
Algèbre Linéaire Creuse : méthodes directes

TP3

Yousra Bouchikhi, Hamza Belkarkor

2^{me} année en Modélisation et Intelligence Artificielle, double diplôme
à l'INSA Toulouse et l'ENSEEIH - Toulouse, France

Mars 2023

Sommaire

1	Introduction	1
2	Résolution du système linéaire symétrique avec une factorisation de Cholesky	2
2.1	mat0:	2
2.2	mat1 :	3
2.3	mat2:	3
2.4	mat3 :	4
2.5	bcsstk27 :	4
3	Conclusion	5

1 Introduction

On cherche à résoudre le système linéaire : $Ax = b$ avec A une matrice creuse.

Le but de ce TP est l'identification de la stratégie de réordonnancement la plus efficace pour la résolution de ce système linéaire. Le critère consiste à minimiser le nombre de non-zéros dans les facteurs de la matrice car cela réduit le temps et l'espace nécessaires pour stocker et manipuler la matrice.

En minimisant le nombre de non-zéros, on peut donc obtenir une solution plus efficace et plus rapide pour la résolution de systèmes linéaires avec des matrices creuses.

Après chaque résolution, pour évaluer la qualité de la solution calculée, on calculera l'erreur inverse "normwise" :

Nous calculerons aussi le nombre d'opérations flottantes pour la résolution :

$$2 * (2 * nnz(L) - n)$$

avec :

n : taille de la matrice A

L : matrice triangulaire inférieure issue de la factorisation de cholesky de A

nnz : nombre de facteurs non nuls d'une matrice

2 Résolution du système linéaire symétrique avec une factorisation de Cholesky

Nous allons comparer deux méthodes de permutation de la matrice A pour en déterminer la plus efficace en termes de diminution du remplissage et du nombre d'opérations dans la résolution. Les méthodes de permutation testées sont les suivantes :

1. *symamd* : pour une matrice symétrique définie positive A , renvoie le vecteur de permutation P , tel que $A(p,p)$ tend à avoir un facteur de Cholesky plus creux que A .
2. *symrcm* : renvoie l'ordonnancement inverse de Cuthill-McKee de A .

2.1 mat0:

Permutation	Fill-in de A	Flops A	Fill-in de B	Flops B	Erreur
Symmetric reverse C.McKee	6786	15554	1978	5938	2.97e-14
Symmetric approx minimum degree	6786	15554	1226	4434	2.44e-14

Table 1: Résultats de résolution du système linéaire avec la matrice mat0

D'après les résultats ci-dessus, nous déduisons que la permutation la plus efficace pour la matrice *mat0* est *symamd* avec un $\text{nnz} = 1604$ (figure 1) au lieu de $\text{nnz} = 1980$ avec la permutation *symamd*.

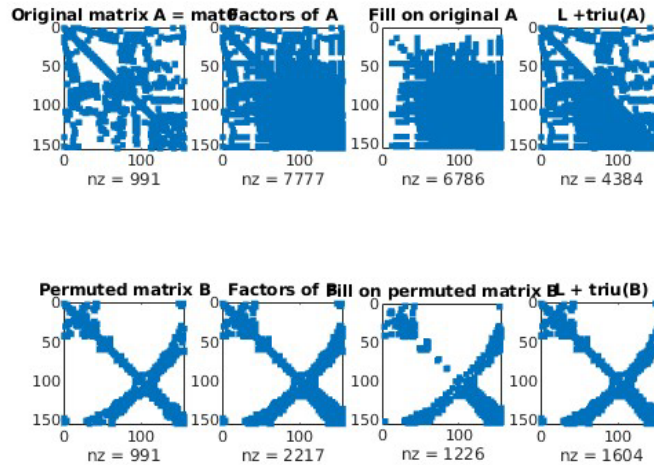


Figure 1: Étapes de fill-in sans et avec réordonnancement pour mat0 avec symamd

2.2 mat1 :

Permutation	Fill-in de A	Flops A	Fill-in de B	Flops B	Erreur
Symmetric reverse C.McKee	66762	141182	16710	41078	1.82e-13
Symmetric approx minimum degree	66762	141182	9694	27046	3.21e-13

Table 2: Résultats de résolution du système linéaire avec la matrice mat1

La méthode de permutation à retenir pour la matrice *mat1* est *symamd*, elle donne au final un $nnz = 8676$

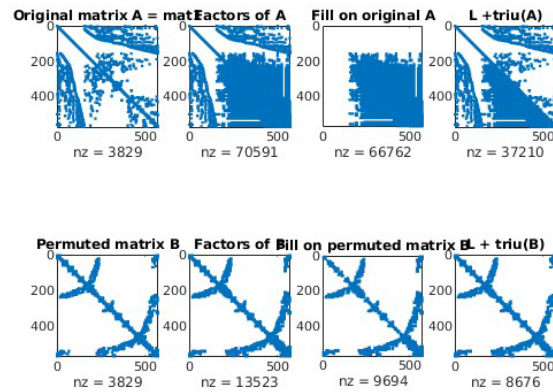


Figure 2: Étapes de fill-in sans et avec réordonnancement pour mat1 avec symamd

2.3 mat2:

Permutation	Fill-in de A	Flops A	Fill-in de B	Flops B	Erreur
Symmetric reverse C.McKee	638932	1307962	136552	303202	7.51e-13
Symmetric approx minimum degree	638932	1307962	65802	161702	3.76e-13

Table 3: Résultats de résolution du système linéaire avec la matrice mat2

En termes de réduction de remplissage et du nombre de flops nous choisissons la méthode de permutation de *symamd* pour la matrice *mat2*.

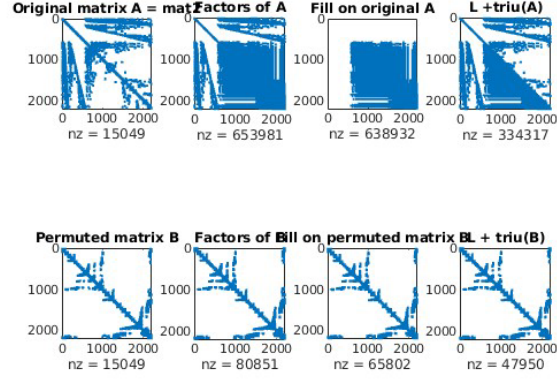


Figure 3: Étapes de fill-in sans et avec réordonnancement pour mat2 avec symamd

2.4 mat3 :

Permutation	Fill-in de A	Flops A	Fill-in de B	Flops B	Erreur
Symmetric reverse C.McKee	5612702	11344734	1112388	2344106	2.14e-12
Symmetric approx minimum degree	5612702	11344734	394158	907646	4.00e-13

Table 4: Résultats de résolution du système linéaire avec la matrice mat3

Les résultats ci-dessous nous permet de choisir la méthode de réordonnancement *symamd* pour la matrice *mat3*, qui donne un $nnz = 256744$

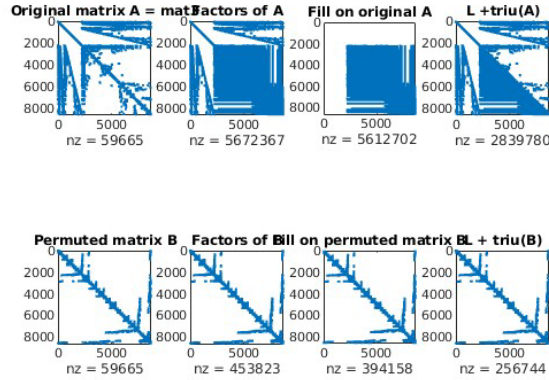


Figure 4: Étapes de fill-in sans et avec réordonnancement pour mat3 avec symamd

2.5 bcsstk27 :

La permutation qui donne les meilleurs résultats en termes de flops et de minimisation de remplissage pour la matrice *bcsstk27* est *symrcm* avec un $nnz = 78326$.

Permutation	Fill-in de A	Flops A	Fill-in de B	Flops B	Erreur
Symmetric reverse C.McKee	43680	199612	44400	201052	1.14e-14
Symmetric approx minimum degree	43680	199612	60360	232972	8.12e-15

Table 5: Résultats de résolution du système linéaire avec la matrice bcsstk27

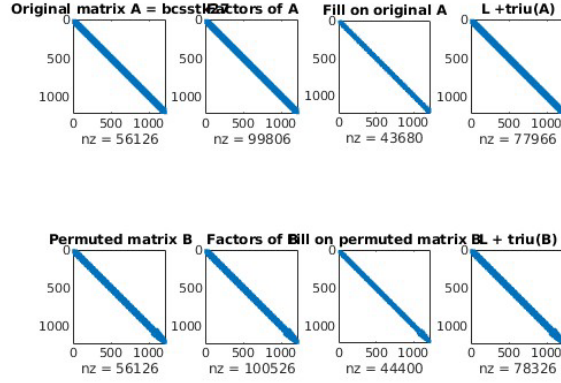


Figure 5: Étapes de fill-in sans et avec réordonnancement pour bcsstk27 avec symrcm

3 Conclusion

En conclusion, le choix de la méthode de réordonnancement des matrices creuses est crucial pour obtenir une résolution efficace des systèmes linéaires. Les méthodes testées dans ce TP ont montré que, par exemple, la permutation *symamd* est la plus efficace pour les matrices *mat0* .. *mat3*, tandis que la permutation *symrcm* est la plus efficace pour la matrice *bcsstk27*. Les résultats ont été évalués en termes de remplissage et de nombre d'opérations flottantes pour la résolution (flops), ainsi que l'erreur inverse "normwise". Il est donc important de bien comprendre les caractéristiques des matrices pour choisir la méthode de réordonnancement la plus adaptée à chaque cas.