

## Graphes et matrices

Prenant appui sur la résolution de problème et la modélisation, cette partie a pour objectif d'introduire les notions de graphes et de matrices en soulignant l'intérêt de les appliquer à d'autres disciplines, notamment les sciences économiques et sociales, les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, l'informatique etc.

Les matrices sont étudiées sous divers points de vue : modélisation de problèmes issus des autres disciplines, systèmes linéaires, transformations géométriques. Il s'agit de mettre en valeur l'efficacité du calcul matriciel pour représenter et résoudre des problèmes.

La notion de graphe est fondamentale pour les mathématiques discrètes et a des applications dans de nombreux domaines. Le programme la fait interagir avec les matrices. Une illustration exemplaire dans le domaine des probabilités, les chaînes de Markov, fait l'objet d'un développement spécifique.

### • Histoire des mathématiques

L'histoire de cette partie combine trois thèmes très contemporains : les graphes, outils fondamentaux des mathématiques discrètes, les matrices et les chaînes de Markov. Les liens mis en évidence soulignent l'unité et l'efficacité des mathématiques.

L'histoire des graphes remonte au moins à Euler, par exemple à travers le problème des ponts de Königsberg. Des applications plus récentes en intelligence artificielle, concernant notamment les réseaux, soulignent la pertinence et l'actualité de la modélisation à l'aide de graphes et matrices.

La considération de tableaux de nombres en liaison avec les systèmes linéaires est très ancienne, mais l'introduction par Cayley des matrices comme objets de calcul représentant des transformations linéaires date du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, et leur importance ne sera clairement reconnue qu'au XX<sup>e</sup> siècle.

L'étude des chaînes de Markov, qui remonte au début du XX<sup>e</sup> siècle, donne une belle utilisation du formalisme matriciel.

### Contenus

- Graphe, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet.
- Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.
- Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée.
- Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes.
- Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3.
- Suite de matrices colonnes  $(U_n)$  vérifiant une relation de récurrence du type  $U_{n+1} = AU_n + C$ .
- Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
- Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne  $\pi_0$ . Matrice de transition, graphe pondéré associé.
- Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice  $P$ , interprétation du coefficient  $(i,j)$  de  $P^n$ . Distribution après  $n$  transitions, représentée comme la matrice ligne  $\pi_0 P^n$ .
- Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.