Propriété

Relations entre coefficients et racines

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$.
Si P admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues), alors :

1. La **somme** des racines est égale à $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$

2. Le **produit** des racines est égal à $\boxed{x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}}$

Remarque : Ces formules sont valables dans le cas où $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire lorsque le polynôme admet au moins une racine réelle.
Dans le cas $\Delta = 0$, la racine double x_0 vérifie : $x_0 + x_0 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_0 \times x_0 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration

À partir de la forme factorisée

On considère un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$.
On sait que lorsque $\Delta \geq 0$, le polynôme peut s'écrire sous forme factorisée :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les racines du polynôme.

Développons cette forme factorisée :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
&= a\left[x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2\right] \\
&= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] \\
&= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2
\end{aligned}$$

Identification avec la forme développée $P(x) = ax^2 + bx + c$:
Par identification des coefficients, on obtient :

Coefficient de x :

$$-a(x_1 + x_2) = b$$

D'où : $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$

Terme constant :

$$a x_1 x_2 = c$$

D'où : $\boxed{x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}}$

Démonstration — **Calcul direct avec les formules des racines**

On rappelle que les racines sont données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>Calcul de la somme $x_1 + x_2$:</u>

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}+(-b)+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

<u>Calcul du produit $x_1 \times x_2$:</u>

$$\begin{aligned}
x_1 \times x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \quad \text{(identité remarquable : } (a-b)(a+b) = a^2-b^2) \\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \quad (\text{car } \Delta = b^2-4ac) \\
&= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les relations $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ sont donc démontrées.