



Rapport

Mini-Projet : Surfaces paramétriques

Hamza Boukraichi & Mohammed Amine Tourari

Table des matières

1	Splines uniformes en produit tensoriel	2
2	Analogie Splines uniformes/ Doo-Sabin, Catmull-Clark	2
3	Un modèle de surface	2
4	Importance du contrôle local	3
5	Annexe	3
5.1	Exemples surfaces splines uniformes	3
5.2	Exemples surfaces b-splines ouvertes	5
5.3	Exemples surfaces b-splines fermées	7

1 Splines uniformes en produit tensoriel

Dans un premier temps, nous avons implémenté les surfaces splines fermées en produit tensoriel en utilisant la subdivision. (Voir annexe pour les exemples).

2 Analogie Splines uniformes/ Doo-Sabin, Catmull-Clark

En suivant l'algorithme de subdivision, en ayant doublé les points, et en prenant les milieux 2 fois (degré = 2), on se retrouve sur chaque ligne avec le milieu de chaque arête horizontale de chaque polygone. En itérant sur les colonnes, en doublant les points et en prenant le milieu 2 fois, on se retrouve alors avec les milieux des milieux des arêtes horizontales formant ainsi le milieu de chaque polygone comme sur le schéma de Doo-Sabin. De même pour Catmull-Clark, en prenant les milieux 3 fois, on se retrouve avec le barycentre des milieux de chaque arête et les points de faces adjacentes, pour retomber dans le schéma de Catmull-Clark.

3 Un modèle de surface

Dans le cadre de ce mini-projet, nous avons choisi d'implémenter l'algorithme de **de Boor-Cox** pour les B-Splines en produit tensoriel. Les B-Splines sont un moyen d'approximer d'une manière lisse les points d'une courbe ou des surfaces décrites par des courbes.

L'algorithme de **de Boor** permet d'évaluer les fonctions B-Splines d'une manière semblable à l'algorithme de **de Casteljau** en faisant intervenir un vecteur de noeud qui impose un traitement spécial lors de l'évaluation.

Etant donné

- t : point pour lequel la B-spline sera évaluée.
- V : vecteur des points de contrôle de taille n .
- k : degré de la B-spline.

On construit d'abord un vecteur de noeud T de taille $n + k + 1$.

- * les premiers $k+1$ éléments sont des 0.
- * les derniers $k+1$ éléments sont des 1.
- * les éléments du milieu dépendent des points de discontinuités voulues.

On cherche le rang j du vecteur de noeud tel que : $T(j) \leq t < T(j + 1)$.

On définit le poids $w_{i,k}$ par :

$$w_{i,k}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{si } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On construit aussi les fonctions B-Splines à l'ordre 0 :

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on calcule $N_{j,k}$ grâce à la relation de récurrence suivante :

$$N_i^p(t) = w_{i,p}(t) N_i^{p-1}(t) + (1 - w_{i,p}(t)) N_{i+1}^{p-1}(t)$$

L'avantage d'utiliser les B-Spline est la lissitude et la régularité élevée sur un support compact. L'algorithme de de Boor-Cox est un moyen simple et pratique pour le faire.

4 Importance du contrôle local

Un autre avantage de l'introduction des B-splines, est le passage de contrôle global (courbe de Bézier), au contrôle local. Ainsi le changement d'un point de contrôle n'affecte la courbe que localement. Nous corrigeons donc le problème de perte d'effet de forme constaté au niveau des courbes de Bézier quand le nombre de points augmente.

5 Annexe

5.1 Exemples surfaces splines uniformes

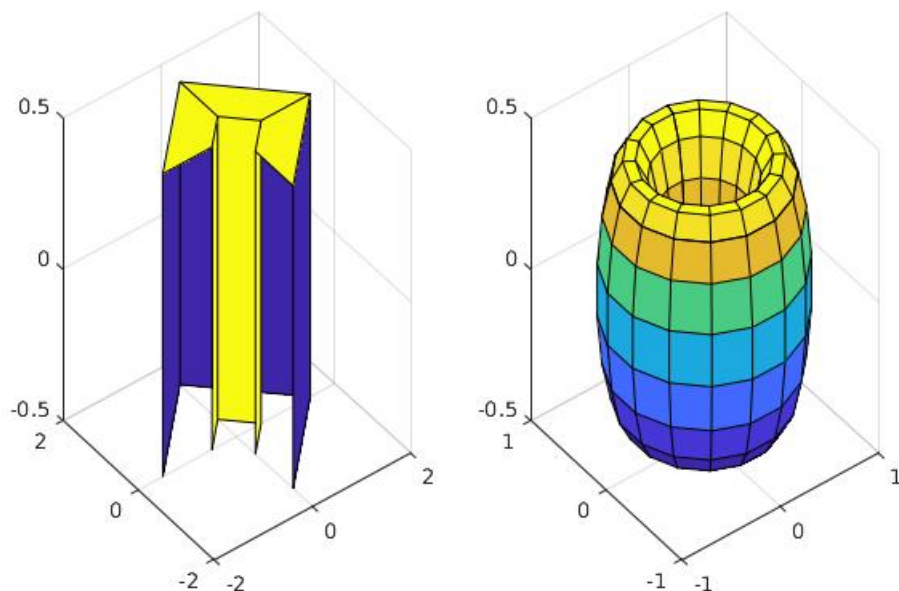


FIGURE 1 – Tore en splines uniformes

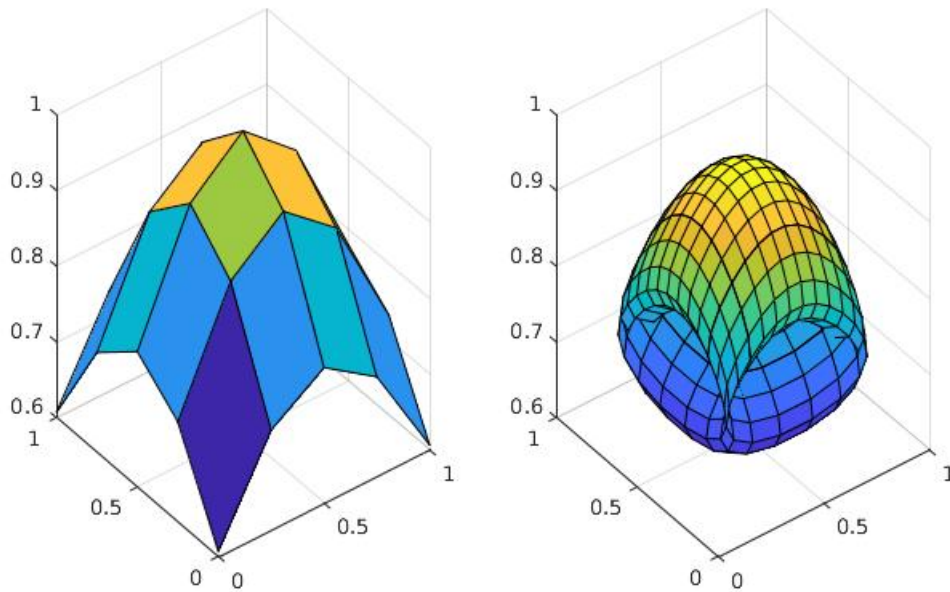


FIGURE 2 – exemple d’une grille en splines uniformes

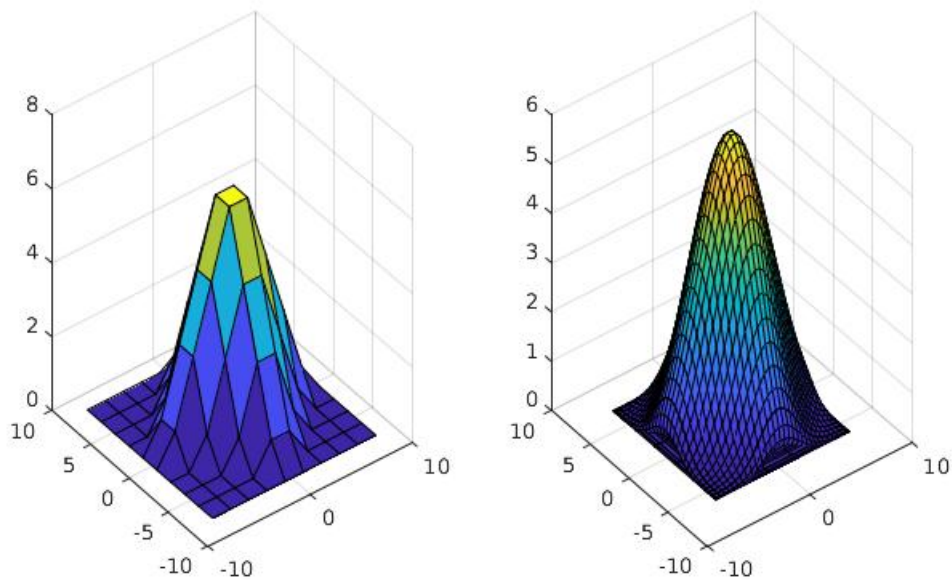


FIGURE 3 – pyramide en splines uniformes

5.2 Exemples surfaces b-splines ouvertes

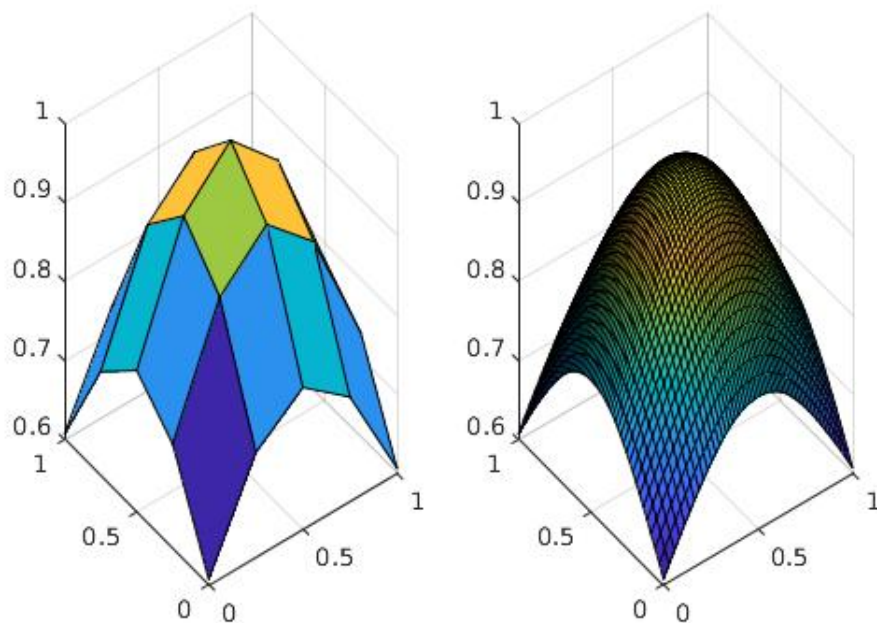


FIGURE 4 – exemple d’une grille de Boor

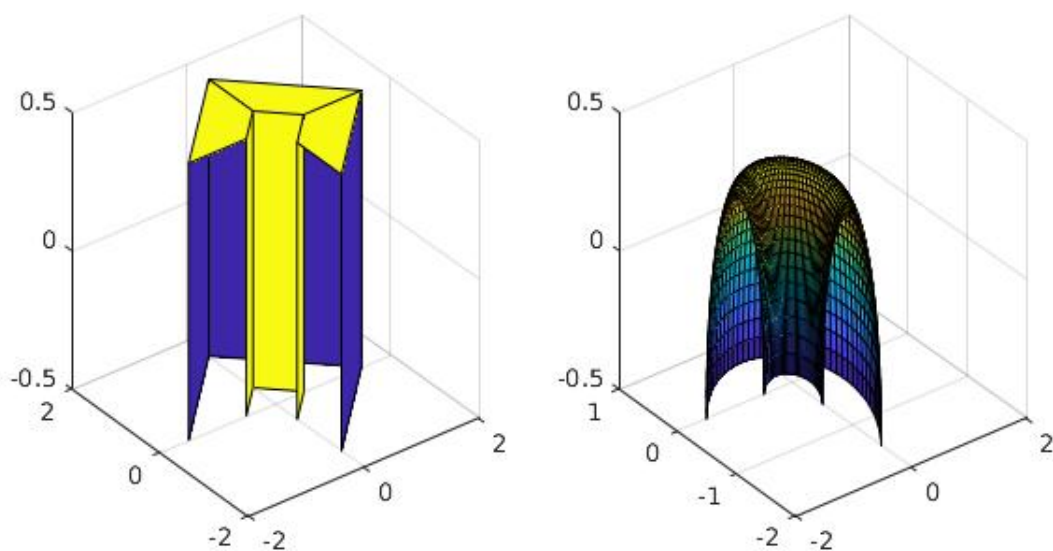


FIGURE 5 – Tore de Boor

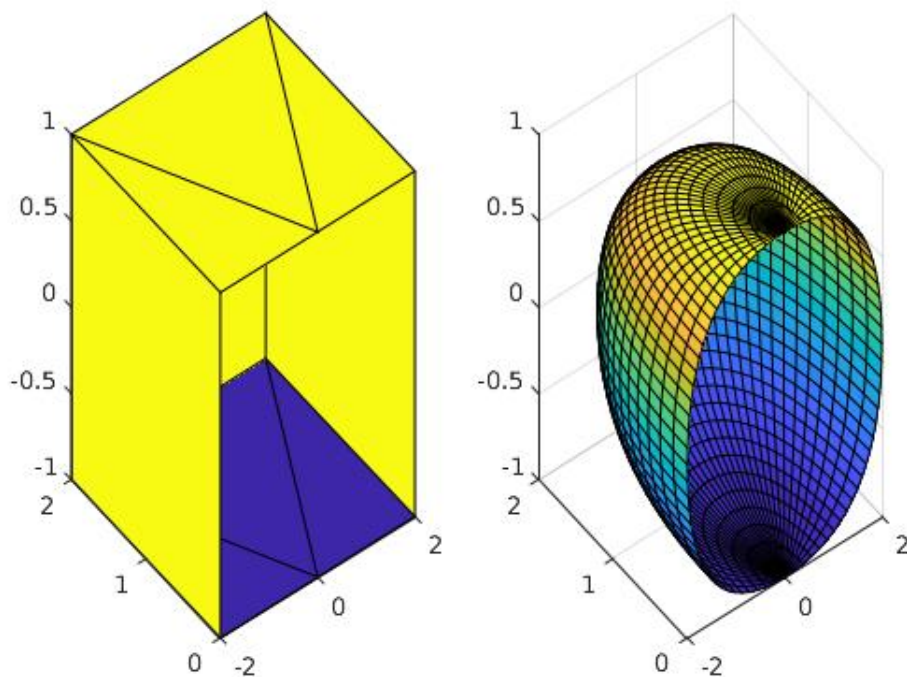


FIGURE 6 – Sphere de Boor

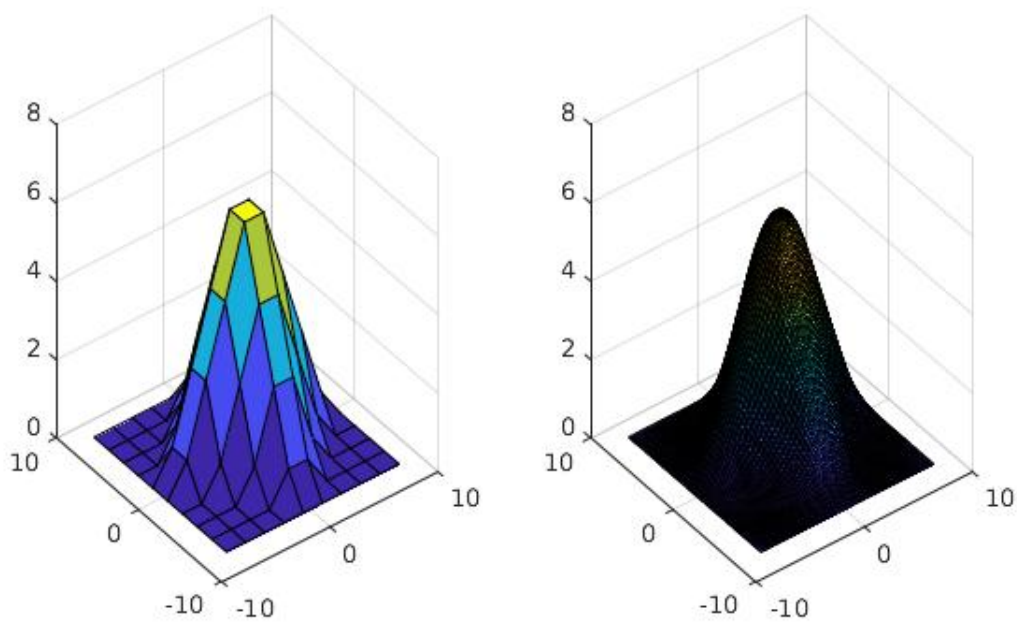


FIGURE 7 – Pyramide de Boor

5.3 Exemples surfaces b-splines fermées

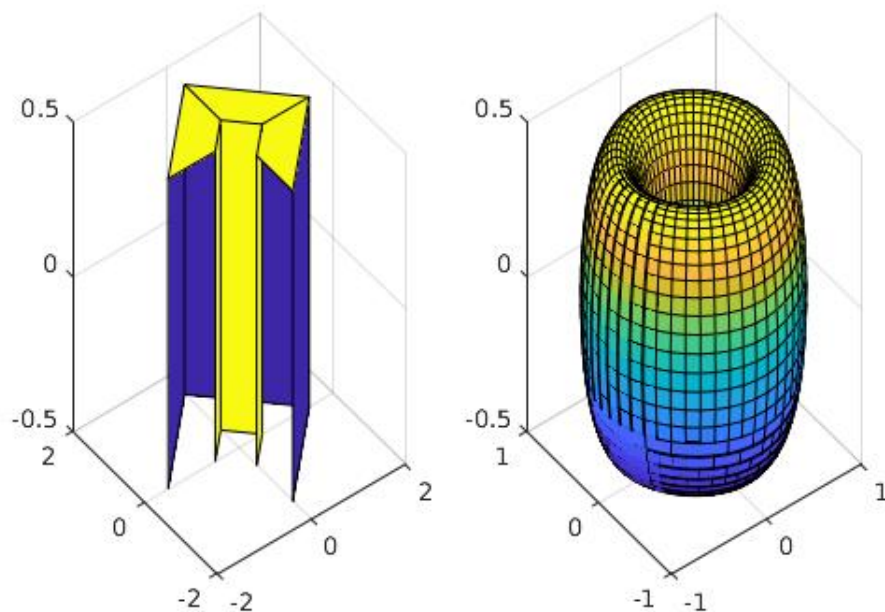


FIGURE 8 – Tore fermé de Boor

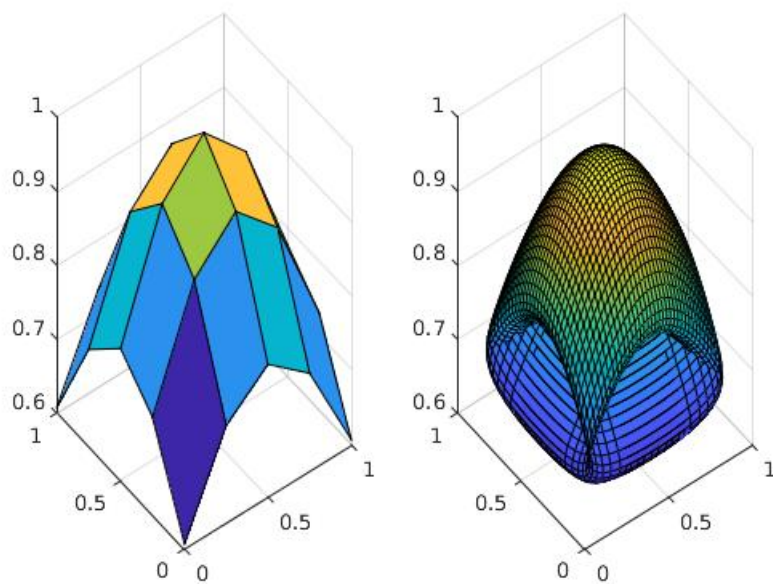


FIGURE 9 – Grille fermée de Boor