
Méthodes GMRES et FOM

TP1

Yousra Bouchikhi, Hamza Belkarkor

2^{me} année en Modélisation et Intelligence Artificielle, double diplôme
à l'INSA Toulouse et l'ENSEEIH - Toulouse, France

Mars 2023

Sommaire

1	Performance des solveurs	1
2	Influence de la tolérance sur les solveurs FOM et GMRES	2
3	Estimation des résidus pour FOM et GMRES	3
4	Conclusion	4

1 Performance des solveurs

La table suivante affiche la précision obtenue et le nombres d'itérations qu'il a fallu pour l'atteindre pour les 3 matrices avec les 3 algorithmes.

Table 1: Nombre d'itérations et précision obtenue pour chaque méthode et matrice

Méthode	mat1		pde225		hydcars20	
	Itérations	Précision	Itérations	Précision	Itérations	Précision
FOM	174	$5.8 * 10^{-3}$	56	$1.4 * 10^{-3}$	99	$1.99 * 10^{-9}$
GMRES	172	$7.4 * 10^{-3}$	55	$1.6 * 10^{-3}$	99	$1.99 * 10^{-9}$
GMRES Mat-lab	172	$7.4 * 10^{-3}$	55	$1.6 * 10^{-3}$	99	$1.99 * 10^{-9}$

On se fixe une tolérance de 10^{-6} et on trace la norme du résidu au cours des itérations. On obtient les 3 figures suivantes pour les 3 différentes matrices:

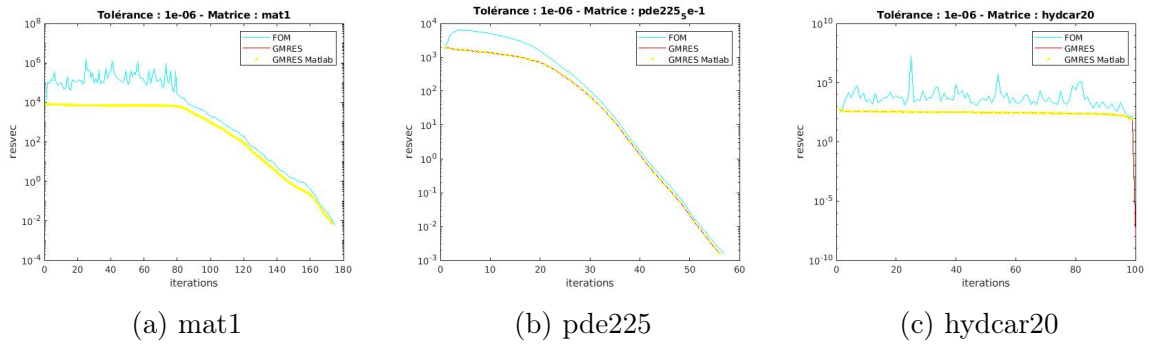
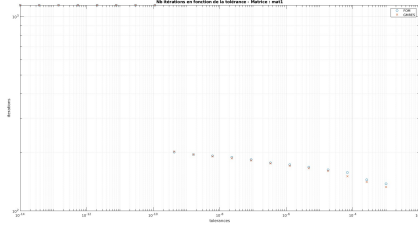


Figure 1: Norme du résidu en fonction des itérations avec une tolérance de 10^{-6}

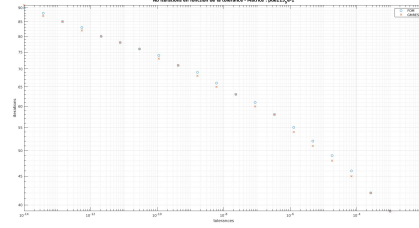
D'après le tableau, nous pouvons conclure que les trois méthodes (FOM, GMRES et GMRES Matlab) ont donné des résultats similaires en termes de précision pour chaque matrice. Cependant, il y a des différences notables entre les matrices en termes d'itérations et de précision. La matrice hydcars20 a nécessité moins d'itérations que mat1 et a atteint la précision la plus élevée. En revanche, la matrice pde225 a nécessité le moins d'itérations et a atteint une précision comparable à celle de mat1.

2 Influence de la tolérance sur les solveurs FOM et GMRES

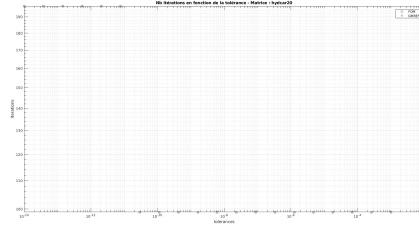
Les figures suivantes montrent le nombre d'itérations atteint par chacun des algorithmes FOM et GMRES pour plusieurs valeurs de tolérance et pour chacune des 3 matrices testées.



(a) mat1



(b) pde225



(c) hydcar20

Figure 2: Nombres d'itérations atteints par FOM et GMRES en fonction des tolérances

Nous remarquons que pour la matrice mat1 qui est de taille 573 le nombre d'itérations qu'il a fallu pour la convergence des algorithmes GMRES et FOM est entre 100 et 200 pour des tolérances allant de 10^{-2} à $7 * 10^{-9}$. Cependant, pour des tolérances inférieures ou égales à 10^{-10} nous remarquons un saut dans le nombre d'itérations des deux algorithmes pour rejoindre le rang des mille.

Le même phénomène est remarqué pour la matrice hydcar20 de taille 99 pour des tolérances plus petites que 10^{-11} tel que le nombre des itérations passe de 100 à 200.

Pour la matrice pde225 de taille 225, nous remarquons une augmentation du nombre des itérations atteintes par les deux algorithmes FOM et GMRES avec la diminution de la valeur de la tolérance.

Ainsi, le choix de la tolérance est très important lorsqu'il s'agit de la performance des algorithmes et la complexité à résoudre des problèmes.

3 Estimation des résidus pour FOM et GMRES

Dans cette partie, nous reprenons les mêmes analyses que celles de la 1^{re} partie mais cette fois avec les résidus estimés et non pas calculés à chaque itération.

Les résidus sont estimés ainsi :

- Pour GMRES :

si on a :

$$\bar{R}_j = \bar{H}_j^{(j)} = Q_j \bar{H}_j,$$

$$\bar{g}_j = \beta Q_j e_1 = \left(\gamma_1^{(1)} \cdots \gamma_j^{(j)} \gamma_{j+1}^{(j)} \right)^T$$

alors : $\|b - Ax_j\| = \left| \gamma_{j+1}^{(j)} \right|$

- Pour FOM :

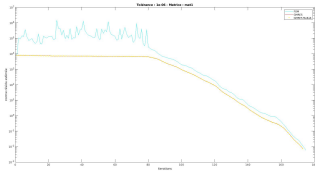
$$\|b - Ax_j\| = h_{j+1,j} |e_j^T y_j|$$

La table suivante affiche la précision obtenue et le nombre d'itérations qu'il a fallu pour l'atteindre pour les 3 matrices avec les 3 algorithmes.

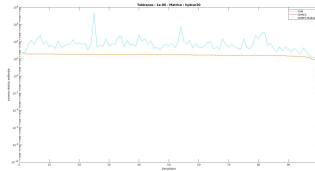
Table 2: Nombre d'itérations et précision obtenue pour chaque méthode et matrice

Méthode	mat1		pde225		hydcar20	
	Itérations	Précision	Itérations	Précision	Itérations	Précision
FOM	174	$5.8 * 10^{-3}$	57	$1.4 * 10^{-3}$	100	$1.99 * 10^{-9}$
GMRES	172	$7.4 * 10^{-3}$	55	$1.6 * 10^{-3}$	100	$1.99 * 10^{-9}$
GMRES Mat-lab	172	$7.4 * 10^{-3}$	55	$1.6 * 10^{-3}$	100	$1.99 * 10^{-9}$

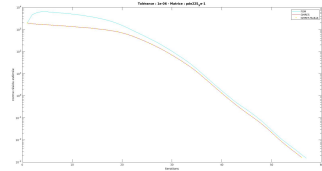
On se fixe une tolérance de 10^{-6} et on trace l'estimation de la norme du résidu au cours des itérations. On obtient les 3 figures suivantes pour les 3 différentes matrices:



(a) mat1



(b) hydcar20



(c) pde225

Figure 3: Estimation des normes des résidus en fonction des itérations (tolérance = 10^{-6})

Nous remarquons qu'on ne perd presque pas en précision en estimant les résidus au lieu de les calculer à chaque itération, donc on a presque les mêmes résultats qu'avant en effectuant moins de FLOPS.

4 Conclusion

Le choix du solveur pour un problème donné dépend de la taille et des propriétés de la matrice, ainsi que de la précision que l'on souhaite atteindre et donc de la tolérance fixée. Par exemple, si la matrice est grande et possède une structure de blocs, la méthode FOM peut être plus efficace car elle tire parti de cette structure. D'autre part, si la matrice est de taille moyenne et bien conditionnée, la méthode GMRES peut être plus appropriée car elle peut être plus rapide et plus précise que la méthode FOM. Enfin, si la matrice est mal conditionnée, il peut être préférable d'utiliser des méthodes de préconditionnement ou des méthodes itératives plus avancées.