$1^{\text{ère}}$ Cours : Factorisation des trinômes du second degré

Table des matières

Compétences travaillées	😟	😳	🙂	🤩
• Calculer le discriminant associé à un polynôme de degré 2				
• Connaître le lien entre discriminant et signe d'un polynôme de degré 2				
• Dresser le tableau de signes d'une fonction polynôme de degré 2				
• Résoudre des équations et des inéquations du second degré				

Vocabulaire utilisé

- **discriminant** (p. 2)
- **équation du second degré** (p. 4)
- **inéquation du second degré** (p. 4)

1. Factorisation d'un trinôme

Définition — **Discriminant**

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c.
On appelle **discriminant** du polynôme, le nombre $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$.

Propriété — **Discriminant et forme factorisée**

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c ; et Δ son **discriminant**

1. Si $\boxed{\Delta<0}$, on sait que le trinôme n'a **pas de racine réelle**.
Il n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$.

2. Si $\boxed{\Delta=0}$, on sait que le trinôme a **une racine double** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
Pour tout réel x, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.

3. Si $\boxed{\Delta>0}$, on sait que le trinôme a **deux racines** : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Pour tout réel x, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Démonstration — **Forme factorisée**

On sait que $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
(Forme canonique du trinôme).
On raisonne par disjonction des cas :

1. Dans le cas ou $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} & ax^2+bx+c \\ =& a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2}\right] \\ =& a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \\ =& a(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

2. Dans le cas ou $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} & ax^2+bx+c \\ =\ & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ =\ & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}^{\,2}\right] \\ =\ & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\right] \\ =\ & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ =\ & a\left[\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ =\ & a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

■ **Exercice 1** – Racines et forme factorisée ★☆☆ / 0

Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2+x-3$.
Ici, $a=2$, $\Delta = 25$, $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = 1$ donc pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$$

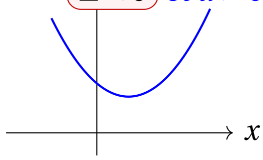
Vérifier les informations fournies par l'énoncé, en **calculant** Δ et en déterminant les racines de f.

Propriété — Tableau de signes et discriminant

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant associé.

1. Si $\boxed{\Delta < 0}$, pas de racine réelle.

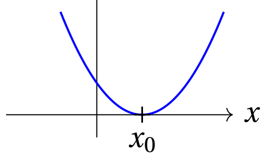
$\Delta < 0$ et $a > 0$



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

2. Si $\boxed{\Delta = 0}$, une racine double x_0.

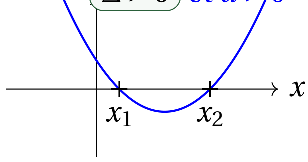
$\Delta = 0$ et $a > 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

3. Si $\boxed{\Delta > 0}$, deux racines distinctes $x_1 < x_2$.

$\Delta > 0$ et $a > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Méthode — Établir le tableau de signes d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

Construisons le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 45$

1. Identifier les coefficients a, b et c. Attention aux signes de ces quantités !

$a =$ -3 , $b =$ 6 et $c =$ 45

2. Déterminer les racines éventuelles de f.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-3) \times 45 = 576$$

Δ est positif, donc l'équation $f(x) = 0$ à exactement 2 solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times (-3)} = 5 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times (-3)} = -3$$

3. Déterminer le signe de a et la plus grande des deux valeurs x_1 et x_2.

a. $a = -3 < 0 \rightarrow$ **signe « − ».**

b. $x_1 = 5$ **et** $x_2 = -3$ **donc** $x_2 < x_1$**.**

4. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signes, en remplaçant a, x_1 et x_2 par leurs valeurs :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Equations et inéquations du second degré

3.1 Définitions

Définition — **Équation et inéquation du second degré**

Une **équation du second degré** est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Une **inéquation du second degré** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes :

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

3.2 Résoudre une équation du second degré

Méthode — **Résoudre une équation du second degré**

Pour résoudre une équation du second degré, on procède en plusieurs étapes :

1. **Réécrire l'équation** sous forme **développée** $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
2. **Identifier les coefficients** a, b et c. Attention aux signes !
3. **Calculer le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. **Déterminer les racines** selon le signe de Δ :

Si $\boxed{\Delta < 0}$: pas de solution réelle, donc $\boxed{S = \varnothing}$	Si $\boxed{\Delta = 0}$: une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, donc $\boxed{S = \{x_0\}}$

Si $\boxed{\Delta > 0}$: deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc $\boxed{S = \{x_1 ; x_2\}}$

■ **Exercice 2 – Résoudre une équation du second degré** ★☆☆ / 5

Résoudre l'équation : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

1. Identification des coefficients :
$a = 2$, $b = -7$ et $c = 3$

2. Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = -7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$

3. Détermination des racines : $\Delta = 25 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

4. Ensemble des solutions : $\boxed{S = \{0{,}5 ; 3\}}$

3.3 Résoudre une inéquation du second degré

Méthode — **Résoudre une inéquation du second degré**

Pour résoudre une inéquation du second degré, on procède en plusieurs étapes :

1. Réécrire l'inéquation sous la forme $ax^2+bx+c>0$ (ou <0, ≥ 0, ≤ 0) avec $a\neq 0$.

2. Identifier les coefficients a, b et c. Attention aux signes !

3. Calculer le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

4. Déterminer les racines selon le signe de Δ (voir propriété précédente).

5. Construire le tableau de signes du trinôme ax^2+bx+c en utilisant :
Le signe de a (hors des racines)
Les racines (si elles existent)
La règle : entre les racines, le signe est celui de $-a$

6. Lire la solution dans le tableau de signes selon l'inéquation demandée.

■ Exercice 3 – Résoudre une inéquation du second degré ★★☆ / 6

Résoudre l'inéquation : $-x^2+4x-3\geq 0$

1. Identification des coefficients :
$a=-1$, $b=4$ et $c=-3$

2. Calcul du discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times(-3)=16-12=4$

3. Détermination des racines :
$\Delta=4>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

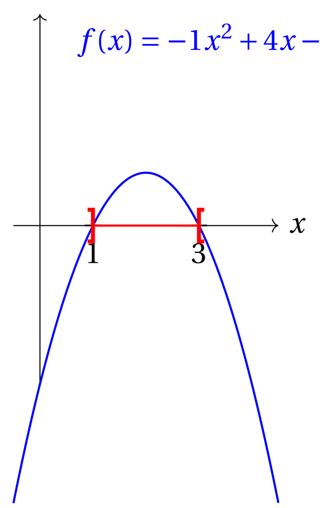
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1)}=\frac{-4-2}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1)}=\frac{-4+2}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

4. Tableau de signe de $f:x\mapsto ax^2+bx+c$:
On a $a=-1<0$ et $x_1=3$ et $x_2=1$ donc $1<3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Solution de l'inéquation :
On cherche où le trinôme est ≥ 0, donc les signes $+$ et 0 :
$S=[1;3]$



■ Exercice 4 – Résoudre une inéquation du second degré ★★☆ / 6

Résoudre l'inéquation : $-\frac{1}{2}x^2+2x+1<0$

4. Correction des exercices

Solution de l'Exercice 1

1. Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 2\times(-3) = 1+24 = 25$

2. Calcul des racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

3. Forme factorisée : $f(x) = 2\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-1)$, soit :

$$\boxed{f(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}$$

Solution de l'Exercice 2

1. Identification des coefficients :
$a=2,\ b=-7$ et $c=3$

2. Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = -7^2 - 4\times 2\times 3 = 49-24 = 25$

3. Détermination des racines : $\Delta = 25 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

4. Ensemble des solutions : $\boxed{S = \{0{,}5;3\}}$

Solution de l'Exercice 3

1. Identification des coefficients :
$a=-1,\ b=4$ et $c=-3$

2. Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2 - 4\times(-1)\times(-3) = 16-12 = 4$

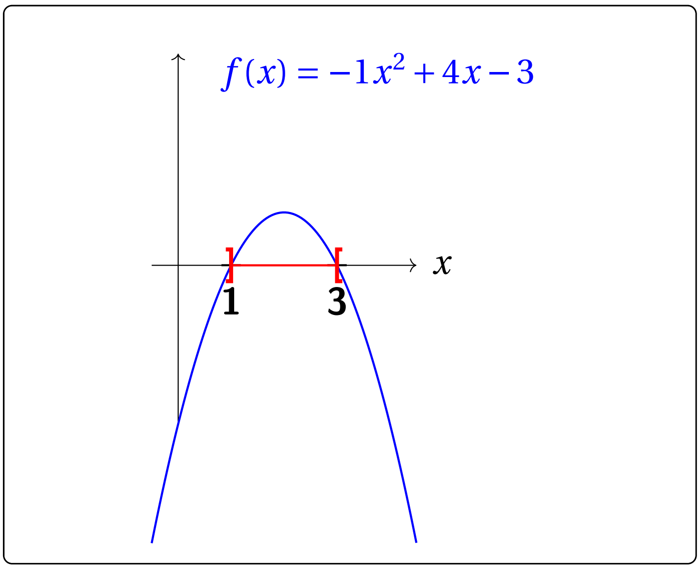
3. Détermination des racines :
$\Delta = 4 > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3} \qquad \boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1}$$

4. Tableau de signe de $f : x \mapsto ax^2+bx+c$:
On a $a=-1<0$ et $x_1=3$ et $x_2=1$ donc $1<3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Solution de l'inéquation :
On cherche où le trinôme est ≥ 0, donc les signes + et 0 :
$S = [1;3]$



Solution de l'Exercice 4

1. Identification des coefficients :
$a=-0.5,\ b=2$ et $c=1$

2. Calcul du discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-0.5)\times 1=4+2=6$

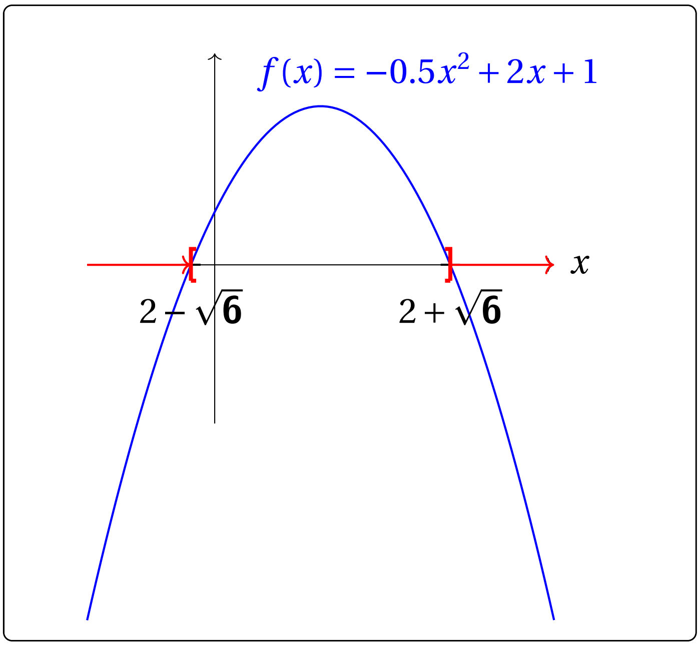
3. Détermination des racines :
$\Delta=6>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{6}}{2\times(-0.5)}=2+\sqrt{6}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{6}}{2\times(-0.5)}=2-\sqrt{6}$$

4. Tableau de signe de $f:x\mapsto ax^2+bx+c$:
On a $a=-0.5<0$ et $x_1=2+\sqrt{6}$ et $x_2=2-\sqrt{6}$ donc $2-\sqrt{6}<2+\sqrt{6}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



5. Solution de l'inéquation :
On cherche où le trinôme est <0, donc les signes $-$ (strictement) :
$S=\left]-\infty;2-\sqrt{6}\right[\cup\left]2+\sqrt{6};+\infty\right[$