RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
****
UNIVERSITE DE MAROUA
****
FACULTÉ DES SCIENCES
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

P.O Box/BP 814 Maroua
http://www.fs.univ-maroua.cm
https://www.facebook.com/fsmaroua

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
****
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF MAROUA
****
FACULTY OF SCIENCE
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE
ANNEE ACADEMIQUE 2022-2023
UE : MAT 243 – CALCUL DE PROBABILITE
ENSEIGNANT: Dr. Didier Alain NJAMEN
Grade : Chargé de Cours

TRAVAUX DIRIGES N°2 (DENOMBREMENT – ESPACES DE PROBABILITES)

Exercice 1

Si A, B et C sont trois ensembles, montrez que :

$$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C), \quad (A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D).$$

Exercice 2

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$, $C =]-5, +\infty[$. Déterminez les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \backslash A$, $A \backslash B$, $(\mathbb{R} \backslash A) \cap (\mathbb{R} \backslash B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 3

Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères (les 2 premiers étant des lettres et les 5 autres des chiffres) ? Même question si l'on impose que les répétitions de lettres ou de chiffres sont exclues.

Exercice 4

On doit asseoir sur un même rang 4 allemands, 3 français, et 3 anglais ; les gens de même nationalité devant rester groupés. Combien de dispositions sont possibles ?

Exercice 5

Combien existe-t-il d'arrangements différents avec les lettres des mots suivants : a) pinte ; b) proposition ; c) Mississipi ; d) arrangement ?

Exercice 6

On veut former un comité de 7 personnes, constitué de 2 démocrates, 2 républicains, et 3 indépendants. On a le choix parmi 6 démocrates, 5 républicains, et 4 indépendants. Combien de choix sont possibles ?

Exercice 7

Dix athlètes participent à une course que chacun a la même chance d'emporter (pas d'ex aequo). Ils portent des dossards numérotés de 1 à 10. Quelle est la probabilité que l'un des coureurs portant les numéros 1, 2 ou 3 l'emporte ?

Exercice 8

Un sac contient des billes noires et rouges, portant une marque ou non. La probabilité d'observer une bille rouge et marquée est de $2/10$, une bille marquée de $3/10$ et une bille noire de $7/10$. Quelle est la probabilité d'observer une bille rouge ou marquée ?

Exercice 9

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux parents d'élèves d'une école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 10

Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 objets. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 en produit 6%. Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ?

Exercice 11

Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade?

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

a) Décrire l'ensemble des résultats possibles comme un produit d'ensembles.

b) Ecrire de façon ensembliste l'événement $F =$"pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers".

c) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement $E_i =$ "le résultat du i-ième lancer est pile".

d) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement F.

e) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement $G =$" la pièce est tombée au moins une fois sur pile".

Exercice 13

On lance deux dés à six faces. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles et la probabilité P associée à cette expérience. Donner la probabilité d'obtenir

1. un double,
2. au plus un nombre pair,
3. exactement un nombre pair,
4. deux nombres qui se suivent.

Exercice 14

On a décelé dans une certaine population une probabilité de 0,01 pour qu'un enfant de moins de trois mois soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un enfant qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est de 0,9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est de 0,95.

Quelle est la probabilité qu'un enfant de moins de trois mois pris au hasard ait une réaction positive au test ? Quelle est la probabilité qu'un enfant de moins de trois mois pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Exercice 15

Soient A, B, et C trois évènements de l'univers Ω des éventualités.

1) Montrer que $B \cup C$ et $\overline{B} \cap \overline{C}$ sont incompatibles.

2) En déduire que $A \cap (B \cup C)$ et $A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$ sont incompatibles.

3) Calculer $[A \cap (B \cup C)] \bigcup \left[A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)\right]$.

Exercice 16

On suppose que dans une course hippique, il y'a n chevaux au départ et que ces chevaux ont la même chance de gagner.

1) Calculer le nombre de tiercés possibles.

2) Calculer la probabilité de gagner le tiercé à l'aide d'un ticket:

   a) dans l'ordre.
   b) dans l'ordre ou dans le désordre.
   c) dans le désordre.

Exercice 17

Une urne contient huit boules rouges, trois blanches, et neuf noires. On tire successivement sans les replacer trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir:

1) trois boules rouges

2) trois boules blanches

3) dans l'ordre une boule rouge, une boule blanche et une boule noire.

4) une boule rouge, une boule blanche et une boule noire dans le désordre.

5) deux boules rouges et une boule blanche dans le désordre.

Exercice 18

Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes.

1) On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu. Calculer les probabilités des évènements suivants:

   a) Trois piques
   b) Aucun pique
   c) Un pique et deux "non-piques"
   d) Au moins un pique

2) On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard. Calculer les probabilités des évènements suivants:

   a) Trois as
   b) Aucun as
   c) Trois cartes rouges

Exercice 19

On classe les gérants de portefeuille en deux catégories : ceux qui sont bien informés et ceux qui ne le sont pas. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, la probabilité que le cours de celle-ci monte est de 0.8; dans le cas d'un gérant mal informé, cette probabilité ne vaut que 0.5. Si on choisit au hasard un gérant dans un annuaire professionnel, la probabilité qu'il soit bien informé 0.2. Calculer la probabilité que le gérant ainsi choisi soit mal informé sachant que la valeur qu'il a acheté a monté.

Exercice 20

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires. On effectue un tirage sans remise de deux boules. Admettons qu'on peut tirer avec même probabilité chacune des boules de l'urne. Définissons les évènements suivants
B_1 =la première boule est blanche
et B_2 = la seconde boule est blanche.

a) Décrire l'ensemble fondamental Ω de cette expérience aléatoire.

b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)$, $\mathbb{P}\left(B_2 \mid \overline{B_1}\right)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.

c) Vérifier que

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) + \mathbb{P}\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = 1.$$

Exercice 21

Les Anglais et les Américains orthographient le mot rigueur, respectivement, rigour et rigor. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Or 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60% restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais?

Exercice 22

Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une probabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif?

Exercice 23

On considère deux urnes U_1 et U_2 qui contiennent respectivement r_1 boules rouges et n_1 boules noires, r_2 boules rouges et n_2 boules noires. Une urne est choisie au hasard et deux boules sont tirées, l'une est rouge et l'autre est noire. Quelle est la probabilité:

1) qu'elles proviennent de l'urne U_1?

2) qu'elles proviennent de l'urne U_2?

Exercice 24
Montrer que si A, B, et C sont mutuellement indépendants, alors A est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 25
On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ¿
2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r-1$ personnes) ¿

Exercice 26
Soient A, B et C des événements. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$.
3. On sait que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}3$, $P(B \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Exercice 27
On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Exercice 28
Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ¿
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ¿

Exercice 29
Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;
* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;
* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 30

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;

C1 : « la particule entre dans K1 » ;

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ¿

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Formule de Bayes

Lorsque la partition de Ω est du type $\Omega = A \sqcup A^c$, la formule de Bayes s'écrit simplement

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

HH