RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
****
UNIVERSITE DE MAROUA
****
FACULTÉ DES SCIENCES
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

P.O Box/BP 814 Maroua
http://www.fs.univ-maroua.cm
https://www.facebook.com/fsmaroua

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
****
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF MAROUA
****
FACULTY OF SCIENCE
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE
ANNEE ACADEMIQUE 2022-2023
UE : MAT 243 – CALCUL DE PROBABILITE
ENSEIGNANT: Dr. Didier Alain NJAMEN
Grade : Chargé de Cours

TRAVAUX DIRIGES N°3

Exercice 1 Une urne contient 3 boules blanches et 12 boules noires, toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches au terme des 3 tirages ?

Exercice 2 Une usine fabrique des composants électroniques dont 5% présentent des défauts. On considère un échantillon de 200 objets.

1) Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux ?
2) Quelle est la probabilité qu'un seul objet soit défectueux ?
3) Quelle est la probabilité qu'au plus 3 objets soient défectueux ?

Exercice 3 Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coûdt de fabrication est de 160 par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 93% des cas et une console de jeux reconnue conforme peut alors être vendue 290. Si le test est en revanche négatif, la console de jeux est bradée au prix de 150.

1) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles de jeux conformes parmi les 400 produites. Calculer l'espérance de X.
2) On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat.

Exercice 4 On lance 50 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de telle sorte que la probabilité de faire apparaître la face numérotée 6 soit supérieure à 0.5 . On compte le nombre de 6 obtenus. Quelle doit être la valeur de p pour que la variance de la loi de probabilité du nombre de 6 obtenus soit égale à 10 ?

Exercice 5 Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X "le nombre d'essais pour ouvrir la porte"

1) Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k)$ avec $k = 1, 2, 3, 4$.
2) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 6 Un magasin reçoit 3 réclamations en moyenne par jour. Supposons que la survenance de ces réclamations suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour que le premier lundi du mois prochain soient enregistrées :

1) 0 réclamation
2) 2 réclamations
3) plus de 4 réclamations

Exercice 7 Un standard téléphonique reçoit en moyenne $0,7$ appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que, entre 09h59 et 10h, il reçoive :

1) 0 appel
2) 1 appel
3) plus d'un appel

Exercice 8 On prélève au hasard un échantillon de k pièces dans une production totale de N pièces comportant en tout n pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement j pièces défectueuses dans l'échantillon ?

Exercice 9

A un guichet SNCF se présentent 2 femmes et 3 hommes. On choisit au hasard 2 personnes différentes pour une enquête.
Soit X = nb de femmes.
a) Déterminer la probabilité de choisir une femme au moins.
b) Calculer E(X) et s(X).

Exercice 10

On choisit au hasard 10 étudiants de DEUG ≠ pour un entretien : 304 étudiants sont inscrits en $1^{\text{ère}}$ année, 233 en $2^{\text{ème}}$.
X = nb d'étudiants de $1^{\text{ère}}$ année parmi les 10.
Calculer la probabilité d'avoir 5 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année et déterminer E(X) et $\sigma(X)$.

Exercice 11

Une urne contient b boules blanches (B) et r boules rouges (R).
On tire une boule au hasard

Soit $X : \left| \begin{array}{l} B \to 0 \\ R \to 1 \end{array} \right.$

Si la boule tirée est B on la remet accompagnée de n autres boules blanches.

Si elle est R, on la remet avec n autres rouges.
On tire alors une boule.

$$\text{Soit } Y : \left| \begin{array}{l} B \to 0 \\ R \to 1 \end{array} \right.$$

a) Donner la loi de probabilité de (X, Y).
b) Lois marginales.
c) indépendance stochastique ?

Exercice 12

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2 + y^2 - xy & x \in [-1,1] \text{ et } y \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) déterminer k pour que f soit effectivement une fonction densité d'un couple (X, Y).
b) calculer $P[\{0 < X < 1\} \cap \{-1/2 < Y < 0\}]$
c) fonctions densité marginales.
d) fonction de répartition conjointe.

Exercice 13

reprendre $f(x,y) = kx^2 + y^2 - xy$.

e) Donner la fonction densité conditionnelle de $X|Y = 0$.
f) Calculer $P(0 < X < 1|Y = 0)$.
g) Calculer l'espérance de $X|Y = 0$.

Exercice 14 Calculer les quantités suivantes :

- $X \sim \mathcal{N}(3,2)$ Calculer $P(X < 6,24)$
- $X \sim \mathcal{N}(-4,5)$ Calculer $P(X < 1,65)$
- $P(X > 4,94)$ $X \sim \mathcal{N}(-2,4)$
- $X \sim \mathcal{N}(-3,2)$ $P(4 < X < 0)$
- $X \sim \mathcal{N}(1,3)$ $P(0 < X < 2|X > -2) = \dfrac{P(0 < X < 2)}{P(X > -2)}$
- $X \sim \mathcal{N}(2,0,5)$ calculer le fractile d'ordre 0,675 de X

Exercice 15

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

Exercice 16

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 17

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de lamême couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

D « Tirer deux boules rouges. »

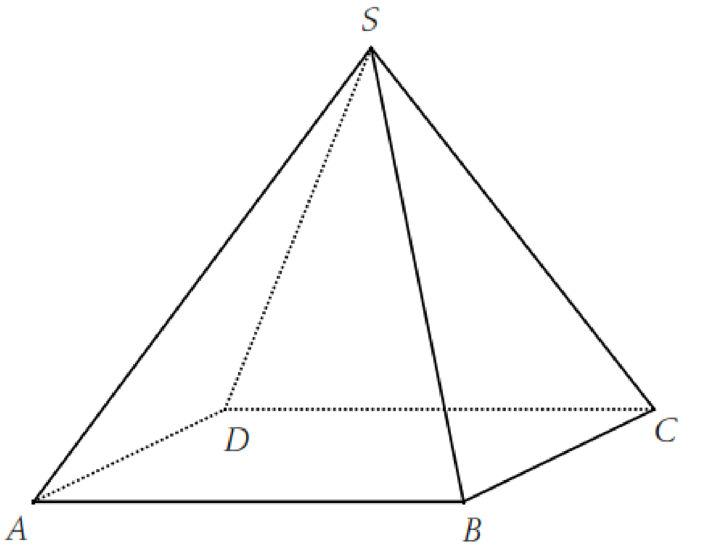
E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$?

Exercice 18



1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ¿
- en B ¿
- en C ¿
- en D ¿

b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas » et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1.

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap S_n$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 19

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

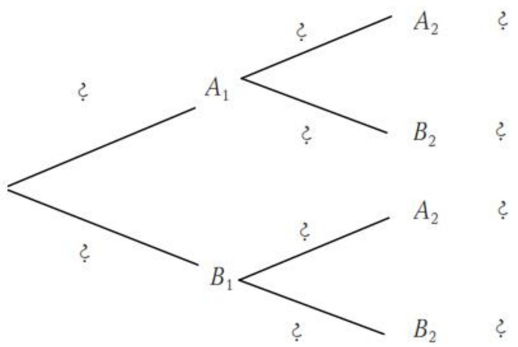
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. a. Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants : $p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ *et* $p(A_1 \cap A_2)$.

c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 20

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- 4 jetons blancs marqués 0 ;
- 3 jetons rouges marqués 7 ;
- 2 jetons blancs marqués 2 ;
- 1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

   A : « Les quatre numéros sont identiques ».
   B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
   C : « Tous les jetons sont blancs ».
   D : « Tous les jetons sont de lamême couleur ».
   E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'évènement B est $\dfrac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.

3. On établit la règle de jeu suivante :

- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
- Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
- Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

Exercice 21

Dans un village de vacances situé en montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?

3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?

4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.

On note :

E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».

F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».

Calculer les probabilités suivantes : $P(E)$, $P_E(F)$, $P_{\overline{E}}(F)$ puis $P(F \cap E)$ et $P\left(F \cap \overline{E}\right)$. En déduire $P(F)$.