Activité **Problème de géométrie**

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$cm et $AD = 3$cm. Soit $x \in [0;3]$. 6 pts

E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 2x$. F est le point de $[AD]$ tel que $DF = x$.

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 9 - 3x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = x^2 - 3x + 9$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Activité **Problème de géométrie**

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$cm et $AD = 3$cm. Soit $x \in [0;3]$. 6 pts

E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 2x$. F est le point de $[AD]$ tel que $DF = x$.

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 9 - 3x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

$$A_{FEC}(x) = x^2 - 3x + 9$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Activité **Problème de géométrie**

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$cm et $AD = 3$cm. Soit $x \in [0;3]$. 6 pts

E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 2x$. F est le point de $[AD]$ tel que $DF = x$.

1. Faire une figure représentant la situation.

2. Justifier l'égalité : $A_{EBC}(x) = 9 - 3x$

3. Montrer que l'aire du triangle FEC vaut :

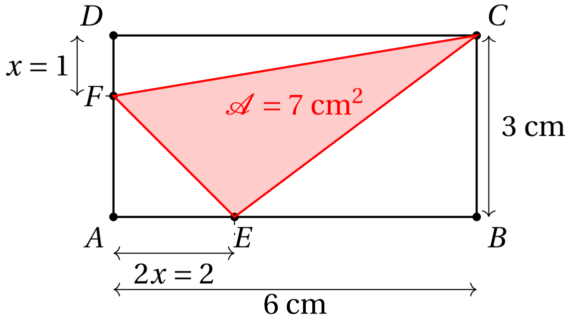
$$A_{FEC}(x) = x^2 - 3x + 9$$

4. En déduire la forme canonique de A_{FEC}

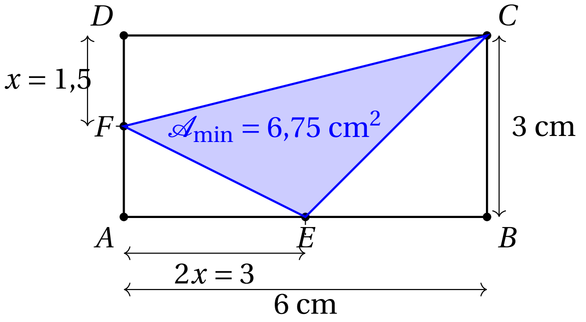
5. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.

Solution — **Problème de géométrie**

Configuration générale



Configuration avec aire minimale



1. Calcul de l'aire du triangle FEC :

Aire_{FEC} = Aire du rectangle − Aire des autres triangles

L'aire du rectangle $ABCD$ est : $6\times 3 = 18$ cm² ; de plus :

$$\text{Aire}_{AFE} = \frac{1}{2}\times 2x\times(3-x) = x(3-x) = 3x - x^2$$

$$\text{Aire}_{EBC} = \frac{1}{2}\times(6-2x)\times 3 = \frac{3}{2}(6-2x) = 9-3x$$

$$\text{Aire}_{FDC} = \frac{1}{2}\times x\times 6 = 3x$$

Donc : $\text{Aire}_{FEC} = 18 - \text{Aire}_{AFE} - \text{Aire}_{EBC} - \text{Aire}_{FDC}$

$= 18 - (3x - x^2) - (9-3x) - 3x$

$= 18 - 3x + x^2 - 9 + 3x - 3x$

$= 18 - 9 + x^2 - 3x$

$= 9 + x^2 - 3x = x^2 - 3x + 9$

2. Forme canonique et minimum :

$A_{FEC}(x) = x^2 - 3x + 9$

Mettons sous forme canonique en utilisant la méthode du cours.

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Ici : $a = 1,\ b = -3,\ c = 9$

$\alpha = -\dfrac{-3}{2\times 1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$\beta = f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 3\times 1{,}5 + 9 = 2{,}25 - 4{,}5 + 9 = 6{,}75$

Donc : $A_{FEC}(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4}$

3. Conclusion :

Le minimum de $A_{FEC}(x)$ est atteint pour $\alpha = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Cette valeur appartient bien à $[0;3]$.

La valeur minimale de l'aire est $\beta = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$ cm².

Réponse : L'aire du triangle FEC est minimale pour $x = 1{,}5$ cm et vaut $6{,}75$ cm².