Table des matières

Compétences travaillées	🙃	😳	🙂	🤩
• Calculer le discriminant associé à un polynôme de degré 2				
• Connaître le lien entre discriminant et signe d'un polynôme de degré 2				
• Dresser le tableau de signes d'une fonction polynôme de degré 2				
• Résoudre des équations et des inéquations du second degré				

Vocabulaire utilisé

- **discriminant** (p. 2)
- **équation du second degré** (p. 4)
- **inéquation du second degré** (p. 4)

1. Factorisation d'un trinôme

Définition — **Discriminant**

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c.
On appelle **discriminant** du polynôme, le nombre $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$.

Propriété — **Discriminant et forme factorisée**

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c ; et Δ son **discriminant**

1. Si $\boxed{\Delta<0}$, on sait que le trinôme n'a **pas de racine réelle**.
Il n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$.

2. Si $\boxed{\Delta=0}$, on sait que le trinôme a **une racine double** : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
Pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.

3. Si $\boxed{\Delta>0}$, on sait que le trinôme a **deux racines** : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Démonstration — **Forme factorisée**

On sait que $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
(Forme canonique du trinôme).
On raisonne par disjonction des cas :

1. Dans le cas ou $\Delta=0$:

2. Dans le cas ou $\Delta>0$:

■ Exercice 1 – Racines et forme factorisée

☆☆☆ / 3

Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+x-3$.
Ici, $a=2$, $\Delta=25$, $x_1=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=1$ donc pour tout réel x, on a :

$$f(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$$

Vérifier les informations fournies par l'énoncé, en **calculant** Δ et en déterminant les racines de f.

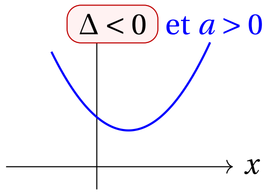
2. Signe du trinôme et discriminant

Propriété — **Tableau de signes et discriminant**

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant associé.

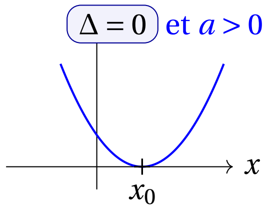
1. Si $\boxed{\Delta < 0}$, pas de racine réelle.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	signe de a



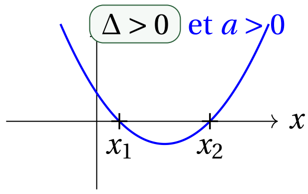
2. Si $\boxed{\Delta = 0}$, une racine double x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	



3. Si $\boxed{\Delta > 0}$, deux racines distinctes $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	



Méthode — **Établir le tableau de signes d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$**

Construisons le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 45$

1. Identifier les coefficients a, b et c. Attention aux signes de ces quantités!

$a =$ ...., $b =$ .... et $c =$ ....

2. Déterminer les racines éventuelles de f.

...

3. Déterminer le signe de a et la plus grande des deux valeurs x_1 et x_2.

a. ...

b. ...

4. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signes, en remplaçant a, x_1 et x_2 par leurs valeurs :

3. Equations et inéquations du second degré

3.1 Définitions

Définition — **Équation et inéquation du second degré**

Une **équation du second degré** est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Une **inéquation du second degré** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes :

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

3.2 Résoudre une équation du second degré

Méthode — **Résoudre une équation du second degré**

Pour résoudre une équation du second degré, on procède en plusieurs étapes :

1. **Réécrire l'équation** sous forme **développée** $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

2. **Identifier les coefficients** a, b et c. Attention aux signes !

3. **Calculer le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.

4. **Déterminer les racines** selon le signe de Δ :

Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle, donc $S = \varnothing$	Si $\Delta = 0$: une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, donc $S = \{x_0\}$
Si $\Delta > 0$: deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, donc $S = \{x_1 ; x_2\}$	

Exercice 2 – Résoudre une équation du second degré ★☆☆ / 5

Résoudre l'équation : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

3.3 Résoudre une inéquation du second degré

Méthode — **Résoudre une inéquation du second degré**

Pour résoudre une inéquation du second degré, on procède en plusieurs étapes :

1. **Réécrire l'inéquation** sous la forme $ax^2 + bx + c > 0$ (ou < 0, ≥ 0, ≤ 0) avec $a \neq 0$.

2. **Identifier les coefficients** a, b et c. Attention aux signes !

3. **Calculer le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.

4. **Déterminer les racines** selon le signe de Δ (voir propriété précédente).

5. **Construire le tableau de signes** du trinôme $ax^2 + bx + c$ en utilisant :
Le signe de a (hors des racines)
Les racines (si elles existent)
La règle : entre les racines, le signe est celui de $-a$

6. **Lire la solution** dans le tableau de signes selon l'inéquation demandée.

■ Exercice 3 – Résoudre une inéquation du second degré ★★☆ / 6

Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

■ Exercice 4 – Résoudre une inéquation du second degré ★★☆ / 6

Résoudre l'inéquation : $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1 < 0$