- **Utilisation des nombres complexes en géométrie**

Contenus

– Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$.
– Racines n-ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers : $n = 2, 3, 4$.

Capacités attendues

– Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points.
– Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Démonstration

– Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$.

Problèmes possibles

– Lignes trigonométriques de $\dfrac{2\pi}{5}$, construction du pentagone régulier à la règle et au compas.
– Somme des racines n-ièmes de l'unité.
– Racines n-ièmes d'un nombre complexe.
– Transformation de Fourier discrète.

Arithmétique

Depuis la classe de seconde, l'élève connaît les ensembles de nombres usuels. L'enseignement de mathématiques expertes permet de revenir sur les plus familiers des nombres : les entiers.

Les résultats fondamentaux de l'arithmétique des entiers y sont présentés. Une place importante est faite à l'étude des congruences (arithmétique modulaire). Le cours est illustré par des applications variées (tests de divisibilité, exemples simples d'équations diophantiennes, problèmes de chiffrement).

- **Histoire des mathématiques**

L'arithmétique des entiers est présente chez les mathématiciens grecs, par exemple dans les *Éléments* d'Euclide, chez Nicomaque de Gérase, Théon de Smyrne ou encore Diophante, dont certains développements touchent à la combinatoire. Les aspects algorithmiques sont présents depuis l'origine : méthodes de fausse position, algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu de Bachet (1612) puis Bézout (1766), applications aux fractions continues chez Euler (1737), nombre de racines d'une équation chez Sturm (1835).

L'histoire de la théorie des nombres, qui permet d'évoquer les travaux de Fermat, Lagrange, Gauss, Dirichlet et de bien d'autres, fourmille de théorèmes d'énoncés simples aux preuves difficiles, ainsi que de conjectures de formulation élémentaire mais non résolues.

Des questions issues de l'arithmétique, apparemment gratuites, ont donné lieu à des applications spectaculaires en cryptographie ou codage. On peut noter enfin l'intérêt historique de l'étude de nombres particuliers par exemple ceux de Fermat, Mersenne, Carmichael ou Sophie Germain.