RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
****
UNIVERSITE DE MAROUA
****
FACULTÉ DES SCIENCES
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

P.O Box/BP 814 Maroua
http://www.fs.univ-maroua.cm
https://www.facebook.com/fsmaroua

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
****
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF MAROUA
****
FACULTY OF SCIENCE
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE
ANNEE ACADEMIQUE 2022-2023
UE : MAT 243 – CALCUL DE PROBABILITE
ENSEIGNANT: Dr. Didier Alain NJAMEN
Grade : Chargé de Cours

TRAVAUX DIRIGES N°5 VARIABLES ALEATOIRES

Exercice 1

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si\ x \in [0{,}1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Question 1 *À quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?*

Question 2 *On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f. On suppose que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b.*

Question 3 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.*

Exercice 2

Soit une fonction F définie de la façon suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ a(x+b)^2 & \text{si } x \in]-2{,}0] \\ cx + d & \text{si } x \in]0{,}1] \\ e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Question 1 Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue.

Question 2 On suppose que F est la fonction de répartition de X, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies à la question précédente sont vérifiées). On suppose que $\mathbb{P}(X \leq -1) = 0$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e. À quelle loi classique la fonction ainsi obtenue correspond elle ?

Question 3 On suppose maintenant que F est la fonction de répartition de Y, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies à la première question sont vérifiées). On suppose de plus que $\mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5]) = \frac{5}{8}$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e.

Question 4 Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ pour la variable Y décrire à la question précédente.

Exercice 3

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

Question 1 *quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?*

Question 2 *on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?*

Exercice 4

On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0.001 *de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?*

Exercice 5

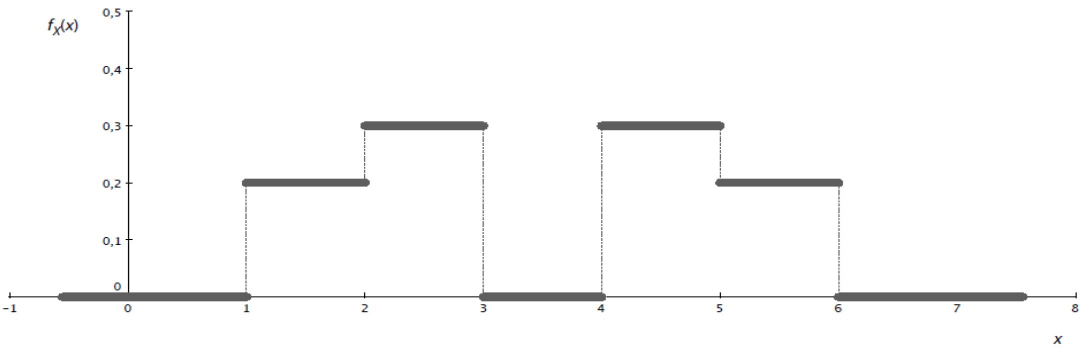
D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne $m = 1{,}58$ *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}06$. *Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.*

Question 1 *Il commence par déterminer un intervalle de la forme* $[m-a, m+a]$ *(donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90 % (environ) des tailles des femmes françaises : calculer a.*

Question 2 *Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles* $[m-a, m-a/3]$, $[m-a/3, m+a/3]$ *et* $[m+a/3, m+a]$. *Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.*

Exercice 6

On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Vérifier que le graphe ci-dessus correspond bien à une densité.

2) En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X < 1)$, $P(X > 6)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$.

b) $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

c) $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$

d) $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$

3) Déterminer graphiquement l'espérance de X.

4) Expliquer pourquoi $\sigma_X < 2.5$.

Exercice 7

Monsieur Papressé peut prendre 3 routes différentes pour se rendre à son travail. Lorsqu'il utilise la première route, la durée du trajet est en moyenne de 30 minutes avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la durée du trajet X suit une loi normale.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit supérieure à 36 minutes ?

3) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit inférieure à 27 minutes ?

4) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre 27 et 36 minutes ?

5) En empruntant la seconde route, la durée Y du trajet est en moyenne de 25 minutes avec un écart-type de 8 minutes et suit aussi une loi normale. Sachant que Monsieur Papressé dispose de 36 minutes pour se rendre à son travail, quel trajet doit-il prendre pour avoir la probabilité la plus forte d'être à l'heure à son travail ?

6) En empruntant la troisième route, la durée moyenne du trajet est de 20 minutes. En outre, dans 10 % des cas, le trajet dure plus de 40 minutes. On suppose encore que la durée Z de ce troisième trajet suit une loi normale.

a) Calculer l'écart-type de Z.

b) Est-que ce troisième trajet permet d'améliorer la probabilité qu'à Monsieur Papressé d'être à l'heure à son travail ?

Exercice 8

Une banque propose deux types de carte bancaire à ses clients : « VISA » et « MasterCard ». Parmi l'ensemble de ses clients, 60 % possèdent (au moins) une carte VISA, 40 % possèdent (au moins) une MasterCard et 10 % possèdent les deux types de carte.
Soit A l'événement « le client possède une carte VISA » et B l'événement « le client possède une carte Master-Card ».

1) Expliciter les événements suivants à l'aide du langage ensembliste puis calculer la probabilité correspondante, en justifiant les calculs :

a) « un client possède au moins un des deux type de carte » ;

b) « un client ne possède aucun des deux types de carte » ;

c) « un client ne possède qu'un seul type de carte ».

2) On considère un client qui possède une carte VISA. Quelle est la probabilité qu'il possède aussi une carte MasterCard ?

3) On considère un client qui possède au moins une carte. Quelle est la probabilité que ce soit une carte VISA ?

Exercice 9

Un organisme bancaire a établi pour ses clients le nombre moyen (Y) de paiements quotidiens effectués par carte bancaire en fonction du nombre (X) de cartes possédées. La répartition est résumée dans le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
1	0.25	0.25	0.10	0.05
2	0.05	0.05	0.15	?

1) Probabilités

a) Déterminer la valeur de la probabilité manquante.

b) Donner la probabilité qu'un client possède 1 carte et effectue 2 paiements quotidiens par carte.

c) Donner la probabilité qu'un client possède 1 carte.

d) Calculer la probabilité qu'un client effectue 2 paiements quotidiens par carte sachant qu'il possède 1 carte.

2) **Lois marginales**
   a) Calculer l'espérance et la variance de X et Y.
   b) Quel est le nombre de paiements moyen quotidien ?
3) **Lois conditionnelles**
   a) Donner la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 1$.
   b) Que représente-t-elle ?
   c) Pensez-vous que les variables X et Y soient indépendantes ?
   d) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(Y \mid X = 1)$.
   e) Que représente-t-elle concrètement ?
4) **Corrélation**
   a) Calculer l'espérance de XY.
   b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
   c) Interpréter le résultat.

Exercice 10

On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X et vérifiant les propriétés suivantes :

$$P(X < 1) = 0 \qquad P(X > 4) = 0 \qquad P(2 < X < 3) = 0 \qquad P(X < 2) = P(X > 3) \qquad \mathrm{E}(X) = 2.5$$

On sait en outre que $f_X(x) = x - 1$ lorsque $x \in [1, 2]$.

1) Représenter graphiquement la densité de X.
2) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
3) Expliquer pourquoi $\sigma_X \leqslant 1.5$.

Exercice 11

Durant les fêtes de fin d'année, le volume des ventes (en kilogrammes) de chocolats d'un artisan-chocolatier est en moyenne de 500 kg avec un écart-type de 50 Kg. On suppose que le volume des ventes X suit une loi normale.

1) Pour les fêtes 2011, l'artisan prévoit de produire 600 Kg de chocolats.
   a) Quelle est la probabilité qu'il puisse répondre à la demande ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il vende toute sa production ?
   c) Quelle est la probabilité qu'il puisse répondre à la demande sans qu'il lui reste plus de 150 Kg d'invendus ?
2) Quelle production doit-il prévoir pour répondre à la demande avec une probabilité de 0.99 ?

Exercice 12

Selon l'administration fiscale américaine (IRS), en 2007, une déclaration des revenus sur cent est contrôlée lorsque le revenu du contribuable est inférieur à un million de dollars, et neuf sur cent lorsque le revenu est de un million de dollars ou plus.

1) Quelle est la probabilité que la déclaration d'un contribuable ayant un revenu inférieur à 1 million de dollars soit contrôlée ?

2) Un groupe d'amis est composé de 10 contribuables ayant des revenus inférieurs à 1 million de dollars. Soit X le nombre de personnes de ce groupe dont la déclaration a été contrôlé.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Quelle est le nombre moyen théorique de personnes contrôlées dans ce groupe ?

c) Quelle est la probabilité qu'un seul contribuable de ce groupe soit contrôlé ?

3) Les contribuables d'une banlieue résidentielle de San Francisco ont des revenus inférieurs à 1 million de dollars pour 90 % d'entre eux et supérieur à 1 million de dollars pour 10 % d'entre eux.

a) Préciser clairement les différents événements et probabilités utilisés dans la suite.

b) Quelle est la probabilité qu'un contribuable de cette banlieue soit contrôlé ?

c) Quelle est la probabilité qu'un contribuable de cette banlieue ayant été contrôlé ait un revenu inférieur à 1 million de dollars ?

4) Quelle est la probabilité que dans un groupe de 100 millionnaires, 12 ou plus soient contrôlés ?

Exercice 13

Un produit industriel est fabriqué à partir deux matières premières A et B. Le prix unitaire d'achat de chacune de ces matières premières est variable. Les probabilités conjointes des prix sont connues et données dans le tableau suivant :

	Produit B		
Produit A	10 €	11 €	12 €
20 €	0.05	0.25	0.15
25 €	0.20	0.30	0.05

1) Probabilités

a) Quelle est la probabilité que $A = 20$ et $B = 11$?

b) Quelle est la probabilité que $B = 11$?

c) Quelle est la probabilité que $B = 11$ lorsque $A = 20$?

2) Lois marginales

a) En expliquant votre calcul, donner le prix moyen d'achat de A. Quel est l'écart-type du prix de A ?

b) Même question pour B.

3) Loi conditionnelle

a) Déterminer la loi conditionnelle de B lorsque $A = 20$.

b) Quel est le prix moyen de B lorsque $A = 20$?

4) Corrélation

a) Calculer la covariance entre les prix de A et B.

b) En déduire la corrélation entre A et B.

c) Interpréter le résultat.

5) Bonus : Le produit industriel est fabriqué à partir trois unités du produit A et de deux unités du produits B.

a) Calculer le prix moyen du produit.

b) Quel est sa variance ?

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Chebichev.

2) A l'aide de cette égalité déterminer la probabilité $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$.

3) Si on suppose que X suit une loi normale, est-il possible d'améliorer le calcul de la probabilité précédente ?

Exercice 15

En 2009, sur les 20 millions de foyers fiscaux français imposables, 3 % étaient soumis à l'impôt de solidarité sur la fortune (ISF).

1) Soit X le nombre de foyers fiscaux soumis à l'ISF sur 90 foyers choisis au hasard (parmi les foyers imposables).
- **a)** Déterminer la loi de X.
- **b)** Quel nombre moyen de foyers soumis à l'ISF peut-on « espérer » ?
- **c)** Quelle est la probabilité qu'au moins deux des 90 foyers choisis soit soumis à l'ISF ?

2) En Ile-de-France (IdF), 5 % des foyers (imposables) sont soumis à l'ISF, alors qu'ils ne sont que 2.5 % sur le reste du territoire français. En outre, l'Ile-de-France représente 20 % de foyers fiscaux imposables.
- **a)** Formaliser l'énoncé et données ci-dessus en utilisant des événements et des probabilités.
- **b)** Vérifier que ces données sont bien compatibles avec les 3 % de la partie précédente.
- **c)** Calculer la probabilité qu'un foyer fiscal soumis à l'ISF soit situé en IdF.

Exercice 16

Les primes de fin d'année accordées aux employés d'un grande entreprise sont uniformément réparties de 500 € à 1500 €. On note X la variable aléatoire donnant la prime d'un employé choisi au hasard.

1) Déterminer la loi de X. Représenter sa densité.

2) Quelle est la prime moyenne perçue par les employés ? Avec quel écart-type ?

3) Quelle est la probabilité qu'un employé reçoive plus de 1200 € de prime ? Entre 750 et 1000 € ?

Exercice 17

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère le couple de variables discrètes (X, Y) dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

X \ Y	0	1
0	a	b
1	$1/3$	$1/6$

1) Quelle relation existe-t-il entre a et b ?

2) Déterminer la loi marginale de X. Déterminer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

3) Calculer la covariance du couple (X, Y).

4) Pour quelles valeurs de a et b les deux variables X et Y sont-elles non-corrélées ?

5) Pour les valeurs de a et b trouvées à la question précédente, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18

Durant les fêtes de fin d'année, le volume des ventes (en kilogrammes) de chocolats d'un artisan-chocolatier est en moyenne de 400 Kg avec un écart-type de 50 Kg. On suppose que le volume des ventes X suit une loi normale.

1) Pour les fêtes 2012, l'artisan prévoit de produire 500 Kg de chocolats.
- **a)** Quelle est la probabilité qu'il puisse répondre à la demande ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'il vende toute sa production ?
- **c)** Quelle est la probabilité qu'il puisse répondre à la demande sans qu'il lui reste plus de 100 Kg d'invendus ?

2) Quelle production doit-il prévoir pour répondre à la demande avec une probabilité de 0.99 ?

Exercice 19

On s'intéresse au taux de réussite en première année d'économie selon le baccalauréat d'origine. En 2013-2014, 60 % des étudiants de première année d'économie provenaient d'un bac ES, 30 % d'un bac S et 10 % d'un autres types de bac. On a observé que 70 % des étudiants ayant un bac S avait obtenu leur année alors qu'ils n'étaient que 40 % pour le bac ES et 20 % pour les autres bacs. On sélectionne alors un individu au hasard parmi les étudiants de première année d'économie.

1) Modéliser l'énoncé (Univers, Événements, Probabilités).

2) Quelle est la probabilité que l'étudiant sélectionné ait obtenu sa première année ?

3) Quelle est la probabilité qu'un étudiant ayant obtenu sa première année ait un bac ES ?

Exercice 20

Dans une région française, on estime à 3 % le nombre de fausses pièces de 2 € en circulation. Soit X le nombre de fausses pièces de 2 € dans une recette de 300 € composée uniquement de pièce de 2 € .

1) Donner, en justifiant, la loi de X.

2) Quel nombre moyen de fausses pièces peut-on « espérer » trouver dans la recette ?

3) Quelle est la probabilité que la recette contienne au plus une seule fausse pièce ?

4) Déterminer la probabilité que le nombre de fausses pièces de la recette soit supérieur ou égal à 6.

5) Un commerçant observe que 8 fois sur 10, sa recette M (supposée fixe et composée uniquement de pièces de 2 €) contient au moins 7 fausses pièces. Quelle est la recette de ce commerçant ?

Exercice 21

Soit X une variables aléatoire continue de densité f_X donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-x}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une densité.

2) Déterminer l'espérance de X.

3) Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X \leqslant 1) \qquad P(1 \leqslant X \leqslant 2) \qquad P(X \geqslant 3) \qquad P(0 \leqslant X \leqslant 2)$$

4) Vérifier que $\sigma_X \leqslant 1.5$.

Exercice 22

On a observé que la vitesse X des automobilistes sur un axe principal d'une grande ville suit une loi normale $\mathcal{N}(50, 10)$.

1) Donner l'espérance et la variance de X.

2) Quelle est la probabilité que la vitesse d'un automobiliste soit

- **a)** supérieure à 55 km/h ?
- **b)** inférieure à 40 km/h ?
- **c)** comprise entre 45 et 55 km/h ?

3) En prévision d'un contrôle radar, quelle doit être la vitesse maximale tolérée afin de ne pas verbaliser plus de 20 % des conducteurs ?

Exercice 23

La route nationale 417 (RN417) qui relie Gimoles à Troipiés est particulièrement accidentogène. En moyenne, on dénombre 8 accidents corporels par an. On suppose que le nombre d'accidents (corporels) survenant durant une année est indépendant du nombre d'accidents survenus l'année précédente et que le nombre d'accidents survenant sur une période ne dépend que de la durée de la période.

1) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'accidents qui surviendront l'année prochaine.

a) Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul accident ?

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus de 5 accidents ?

d) Quelle est la probabilité qu'il y ait 7 accidents ou plus ?

2) On observe une durée moyenne entre deux accidents (corporels) successifs de 1.5 mois. On note Y la durée (en mois) entre deux accidents successifs.

a) Cette donnée est-elle compatible avec celle du début de l'exercice ?

b) Déterminer la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait deux accidents en moins d'un mois.

d) Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'accident pendant 3 mois.

Exercice 24

On a observé que la vitesse X des automobilistes sur une portion particulièrement dangereuse de la RN417 suit une loi normale $\mathcal{N}(85, 15)$.

1) Donner l'espérance et la variance de X.

2) Quelle est la probabilité que la vitesse d'un automobiliste soit

a) supérieure à 100 km/h ?

b) inférieure à 70 km/h ?

c) comprise entre 70 et 90 km/h ?

3) En prévision d'un contrôle radar, quelle doit être la vitesse maximale tolérée afin de ne pas verbaliser plus de 20 % des conducteurs ?

Exercice 25

Afin de réduire le nombre d'accidents sur la RN417, des contrôles routiers aléatoires sont quotidiennement effectués par la gendarmerie. On observe que 5 % des véhicules de tourisme sont en infraction, de même que 3 % des véhicules utilitaires et 2 % des poids-lourds. On sait en outre que les véhicules empruntant cette route sont à 40 % des véhicules de tourisme, à 25 % des véhicules utilitaires et à 35 % des poids-lourds.

1) Modéliser le problème ci-dessus avec des événements et des probabilités.

2) Calculer la probabilité qu'un véhicule controlé soit en infraction.

3) Quelle est la probabilité qu'un véhicule controlé en infraction soit un poids-lourd ?