1ère **Devoir : Polynôme de degré 2** **Classe :** **Date :**

Nom : ____________ **Prénom :** ____________

Durée : 55’

Compétences évaluées				
• Différentes formes des polynômes de degré 2				
• Lecture graphique				
• Problème de géométrie				

Bilan : / 20

Modalités :

- Calculatrice **interdite**
- Pas de prêt de matériel
- Les réponses doivent être **justifiées** (calcul et raisonnement)

■ Exercice 1 – Différentes formes des polynômes de degré 2 ★☆☆ / 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (2x-4)(x+4)$. 2 pts

2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$. 2 pts

3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes, puis y répondre.

a. Dresser le tableau de variations de f 1 pt

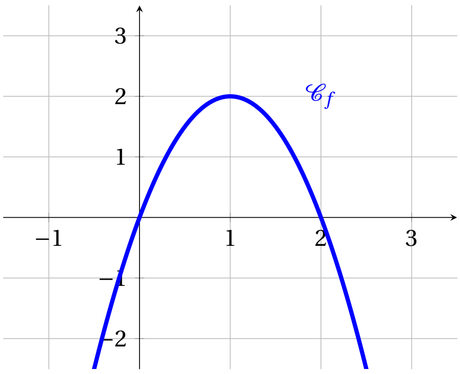
b. Résoudre $f(x) = -16$ 1 pt

c. Dresser le tableau de signes de f 1 pt

d. Résoudre $f(x) > 0$ 1 pt

■ Exercice 2 – Lecture graphique ★☆☆ / 6

Soit f la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Lire les coordonnées du sommet S de la parabole. 1 pt

2. Déterminer la forme canonique de f. 2 pts

3. Déterminer les racines de la fonction f. 1 pt

4. En déduire la forme factorisée de la fonction f. 2 pts

■ Exercice 3 – Problème de géométrie ★★☆ / 6

$ABCD$ est un carré de coté 4cm. Soit $x \in [0;4]$.

E est le point de $[AB]$ tel que $AE = x$. F est le point de $[AD]$ tel que $DF = x$.

Déterminer la valeur de x pour que l’aire du triangle FEC soit **minimale**. 6 pts

Si vous bloquez sur cette exercice, une aide est disponible sur le bureau du professeur.
Le barème de l’exercice sera adapté (-1 point) si vous choisissez d’utiliser cette aide.

Aide de l'exercice 3 :

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 8 - 2x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 16\right)$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Aide de l'exercice 3 :

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 8 - 2x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 16\right)$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Aide de l'exercice 3 :

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 8 - 2x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 16\right)$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Aide de l'exercice 3 :

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 8 - 2x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 16\right)$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Aide de l'exercice 3 :

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 8 - 2x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 16\right)$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Solution de l'Exercice 1

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (2x-4)(x+4)$. Développons $(2x-4)(x+4)$:

$$\begin{aligned}(2x-4)(x+4) &= 2x\times x + 2x\times 4 - 4\times x - 4\times 4\\ &= 2x^2+8x-4x-16\\ &= 2x^2+4x-16\\ &= f(x)\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$.
Développons $2(x+1)^2-18$:

$$\begin{aligned}2(x+1)^2-18 &= 2(x^2+2x+1)-18\\ &= 2x^2+4x+2-18\\ &= 2x^2+4x-16\\ &= f(x)\end{aligned}$$

3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a. Dresser le tableau de variations de f

Forme canonique :
Le sommet est en $(-1;-18)$ et $a = 2 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

b. Résoudre $f(x) = -16$
Forme développée :
$2x^2+4x-16 = -16$
$2x^2+4x = 0$
$2x(x+2) = 0$
Donc $x = 0$ ou $x = -2$.
$S = \{-2;0\}$

c. Dresser le tableau de signes de f
Forme factorisée : $f(x) = (2x-4)(x+4) = 2(x-2)(x+4)$
Les racines sont $x = 2$ et $x = -4$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$(x+4)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. Résoudre $f(x) > 0$
D'après le tableau de signes précédent :
$S =]-\infty;-4[\cup]2;+\infty[$

Solution de l'Exercice 2

1. Coordonnées du sommet S de la parabole.
En lisant le graphique, le sommet S se trouve au point le plus haut de la parabole.
$S(1;2)$

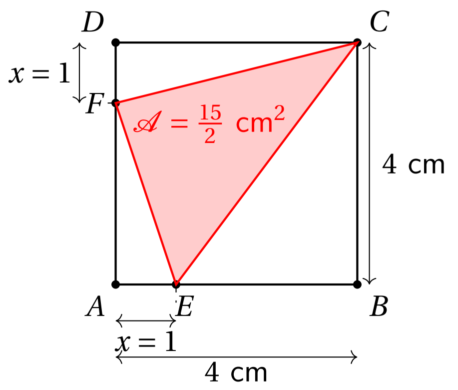
2. Forme canonique de f.
D'après la lecture graphique : - Sommet : $S(1;2)$ - La parabole est tournée vers le bas donc $a<0$
Pour déterminer a, utilisons un autre point de la courbe. La parabole passe par $(0;0)$.
$f(x)=a(x-1)^2+2$
$f(0)=a(0-1)^2+2=a+2=0$
Donc $a=-2$.
$f(x)=-2(x-1)^2+2$

3. Racines de la fonction f.
Les racines correspondent aux points d'intersection avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire quand $f(x)=0$.
En lisant le graphique, la parabole coupe l'axe des abscisses en $x=0$ et $x=2$.
Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=2$.

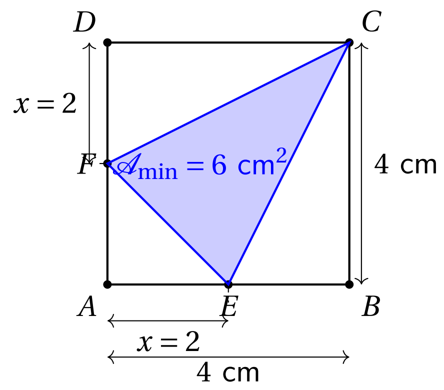
4. Forme factorisée de la fonction f.
Connaissant les racines $x_1=0$ et $x_2=2$, la forme factorisée est :
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a\cdot x(x-2)$
Pour déterminer a, utilisons le sommet $S(1;2)$:
$f(1)=a\cdot 1\cdot(1-2)=a\cdot 1\cdot(-1)=-a=2$
Donc $a=-2$.
$f(x)=-2x(x-2)=-2x^2+4x$

Solution de l'Exercice 3

Configuration générale



Configuration avec aire minimale



1. Calcul de l'aire du triangle FEC :

$\text{Aire}_{FEC}=\text{Aire du carré}-\text{Aire des autres triangles}$
L'aire du carré $ABCD$ est : $4\times 4=16$ cm² ; de plus :

$$\text{Aire}_{AFE}=\frac{1}{2}\times x\times(4-x)=\frac{1}{2}x(4-x)=\frac{1}{2}(4x-x^2)$$

$$\text{Aire}_{EBC}=\frac{1}{2}\times(4-x)\times 4=2(4-x)=8-2x$$

$$\text{Aire}_{FDC}=\frac{1}{2}\times x\times 4=2x$$

Donc : $\text{Aire}_{FEC}=16-\text{Aire}_{AFE}-\text{Aire}_{EBC}-\text{Aire}_{FDC}$

$$=16-\frac{1}{2}(4x-x^2)-(8-2x)-2x$$

$$=16-2x+\frac{x^2}{2}-8+2x-2x$$

$$=16-8+\frac{x^2}{2}-2x$$

$$=8+\frac{x^2}{2}-2x=\frac{1}{2}(x^2-4x+16)$$

2. Forme canonique et minimum :

$$A_{FEC}(x)=\frac{1}{2}(x^2-4x+16)$$

Mettons sous forme canonique : $x^2-4x+16=(x-2)^2-4+16=(x-2)^2+12$

Donc : $A_{FEC}(x)=\frac{1}{2}((x-2)^2+12)=\frac{1}{2}(x-2)^2+6$

3. Conclusion :

Le minimum de $A_{FEC}(x)$ est atteint quand $(x-2)^2=0$, c'est-à-dire pour $x=2$.
La valeur minimale de l'aire est $A_{FEC}(2)=6$ cm².
Réponse : L'aire du triangle FEC est minimale pour $x=2$ cm.