1. Questions flash

■ Exercice 1 – Résolution d'équation factorisée ★☆☆ / 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5(x+1)(x-6)$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

1. $5 = 0$ impossible **2.** $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ **3.** $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$

$S = \{-1;6\}$

■ Exercice 2 – Tableau de signes avec forme canonique ★☆☆ / 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-5)^2 + 13$.
Dresser le tableau de signes de f.

Racines : $f(x) = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = \dfrac{13}{2}$ D'où $x = 5 \pm \sqrt{\dfrac{13}{2}}$

x	$-\infty$		$5-\sqrt{\frac{13}{2}}$		$5+\sqrt{\frac{13}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

■ Exercice 3 – Forme factorisée à partir des racines ★☆☆ / 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 20x - 56$. On admet que les racines de f sont 7 et -2. Déterminer la forme factorisée de f.

$f(x) = 4(x-7)(x+2)$

■ Exercice 4 – Résolution d'inéquation avec forme factorisée ★☆☆ / 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5(x-2)(x-9)$.
Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Tableau de signe avec racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 9$: D'où $S =]-\infty;2] \cup [9;+\infty[$

x	$-\infty$		2		9		$+\infty$
5		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Fonction polynome de degre 2

■ Exercice 5 – Reconnaissance de fonctions du second degré ★☆☆ / 3

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer si c'est une fonction polynôme de degré 2.

1. $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$

Oui, $a = 1$, $b = 2$, $c = -\sqrt{2}$

2. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} - 1$

Non, présence de $\dfrac{1}{x}$

3. $h(x) = 3x^2 - 3x - 2x^2 + 2x - x^2 - x + 5$

Non, degré 0 après réduction

■ Exercice 6 – Identification des coefficients ★☆☆ / 6

Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer les fonctions polynômes de degré 2, en précisant ses coefficients.

1. $f(x) = (x+3)^2$

$f(x) = x^2 + 6x + 9$ donc oui, $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$

2. $g(x) = (x+3)(x-3)$

$g(x) = x^2 - 9$ donc oui, $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$

3. $h(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$

$h(x) = 4x$ donc non, degré 1

■ Exercice 7 – Développement et identification ★☆☆ / 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+2)^2 - 3(x+1)$.

1. Développer $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 4x + 4) - 3x - 3 \\ &= 2x^2 + 8x + 8 - 3x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

2. En déduire que f est une fonction polynôme de degré 2 et déterminer ses coefficients.

$f(x) = 2x^2 + 5x + 5$ donc $a = 2$, $b = 5$, $c = 5$

Comme $a = 2 \neq 0$, f est bien de degré 2.

3. Differentes formes d'un polynome de degre 2

■ Exercice 8 – Forme canonique guidée ★☆☆ / 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

1. Compléter l'égalité ci-contre avec des réels :

$$x^2 + 4x + \underline{\quad 4 \quad} = (x + \underline{\quad 2 \quad})^2$$

2. En déduire la forme canonique de f.

$f(x) = (x+2)^2 + 1$

■ Exercice 9 – Forme canonique par développement inverse

★☆☆ / 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 24x - 41$.

1. **Développer** l'expression $-3(x-4)^2 + 7$.

$-3(x-4)^2 + 7$

$= -3(x^2 - 8x + 16) + 7$

$= -3x^2 + 24x - 48 + 7$

$= -3x^2 + 24x - 41$

2. En déduire la forme canonique de f.

$f(x) = -3(x-4)^2 + 7$

■ Exercice 10 – Forme canonique - Entraînement

★☆☆ / 4

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes (utiliser un brouillon).

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f(x) = (x-3)^2 - 4$

2. $f(x) = x^2 + 5x + 4$

$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$

■ Exercice 11 – Forme canonique par factorisation

★☆☆ / 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$.
Déterminer la forme canonique de f.

$f(x) = 2(x+1)^2 + 6$

■ Exercice 12 – Forme canonique - Niveau avancé

★☆☆ / 6

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes (utiliser un brouillon).

1. $f(x) = 3x^2 + 9x + 5$

$f(x) = 3(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{4}$

2. $f(x) = -2x^2 + 2x + 2$

$f(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2}$

■ Exercice 13 – Trois formes d'une fonction du second degré

★☆☆ / 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$f(x) = 2(x+4)(x-2)$$

$2(x+4)(x-2)$

$= 2(x^2 - 2x + 4x - 8)$

$= 2x^2 + 4x - 16$

$= f(x)$

2. Montrer que pour tout réel x,
$$f(x) = 2(x+1)^2 - 18$$

$2(x+1)^2 - 18$

$= 2(x^2 + 2x + 1) - 18$

$= 2x^2 + 4x + 2 - 18$

$= 2x^2 + 4x - 16 = f(x)$

3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

a. Dresser le tableau de variations de f

Forme canonique : $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

b. Résoudre $f(x) = 0$

Forme factorisée :

$f(x) = 2(x+1+3)(x+1-3)$

$= 2(x+4)(x-2)$

$S = \{-4; 2\}$

c. Résoudre $f(x) = -16$

Forme développée : $2x^2 + 4x - 16 = -16$

$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(2x+4) = 0$

$S = \{-2; 0\}$

d. Résoudre $f(x) > 0$

Forme factorisée avec $f(x) = 2(x+4)(x-2)$

$S =]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$

■ Exercice 14 – Formes et résolutions d'équations ★☆☆ / 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 9$.

1. Développer et réduire $f(x)$

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 9$

$= x^2 + 4x - 5$

2. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (x+2)^2 - 9$

$= (x+2)^2 - 3^2$

$= (x+2-3)(x+2+3)$

$= (x-1)(x+5)$

3. Résoudre en utilisant la forme la plus adaptée.

a. $f(x) = 9$

$(x+2)^2 - 9 = 9$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 18$

$\Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = -2 \pm 3\sqrt{2}$

$S = \{-2 - 3\sqrt{2}; -2 + 3\sqrt{2}\}$

b. $f(x) = 0$

$(x-1)(x+5) = 0$

$S = \{1; -5\}$

c. $f(x) = -5$

$x^2 + 4x - 5 = -5$

$\Rightarrow x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \Rightarrow S = \{0; -4\}$

■ Exercice 15 – Modélisation d'une évolution de poids

☆☆☆ / 5

Une personne s'est pesée toutes les semaines pendant un an en 2018. Sa courbe de poids peut être modélisée par une fonction polynôme de degré 2 dont l'expression est $f(x) = 0.008x^2 - 0.4x + 75$ où x correspond au temps en semaines à partir du premier janvier 2018 ($x \in [0;52]$).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Forme canonique : $f(x) = 0{,}008(x-25)^2 + 70$

x	0	25	52
f	75 ↘	70	↗ 75,632

2. En utilisant cette modélisation, répondre aux questions suivantes.

a. Quel était son poids maximal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?

Poids maximal : 75,632 kg atteint à la semaine 52

b. Quel était son poids minimal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?

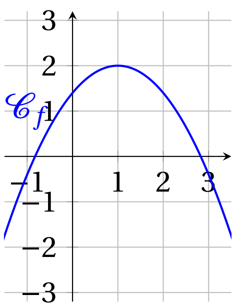
Poids minimal : 70 kg atteint à la semaine 25

4. Variations et courbe representative

■ Exercice 16 – Lecture graphique de paraboles

☆☆☆ / 3

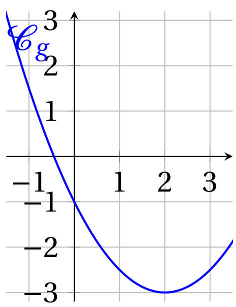
Pour chaque fonction représentée ci-dessous, déterminer les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le signe de a.



Sommet : $(1;2)$

Axe : $x=1$

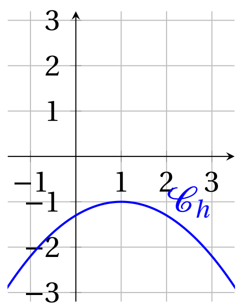
Signe de a : $a<0$



Sommet : $(2;-3)$

Axe : $x=2$

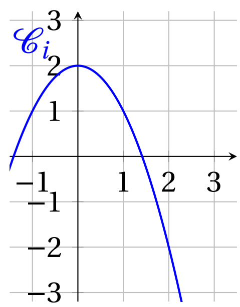
Signe de a : $a>0$



Sommet : $(1;-1)$

Axe : $x=1$

Signe de a : $a<0$



Sommet : $(0;2)$

Axe : $x=0$

Signe de a : $a<0$

■ Exercice 17 – Minimum et maximum de fonctions

☆☆☆ / 4

Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint.

1. $f(x) = 3x^2 + 4$

Minimum en $x=0$, vaut $f(0)=4$

2. $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$

Maximum en $x=4$, vaut $g(4)=8$

3. $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$

Maximum en $x=2$, vaut $h(2)=7$

4. $k(x) = 7(x+1)^2 - 25$

Minimum en $x=-1$, vaut $k(-1)=-25$

■ Exercice 18 – Variations d'une fonction du second degré ★☆☆ / 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1. Calculer $f(1)$

$f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$

2. Déterminer la forme canonique de f.

$f(x) = x^2 + x - 2$, on a $\alpha = -\dfrac{1}{2\times 1} = -\dfrac{1}{2}$

$\beta = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4}$

Donc $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$

3. Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

■ Exercice 19 – Détermination d'une parabole par son sommet ★☆☆ / 3

Soit f une fonction polynôme de degré 2. La courbe représentative de f a pour sommet le point $A(1;3)$ et passe par le point $B(0;5)$.
Déterminer la forme canonique de f.

La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec sommet $(\alpha;\beta)$.

Ici $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, donc $f(x) = a(x-1)^2 + 3$.

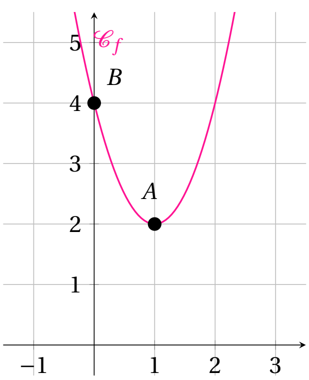
La courbe passe par $B(0;5)$ donc $f(0) = 5$

$a(0-1)^2 + 3 = 5$, donc $a \times 1 + 3 = 5$

Ainsi, $a = 2$ et $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

■ Exercice 20 – Forme canonique par lecture graphique ★☆☆ / 3

Soit f la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
Déterminer la forme canonique de f.



- Sommet : $A(1;2)$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

- Point $B(0;4)$ appartient à la courbe

Forme canonique : $f(x) = a(x-1)^2 + 2$

Puisque $f(0) = 4$, $a(0-1)^2 + 2 = 4$

D'où $a + 2 = 4 \Longrightarrow a = 2$ et $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$

Solution de l'Exercice 1

On a $f(x) = 5(x+1)(x-6) = 0$.
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

1. $5 = 0$ impossible

2. $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

3. $x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Donc $S = \{-1; 6\}$.

Solution de l'Exercice 2

$f(x) = -2(x-5)^2 + 13$ est sous forme canonique avec $a = -2 < 0$.
Pour trouver les racines, résolvons $f(x) = 0$:
$-2(x-5)^2 + 13 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = \dfrac{13}{2}$
$x-5 = \pm\sqrt{\dfrac{13}{2}} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{\dfrac{13}{2}}$
Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.
$f(x) > 0$ entre les racines et $f(x) < 0$ à l'extérieur.

Solution de l'Exercice 3

Les racines de f sont $x_1 = 7$ et $x_2 = -2$.
La forme factorisée s'écrit $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec a le coefficient dominant.
Dans la forme développée $f(x) = 4x^2 - 20x - 56$, on lit $a = 4$.
Donc $f(x) = 4(x-7)(x-(-2)) = 4(x-7)(x+2)$.
Vérification : $4(x-7)(x+2) = 4(x^2+2x-7x-14) = 4(x^2-5x-14) = 4x^2-20x-56$ ✓

Solution de l'Exercice 4

$f(x) = 5(x-2)(x-9) \geqslant 0$
Racines de f : $x_1 = 2$ et $x_2 = 9$.
Coefficient dominant $a = 5 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.
$f(x) \geqslant 0$ à l'extérieur des racines et $f(x) \leqslant 0$ entre les racines.
Donc $S = \left]-\infty; 2\right] \cup \left[9; +\infty\right[$.

Solution de l'Exercice 5

1. $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 \neq 0$, $b = 2$, $c = -\sqrt{2}$.
Donc f est une fonction polynôme de degré 2.

2. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} - 1 = x^2 + x^{-1} - 1$
La présence du terme x^{-1} (exposant négatif) fait que g n'est pas une fonction polynôme.

3. $h(x) = 3x^2 - 3x - 2x^2 + 2x - x^2 - x + 5$
Réduisons : $h(x) = (3-2-1)x^2 + (-3+2-1)x + 5 = 0x^2 - 2x + 5 = -2x + 5$
h est une fonction affine (degré 1), pas une fonction polynôme de degré 2.

Solution de l'Exercice 6

1. $f(x)=(x+3)^2=x^2+6x+9$
C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=1$, $b=6$, $c=9$.

2. $g(x)=(x+3)(x-3)=x^2-9$
C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=1$, $b=0$, $c=-9$.

3. $h(x)=(x+1)^2-(x-1)^2$
Développons : $(x+1)^2=x^2+2x+1$ et $(x-1)^2=x^2-2x+1$
Donc $h(x)=(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)=x^2+2x+1-x^2+2x-1=4x$
h est une fonction affine (degré 1), pas une fonction polynôme de degré 2.

Solution de l'Exercice 7

1. Développement :
$f(x)=2(x+2)^2-3(x+1)$
$=2(x^2+4x+4)-3x-3$
$=2x^2+8x+8-3x-3$
$=2x^2+5x+5$

2. $f(x)=2x^2+5x+5$ est de la forme ax^2+bx+c avec :
$a=2\neq 0$, $b=5$, $c=5$
Donc f est bien une fonction polynôme de degré 2.

Solution de l'Exercice 8

1. Pour compléter $(x+\dots)^2$, on cherche a tel que $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$.
On veut $2ax=4x$, donc $2a=4$, donc $a=2$.
Alors $(x+2)^2=x^2+4x+4$.
Donc $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

2. On a $f(x)=x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$.
La forme canonique est $f(x)=(x+2)^2+1$.

Solution de l'Exercice 9

1. Développement de $-3(x-4)^2+7$:
$-3(x-4)^2+7=-3(x^2-8x+16)+7$
$=-3x^2+24x-48+7$
$=-3x^2+24x-41$

2. On constate que $-3(x-4)^2+7=-3x^2+24x-41=f(x)$.
Donc la forme canonique de f est : $f(x)=-3(x-4)^2+7$.

Solution de l'Exercice 10

D'après le cours : L'écriture $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** de la fonction $f:x\mapsto ax^2+bx+c$.

1. $$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

2. $$\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

1. $f(x)=x^2-6x+5$

a. $\alpha=-\dfrac{-6}{2\times 1}=3$

b. $\beta=-\dfrac{6^2-4\times1\times5}{4\times1}=-\dfrac{36-20}{4}=-4$

Ainsi $f(x)=(x-3)^2-4$

2. $f(x)=x^2+5x+4$

a. $\alpha=-\dfrac{5}{2}$

b. $\beta=-\dfrac{5^2-4\times1\times4}{4\times1}=-\dfrac{25-16}{4}=-\dfrac{9}{4}$

$f(x)=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$

Solution de l'Exercice 11

D'après le cours : L'écriture $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** de la fonction $f:x\mapsto ax^2+bx+c$.
Pour $f(x)=2x^2+4x+8$, on a $a=2$, $b=4$, $c=8$.

a. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times 2} = -1$

b. $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{4^2-4\times 2\times 8}{4\times 2} = -\frac{16-64}{8} = -\frac{-48}{8} = 6$

En remplaçant a, α et β dans l'expression de la forme canonique, on obtient :

$$f(x) = 2(x+1)^2+6$$

Solution de l'Exercice 12

D'après le cours : L'écriture $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$.

1. $\alpha = -\frac{b}{2a}$

2. $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

1. $f(x) = 3x^2+9x+5$

Pour cette fonction, on a $a=3$, $b=9$, $c=5$.

a. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2\times 3} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

b. $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{9^2-4\times 3\times 5}{4\times 3} = -\frac{81-60}{12} = -\frac{21}{12} = -\frac{7}{4}$

Ainsi $f(x) = 3(x-(-\frac{3}{2}))^2+(-\frac{7}{4}) = 3(x+\frac{3}{2})^2-\frac{7}{4}$

2. $f(x) = -2x^2+2x+2$

Pour cette fonction, on a $a=-2$, $b=2$, $c=2$.

a. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times(-2)} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

b. $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{2^2-4\times(-2)\times 2}{4\times(-2)} = -\frac{4-(-16)}{-8} = -\frac{4+16}{-8} = -\frac{20}{-8} = \frac{5}{2}$

Ainsi $f(x) = -2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$

Solution de l'Exercice 13

1. Montrer que pour tout réel x,
$f(x) = 2(x+4)(x-2)$

$2(x+4)(x-2)$

$= 2(x^2-2x+4x-8)$

$= 2x^2+4x-16$

$= f(x)$

2. Montrer que pour tout réel x,
$f(x) = 2(x+1)^2-18$

$2(x+1)^2-18$

$= 2(x^2+2x+1)-18$

$= 2x^2+4x+2-18$

$= 2x^2+4x-16 = f(x)$

3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

a. Dresser le tableau de variations de f

Forme canonique : $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-18	↗ $+\infty$

b. Résoudre $f(x) = 0$

Forme factorisée :

$f(x) = 2(x+1+3)(x+1-3)$

$= 2(x+4)(x-2)$

$S = \{-4; 2\}$

c. Résoudre $f(x) = -16$

Forme développée : $2x^2 + 4x - 16 = -16$

$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(2x+4) = 0$

$S = \{-2; 0\}$

d. Résoudre $f(x) > 0$

Forme factorisée avec $f(x) = 2(x+4)(x-2)$

$S =]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$

Solution de l'Exercice 14

1. Développer et réduire $f(x)$

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 9$

$= x^2 + 4x - 5$

2. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (x+2)^2 - 9$

$= (x+2)^2 - 3^2$

$= (x+2-3)(x+2+3)$

$= (x-1)(x+5)$

3. Résoudre en utilisant la forme la plus adaptée.

a. $f(x) = 9$

$(x+2)^2 - 9 = 9$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 18$

$\Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = -2 \pm 3\sqrt{2}$

$S = \{-2 - 3\sqrt{2}; -2 + 3\sqrt{2}\}$

b. $f(x) = 0$

$(x-1)(x+5) = 0$

$S = \{1; -5\}$

c. $f(x) = -5$

$x^2 + 4x - 5 = -5$

$\Rightarrow x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \Rightarrow S = \{0; -4\}$

Solution de l'Exercice 15

1. Pour dresser le tableau de variations, déterminons la forme canonique :
$f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}4x + 75$
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-0{,}4}{2 \times 0{,}008} = \dfrac{0{,}4}{0{,}016} = 25$
$\beta = f(25) = 0{,}008 \times 25^2 - 0{,}4 \times 25 + 75 = 5 - 10 + 75 = 70$
Donc $f(x) = 0{,}008(x-25)^2 + 70$.
Comme $a = 0{,}008 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
Sur $[0;52]$: minimum en $x = 25$ avec $f(25) = 70$.
Aux bornes : $f(0) = 75$ et $f(52) = 0{,}008 \times 27^2 + 70 = 5{,}832 + 70 = 75{,}632$

2. D'après le tableau de variations :

1. Le poids maximal est 75,632 kg, atteint à la fin de l'année (semaine 52).

2. Le poids minimal est 70 kg, atteint à la semaine 25 (fin juin).

Solution de l'Exercice 16

Pour chaque parabole, je lis graphiquement :

$\mathscr{C}_f$:

- Sommet au point le plus haut : $(1;2)$
- Axe de symétrie vertical : $x = 1$
- Parabole vers le bas : $a < 0$

$\mathscr{C}_g$:

- Sommet au point le plus bas : $(2;-3)$
- Axe de symétrie vertical : $x = 2$
- Parabole vers le haut : $a > 0$

$\mathscr{C}_h$:

- Sommet au point le plus haut : $(1;-1)$
- Axe de symétrie vertical : $x = 1$
- Parabole vers le bas : $a < 0$

$\mathscr{C}_i$:

- Sommet au point le plus haut : $(0;2)$
- Axe de symétrie vertical : $x = 0$
- Parabole vers le bas : $a < 0$

Solution de l'Exercice 17

1. $f(x) = 3x^2 + 4 = 3(x-0)^2 + 4$
Forme canonique : $a = 3 > 0$, donc minimum.
Minimum atteint en $x = 0$ avec $f(0) = 4$.

2. $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$
Forme canonique : $a = -2 < 0$, donc maximum.
Maximum atteint en $x = 4$ avec $g(4) = 8$.

3. $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$
Forme canonique : $\alpha = -\dfrac{8}{2 \times (-2)} = 2$
$\beta = h(2) = -2 \times 4 + 8 \times 2 - 1 = 7$
Donc $h(x) = -2(x-2)^2 + 7$ avec $a = -2 < 0$.
Maximum atteint en $x = 2$ avec $h(2) = 7$.

4. $k(x) = 7(x+1)^2 - 25$
Forme canonique : $a = 7 > 0$, donc minimum.
Minimum atteint en $x = -1$ avec $k(-1) = -25$.

Solution de l'Exercice 18

1. $f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

2. Pour déterminer la forme canonique de $f(x) = x^2 + x - 2$:
Coefficient dominant $a = 1 > 0$, coefficient de x : $b = 1$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2 \times 1} = -\dfrac{1}{2}$
$\beta = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2$
$\beta = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4} - \dfrac{8}{4} = -\dfrac{9}{4}$
Donc la forme canonique est :
$f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$

3. Puisque $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
La fonction admet un minimum en $x = -\dfrac{1}{2}$ avec $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$.
La fonction est décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Solution de l'Exercice 19

Puisque f est une fonction polynôme de degré 2, sa forme canonique est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où $(\alpha;\beta)$ sont les coordonnées du sommet.
D'après l'énoncé, le sommet est $A(1;3)$, donc : - $\alpha = 1$ - $\beta = 3$
La forme canonique devient : $f(x) = a(x-1)^2 + 3$
Il reste à déterminer le coefficient a.
La courbe passe par le point $B(0;5)$, donc $f(0) = 5$:
$f(0) = a(0-1)^2 + 3 = a \times 1 + 3 = a + 3$
Puisque $f(0) = 5$:

$$a + 3 = 5 \Leftrightarrow a = 2$$

La forme canonique de f est donc :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$$

Solution de l'Exercice 20

En observant la représentation graphique, je peux identifier :
1) Le sommet de la parabole :
Le point le plus bas de la courbe est $A(1;2)$, donc :
- $\alpha = 1$ (abscisse du sommet)
- $\beta = 2$ (ordonnée du sommet)

2) La forme canonique partielle :
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-1)^2 + 2$
3) Détermination du coefficient a :
La courbe passe par le point $B(0;4)$, donc $f(0) = 4$:
$f(0) = a(0-1)^2 + 2 = a \times 1 + 2 = a + 2$
Puisque $f(0) = 4$:

$$a + 2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

4) Forme canonique finale :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 2$$

Vérification : $f(0) = 2(0-1)^2 + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$