

Movimiento pendular con fricción

Mabrouka Salmi
Master en Inteligencia Computacional e Internet de las Cosas
Universidad de Córdoba
z12salsm@uco.es

09 Jun 2024

1 Introducción

Este informe detalla la simulación del movimiento de un péndulo utilizando MATLAB, abordando tanto enfoques numéricos como analíticos. El estudio se centra en comprender la dinámica del péndulo bajo diferentes configuraciones, incluyendo variaciones en la fricción y las condiciones iniciales.

2 Objetivos

Los objetivos principales de este proyecto son:

- Modelar el movimiento de un péndulo utilizando técnicas de simulación numérica.
- Investigar el impacto de cambiar parámetros clave como la masa, la longitud del péndulo, la velocidad inicial, y el coeficiente de fricción en el comportamiento del sistema.
- Comparar los resultados de las simulaciones numéricas con una solución analítica simplificada.
- Analizar cómo los ajustes en el ángulo inicial afectan la dinámica del péndulo en escenarios de fricción cero, con especial atención a los casos con ángulos iniciales de 60 grados y 5 grados.

3 Solución Numérica

Esta sección del informe documenta la configuración inicial y las modificaciones aplicadas al modelo numérico de un péndulo en MATLAB para estudiar diferentes comportamientos bajo variadas condiciones físicas.

3.1 Configuración Inicial

El modelo inicial (*pendulo_initial.m*) se configuró con los siguientes parámetros para simular el movimiento de un péndulo bajo condiciones controladas:

- **Masa (m):** 1 kg
- **Gravedad (g):** 9.81 m/s²
- **Longitud (L):** 1 metro
- **Coefficiente de fricción (C):** 0.75
- **Paso de tiempo (h):** 0.01 segundos
- **Ángulo inicial (theta_0):** 30 grados
- **Velocidad angular inicial (w_0):** 0 radianes/segundo

Se utilizó un enfoque de integración numérica para calcular la posición y la velocidad del péndulo en cada paso, utilizando el método del punto medio para mayor precisión. El código inicial, como se puede ver en el archivo de MATLAB *pendulo_initial.m*, proporciona la figura 1

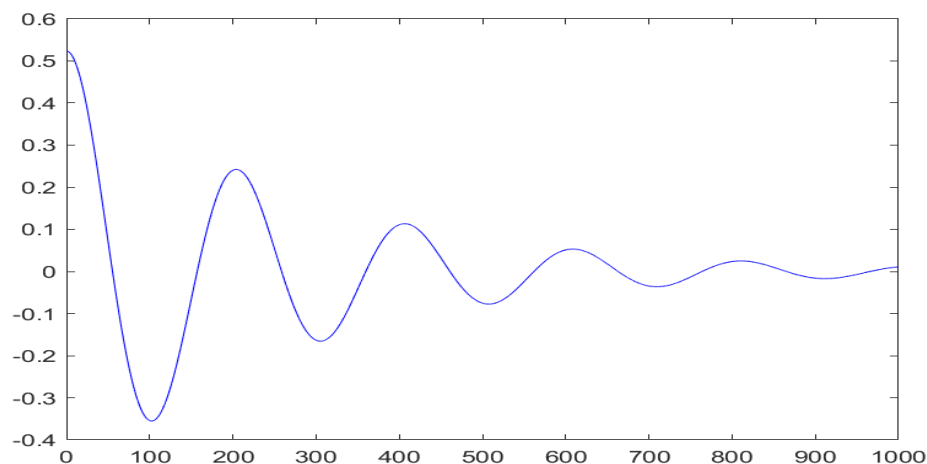


Figure 1: Simulación del movimiento pendular usando métodos numéricos

3.2 Modificaciones

Se realizaron varias modificaciones al modelo para explorar cómo afectan diferentes condiciones al comportamiento del péndulo. Se describen a continuación tres configuraciones distintas:

3.2.1 Modificación Subamortiguada

Aumentando la masa y la longitud del péndulo (*pendulo_subramortiguado_mod.m*), y ajustando el coeficiente de fricción para una oscilación subamortiguada:

- **Masa (m):** Aumentada a 2 kg
- **Longitud (L):** Aumentada a 1.5 metros
- **Coeficiente de fricción (C):** Ajustado a 0.6
- **Ángulo inicial (theta_0):** 45 grados
- **Velocidad angular inicial (w_0):** Ajustada a 0.2 radianes/segundo

La figura muestra que el péndulo presenta oscilaciones que disminuyen gradualmente en amplitud, indicando una pérdida de energía controlada y más lenta.

3.2.2 Modificación Sobrearmortiguada

Incrementando significativamente el coeficiente de fricción para observar una oscilación sobrearmortiguada (*pendulo_sobrearmortiguado_mod.m*), donde el sistema regresa rápidamente al reposo:

- **Coeficiente de fricción (C):** Incrementado a 5.0

La simulación muestra cómo el péndulo se detiene rápidamente, indicando una alta disipación de energía.

3.2.3 Modificación Sin Fricción

Eliminando completamente la fricción para estudiar un movimiento perpetuo (*pendulo_sinfriccion_mod.m*):

- **Coeficiente de fricción (C):** 0 (eliminado)
- **Ángulo inicial (theta_0):** 60 grados

El péndulo oscila indefinidamente, demostrando un movimiento constante sin pérdida de amplitud.

3.3 Efectos de las Modificaciones

Cada modificación demostró cómo los cambios en los parámetros físicos, especialmente en el coeficiente de fricción, influyen significativamente en la dinámica del péndulo. Estas configuraciones proporcionaron una visión clara sobre la respuesta del sistema bajo diferentes condiciones de amortiguamiento.

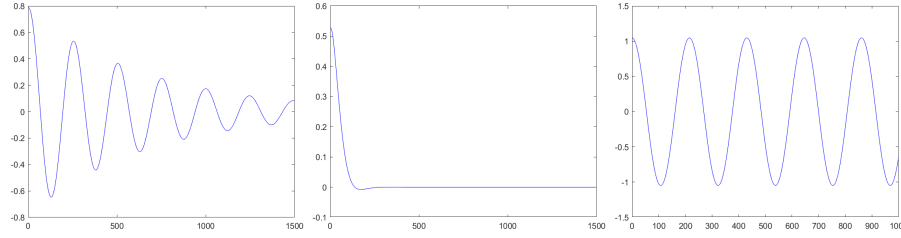


Figure 2: De izquierda a derecha: Configuraciones subamortiguada, sobreamortiguada y sin fricción.

4 Solución Analítica Inicial

La simulación del péndulo también se abordó mediante un enfoque analítico para proporcionar una comparación directa con los resultados de la simulación numérica. La solución analítica simplificada se basa en las ecuaciones de movimiento bajo la suposición de pequeñas oscilaciones, lo que permite una formulación más directa y menos computacionalmente intensiva.

4.1 Configuración Inicial de la Solución Analítica

La configuración para la solución analítica inicial del péndulo es la siguiente (*pendulo_analitica_simplificada.m*):

- **Masa (m):** 1 kg
- **Gravedad (g):** 9.81 m/s²
- **Longitud del péndulo (L):** 1 metro
- **Paso de tiempo (h):** 0.01 segundos
- **Ángulo inicial (theta_0):** 30 grados, convertido a radianes para los cálculos

Se utilizó la siguiente fórmula para calcular la posición del péndulo en función del tiempo, asumiendo un comportamiento armónico simple:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo en radianes en el tiempo t .

4.2 Visualización de la Solución Analítica

La trayectoria del péndulo se simuló para 1000 pasos de tiempo, visualizando la posición de la masa en cada paso y trazando la evolución del ángulo con

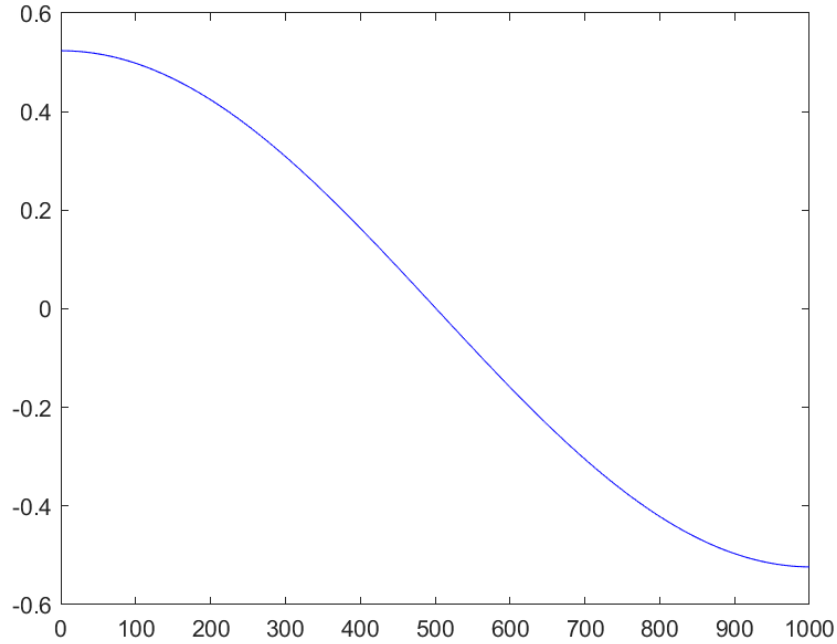


Figure 3: Trayectoria del ángulo del péndulo a lo largo del tiempo, según la solución analítica simplificada

respecto al tiempo. El script de MATLAB calcula y grafica la posición de la masa pendular en cada paso utilizando la solución analítica derivada.

Esta representación gráfica muestra cómo varía el ángulo del péndulo con el tiempo bajo la influencia de la gravedad, asumiendo condiciones ideales sin fricción ni resistencia del aire.

5 Comparación de las Soluciones Numérica y Analítica

Para evaluar la precisión de las soluciones numéricas, se compararon con sus respectivas soluciones analíticas bajo dos condiciones iniciales distintas, usando un ángulo inicial de 60° y luego un ángulo de 5° . Estas comparaciones permiten observar cómo las pequeñas variaciones en los ángulos iniciales pueden influir en la dinámica del sistema y la precisión del método numérico.

5.1 Comparación con Ángulo Inicial de 60°

El primer conjunto de simulaciones se realizó con un ángulo inicial de 60° (*pendulo_sinfriccion_2soluciones.m*). Se generaron dos gráficas: una para la solución numérica y otra para la solución analítica simplificada, ambas representadas du-

rante 1000 pasos de simulación. En la Figura 4, se observa que ambas soluciones muestran oscilaciones regulares, pero la solución numérica presenta una amplitud ligeramente mayor comparada con la analítica. Esto puede deberse a la discretización inherente al método numérico.

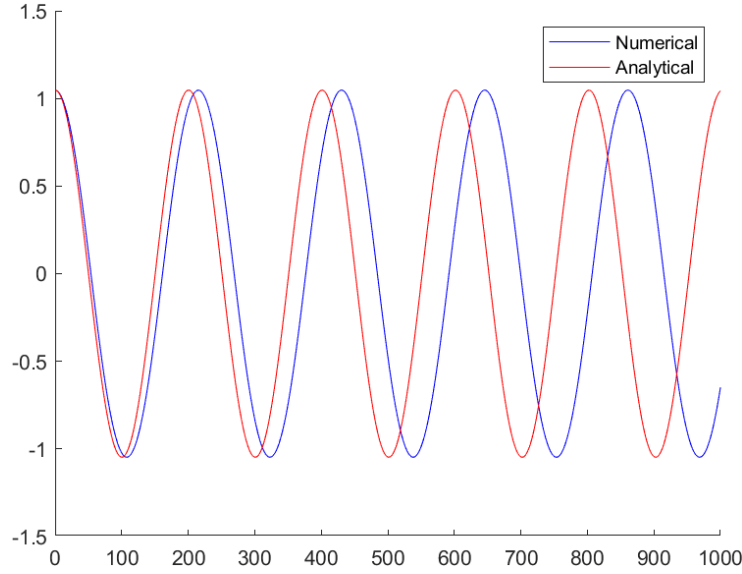


Figure 4: Comparación de las soluciones numérica y analítica para un ángulo inicial de 60°

5.2 Comparación con Ángulo Inicial de 5°

En la segunda serie de simulaciones, el ángulo inicial se redujo a 5° (*pendulo_sinfriccion_2soluciones_angulo5.m*). Las trayectorias generadas, ilustradas en la Figura 5, indican que con un ángulo inicial menor, las diferencias entre las soluciones numérica y analítica son mínimas. La amplitud de las oscilaciones es considerablemente más baja, y las fases de ambas soluciones están casi perfectamente alineadas, demostrando una mejor convergencia entre los métodos bajo condiciones de menor energía inicial.

Estos resultados subrayan la eficacia del método numérico para simular el comportamiento de un péndulo bajo diferentes condiciones iniciales, y resaltan la importancia de la elección del ángulo inicial en los estudios de dinámica de péndulos.

6 Conclusión

Este estudio ha demostrado la efectividad de las simulaciones numéricas y analíticas en la modelización del comportamiento dinámico de un péndulo. A

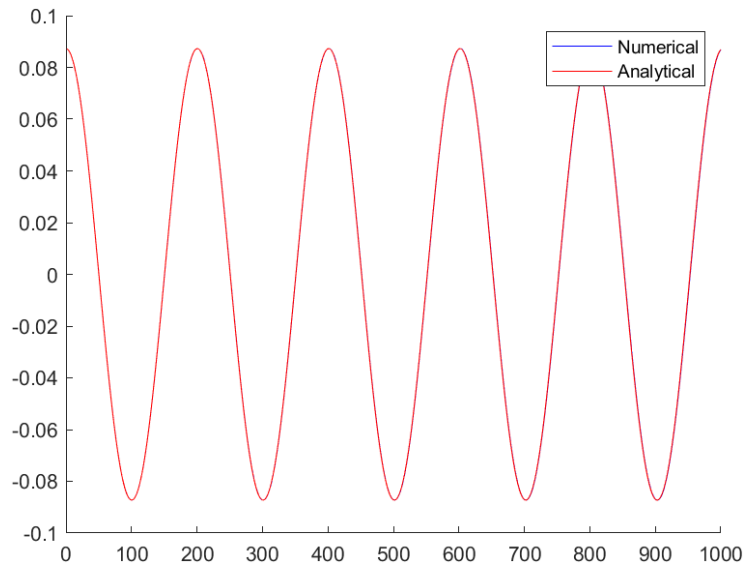


Figure 5: Comparación de las soluciones numérica y analítica para un ángulo inicial de 5°

través de diversas modificaciones de los parámetros y condiciones iniciales, se ha explorado cómo influyen en la trayectoria del péndulo, observando desde oscilaciones subamortiguadas y sobreamortiguadas hasta movimientos sin fricción.

La comparación entre las soluciones numéricas y analíticas, especialmente para ángulos iniciales de 60° y 5° , ha validado la precisión del enfoque numérico. Aunque se observaron ligeras divergencias en las amplitudes de las oscilaciones, estas diferencias fueron mínimas, especialmente en el caso de los ángulos iniciales bajos, donde la concordancia entre las soluciones fue casi perfecta. Esto subraya la importancia de los métodos numéricos en situaciones donde la solución analítica es difícil de obtener o implementar.