EBAUCHE DE CORRECTION

Examen, Session Normale BIO131 / STE131
Mathématiques pour SB/ST (Février 2022)
(2021-2022).

Enseignant : Bruno Tsokamle

1. On considère cinq classes d'animaux numérotées x, y, z, u et v;
les régimes alimentaires notés r_1 pour les Herbivores, r_2 pour les Frugivores, r_3 pour les Granivores, r_4 pour les Nectarivores, r_5 pour les Carnivores et r_6 pour les Omnivores.
On établit une correspondance
$$f : E = \{x, y, z, u, v\} \longrightarrow F = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$
avec l'Hypothèse $f(x) = r_1$, $f(x) = r_3$
$f(x) = r_6$, $f(y) = r_2$, $f(y) = r_6$ et $f(z) = r_4$.

a) L'ensemble d'antécédents
$$f^{-1}(\{F\}) = \{x, y, z\}$$
interprétation : On trouve parmi les classes d'animaux numérotées x, y, z des Herbivores, des Frugivores, des Granivores, des Nectarivores et des Omnivores.

b) On a : $\mathrm{Im} f = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_6\}$
Ce qui dénote qu'aucune des classes d'animaux citées est de régime r_5 exclusivement.

- $Ker f = \{u, v\}$ ce qui signifie que les classes d'animaux u et v n'ont pas de régimes alimentaires spécifiques.

- $Dim(Im f) = 5$ ce qui veut dire les classes d'animaux recensées correspondent à 5 régimes alimentaires spécifiques.

- $Dim(Ker f) = 2$ ce qui signifie que deux des classes d'animaux correspondent à aucune des six régimes spécifiés.

c) <u>La fonction f est-elle bijective?</u>

La réponse c'est non.

En effet : f n'est pas injective car deux classes différentes correspondent au même régime, cas de x et y puisque $f(x) = r_6 = f(y)$ pourtant $x \neq y$.

2. <u>Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrons que A est diagonalisable.

On a : $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2$

On en déduit le polynôme caractéristique

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$

En posant $P_A(\lambda)=0$, on obtient deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$

Ce qui suffit pour justifier que A est diagonalisable dans ce cas.

Par ailleurs, il existe (d'après les critères de diagonalisation) une matrice inversible P (formé des vecteurs propres) et la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Pour définir P, on détermine les vecteurs propres à travers les sous-espaces propres qui sont :

$E_2 = \{ V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / AX = 2X \} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x-y=0\}$

et $E_3 = \{ V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / AX = 3X \} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x-y=0\}$

. un vecteur propre pour E_2 est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

. un vecteur propre pour E_3 est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et on calcule P^{-1}

Un simple calcul nous donne:

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a: $A = PDP^{-1}$. $\boxtimes$

b) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ avec

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

. <u>Exprimons a_n et b_n en fonction de n.</u>

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. le système s'écrit:

(*) $X_{n+1} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

D'après la question a, A est diagonalisable de diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

et, $A = PDP^{-1}$

la relation (*) signifi $X_n = A^n X_0$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

où $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ (cf cours)

or $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

En effectuant les calculs, on obtient:

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

ec-Bol31 (5)

D'où $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2.3^n \\ -2^n+3^n & -2^n+2.3^n \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2.3^n \\ -2^n+3^n & -2^n+2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-2.3^n + 2^{n+1}-2.3^n \\ -2^{n+1}+2.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{\begin{cases} a_n = 3.2^{n+1} - 4.3^n \\ b_n = -3.2^n + 4.3^n \end{cases}}$

$\boxed{x}$

c) <u>Résolution du système différentiel</u>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x-y \\ \frac{dy}{dt} = 2x+4y \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $X' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$.

$X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

D'après ce qui précède, $A = PDP^{-1}$

donc : $X' = PDP^{-1}X$

Posons $Y = P^{-1}X$, on a : $X' = PDY$

$Y' = P^{-1}X' = \underbrace{P^{-1}P}_{Id}DY = DY$

le système est équivalent à :

$Y' = DY$ c'est-à-dire $Y = ke^{Dt}$ où $k \in \mathbb{R}$ constante

Ainsi $\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{2t} \\ y_2 = c_2 e^{3t} \end{cases}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

et donc, en revenant à X par $X = PX'$ on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} \end{cases}}$

$\boxed{X}$

3. <u>Rappel des définitions</u> (avec ε)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ lorsque

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta_\varepsilon > 0 / \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Application : Montrons que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-1) = 3$.

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons s'il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x^2 - 1$

$$0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon \quad (\text{avec } x_0 = 2)$$

on a : $|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

or $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|$

Comme $|x-2| < \eta$ (Hypothèse) alors

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Leftarrow \eta |x+2| < \varepsilon$$

Il suffit de prendre

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|x+2|} + 1$$

$\boxed{x}$

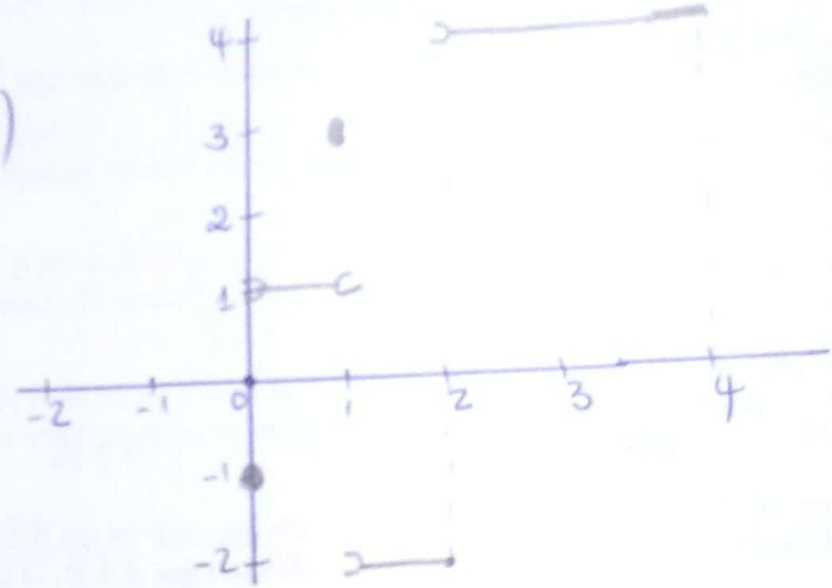
De la même manière, on définit puis on montre aisément que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1. \quad (\text{Cf. Cours et TPE}).$$

4. Soit h la fonction définie sur $[0,4]$ par :

$$h(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ 3 & \text{si } x=1\\ -2 & \text{si } 1<x\leq 2\\ 4 & \text{si } 2<x\leq 4.\end{cases}$$

a) Figure (esquisse)



. Calcul de $\int_0^3 h(t)\,dt$

La valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x=0$, $x=1$ $x=2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale.

Ainsi $\int_0^3 h(t)\,dt = 3$ (simple calcul)

b) Soit $x\in[0,4]$, calculons $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$

Un simple calcul nous donne :

$$H(x)=\begin{cases}x & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 3-2x & \text{si } 1<x\leq 2\\ -9+4x & \text{si } 2<x\leq 3\end{cases}$$

c) Montrons que H est continue sur $[0,4]$

Points critiques à étudier : $x=1$, $x=2$

or $\lim\limits_{x\to 1_<} H(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1_>} H(x) = 3-2 = 1$

ie $\lim\limits_{x\to 1_<} H(x) = \lim\limits_{x\to 1_>} H(x) = 1$ donc H est

Continue en $x_0 = 1$

En outre, $\lim\limits_{x\to 2_<} H(x) = \lim\limits_{x\to 2_<} (3-2x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 2_>} H(x) = \lim\limits_{x\to 2_>} (-9+4x) = -1$

d'où H est aussi continue en $x_0 = 2$.

Il vient que H est continue sur $[0,4]$.

H est-elle dérivable sur $[0,4]$?

* Dérivabilité en 1 :

on a : $\lim\limits_{x\to 1_<} \frac{H(x)-H(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1_<} \frac{x-1}{x-1} = 1$

Par contre $\lim\limits_{x\to 1_>} \frac{H(x)-H(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1_>} \frac{-2x+2}{x-1} = -2$

EE Pow13185

(10)

H n'est pas dérivable en 1.

De même, on montre que H n'est également pas dérivable en 2

En effet:

$$\lim_{x \to 2_<} \frac{H(x)-H(2)}{x-2} = -2 \text{ mais}$$

$$\lim_{x \to 2_>} \frac{H(x)-H(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2_>} \frac{4x-8}{x-2} = 4.$$

<u>Conclusion</u> F n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ ni en $x_0 = 2$.

5. <u>Calcul de limite en $+\infty$ des suites</u>

a) $U_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$

Il s'agit d'une somme de Riemann.

On a: $U_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

Posons $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La somme de Riemann correspondante à $\int_0^1 f(t)\,dt$ est exactement U_n.

EE Bu0131/S1 (11)

Calculons $\int_0^1 f(t)\,dt$

on a : $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\text{Arctan } t\right]_0^1$

or $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Arctan}(0) = 0$

donc $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$.

La somme de Riemann U_n convergeant vers $\int_0^1 f(t)\,dt$, on en déduit

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{\pi}{4}}$$

b) Calcul de $\lim_{n\to\infty} V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Nous avons $V_n = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$

Ainsi $\ln V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$.

Posons $g(t) = \ln(1+t^2)$ ce qui correspond à la somme de Riemann à $I = \int_0^1 g(t)\,dt$.

Calculons $I = \int_0^1 g(t)dt$

On a : $I = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt$

$I = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$ par intégration par parties.

Ainsi $I = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$= \ln 2 - 2 + 2\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1$

$I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Ce qui prouve que
$\lim\limits_{n\to\infty} \ln V_n = I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

On en déduit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = e^{\ln 2} e^{-2} e^{\pi/2}$

Comme $e^{\ln 2} = 2$, alors

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}}$

Fin

Université de Maroua
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Semestre 1, Session : 1, Niveau : L1SB/L1ST
Code de l'UE : **BIO131/STE131**
Enseignant: ISKAMLE Bruno

Examen de Mathématiques pour S.B/S.T
Année Académique (2021-2022)
Durée de l'épreuve : **02 heures**.

1. On considère cinq classes d'animaux numérotées x, y, z, u et v. Leurs différents régimes alimentaires sont notés par r_1 pour les Herbivores, r_2 pour les Frugivores, r_3 pour les Granivores, r_4 pour les Nectarivores, r_5 pour les Carnivores et r_6 pour les Omnivores. Ce qui permet d'établir une correspondance f de l'ensemble $\mathbf{E} = \{x, y, z, u, v\}$ vers l'ensemble $\mathbf{F} = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$. Supposons que $f(x) = r_1$, $f(x) = r_3$, $f(x) = r_6$, $f(y) = r_2$, $f(y) = r_6$ et $f(z) = r_4$.
   a) Décrire l'ensemble d'antécédents $f^{-1}(\{\mathbf{F}\})$ et interpréter.
   b) Déterminer Imf, $Kerf$, $Dim(Imf)$, $Dim(Kerf)$ et interpréter.
   c) La fonction f est-elle bijective? Justifier votre réponse.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A est diagonalisable et que l'on peut l'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   b) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, et vérifiant les relations de récurrence $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
   c) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$

3. Soit $x_0, l \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition (avec ε) de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$, puis de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
   En utilisant ces définitions, démontrer que $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

4. Soit h la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

   a) Faire une figure et calculer $\int_0^3 h(t)dt$.
   b) Soit $x \in [0, 4]$, calculer $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.
   c) Montrer que H est une fonction continue sur $[0, 4]$. La fonction H est-elle dérivable sur $[0, 4]$? Justifier

5. Calculer la limite à $+\infty$ des suites suivantes :
   a) $U_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$, b) $V_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

¶ Bon Travail !!!