseur de type $(n, 1)$ est une application S qui à chaque n-uple de vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in T_pM$ (où $p \in M$) fait correspondre un vecteur $S(u_1, \ldots, u_n) \in T_pM$ et vérifiant :*

1. *l'application* $S : T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow T_pM$ *est* n*-linéaire ;*
2. *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont des champs de vecteurs sur* M *alors* $S(X_1, \ldots, X_n)$ *est un champ de vecteur.*

Remarque 1.4 Soit S un tenseur de type $(n, 1)$. L'application
$S : \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ qui à un n-uple de champ de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ associe le champ de vecteur $S(X_1, \ldots, X_n)$ est $C^\infty(M)$-linéaire, c'est-à-dire,

$$S(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_n) = fS(X_1, \ldots, X_n)$$

pour tout $f \in C^\infty(M)$ et tout $i = 1, \ldots, n$.
Inversement, il est connu que toute application

$$S : \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

qui est $C^\infty(M)$-linéaire définit un unique tenseur de type $(n, 1)$. Ainsi il y a une correspondance biunivoque entre les tenseurs de type $(n, 1)$ et les applications

$$S : \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

qui sont $C^\infty(M)$-linéaires.

Lemme 1.1 *Soit* ∇ *une connexion linéaire sur une variété* M*. L'application*
$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ *définie par*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

est un tenseur de type (2,1). C'est le tenseur de torsion de (M, ∇)*.*

Preuve. En vertu de la remarque 1.4, il suffit de montrer que T est $C^\infty(M)$-linéaire. Soit $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X + Y(f)X + f[Y, X] \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

Puisque $T(X, Y) = -T(Y, X)$ on peut conclure. □

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T = 0$.

Lemme 1.2 *Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété M. L'application $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ définie par :*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ est un tenseur de type (3,1). C'est le tenseur de courbure de (M, ∇). On écrira $R(X, Y)Z$ au lieu de $R(X, Y, Z)$.

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$. On a

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_{[fX,Y]} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_{fX} Z \\ &= \nabla_{-Y(f)X + f[X,Y]} Z - f\nabla_X \nabla_Y Z + f\nabla_Y \nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Puisque $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$, on déduit que $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$.
D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_{[X,Y]} fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ + \nabla_Y \nabla_X fZ \\ &= [X, Y](f)Z + f\nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X (Y(f)Z + f\nabla_Y Z) + \nabla_Y (X(f)Z + f\nabla_X Z) \\ &= X(Y(f))Z - Y(X(f))Z + f\nabla_{[X,Y]} Z - X(Y(f))Z - Y(f)\nabla_X Z - X(f)\nabla_Y Z \\ &\quad - f\nabla_X \nabla_Y Z + Y(X(f))Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

□

La connexion ∇ est dite plate si $R = 0$.

Exemple 1.5 Pour la connexion naturelle ∇^0 de $\mathbb{R}^n$, puisque les symboles de Christoffel sont nuls alors ∇^0 est plate et sans torsion.

1.1.2 Variétés affines

Définition 1.4 *Une variété lisse M est dite affine si elle est muni d'un atlas maximal $\{(\phi_i, U_i)_{i \in \Gamma}\}$ dont les changements de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des restrictions d'applications affines de $\mathbb{R}^n$.*

En d'autre termes, pour tous $i, j \in \Gamma$, $\exists \sigma_{ij} \in GA(\mathbb{R}^n)$ tel que $\phi_i \circ \phi_j^{-1} = \sigma_{ij}/_{\phi_j(U_i \cap U_j)}$, avec

$$GA(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / A \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Exemple 1.6 1. $\mathbb{R}^n$ muni de l'atlas $(\mathbb{R}^n, Id)$ est une variété affine.

2. Soit S^1 le cercle

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}.$$

Soient $p_0 = (-1, 0)$ et $q_0 = (1, 0)$, $U = S^1 \setminus \{p_0\}$ et $V = S^1 \setminus \{q_0\}$. Pour tout point $p \in U$ (resp. $q \in V$) désignons par $h(p)$ (resp. $k(q)$) l'angle dans $]-\pi, \pi[$ formé par le rayon vecteur de ce point et l'axe positif (resp. négatif) des abscisses. Alors les cartes (U, h) et (V, k) forment un atlas Φ sur S^1. Le changement de cartes est donné par

$$(k \circ h^{-1})(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{si} \quad t \in]-\pi, 0[, \\ t - \pi & \text{si} \quad t \in]0, \pi[, \end{cases}$$

donc S^1 muni de l'atlas Φ est une variété affine.

Proposition 1.7 *Si M est une variété affine, alors M admet une connexion plate et sans torsion.*

Preuve. Soit M est une variété affine. Pour $m \in M$, soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une carte affine dans un ouvert U contenant m. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. On a

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \partial_{x_i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \partial_{x_j}.$$

Posons

$$(\nabla_X Y)(m) = \sum_{i,j=1}^{n} X_i(m) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(m) \partial_{x_j|m}.$$

Montrons d'abord que $(\nabla_X Y)(m)$ est bien définie. Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ une autre carte affine sur un autre ouvert V contenant m. Dans $U \cap V$, $y \circ x^{-1} = t$, où t est la restriction d'une application affine de $\mathbb{R}^n$, d'où

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b$$

où $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Notons $A^{-1} = (a^{ij})$. Dans la carte y, X s'écrit $X = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \partial_{y_i}$ avec $\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$. D'autre part, on a

$$\partial_{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \partial_{x_j} = \sum_{j=1}^n a^{ji} \partial_{x_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \tilde{X}_i \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial y_i} \partial_{y_j} &= \sum_{i,j,h,k,l=1}^n a_{ih} X_h a_{jk} \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} a^{lj} \partial_{x_l} \\
&= \sum_{i,j,h,k,l,p=1}^n a_{ih} X_h a_{jk} a^{pi} \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} a^{lj} \partial_{x_l} \\
&= \sum_{i,j,h,k,l,p=1}^n a_{ih} a^{pi} a_{jk} a^{lj} X_h \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} \partial_{x_l}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^n a^{pi} a_{ih} = \delta_{ph}$ et $\sum_{j=1}^n a^{lj} a_{jk} = \delta_{lk}$, on déduit que

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{X}_i \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial y_i} \partial_{y_j} = \sum_{h,k=1}^n X_h \frac{\partial Y_k}{\partial x_h} \partial_{x_k},$$

ce qui achève de montrer que ∇ est bien définie.

D'autre part, c'est facile de montrer que ∇ est une connexion linéaire sur M. Puisque $\nabla_{\partial x_i} \partial x_j = 0$ alors ∇ est plate et sans torsion. □

Afin de montrer le sens inverse de la proposition 1.7, nous aurons besoin des deux théorèmes suivants :

Théorème 1.8 (Spivak : A Comprehensive Introduction to D.G, V. 1 pp : 187)
Soit $U \times V$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ avec U contient 0 de $\mathbb{R}^m$.
Soit $F_i : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions C^∞ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Alors pour tout $y \in V$ il existe au plus une fonction $\alpha : W \longrightarrow V$ définie sur un ouvert qui contient 0 de $\mathbb{R}^m$ telle que $\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = F_j(x, \alpha(x))$ pour tout $x \in W$ et $\alpha(0) = y$.
Plus précisément, Deux telles fonctions α_1, α_2 définie sur W_1 et W_2 coïncident sur $W_1 \cap W_2$ qui contient 0. De plus, une telle fonction existe et elle est automatiquement C^∞ si et seulement si il existe un voisinage de $(0, y) \in U \times V$ telle que

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial \alpha^k} F_i^k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \alpha^k} F_j^k = 0. \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Théorème 1.1 (Frobenius) *Soit M une variété lisse de dimension n, et $X^1, \ldots, X^n$ une famille de champs de vecteurs linéairement indépendants sur un voisinage de $m \in M$ tels que $[X^i, X^j] = 0$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. Alors il existe une carte locale $(x_1, \ldots, x_n)$ en m telle que $\partial x_i = X^i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Commençons par montrer la proposition suivante :

Proposition 1.9 *Soit (M, ∇) une variété lisse muni d'une connexion plate et sans torsion. Alors pour tous $m \in M$ et $v \in T_m M$, il existe un unique champ de vecteurs X^v définie sur un ouvert $U \ni m$ tel que $\nabla X^v = 0$ et $X^v(m) = v$.*

Preuve. Le problème est locale, donc on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et $m = 0$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Posons

$$X^v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_{x_i} \quad \text{et} \quad \nabla_{\partial x_i} \partial_{x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}.$$

Le fait que ∇ est plate équivaut à $R(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\partial_{x_k} = 0$ pour tous $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui est équivalent à

$$\partial_j(\Gamma_{il}^h) - \partial_i(\Gamma_{jl}^h) = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{jl}^k \Gamma_{ik}^h - \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^h) \ , i, j, l, h = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

On a

$$\nabla X^v = 0 \quad \text{et} \quad X^v(m) = v \Leftrightarrow \nabla_{\partial x_j} X^v = 0, \ j = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad X^v(m) = v.$$

Alors

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = F_j(x, \alpha(x)) \ j = 1, \ldots, n$$

avec

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad F_j^k(x, \alpha) = -\sum_{l=1}^n \alpha_l \Gamma_{jl}^k(x) \quad (*).$$

Alors d'après le théorème 1.8, pour terminer la preuve, il suffit de vérifier que $F_1, \ldots, F_n$ données par (*) satisfont les conditions du théorème. En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j^h}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i^h}{\partial x_j} &= -\sum_{l=1}^n \alpha_l \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial x_j} \right), \\ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_j^h}{\partial \alpha^k} F_i^k - \frac{\partial F_i^h}{\partial \alpha^k} F_j^k \right) &= \sum_{k,l=1}^n \alpha_l \left(\Gamma_{jk}^h \Gamma_{il}^k - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^k \right). \end{aligned}$$

En utilisant (1.1), on peut donc conclure. □

Proposition 1.10 *Soit M une variété lisse. Si M admet une connexion linéaire plate et sans torsion alors M est une variété affine.*

Preuve. Soit M une variété lisse muni d'une connexion ∇ plate et sans torsion. Pour tout $m \in M$, soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $T_m M$. D'après la proposition précédente, il existe un ouvert $U \ni m$ et une famille de champs de vecteurs $(X^1, \ldots, X^n)$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\nabla X^i = 0 \quad \text{et} \quad X^i(m) = v_i.$$

Puisque ∇ est sans torsion, alors pour tous $i, j = 1, \ldots, n$

$$[X^i, X^j] = \nabla_{X^i} X^j - \nabla_{X^j} X^i = 0.$$

De plus, puisque $(X^1(m), \ldots, X^n(m))$ sont linéairement indépendants, alors on peut supposer que pour tout $x \in U$ $(X^1(x), \ldots, X^n(x))$ sont linéairement indépendants. Alors en appliquant le théorème 1.1, on peut construire une carte locale $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ en m telle que $\partial_{x_i} = X^i$, $i = 1, \ldots, n$. En variant m sur la variété M, on construit un atlas Φ sur M tel que pour toute carte $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ de Φ on a $\nabla \partial_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Montrons que l'atlas Φ est affine.
Soit $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ et $(V, (y_1, \ldots, y_n))$ deux cartes locales de Φ telles que $U \cap V \neq 0$. Sur $U \cap V$, on a pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\partial_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \partial_{y_j}.$$

Puisque $(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$, $(\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_n})$ sont parallèles par rapport à ∇ alors pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i} = \nabla_{\partial_{x_k}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \partial_{y_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_i} \partial_{y_j}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_i} = 0$ et donc il existe une matrice constante $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. La fonction $F = (y_1 - \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i, \ldots, y_n - \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i)$ a une différentielle partout nulle et donc elle est constante. Ceci achève de montrer que le changement de carte est la restriction d'une application affine de $\mathbb{R}^n$. □

En résumé on a montré le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Une variété lisse M est affine si et seulement si M admet une connexion plate et sans torsion.*

1.1.3 Groupes de Lie affines

Soient G un groupe de Lie. Pour tout $a \in \mathrm{G}$, on note $\mathrm{L}_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la translation à gauche par a. Pour tout champ de vecteurs X sur G, on définit le champ de vecteur X^a par

$$X^a(b) = T_{a^{-1}b}\mathrm{L}_a(X(a^{-1}b)).$$

On dit que X est invariant à gauche si $X^a = X$ pour tout $a \in \mathrm{G}$. L'espace des champs de vecteurs invariants à gauche de G est une algèbre de Lie qui s'identifie naturellement à $\mathfrak{g} = T_e\mathrm{G}$ et via cette identification $\mathfrak{g}$ hérite d'une structure d'algèbre de Lie. Pour tout $u \in \mathfrak{g}$, on notera u^ℓ le champ de vecteur invariant à gauche associé à u.

Définition 1.5 *Soit* G *un groupe de Lie. On dit qu'une connexion* ∇ *sur* G *est invariante à gauche si pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$ et pour tout $a \in \mathrm{G}$ on a*

$$\nabla_{X^a} Y^a = (\nabla_X Y)^a .$$

Le théorème 1.2 justifie la définition suivante :

Définition 1.6 *Un groupe de Lie* G *est dit affine s'il est muni d'une connexion invariante à gauche plate et sans torsion.*

Soit (G, ∇) un groupe de Lie affine et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si X et Y sont deux champs de vecteurs invariants à gauche de G alors $\nabla_X Y$ est aussi invariant à gauche. Ainsi ∇ induit un produit sur $\mathfrak{g}$ par

$$x.y = (\nabla_{x^\ell} y^\ell)(e).$$

Puisque ∇ est sans torsion alors pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$

$$x.y - y.x = [x, y] \tag{1.2}$$

La platitude de ∇ peut s'écrire, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$(x.y).z - x.(y.z) = (y.x).z - y.(x.z) \tag{1.3}$$

Ce qui équivaut à

$$ass(x, y, z) = ass(y, x, z) \tag{1.4}$$

avec $ass(x, y, z) = (x.y).z - x.(y.z)$.
Un produit "." qui vérifie (1.2) et (1.3) est dit *produit symétrique à gauche compatible* avec la structure de Lie.
Inversement, si $\mathfrak{g}$ est muni d'un produit "." symétrique à gauche et compatible avec la structure de Lie (dans le sens de l'équation (1.2)) alors la formule

$$\nabla_{x^\ell} y^\ell = (x.y)^\ell, \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

définie une connexion plate et sans torsion sur G. D'où on a :

Théorème 1.3 *Un groupe de Lie* G *est affine si et seulement si son algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *peut être muni d'un produit symétrique à gauche compatible avec sa structure de Lie.*

Une algèbre de Lie muni d'un produit symétrique à gauche compatible est dite affine.

Exemple 1.11

1. Tout groupe de Lie 2-nilpotent est affine. En effet, soit G un groupe de Lie 2-nilpotent, posons pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, $x.y = \frac{1}{2}[x, y]$, alors il est facile de vérifier que ce produit est symétrique à gauche et compatible avec la structure de Lie.

2. Rappelons qu'un groupe de Lie symplectique est un groupe de Lie G muni d'une forme symplectique Ω invariante à gauche. Posons $\omega = \Omega(e)$. Pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0.$$

Il est connu voir [6] que le produit définie par :

$$\omega(x.y, z) = -\omega(y, [x, z]) \text{ pour tous } x, y, z \in \mathfrak{g},$$

est symétrique à gauche et compatible. Ainsi tout groupe symplectique est affine.

3. Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui admet une dérivation inversible est affine. En effet, si D est une dérivation inversible de $\mathfrak{g}$, c-à-d une application linéaire inversible de $\mathfrak{g}$ telle que pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ on a

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] .$$

Posant $x.y = D^{-1}([x, y])$. On vérifie alors aisément que ce produit est symétrique à gauche et compatible avec la structure de Lie.

1.2 Variétés pseudo-riemanniennes

1.2.1 Définitions

Définition 1.7 *Une métrique pseudo-riemannienne μ sur une variété différentiable M est la donnée pour tout point $p \in M$, d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré μ_p sur T_pM qui satisfait les propriétés suivantes :*

- *Si X et Y sont deux champs de vecteurs différentiables sur un voisinage V dans M, alors la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longrightarrow & \mu_p(X_p, Y_p) \end{array}$$

  est différentiable sur V.
- *Les formes μ_p ont même signature pour tout $p \in M$.*

Le couple (M, μ) est dit variété pseudo-riemannienne.

Si μ_p est définie positive (resp. de signature $(+, \dots, +, -)$) pour tout $p \in M$, alors la métrique est dite riemannienne (resp. lorentzienne).

Définition 1.8 *Soient (M, μ) et (N, η) deux variétés pseudo-riemanniennes et $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme. On dit que f est une isométrie si pour tout $p \in M$ et tous $u, v \in T_pM$,*

$$\mu_p(u, v) = \eta_{f(p)}((df)_p(u), (df)_p(v)) .$$

Le résultat suivant est le résultat fondamental de la géométrie pseudo-riemannienne.

Théorème 1.4 *Dans une variété pseudo-riemannienne (M, μ) il existe une et une seule connexion ∇ sans torsion et qui préserve la métrique, c'est-à-dire, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X && (1.5) \\ X(\mu(Y, Z)) &= \mu(\nabla_X Y, Z) + \mu(Y, \nabla_X Z) && (1.6) \end{aligned}$$

∇ est appelée connexion de Levi-Civita de (M, μ), et elle est caractérisée par la formule de Koszul suivante :

$$\begin{aligned} 2\mu(\nabla_X Y, Z) &= X(\mu(Y, Z)) + Y(\mu(Z, X)) - Z(\mu(X, Y)) \\ &\quad -\mu(X, [Y, Z]) + \mu(Y, [Z, X]) + \mu(Z, [X, Y]). && (1.7) \end{aligned}$$

Preuve. (i) *Unicité.* Si ∇ et ∇' sont deux connexions qui vérifient (1.5) et (1.6), alors on montre facilement qu'elles vérifient (1.7). On en déduit alors que pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $2\mu(\nabla_X Y, Z) = 2\mu(\nabla'_X Y, Z)$. Comme μ est non dégénérée, on conclut que $\nabla = \nabla'$.
(ii) *Existence.* Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ fixés et posons, pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$F(X, Y, Z) = X(\mu(Y, Z)) + Y(\mu(Z, X)) - Z(\mu(X, Y)) - \mu(X, [Y, Z]) + \mu(Y, [Z, X]) + \mu(Z, [X, Y]).$$

Soit $f \in C^\infty(M)$, en utilisant la relation $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$ on montre que $F(X, Y, fZ) = fF(X, Y, Z)$. D'où l'application $Z \longrightarrow F(X, Y, Z)$ est $C^\infty(M)$-linéaire, donc c'est une 1-forme. Puisque l'espace des 1-formes dans une variété pseudo-riemannienne est isomorphe à l'espace des champs de vecteurs alors il existe un seul champ de vecteurs noté $\nabla_X Y$ tel que pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$ on a,

$$2\mu(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z).$$

D'où ∇ vérifie la formule de Koszul. On a

$$\begin{aligned} 2\mu(\nabla_X Y, Z) + 2\mu(\nabla_X Z, Y) &= F(X, Y, Z) + F(X, Z, Y) \\ &= 2X(\mu(Y, Z)), \end{aligned}$$

ce qui montre que ∇ vérifie (1.6). D'un autre côté on a,

$$\begin{aligned} 2\mu(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= F(X, Y, Z) - F(Y, X, Z) \\ &= 2\mu([X, Y], Z), \end{aligned}$$

d'où ∇ vérifie (1.5). Montrons maintenant que ∇ est une connexion linéaire sur M. Il est clair que ∇ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y. D'autre part, pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a,

$$\begin{aligned}
2\mu(\nabla_{fX}Y, Z) &= fX(\mu(Y,Z)) + Y(\mu(Z,fX)) - Z(\mu(fX,Y)) \\
&\quad +\mu([fX,Y]) - \mu([Y,Z],fx) + \mu([Z,fX],Y) \\
&= fX(\mu(Y,Z)) + Y(f)\mu(Z,X) + fY(\mu(Z,X)) - Z(f)\mu(X,Y) - fZ(\mu(X,Y)) \\
&\quad +\mu(-Y(f)X + f[X,Y],Z) - f\mu([Y,Z],X) + \mu(Z(f)X - f[X,Z],Y) \\
&= 2f\mu(\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

D'où ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X. De la même façon on montre que ∇ vérifie $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$. Ceci achève la preuve du théorème. □

Définition 1.9 *On dit qu'une variété pseudo-riemannienne (M,μ) est plate si sa connexion de Levi-Civita est de courbure nulle.*

1.2.2 Courbure sectionnelle

Soit (M,μ) une variété pseudo-riemannienne. Un sous-espace Π de dimension 2 de l'espace tangent T_pM est dit plan tangent de M en p. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ la valeur de μ en T_pM. Soit (u,v) une base de Π et $Q(u,v)$ le nombre $Q(u,v) = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2$. Il est clair que Π est non dégénéré (c-à-d $\langle\ ,\ \rangle_{/\Pi\times\Pi}$ est non dégénéré) si et seulement si $Q(u,v) \neq 0$. Notons d'abord que puisque R est un tenseur de type $(3,1)$, alors on peux parler sans ambiguïté de l'application linéaire $R_{uv} : T_pM \longrightarrow T_pM$ définie par $R_{uv}(w) = R(u,v,w)$ pour tous u,v,w dans T_pM.

Lemme 1.3 *Soit Π un plan tangent non dégénéré de M en p. Le nombre*

$$K(u,v) = \frac{\langle R_{uv}u, v\rangle}{Q(u,v)}$$

est indépendant de la base choisit de Π. $K(u,v)$ est appelée la courbure sectionnelle $K(\Pi)$ de Π.

Preuve. Deux bases quelconques (u,v) et (x,y) de Π sont reliées par les équations

$$\begin{aligned}
u &= ax + by \\
v &= cx + dy
\end{aligned}$$

avec $ad - bc \neq 0$. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \langle R_{uv}u, v\rangle &= (ad-bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle \\ Q(u,v) &= (ad-bc)^2 Q(x,y). \end{aligned}$$

D'où $K(u,v) = K(x,y) = K(\Pi)$. □

Proposition 1.12 *Si $K = 0$ en $p \in M$, alors $R = 0$ en $p \in M$.*

En d'autre termes, si $K(\Pi) = 0$ pour tout plan non dégénéré de T_pM, alors $R_{xy}z = 0$ pour tous x, y, z dans T_pM.

Preuve. La démonstration sera établi en trois étapes :

(i) Montrons d'abord que $\langle R_{uv}u, v\rangle = 0$ pour tous $u, v \in T_pM$. Si u, v sont linéairement dépendants alors $\langle R_{uv}u, v\rangle = 0$. Si u, v engendrent un plan non dégénéré alors puisque $K(u,v) = 0$ alors $\langle R_{uv}u, v\rangle = 0$. Supposons que u, v engendrent un plan dégénéré. Si $\langle u, u\rangle = 0$ alors soit $x \in T_pM$ tel que $\langle u, x\rangle \neq 0$. Si $\langle u, u\rangle \neq 0$ alors soit $x \in T_pM$ tel que $\langle u, u\rangle\langle x, x\rangle < 0$. Dans les deux cas on a $Q(u,x) < 0$. Prenons le vecteur $v + \delta x$ avec $\delta \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} Q(u, v+\delta x) &= \langle u, u\rangle\langle v+\delta x, v+\delta x\rangle - \langle u, v+\delta x\rangle^2 \\ &= 2\delta b + \delta^2 Q(u,x). \end{aligned}$$

Si $b = 0$ alors $Q(u, v+\delta x) \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors $Q(u, v+\delta x) = \delta b\left(2 + \delta\frac{Q(u,x)}{b}\right)$, donc on peut choisir δ suffisamment petit pour que $Q(u, v+\delta x) \neq 0$. En d'autres termes, on peut choisir δ suffisamment petit pour que les vecteurs $(u, v+\delta x)$ engendrent un plan non dégénéré. Or $\langle R_{uv}u, v\rangle$ est multilinéaire, il est continue sur T_pM^4. D'où $\langle R_{uv}u, v\rangle = 0$ pour tous $u, v \in T_pM$.

(ii) Montrons maintenant que $R_{uv}u = 0$ pour tous $u, v \in T_pM$. On a pour tout $x \in T_pM$

$$\langle R_{u,v+x}u, v+x\rangle = \langle R_{uv}u, v\rangle + \langle R_{uv}u, x\rangle + \langle R_{ux}u, v\rangle + \langle R_{ux}u, x\rangle = 0.$$

En appliquant (i) on a $\langle R_{uv}u, x\rangle + \langle R_{ux}u, v\rangle = 0$. Donc $\langle R_{uv}u, x\rangle = 0$ pour tout $x \in T_pM$, d'où $R_{uv}u = 0$.

(iii) Montrons finalement que $R_{uv}x = R_{vx}u$ pour tous $u, v, x \in T_pM$. On a

$$R_{u+x,v}(u+x) = R_{uv}u + R_{uv}x + R_{xv}u + R_{xv}x.$$

D'après (ii) on a $R_{uv}x = -R_{xv}u$ d'où $R_{uv}x = R_{vx}u$.
Maintenant, en utilisant la première formule de Bianchi ($R_{uv}x + R_{vx}u + R_{xu}v = 0$) et en utilisant (iii) on déduit que $R_{uv}x = 0$ pour tous $u, v, x \in T_pM$ d'où $R = 0$. □

Remarque 1.13 Une variété pseudo-riemannienne est plate si et seulement si sa courbure sectionnelle est identiquement nulle.

Définition 1.10 *La courbure de Ricci d'une variété pseudo-riemannienne (M, μ) est définie par*

$$Ric(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \longrightarrow R_{XZ}Y)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. La variété (M, μ) est dite Ricci-plate si $Ric(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.2.3 Groupes de Lie pseudo-riemanniens

Définition 1.11 *Soit G un groupe de Lie et μ une métrique pseudo-riemannienne sur G. On dit que μ est invariante à gauche si les multiplications à gauche*

$$\begin{array}{rccc} L_x : & G & \longrightarrow & G \\ & y & \longrightarrow & x.y \end{array}$$

sont des isométries pour tout $x \in G$. En d'autre terme, si $\mu_p(u, v) = \mu_{x.p}\left((dL_x)_p(u), (dL_x)_p(v)\right)$, pour tous $u, v \in T_pG$, et pour tous $x, p \in G$.

Proposition 1.14 *La donné d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie est équivalent à la donné d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré sur son algèbre de Lie.*

Preuve. Soit G un groupe de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'espace tangent à G en l'élément neutre e. Soit μ_e une forme bilinéaire symétrique non dégénéré sur $\mathfrak{g}$. Posons pour tout $p \in G$,

$$\mu_p(X_p, Y_p) = \mu_e\left((dL_{p^{-1}})_p(X_p), (dL_{p^{-1}})_p(Y_p)\right).$$

Alors μ est une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur G. □

Remarque 1.15
- De la même manière, on peut définir une métrique invariante à droite. Si la métrique est invariante à gauche est à droite alors on dit qu'elle est bi-invariante.

- Si μ est une métrique invariante à gauche et X et Y sont deux champs de vecteurs invariants à gauche, alors la fonction $\mu(X,Y)$ est constante.

Définition 1.12 *Un groupe de Lie pseudo-riemannien noté (G,μ) est un groupe de Lie G muni d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche μ. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni de la forme $\langle\ ,\ \rangle = \mu_e$ est dite algèbre de Lie pseudo-riemannienne et notée $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$.*

Soit (G,μ) un groupe de Lie pseudo-riemannien, et $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie pseudo-riemannienne. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (G,μ). Alors ∇ est invariante à gauche et définit sur $\mathfrak{g}$ un produit vérifiant, pour tous $x,y,z\in\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} x.y - y.x &= [x,y] & (1.8)\\ \langle x.y, z\rangle + \langle y, x.z\rangle &= 0. & (1.9)\end{aligned}$$

On l'appellera **produit de Levi-Civita** et il est caractérisé par la formule de Koszul suivante :

$$\langle x.y,z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle [x,y],z\rangle - \langle [y,z],x\rangle + \langle [z,x],y\rangle\right). \qquad (1.10)$$

Notons L_x et R_x les endomorphismes de $\mathfrak{g}$ définies par $\mathrm{L}_x(y) = x.y$ et $\mathrm{R}_x(y) = y.x$, pour tous $x,y\in\mathfrak{g}$. Alors l'équation (1.8) est équivalente à

$$\mathrm{L}_x - \mathrm{R}_x = \mathrm{ad}_x,$$

et l'équation (1.9) est équivalente au fait que $\mathrm{L}_x \in \mathrm{so}(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$.
Notons $\mathfrak{g}.\mathfrak{g}$ l'idéal bilatère de $(\mathfrak{g},.)$ engendré par les produits $x.y$ où $x,y\in\mathfrak{g}$. On a d'après (1.8), $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}.\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}.\mathfrak{g}$ est aussi un idéal de Lie de $\mathfrak{g}$. D'autre part on peut montrer facilement que

$$(\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^\perp = \{u\in\mathfrak{g}/\mathrm{R}_u = 0\} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp = \{u\in\mathfrak{g}/\mathrm{R}_u = \mathrm{R}_u^*\}.$$

1.3 Groupes de Lie unimodulaires

La classe des groupes de Lie unimodulaires contiennent plusieurs classes de groupes de Lie. Par exemple, les groupes de Lie semi simples, nilpotents, compacts... sont unimodulaires. Dans le chapitre suivant, on va montrer qu'une métrique pseudo-riemannienne

plate invariante à gauche sur un groupe de Lie G est géodésiquement complète si et seulement si G est unimodulaire. Le but de ce paragraphe est de donner une caractérisation des groupes de Lie unimodulaires en terme de leurs algèbres de Lie.
Soit G un groupe de Lie. On dit que G est unimodulaire si sa mesure de Haar [1] (qui est invariante à gauche) est aussi invariante à droite.
Rappelons que tout élément $\sigma \in \mathrm{G}$ détermine un automorphisme

$$y \longrightarrow \sigma y \sigma^{-1}$$

du groupe de Lie G. L'automorphisme induit au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est noté $\mathrm{Ad}(\sigma)$. Il est démontré dans [19] [pp. 366] par exemple, qu'un groupe de Lie G est unimodulaire si et seulement si $\det(\mathrm{Ad}(\sigma)) = \pm 1$ pour tout $\sigma \in \mathrm{G}$.
En terme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.16 *Un groupe de Lie connexe* G *est unimodulaire si et seulement si* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$.

Preuve. Soit l'application $\exp : \ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{G}$. Les applications Ad et ad sont reliées par la formule

$$\mathrm{Ad}(\exp(x)) = e^{\mathrm{ad}_x}$$

pour tout x dans $\mathfrak{g}$ (voire par exemple [19] [pp. 118]), avec

$$e^f = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n}{n!}$$

pour tout $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Si $\det(\mathrm{Ad}(\sigma)) = \pm 1$ pour tout $\sigma \in \mathrm{G}$, alors

$$\det(\mathrm{Ad}(\exp(x))) = \det(e^{\mathrm{ad}_x}) = e^{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x)} = 1,$$

d'où $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.
Inversement, si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, alors $\det(\mathrm{Ad}(\sigma)) = 1$ pour tout σ dans l'image de $\mathfrak{g}$ par l'application exp. Or l'application exp est un difféomorphisme locale d'un voisinage de 0 de $\mathfrak{g}$ dans un voisinage $\mathcal{V}(e)$ de l'élément neutre de G, alors on aura $\det(\mathrm{Ad}(\sigma)) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{V}(e)$. Puisque G est connexe alors il est engendré par n'importe voisinage de l'élément neutre, d'où $\det(\mathrm{Ad}(\sigma)) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathrm{G}$, ce qui entraîne que G est unimodulaire. $\square$
Ceci justifie la définition suivante :

1. Voire par exemple [14]

Définitions 1.17 *On dit qu'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est unimodulaire si* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$.

1.4 Rappel d'algèbre linéaire

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\langle\ ,\ \rangle$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V de signature (p, q). Le couple $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ est dit *espace vectoriel pseudo-euclidien.* Si la signature de $\langle\ ,\ \rangle$ est $(0, n)$ (resp. $(1, n-1)$) l'espace vectoriel est dit *euclidien* (resp. *lorentzien*). Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques résultats sur les espaces vectoriels lorentziens.
Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel lorentzien et x un vecteur non nul de V.

- On dit que x est de **type espace** si $\langle x, x\rangle > 0$.
- On dit que x est de **type temps** si $\langle x, x\rangle < 0$.
- On dit que x est **isotrope** ou de **type lumière** si $\langle x, x\rangle = 0$.

De même pour un sous-espace vectoriel V_0 de V, V_0 est dit de **type espace** (resp. **type temps, dégénéré**) si la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à V_0 est définie positive (resp. lorentzienne, dégénéré). Dans les deux premiers cas on dit que V_0 est non dégénéré.

Proposition 1.18 *Soit* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace vectoriel pseudo-euclidien et* V_0 *un sous-espace de* V*. Alors* V_0 *est non dégénéré si est seulement si* $V = V_0 \oplus V_0^\perp$.

Preuve. On a $\dim(V_0 + V_0^\perp) = \dim V_0 + \dim V_0^\perp - \dim(V_0 \cap V_0^\perp)$. Or la forme $\langle\ ,\ \rangle$ est non dégénéré, donc $\dim V_0 + \dim V_0^\perp = \dim V$, d'où,

$$\dim(V_0 + V_0^\perp) = \dim V \Leftrightarrow V_0 \cap V_0^\perp = \{0\}.$$

Ce qui entraîne,

$$V_0 \oplus V_0^\perp = V \Leftrightarrow V_0 \text{ est non dégénéré.}$$

□

Proposition 1.19 *Soit* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel pseudo-euclidien où la signature de* $\langle\ ,\ \rangle$ *est* (p, q)*. Soit* F *un sous-espace totalement isotrope de* V *(i.e* $F \subset F^\perp$*). Alors* $\dim F \leq \inf(p, q)$.

Preuve. Il suffit de montrer que tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux (pour la relation d'inclusion) ont même dimension, et égale à $\inf(p,q)$. Puisque la signature de $\langle\ ,\ \rangle$ est (p,q) alors il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de V dans laquelle la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ a la forme

$$\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Soit $k=\inf(p,q)$, et posons $F=\mathrm{vect}\{e_1+e_{p+1},\dots,e_k+e_{p+k}\}$.
Pour tout i, $1\le i\le k$, $\langle e_i+e_{p+i},e_i+e_{p+i}\rangle=-1+1=0$. De plus, les vecteurs e_i étant deux à deux orthogonaux, on en déduit que F est totalement isotrope.
Soit G un sous-espace totalement isotrope qui vérifie $F\subset G$. Soit $x\in G$, et écrivons $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On a,

$$\langle x,x\rangle = 0 = -\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2+\sum_{i=p+1}^{n}\lambda_i^2. \tag{1.11}$$

On a pour tout i, $1\le i\le k$,

$$\begin{aligned}\langle x,e_i+e_{p+i}\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle x+e_i+e_{p+i},x+e_i+e_{p+i}\rangle-\langle x,x\rangle-\langle e_i+e_{p+i},e_i+e_{p+i}\rangle\right)\\ &= 0\\ &= -\lambda_i+\lambda_{p+i}.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne $\lambda_i=\lambda_{p+i}$ pour $1\le i\le k$. On a donc

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(e_i+e_{p+i})\in F,$$

et ceci pour tout sous-espace totalement isotrope G contenant F. Le sous-espace F est donc maximale. Montrons que tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont même dimension. En effet, soient F_1 et F_2 deux sous-espaces totalement isotropes maximaux. On pose $F'=F_1\cap F_2$. Notons S_1 un supplémentaire de F' dans F_1 et S_2 un supplémentaire de F' dans F_2. D'où $S_1\oplus F'=F_1$ et $S_2\oplus F'=F_2$. Soit $x\in S_1\cap S_2^\perp$. Comme $F_2=F'\oplus S_2$ alors $F_2^\perp=F'^\perp\cap S_2^\perp$, et puisque $x\in S_1\subset F_1\subset F_1^\perp\subset F'^\perp$ alors $x\in F'^\perp$, d'où $x\in F_2^\perp$.
On a x est isotrope (car $x\in F_1$). Considérons le sous-espace vectoriel $G'=F_2+\mathbb{R}x$. Soit $z=y+\alpha x\in G'$ (avec $y\in F_2$, $\alpha\in\mathbb{R}$), on a,

$$\langle z,z\rangle=\langle y,y\rangle+\alpha^2\langle x,x\rangle+2\alpha\langle x,y\rangle.$$

Comme $y \in F_2$ alors $\langle y, y\rangle = 0$. Or $x \in F_2^\perp$ d'où $\langle x, y\rangle = 0$ ce qui implique que $\langle z, z\rangle = 0$ pour tout $z \in G'$. Donc G' est un sous-espace totalement isotrope. Comme $F_2 \subset G'$ et F_2 est maximale alors $F_2 = G'$ d'où $x \in F_2$. Or $x \in S_1 \subset F_1$ alors $x \in F'$. Donc $x \in S_1 \cap F' = \{0\}$, ce qui entraîne $x = 0$. On a donc $S_1 \cap S_2^\perp = \{0\}$, c'est à dire que S_1 et $S_2^\perp$ sont en somme directe, d'où $\dim S_1 + \dim S_2^\perp \leq n$ ce qui implique que $\dim S_1 + n - \dim S_2 \leq n$ d'où $\dim S_1 \leq \dim S_2$. Par symétrie, on a également $\dim S_2 \leq \dim S_1$ d'où $\dim S_1 = \dim S_2$. Finalement, on a,

$$\dim F_1 = \dim(F' \oplus S_1) = \dim F' + \dim S_1 = \dim F' \oplus \dim S_2 = \dim(F' \oplus S_2) = \dim F_2.$$

□

Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel lorentzien et V_0 un sous-espace vectoriel de dimension ≥ 2. La proposition suivante caractérise les sous-espaces de type temps de V.

Proposition 1.20 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V_0 est de type temps.*
2. *V_0 contient deux vecteurs isotropes linéairement indépendants.*
3. *V_0 contient un vecteur de type temps.*

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de V_0 telle que $\langle e_1, e_1\rangle = -1$ et $(e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale. Alors $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont deux vecteurs isotropes linéairement indépendants.
2. $\Rightarrow$ 3. : D'après la proposition 1.19, si u, v sont deux vecteurs isotropes linéairement indépendants alors $\langle u, v\rangle \neq 0$. Donc un des vecteurs $u + v$ ou $u - v$ est de type temps.
3. $\Rightarrow$ 1. : Si z est un vecteur de type temps de V_0, alors $V_0^\perp \subset (\mathbb{R}z)^\perp$. Or $(\mathbb{R}z)^\perp$ est de type espace alors c'est de même pour $V_0^\perp$ donc $V_0 = (V_0^\perp)^\perp$ est de type temps. □
Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel lorentzien et $C(V) = \{u \in V \setminus \{0\} / \langle u, u\rangle = 0\}$ le cône des vecteurs isotropes de V. La proposition suivante caractérise les sous-espaces dégénérés de V.

Proposition 1.21 *Pour un sous-espace V_0 d'un espace vectoriel lorentzien, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V_0 est dégénéré.*
2. *V_0 contient un vecteur isotrope et ne contient aucun vecteur de type temps.*

3. $V_0 \cap C(V) = L \setminus \{0\}$ avec L est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. : Puisque V_0 est dégénéré, alors il contient un vecteur isotrope et d'après la proposition précédente, V_0 ne contient pas un vecteur de type temps.
2. $\Rightarrow$ 3. : Si V_0 contient un vecteur isotrope alors $V_0 \cap C(V)$ est non vide. Si le sous espace engendré par $(V_0 \cap C(V))$ est de dimension 2, alors d'après toujours la proposition précédente, V_0 contiendra un vecteur de type temps.
3. $\Rightarrow$ 1. : V_0 ne peut être de type espace. D'après la proposition précédente V_0 ne peut être de type temps. D'où V_0 est dégénéré. $\square$

Chapitre 2

Généralités sur les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats

Le but de ce chapitre est de donner des résultats anciens ainsi que d'autres plus récents sur les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats. On rappelle qu'un groupe de Lie pseudo-riemannien plat est un groupe de Lie muni d'une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche. Le cas riemannien a été résolu par Milnor dans [25](Théorème 1.5). Nous donnerons une version plus précise de ce résultat avec une nouvelle démonstration. A. Aubert et A. Medina dans [3] ont utilisé la méthode de double extension pour caractériser les groupes de Lie lorentziens plats nilpotents. Dans la section 4 de ce chapitre, nous donnerons une description de cette méthode, tandis que dans la section 5 on donnera une première application de cette méthode aux groupes de Lie de Heisenberg.

2.1 Définitions et propriétés

Définitions 2.1 *Un groupe de Lie pseudo-riemannien plat est un groupe de Lie muni d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche de courbure nulle*

Soit G un groupe de Lie et μ une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche sur G. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\langle\ ,\ \rangle$ la valeur de μ sur $\mathfrak{g}$. Pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, notons $x.y$ le produit de Levi-Civita de μ. Rappelons que ce produit vérifie les équations (1.8) et (1.9). Ces deux équations sont équivalentes à la formule de Koszul suivante :

$$\langle x.y, z\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [x,y], z\rangle - \langle [y,z], x\rangle + \langle [z,x], y\rangle\} \quad \text{pour tous } x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

Inversement, étant donnée une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$, on définit le produit de Levi-Civita de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \langle\ ,\ \rangle)$ par la relation (2.1). Si ce produit est symétrique à gauche alors on pourra étendre $\langle\ ,\ \rangle$ à une métrique μ invariante à gauche plate sur G. L'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ est dite *algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate.*

Terminologie :

- Si $\langle\ ,\ \rangle$ est de signature $(0, n)$ avec $\dim \mathfrak{g} = n$, alors le groupe de Lie est dit *riemannien plat*, et l'algèbre de Lie est dite *riemannienne plate.*
- Si $\langle\ ,\ \rangle$ est de signature $(1, n-1)$, alors le groupe de Lie est dit *lorentzien plat*, et l'algèbre de Lie est dite *lorentzienne plate.*

Soit (G, μ) un groupe de Lie pseudo-riemannien, et $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie. Pour tous u, v dans $\mathfrak{g}$, notons L_u et R_u les endomorphismes de $\mathfrak{g}$ définies par $\mathrm{L}_u(v) = u.v$ et $\mathrm{R}_u(v) = v.u$. Alors L_u est antisymétrique et $\mathrm{L}_u - \mathrm{R}_u = \mathrm{ad}_u$. Posons

$$S(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^* = 0\}.$$

Il est facile de voir que $S(\mathfrak{g})$ s'identifie à la sous-algèbre des champs de Killing invariants à gauche de (G, μ).

D'autre part, on a

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{R}_u = \mathrm{R}_u^*\} \quad \text{et} \quad (\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^\perp = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{R}_u = 0\}.$$

Soit $N(\mathfrak{g})$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ définie par $N(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{L}_u = 0\}$, et $\mathbf{h}$ le vecteur modulaire de $\mathfrak{g}$ définie par $\langle \mathbf{h}, u\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u)$ pour tout $u \in \mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est unimodulaire si et seulement si $\mathbf{h} = 0$. La proposition suivante est apparu pour la première fois dans [1].

Proposition 2.2 *Soit* $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Alors*

1. *Pour tout* $u \in S(\mathfrak{g})$, $\mathrm{R}_u^2 = 0$ *et* $[\mathrm{R}_u, \mathrm{L}_u] = 0$.
2. *Pour tout* $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, R_u *est nilpotent et* $[\mathrm{R}_u, \mathrm{L}_u] = \mathrm{R}_u^2$.
3. *Le vecteur modulaire* $\mathbf{h}$ *vérifie* $\mathbf{h} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$. *En particulier, si* $\mathfrak{g}$ *est non unimodulaire alors* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est dégénéré.*

Preuve. D'après (2.1), on a pour tout $u \in S(\mathfrak{g}) \cup [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ et pour tout $v \in \mathfrak{g}$,

$$\langle u.u, v\rangle = \langle [v, u], u\rangle = 0,$$

d'où $u.u = 0$. Puisque le produit est symétrique à gauche, alors on a pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{R}_{u.v} - R_v \circ \mathrm{R}_u = [\mathrm{L}_u, \mathrm{R}_v].$$

Donc pour tout $u \in S(\mathfrak{g}) \cup [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ on a,

$$[\mathrm{R}_u, \mathrm{L}_u] = \mathrm{R}_u^2. \tag{2.2}$$

Si $u \in S(\mathfrak{g})$ alors R_u est antisymétrique, et comme L_u est toujours antisymétrique, alors $[\mathrm{R}_u, \mathrm{L}_u]$ est antisymétrique. Mais R_u^2 est symétrique d'où $\mathrm{R}_u^2 = 0$ pour tout $u \in S(\mathfrak{g})$.
D'autre part, si $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, en utilisant la relation (2.2) on démontre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[\mathrm{R}_u^k, \mathrm{L}_u] = k\mathrm{R}_u^{k+1}.$$

Donc $\mathrm{tr}(\mathrm{R}_u^k) = 0$ pour tout $k \geq 2$, ce qui implique que R_u est nilpotent.
Pour la troisième assertion, on a $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[u,v]}) = 0$ pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$, donc $\mathbf{h} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$. D'autre part, pour tout $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, R_u est nilpotent, d'où

$$\langle \mathbf{h}, u \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{tr}(\mathrm{R}_u) = 0,$$

ce qui implique que $\mathbf{h} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. □

Proposition 2.3 *Un groupe de Lie pseudo-riemannien plat (G, μ) est géodésiquement complet si et seulement si le groupe de Lie G est unimodulaire.*

Preuve. Soit $x \in \mathfrak{g}$, puisque L_x est antisymétrique alors $\mathrm{tr}(\mathrm{L}_x) = 0$. Or $\mathrm{L}_x - \mathrm{R}_x = \mathrm{ad}_x$ d'où $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = -\mathrm{tr}(\mathrm{R}_x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$.
D'autre part, il a été démontré dans [32], que G est géodésiquement complet si et seulement si R_x est nilpotent pour tout x dans $\mathfrak{g}$. J. Helmsteter a montré dans [20] que les R_x sont nilpotents si et seulement si $\mathrm{tr}(\mathrm{R}_x) = 0$. D'où (G, μ) est géodésiquement complet si et seulement si $\mathrm{tr}(\mathrm{R}_x) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$. □

2.2 Groupes de Lie riemanniens plats

J. Milnor, dans [25] théorème 1.5, a donné une caractérisation des groupes de Lie qui peuvent posséder des métriques riemanniennes plates invariantes à gauche. En particulier, ces groupes de Lie sont 2-résolubles et unimodulaires. Dans cette section on donnera la démonstration du théorème de Milnor comme elle a été donné dans [25]. Ensuite, on énoncera et on démontrera une autre version plus précise que nous avons donné dans [1]. Notons que cette version est apparue premièrement dans [4].

Théorème 2.1 (Milnor (1976)) *Un groupe de Lie admet une métrique riemannienne plate invariante à gauche si et seulement si son algèbre de Lie se décompose en une somme orthogonale* $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$*, où* $\mathfrak{u}$ *est un idéal abélien,* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre abélienne et* ad_b *est antisymétrique pour tout* $b \in \mathfrak{b}$*.*

Preuve. Soit G un groupe de Lie simplement connexe qui admet une métrique riemannienne plate invariante à gauche. Si on regarde G comme une variété riemannienne complète, alors G est isométrique à l'espace euclidien. Donc tout sous groupe compact de G est trivial.
La correspondance $\mathrm{L} : x \longrightarrow \mathrm{L}_x$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes antisymétriques $\mathrm{so}(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Donc son noyau $\mathfrak{u} = \ker \mathrm{L}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}^{\perp}$. Pour tout $b \in \mathfrak{b}$, ad_b laisse $\mathfrak{u}$ invariant, de même pour son orthogonal $\mathfrak{b}$. D'où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Puisque la restriction de L à $\mathfrak{b}$ est injective alors $\mathfrak{b}$ est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{o}(n)$. Or $\mathfrak{o}(n)$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie compact $O(n)$, et puisque tout groupe de Lie compact peut être muni d'une métrique bi-invariante [12] [pp. 176], alors $\mathfrak{o}(n)$ peut être muni d'une métrique $\langle\ ,\ \rangle'$ telle que pour tous $x, y, z \in \mathfrak{o}(n)$,

$$\langle [x, y], z\rangle' + \langle y, [x, z]\rangle' = 0. \tag{2.3}$$

D'où la restriction de $\langle\ ,\ \rangle'$ à $\mathfrak{b}$ vérifie (2.3). on conclut donc que si $\mathfrak{i}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$ alors son $\langle\ ,\ \rangle'$-orthogonal est aussi un idéal de $\mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{b}$ se décompose en une somme directe d'idéaux simples $\mathfrak{b}_i$. Si l'un des $\mathfrak{b}_i$ n'est pas commutatif alors le sous groupe de Lie simple correspondant B_i serait compact. Donc G contiendrait un sous groupe compact non trivial, ce qui est impossible. D'où chaque $\mathfrak{b}_i$ est commutatif ce qui implique que $\mathfrak{b}$ est abélienne. D'où, pour tout $b \in \mathfrak{b}$, l'endomorphisme ad_b restreint à $\mathfrak{b}$ est nulle, et restreint à $\mathfrak{u}$ coïncide avec l'endomorphisme antisymétrique L_b.
Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, le produit de Levi-Civita sur $\mathfrak{g}$ est donné par, pour $u \in \mathfrak{u}$, et $b \in \mathfrak{b}$,

$$\mathrm{L}_u = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_b = \mathrm{ad}_b.$$

Une vérification directe montre que ce produit est symétrique à gauche , ce qui achève la démonstration. □

Le théorème suivant est une autre formulation plus précise du théorème de Milnor.

Théorème 2.2 *Un groupe de Lie admet une métrique riemannienne plate invariante à gauche si et seulement si $S(\mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ sont abéliens et $S(\mathfrak{g})^{\perp} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*
De plus dans ce cas $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est de dimension paire, et le produit de Levi-Civita est donné par

$$\mathrm{L}_u = \begin{cases} \mathrm{ad}_u & si \quad u \in S(\mathfrak{g}) \\ 0 & si \quad u \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve. Soit (G,μ) un groupe de Lie riemannien plat et $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie riemannienne plate. Posons,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}\ ,\ \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\ ,\ \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}\ \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}].$$

D'après la proposition 2.2, pour tout $u \in S(\mathfrak{g})$, $\mathrm{R}_u^2 = 0$. Or R_u est antisymétrique et la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive, alors $\mathrm{R}_u = 0$.
De même, pour tout $u \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp}$, R_u est nilpotent, or R_u est symétrique donc $\mathrm{R}_u = 0$. On conclut donc que $S(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g}/\mathrm{R}_u = 0\} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp}$. D'où $S(\mathfrak{g})$ est abélienne.
D'autre part, on a $(\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^{\perp} = \{u \in \mathfrak{g}/\mathrm{R}_u = 0\}$, d'où $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}.\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g}^{(1)}$ est un idéal bilatère pour le produit de Levi-Civita, ce qui implique que $\mathfrak{g}^{(1)}$ muni de la restriction de la métrique est une algèbre de Lie riemannienne plate. D'où par récurrence $\mathfrak{g}^{(k)}$ est une algèbre de Lie riemannienne plate pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\dim \mathfrak{g} < +\infty$, la suite $(\mathfrak{g}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et une algèbre symétrique à gauche ne peut jamais être égale à son algèbre dérivé (voir [20]), alors $\mathfrak{g}$ est nécessairement résoluble. Par suite $\mathfrak{g}^{(1)}$ est nilpotent.
Si $\mathfrak{g}^{(1)}$ est non abélien, alors la décomposition

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(1)} &= S(\mathfrak{g}^{(1)}) \oplus S(\mathfrak{g}^{(1)})^{\perp} \\ &= S(\mathfrak{g}^{(1)}) \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \end{aligned}$$

est non triviale. Mais $Z(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset S(\mathfrak{g}^{(1)})$ et $Z(\mathfrak{g}^{(1)}) \cap \mathfrak{g}^{(2)} \neq \{0\}$ ce qui est impossible. D'où $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est abélien.
Avec ces conditions, il est facile de vérifier que le produit de Levi-Civita est donné par

l'équation (2.4).
Inversement, si $S(\mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ sont abéliens, et $S(\mathfrak{g})^{\perp}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ alors le produit de Levi-Civita est donné par (2.4), ce qui montre que (G,μ) est un groupe de Lie riemannien plat.
Si (G,μ) est riemannien plat, alors

$$\mathfrak{g}=S(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}].$$

Si $S(\mathfrak{g})=\{0\}$, alors $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}=\{0\}$ et donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est de dimension paire.
Si $S(\mathfrak{g})\neq\{0\}$. Soit $\{s_1,\dots,s_p\}$ une base de $S(\mathfrak{g})$. La restriction de ad_{s_1} à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est un endomorphisme antisymétrique donc son noyau K_1 est de codimension paire dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. D'autre part, ad_{s_1} commute avec ad_{s_2} donc K_1 est stable par ad_{s_2}. En utilisant le même argument précédent on déduit que $K_2=K_1\cap\ker\mathrm{ad}_{s_2}$ est de codimension paire dans K_1, donc K_2 est de codimension paire dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. D'où par récurrence

$$K_p=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap(\bigcap_{i=1}^{p}\ker\mathrm{ad}_{s_i})$$

est de codimension paire dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Or $K_p\subset Z(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{g})\subset S(\mathfrak{g})$ donc $K_p=\{0\}$ ce qui montre que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est de dimension paire. □
Du théorème précédent, on déduit les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 *Un groupe de Lie riemannien plat est unimodulaire et 2-résoluble.*

Corollaire 2.2 *Un groupe de Lie nilpotent non abélien n'admet pas de métrique riemannienne plate invariante à gauche.*

2.3 Métriques pseudo-riemanniennes plates invariantes à gauche sur l'exemple spécial de Milnor

Dans [25], J. Milnor a étudié la courbure sectionnelle d'une métrique riemannienne invariante à gauche sur une classe de groupes de Lie qu'il a appelé "Exemple spécial".
On dira qu'un groupe de Lie non commutatif G appartient à la classe $\mathcal{C}$, si pour tous x,y dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le crochet $[x,y]$ est combinaison linéaire de x et y.
Un élément de $\mathcal{C}$ est caractérisé par la propriété suivante :

Proposition 2.4 *Un groupe de Lie* G *est un élément de* $\mathcal{C}$ *si et seulement si son algèbre de Lie contient un idéal abélien* $\mathfrak{u}$ *de codimension 1 et un élément* $b \notin \mathfrak{u}$ *tel que* $[b,x] = x$ *pour tout* $x \in \mathfrak{u}$.

Preuve. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $\mathrm{G} \in \mathcal{C}$ alors pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ le crochet $[x,y]$ est combinaison linéaire de x et y.
Fixons x, l'application ad_x induit une application linéaire $\widetilde{\mathrm{ad}}_x$ de l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathbb{R}x$ dans lui même qui vérifie $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{y}) = \alpha\widetilde{y}$. La constante α ne dépend que de x. En effet,

- Si $\widetilde{z} = k\widetilde{y}$ alors $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{z}) = \widetilde{\mathrm{ad}}_x(k\widetilde{y}) = \alpha\widetilde{z}$.
- Si $\widetilde{y}$ et $\widetilde{z}$ sont linéairement indépendants alors posons $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{y}) = \alpha\widetilde{y}$ et $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{z}) = \beta\widetilde{z}$ et $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{y} - \widetilde{z}) = \gamma(\widetilde{y} - \widetilde{z})$. Or $\widetilde{\mathrm{ad}}_x(\widetilde{y} - \widetilde{z}) = \alpha\widetilde{y} - \beta\widetilde{z}$ alors $(\gamma - \alpha)\widetilde{y} + (\beta - \gamma)\widetilde{z} = 0$ d'où $\alpha = \beta = \gamma$.

Donc α est une constante qui ne dépend que de x. Notons cette constante par $l(x)$. on a

$$[x,y] \equiv l(x)y \mod \mathbb{R}x.$$

De cette dernière équation on constate que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = (n-1)l(x)$ où $n = \dim \mathfrak{g}$, ce qui montre que l est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$.
En interchangeant les rôles de x et y, on peut calculer aussi $[x,y]$ modulo $\mathbb{R}y$. Si x et y sont linéairement indépendant alors on a,

$$[x,y] = l(x)y - l(y)x. \tag{2.5}$$

La formule (2.5) est aussi vraie si x et y sont linéairement dépendants.
Puisque $\mathfrak{g}$ est non abélien alors $l \neq 0$. Soit $\mathfrak{u} = \ker l$ alors d'après (2.5), $\mathfrak{u}$ est un idéal abélien de codimension 1. Soit $b_0 \notin \mathfrak{u}$ alors pour tout $x \in \mathfrak{u}$, $[b_0, x] = l(b_0)x$ avec $l(b_0) \neq 0$. Posons $b = \frac{b_0}{l(b_0)}$ alors pour tout $x \in \mathfrak{u}$, $[b,x] = x$.
Inversement, si le groupe de Lie G vérifie cette propriété alors évidement $G \in \mathcal{C}$. $\square$

Exemple 2.5 L'exemple le plus simple d'un groupe de Lie qui appartient à $\mathcal{C}$ est le groupe de Lie définie par

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; a > 0 \; , \; b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 2.3 *Soit* $\mathrm{G} \in \mathcal{C}$. *Alors toute métrique riemannienne invariante à gauche sur* G *a une courbure sectionnelle constante strictement négative.*

Preuve. Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{C}$ et μ une métrique riemannienne invariante à gauche sur G et $\langle\ ,\ \rangle$ sa valeur sur $\mathfrak{g}$.
En choisit un vecteur unitaire b orthogonal à $\mathfrak{u}$ tel que $[b, x] = \lambda x$ pour tout $x \in \mathfrak{u}$. En utilisant (2.1), on a $\mathrm{L}_b = 0$, et pour tout $u \in \mathfrak{u}$ et $z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{L}_u(z) = \lambda(b\langle u, z\rangle - u\langle b, z\rangle).$$

Le tenseur de courbure est donné donc par,

$$R_{xy}(z) = \lambda^2(x\langle y, z\rangle - y\langle x, z\rangle).$$

pour tous x, y, z dans $\mathfrak{g}$.
D'où la courbure sectionnelle est $K(x, y) = -\lambda^2$ pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ linéairement indépendants. □

K. Nomizu dans [27] a étudié la courbure sectionnelle des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur cette classe de groupes de Lie. Il a montré en particulier un résultat analogue au cas riemannien.

Théorème 2.4 *Soit* G *un groupe de Lie qui appartient à* $\mathcal{C}$*. Alors la courbure sectionnelle de toute métrique lorentzienne invariante à gauche sur* G *est une constante.*

Preuve. Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{C}$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}b \oplus \mathfrak{u}$ et $[b, x] = x$ pour tout $x \in \mathfrak{u}$, où $\mathfrak{u}$ est un idéal abélien. Soit μ une métrique lorentzienne invariante à gauche sur G et $\langle\ ,\ \rangle$ sa valeur sur $\mathfrak{g}$. On a deux cas possibles :
Premier cas : $\mathfrak{u}$ est non dégénéré. On choisit $b' \in \mathfrak{g}$ tel que $\langle b', \mathfrak{u}\rangle = 0$, et donc $\mathfrak{g} = \mathbb{R}b' \oplus \mathfrak{u}$. Alors $b' = \alpha b + x_0$ avec $\alpha \neq 0$ et $x_0 \in \mathfrak{u}$. Pour tout $x' \in \mathfrak{u}$, on a $[b', x] = \alpha x$.
Soit $b_0 = \alpha^{-1}b'$ alors $\langle b_0, \mathfrak{u}\rangle = 0$ et $[b_0, x] = x$ pour tout $x \in \mathfrak{u}$. On a donc deux situations :
Situation 1 : $\langle b_0, b_0\rangle = -\lambda^2$. En utilisant l'équation (2.1), on a

$$b_0.b_0 = 0\ ,\ b_0.x = 0\ ,\ x.b_0 = -x\ ,\ x.y = -\langle x, y\rangle\frac{b_0}{\lambda^2} \text{ pour tous } x, y \in \mathfrak{u}.$$

Donc pour tous $x, y, z \in \mathfrak{u}$, le tenseur de courbure R est donné par les formules,

$$\begin{aligned} R(x, y)z &= \langle y, z\rangle\frac{x}{\lambda^2} - \langle x, z\rangle\frac{y}{\lambda^2} \\ R(x, y)b &= 0 \\ R(x, b)b &= -x \\ R(x, b)y &= -\langle x, y\rangle\frac{b}{\lambda^2} \end{aligned}$$

D'après ces formules on constate que la courbure sectionnelle est $K(u,v) = \frac{1}{\lambda^2}$ pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$ telle que $\{u, v\}$ est orthonormale.
Situation 2 : $\langle b_0, b_0\rangle = \lambda^2$. Soit $c \in \mathfrak{u}$ telle que $\langle c, c\rangle = -1$, alors $\mathfrak{u} = \mathbb{R}c \oplus \mathfrak{u}_1$.
Pour tous $y, z, u \in \mathfrak{u}_1$, on a

$$b.b = b.c = b.y = 0\ ,\ c.b = -c\ ,\ y.b = -y\ ,\ c.c = -\frac{b}{\lambda^2}\ ,\ c.y = y.c = 0,$$

$$y.z = \langle y, z\rangle \frac{b}{\lambda^2}.$$

D'où le tenseur de courbure est donné par, pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$R(u,v) = -\frac{1}{\lambda^2} u \wedge v, \tag{2.6}$$

avec $u \wedge v$ est l'endomorphisme définie par,

$$u \wedge v(w) = \langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v.$$

L'équation (2.6), montre que la courbure sectionnelle de notre métrique égale à $-\frac{1}{\lambda^2}$.
Deuxième cas : $\mathfrak{u}$ est dégénéré. Alors on peut décomposer $\mathfrak{g}$ sous la forme
$\mathfrak{g} = \mathbb{R}b' \oplus \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{R}c$ avec $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{R}c$ et $\mathfrak{u}_1^\perp = \mathrm{vect}\{b, c\}$ et $\langle b', b'\rangle = \langle c, c\rangle = 0$ et $\langle b', c\rangle = -1$.
On a $b' = \alpha b + x_0$ avec $\alpha \neq 0$ et $x_0 \in \mathfrak{u}$. Alors $[b', x] = \alpha x$ pour tout $x \in \mathfrak{u}$. Soit $b_0 = \frac{b'}{\alpha}$ alors on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}b_0 \oplus \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{R}c$ avec $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{R}c$ et $\langle b_0, b_0\rangle = \langle c, c\rangle = 0$ et $\langle b_0, c\rangle = -1$ et $[b_0, x] = x$ pour tout $x \in \mathfrak{u}$.
Le produit de Levi-Civita est alors donné, pour tous $y, z \in \mathfrak{u}_1$ par,

$$b.b = -b\ ,\ b.c = c\ ,\ b.y = c.b = c.c = c.y = y.c = 0$$

$$y.b = -y\ ,\ y.z = -\langle y, z\rangle c.$$

D'après ces formules on a, pour tous $y, z \in \mathfrak{u}_1$,

$$R(b,c) = R(b,y) = R(c,y) = R(y,z) = 0,$$

ce qui montre que la métrique est plate.
En conclusion, on a montré que la courbure sectionnelle de toute métrique lorentzienne invariante à gauche sur un groupe de Lie qui appartient à la classe $\mathcal{C}$ est une constante qui peut être positive, négative ou nulle. □

Dans le théorème ci-dessous, nous caractérisons les métriques pseudo-riemanniennes plates invariantes à gauche sur les groupes de Lie qui appartiennent à $\mathcal{C}$.

Théorème 2.5 *[22] Soit* G *un groupe de Lie qui appartient à* $\mathcal{C}$ *et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Soit* μ *une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur* G *et* $\langle\ ,\ \rangle$ *sa valeur sur* $\mathfrak{g}$. *Alors* μ *est plate si et seulement si la restriction de* $\langle\ ,\ \rangle$ *à* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *est dégénéré.*

Preuve. Puisque G est non unimodulaire, alors d'après la proposition 2.2, la restriction de la métrique à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nécessairement dégénéré.
Inversement, supposons que la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est dégénéré. Remarquons d'abord que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{u}$ où $\mathfrak{u}$ est l'idéal définie précédemment. Alors il existe $e\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\setminus\{0\}$ tel que pour tout $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\langle e,x\rangle=0$. Soit $y\in\mathfrak{g}$ qui vérifie $\langle e,y\rangle\neq 0$. Posons,

$$d=\frac{y}{\langle y,e\rangle}-\frac{1}{2}\frac{\langle y,y\rangle}{\langle y,e\rangle}e,$$

alors on a, $\langle d,e\rangle=1$ et $\langle d,d\rangle=0$. Soit $B=\mathrm{vect}\{e,d\}^{\perp}$, alors la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à B est non dégénéré et $\mathfrak{g}=\mathbb{R}e\oplus B\oplus\mathbb{R}d$ avec $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathbb{R}e\oplus B$. Rappelons que $\mathfrak{g}=\mathbb{R}b\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, d'où $d=\alpha b+x_0$ avec $x_0\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. D'où, pour tout $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $[d,x]=\alpha x$.
Le produit de Levi-Civita est donné pour tous $u,u'\in B$ par,

$$\mathrm{L}_e=0\ ,\ d.e=\alpha e\ ,\ d.d=-\alpha d\ ,\ d.u=u.e=0\ ,\ u.d=-\alpha u\ ,\ u.u'=\alpha\langle u,u'\rangle e.$$

Donc pour tous $u,u'\in B$, le tenseur de courbure est donné par,

$$R(e,d)=R(e,u)=R(d,u)=R(u,u')=0,$$

ce qui montre que notre métrique est plate. □
Du théorème précédent on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.3 *Toute métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur un groupe de lie* $\mathrm{G}\in\mathcal{C}$ *dont la restriction de* $\langle\ ,\ \rangle$ *à* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *est dégénéré est géodésiquement incomplète.*

2.4 Double extension d'une algèbre de Lie pseudo riemannienne plate

La méthode de double extension des algèbres de Lie pseudo-riemanniennes plates développée par A. Aubert et A. Medina dans [3], constitue un outil fondamentale pour caractériser plusieurs classes d'algèbres de Lie pseudo-riemanniennes plates. Elle sert aussi

à construire des exemples. On va montrer dans les chapitres 3 et 4 que les algèbres de Lie lorentziennes plates nilpotentes, lorentziennes plates de centre dégénéré et lorentziennes plates non unimodulaires s'obtiennent par la méthode de double extension. Cette méthode décrit les algèbres de Lie pseudo-riemanniennes plates $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ qui vérifient la condition suivante : "A contienne un idéal bilatère I (pour le produit de Levi-Civita) de dimension 1 totalement isotrope tel que $I^\perp$ soit aussi un idéal bilatère."
Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soit $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Si I est un idéal bilatère de dimension 1 totalement isotrope, alors :*

1. *I est à produit nul, $I.I^\perp = 0$ et $I^\perp$ est un idéal à gauche.*
2. *$I^\perp$ est un idéal à droite $\Leftrightarrow I^\perp.I = 0$.*
3. *Si $I^\perp$ est un idéal bilatère de A, alors la suite canonique*
$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I^\perp \longrightarrow I^\perp/I \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$
est une suite exacte d'algèbre symétrique à gauche.
L'algèbre de Lie quotient $B = I^\perp/I$ admet une pseudo-métrique plate canonique.

Preuve.

1. Soit $x \in I$, $y \in I^\perp$ et $a \in A$. On a,
$$\langle x.y, a\rangle = -\langle y, x.a\rangle = 0,$$
donc $I.I^\perp = 0$, en particulier $I.I = 0$.
L'égalité $\langle a.y, x\rangle = -\langle y, a.x\rangle = 0$, entraîne $A.I^\perp \subset I^\perp$ d'où $I^\perp$ est un idéal à gauche.
2. Pour x, y, a comme dans 1., on a,
$$\langle y.a, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a, y.x\rangle = 0,$$
d'où $I^\perp.A \subset I^\perp \Leftrightarrow I^\perp.I = 0$.
3. La restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $I^\perp$ est dégénéré de noyau I. Donc $\langle\ ,\ \rangle_{I^\perp \times I^\perp}$ définie par passage au quotient une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $B = I^\perp/I$ que l'on note $\langle\ ,\ \rangle_B$, définie par $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle_B = \langle x, y\rangle$. Posons $\widetilde{x}.\widetilde{y} = \widetilde{x.y}$. Ce produit

définie sur B est symétrique à gauche et compatible avec la structure de Lie puisque $\widetilde{x}.\widetilde{y} - \widetilde{y}.\widetilde{x} = [\widetilde{x}, \widetilde{y}]$. De plus, pour tous $x, y, z \in I^\perp$,

$$\langle \widetilde{x}.\widetilde{y}, \widetilde{z} \rangle_B + \langle \widetilde{y}, \widetilde{x}.\widetilde{z} \rangle_B = \langle \widetilde{x.y}, \widetilde{z} \rangle_B + \langle \widetilde{y}, \widetilde{x.z} \rangle_B = \langle x.y, z \rangle + \langle y, x.z \rangle = 0.$$

Donc $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. $\square$

Remarque 2.6 L'algèbre $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ sera appelée l'algèbre réduite de $(A, \langle\ ,\ \rangle)$.

Rappelons maintenant quelques faits utiles de la cohomologie des algèbres symétriques à gauche développée dans [26]. Soit A une algèbre symétrique à gauche et M un espace vectoriel.
On dit que M est un A-bimodule si on se donne deux applications :

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longrightarrow & a.m \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \rho : & M \times A & \longrightarrow & M \\ & (m, a) & \longrightarrow & m.a \end{array}$$

telles que pour tous $a, b \in A$ et $m \in M$, on a,

$$\begin{aligned} a.(b.m) - b.(a.m) &= [a, b].m \\ a.(m.b) - (a.m).b &= m.(a.b) - (m.a).b \end{aligned}$$

Soit M un A-bimodule, un 2-cocycle de A à valeur dans M est une application bilinéaire $f : A \times A \longrightarrow M$ qui vérifie pour a, b, c dans A,

$$f(a.b - b.a, c) = f(a, b.c) - f(b, a.c) + a.f(b, c) - b.f(a, c) - (f(a, b) - f(b, a)).c$$

On dit que f est un 2-cobord s'il existe une application linéaire $\phi : A \longrightarrow M$ telle que, pour a, b dans A,

$$f(a, b) = a.\phi(b) + \phi(a).b - \phi(a.b).$$

Notons $H^2_{SG}(A, \mathbb{R})$ le quotient de l'espace des 2-cocycles $Z^2_{SG}(A, \mathbb{R})$ par l'espace des 2-cobords $B^2_{SG}(A, \mathbb{R})$, où $\mathbb{R}$ est considéré comme un A-bimodule trivial.
Soit A^- l'algèbre de Lie sous-jacente à A et N un A^--module. *Un 1-cocycle de A^- à valeurs dans N* est une application linéaire $\xi : A \longrightarrow N$ telle que,

$$\xi([a, b]) = a.\xi(b) - b.\xi(a)$$

On dit que ξ est un 1-cobord s'il existe n_0 appartenant à N tel que $\xi(a) = a.n_0$ pour tout $a \in A$.
On note $H^1_L(A, N)$ le quotient de l'espace des 1-cocycles $Z^1_L(A, N)$ par l'espace des 1-cobords $B^1_L(A, N)$. On a donc le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Si $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate, alors la formule $f(a, b) = \langle \xi(a), b\rangle$ induit un isomorphisme entre $H^2_{SG}(A, \mathbb{R})$ et $H^1_L(A, A)$, où $\mathbb{R}$ est vu comme un A-bimodule trivial, et A est un A-module pour la représentation L.*

Preuve. Soit $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Si $\mathbb{R}$ est considéré comme un A-bimodule trivial, alors $f \in Z^2_{SG}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si pour tous $a, b, c \in A$,

$$f([a, b], c) = f(a, b.c) - f(b, a.c). \tag{2.8}$$

Soit ξ l'endomorphisme de A définie par $f(a, b) = \langle \xi(a), b\rangle$. L'égalité (2.8) s'écrit alors, pour $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned} \langle \xi([a, b]), c\rangle &= \langle \xi(a), b.c\rangle - \langle \xi(b), a.c\rangle \\ \Leftrightarrow \quad \langle \xi([a, b]), c\rangle &= -\langle b.\xi(a), c\rangle + \langle a.\xi(b), c\rangle \end{aligned}$$

Ce qui équivaut, pour tous a, b dans A, à

$$\xi([a, b]) = a.\xi(b) - b.\xi(a).$$

D'où

$$f \in Z^2_{SG}(A, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \xi \in Z^1_L(A, A).$$

De même, $f \in B^2_{SG}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\phi \in A^*$ tel que, pour tous a, b dans A, $f(a, b) = \phi(a.b)$. Ce qui revient à dire qu'il existe $a_0 \in A$ tel que, pour tous $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \langle a_0, a.b\rangle \\ \Leftrightarrow \quad \langle \xi(a), b\rangle &= -\langle a.a_0, b\rangle. \end{aligned}$$

C'est à dire il existe $a_0 \in A$ tel que $\xi(a) = -a.a_0$ pour tout a dans A. D'où l'équivalence

$$f \in B^2_{SG}(A, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \xi \in B^1_L(A, A).$$

□

Soit $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate qui contienne un idéal I de

dimension 1 totalement isotrope tel que $I^\perp$ est aussi un idéal bilatère.
Posons $I = \mathbb{R}e$ et soit $\bar{e} \in A$ définie par $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ et $\langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$. Soit $\hat{B} = \mathrm{vect}\{e, \bar{e}\}^\perp$. Alors A s'identifie en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{R}e \oplus \hat{B} \oplus \mathbb{R}\bar{e}$ et $I^\perp$ à $\mathbb{R}e \oplus \hat{B}$.
Puisque $I^\perp$ est stable pour le produit symétrique à gauche on a alors,

$$(\alpha e + a).(\beta e + b) = f(a, b)e + a * b,$$

avec $a * b$ est la composante de $a.b$ sur $\hat{B}$. Le fait que ce produit est symétrique à gauche équivaut à dire que $*$ est un produit symétrique à gauche sur $\hat{B}$ et que f est un 2-cocycle scalaire de cette algèbre. L'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \hat{B} & \longrightarrow & B = I^\perp/I \\ & x & \longrightarrow & \widetilde{x} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus,

$$\Phi(x * y) = \widetilde{x * y} = \widetilde{x.y} = \widetilde{x}.\widetilde{y} = \Phi(x).\Phi(y).$$

D'où Φ est un isomorphisme d'algèbres symétriques à gauche. Donc on peut identifier les algèbres symétriques à gauche $\hat{B}$ et $B = I^\perp/I$, et on note ab le produit sur B.
La suite (2.7) équivaut donc à la donnée de la classe de cohomologie d'un 2-cocycle $f \in Z^2_{SG}(B, \mathbb{R})$. D'où la donné d'un 1-cocycle $\xi \in Z^1_L(B, B)$ tel que $f(a, b) = \langle \xi(a), b\rangle$ pour a, b dans B. Ceci d'une part.
D'autre part, puisque $I = \mathbb{R}e$ et $I^\perp = \mathbb{R}e \oplus B$ sont des idéaux bilatères de A, donc de Lie, le crochet sur A s'exprime, pour $a, b \in B$, par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [\bar{e}, e] & = & \mu e \\ {[\bar{e}, a]} & = & D(a) - \langle b_0, a\rangle e \\ {[a, b]} & = & [a, b]_B + \langle (\xi - \xi^*)(a), b\rangle e \end{array} \right. \tag{2.9}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $D \in End(B)$ et $b_0 \in B$. D'après la formule

$$\langle x.y, z\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [x, y], z\rangle - \langle [y, z], x\rangle + \langle [z, x], y\rangle\}$$

on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\bar{e}.e & = & \mu e \\
e.\bar{e} & = & 0 \\
\bar{e}.a & = & -\langle b_0, a\rangle e + \frac{1}{2}\left((D-\xi)(a) - (D^* - \xi^*)(a)\right) \\
a.\bar{e} & = & \frac{1}{2}\left(-(D+\xi)(a) - (D^* - \xi^*)(a)\right) \\
\bar{e}.\bar{e} & = & b_0 - \mu\bar{e}
\end{array}$$

De plus l'égalité $\langle a.b, \bar{e}\rangle = \langle \xi(a), b\rangle$ implique que $D - \xi \in \mathrm{so}(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$, c'est à dire $(D-\xi)^* = -(D-\xi)$. On obtient donc les formules plus simples suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
e.e & = & e.a = a.e = 0 \\
a.b & = & \langle \xi(a), b\rangle_B e + ab \\
e.\bar{e} & = & 0 \\
\bar{e}.e & = & \mu e \\
\bar{e}.\bar{e} & = & b_0 - \mu\bar{e} \\
\bar{e}.a & = & -\langle b_0, a\rangle_B e + (D-\xi)(a) \\
a.\bar{e} & = & -\xi(a)
\end{array}\right. \tag{2.10}$$

ce produit est symétrique à gauche sur A si et seulement si pour tous a, b dans B,

$$(\bar{e}.a).b - (a.\bar{e}).b = \bar{e}.(a.b) - a.(\bar{e}.b)$$

Ce qui équivaut aux égalités suivantes,

$$[D, \xi] = \xi^2 - \mu\xi - \mathrm{R}_{b_0} \tag{2.11}$$

$$a\xi(b) - \xi(ab) = D(a)b + aD(b) - D(ab) \tag{2.12}$$

En résumé, on a la proposition suivante,

Proposition 2.7 *Soit $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Si A contienne un idéal bilatère I de dimension 1 totalement isotrope tel que $I^\perp$ est aussi un idéal bilatère, alors A se décompose en tant qu'espace vectoriel sous la forme*

$$A = \mathbb{R}e \oplus B \oplus \mathbb{R}\bar{e}$$

où $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ est l'algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate réduite et $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$ et $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ et $\mathrm{vect}\{e, \bar{e}\}^{\perp} = B$. Le crochet de Lie est donné par (2.9), avec $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0 \in B$ et $D, \xi \in \mathrm{End}(B)$ vérifiant :

- $D - \xi \in \mathrm{so}(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ (2.13)
- $\xi([a, b]) = a\xi(b) - b\xi(a)$ (2.14)
- $[D, \xi] = \xi^2 - \mu\xi - R_{b_0}$ (2.15)
- $a\xi(b) - \xi(ab) = D(a)b + aD(b) - D(ab)$ (2.16)

Réciproquement, l'analyse faite ci-dessus fournit une méthode de construction d'algèbres pseudo-riemanniennes plates.

Proposition 2.8 *Soit $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0 \in B$ et $D, \xi \in \mathrm{End}(B)$ vérifiant (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16). Soit l'espace vectoriel $A = \mathbb{R}e \oplus B \oplus \mathbb{R}\bar{e}$ muni du crochet de Lie définie par (2.9) et de la métrique qui étend $\langle\ ,\ \rangle_B$ telle que $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$ et $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ et $\mathrm{vect}\{e, \bar{e}\}^{\perp} = B$. Alors $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. $(A, \langle\ ,\ \rangle)$ est appelée algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate double extension de $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ suivant (D, ξ, μ, b_0).*

Remarque 2.9

1. Les deux équations (2.14) et (2.16) impliquent que D est une dérivation de l'algèbre de Lie B.
2. Soit $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0 \in B$ et $D, \xi \in \mathrm{End}(B)$ vérifiant (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16). Alors on dit que (D, ξ, μ, b_0) est *admissible*.

Comme première application de cette méthode, on peut déterminer les groupes de Lie de Heisenberg qui peuvent posséder une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche.

2.5 Application aux groupes de Lie de Heisenberg

Le groupe de Lie de Heisenberg de dimension $2k+1$ noté H_{2k+1} peut-être définie comme le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_k & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un vecteur colonne, b est un vecteur ligne et I_k est la matrice identité d'ordre k. Son algèbre de Lie noté $\mathcal{H}_{2k+1}$ est l'algèbre des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0_k & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un vecteur colonne, b est un vecteur ligne et 0_k est la matrice nulle d'ordre k. $\mathcal{H}_{2k+1}$ est une algèbre de Lie 2-nilpotente, et admet la base $\{z, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}$ où

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij} z \quad \text{et} \quad z \in Z(\mathcal{H}_{2k+1}).$$

Le groupe de Lie de Heisenberg de dimension 3, H_3 admet une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche définie dans la base $\{z, x, y\}$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi voir $\mathcal{H}_3$ comme une double extension de $(B = \mathbb{R}y,\ \langle y, y\rangle_B = 1)$ suivant $\xi = D = 0$, $\mu = 0$ et $b_0 = y$.

La proposition suivante caractérise les groupes de Lie de Heisenberg qui peuvent posséder des métriques pseudo-riemanniennes plates invariantes à gauche.

Proposition 2.10 *Le seul groupe de Lie de Heisenberg qui admet une métrique pseudo-riemannienne plate invariante à gauche est celui de dimension 3.*

Preuve. Posons $\mathfrak{g} = \mathcal{H}_{2k+1}$, alors on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}z$. On a nécessairement $\langle z, z\rangle = 0$. Sinon $\mathfrak{g} = \mathbb{R}z \oplus (\mathbb{R}z)^\perp$. Soit $x \in (\mathbb{R}z)^\perp$, alors on a $\langle z.x, z\rangle = 0$ donc $z.x = x.z = \xi(x)$ et $z.z = 0$ avec $\xi \in End\left((\mathbb{R}z)^\perp\right)$. Puisque pour tous $x, y \in (\mathbb{R}z)^\perp$, on a :

$$\langle z.x, y\rangle + \langle x, z.y\rangle = 0,$$

et donc,

$$\langle \xi(x), y\rangle + \langle x, \xi(y)\rangle = 0$$

ce qui implique que ξ est antisymétrique.
D'autre part, la métrique est plate. Donc pour tout $x \in (\mathbb{R}z)^\perp$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{L}_z \circ \mathrm{L}_x = \mathrm{L}_x \circ \mathrm{L}_z \\ \Rightarrow\ & \mathrm{L}_z \circ \mathrm{L}_x(z) = 0 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{L}_z\left(\xi(x)\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \xi^2(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & \xi \text{ est 2-nilpotent.} \end{aligned}$$

Pour $x, y, t \in (\mathbb{R}z)^\perp$, on a $\langle x.y, t\rangle = 0$ et

$$\begin{aligned} \langle x.y, z\rangle &= -\langle x.z, y\rangle \\ &= -\langle \xi(x), y\rangle. \end{aligned}$$

D'où $x.y = -\langle \xi(x), y\rangle \langle z, z\rangle^{-1} z$. Donc

$$[x, y] = x.y - y.x = -\langle \xi(x), y\rangle \langle z, z\rangle^{-1} z + \langle \xi(y), x\rangle \langle z, z\rangle^{-1} z.$$

Or $\xi^* = -\xi$, d'où $[x, y] = -2\langle \xi(x), y\rangle \langle z, z\rangle^{-1} z$. Puisque $\xi^2 = 0$ alors $\ker \xi$ est non trivial. D'où il existe $w \in \ker \xi \setminus \{0\}$ ce qui implique que pour tout $y \in (\mathbb{R}z)^\perp$, $[w, y] = 0$ donc $w \in Z(\mathfrak{g})$, ceci contredit le fait que le centre de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1. D'où $\langle z, z\rangle = 0$.
D'après l'équation (2.1), $\mathrm{L}_z = 0$. D'où $I = \mathbb{R}z$ est un idéal bilatère et puisque $z.a = 0 = [z, a] = a.z$ pour tout $a \in \mathfrak{g}$, alors $I^\perp$ est aussi un idéal bilatère. D'où $\mathfrak{g}$ est double extension d'une algèbre pseudo-riemannienne plate B suivant D, u, μ et b_0. Donc le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$ est donné par (2.9). On a $e \in Z(\mathfrak{g})$ car sinon $\mu \neq 0$ ce qui implique que $e \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Z(\mathfrak{g})$. D'autre part, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$ alors $D = 0$ et $[a, b]_B = 0$ donc B est abélienne. La condition $[D, u] = u^2$ implique que $u^2 = 0$. Or la dimension de B est impaire $(2k-1)$, donc $\dim \ker u \geq 3$. Mais $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}e \oplus \ker u \cap (\mathbb{R}b_0)^\perp$ et

$$\begin{aligned} \dim(\ker u \cap (\mathbb{R}b_0)^\perp) &= \dim(\mathbb{R}b_0)^\perp + \dim \ker u - \dim\left((\mathbb{R}b_0)^\perp + \ker u\right) \\ &\geq 2k - 2 + 3 - (2k-1) \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Contradiction, car $\dim Z(\mathfrak{g}) = 1$. □

Chapitre 3

Groupes de Lie lorentziens plats unimodulaires

Le but des chapitres 3 et 4 est de caractériser les groupes de Lie G qui peuvent posséder des métriques lorentziennes plates invariantes à gauche. Dans ce chapitre on va caractériser les classes suivantes :

(C_1) G est nilpotent.

(C_2) L'algèbre de Lie de G est de centre dégénéré.

(C_3) G possède un champ de Killing invariant à gauche de type temps.

(C_4) La connexion de Levi-Civita de G est bi-invariante.

Nous montrons en particulier que dans tous ces cas le groupe de Lie G est unimodulaire. Ce qui entraîne que la métrique lorentzienne est géodésiquement complète. Le chapitre 4 est consacré au cas non unimodulaire.

Il est bien connu qu'un groupe de Lie lorentzien plat est nécessairement résoluble [13]. Dans ce chapitre, nous établissons que les groupes de Lie des classes (C_1), (C_2) et (C_4) sont au plus 2-résolubles. Cependant, nous donnons une famille d'algèbres de Lie lorentziennes plates qui appartiennent à la classe (C_2) et qui sont 3-résolubles.

Commençons par étudier les propriétés de la sous-algèbre des champs de Killing invariants à gauche d'un groupe de Lie lorentzien plat.

3.1 La sous-algèbre des champs de Killing invariants à gauche d'un groupe de Lie lorentzien plat

Soit (G, μ) un groupe de Lie pseudo-riemannien plat et $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. Si $\mathfrak{g}$ est considérée comme l'algèbre des champs invariants à gauche de G alors

$$S(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{R}_u + \mathrm{R}_u^* = 0\} = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^* = 0\}$$

est la sous-algèbre des champs de Killing invariant à gauche de (G, μ).
Dans Théorème 2.2, nous avons montré que si la métrique est riemannienne alors

$$S(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{R}_u = 0\} = (\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^{\perp}. \tag{3.1}$$

Dans le cas lorentzien, cette relation ne reste plus valable. De plus, la restriction de La métrique à $S(\mathfrak{g})$ peut être riemannienne, lorentzienne ou dégénérée.

Exemple 3.1 Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ où les crochets non nuls sont $[e_1, e_2] = -e_3$ et $[e_1, e_3] = e_2$, muni de la métrique lorentzienne donné dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par

$$\langle\ ,\ \rangle_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $(\mathfrak{g}_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ est une algèbre de Lie lorentzienne plate où la restriction de la métrique à $S(\mathfrak{g}_1) = \mathbb{R}e_1$ est lorentzienne.

Exemple 3.2 Soit $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ où les crochets non nuls sont $[e_1, e_2] = e_3$ et $[e_1, e_3] = e_2$, muni de la métrique lorentzienne donné dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par

$$\langle\ ,\ \rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors $(\mathfrak{g}_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ est une algèbre de Lie lorentzienne plate où la restriction de la métrique à $S(\mathfrak{g}_2) = \mathbb{R}e_1$ est riemannienne.

Exemple 3.3 Soit $\mathcal{H}_3 = \mathrm{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 où les crochets non nuls sont $[e_2, e_3] = e_1$, muni de la métrique lorentzienne donnée dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par

$$\langle\ ,\ \rangle_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $(\mathcal{H}_3, \langle\ ,\ \rangle_3)$ est une algèbre de Lie lorentzienne plate où la restriction de la métrique à $S(\mathcal{H}_3) = Z(\mathcal{H}_3) = \mathbb{R}e_1$ est dégénérée.

Ces exemples montrent que la restriction de la métrique à $S(\mathfrak{g})$ peut-être quelconque. De plus l'exemple de l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, $\mathfrak{g} = \mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$ où $[e_1, e_2] = e_2$ muni de la métrique

$$\langle\ ,\ \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que $S(\mathfrak{g})$ peut-être même nulle.
La proposition suivante montre qu'une partie de la relation (3.1) reste vraie dans le cas lorentzien.

Proposition 3.4 *Soit* $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *une algèbre de Lie lorentzienne plate. Alors*

$$S(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g} / \mathrm{R}_u = 0\} = (\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^{\perp}.$$

Preuve. Soit (G, μ) un groupe de Lie pseudo-riemannien plat et $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate. D'après la proposition 2.2, on a pour tout $u \in S(\mathfrak{g})$, $\mathrm{R}_u^2 = 0$. Si la métrique est lorentzienne alors $\mathrm{Im}(\mathrm{R}_u)$ est un sous-espace totalement isotrope, donc il existe un vecteur isotrope $e \in \mathfrak{g}$ et une forme linéaire $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\mathrm{R}_u(v) = \alpha(v)e$ pour tout $v \in \mathfrak{g}$. On choisit une base $\{e, \bar{e}, f_1, \ldots, f_{n-2}\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathrm{vect}\{e, \bar{e}\}$ et $\mathrm{vect}\{f_1, \ldots, f_{n-2}\}$ sont orthogonales, $\{f_1, \ldots, f_{n-2}\}$ est orthonormale, $\bar{e}$ est isotrope et $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$. On a, pour tout $i = 1, \ldots, n-2$,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{R}_u(e), \bar{e}\rangle &= \alpha(e) = -\langle e, \mathrm{R}_u(\bar{e})\rangle, \\ \langle \mathrm{R}_u(\bar{e}), \bar{e}\rangle &= 0 = \alpha(\bar{e}), \\ \langle \mathrm{R}_u(f_i), \bar{e}\rangle &= \alpha(f_i) = -\langle f_i, \mathrm{R}_u(\bar{e})\rangle \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 0$ ce qui entraîne que $\mathrm{R}_u = 0$. □

Corollaire 3.1 *La sous-algèbre des champs de Killing invariants à gauche d'un groupe de Lie lorentzien plat est abélienne.*

3.2 Groupes de Lie lorentziens plats nilpotents

A. Aubert et A. Medina dans [3] ont caractérisé le cas nilpotent par la méthode de double extension. Ils ont montré d'abord le lemme suivant, dont nous donnons ici une démonstration plus simple.

Lemme 3.1 *Soit* (G, μ) *un groupe de Lie lorentzien plat et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Soit*

$$N(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g}/\mathrm{L}_u = 0\}.$$

Si G *est nilpotent alors* $N(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Preuve. D'après la proposition 3.4, on a,

$$S(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g}/\mathrm{R}_u = 0\}.$$

Or $Z(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ d'où $Z(\mathfrak{g}) \subset N(\mathfrak{g})$. Puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ ce qui montre que $N(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. $\square$

Remarque 3.5 Si G est un groupe de Lie lorentzien plat nilpotent alors le centre $Z(\mathfrak{g})$ est dégénéré. En effet, on a

$$Z(g) \subset S(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}.$$

D'où $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ ce qui donne

$$Z(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})^{\perp}.$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors $Z(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ et donc finalement $Z(\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})^{\perp} \neq \{0\}$.

Le théorème suivant caractérise les groupes de Lie lorentziens plats nilpotents par la méthode de double extension. Notons que la condition $Im(D) \subset (\mathbb{R}b_0)^{\perp}$ citée dans la version originale de ce théorème dans [3] et [2] n'est pas nécessaire.

Théorème 3.1 *Soit G un groupe de Lie connexe nilpotent. Alors G admet une métrique lorentzienne plate invariante à gauche si et seulement si son algèbre de Lie est une double extension d'une algèbre de Lie euclidienne abélienne suivant $D = \xi$, $\mu = 0$, et b_0 avec $D^2 = 0$*

Preuve. D'après la proposition 3.4, $Z(\mathfrak{g}) \subset N(\mathfrak{g})$. Soit $e \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$. Puisque $\mathrm{L}_e = \mathrm{R}_e = 0$ alors $I = \mathbb{R}e$ est un idéal bilatère totalement isotrope et $I^\perp.I = 0$ donc $I^\perp$ est aussi un idéal bilatère, D'où $\mathfrak{g}$ est une double extension d'une algèbre euclidienne plate suivant D, ξ, μ et b_0.
Puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors, d'une part B est abélienne. Donc le crochet de Lie est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [d,e] & = & \mu e \\ [d,a] & = & D(a) - \langle b_0, a\rangle_B e \\ [a,b] & = & \langle (\xi - \xi^*)(a), b\rangle_B e \end{array} \right. \tag{3.2}$$

D'autre part $\mu = 0$. On vérifie aussi par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{ad}_d^k(a) = D^k(a) - \langle b_0, D^{k-1}(a)\rangle e,$$

donc D est nilpotent. La formule $[D,\xi] = \xi^2$ implique que pour tout $k \geq 1$,

$$(D - \xi)^k = D^k - k\xi o D^{k-1},$$

d'où $D - \xi$ est nilpotent. Or $D - \xi$ est antisymétrique, alors $D = \xi$ et donc $D^2 = 0$. Avec ces conditions, on a pour tout $a \in B$, $\mathrm{ad}_a^3 = \mathrm{ad}_d^3 = 0$ d'où $\mathfrak{g}$ est au plus 3-nilpotente. $\square$

Le cas 2-nilpotent est caractérisé par le théorème ci-dessous. M. Guediri a démontré ce théorème dans [16]. En utilisant le Théorème 3.1, nous donnons ici une autre démonstration de ce théorème.

Théorème 3.2 *Un groupe de Lie connexe 2-nilpotent admet une métrique lorentzienne plate invariante à gauche si et seulement si il est une extension triviale centrale du groupe de Lie de Heisenberg de dimension 3, H_3. De plus la restriction de la métrique au facteur H_3 est lorentzienne avec centre dégénéré.*

Preuve. Soit G un groupe de Lie connexe 2-nilpotent et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. D'après le Théorème 3.1, $\mathfrak{g}$ est une double extension d'une algèbre de Lie euclidienne abélienne B suivant $D = \xi$, $\mu = 0$ et b_0 avec $D^2 = 0$. Donc $\mathfrak{g}$ se décompose en tant qu'espace vectoriel sous la forme

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e \oplus B \oplus \mathbb{R}\bar{e},$$

et les crochets de Lie sont donnés par les formules (2.9). On a $[a, \bar{e}] = -D(a) + \langle b_0, a\rangle e$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_a^2(\bar{e}) &= -[a, D(a)] \\
&= \langle (D - D^*)(D(a)), a\rangle e \\
&= -\langle D^*(D(a)), a\rangle e \\
&= -\langle D(a), D(a)\rangle e
\end{aligned}$$

Or l'algèbre est 2-nilpotente, donc $D = 0$. D'où pour tout $a \in B$, le crochet est donné par $[\bar{e}, a] = -\langle b_0, a\rangle e$. On a $b_0 \neq 0$ car sinon l'algèbre sera abélienne. Prenons $e_1 = \frac{-b_0}{\langle b_0, b_0\rangle}$, et soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}\}$ une base $\langle\ ,\ \rangle_B$-orthonormale de B, alors

$$[\bar{e}, e_1] = \langle b_0, \frac{b_0}{\langle b_0, b_0\rangle}\rangle e = e$$

et pour tout $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ on a, $[\bar{e}, e_i] = \langle b_0, e_i\rangle e = 0$. Donc $\{\bar{e}, e, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ dont le seul crochet non nul est $[\bar{e}, e_1] = e$. D'où $\mathfrak{g}$ est une extension triviale centrale de $\mathcal{H}_3 = vect\{\bar{e}, e, e_1\}$, et la restriction de la métrique à $\mathcal{H}_3$ est lorentzienne avec centre dégénéré. $\square$

3.3 Groupes de Lie lorentziens plats de centre dégénéré

Dans la suite, on désigne par groupe de Lie lorentzien de centre dégénéré, un groupe de Lie lorentzien dont la restriction de la métrique au centre de son algèbre de Lie est dégénérée.

3.3.1 Caractérisation par la méthode de double extension

La remarque 3.5 montre que la classe des groupes de Lie lorentziens plats nilpotents est une sous classe de celle des groupes de Lie lorentziens plats de centre dégénéré. Dans cette partie, nous donnons une caractérisation de cette dernière classe par la méthode de double extension et nous donnons la liste des algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré de dimension inférieure ou égale à 6.

Théorème 3.3 *Un groupe de Lie connexe lorentzien de centre dégénéré est plat si et seulement si son algèbre de Lie est double extension d'une algèbre de Lie euclidienne* *plate suivant $\mu = 0$, D, ξ et b_0 avec $(D, b_0) \neq (0,0)$. De plus, dans ce cas le groupe est unimodulaire et donc la métrique est complète.*

Preuve. *Soit* G un groupe de Lie lorentzien plat et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $Z(\mathfrak{g})$ est dégénéré, alors $Z(\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})^{\perp} = \mathbb{R}e$ avec $\langle e, e \rangle = 0$. Puisque $Z(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g}) \cap N(\mathfrak{g})$ alors $\mathrm{L}_e = \mathrm{R}_e = 0$, et donc $I = \mathbb{R}e$ est un idéal bilatère totalement isotrope et $I^{\perp}$ est aussi un idéal bilatère. D'où $\mathfrak{g}$ est une double extension d'une algèbre euclidienne plate suivant μ, D, ξ et b_0. Autrement dit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e \oplus B \oplus \mathbb{R}\bar{e}$ avec $[\bar{e}, e] = \mu e$, et pour tous $a, b \in B$, $[\bar{e}, a] = D(a) - \langle b_0, a \rangle e$, et $[a, b] = [a, b]_B + \langle (\xi - \xi^*)(a), b \rangle e$.
Puisque $e \in Z(\mathfrak{g})$ alors $\mu = 0$. On a $\bar{e} \notin Z(\mathfrak{g})$, sinon $Z(\mathfrak{g})$ sera non dégénéré, ce qui implique que $(D, b_0) \neq (0,0)$.
Inversement, si $\mathfrak{g}$ est double extension d'une algèbre euclidienne plate suivant $\mu = 0$, D, ξ, et b_0 avec $(D, b_0) \neq (0,0)$ alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie lorentzienne plate avec centre dégénéré.
D'après le crochet ci-dessus, $\mathfrak{g}$ est unimodulaire si et seulement si $\mathrm{tr}(D) = 0$. Dans le paragraphe suivant, nous montrons que dans le cas où B est abélienne alors $D - \xi$ est antisymétrique et ξ est nilpotent alors $\mathrm{tr}(D) = 0$. Dans le cas où B est non abélienne, la proposition 3.9 montre que $\mathrm{tr}(D) = 0$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque 3.6 Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie lorentzienne plate. On a $Z(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g}) \cap N(\mathfrak{g})$, donc pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$ et $a \in \mathfrak{g}$ on a $a.z = z.a = 0$. D'autre part, pour tout $u \in Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ on a,

$$\langle a.u, z \rangle = -\langle u, a.z \rangle = 0 \text{ et } \langle u.a, z \rangle = -\langle a, u.z \rangle = 0.$$

Donc $Z(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ sont des idéaux bilatères pour le produit de Levi-Civita.
On a 3 cas possibles :

1. Si $Z(\mathfrak{g})$ est non dégénéré lorentzien, alors $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ avec $(Z(\mathfrak{g})^{\perp}, \langle\ ,\ \rangle_{Z(\mathfrak{g})^{\perp}})$ est euclidienne plate. Donc dans ce cas $\mathfrak{g}$ est une extension centrale triviale d'une algèbre de Lie euclidienne plate.
2. Si $Z(\mathfrak{g})$ est non dégénéré euclidien, alors $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ avec $(Z(\mathfrak{g})^{\perp}, \langle\ ,\ \rangle_{Z(\mathfrak{g})^{\perp}})$ est lorentzien plate de centre nul.
3. $Z(\mathfrak{g})$ est dégénéré. D'après le Théorème 3.3, ce cas est déterminé par la méthode de double extension.

En résumé, le problème de déterminer les algèbres de Lie lorentziennes plates se réduit à la détermination des deux classes :

1. Celle où le centre est dégénéré.
2. Celle de centre trivial.

3.3.2 Algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré de dimension inférieur ou égale à 6

D'après le Théorème 3.3, déterminer les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré revient à la détermination des quadruplets admissibles $(D, \xi, 0, b_0)$ dans une algèbre de Lie euclidienne plate. Dans cette section, nous donnons une méthode générale pour résoudre les équations satisfaites par $(D, \xi, 0, b_0)$, et nous utilisons cette méthode pour donner explicitement ces solutions dans une algèbre de Lie euclidienne plate de dimension ≤ 4. Ceci nous permettra de déterminer la liste complète de toutes les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré de dimension ≤ 6.
On distingue alors deux cas :
Cas abélien :
Soit B une algèbre de Lie euclidienne plate abélienne, alors $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si $A = D - \xi$ est antisymétrique et

$$[A, \xi] = \xi^2. \tag{3.3}$$

Soit (A, ξ) une solution de (3.3) et A antisymétrique. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[A, \xi^k] = k\xi^{k+1}. \tag{3.4}$$

donc $\mathrm{tr}(\xi^k) = 0$ pour tout $k \geq 2$. D'où ξ est nilpotent. Alors il existe $q \leq \dim B$ tel que

$$\{0\} \neq \ker \xi \subsetneq \ker \xi^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker \xi^q = B$$

Donc on a cette décomposition orthogonale de B

$$B = \bigoplus_{k=0}^{q-1} F_k, \tag{3.5}$$

avec $F_0 = \ker \xi$, et pour tout $k = 1, \ldots, q-1$, $F_k = \ker \xi^{k+1} \cap \left(\ker \xi^k\right)^{\perp}$. D'après (3.4), $A(\ker \xi^k) \subset \ker \xi^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or A est antisymétrique alors $A(F_k) \subset F_k$.

En utilisant une base orthonormale adaptée à la décomposition (3.5), la matrice de A et ξ sont relativement simple, et on peut résoudre (3.3).
Les remarques suivantes sont importantes pour simplifier les calculs lors de la résolution de (3.3).

Remarque 3.7 Soit (A, ξ) une solution de (3.3) et A antisymétrique.

1. Si $q = \dim B = n$, alors pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, $\dim F_k = 1$, et puisque $A(F_k) \subset F_k$ alors $A = 0$, et donc $\xi^2 = 0$. D'où $\dim B = 2$. Donc si $\dim B \geq 3$ alors $q < \dim B$.
2. On a $\ker A \subset \ker \xi^2$. En effet, si $x \in \ker A$ alors, d'après (3.3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A\xi^k(x) = k\xi^{k+1}(x)$, or ξ est nilpotent alors il existe $p > 0$ tel que $A^p\xi(x) = 0$. Si $p = 1$ alors $A\xi(x) = \xi^2(x) = 0$ d'où $x \in \ker \xi^2$. Si $p \geq 2$ alors $A^{2p-2}\xi(x) = 0$, et puisque A est antisymétrique alors $\langle A^{p-1}\xi(x), A^{p-1}\xi(x)\rangle = 0$ d'où $A^{p-1}\xi(x) = 0$. En répétant cet argument on trouve finalement $A\xi(x) = \xi^2(x) = 0$ d'où $x \in \ker \xi^2$.
3. Pour tout $1 \leq k \leq q-1$, on a $\dim F_k \leq \dim \ker \xi^j$, $j = 1, \ldots, k+1$.

Donnons maintenant les $(D, \xi, 0, b_0)$ admissibles dans une algèbre de Lie euclidienne abélienne B avec $\dim B \leq 4$.

Proposition 3.8 *Soit B une algèbre de Lie euclidienne abélienne. Alors :*

1. *Si $\dim B = 2$ alors $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si $D = \xi = 0$ ou il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ de B dont les matrices de D et ξ dans cette base ont les formes suivantes :*
$$\left(M(\xi) = M(D) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ou } \left(\xi = 0,\ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \right)$$
avec $a \neq 0$ et $\lambda > 0$.
2. *Si $\dim B = 3$ alors $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si $D = \xi = 0$ ou il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ de B dont les matrices de D et ξ dans cette base ont les formes suivantes :*
$$\left(M(\xi) = M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ou } \left(\xi = 0,\ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
avec $a \neq 0$ et $\lambda > 0$.

3. *Si* $\dim B = 4$ *alors* $(D, \xi, 0, b_0)$ *est admissible si et seulement si* $D = \xi = 0$ *ou il existe une base orthonormale* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *de* B *dont les matrices de* D *et* ξ *dans cette base ont les formes suivantes :*

$$(f_1)\ \ M(\xi) = M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ac \neq 0.$$

$$(f_2)\ \ M(\xi) = M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a \neq 0.$$

$$(f_3)\ \ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix},\ \xi = 0,\ (a, b) \neq (0, 0).$$

$$(f_4)\ \ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix},\ M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ab \neq 0.$$

$$(f_5)\ \ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ab \neq 0.$$

Preuve. Notons d'abord que $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si $A = D - \xi$ est antisymétrique et (A, ξ) est solution de (3.3). Si c'est le cas, on va utiliser le fait que A laisse invariante la décomposition (3.5) et la remarque précédente. Soit $(D, \xi, 0, b_0)$ admissible tel que $(D, \xi) \neq (0, 0)$ et q le nombre naturel défini dans (3.5).

1. Si $\dim B = 2$, on a deux possibilités pour q. Si $q = 2$ alors d'après (3.5) $B = \ker \xi \oplus F_1$, et donc $A = 0$. D'où $D = \xi$ et $\xi^2 = 0$. Si $q = 1$ alors $\xi = 0$ et D est antisymétrique.

2. Si $\dim B = 3$, alors d'après la remarque précédente, on a également deux possibilités pour q. Si $q = 1$ alors $\xi = 0$ et D est antisymétrique. Si $q = 2$ alors $B = \ker \xi \oplus F_1$ avec $\dim F_1 \leq \dim \ker \xi$. Donc $\dim F_1 = 1$ et $\dim \ker \xi = 2$. Donc il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ de B tel que
$$M(A) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } (b, c) \neq (0, 0).$$
Un calcul directe montre que l'équation ((3.3)) est équivalente à $A = 0$ et $D = \xi$. En faisant le changement de base suivant $(\frac{be_1+ce_2}{\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{be_2-ce_1}{\sqrt{b^2+c^2}}, e_3)$ on trouve la forme désiré.
3. Si $\dim B = 4$ alors d'après la remarque 3.7, $q \leq 3$.
   – Si $q = 1$ alors $\xi = 0$ et D est antisymétrique ce qui donne (f_3).
   – Si $q = 2$ alors $\xi \neq 0$, $B = \ker \xi \oplus F_1$ avec $\dim F_1 \leq \dim \ker \xi$. On a deux cas possibles :
   Premier cas : $\dim F_1 = 2$ et $\dim \ker \xi = 2$ alors il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tel que
$$M(A) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } cf - ed \neq 0.$$
   L'équation (3.3) est équivalente à :
$$\begin{cases} ae + bd = 0 \\ be + ad = 0 \\ af - bc = 0 \\ bf - ac = 0 \end{cases}.$$
   Si $a = b = 0$ on trouve (f_1) après le changement de bases $\left(\frac{ce_1+ee_2}{\sqrt{c^2+e^2}}, \frac{ee_1-ce_2}{\sqrt{c^2+e^2}}, e_3, e_4\right)$.
   Si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors puisque $\xi \neq 0$ alors $a = b$ ou $a = -b$.
   * Si $a = b$ on trouve (f_4) après le changement de bases orthonormale
$$\left(\frac{ce_1 + ee_2}{\sqrt{c^2 + e^2}}, \frac{-ee_1 + ce_2}{\sqrt{c^2 + e^2}}, e_3, e_4\right).$$

* Si $a=-b$ on trouve aussi (f_4) après le changement de bases orthonormale

$$\left(\frac{ce_1+ee_2}{\sqrt{c^2+e^2}},\ \frac{ee_1-ce_2}{\sqrt{c^2+e^2}},\ e_4,\ e_3\right).$$

Deuxiéme cas : $\dim\ker\xi=3$ et $\dim F_1=1$ alors il existe une base orthonormale $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ telle que

$$M(A)=\begin{pmatrix}0&a&0&0\\-a&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ et }M(\xi)=\begin{pmatrix}0&0&0&b\\0&0&0&c\\0&0&0&d\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ avec }a\in\mathbb{R}\text{ et }(b,c,d)\neq(0,0,0).$$

Un calcul directe montre que l'équation (3.3) est équivalente à $ab=0$ et $ac=0$. Si $a=0$ on trouve (f_2) après le changement de base $\left(\frac{be_1+ce_2+de_3}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}},f_1,f_2,e_4\right)$ avec $\left(\frac{be_1+ce_2+de_3}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}},f_1,f_2\right)$ est une base orthonormale quelconque de $\ker\xi$. Si $b=c=0$ on trouve (f_5).

– Si $q=3$ alors $\xi^2\neq0$, $B=\ker\xi\oplus F_1\oplus F_2$ avec $\dim F_2\leq\dim(\ker\xi\oplus F_1)$ et $\dim F_2\leq\dim Ker\xi$. Donc $\dim\ker\xi=2$ et $\dim F_1=\dim F_2=1$, ce qui implique qu'il existe une base orthonormale de B tel que

$$M(A)=\begin{pmatrix}0&a&0&0\\-a&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ et }M(\xi)=\begin{pmatrix}0&0&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{et }M(\xi^2)=\begin{pmatrix}0&0&0&fb\\0&0&0&df\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ avec }f\neq0.$$

Ce cas est impossible car $e_4\in\ker A$ et $e_4\notin\ker\xi^2$, ce qui contredit la remarque 3.7.

$\square$

Cas non abélien :

Soit B une algèbre de Lie euclidienne plate non abélienne. D'après le Théorème 2.2, $S(B)$ et $[B,B]$ sont abélienne et B se décompose en somme orthogonale $B=S(B)\oplus[B,B]$.

De plus, pour tout $a \in S(B)$, $L_a = \mathrm{ad}_a$ et pour tout $b \in [B, B]$, $L_b = 0$.
Puisque $S(B)$ est abélienne et agit sur $[B, B]$ par des endomorphismes antisymétriques, alors il existe une famille de vecteurs non nuls $u_1, \dots, u_r \in S(B)$ et une base orthonormale $\{f_1, \dots, f_{2r}\}$ de $[B, B]$ tel que pour tout $j = 1, \dots, r$ et pour tout $s \in S(B)$,

$$[s, f_{2j-1}] = \langle s, u_j \rangle f_{2j} \text{ et } [s, f_{2j}] = -\langle s, u_j \rangle f_{2j-1}.$$

Soit F un endomorphisme de B. On pose pour tout $u \in B$, $F(u) = F_1(u) + F_2(u)$ avec $F_1(u) \in S(B)$ et $F_2(u) \in [B, B]$ et on note $\bar{F_1} \in End(S(B))$ et $\bar{F_2} \in End([B, B])$ respectivement la restriction de F_1 à $S(B)$ et la restriction de F_2 à $[B, B]$.

Proposition 3.9 *Avec les notations et les hypothèses précédentes,* $(D, \xi, 0, b_0)$ *est admissible si et seulement si* $\bar{D_1} - \bar{\xi_1}$ *et* $\bar{D_2} - \bar{\xi_2}$ *sont antisymétriques, et pour tous* $a, b \in S(B)$ *et tout* $c \in [B, B]$

$$\begin{aligned}
D_{1\diagup [B,B]} = \xi_{1\diagup [B,B]} = 0 \quad &, \quad (\xi_2 - D_2)_{\diagup S(B)} = 0 \\
0 &= [D_2(a), b] + [a, D_2(b)] && (3.6) \\
D_2([a, c]) &= [D_1(a), c] + [a, D_2(c)] && (3.7) \\
\xi_2([a, c]) &= [a, \xi_2(c)] && (3.8) \\
\left[\bar{D_1}, \bar{\xi_1}\right] &= \bar{\xi_1}^2 && (3.9) \\
\left[\bar{D_2}, \bar{\xi_2}\right] &= \bar{\xi_2}^2 && (3.10) \\
[D_2, \xi_2(a)] &= \xi_2^2(a) + \xi_2 o D_1(a) + [b_0, a] && (3.11)
\end{aligned}$$

De plus si $(D, \xi, 0, b_0)$ *est admissible alors* $\mathrm{tr}(D) = 0$.

Preuve. Rappelons que $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si D est une dérivation de B, $D - \xi$ est antisymétrique et (D, ξ, b_0) satisfait (2.11) et (2.12).
D est une dérivation de B et (D, ξ) satisfait (2.12) si et seulement si pour tous $a, b \in S(B)$

et tous $c, d \in [B, B]$

$$\begin{aligned}
0 &= [D_2(a), b] + [a, D_2(b)] \\
0 &= [D_1(c), d] + [c, D_1(d)] \\
D_2[a, c] &= [D_1(a), c] + [a, D_2(c)]\ ,\ D_1[a, c] = 0 \\
[a, \xi_2(b)] &= [b, \xi_2(a)] \\
\xi_2([a, c]) &= [a, \xi_2(c)]\ ,\ \xi_1([a, c]) = 0 \\
[a, \xi_2(b)] &= [a, D_2(b)] \qquad (*) \\
[a, \xi_2(c)] - \xi_2([a, c]) &= [D_1(a), c] + [a, D_2(c)] - D_2[a, c] \\
[D_1(c), d] &= 0
\end{aligned}$$

On constate que $D_{1\diagup_{[B,B]}} = \xi_{1\diagup_{[B,B]}} = 0$. De plus, d'après (*) on en déduit que pour tout $b \in S(B)$, $\xi_2(b) - D_2(b) \in Z(B)$, or $Z(B) \subset S(B)$, donc $(\xi_2 - D_2)_{\diagup_{S(B)}} = 0$. D'autre part, on déduit aisément que si $D_{1\diagup_{[B,B]}} = \xi_{1\diagup_{[B,B]}} = 0$ et $(\xi_2 - D_2)_{\diagup_{S(B)}} = 0$ alors $(D, \xi, 0, b_0)$ satisfait (2.11) si et seulement si

$$[D_1, \xi_1] = \xi_1^2 \text{ et } [D_2, \xi_2] = \xi_2^2 + \xi_2 D_1 - \mathrm{R}_{b_0}.$$

En évaluant les deux équations respectivement sur $S(B)$ et $[B, B]$ on peut conclure.
De plus, si $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible alors d'après ce qui précède, $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(\bar{D_1}) + \mathrm{tr}(\bar{D_2}) = \mathrm{tr}(\bar{\xi_1}) + \mathrm{tr}(\bar{\xi_2})$ or $\bar{\xi_1}$ et $\bar{\xi_2}$ sont nilpotents alors $\mathrm{tr}(D) = 0$. □

Utilisons cette proposition pour déterminer les $(D, \xi, 0, b_0)$ admissibles dans une algèbre de Lie euclidienne plate non abélienne de dimension 3 ou 4.

Proposition 3.10 *Soit B une algèbre de Lie euclidienne plate non abélienne de dimension 3. Alors il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ de B tel que $S(B) = \mathbb{R}e_1$ et $[B, B] = vect\{e_2, e_3\}$ et*

$$[e_1, e_2] = \lambda e_3 \quad et \quad [e_1, e_3] = -\lambda e_2 \quad avec \quad \lambda > 0.$$

De plus, $(D, \xi, 0, b_0)$ est admissible si et seulement si

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}\ et\ b_0 = b_1 e_1 + \frac{ca}{\lambda} e_2 + \frac{cb}{\lambda} e_3.$$

Preuve. D'après le théorème 2.2, il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ de B où les crochets dans cette base sont donnés par les relations précédentes.
Soit $(D, \xi, 0, b_0)$ admissible. Puisque $S(B)$ est de dimension 1, l'équation (3.6) est vérifiée et on déduit d'après l'équation (3.9) et le fait que $\bar{\xi_1} - \bar{D_1}$ est antisymétrique que $\bar{\xi_1} = \bar{D_1} = 0$ et donc $\xi_1 = D_1 = 0$. Donc ξ_2 et D_2 vérifient la même équation (3.8). Cette équation est équivalente à

$$\xi_2([e_1, e_2]) = [e_1, \xi_2(e_2)],$$
$$\lambda\xi_2(e_3) = \lambda\langle\xi_2(e_2), e_2\rangle e_3 - \lambda\langle\xi_2(e_2), e_2\rangle e_2,$$
$$\xi_2([e_1, e_3]) = [e_1, \xi_2(e_3)],$$
$$-\lambda\xi_2(e_2) = \lambda\langle\xi_2(e_3), e_2\rangle e_3 - \lambda\langle\xi_2(e_3), e_3\rangle e_2,$$

et ces équations sont équivalentes à

$$\langle\xi_2(e_3), e_2\rangle = -\langle\xi_2(e_2), e_3\rangle \quad \text{et} \quad \langle\xi_2(e_3), e_3\rangle = \langle\xi_2(e_2), e_2\rangle.$$

Puisque $D - \xi$ est antisymétrique, les matrices de D et ξ ont les formes suivantes

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & e & d \\ b & -d & e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & e & c \\ b & -c & e \end{pmatrix}.$$

D'autre part, d'après la proposition 3.8 1, l'équation (3.10) et le fait que $\bar{\xi_2} - \bar{D_2}$ est antisymétrique est équivalente à

$$\left(M(\bar{\xi_2}) = 0 \text{ et } M(\bar{D_2})^* = -M(\bar{D_2})\right) \text{ ou } \left(M(\bar{\xi_2}) = M(\bar{D_2}) \text{ et } M(\bar{\xi_2})^2 = 0\right). \quad (*)$$

Or $M(\bar{\xi_2}) = \begin{pmatrix} e & d \\ -d & e \end{pmatrix}$ et $M(\bar{D_2}) = \begin{pmatrix} e & c \\ -c & e \end{pmatrix}$, on déduit que (*) est équivalente à $e = d = 0$.
Finalement l'équation (3.11) est équivalente à $b_0 = b_1 e_1 + \frac{ca}{\lambda} e_2 + \frac{cb}{\lambda} e_3$. Ceci achève la démonstration. □

Proposition 3.11 *Soit B une algèbre de Lie euclidienne plate non abélienne de dimension 4. Alors il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ de B tel que $S(B) = vect\{e_1, e_2\}$ et $[B, B] = vect\{f_1, f_2\}$ et*

$$[e_1, f_1] = \lambda f_2\ ,\ [e_1, f_2] = -\lambda f_1 \text{ et } [e_2, f_1] = [e_2, f_2] = 0 \text{ avec } \lambda > 0.$$

De plus, $(D,\xi,0,b_0)$ est admissible si et seulement si

$$M(\xi)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\b&0&0&0\\c&0&0&0\end{pmatrix},\ M(D)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\b&0&0&0\\c&0&0&0\end{pmatrix}\ \textit{et}\ b_0=b_1e_1+b_2e_2+\frac{bd}{\lambda}f_1+\frac{cd}{\lambda}f_2.$$

Preuve. D'après le théorème 2.2, il existe une base orthonormale $\{e_1',e_2',f_1,f_2\}$ et $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ tel que pour $i=1,2$, on a $[e_i',f_1]=\lambda_i f_2$ et $[e_i',f_2]=-\lambda_i f_1$. Posons $\lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, $e_1=\lambda^{-1}(\lambda_1e_1'+\lambda_2e_2')$ et $e_2=\lambda^{-1}(\lambda_2e_1'-\lambda_1e_2')$. Les crochets dans cette nouvelle base $\{e_1,e_2,f_1,f_2\}$ vérifient les relations de la proposition.
Soit $(D,\xi,0,b_0)$ admissible. L'équation (3.6) est équivalente à

$$\begin{aligned}0&=[D_2(e_1),e_2]+[e_1,D_2(e_2)]\\&=\lambda\langle D_2(e_2),f_1\rangle f_2-\lambda\langle D_2(e_2),f_2\rangle f_1.\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à l'existence de $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$D_2(e_1)=cf_1+df_2\quad\text{et}\quad D_2(e_2)=0.$$

L'équation (3.7) est équivalente à

$$\begin{aligned}\lambda D_2(f_2)&=[D_1(e_1),f_1]+[e_1,D_2(f_1)]\\&=\lambda\langle D_1(e_1),e_1\rangle f_2+\lambda\langle D_2(f_1),f_1\rangle f_2-\lambda\langle D_2(f_1),f_2\rangle f_1,\\0&=[D_1(e_2),f_1]+[e_2,D_2(f_1)]\\&=\lambda\langle D_1(e_2),e_1\rangle f_2,\\-\lambda D_2(f_1)&=[D_1(e_1),f_2]+[e_1,D_2(f_2)]\\&=-\lambda\langle D_1(e_1),e_1\rangle f_1+\lambda\langle D_2(f_2),f_1\rangle f_2-\lambda\langle D_2(f_2),f_2\rangle f_1,\\0&=[D_1(e_2),f_2]+[e_2,D_2(f_2)]\\&=-\lambda\langle D_1(e_2),e_1\rangle f_1.\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\langle D_2(f_1),f_2\rangle&=-\langle D_2(f_2),f_1\rangle,\\\langle D_2(f_2),f_2\rangle&=\langle D_1(e_1),e_1\rangle+\langle D_2(f_1),f_1\rangle,\\0&=\langle D_1(e_2),e_1\rangle,\\\langle D_2(f_1),f_1\rangle&=\langle D_1(e_1),e_1\rangle+\langle D_2(f_2),f_2\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\langle D_2(f_1), f_2\rangle = -\langle D_2(f_2), f_1\rangle \ , \ \langle D_2(f_2), f_2\rangle = \langle D_2(f_1), f_1\rangle,$$

$$D_1(e_1) = ae_2 \quad \text{et} \quad D_1(e_2) = be_2.$$

L'équation (3.8) est équivalente à

$$\lambda\xi_2(f_2) = [e_1, \xi_2(f_1)] = \lambda\langle \xi_2(f_1), f_1\rangle f_2 - \lambda\langle \xi_2(f_1), f_2\rangle f_1,$$

$$-\lambda\xi_2(f_1) = [e_1, \xi_2(f_2)] = \lambda\langle \xi_2(f_2), f_1\rangle f_2 - \lambda\langle \xi_2(f_2), f_2\rangle f_1.$$

Ce qui est équivalent à

$$\langle \xi_2(f_2), f_1\rangle = -\langle \xi_2(f_1), f_2\rangle \quad \text{et} \quad \langle \xi_2(f_2), f_2\rangle = \langle \xi_2(f_1), f_1\rangle.$$

En résumé, Puisque $D - \xi$ est antisymétrique, alors les matrices de D et ξ ont les formes suivantes

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & \alpha & -\beta \\ d & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & 0 \\ a-e & b & 0 & 0 \\ c & 0 & \alpha & -f-\beta \\ d & 0 & \beta+f & \alpha \end{pmatrix}.$$

D'autre part, D'après la proposition 3.8 1, l'équation (3.10) et le fait que $\bar{\xi_2} - \bar{D_2}$ est antisymétrique sont équivalents à

$$\left(M(\bar{\xi_2}) = 0 \text{ et } M(\bar{D_2})^* = -M(\bar{D_2})\right) \text{ ou } \left(M(\bar{\xi_2}) = M(\bar{D_2}) \text{ et } M(\bar{\xi_2})^2 = 0\right). \ (*)$$

Or $M(\bar{\xi_2}) = \begin{pmatrix} \alpha & -f-\beta \\ f+\beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $M(\bar{D_2}) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on déduit que (*) est équivalente à $\alpha = f + \beta = 0$. De la même manière, l'équation (3.9) et le fait que $\bar{\xi_1} - \bar{D_1}$ est antisymétrique sont équivalents à

$$\left(M(\bar{\xi_1}) = 0 \text{ et } M(\bar{D_1})^* = -M(\bar{D_1})\right) \text{ ou } \left(M(\bar{\xi_1}) = M(\bar{D_1}) \text{ et } M(\bar{\xi_1})^2 = 0\right). \ (**)$$

Or $M(\bar{\xi_1}) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ a-e & b \end{pmatrix}$ et $M(\bar{D_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, alors (**) est équivalente à $e = b = 0$. Finalement,

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & f \\ d & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation (3.11) est équivalente à $b_0 = b_1e_1 + b_2e_2 + \frac{fc}{\lambda}f_1 + \frac{fd}{\lambda}f_2$. □

En utilisant le Théorème 3.3 et les propositions 3.8, 3.10 et 3.11, nous donnerons la liste des algèbres de Lie lorentzienne plates de centre dégénéré de dimension inférieure ou égale à 6. Les étapes qu'on va suivre sont les suivantes :

1. On prend une solution admissible $(D, \xi, 0, b_0)$, trouvée dans les propositions 3.8, 3.10 et 3.11.
2. En utilisant (2.9), on calcule les crochets de Lie et on fait un changement de bases pour donner une forme simple pour ces crochets.
3. Finalement on donne la métrique lorentzienne dans les coordonnées $\{e, \bar{e}, x_1, \dots, x_n\}$ associés à la nouvelle base qu'on note toujours $\{e, \bar{e}, e_1, \dots, e_n\}$ $(n = 1, \dots, 4)$. On change les paramètres si nécessaire, pour donner une forme simple pour les crochets et la métrique.

Dimension 3 :

(a) – **Solution admissible :** $\xi = D = 0$, $b_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
– **Nouvelle base :** $(|b_0|e, \bar{e}, -\epsilon e_1)$ avec ϵ est le signe de b_0.
– **Crochet non nul et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e, \quad \langle\ ,\ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + (dx_1)^2,\ \alpha > 0.$$

L'algèbre de Lie obtenue est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.

Dimension 4 :

(a) – **Solution admissible :** $\xi = D = 0$, $b_0 = (b_1, b_2)$ et $b_1 \neq 0$.
– **Nouvelle base :** $(|b_0|e, \bar{e}, -\epsilon e_1, e_2 - b_2b_1^{-1}e_1)$ avec ϵ est le signe de b_1.
– **Crochet non nul et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e, \quad \langle\ ,\ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2adx_1dx_2 + (dx_1)^2 + (1 + a^2)(dx_2)^2,$$

$$\alpha > 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est une extension triviale de l'algèbre de Heisenberg de dimension 3.

(b) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 1, premier cas avec $b_0 = (b_1, b_2)$.
– **Nouvelle base :** $(a^2e, \bar{e}, ae_1 - b_2e, e_2)$.

– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae, \ [\bar{e}, e_2] = e_1, \ [e_1, e_2] = -e,$$

$$\langle \ , \ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2\beta dx_1 d\bar{e} + \alpha(dx_1)^2 + (dx_2)^2,$$

$$\alpha > 0, \ a, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 3-nilpotente.

(c) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 1, deuxième cas avec $b_0 = (b_1, b_2)$.
– **Nouvelle base :** $(e, \lambda^{-1}\bar{e}, \lambda e_1 - b_2 e, -\lambda e_2 - b_1 e)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2, \ [\bar{e}, e_2] = -e_1,$$

$$\langle \ , \ \rangle = 2\alpha^{-1} ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\beta dx_1 + \gamma dx_2) + \alpha^2 \left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right),$$

$$\alpha \neq 0, \ \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

Dimension 5 :

(a) – **Solution admissible :** $\xi = D = 0$, $b_0 = (b_1, b_2, b_3)$ et $b_1 \neq 0$.
– **Nouvelle base :** $(|b_1|e, \bar{e}, -\epsilon e_1, e_2 - b_2 b_1^{-1} e_1, e_3 - b_3 b_1^{-1} e_1)$ avec ϵ est le signe de b_1.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e,$$

$\langle \ , \ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2a dx_1 dx_2 + 2b dx_1 dx_3 + 2ab dx_2 dx_3 + (dx_1)^2 + (1+a^2)(dx_2)^2 + (1+b^2)(dx_3)^2,$

$$\alpha > 0, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est une extension triviale de l'algèbre de Heisenberg de dimension 3.

(b) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 2, premier cas avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3)$.
– **Nouvelle base :** $(a^2 e, \bar{e}, ae_1 - b_3 e, e_2, e_3)$.

– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae,\ [\bar{e}, e_2] = be,\ [\bar{e}, e_3] = e_1,\ [e_1, e_3] = -e,$$

$$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2\beta d\bar{e}dx_1 + \alpha(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2,$$

$$\alpha > 0,\ a, b, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 3-nilpotente.

(c) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 2, deuxième cas avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3)$.
– **Nouvelle base :** $(e, \lambda^{-1}\bar{e}, \lambda e_1 - b_2 e, -\lambda e_2 - b_1 e, e_3)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2,\ [\bar{e}, e_2] = -e_1,\ [\bar{e}, e_3] = ae,$$

$$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha^{-1} ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\beta dx_1 + \gamma dx_2) + \alpha^2\left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right) + (dx_3)^2,$$

$$\alpha > 0,\ a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

(d) – **Solution admissible :** Proposition 3.10.
– **Nouvelle base :** $(e, \bar{e}, \lambda^{-1}e_1, \lambda e_2 - be, \lambda e_3 + ae)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae_2 + be_3 + ce,\ [\bar{e}, e_2] = de_3,\ [\bar{e}, e_3] = -de_2,$$

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -e_2,$$

$$\langle\ ,\ \rangle = 2ded\bar{e} + 2\alpha d\bar{e}(-bdx_1 + adx_3) + \alpha^{-1}(dx_1)^2 + \alpha\left((dx_2)^2 + (dx_3)^2\right),$$

$$\alpha > 0,\ (a, b, c, d) \neq 0.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

Dimension 6 :

(a) – **Solution admissible :** $\xi = D = 0$, $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et $b_1 \neq 0$.
– **Nouvelle base :** $(|b_1|e, \bar{e}, -\epsilon e_1, e_2 - b_2 b_1^{-1} e_1, e_3 - b_3 b_1^{-1} e_1, e_4 - b_4 b_1^{-1} e_1)$ avec ϵ est le signe de b_1.

– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e,$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2adx_1dx_2 + 2bdx_1dx_3 + 2cdx_1dx_4 + 2abdx_2dx_3 + 2acdx_2dx_4 + 2bcdx_3dx_4 + (dx_1)^2 + (1+a^2)(dx_2)^2 + (1+b^2)(dx_3)^2 + (1+c^2)(dx_4)^2,$

$$\alpha > 0,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est une extension triviale de l'algèbre de Heisenberg de dimension 3.

(b) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_1) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

– **Nouvelle base :** $(|e|, \bar{e}, ae_1 - b_3e, be_1 + ce_2 - b_4e, e_3, e_4)$. Posons $(b, c) = \rho(\cos\omega, \sin\omega)$. La condition $ac \neq 0$ est équivalente à $\omega \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$.

– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae,\ \ [\bar{e}, e_2] = be,\ \ [\bar{e}, e_3] = e_1,$$

$$[\bar{e}, e_4] = e_2,\ \ [e_1, e_3] = -c^2e,\ \ [e_2, e_4] = -\rho^2e,$$

$$[e_1, e_4] = -c\rho\cos(\omega)e,\ \ [e_2, e_3] = -c\rho\cos(\omega)e,$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\beta dx_1 + \gamma dx_2) + 2c\rho\cos(\omega)dx_1dx_2 + c^2(dx_1)^2 + \rho^2(dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2,$

$$\rho > 0,\ \ a, b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \ c \neq 0, \omega \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 3-nilpotente.

(c) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_2) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et $a \neq 0$.

– **Nouvelle base :** $(a^2e, \bar{e}, ae_1 - b_4e, e_2, e_3, e_4)$.

– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae,\ \ [\bar{e}, e_2] = be,\ \ [\bar{e}, e_3] = ce$$

$$[\bar{e}, e_4] = e_1,\ \ [e_1, e_4] = -e$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2\beta d\bar{e}dx_1 + \alpha(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2,$

$$\alpha > 0,\ \ a, b, c, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 3-nilpotente.

(d) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_3) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et $ab \neq 0$.
– **Nouvelle base :** $(e, a^{-1}\bar{e}, ae_1 - b_2 e, -ae_2 - b_1 e, e_3, e_4)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2,\ [\bar{e}, e_2] = -e_1,\ [\bar{e}, e_3] = ae_4,\ [\bar{e}, e_4] = -ae_3,$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha^{-1} ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\beta dx_1 + \gamma dx_2 + \mu dx_3 + \nu dx_4) + \alpha^2((dx_1)^2 + (dx_2)^2 + a^2(dx_3)^2 + a^2(dx_4)^2)$,

$$\alpha \neq 0,\ a \neq 0,\ \beta,\ \gamma,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

(e) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_3) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et $a \neq 0,\ b = 0$.
– **Nouvelle base :** $(e, a^{-1}\bar{e}, ae_1 - b_2 e, -ae_2 - b_1 e, e_3, e_4)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2,\ [\bar{e}, e_2] = -e_1,\ [\bar{e}, e_3] = ce,\ [\bar{e}, e_4] = de,$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2\alpha^{-1} ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\beta dx_1 + \gamma dx_2) + \alpha^2\left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right) + (dx_3)^2 + (dx_4)^2$,

$$\alpha \neq 0,\ c,\ d,\ \beta,\ \gamma, \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

(f) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_4) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.
– **Nouvelle base :** $(a^3 e, a^{-1}\bar{e}, ae_1 - b_2 e, -ae_2 - b_1 e, be_2 + ae_3 - b_4 e, be_1 - ae_4 - b_3 e)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2,\ [\bar{e}, e_2] = -e_1,\ [\bar{e}, e_3] = ae_1 + e_4,$$

$$[\bar{e}, e_4] = ae_2 - e_3,\ [e_1, e_3] = -ae,\ [e_2, e_4] = -ae,\ [e_3, e_4] = 2a^2 e,$$

$\langle\ ,\ \rangle = 2ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\alpha dx_1 + \beta dx_2 + \gamma dx_3 + \mu dx_4) - 2adx_2dx_3 + 2adx_1dx_4 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (1+a)^2\left((dx_3)^2 + (dx_4)^2\right)$,

$$a \neq 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \mu, \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 3-résoluble et unimodulaire.

(g) – **Solution admissible :** Proposition 3.8 3, (f_5) avec $b_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.
– **Nouvelle base :** $(ab^2e, a^{-1}\bar{e}, ae_1 - b_2e, -ae_2 - b_1e, be_3 - b_4e, ae_4)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = e_2, \ [\bar{e}, e_2] = -e_1, \ [\bar{e}, e_3] = ae,$$

$$[\bar{e}, e_4] = e_3, \ [e_3, e_4] = -e,$$

$\langle \ , \ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2d\bar{e}(\gamma dx_1 + \mu dx_2 + \nu dx_3) + \beta(dx_1)^2 + \beta(dx_2)^2 + \alpha(dx_3)^2 + \beta(dx_4)^2$,

$$\alpha, \ \beta > 0, \ a, \ \gamma, \ \mu, \ \nu \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

(h) – **Solution admissible :** Proposition 3.11.
– **Nouvelle base :** $(e, \bar{e}, \lambda^{-1}e_1, f_1 - \frac{c}{\lambda}e, f_2 + \frac{b}{\lambda}e)$.
– **Crochets non nuls et métrique :**

$$[\bar{e}, e_1] = ae_2 + bf_1 + cf_2 + de, \ [\bar{e}, e_2] = ee, \ [\bar{e}, f_1] = gf_2,$$

$$[\bar{e}, f_2] = -gf_1, \ [e_1, e_2] = ae, \ [e_1, f_1] = f_2, \ [e_1, f_2] = -f_1$$

$$\langle \ , \ \rangle = 2\alpha ded\bar{e} + 2d\bar{e}(-cdx_3 + dx_4) + \alpha^2(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2,$$

$$\alpha > 0, \ a, \ ,b, \ c, \ d, \ e, \ g \in \mathbb{R}.$$

L'algèbre de Lie obtenue est 2-résoluble et unimodulaire.

3.4 Groupes de Lie lorentziens plats admettant un champ de Killing invariant à gauche de type temps

Le but de cette section est de déterminer les groupes de Lie lorentziens plats qui admettent un champ de Killing invariant à gauche de type temps. On va déterminer la structure de ces groupes de Lie, et on va constater que ces groupes de Lie sont exactement les groupes de Lie qui peuvent posséder une métrique riemannienne plate invariante à gauche. Par suite, ces groupes de Lie sont 2-résolubles, unimodulaires et donc ils sont géodésiquement complets.

Soit (G,μ) un groupe de Lie lorentzien plat et $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie lorentzienne plate. Il est facile de voire que l'existence d'un champ de Killing invariant à gauche de type temps est équivalente à l'existence d'un vecteur $u\in S(\mathfrak{g})$ tel que $\langle u,u\rangle<0$.

Théorème 3.4 *Soit* (G,μ) *un groupe de Lie lorentzien. Alors* G *est plat et admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps si et seulement si son algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *se décompose en une somme orthogonale* $\mathfrak{g}=S(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, *avec* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *abélien,* $S(\mathfrak{g})$ *abélienne et contienne un vecteur de type temps. Dans ce cas* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *est de dimension paire, et le produit de Levi-Civita est donné par*

$$\mathrm{L}_a=\begin{cases}\mathrm{ad}_a & si \quad a\in S(\mathfrak{g}),\\ 0 & si \quad a\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}].\end{cases} \tag{3.12}$$

Preuve. Soit $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie lorentzienne plate. S'il existe $u\in S(\mathfrak{g})=(\mathfrak{g}.\mathfrak{g})^\perp$ tel que $\langle u,u\rangle<0$, alors la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $u^\perp$ est définie positive, et également pour la restriction à $S(\mathfrak{g})^\perp=\mathfrak{g}.\mathfrak{g}\subset u^\perp$. D'où $\mathfrak{g}=S(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}.\mathfrak{g}$ et la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $S(\mathfrak{g})$ est non dégénéré lorentzien. Montrons que $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}.\mathfrak{g}$ est abélien et $\mathfrak{h}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Il est claire que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie riemannienne plate, et donc

$$\mathfrak{h}=S(\mathfrak{h})\oplus[\mathfrak{h},\mathfrak{h}],$$

avec $S(\mathfrak{h})$ et $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ sont abéliennes. De plus, ils existent $\lambda_1,\ldots,\lambda_p\in S(\mathfrak{h})^*\setminus\{0\}$ et une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_{2p})$ de $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ tel que

$$\forall i=1,\ldots,p,\forall s\in S(\mathfrak{h}),\quad \mathrm{ad}_s(e_{2i-1})=\lambda_i(s)e_{2i}\quad\text{et}\quad \mathrm{ad}_s(e_{2i})=-\lambda_i(s)e_{2i-1}.$$

D'autre part, pour tout $s\in S(\mathfrak{g})$, ad_s est antisymétrique et laisse $\mathfrak{h}$ invariant, donc $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ est aussi invariant par ad_s et également pour $S(\mathfrak{h})$. De plus, si $x\in S(\mathfrak{h})$ vérifie $[x,s]=0$ pour tout $s\in S(\mathfrak{g})$ alors ad_x est antisymétrique donc $x\in S(\mathfrak{g})$ d'où $x=0$. On en déduit qu'ils existent aussi $\mu_1,\ldots,\mu_q\in S(\mathfrak{g})^*\setminus\{0\}$ et une base orthonormale $(f_1,\ldots,f_{2q})$ de $S(\mathfrak{h})$ tel que

$$\forall i=1,\ldots,q,\forall s\in S(\mathfrak{g}),\quad \mathrm{ad}_s(f_{2i-1})=\mu_i(s)f_{2i}\quad\text{et}\quad \mathrm{ad}_s(f_{2i})=-\mu_i(s)f_{2i-1}.$$

Supposons que $\mathfrak{h}$ est non abélienne. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $[f_1,e_1]=\lambda_1(f_1)e_2\neq 0$. On a également $[f_1,e_2]=-\lambda_1(f_1)e_1\neq 0$. De plus, il existe

$s \in S(\mathfrak{g})$ tel que $[s, f_1] = \mu_1(s)f_2 \neq 0$. Alors on a nécessairement $[f_2, e_1] = \lambda_1(f_2)e_2 \neq 0$. Sinon, si $[f_2, e_1] = 0$ alors $[f_2, e_2] = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[s,f_2]}(e_1) &= -\mu_1(s)\lambda_1(f_1)e_2 \\ &= [\mathrm{ad}_s, \mathrm{ad}_{f_2}](e_1) \\ &= [[s, e_1], f_2] \\ &= \sum_{i=3}^{2p} \alpha_i e_i. \end{aligned}$$

Ceci est impossible car $\mu_1(s)\lambda_1(f_1) \neq 0$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [e_1, [f_1, s]] + [f_1, [s, e_1]] + [s, [e_1, f_1]] \\ &= -\mu_1(s)[e_1, f_2] + [f_1, \sum_{i=2}^{2p} \beta_i e_i] - \lambda_1(f_1)[s, e_2] \\ &= \mu_1(s)\lambda_1(f_2)e_2 + \gamma_1 e_1 + \sum_{i=3}^{2p} \gamma_i e_i. \end{aligned}$$

Ceci est impossible, donc $\mathfrak{h}$ est abélienne.
On a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'autre part, pour tout $i = 1, \ldots, 2q$, il existe $s \in S(\mathfrak{g})$ tel que $[s, f_{2i-1}] = \mu_i(s)f_{2i} \neq 0$ et $[s, f_{2i}] = -\mu_i(s)f_{2i-1} \neq 0$. Ceci montre que $f_{2i-1}, f_{2i} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}$.
Inversement, si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie lorentzien (G, μ) se décompose en somme orthogonale $\mathfrak{g} = S(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ avec $S(\mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sont abéliennes et il existe un vecteur de type temps dans $S(\mathfrak{g})$, alors le produit de Levi-Civita est donné par (3.12), ce qui implique que (G, μ) est un groupe de Lie lorentzien plat qui admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps. □
Une conséquence immédiate du Théorème 3.4 est le corollaire suivant :

Corollaire 3.2 *Tout groupe de Lie lorentzien plat qui admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps est 2-résoluble et unimodulaire et donc il est géodésiquement complet.*

Corollaire 3.3 *Soit* (G, μ) *un groupe de Lie lorentzien plat. Alors* G *admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps si et seulement si* G *admet une métrique riemannienne invariante à gauche qui a la même connexion de Levi-Civita que* μ.

Preuve. Soit (G,μ) un groupe de Lie lorentzien plat et $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ son algèbre de Lie lorentzienne plate. Si (G,μ) admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps alors d'après Théorème 3.4, $\mathfrak{g} = S(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ avec $S(\mathfrak{g})$ est non dégénéré lorentzien et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est non dégénéré euclidien.
On choisit un produit scalaire définie positive $\langle\ ,\ \rangle_S$ sur $S(\mathfrak{g})$ et on définie $\langle\ ,\ \rangle'$ sur $\mathfrak{g}$ comme la somme orthogonale de $\langle\ ,\ \rangle_S$ et la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Il est facile de montrer que la métrique riemannienne invariante à gauche sur G qui correspond à $\langle\ ,\ \rangle'$ possède la même connexion de Levi-Civita que μ.
Inversement, supposons que G possède une métrique riemannienne invariante à gauche μ' qui a la même connexion de Levi-Civita que μ. Posons $\langle\ ,\ \rangle = \mu(e)$ et $\langle\ ,\ \rangle' = \mu'(e)$. Puisque μ et μ' ont la même connexion de Levi-Civita, alors d'après la proposition 3.4, μ et μ' ont la même sous-algèbre des champs de Killing invariant à gauche identifié à $S(\mathfrak{g})$. Donc en appliquant Théorème 2.2 et la proposition 3.4 on déduit que $\mathfrak{g} = S(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et cette somme est orthogonale par rapport aux deux métriques $\langle\ ,\ \rangle$ et $\langle\ ,\ \rangle'$. Si la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $S(\mathfrak{g})$ est lorentzienne alors μ admet un champ de Killing invariant à gauche de type temps. Si la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est lorentzienne, alors il existe une base $(e_1,\ldots,e_p)$ de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ qui est orthogonale pour $\langle\ ,\ \rangle$ et orthonormale pour $\langle\ ,\ \rangle'$ et tel que $\langle e_i,e_i\rangle > 0$ pour $i = 1,\ldots,p-1$ et $\langle e_p,e_p\rangle < 0$. Soit $s \in S(\mathfrak{g})$, on a $\langle [s,e_p],e_p\rangle = 0$ et pour tout $i = 1,\ldots,p-1$,

$$\begin{aligned}
\langle [s,e_p],e_i\rangle &= \langle [s,e_p],e_i\rangle'\langle e_i,e_i\rangle \\
&= -\langle [s,e_i],e_p\rangle \\
&= -\langle [s,e_i],e_p\rangle'\langle e_p,e_p\rangle \\
&= \langle [s,e_p],e_i\rangle'\langle e_p,e_p\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque $\langle e_p,e_p\rangle < 0$ et $\langle e_i,e_i\rangle > 0$ alors $\langle [s,e_p],e_i\rangle = 0$ et donc $[s,e_p] = 0$ pour tout $s \in S(\mathfrak{g})$ d'où $e_p \in Z(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ ce qui est impossible. Ceci achève la démonstration. □

3.5 Groupes de Lie lorentziens plats dont la connexion de Levi-Civita est bi-invariante

Le produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie euclidienne plate ne peut être ni associatif, ni alternatif ni à puissance associative comme on va montrer juste après. Le

but de cette partie est d'étudier l'associativité de ce produit dans le cas où la métrique est lorentzienne.
Notons que l'associativité du produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate est équivalente à la bi-invariance de la connexion de Levi-Civita associée à cette métrique [24].

Définitions 3.12 *Soit* $(\mathrm{A}, .)$ *une algèbre sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$*.*
- A *est dite alternative si pour tous* $x, y \in \mathrm{A}$ *on a,* $ass(x, x, y) = ass(y, x, x) = 0$.
- A *est dite à puissance associative si toute sous-algèbre engendré par un seul élément est associative.*

Il est évident que toute algèbre associative est alternative et à puissance associative.
Dans [31], il est démontré que toute algèbre alternative est à puissance associative.
Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie euclidienne plate. D'après le Théorème 2.2, $\mathfrak{g}$ se décompose en une somme orthogonale $\mathfrak{g} = S(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ où $S(\mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sont abélienne, et le produit de Levi-Civita est donné par

$$\mathrm{L}_a = \begin{cases} \mathrm{ad}_a & si \quad a \in S(\mathfrak{g}), \\ 0 & si \quad a \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Soit $x = s + b$ où $s \in S(\mathfrak{g})$ et $b \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. On a

$$x^2 = (s + b).(s + b) = s.b = [s, b],$$

et

$$x^2.x = [s, b].x = 0.$$

D'autre part

$$x.x^2 = (s + b).[s, b] = s.[s, b] = [s, [s, b]].$$

Si l'algèbre est à puissance associative alors pour tout $s \in S(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}_s^2 = 0$ donc l'algèbre de Lie est nilpotente donc il est abélienne.
Par conséquent, le seul cas où le produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie euclidienne plate soit à puissance associative est le cas abélien. En particulier, le produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie euclidienne plate non abélienne ne peut être ni associatif ni alternatif ni à puissance associative.

Étudions cette propriété dans le cas où la signature de la métrique est quelconque et en particulier lorentzienne.

Proposition 3.13 *Soit* $(\mathrm{A}, .)$ *une algèbre symétrique à gauche. Alors* A *est alternative si et seulement si* A *est associative.*

Preuve. Soit $(\mathrm{A}, .)$ une algèbre symétrique à gauche. Donc pour tous $x, y, z \in \mathrm{A}$, $ass(x,y,z) = ass(y,x,z)$. Supposons que ce produit est alternatif, alors pour tous $x, y \in \mathrm{A}$, $ass(x,x,y) = ass(y,x,x) = 0$. Soit $x, y, z \in \mathrm{A}$, en développant l'équation $ass(x+y, x+y, z) = 0$, on trouve

$$ass(x,x,z) + ass(x,y,z) + ass(y,x,z) + ass(y,y,z) = 0,$$

d'où $ass(x,y,z) + ass(y,x,z) = 0$. Or le produit est symétrique à gauche donc $ass(x,y,z) = 0$, pour tous $x, y, z \in \mathrm{A}$, ce qui montre que l'algèbre est associative. □

D'après la proposition précédente, le produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie pseudo-riemannienne plate est alternatif si et seulement si il est associatif.

Dans le cas où la métrique est lorentzienne, on a un résultat similaire au cas euclidien.

Proposition 3.14 *Le produit de Levi-Civita dans une algèbre de Lie lorentzienne plate est associatif si et seulement si l'algèbre est abélienne.*

En d'autre terme, la connexion de Levi-Civita dans un groupe de Lie lorentzien plat est bi-invariante si et seulement si le groupe est abélien.

Preuve. Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie lorentzienne plate. Si le produit de Levi-Civita est associatif alors pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a $(x.y).z = x.(y.z)$. En posant $x = y$, on trouve que pour tout $x \in \mathfrak{g}$ on a $\mathrm{L}_{x^2} = \mathrm{L}_x^2$.

Or L_{x^2} est antisymétrique et L_x^2 est symétrique alors $\mathrm{L}_x^2 = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

La preuve de la proposition 3.4 montre que si f est un endomorphisme qui vérifie $f^2 = 0$ et qui est antisymétrique par rapport à une métrique lorentzienne alors $f = 0$. D'où $\mathrm{L}_x = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Donc le produit de Levi-Civita est trivial et en particulier l'algèbre de Lie est abélienne. □

Chapitre 4

Groupes de Lie lorentziens plats non unimodulaires

Le chapitre précédent a été consacré à la détermination des groupes de Lie lorentziens plats : nilpotents, de centre dégénéré, qui admettent un champ de Killing invariant à gauche de type temps, et ceux dont le produit de Levi-Civita est associatif. Ces groupes sont alors unimodulaires, en particulier la métrique est géodésiquement complète.
L'objectif de ce chapitre est de déterminer les algèbres de Lie lorentziennes plates non-unimodulaires, ce qui signifie en particulier la détermination de tous les groupes de Lie lorentziens plats incomplets.

4.1 Représentations lorentziennes d'algèbres de Lie résolubles

Nous aurons besoin dans ce qui suit du théorème suivant

Théorème 4.1 (Lie) *([21], pp. 42) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $V \neq 0$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}V$ une représentation. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe un vecteur propre commun $v \neq 0$ pour tous les endomorphismes $\rho(u)$, $u \in \mathfrak{g}$. Si $\mathbb{K}$ est quelconque, alors si tous les valeurs propres de tous les endomorphismes $\rho(u)$, $u \in \mathfrak{g}$ sont dans $\mathbb{K}$ alors il existe un vecteur propre commun $v \neq 0$ pour tous les endomorphismes $\rho(u)$, $u \in \mathfrak{g}$.*

Ce théorème va nous servir à déduire des résultats importants sur les représentations euclidiennes et lorentziennes des algèbres de Lie résolubles.

Dans tout ce qui suit, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. On fixe un ordre sur $\mathfrak{g}^*$, et on note $d\lambda$ l'élément de $\wedge^2\mathfrak{g}^*$ donné par $d\lambda(u,v) = -\lambda([u,v])$.
Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel pseudo-euclidien de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré $\langle\ ,\ \rangle$ de signature $(q, n-q)$. Soit $\rho :\ \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, on pose

$$V_\lambda = \{x \in V/\rho(u)(x) = \lambda(u)x \text{ pour tout } u \in \mathfrak{g}\}.$$

La représentation est dite indécomposable si V n'admet aucun sous-espace propre invariant et non dégénéré.

Proposition 4.1 *Soit $\rho :\ \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation indécomposable dans un espace vectoriel euclidien. Alors on a deux cas possibles.*

- $\dim V = 1$ *et* $V = V_0$.
- $\dim V = 2$ *et il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $d\lambda = 0$ *et pour tout* $u \in \mathfrak{g}$, $\rho(u)^2 = -\lambda(u)^2 Id_V$.

De plus, dans le deuxième cas, il existe une base orthonormale (e, f) de V tel que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(u)(e) = \lambda(u)f \quad \textit{et} \quad \rho(u)(f) = -\lambda(u)e,$$

et toute autre base orthonormale qui vérifie ces équations est de la forme

$$(\cos(\psi)e - \sin(\psi)f\ ,\ \sin(\psi)e + \cos(\psi)f)\ ,\ \psi \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On considère le complexifié $V^{\mathbb{C}}$ de V. Alors ρ se prolonge en une représentation $\rho^{\mathbb{C}} :\ \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ en posant

$$\rho^{\mathbb{C}}(u)(a + ib) = \rho(u)(a) + i\rho(u)(b).$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est résoluble alors d'après le théorème de Lie (cf. Théorème 4.1), il existe $\lambda_1 + i\lambda_2 :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x + iy \neq 0$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\rho^{\mathbb{C}}(u)(x + iy) = (\lambda_1(u) + i\lambda_2(u))\,(x + iy),$$

ceci est équivalent à

$$\rho(u)(x) = \lambda_1(u)x - \lambda_2(u)y \quad \text{et} \quad \rho(u)(y) = \lambda_2(u)x + \lambda_1(u)y. \tag{4.1}$$

Puisque

$$\langle\rho(u)(x), x\rangle = \langle\rho(u)(y), y\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\rho(u)(x), y\rangle = -\langle\rho(u)(y), x\rangle$$

on en déduit que :

$$\lambda_1(u)\langle x, x\rangle - \lambda_2(u)\langle x, y\rangle = 0,$$

$$\lambda_2(u)\langle x, x\rangle + 2\lambda_1(u)\langle x, y\rangle - \lambda_2(u)\langle y, y\rangle = 0,$$

$$\lambda_2(u)\langle x, y\rangle + \lambda_1(u)\langle y, y\rangle = 0.$$

Ce qui peux s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(u) & -\lambda_2(u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) & \lambda_1(u) \\ \lambda_2(u) & 2\lambda_1(u) & -\lambda_2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle \\ \langle x, y\rangle \\ \langle y, y\rangle \end{pmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

On distingue alors deux cas :

– Les vecteurs x, y sont liés. Posons $y = ax$ avec $x \neq 0$, alors

$$\rho(u)(x) = (\lambda_1(u) - a\lambda_2(u))\, x \quad \text{et} \quad a\rho(u)(x) = (\lambda_2(u) + a\lambda_1(u))\, x.$$

D'où

$$\lambda_2(u) + a\lambda_1(u) = a\lambda_1(u) - a^2\lambda_2(u).$$

Ce qui implique que $\lambda_2 = 0$ et donc $\rho(u)(x) = \lambda_1(u)x$.
Puisque $\langle\rho(u)(x), x\rangle = 0$ et $x \neq 0$ alors $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Puisque la représentation est indécomposable alors $\dim V = 1$ et $V = V_0$.

– Les vecteurs x, y sont linéairement indépendants. Puisque $\langle x, x\rangle \neq 0$, d'après l'équation (4.2), on a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u) & -\lambda_2(u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) & \lambda_1(u) \\ \lambda_2(u) & 2\lambda_1(u) & -\lambda_2(u) \end{vmatrix} = -2\lambda_1(u)(\lambda_1(u)^2 + \lambda_2(u)^2) = 0.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors $vect\{x, y\} \subset V_0$ ce qui est impossible.
Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ alors $\langle x, y\rangle = 0$ et $vect\{x, y\}$ est invariant donc $V = vect\{x, y\}$ et

$$\rho(u)(x) = -\lambda(u)y \quad \text{et} \quad \rho(u)(y) = \lambda(u)x.$$

On a

$$\begin{aligned}
\rho([u,v])(y) &= \lambda([u,v])x \\
&= [\rho(u),\rho(v)]y \\
&= \rho(u)\rho(v)y - \rho(v)\rho(u)y \\
&= -\lambda(v)\lambda(u)y + \lambda(u)\lambda(v)y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $d\lambda = 0$. Ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 4.1 *Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel euclidien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors V se décompose en une somme orthogonale*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i \oplus V_0\ ,$$

où E_i est un sous-espace invariant indécomposable de dimension 2 pour $i = 1, \ldots, q$. En particulier, une sous-algèbre résoluble de $so(V)$ est nécessairement abélienne.

Preuve. Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel euclidien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit

$$V_0 = \{x \in V /\ \rho(u)(x) = 0,\ \forall u \in \mathfrak{g}\}.$$

$V_0^{\perp}$ est un sous-espace invariant par ρ, donc $V_0^{\perp}$ est somme orthogonale de sous-espaces invariants indécomposables E_i de dimension 2, pour tout $i = 1, \ldots, q$. $\left(\text{ie } V_0^{\perp} = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i\right)$
Soit $\mathfrak{g}_0$ une sous-algèbre résoluble de $so(V)$. L'application

$$\begin{array}{rcl}
Id : \mathfrak{g}_0 & \longrightarrow & so(V) \\
f & \longrightarrow & f
\end{array}$$

est une représentation de $\mathfrak{g}_0$ dans $so(V)$, d'où

$$V = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i \oplus V_0.$$

Soit $\{e_1, f_1, \ldots, e_q, f_q, v_1, \ldots, v_s\}$ une base adaptée à cette décomposition. On a pour tout $i = 1, \ldots, s$, et pour tous $f, g \in \mathfrak{g}_0$, $[f, g](v_i) = 0$.

Or pour tout $j = 1, \ldots, q$, $f(e_j) = \lambda_j(f)f_j \quad \text{et} \quad f(f_j) = \lambda_j(f)e_j$. D'où

$$\begin{aligned}
[f, g](e_j) &= fog(e_j) - gof(e_j) \\
&= -\lambda_j(g)\lambda_j(f)e_j + \lambda_j(f)\lambda_j(g)e_j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même on montre que $[f, g](f_j) = 0$, d'où $[f, g] = 0$.

Proposition 4.2 *Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation lorentzienne indécomposable. Alors on a trois cas possibles :*

- $\dim V = 1$ *et* $V = V_0$.
- $\dim V = 2$, *il existe* $\lambda > 0$ *telle que* $d\lambda = 0$ *et une base* $(e, \bar{e})$ *de* V *telle que* $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$, $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ *et pour tout* $u \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(u)(e) = \lambda(u)e \quad et \quad \rho(u)(\bar{e}) = -\lambda(u)\bar{e}.$$

- $\dim V \geq 3$ *et il existe* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ *tel que* $d\lambda = 0$ *et* V_λ *un sous-espace de dimension 1 totalement isotrope. De plus,pour tout* $\mu \neq \lambda$, $V_\mu = \{0\}$.

Preuve. Comme on a fait dans la preuve de la proposition 4.1, d'après le théorème de Lie, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{g}^*$ et $x, y \in V$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$, qui vérifient (4.2)-(4.1).

On distingue alors deux cas :

- Les vecteurs x, y sont liés, par exemple $y = ax$ avec $x \neq 0$. D'après (4.2)-(4.1) on a $\lambda_2 = 0$ et pour tout $u \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1(u)\langle x, x\rangle = 0$.
  Si $\langle x, x\rangle \neq 0$ alors $\dim V = 1$, $V = V_0$ et donc on se trouve dans le premier cas.
  Si $\langle x, x\rangle = 0$, alors supposons que V_{λ_1} est non totalement isotrope donc il contient un vecteur non isotrope z et par suite $V = vect\{z\}$ ce qui est impossible car $x \in V$. Donc V_{λ_1} est nécessairement totalement isotrope d'où $V_{\lambda_1} = vect\{x\}$. Alors on a deux situations : La première est celle où il existe $\mu \neq \lambda_1$ tel que $V_\mu = vect\{z\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 totalement isotrope. D'après la relation $\langle \rho(u)(x), z\rangle = -\langle \rho(u)(z), x\rangle$ et $\langle x, z\rangle \neq 0$ on en déduit que $\mu = -\lambda_1$. D'où $\lambda_1 \neq 0$ et $V = V_{\lambda_1} \oplus V_\mu$, ce qui se ramène au deuxième cas.
  La deuxième situation est celle où pour tout $\mu \neq \lambda_1$, $V_\mu = \{0\}$. Dans ce cas $\dim V \geq 3$ et on se trouve alors dans le troisième cas. En effet, si $\dim V = 2$, on choisit un vecteur isotrope $\bar{x}$ tel que $\langle x, \bar{x}\rangle = 1$. Il est facile de voire que $\bar{x} \in V_{-\lambda_1}$ ce qui est impossible.

– Les vecteurs x, y sont linéairement indépendants. Puisque le plan $vect\{x, y\}$ ne peut être totalement isotrope, alors d'après (4.2) on en déduit que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\langle x, y\rangle = 0$ et $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle \neq 0$. Donc $vect\{x, y\}$ est invariant euclidien, ce qui est impossible.

□

Étudions en détail le troisième cas de la proposition 4.2.
Soit $\rho : \ \mathfrak{g} \longrightarrow so(V)$ une représentation lorentzienne indécomposable avec $\dim V \geq 3$. Alors il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $d\lambda = 0$, V_λ est un sous-espace totalement isotrope de dimension 1, et pour tout $\mu \neq \lambda$, $V_\mu = \{0\}$. L'espace quotient $\widetilde{V} = V_\lambda^\perp / V_\lambda$ est un espace euclidien et ρ induit une représentation $\widetilde{\rho} : \ \mathfrak{g} \longrightarrow so(\widetilde{V})$. Alors d'après le corollaire 4.1,

$$\widetilde{V} = \bigoplus_{i=1}^{q} \widetilde{E_i} \oplus \widetilde{V}_0.$$

Notons $\pi : \ V_\lambda^\perp \longrightarrow \widetilde{V}$ la projection canonique, et choisissons un générateur de V_λ. Notons $E_i = \pi^{-1}(\widetilde{E_i})$ pour $i = 1, \ldots, q$ et $E_0 = \pi^{-1}(\widetilde{V}_0)$.
Pour tout $x \in E_0$, il existe $a_x \in \mathfrak{g}^*$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(u)(x) = a_x(u)e. \tag{4.3}$$

Ceci définie une application linéaire $a : \ E_0 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Son noyau $\ker a$ est un sous-espace invariant. Comme V est indécomposable alors,

$$\ker a = \begin{cases} \{0\} & si \quad \lambda \neq 0, \\ \mathbb{R}e & si \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour tout $x \in E_0$ et tous $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \rho([u,v])(x) &= a_x([u,v])(e) \\ &= \rho(u)o\rho(v)(x) - \rho(v)o\rho(u)(x) \\ &= (\lambda(u)a_x(v) - \lambda(v)a_x(u))\, e. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E_0$,

$$da_x = a_x \wedge \lambda. \tag{4.5}$$

Fixons $i = 1, \ldots, q$. En utilisant la proposition 4.1, on choisit une base (e, e_i, f_i) de E_i telle que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(u)(e) = \lambda(u)e\ ,\ \rho(u)(e_i) = b_i(u)e + \lambda_i(u)f_i \quad \text{et} \quad \rho(u)(f_i) = c_i(u)e - \lambda_i(u)e_i. \tag{4.6}$$

On a pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\rho([u,v])(e_i) &= b_i([u,v])e + \lambda_i([u,v])f_i \\
&= \rho(u)(b_i(v)e + \lambda_i(v)f_i) - \rho(v)(b_i(u)e + \lambda_i(u)f_i) \\
&= (\lambda(u)b_i(v) - \lambda(v)b_i(u))\, e + \lambda_i(v)\,(c_i(u)e - \lambda_i(u)e_i) - \lambda_i(u)\,(c_i(v)e - \lambda_i(v)e_i) \\
&= (\lambda(u)b_i(v) - \lambda(v)b_i(u) + \lambda_i(v)c_i(u) - \lambda_i(u)c_i(v))\, e,
\end{aligned}$$

donc

$$b_i([u,v]) = \lambda(u)b_i(v) - \lambda(v)b_i(u) + \lambda_i(v)c_i(u) - \lambda_i(u)c_i(v).$$

D'où

$$db_i = b_i \wedge \lambda + \lambda_i \wedge c_i \quad \text{et} \quad dc_i = c_i \wedge \lambda + b_i \wedge \lambda_i. \tag{4.7}$$

Si (e, g_i, h_i) est une autre base qui vérifie (4.6) alors

$$g_i = \alpha e + \cos(\psi)e_i + \sin(\psi)f_i \quad \text{et} \quad h_i = \beta e - \sin(\psi)e_i + \cos(\psi)f_i.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\rho(u)(g_i) &= (\alpha\lambda(u) - \beta\lambda_i(u) + \cos(\psi)b_i(u) + \sin(\psi)c_i(u))\, e + \lambda_i(u)\,(\cos(\psi)f_i - \sin(\psi)e_i + \beta e) \\
&= B_i(u)e + \lambda_i(u)h_i, \\
\rho(u)(h_i) &= (\beta\lambda(u) + \alpha\lambda_i(u) - \sin(\psi)b_i(u) + \cos(\psi)c_i(u))\, e - \lambda_i(u)\,(\sin(\psi)f_i + \cos(\psi)e_i + \alpha e) \\
&= C_i(u)e - \lambda_i(u)g_i.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{pmatrix} B_i(u) \\ C_i(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(u) \\ \lambda_i(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i(u) \\ c_i(u) \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Le cas où $\dim \mathfrak{g} = 1$ est intéressant et donne comme application la proposition suivante :

Proposition 4.3 *Soit F un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel lorentzien L. Alors L se décompose en une somme orthogonale $L = V \oplus E$, avec V est non dégénéré lorentzien invariant et E est non dégénéré euclidien invariant et on a les 3 cas possibles suivants :*

- $\dim V = 1$ *et* $V \subset \ker F$ *;*
- $\dim V = 2$ *et il existe une base* $(e, \bar{e})$ *de* V *et* $\alpha > 0$ *tel que* $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$, $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$, $F(e) = \alpha e$ *et* $F(\bar{e}) = -\alpha\bar{e}$;

– $\dim V = 3$ *et il existe une base* $(e, \bar{e}, f)$ *de* V *et* $\alpha \neq 0$ *tel que* $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$, $\langle e, \bar{e}\rangle = \langle f, f\rangle = 1$, $\langle e, f\rangle = \langle \bar{e}, f\rangle = 0$, $F(e) = 0$, $F(f) = \alpha e$ *et* $F(\bar{e}) = -\alpha f$.

Preuve. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 1 engendré par F, alors

$$Id : \mathfrak{g} \longrightarrow so(L)$$

est une représentation. On a $L = V \oplus E$ avec V est un sous-espace lorentzien invariant indécomposable et E est un sous-espace euclidien invariant.
En appliquant la proposition 4.2, on trouve le premier et le deuxième cas.
Supposons $\dim V \geq 3$. Alors il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $d\lambda = 0$, V_λ un sous-espace totalement isotrope de dimension 1, et pour tout $\mu \neq \lambda$, $V_\mu = \{0\}$. Nous utiliserons les mêmes notations qu'on a dans l'étude précédente. Pour tout $i = 1, \ldots, q$ et puisque $\lambda_i(F) \neq 0$, et en utilisant (4.8) on peut choisir une base (e, e_i, f_i) de E_i tel que $b_i(F) = c_i(F) = 0$, et donc $vect\{e_i, f_i\}$ est non dégénéré invariant. D'où $V_\lambda^\perp = E_0$. Soit $a : \; E_0 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Si $\lambda \neq 0$, d'après (4.4), $\dim E_0 = 1$ et donc $\dim V = 2$ ce qui est impossible. Donc $\lambda = 0$ et $\dim E_0 = 2$ ce qui prouve le troisième cas. □

4.2 Caractérisation des algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires par la méthode de double extension

Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie lorentzienne plate et $\mathbf{h}$ le vecteur de $\mathfrak{g}$ définie par $\langle \mathbf{h}, u\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u)$ pour tout $u \in \mathfrak{g}$, et soit $\mathrm{H} = \mathbb{R}\mathbf{h}$. Il est facile de voire que $\mathfrak{g}$ est non unimodulaire si et seulement si $\mathbf{h} \neq 0$.
L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L} : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & so(\mathfrak{g}) \\ & u & \longrightarrow & \mathrm{L}_u \end{array}$$

où L_u est la multiplication à gauche pour le produit de Levi-Civita associé à u, est une représentation d'algèbres de Lie. Puisque $\mathfrak{g}$ est résoluble alors on peut appliquer les résultats obtenus dans la section précédente.
Le Théorème suivant caractérise les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires par la méthode de double extension.

Théorème 4.2 *Soit* $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *une algèbre de Lie lorentzienne plate non unimodulaire. Alors*

- *La multiplication à gauche par le vecteur* $\mathbf{h}$ *est nulle, c-à-d* $\mathrm{L}_{\mathbf{h}} = 0$. *Les sous-espaces* H *et* $\mathrm{H}^{\perp}$ *sont des idéaux bilatères pour le produit de Levi-Civita.*
- $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ *est une double extension d'une algèbre de Lie euclidienne plate* $(B, [\ ,\ ]_0, \langle\ ,\ \rangle_0)$ *suivant* (ξ, D, μ, b_0) *avec* $\mu \neq 0$.

Preuve.

• Commençons par montrer la première assertion du théorème. Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie lorentzienne plate non unimodulaire. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble. La multiplication à gauche $\mathrm{L} : \ \mathfrak{g} \longrightarrow so(\mathfrak{g})$ est une représentation et donc $\mathfrak{g}$ se décompose en une somme orthogonale,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}$$

avec $\mathfrak{h}$ est L-invariant lorentzien indécomposable et $\mathfrak{l}$ est L-invariant euclidien. $(\mathfrak{l}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{l}})$ est une algèbre de Lie riemannienne plate donc il est unimodulaire. Soit $x \in \mathfrak{l}$, on a $\langle \mathbf{h}, x\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = -\mathrm{tr}(\mathrm{R}_x) = 0$, donc $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$ et $\mathbf{h}$ coïncide avec le vecteur modulaire de $\mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h}$ est non unimodulaire. Montrons que $\mathrm{L}_{\mathbf{h}}(\mathfrak{l}) = 0$.

En effet, d'après la proposition 4.1 et le corollaire 4.1 on a,

$$\mathfrak{l} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{l}_i \oplus \mathfrak{l}_0,$$

et pour tout $i = 1, \ldots, p$, il existe $\mu_i > 0$ avec $d\mu_i = 0$ et une base orthonormale (s_i, t_i) de $\mathfrak{l}_i$ telle que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$u.s_i = \mu_i(u) t_i \quad \text{et} \quad u.t_i = -\mu_i(u) s_i\ , \tag{4.9}$$

d'après la proposition 2.2, on a $\mathbf{h} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ donc $\mu_i(\mathbf{h}) = 0$, d'où $\mathbf{h}.s_i = \mathbf{h}.t_i = 0$ et puisque $\mathrm{L}_{\mathbf{h}}(\mathfrak{l}_0) = 0$ alors $\mathrm{L}_{\mathbf{h}}(\mathfrak{l}) = 0$.

En utilisant la proposition 4.2, on aboutit à trois situations :

1ère situation :

$\dim \mathfrak{h} = 1$ donc $\mathfrak{h}$ est abélienne ce qui est impossible car $\mathfrak{h}$ est non unimodulaire.

2ème situation :

Il existe $\lambda > 0$ avec $d\lambda = 0$, une base $(e, \bar{e})$ de $\mathfrak{h}$ tel que $\langle e, e\rangle = \langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 0$, $\langle e, \bar{e}\rangle = 1$ et pour tout $u \in \mathfrak{g}$

$$u.e = \lambda(u) e \quad \text{et} \quad u.\bar{e} = -\lambda(u)\bar{e}.$$

On a $[e,\bar{e}] = -\lambda(e)\bar{e} - \lambda(\bar{e})e$. Puisque $\lambda([e,\bar{e}]) = 0$, alors $\lambda(e)\lambda(\bar{e}) = 0$. Sans perdre de généralité on peut supposer que $\lambda(e) = 0$. Donc

$$e.e = e.\bar{e} = 0\ ;\ \bar{e}.e = \lambda(\bar{e})e \quad \text{et} \quad \bar{e}.\bar{e} = -\lambda(\bar{e})\bar{e}.$$

Donc $\mathbf{h} = \lambda(\bar{e})e$ d'où $\lambda(\bar{e}) \neq 0$ et $\mathrm{L}_h = 0$. Ceci montre que H est un idéal bilatère.
De plus, pour tout $u \in \mathfrak{g}$, on a :

$$(\bar{e}.u).\bar{e} - \bar{e}.(u.\bar{e}) = (u.\bar{e}).\bar{e} - u.(\bar{e}.\bar{e}),$$

donc

$$\lambda(\bar{e}.u) = -\lambda(u)\lambda(\bar{e}). \quad (*)$$

Si $u \in \mathfrak{l}_0$ alors d'après (*) $\lambda(u) = 0$. Pour $i = 1, \ldots, p$ en remplaçant u par s_i et t_i respectivement, on trouve

$$\mu_i(\bar{e})\lambda(t_i) + \lambda(s_i)\lambda(\bar{e}) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda(t_i)\lambda(\bar{e}) - \mu_i(\bar{e})\lambda(s_i) = 0.$$

Puisque $\lambda(\bar{e}) \neq 0$ alors $\lambda(t_i) = \lambda(s_i) = 0$. Or $\mathrm{H}^\perp = \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{l}$ donc $\mathrm{H}^\perp.\mathrm{H} = 0$, d'où $\mathrm{H}^\perp$ est aussi un idéal bilatère.

3ème situation :

Dans ce cas $\dim \mathfrak{h} \geq 3$ et il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $d\lambda = 0$ et $\mathfrak{h}_\lambda$ est un sous-espace de dimension 1 totalement isotrope. De plus, pour tout $\mu \neq \lambda$, $\mathfrak{h}_\mu = \{0\}$. Soit e un générateur de $\mathfrak{h}_\lambda$ et soit $\pi :\ \mathfrak{h}_\lambda^\perp \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{h}}$ la projection canonique avec $\widetilde{\mathfrak{h}}$ est le quotient de $\mathfrak{h}_\lambda^\perp$ par $\mathfrak{h}_\lambda$. La représentation L induit une représentation $\widetilde{\mathrm{L}}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\widetilde{\mathfrak{h}}$. Donc, d'après le corollaire 4.1

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{i=1}^{q} \widetilde{\mathfrak{h}}_i \oplus \widetilde{\mathfrak{h}}_0.$$

Posons $E_i = \pi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{h}}_i)$ pour $i = 0, \ldots, q$. Pour tout $x \in E_0$ il existe $a_x \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant (4.3) et pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$u.x = a_x(u)e.$$

Puisque $\langle \mathbf{h}, e \rangle = -\mathrm{tr}(\mathrm{R}_e)$ et pour tout $u \in \mathfrak{g}$, $u.e = \lambda(u)e$ alors

$$\langle \mathbf{h}, e \rangle = -\lambda(e). \tag{4.10}$$

Deux cas se posent :

Premier cas : $\lambda(e) \neq 0$**.** Montrons que ce cas est impossible. Posons $\bar{e} = -\lambda(e)^{-1}\mathbf{h}$. Pour tout $i = 1, \ldots, q$, il existe $\lambda_i > 0$, $b_i, c_i \in \mathfrak{g}^*$ qui vérifient (4.7) et une base (e, e_i, f_i) de E_i tel que (e_i, f_i) est une base orthonormale et pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$u.e_i = b_i(u)e + \lambda_i(u)f_i \quad \text{et} \quad u.f_i = c_i(u)e - \lambda_i(u)e_i.$$

De plus, d'après (4.8), on peut choisir b_i et c_i tel que $b_i(e) = c_i(e) = 0$.
Fixons $i = 1, \ldots, q$. En utilisant la platitude de la métrique on va montrer que $b_i = c_i = 0$.
En effet, pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{array}{rcl} (e.u).e - e.(u.e) & = & (u.e).e - u.(e.e) \\ \lambda(e.u)e - \lambda(u)\lambda(e)e & = & \lambda(u)\lambda(e)e - \lambda(u)\lambda(e)e. \end{array}$$

D'où

$$\lambda(e.u) = \lambda(u)\lambda(e). \tag{4.11}$$

Et pour tout $x \in E_0$,

$$\begin{array}{rcl} (x.u).e - x.(u.e) & = & (u.x).e - u.(x.e) \\ \lambda(x.u)e - \lambda(x)\lambda(u)e & = & a_x(u)\lambda(e)e - \lambda(x)\lambda(u)e. \end{array}$$

Donc

$$\lambda(x.u) = a_x(u)\lambda(e). \tag{4.12}$$

Finalement,

$$\begin{array}{rcl} (u.e).e_i - u.(e.e_i) & = & (e.u).e_i - e.(u.e_i) \\ \lambda(u)\lambda_i(e)f_i - \lambda_i(e)(c_i(u)e - \lambda_i(u)e_i) & = & b_i(e.u)e + \lambda_i(e.u)f_i - b_i(u)\lambda(e)e + \lambda_i(u)\lambda_i(e)e_i \\ (u.e).f_i - u.(e.f_i) & = & (e.u).f_i - e.(u.f_i) \\ -\lambda(u)\lambda_i(e)e_i + \lambda_i(e)(b_i(u)e + \lambda_i(u)f_i) & = & c_i(e.u)e - \lambda_i(e.u)e_i - c_i(u)\lambda(e)e + \lambda_i(u)\lambda_i(e)f_i. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_i(e.u) & = & \lambda(u)\lambda_i(e), \\ b_i(e.u) & = & \lambda(e)b_i(u) - \lambda_i(e)c_i(u), \\ c_i(e.u) & = & \lambda_i(e)b_i(u) + \lambda(e)c_i(u). \end{array} \right. \tag{4.13}$$

En prenant $u \in E_0 \oplus \mathfrak{k}_0$ dans (4.13), on trouve

$$b_i(u)\lambda(e) - \lambda_i(e)c_i(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i(e)b_i(u) + c_i(u)\lambda(e) = 0.$$

D'où $b_i(u) = c_i(u) = 0$.

Soit $j = 1, \ldots, q$. En prenant $u = e_j$ ou $u = f_j$ dans (4.13), on trouve

$$\begin{cases} \lambda(e)b_i(e_j) - \lambda_i(e)c_i(e_j) - \lambda_j(e)b_i(f_j) &= 0, \\ \lambda_j(e)b_i(e_j) + \lambda(e)b_i(f_j) - \lambda_i(e)c_i(f_j) &= 0, \\ \lambda_i(e)b_i(e_j) + \lambda(e)c_i(e_j) - \lambda_j(e)c_i(f_j) &= 0, \\ \lambda_j(e)c_i(e_j) + \lambda(e)c_i(f_j) + \lambda_i(e)b_i(f_j) &= 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \lambda(e) & -\lambda_j(e) & -\lambda_i(e) & 0 \\ \lambda_j(e) & \lambda(e) & 0 & -\lambda_i(e) \\ \lambda_i(e) & 0 & \lambda(e) & -\lambda_j(e) \\ 0 & \lambda_i(e) & \lambda_j(e) & \lambda(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i(e_j) \\ b_i(f_j) \\ c_i(e_j) \\ c_i(f_j) \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque $\lambda(e) \neq 0$ alors $b_i(e_j) = b_i(f_j) = c_i(e_j) = c_i(f_j) = 0$. De la même manière, on montre que $b_i(s_j) = b_i(t_j) = c_i(s_j) = c_i(t_j) = 0$.

De la même façon, soit $j = 1, \ldots, p$, en prenant $u = s_j$ ou $u = t_j$ dans (4.13) on trouve

$$\begin{cases} \lambda(e)b_i(s_j) - \lambda_i(e)c_i(s_j) - \mu_j(e)b_i(t_j) &= 0, \\ \mu_j(e)b_i(s_j) + \lambda(e)b_i(t_j) - \lambda_i(e)c_i(t_j) &= 0, \\ \lambda_i(e)b_i(s_j) + \lambda(e)c_i(s_j) - \mu_j(e)c_i(t_j) &= 0, \\ \mu_j(e)c_i(s_j) + \lambda(e)c_i(t_j) + \lambda_i(e)b_i(t_j) &= 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \lambda(e) & -\mu_j(e) & -\lambda_i(e) & 0 \\ \mu_j(e) & \lambda(e) & 0 & -\lambda_i(e) \\ \lambda_i(e) & 0 & \lambda(e) & -\mu_j(e) \\ 0 & \lambda_i(e) & \mu_j(e) & \lambda(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i(s_j) \\ b_i(t_j) \\ c_i(s_j) \\ c_i(t_j) \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque $\lambda(e) \neq 0$ alors $b_i(s_j) = b_i(t_j) = c_i(s_j) = c_i(t_j) = 0$.

D'autre part $e.\bar{e} = -\lambda(e)\bar{e} + x_0$, avec $x_0 \in \mathfrak{h}_0$, donc

$$b_i(\bar{e})\lambda(e) - \lambda_i(e)c_i(\bar{e}) = -\lambda(e)b_i(\bar{e}) \quad \text{et} \quad \lambda_i(e)b_i(\bar{e}) + c_i(\bar{e})\lambda(e) = -\lambda(e)c_i(\bar{e}).$$

d'où $b_i(\bar{e}) = c_i(\bar{e}) = 0$. Finalement, pour tout $i = 1, \ldots, q$, $b_i = c_i = 0$ donc $vect\{e_i, f_i\}$ est un sous-espace non dégénéré invariant, et puisque $\mathfrak{h}$ est indécomposable alors $\mathfrak{h} = E_0 \oplus \mathbb{R}\mathbf{h}$.

Ecrivons E_0 sous la forme $E_0 = \mathbb{R}e \oplus F_0$ avec $\lambda(F_0) = 0$.

Pour tout $x \in F_0$, en prenant $u = e$ dans (4.12) on trouve $a_x(e) = 0$. En appliquant da_y

à (e, x) et en utilisant (4.3) on trouve pour tous $x, y \in F_0$, $0 = \lambda(e)a_y(x)$, ce qui donne $a_y(x) = 0$. En prenant $u \in \mathfrak{k}_0$ dans (4.12) on a $a_x(u) = 0$. Pour tout $i = 1, \ldots, p$, en prenant $u = s_i$ ou $u = t_i$ dans (4.11) et (4.12) on déduit que $a_x(s_i) = a_x(t_i) = 0$. On a $\mathbf{h} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ donc $\mathrm{R}_{\mathbf{h}}$ est symétrique, d'où

$$0 = \langle x.\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle = \langle x, \mathbf{h}.\mathbf{h}\rangle = -\langle \mathbf{h}.x, \mathbf{h}\rangle \overset{(4.10)}{=} a_x(\mathbf{h})\lambda(e) = 0.$$

d'où $a_x(\mathbf{h}) = 0$. Alors $a_x = 0$ et puisque $\mathfrak{h}$ est indécomposable, donc $\mathfrak{h} = \mathrm{vect}\,\{e, \bar{e}\}$ ce qui est impossible.

2ème cas : $\lambda(e) = 0$. Dans ce cas, d'après (4.10) et puisque $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle = 0$, alors $\mathbf{h} = \alpha e$, et donc $e \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et R_e est symétrique. D'où pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$\lambda(u)\langle e, v\rangle = \lambda(v)\langle e, u\rangle.$$

Donc si $u \in \mathfrak{h}_\lambda^\perp \oplus \mathfrak{k}$ alors $\lambda(u) = 0$ ce qui implique que $\ker \lambda = \mathfrak{h}_\lambda^\perp \oplus \mathfrak{k}$. Puisque $e \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ alors pour tout $i = 1, \ldots, q$, $\lambda_i(e) = 0$. On fixe $i = 1, \ldots, q$ et on choisit une base (e, e_i, f_i) de E_i telle que pour tout $u \in \mathfrak{g}$,

$$u.e = \lambda(u)e,\ u.e_i = b_i(u)e + \lambda_i(u)f_i \quad \text{et} \quad u.f_i = c_i(u)e - \lambda_i(u)e_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} [e, e_i] &= b_i(e)e, \\ [e, f_i] &= c_i(e)e, \\ [e_i, f_i] &= (c_i(e_i) - b_i(f_i))e - \lambda_i(e_i)e_i - \lambda_i(f_i)f_i. \end{aligned}$$

Puisque $d\lambda_i = 0$, en appliquant λ_i à $[e_i, f_i]$, on trouve $\lambda_i(e_i) = \lambda_i(f_i) = 0$.
En appliquant db_i et dc_i à $[e, e_i]$ et $[e, f_i]$ et en utilisant (4.7) on déduit que

$$b_i(e) = c_i(e) = 0.$$

D'autre part, pour tout $x \in E_0$, on a $[e, x] = a_x(e)e$. Donc en appliquant da_x et en utilisant (4.3) on déduit également que $a_x(e) = 0$.
En résumé, on a montré que $e.\mathfrak{h}_\lambda^\perp = 0$. De plus, pour tout $u \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}_\lambda^\perp$, $\langle e.u, u\rangle = 0$ et pour tout $v \in \mathfrak{h}_0$, $\langle e.u, v\rangle = -\langle e.v, u\rangle = 0$ donc $e.u = 0$. Finalement, $\mathrm{L}_{\mathbf{h}} = 0$.
Ceci montre que H est un idéal bilatère pour le produit de Levi-Civita. Puisque $\mathrm{H}^\perp.\mathrm{H} = 0$

alors $\mathrm{H}^{\perp}$ est aussi un idéal bilatère. Ceci termine la démonstration de la première assertion du théorème.

• Puisque H et $\mathrm{H}^{\perp}$ sont des idéaux bilatères, alors $\mathfrak{g}$ est une double extension d'une algèbre de Lie riemannienne plate B suivant (ξ, D, μ, b_0). Les crochets de Lie sont donnés par

$$[\bar{e}, e] = \mu e, \ [\bar{e}, a] = D(a) - \langle b_0, a\rangle_0 e \quad \text{et} \quad [a, b] = [a, b]_0 + \langle(\xi - \xi^*)(a), b\rangle_0 e.$$

Il est facile de voir que $\mathbf{h} = (\mu + \mathrm{tr}(D))e$. Si $\mu = 0$, d'après (4.18) on en déduit que ξ est nilpotent, ce qui implique que $\mathrm{tr}(D) = 0$ donc $\mathbf{h} = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors, d'après le théorème 4.3, $\mathrm{tr}(D) = \epsilon\mu \dim B$ avec $\epsilon = 0$ ou 1. Donc $\mathfrak{g}$ est non unimodulaire si et seulement si $\mu \neq 0$. □

4.3 Résolution des équations de la double extension dans une algèbre de Lie riemannienne plate avec $\mu \neq 0$

Dans la section précédente, nous avons montré dans le théorème 4.2 que si $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ est une algèbre de Lie lorentzienne plate non unimodulaire alors $\mathfrak{g}$ est une double extension d'une algèbre de Lie riemannienne plate suivant (ξ, D, μ, b_0) avec $\mu \neq 0$. Dans cette section, on va résoudre les équations qui relient $\xi, D, \mu \neq 0$ et b_0 dans le cas où ξ est inversible pour donner toutes les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires dans ce cas. Commençons d'abord par le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $A, \xi : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E. Supposons que A est antisymétrique et*

$$[A, \xi] = \xi^2 - \mu\xi,$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$ et ξ est inversible. Alors $\xi = \mu\, \mathrm{Id}_E$.

Preuve. Posons $\xi' = \xi - \mu\, \mathrm{Id}_E$. On a :

$$[A, \xi] = \xi^2 - \mu\xi \quad \text{et} \quad [A, \xi'] = \xi'^2 + \mu\xi'.$$

En utilisant ces relations, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[A, \xi^k] = k(\xi^{k+1} - \mu\xi^k) \quad \text{et} \quad [A, \xi'^k] = k(\xi'^{k+1} + \mu\xi'^k).$$

D'où,

$$\mathrm{tr}(\xi^{k+1}) = \mu \mathrm{tr}(\xi^k) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(\xi'^{k+1}) = -\mu \mathrm{tr}(\xi'^k).$$

Donc, si $\mathrm{tr}\xi = 0$ alors $\mathrm{tr}(\xi^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'où ξ est nilpotent. Supposons que $\mathrm{tr}(\xi) \neq 0$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de ξ dans $\mathbb{C}$ avec $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$ et soit m la multiplicité de λ_n. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_1^{k+1} + \ldots + \lambda_{n-m}^{k+1} + m\lambda_n^{k+1} = \mu(\lambda_1^k + \ldots + \lambda_{n-m}^k + m\lambda_n^k).$$

d'où

$$\lambda_n \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k+1} + \ldots + \left(\frac{\lambda_{n-m}}{\lambda_n}\right)^{k+1} + m \right) = \mu \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k} + \ldots + \left(\frac{\lambda_{n-m}}{\lambda_n}\right)^{k} + m \right).$$

Si $k \longrightarrow +\infty$ alors on trouve $m\lambda_n = m\mu$ ce qui implique $\lambda_n = \mu$. En répétant ce procédé, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu$. Donc ξ' est nilpotent.
Si ξ est nilpotent alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\xi^q \neq 0$ et $\xi^{q+1} = 0$. D'où si $q \geq 1$,

$$[A, \xi^q] = -q\mu\xi^q.$$

Or A est antisymétrique donc

$$E = \oplus_{i=1}^r E_i \oplus \ker A,$$

et pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe $\alpha_i > 0$ et une base orthonormale (e_i, f_i) de E_i telle que $A(e_i) = \alpha_i f_i$, $A(f_i) = -\alpha_i e_i$. Si $x \in \ker A$, alors d'après la relation précédente $A\xi^q(x) = -q\mu\xi^q(x)$ donc $\xi^q(x) = 0$. D'autre part, on a,

$$A\xi^q(e_i) = \alpha_i\xi^q(f_i) - q\mu\xi^q(e_i) \quad \text{et} \quad A\xi^q(f_i) = -\alpha_i\xi^q(e_i) - q\mu\xi^q(f_i).$$

Les relations,

$$\langle A\xi^q(e_i), \xi^q(e_i)\rangle = \langle A\xi^q(f_i), \xi^q(f_i)\rangle = 0, \langle A\xi^q(e_i), \xi^q(f_i)\rangle = -\langle A\xi^q(f_i), \xi^q(e_i)\rangle$$

donnent

$$\begin{pmatrix} -q\mu & \alpha_i & 0 \\ -\alpha_i & -2q\mu & \alpha_i \\ 0 & -\alpha_i & -q\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\xi^q(e_i), \xi^q(e_i)\rangle \\ \langle\xi^q(e_i), \xi^q(f_i)\rangle \\ \langle\xi^q(f_i), \xi^q(f_i)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est $-2q\mu(q^2\mu^2+\alpha_i^2)\neq 0$, donc $\xi^q(e_i)=\xi^q(f_i)=0$ ce qui donne $\xi^q=0$ d'où $q=0$ et donc $\xi=0$. Si ξ n'est pas nilpotent alors ξ' est nilpotent et en faisant le même argument précédent on montre que $\xi'=0$. □

Donnons maintenant les solutions possibles des équations de la double extension dans une algèbre de Lie riemannienne plate avec $\mu\neq 0$ et $\xi=0$ ou ξ est inversible.

Théorème 4.3 *Soit (ξ, D, μ, b_0) admissible dans une algèbre de Lie riemannienne plate $(B, \langle\ ,\ \rangle_0)$ avec $\mu\neq 0$ et $\xi=0$ ou ξ est inversible. Alors :*

1. *Si B est abélien alors $\xi=\epsilon\mu\,\mathrm{Id}_B$ et $D=A+\epsilon\mu\,\mathrm{Id}_B$, avec $\epsilon=0$ ou 1 et A est un endomorphisme antisymétrique.*
2. *Si B est non abélien alors, pour tout $a\in[B,B]^\perp$, $b\in[B,B]$,*

$$\begin{aligned}\xi(a) &= -(D_2+\mu\,\mathrm{Id}_{[B,B]})^{-1}([a,b_0]), \quad \xi(b)=0,\\ D(a) &= D_1(a)-(D_2+\mu\,\mathrm{Id}_{[B,B]})^{-1}([a,b_0]), \quad D(b)=D_2(b),\end{aligned}$$

avec $D_2:[B,B]\longrightarrow[B,B]$ est antisymétrique, et pour tout $a\in[B,B]^\perp$, $[D_2,\mathrm{ad}_{a|[B,B]}]=0$, $D_1:[B,B]^\perp\longrightarrow[B,B]^\perp$ est antisymétrique avec $\mathrm{Im}D_1\subset Z(B)$.

Preuve. Rappelons que (ξ, D, μ, b_0) est admissible si $D,\xi\in\mathrm{End}(B)$, $\mu\in\mathbb{R}$ et $b_0\in B$ tels que :

$$\xi([a,b])=a.\xi(b)-b.\xi(a), \tag{4.14}$$

$D-\xi$ est antisymétrique relativement à $\langle\ ,\ \rangle$ et

$$[D,\xi]=\xi^2-\mu\xi-\mathbb{R}_{b_0}, \tag{4.15}$$

et pour tous $a,b\in B$,

$$a.\xi(b)-\xi(a.b)=D(a).b+a.D(b)-D(a.b). \tag{4.16}$$

Supposons que $\mu\neq 0$.
D'après (4.14) et (4.16) on constate facilement que D est une dérivation de l'algèbre de Lie B, donc $D([B,B])\subset[B,B]$. D'après (4.14) on a aussi $\xi([B,B])\subset[B,B]$. Alors A laisse stable $[B,B]$ donc il laisse $[B,B]^\perp$ aussi stable. En prenant une écriture matricielle adaptée à la décomposition $B=[B,B]^\perp\oplus[B,B]$, on pose

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ D_3 & D_2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\xi=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0\\ D_3 & \xi_2\end{pmatrix},$$

avec $A_1 = D_1 - \xi_1$ et $A_2 = D_2 - \xi_2$. En utilisant (4.14), on montre facilement que pour tout $t \in [B, B]$,

$$\xi \circ \mathrm{R}_t = \mathrm{R}_{\xi(t)}. \tag{4.17}$$

Soit $b_0 = s_0 + t_0$ et posons $A = D - \xi$ et $\xi' = \xi - \mu \ \mathrm{Id}_B$. Remarquons que ξ' satisfait (4.14), A et antisymétrique et

$$[A, \xi] = \xi^2 - \mu\xi - \mathrm{R}_{t_0} \quad \text{et} \quad [A, \xi'] = \xi'^2 + \mu\xi' - \mathrm{R}_{t_0}.$$

D'après ces relations, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[A, \xi^k] = k(\xi^{k+1} - \mu\xi^k) - Q_k(\xi) \quad \text{et} \quad [A, \xi'^k] = k(\xi'^{k+1} + \mu\xi'^k) - Q_k(\xi'),$$

avec $Q_k(\xi) = \sum_{p=0}^{k-1} \mathrm{R}_{\xi^p(t_0)} \circ \xi^{k-1-p}$. Pour tout $p = 0, \ldots, k-1$, on a

$$\mathrm{R}_{\xi^p(t_0)} \circ \xi^{k-1-p} = [\mathrm{R}_{\xi^p(t_0)}, \xi^{k-1-p}] + \mathrm{R}_{\xi^{k-1}(t_0)}$$

donc

$$\mathrm{tr}(Q_k(\xi)) = \mathrm{tr}(Q_k(\xi')) = 0.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{tr}(\xi^{k+1}) = \mu \mathrm{tr}(\xi^k) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(\xi'^{k+1}) = -\mu \mathrm{tr}(\xi'^k). \tag{4.18}$$

En utilisant le même argument que celui de la preuve du lemme 4.1, on montre que ξ est nilpotent ou ξ' est nilpotent.
D'autre part l'équation (4.15) est équivalente à

$$\begin{aligned} [D_1, \xi_1] &= \xi_1^2 - \mu\xi_1, \\ [D_2, \xi_2] &= \xi_2^2 - \mu\xi_2, \\ D_2 D_3 - D_3 D_1 &= 2\xi_2 D_3 - \mu D_3 - \mathrm{R}_{b_0}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En utilisant le lemme 4.1, on a $(\xi_1, \xi_2) = (\epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]^\perp}, \epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]})$ avec $\epsilon = 0$ ou 1.
Alors

$$\xi = \begin{pmatrix} \epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]^\perp} & 0 \\ D_3 & \epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} A_1 + \epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]^\perp} & 0 \\ D_3 & A_2 + \epsilon\mu \ \mathrm{Id}_{[B,B]} \end{pmatrix}$$

Avec A_1 est un endomorphisme antisymétrique de $[B,B]^\perp$ et A_2 est un endomorphisme antisymétrique de $[B,B]$. Les équations (4.14) et (4.16) sont équivalentes à

$$[a, D_3(b)] + [D_3(a), b] = 0 \quad \text{et} \quad [A_2, \mathrm{ad}(a)_{|[B,B]}] = \mathrm{ad}(A_1(a) + \epsilon\mu a)_{|[B,B]}, \tag{4.20}$$

pour tous $a, b \in [B,B]^\perp$. On distingue alors entre deux cas :

- B est abélien. Alors $\xi = \epsilon\mu \,\mathrm{Id}_B$ et $D = A + \epsilon\mu \,\mathrm{Id}_B$ avec A est un endomorphisme antisymétrique de B.
- B est non abélien. On considère la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ de $\mathrm{so}([B,B])$ engendrée par $\mathrm{ad}(a)_{|[B,B]}$, $a \in [B,B]^\perp$ et A_2. C'est une algèbre de Lie résoluble, donc d'après le corollaire 4.1, $\mathfrak{u}$ est abélienne, donc pour tout $a \in [B,B]^\perp$,

  $$[A_2, \mathrm{ad}(a)_{|[B,B]}] = \mathrm{ad}(A_1(a) + \epsilon\mu a)_{|[B,B]} = 0.$$

  D'où pour tout $a \in [B,B]^\perp$, $A_1(a) + \epsilon\mu a \in Z(B)$. En particulier, si $a \in S(B)$ alors

  $$0 = \langle A_1(a) + \epsilon\mu a, a\rangle = \epsilon\mu\langle a, a\rangle.$$

  Puisque B est non abélienne alors $\epsilon = 0$. D'après (4.20), on en déduit que pour tout $a \in Z(B)$, $D_3(a) = 0$. De plus, pour tout $a \in [B,B]^\perp$, $A_1(a) = D_1(a) \in Z(B)$ donc $D_3 D_1 = 0$. Alors (4.19) devient

  $$(D_2 + \mu \,\mathrm{Id}_{[B,B]})D_3 = -\mathrm{R}_{b_0}.$$

  Puisque D_2 est antisymétrique, alors $D_2 + \mu \,\mathrm{Id}_{[B,B]}$ est inversible, d'où,

  $$D_3 = -(D_2 + \mu \,\mathrm{Id}_{[B,B]})^{-1}\mathrm{R}_{b_0}.$$

  On a $D_2 + \mu \,\mathrm{Id}_{[B,B]}$ commute avec $\mathrm{ad}(a)_{|[B,B]}$ pour tout $a \in [B,B]^\perp$, donc c'est également pour son inverse. En utilisant cette remarque on vérifie que D_3 donné par la formule si dessus vérifie la première équation de (4.20).

□

Corollaire 4.2 *Dans le cas où $\xi = 0$ ou ξ est inversible, tous les groupes de Lie lorentziens plats non unimodulaires sont 2-résolubles.*

Preuve. Ceci découle du fait que le crochet de Lie est donné par (2.9) et que $Im(D_1) \subset Z(B)$. □

Remarque 4.4 D'après le théorème 4.3, pour donner toutes les (D, ξ, μ, b_0) admissibles avec $\mu \neq 0$ et ξ est inversible., il suffit de déterminer tous les endomorphismes D_2 qui satisfont $\left[D_2, \mathrm{ad}(a)_{|[B,B]}\right] = 0$ pour tout $a \in S(B)$. La sous-algèbre $\mathfrak{u} = \{\mathrm{ad}(a)_{|[B,B]},\ a \in S(B)\}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathrm{so}\left([B, B], \langle\ ,\ \rangle_0\right)$ et $\dim \mathfrak{u} = \dim S(B)$. Puisque $\dim[B, B]$ est paire, alors toute sous-algèbre abélienne de $\mathrm{so}\left([B, B], \langle\ ,\ \rangle_0\right)$ est contenue dans une sous-algèbre abélienne maximale de dimension $\frac{1}{2}\dim[B, B]$. D'où $\dim S(B) \leq \frac{1}{2}\dim[B, B]$. Donc l'ensemble de tous les endomorphismes D_2 qui commutent avec $\mathfrak{u}$ est l'union de toutes les sous-algèbres abéliennes maximales qui contiennent $\mathfrak{u}$. En particulier, si $\dim S(B) = \frac{1}{2}\dim[B, B]$ alors cet ensemble est $\mathfrak{u}$ lui même.

Conclusion et perspectives

Cette thèse a contribué à :

- Caractériser les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré par la méthode de double extension. Ce résultat généralise le cas nilpotent de A. Aubert et A. Medina.
- Déterminer toutes les algèbres de Lie lorentziennes plates de centre dégénéré de dimension ≤ 6.
- Déterminer tous les groupes de Lie lorentziens plats qui admettent un champ de Killing invariant à gauche de type temps.
- Caractériser les algèbres de Lie lorentziennes plates non unimodulaires par la méthode de double extension, ainsi que la détermination de ces algèbres de Lie dans certaines conditions.

En particulier, nous avons montré que la métrique lorentzienne plate dans les 3 premiers cas est complète. Par contre, celle du dernier cas est incomplète.
La classe qui reste à déterminer est :

- La classe des groupes de Lie lorentziens plats unimodulaires de centre trivial et qui ne contiennent pas un champ de Killing invariant à gauche de type temps.

Parmi les questions qui vont nous intéresser au futur :

- La détermination de cette classe qui reste dans le cas lorentzien plat.
- Les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats de signature $(2, n-2)$.
- Les groupes de Lie lorentziens Ricci-plats.
- Les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats 2-nilpotents.
- Les groupes de Lie pseudo-riemanniens plats qui possèdent d'autre structures (quadratiques ou symplectiques par exemple).
- Les liens entre ce sujet et la physique mathématique.

Bibliographie

[1] M. Ait Ben Haddou-M. Boucetta-H. Lebzioui, *Left-Invariant Lorentzian Flat Metrics on Lie Groups*, Journal of Lie Theory, V. 22 (2012), 269-289.

[2] A. Aubert, *Structures affines et pseudo-métriques invariantes à gauche sur des groupes de Lie*, Thèse, Univ. Montpellier II, 1996.

[3] A. Aubert-A. Medina, *Groupes de Lie Pseudo-riemanniens plats*, Tohoku Math. J. 55 (2003), 487-506.

[4] A. Bahayou-M. Boucetta, *Metacurvature of Riemannian Poisson-Lie groups*, J. of Lie Theory 19 (2009), 439-462.

[5] L. B. Bergery, *Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes.* Ann. Sc. de l'E.N.S. 4e série, tome 11 (1978) 543-576.

[6] M. Bordemann-A. Medina-A. Ouadfel, *Le groupe affine comme variété symplectique*, Tohoku Math. J. 45(1993), 423-436.

[7] M. Boucetta-H. Lebzioui, *Nonunimodular Lorentzian Flat Lie Algebras*, arXiv :1401.0950v1, soumis pour publication.

[8] M. Boucetta-A. Medina, *Solutions of the Yang-Baxter equations on orthogonal groups : the case of oscillator groups*, J. of Geometry and Physics, 61 (2011), 2309-2320.

[9] M. Boucetta, *Ricci flat left invariant Lorentzian metrics on 2-step nilpotent Lie groups*, arXiv : 0910.2563.v2

[10] M. Boucetta, *On the Riemann-Lie algebras and Riemann-Poisson Lie groups*, J. Lie Theory 15 (2005), no. 1, 183-195.

[11] M. Boucetta, *Compatibilités des structures pseudo-riemanniennes et des structrues de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 333 (2001) 763-768.

[12] C. Chevaley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J, 1946.

[13] D. C. Duncan-E. C. Ihrig, *Homogeneous spacetimes of zero curvature*, Proc. A. M. S, 107 (1989), 785-795.

[14] J. Faraut, *Analyse sur les groupes de Lie : Une introduction*, Calvage Mounet, Paris, 2006.

[15] M. Guediri, *Compact flat spacetimes*, Differential Geometry and its Applications 21 (2004) 283-295.

[16] M. Guediri, *On The Nonexistence Of Closed Timelike Geodesics In Flat Lorentz 2-Step Nilmanifolds*, Transactions of the A.M.S. 355, No 2, 755-786.

[17] M. Guediri, *On completeness of left-invariant Lorentz metrics on solvable Lie groups*, Revista Matemática, V. 9, no 2, 1996.

[18] M. Guediri, *Sur la complétude des pseudo-métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie nilpotents*, Ren. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Vol 52, 4, (1994), 371-376.

[19] S. Helgason, *Differential Geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New-York-London, (1962).

[20] J. Helmstetter, *Radical d'une algèbre symétrique à gauche*, Annales de L'institut Fourier, 29 (1979), 293-329.

[21] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an introduction*, Birkhäuser, Boston, 2nd edition, 2002.

[22] H. Lebzioui, *Lorentzian Flat Lie Groups Admitting a Timelike Left-Invariant Killing Vector Fields*, à paraître dans Extracta Mathematicae, arXiv :1311.6174v1.

[23] A. Medina-P. Revoy, *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant.* Ann. Sci. École. Norm. Sup. 18(4) :553-561.

[24] A. Medina, *Flat left-Invariant connections adapted to the automorphism structure of a Lie group*, J. Differetial Geometry, 16 (1981), 445-474.

[25] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*. Advances in Mathematics 21, 1976, 293-329.

[26] A. Nijenhuis, *Sur une classe de propriétés communes à quelques types différents d'algèbres*, L'enseignement mathématique, t.XIV, fasc. 3-4.

[27] K. Nomizu, Left-Invariant Lorentz metrics on Lie groups, Osaka J. Math, 16 (1979), 143-150.

[28] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, New-York-London, (1983).

[29] S. Rahmani, *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois*, J. of Geometry and Physics, 9 (1992), 295-302.

[30] M. Sánchez, *Lorentzian Manifolds Admitting A Killing Vector Field*, Nonlinear Analysis,Th. Meth. and Appl. 30, No 1, 643-654.

[31] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[32] D. Segal, *The structure of complete left -symmetric algebras*, Math. Ann. 293 (1992), 569-578.

[33] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V. 1, 1999.

Résumé

Le but de cette thèse, est de déterminer tous les groupes de Lie qui peuvent être munis d'une métrique lorentzienne invariante à gauche de courbure nulle. Ces groupes de Lie sont appelés **groupes de Lie lorentziens plats** et leurs algèbres de Lie, **algèbres de Lie lorentziennes plates** (A.L.L.P).

Nous avons caractérisé les A.L.L.P de centre dégénéré en utilisant la méthode de **double extension** construite par A. Aubert et A. Medina. Nous avons montré en particulier que cette classe contient les A.L.L.P nilpotentes, et qu'une telle algèbre est unimodulaire, et donc la métrique sur le groupe de Lie associé est complète.

Nous avons également caractérisé les A.L.L.P non-unimodulaires qui correspondent aux groupes de Lie lorentziens plats incomplets. Nous avons montré en particulier que, dans certaines conditions, une telle algèbre de Lie est exactement 2-résoluble.

On trouve aussi dans cette thèse, d'autres résultats comme la caractérisation des groupes de Lie lorentziens plats qui admettent un champ de Killing invariant à gauche de type temps.