aléatoires, l'intérêt se portant sur leur somme, et notamment sur l'espérance et la variance de cette somme.

Les élèves ont déjà eu l'occasion, dans les classes antérieures, de rencontrer des exemples qui entrent dans ce cadre : lancers de deux dés, tirage de boules numérotées dans une urne (avec ou sans remise), roues de loterie, etc. En classe terminale, le schéma de Bernoulli est un exemple fondamental, où le nombre de succès peut être représenté comme somme de variables de Bernoulli indépendantes de même loi ; plus généralement, le modèle de la succession d'épreuves indépendantes fournit naturellement des exemples de variables aléatoires indépendantes.

L'objectif est de rendre l'élève capable d'utiliser la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires quelconque et l'additivité de la variance pour des variables indépendantes dans diverses situations. Il s'agit de développer l'intuition probabiliste, les compétences de calcul et de raisonnement sur les variables aléatoires.

La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues. Le professeur peut choisir de l'admettre, ou de la justifier sur un exemple.

Les variables indépendantes considérées dans le programme sont toujours envisagées dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. L'hypothèse d'indépendance étant constitutive du modèle considéré, toute question visant à justifier l'indépendance de variables aléatoires données *a priori* est en dehors des objectifs du programme.

L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes est admise. La relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour des variables indépendantes n'est pas un attendu du programme.

Contenus

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X,Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Relation $V(aX) = a^2V(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1,\ldots,X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstrations

- Espérance et variance de la loi binomiale.

Approfondissements possibles

- Relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour des variables aléatoires indépendantes X,Y. Application à la variance de $X + Y$.