- Convexité.
- Calcul intégral.

Inférence bayésienne

Descriptif

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice, etc. où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

La question d'intérêt est représentée par un événement A de probabilité $P(A)$, dite probabilité *a priori*. L'observation d'un événement B conduit à remplacer la probabilité *a priori* $P(A)$ par la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, dite *a posteriori*. La formule de Bayes $P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ permet d'exprimer la probabilité *a posteriori* lorsque l'expression du second membre est évaluable. Elle montre la distinction essentielle entre $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Bien comprendre cette distinction est un objectif majeur.

Problèmes possibles

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Contenus associés

- Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes.
- Étude de fonction.

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Descriptif

Ce thème vise à illustrer le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu.

Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale forment un cas fondamental, où il s'agit de considérer d'une part des probabilités ou proportions théoriques, et d'autre part des fréquences observées.

La réalisation de simulations est indispensable. C'est l'occasion de montrer l'intérêt de la loi uniforme sur $[0,1]$ pour simuler d'autres lois parmi lesquelles les lois uniformes discrètes et les lois binomiales.

Problèmes possibles

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in I) \geqslant 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0,k]$ tel que $P(X \in I) \geqslant 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.