Projet EDP - Rapport

BOUKRAICHI Hamza - 2INH

April 6, 2018

Contents

1 Introduction

Ce projet a pour but d'approcher une solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann) :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & sur \quad \Omega, \\ u(x,y) = u_d & sur \quad \partial\Omega_d, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) & sur \quad \partial\Omega_d \end{cases}$$

$\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbf{R}^2$ et $\Omega = \partial\Omega_d \ \cup \ \partial\Omega_n$.

$f \in L^2(\Omega)$ et $u_d \in L^2(\partial\Omega_d)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$.

Grâce à la méthode des élèments finis de Lagrange de types P1 et Q1.

2 Partie Théorique

2.1 Mise sous forme variationelle

Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \ sur \ \partial\Omega_n\right\}$.

On pose $v = u - u_d$ sachant que $u - u_d \in H_0^1(\Omega)$.

On a donc en considérant les distributions associées :

$\forall w \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \Delta uw \ \partial x = \int_\Omega fw \ \partial x$

Puis selon la formule de Green :

$\forall u \in H^2(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \nabla w \ \partial x + \int_\Omega \Delta uw \ \partial x = \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \ \partial\gamma$

Puis en introduisant v on obtient :

$\int_\Omega (\nabla v + \nabla u_d)\nabla w \ \partial x = \int_\Omega fw \ \partial x + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \ \partial\gamma + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \ \partial\gamma$

Et sachant que $\gamma_0(w) = 0 \ sur \ \partial\Omega_d$, $\gamma_0(w) = w \ sur \ \partial\Omega_n$ et $\gamma_1(u) = g \ sur \ \partial\Omega_n$ on peut conclure :

$\int_\Omega \nabla v \nabla w \ \partial x = \int_\Omega fw \ \partial x + \int_{\partial\Omega_n} gw \ \partial\gamma - \int_{\partial\Omega_d} \nabla u_d \nabla w \ \partial\gamma$.

2.2 Démonstration de l'unicité de la solution

Ω étant borné, grâce à l'inégalité de Poincaré on peut se placer dans

$(H_0^1(\Omega), <,>_{0,1})$ qui est un Hilbert.

On prend alors $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w \partial x \\ l(w) = l_1(w) + l_2(w) + l_3(w) \\ l_1(w) = \int_\Omega fw \ \partial x \qquad l_2(w) = \int_{\partial\Omega_n} gw \ \partial\gamma \qquad l_3(w) = -\int_{\partial\Omega_d} \nabla u_d \nabla w \ \partial\gamma \end{cases}$$

Vérifions les conditions d'application du théorème de **Lax-Milgram** :

- a étant le produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ on peut en déduire que a est une forme bilinéaire et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

  $\forall v, w \ \in H_0^1(\Omega) : |a(v,w)| \ \leq \ ||v||_{0,1} \ ||w||_{0,1}$

  On déduit la continuité de a. Or :

  $\forall v \ \in H_0^1(\Omega) : |a(v,w)| \ \geq \ ||v||_{0,1}^2$

  On en déduit la coercivité de a. a est donc une forme bilinéaire continue et coercive.

- l_1 et l_2 et l_3 sont bien à valeurs dans $\mathbf{R}$ et sont linéaires compte tenu de la linéarité de l'integrale et de γ_0.

  En notant C la constance de Poincaré et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schawrz sur $L^2(\Omega)$, $L^2(\partial\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ on obtient :

  $$\begin{cases} |l_1(w)| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||w||_{L^2(\Omega)} \leq (1+c)||f||_{L^2(\Omega)}||w||_{0,1} \\ |l_2(w)| \leq ||g||_{L^2(\partial\Omega)}||w||_{L^2(\partial\Omega)} \leq (1+c)||g||_{L^2(\partial\Omega)}||w||_{0,1} \\ |l_3(w)| = | < u_d, w >_{0,1} | \leq ||u_d||_{0,1}||w||_{0,1} \end{cases}$$

  D'où la continuité de l_1 et l_2 et l_3 et par conséquent celle de l.

Ainsi les conditions de **Lax-Milgram** sont vérifiées, et par application de ce dernier :

$\exists!\ v \in H_0^1(\Omega),\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ a(v,w) = l(w).$

2.3 Aboutissement au système linéaire

Notons $V = Vect((\eta_k)_{k\in 1..n})$, soit alors $v \in V$ tel que $V = \sum_{k=1}^{n} x_k\eta_k$.

On a $\forall i \in 1..n\ \eta_i \in H_0^1(\Omega)$ et donc :

$\int_\Omega \nabla v \nabla \eta_i\, \partial x = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i x_k\, \partial x = \int_\Omega f\eta_i\, \partial x + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i\, \partial\gamma - \int_{\partial\Omega_d} \nabla u_d \nabla \eta_i\, \partial\gamma.$

Donc on a bien $\forall i \in 1..n\ \sum_{k=1}^{n} A_{ki}x_k = b_i$. avec :

$\forall i,j \in 1..n$:

$$\begin{cases} A_{i,j} = \int_\Omega \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j\ \partial x \\ b_i = \int_\Omega f\eta_i\ \partial x \quad + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i\ \partial\gamma \quad - \int_{\partial\Omega_d} \nabla u_d \nabla \eta_i\ \partial\gamma \end{cases}$$

Ainsi on aboutit au système $Ax = b$.

Montrons l'unicité de la solution : étant en dimension finie et A est une matrice carrée, il suffit de montrer qu'elle est injective.

On $\forall x \in V\ \ Ax = ([\sum_{k=1}^{n} a(\eta_k, \eta_i)x_k]_i)_{i\in 1..n}$

Soit alors $x \in V$ tel que $Ax = 0$

0n a donc $\forall i \in 1..n\ \sum_{k=1}^{n} a(\eta_k, \eta_i)x_k = 0$

D'où par linéarité de a par rapport à la première variable :

$\forall i \in 1..n\ a(\sum_{k=1}^{n} \eta_k x_k, \eta_i) = 0$

Ainsi : $(1)\forall i \in 1..n\ a(x, \eta_i) = 0$

Puisque V est un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$ et a est le produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ donc c'est un produit scalaire sur V aussi.

Donc selon (1), x est orthogonale à tous les èlèments de la base de V, donc x = 0. Donc A est injective et par conséquent bijective. On en déduit l'existence et l'unicité de la solution.

3 Mise en oeuvre pratique

3.1 Calcul de la matrice sur les éléments Quadrangle

En utilisant la méthode de l'élèment de référence avec :

$$\begin{array}{rclcl} \phi_Q & : & [0,1]\times[0,1] & \to & Q \\ & & (\alpha,\beta) & \mapsto & ((x_2-x_1)\alpha+(x_4-x_1)\beta+x_1,(y_2-y_1)\alpha+(y_4-x_1)\beta+y_1) \end{array}$$

Où les (x_i, y_i) sont les sommets du quadrangle.

Et :

$$\begin{cases} \phi_1(\alpha,\beta)=(1-\alpha)(1-\beta) \quad | \quad \phi_2(\alpha,\beta)=\alpha(1-\beta) \\ \phi_3(\alpha,\beta)=\alpha\beta \quad | \quad \phi_4(\alpha,\beta)=(1-\alpha)\beta \end{cases}$$

Et $\psi = |J_{\phi_Q}|$

Après application de la formule de changement de variable on abouti à :

$\forall i,j \in 1..n \quad M_{ij} = \int_U \nabla\phi_i(u,v)^T (J_{\phi_Q}^T J_{\phi_Q})^{-1}\phi_j(u,v)|J_{\phi_Q}|\ \partial u\ \partial v$

On a aussi $J_{\phi_Q}^T J_{\phi_Q}$ est symètrique donc son inverse l'est aussi on note alors

$$(J_{\phi_Q}^T J_{\phi_Q})^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

On explicitera le calcul de 2 intégrales puis on donnera la forme de la matrice en fonction de a,b et c.

On a donc :

$M_{1,1} = \psi\int_0^1\int_0^1 \nabla\phi_1(u,v)^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \phi_1(u,v)\partial u\ \partial v$

$= \psi\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix} v-1 & u-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v-1 \\ u-1 \end{pmatrix} \partial u\ \partial v$

$= \psi\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix} a(v-1) & b(u-1) \\ b(v-1) & c(u-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v-1 \\ u-1 \end{pmatrix} \partial u\ \partial v$

$= \psi\int_0^1\int_0^1 (a(v-1)^2 + 2*b(u-1)b(v-1) + c(u-1)^2)\partial u\ \partial v$

$= \psi(a\int_0^1(v-1)^2\partial v + 2*b\int_0^1\int_0^1(u-1)(v-1)\partial u\ \partial v + c\int_0^1(u-1)^2\partial u)$

$= \psi(a/3 + b/2 + c/3)$

$M_{1,2} = \psi \int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_1(u,v)^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \phi_2(u,v)\partial u\ \partial v$

$= \psi \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} v-1 & u-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ -u \end{pmatrix} \partial u\ \partial v$

$= \psi \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} a(v-1) & b(u-1) \\ b(v-1) & c(u-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ -u \end{pmatrix} \partial u\ \partial v$

$= \psi \int_0^1 \int_0^1 (-a(v-1)^2 - b(2u-1)(v-1) - -cu(u-1))\partial u\ \partial v$

$= \psi(-a \int_0^1 (v-1)^2 \partial v - b \int_0^1 \int_0^1 (2u-1)(v-1)\partial u\ \partial v - c \int_0^1 u(u-1)\partial u)$

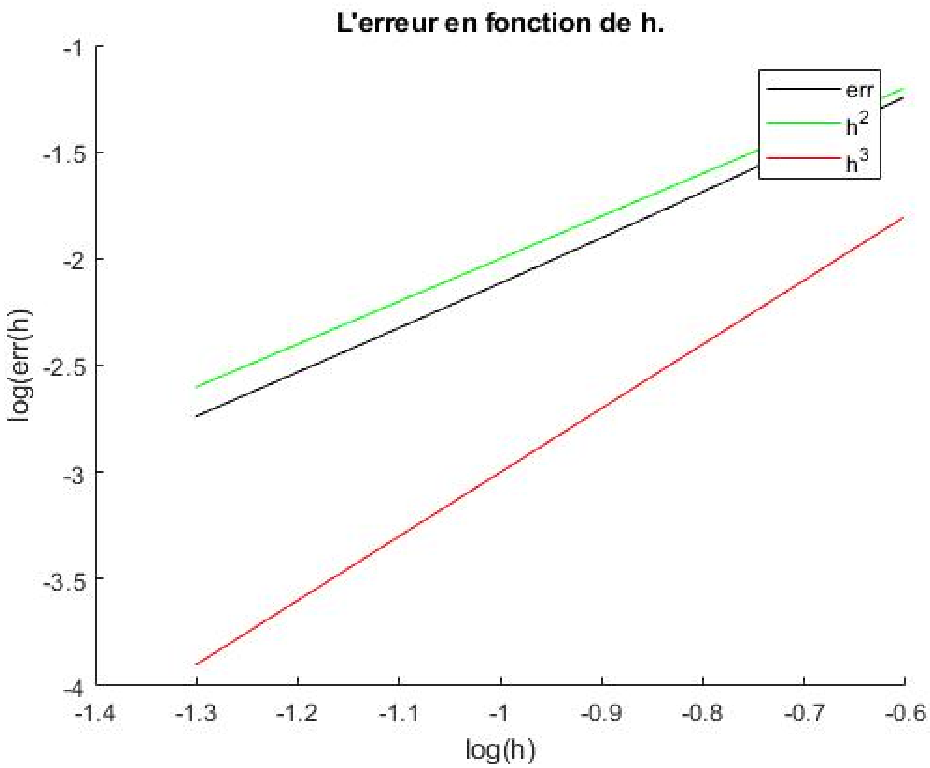
$= \psi(-a/3 + c/6)$

Par même calcul on abouti à :

$$M = \psi/6 \begin{pmatrix} 2a+3b+2c & -2a+c & -a-3b-c & a-2c \\ -2a+c & 2a-3b+2c & 3b+2c & -a+3b-c \\ -a-3b-c & a-2c & 2a+3b+2c & -2a+c \\ a-2c & -a-3b-c & -2a+c & 2a-3b+2c \end{pmatrix}$$

4 Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation

4.1 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle



- On remarque que la courbe de l'erreur est très proche de $h \mapsto h^2$ tout en étant parallèle, on en déduit que l'ordre de discrétisation est de 2.
- En reprenant l'analyse faite en cours sur les éléments P1, on abouti au résultat :

  $||\nabla u - \nabla v||_2 \leq (3/2\ M_2)\ h(\tau)h(\tau)/\rho(\tau)$ pour tout triangle τ de Ω

  Où u : solution exacte, v définie sur les éléments P_1, $h(\tau)$: diamètre du triangle τ, $\rho(\tau)$: rayon du cercle inscrit au triangle τ, et M_2 majorant de l'ensemble $\{\nabla^2 u(\psi), \psi \in \Omega\}$.

  Or les triangles $\tau \in \Omega$ sont tous isométriques donc $\forall \tau \in \Omega\ \ \rho(\tau) = cte = \rho$.

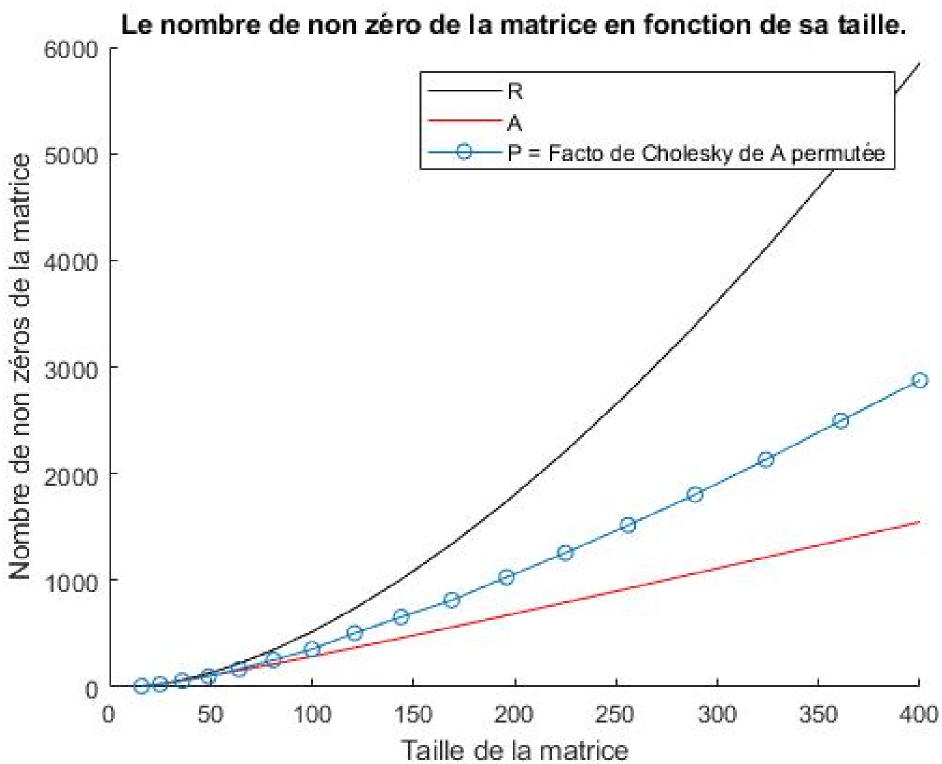
D'où : $\forall \tau \in \Omega \ \ ||\nabla u - \nabla v||_2 \leq (3/2 \ M_2) \ h^2/\rho$ où $h = max_{\tau \in \Omega} h(\tau)$.

En reprenant les mêmes calculs on abouti à :

$||u - u_h|| \leq (\frac{3M_2}{2\rho}) \ \sqrt{A(\Omega)} \ \ h^2$.

On a bien la méthode d'élèments finis convergente à l'ordre 2, donc l'ordre de discrétisation théorique correspond à l'ordre empirique.

4.2 Résolution du système linéaire par une méthode directe



- On remarque que la matrice A est plus intéressante au niveau du stockage que sa factorisation de Cholesky R.
- Le comportement mis en évidence est que la factorisation de Cholesky d'une matrice creuse est généralement plus dense.
- Afin de réduire le coût mémoire de cette factorisation, il suffira de permuter les vecteurs de la matrice A de façon à ce que sa factorisation de Cholesky

soit la moins dense possible. Et ceci est réalisé avec la fonction matlab **symand**.

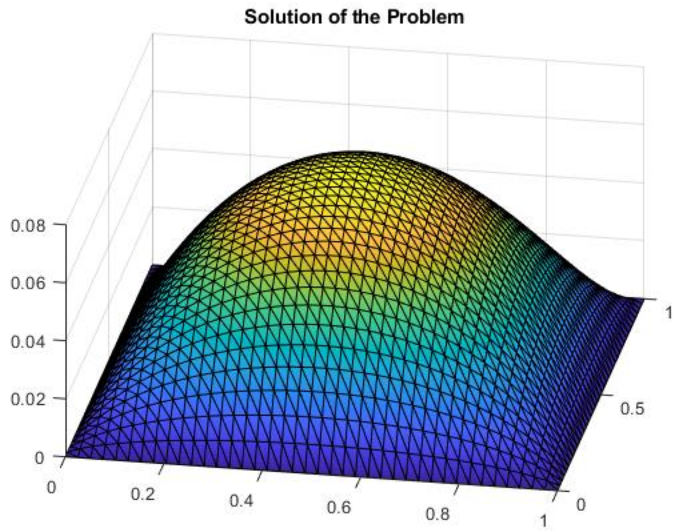
5 Conclusion

Ce projet m'a permis d'approfondir mes connaissances acquises en cours d'EDP en les confrontant à un exemple réel, mais aussi de manipuler et de découvrir les élèments finis Q1, connaissances que je souhaite encore plus approfondir lors de mon stage de 2_{ieme} année non seulement d'un point de vue théorique mais aussi pratique.

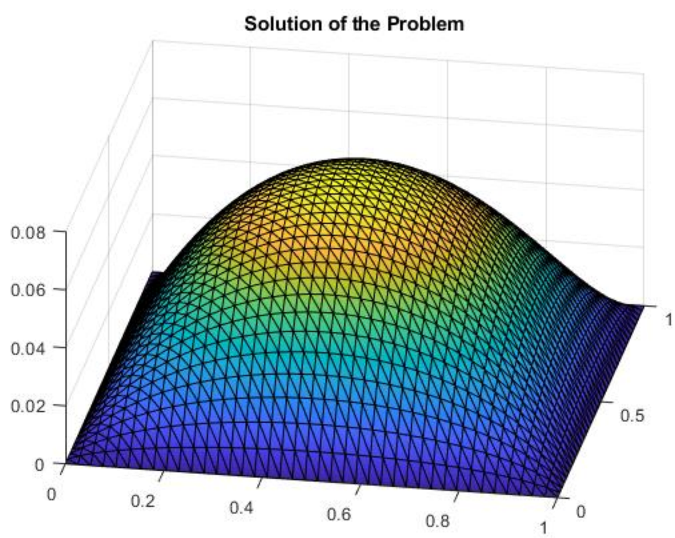
6 Annexe

Cette annexe contient les diffèrents résultats d'éxecution de **elliptic.m**.

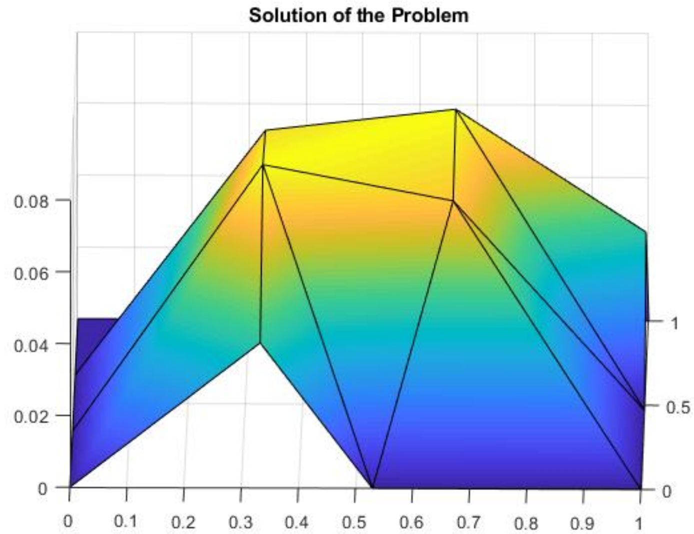
- Solution sur le maillage de taille n=40 triangulaire et résolution directe.



- Solution sur le maillage de taille n=40 triangulaire et résolution par factorisation de cholesky.



- Solution sur le maillage fourni (P1 + Q1) pour $u_d = 0$ et $g = 0$.



- Solution sur le maillage fourni (P1 + Q1) pour $u_d = 1$ et $g = 1$.