RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
****
UNIVERSITE DE MAROUA
****
FACULTÉ DES SCIENCES
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

P.O Box/BP 814 Maroua
http://www.fs.univ-maroua.cm
https://www.facebook.com/fsmaroua

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
****
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF MAROUA
****
FACULTY OF SCIENCE
****
Email : decanat@fs.univ-maroua.cm

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE
ANNEE ACADEMIQUE 2022-2023
UE : MAT 243 – CALCUL DE PROBABILITE
ENSEIGNANT: Dr. Didier Alain NJAMEN
Grade : Chargé de Cours

TRAVAUX DIRIGES N°4

Exercice 1 (Question de cours, 3 points)

1. Enoncer l'inégalité de Markov (sans oublier de donner les hypothèses).
2. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev (sans oublier de donner les hypothèses).
3. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.

Exercice 2 (Questionnaire à choix multiple, 5 points)

Pour chaque question, on reportera sur la copie le numéro de la question avec celui de la réponse exacte. Le choix devra être justifié en 2 lignes maximum.

1. Soit X une variable aléatoire réelle de denstié f_X. La variabe aléatoire $Y = X + 1$ admet pour densité :
   (a) $f_X(y+1)$
   (b) $1 + f_X(y)$
   (c) $1 - f_X(y)$
   (d) $f_X(y-1)$
   (e) une autre
2. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale. Alors $2X + 1$ suit également une loi normale
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
3. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telle que $\rho(X, Y) = 0$ (ρ désigne le coefficient de correlation), alors X et Y sont indépendantes.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors $X + Y$ et Y sont indépendantes.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
5. On note F_X la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (pour une variable aléatoire réelle). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $F_X(-x) = -F_X(x)$
   (b) $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$
   (c) $F_X(-x) = F_X(x)$
   (d) aucune de ces égalités n'est correcte

Exercice 3 (3,5 points)
Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le carré $]-1,1[\times]-1,1[$.

1. Déterminer la densité de X ainsi que de ses marginales.
2. Calculer le coefficient de correlation entre X_1 et X_2.
3. Déterminer la densité de $Y = X_1 - X_2$ (on pourra par exemple utiliser le produit de convolution).

Exercice 4 (5 points)
Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

On considère la variable aléatoire $X = e^Y$.

1. Montrer que X admet pour densité
$$f_X(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x).$$
2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ en fonction de λ.
3. On suppose que $\lambda > 1$. Soit Z une variable aléatoire réelle indépendante de X et de loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la densité de la variable aléatoire Z/X.

Exercice 5 (3,5 points)
Soit $Z = (X, Y)'$ un couple aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_Z(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $k = \frac{1}{2}$.
2. Calculer les densités marginales.
3. On note $A =]-2, 1/4[\times]-1, 3/2[$. Déterminer $\mathbf{P}(Z \in A)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

Exercice 6
Pour chaque question, on reportera sur la copie le numéro de la question avec celui de la réponse exacte. Le choix devra être justifié en 2 lignes maximum.

1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi normale centrée réduite. Alors le vecteur aléatoire $(X, Y)'$ est un vecteur gaussien.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
2. Si $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ est un vecteur gaussien, alors les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_d$ sont des variables aléatoires gaussiennes.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X. La variable aléatoire $Y = 2X$ admet pour densité :
   (a) $\frac{1}{2} f_X(x)$
   (b) $\frac{1}{2} f_X(\frac{x}{2})$
   (c) $2 f_X(x)$
   (d) $2 f_X(2x)$
   (e) une autre

4. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de densités respectives $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. Alors la densité de $X+Y$ se calcule en faisant le produit de convolution entre f_X et f_Y.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
5. Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X et Y_n une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers un réel a. Alors
   (a) $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + a$ mais pas en probabilité
   (b) $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + a$ mais pas en loi
   (c) $X_n + Y_n$ converge en probabilité et en loi vers $X + a$
   (d) $X_n + Y_n$ ne converge ni en probabilité ni en loi vers $X + a$

Exercice 7

Rappels : *On rappelle que la densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

De plus, on admettra que son moment d'ordre n est donné par $\mathbf{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$.

Soit $(X, Y)'$ un couple aléatoire de densité jointe :

$$f(x, y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}.$$

1. Montrer que $f(x, y)$ définit bien une densité.
2. Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre 1 et que la densité marginale de Y vaut
$$f_Y(y) = ye^{-y}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y).$$
3. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{E}[X]$, $\mathbf{E}[Y]$ et $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
5. Déterminer la densité conditionnelle $f_{Y|X=x}(y)$ de Y sachant $X = x$.
6. Donner deux manières différentes de calculer la probabilité
$$\mathbf{P}\left(Y < \frac{1+X}{2}\right)$$
(juste écrire les formules, les calculs ne sont pas demandés).
7. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[Y|X]$ (on exprimera $\mathbf{E}[Y|X]$ en fonction de X).
8. On considère le couple (Z, T) défini par
$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = Y - X. \end{cases}$$
Déterminer la densité jointe $f_{Z,T}(z, t)$ du couple (Z, T).
9. En déduire les densités marginales de Z et T.

Exercice 8

Rappel : *Si $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ est un vecteur gaussien d'espérance m_X, de matrice de variance-covariance Σ_X et qui admet une densité f_X alors*

$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d\sqrt{\det(\Sigma_X)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_X)'\Sigma_X^{-1}(x - m_X)\right).$$

Soit $(X, Y)'$ un vecteur gaussien centré (d'espérance $(0, 0)'$) et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$ de X et Y en fonction de u. En déduire les valeurs de u pour lesquelles $|\rho(X, Y)| \leq 1$.
2. Pour quelle(s) valeurs de u, les variables marginales sont-elles indépendantes ?
3. Pour quelle(s) valeurs de u, le vecteur gaussien $(X, Y)'$ admet-il une densité ?
4. On suppose maintenant que $u = 1$.
   (a) Donner la densité conjointe du vecteur gaussien $(X, Y)'$.
   (b) Calculer la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ et en déduire la loi de $Y|X = x$.
   (c) Exprimer $\mathbf{E}[Y|X]$ en fonction de X et en déduire la loi de $\mathbf{E}[Y|X]$.
   (d) Quelle est la loi du couple aléatoire $(U, V)' = (-X, X + 2Y)'$? Les variables aléatoires $-X$ et $X + 2Y$ sont elles indépendantes ?

Exercice 9

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

1. Parmi les différents modes de convergence vus en cours, préciser ceux pour lesquels $\bar{X}_n$ converge vers p.
2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\mathbf{P}\left(|\bar{X}_n - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{0.05n}}\right) \geq 0.95.$$
3. En déduire que
$$\mathbf{P}(-4.48 \leq T_n \leq 4.48) \geq 0.95$$
(on pourra utiliser l'approximation $1/\sqrt{0.05} \approx 4.48$).
4. Montrer que T_n converge en loi vers une loi normale centrée réduite.
5. On admet que si X suit un loi normale centrée réduite on a $\mathbf{P}(|X| \leq 1.96) = 0.95$. Déduire de la question précédente que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(-1.96 \leq T_n \leq 1.96) = 0.95.$$
Comparer ce résultat avec celui de la question 3. Commenter.
6. Est-ce que la variable aléatoire
$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}$$
converge en loi vers une loi normale centrée réduite ? Justifier votre réponse.

Exercice 10

Les réponses aux questions de cet exercice ne necéssitent pas de longs développements mathématiques (si elles sont bien abordées...). Les réponses données devront être courtes et précises.

1. Enoncer les définitions des convergences presque sûre, en probabilité et en loi.
2. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que X_n suit une loi uniforme sur $]-1/n;1/n[$.
   (a) Est-ce que X_n converge en probabilité vers 0 ? Justifier.
   (b) Est-ce que X_n converge en loi vers 0 ? Justifier.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que
$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$
   (a) Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans L_2 ? Justifier.
   (b) Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 ? Justifier.
4. Enoncer la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.
5. (a) Donner la définition d'un vecteur gaussien.
   (b) Rappeler la définition de la loi du χ^2 à n degrés de liberté.
   (c) Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\chi^2(n)$ et Y une variable aléatoire réelle de loi $\chi^2(m)$. X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X+Y$? Justifier votre réponse.
   (d) Enoncer le théorème de Cochran.
   (e) Soit $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ où $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma^2>0$. En utilisant le théorème de Cochran, donner la loi de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 11

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$ définie par :
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - xy + y^2\right)\right), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien, puis déterminer son espérance et sa matrice de variance covariance.
2. Déterminer les lois des marginales X et Y.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $U = Y - aX$. Quelle est la loi du vecteur (U,X) ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de a les variables aléatoires U et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

Soit $\theta>0$ un nombre réel fixé et $Z=(X,Y)$ un vecteur aléatoire dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = C\exp(-\theta y)\mathbf{1}_{0<x<y}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $C=\theta^2$.
2. Déterminer les lois marginales de Z ainsi que $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}[X]$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $U=X$ et $V=Y-X$.
   (a) Déterminer la loi du couple (U,V).
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. A l'aide de la question précédente, calculer $\mathbf{Cov}[X,Y]$. En déduire $\mathbf{V}[Y]$.
5. Calculer $\mathbf{E}[Y|X]$. En déduire $\mathbf{E}[Y]$.
6. Indiquer deux façons différentes de calculer $\mathbf{P}(Y>X^2)$ (il n'est pas demandé de faire le calcul).

Exercice 13

Soit $X_1, \dots, X_n$ un n échantillon composé de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi admettant pour densité

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \mathbf{1}_{]0,\theta]}(x)$$

où θ est un paramètre strictement positif.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que $\mathbf{E}[X_1] = \theta/3$ et calculer la variance de X_1.
3. En utilisant le théorème central limite, proposer une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\sqrt{n}(U_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \varphi(\theta))$$
où φ est une fonction à préciser.
4. On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de Y_n et en déduire la densité de Y_n.
5. Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
6. Montrer que
$$\mathbf{E}[(Y_n - \theta)^2] = (\mathbf{E}[Y_n] - \theta)^2 + \mathbf{V}(Y_n).$$
7. Est-ce que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ en moyenne quadratique (ou dans L_2) ? Justifier.
8. Montrer que $n(\theta - Y_n)$ converge en loi vers une loi à préciser.
9. Etudier les convergences en probabilité et presque sûre de Y_n vers θ.

Exercice 14

Le prix S_n d'une action au jour n est modélisé ainsi : $S_0 = s > 0$ est fixé, et $S_{n+1} = (1 + r + \sigma\varepsilon_{n+1})S_n$, où $r > 0$ est un taux fixe, $\sigma \in]0, 1+r[$ est une volatilité fixe, et $(\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $B(\pm 1, 1/2)$. On souhaite répondre aux questions suivantes :

1. Étudier le comportement des suites $(\log S_n)/n$ et S_n.
2. Étudier le comportement de la suite $(\log S_n)/\sqrt{n}$ lorsque $(1+r)^2 = 1 + \sigma^2$.
3. Étudier le comportement de la suite suivante :
$$\left[(1+r)^2 - \sigma^2\right]^{(-1/(2\sqrt{n}))} \times S_n^{1/\sqrt{n}}.$$

Exercice 15

1. Donner un exemple de lois discrète, absolument continu et mixte. Tracer les fonctions de répartitions de ces 3 lois.
2. Etant donné $\alpha \in]0, 1[$ on désigne par q_α le quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit Y une variable aléatoire de loi normale d'espérance 2 et de variance 9. Exprimer le quantile d'ordre α de Y en fonction de q_α. Justifier votre réponse.
3. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)'$ un vecteur aléatoire suivant une loi multinomiale de paramètre $(n, p_1, \dots, p_n)$:
   (a) Quelle est la loi de X_1 ?
   (b) Que vaut $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$?
   (c) Montrer le résultat de la question précédente.
4. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)'$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m_X, \Sigma_X)$. On désigne par M une matrice de dimension $p \times d$ et ℓ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Quelle est la loi de $MX + \ell$?

Exercice 16

Pour chaque question, on reportera sur la copie le numéro de la question avec celui de la réponse exacte. Le choix devra être justifié en 2 lignes maximum.

1. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. La variable aléatoire $Y = 2X + 1$ admet pour fonction de répartition :
   (a) $F_X(2y+1)$
   (b) $\frac{F_X(y)-1}{2}$
   (c) $2F_X(y)+1$
   (d) $F_X(\frac{y-1}{2})$
   (e) une autre
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles qui suivent une loi normale. Alors $X = (X_1, X_2)'$ est un vecteur gaussien.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
3. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes. Alors $X + Z$ et Y sont indépendantes.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)
4. On note F_X la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (pour une variable aléatoire réelle). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $F_X(-x) = -F_X(x)$
   (b) $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$
   (c) $F_X(-x) = F_X(x)$
   (d) aucune de ces égalités n'est correcte

Exercice 17

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $\{]0,1[\times]0,1[\}\cup\{]1,2[\times]0,2[\}$.

1. Représenter le support de X sur un graphique.
2. Quelle est la densité de X ?
3. Les variables X_1 et X_2 sont elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance X_1.
5. Calculer la médiane de X_1.

Pour les deux exercices 18 et 19 suivants,

on rappelle que étant donné $\lambda > 0$, la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

On a de plus $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbf{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 18

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de loi exponentielle de paramètre λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$).

1. Quelle est la densité du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)'$?
2. Soit $Y = \min(X_1, X_2)$ le minimum de ces deux variables aléatoires. Montrer que
$$\mathbf{P}(Y = X_1) = \mathbf{P}(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
3. Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 19

Soit $(X, Y)'$ un couple aléatoire de densité jointe
$$f(x, y) = c\exp(-y)\mathbf{1}_{0<2x<y}.$$

1. Montrer que $c = 2$.
2. Calculer les densités marginales. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Calculer $\mathbf{E}[X]$, $\mathbf{E}[Y]$ et $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
4. On pose $T = 2X - Y$. Calculer la densité de T.

Pour les exercices 20 à 23 suivants, bien vouloir tenir compte du rappel suivant :

Rappel : *Si $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ est un vecteur gaussien d'espérance m_X, de matrice de variance-covariance Σ_X et qui admet une densité f_X alors*
$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d\sqrt{\det(\Sigma_X)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_X)'\Sigma_X^{-1}(x - m_X)\right).$$

Exercice 20

Les réponses aux questions de cet exercice ne necéssitent pas de longs développements mathématiques (si elles sont bien abordées...). Les réponses données devront être courtes et précises (2 ou 3 lignes maximum).

1. Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire suivant une loi multinomiale $\mathcal{M}(1, 1/3, 2/3)$. Calculer $\mathbf{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 0)$. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_1 suit une loi uniforme sur $]1, 2[$ et X_2 suit une loi normale de moyenne 3 et de variance 2. On considère le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)'$. Donner l'espérance de X ainsi que sa matrice de variance-covariance.
3. Soit $(X, Y)'$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant pour densité
$$f(x, y) = \lambda\exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + y^2)\right).$$
Le vecteur (X, Y) est-il un vecteur gaussien ? Si oui, préciser son espérance, sa matrice de variance-covariance ainsi que la valeur de λ. Si non, justifier brièvement.
4. On désigne par q_α le quantile d'ordre alpha de la loi du chi-deux à un degré de liberté et par u_α le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $q_\alpha = u^2_{(1-\alpha)/2}$.

Pour les deux questions à suivre, on reportera sur la copie le numéro de la question avec celui de la réponse exacte. Le choix devra être justifié en 2 lignes maximum.

5. Soit X une variable aléatoire qui admet une densité f_X continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On note F_X la fonction de répartition de X et t un réel positif.
   (a) $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$
   (b) $F_X(t) = F_X(-t)$
   (c) $F_X(t) = -F_X(t)$
   (d) $F_X(t) = 1/2 + F_X(-t)$
   (e) $F_X(-t) = 1/2 + F_X(t)$
   (f) aucune de ces égalités est correcte.
6. Si $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ est un vecteur gaussien et Y est une variable aléatoire gaussienne, alors le vecteur $(X_1, \ldots, X_d, Y)'$ est un vecteur gaussien.
   (a) Oui
   (b) Non (ou dans certains cas seulement)

Exercice 21

Soit $Z = (X, Y)'$ un couple aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_Z(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $k = \frac{1}{2}$.
2. Calculer les densités marginales. En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
3. Déterminer la densité conditionnelle de $Y|X = x$.
4. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[Y|X]$.
5. Retrouver la valeur de $\mathbf{E}[Y]$ en utilisant la question précédente.
6. Calculer $\mathbf{P}(Y < 2X|X = x)$.
7. En déduire $\mathbf{P}(Y < 2X)$.

Exercice 22

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur gaussien centré (d'espérance $(0,0)'$) et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u \in [-1, 1].$$

1. On désigne par $\rho(X_1, X_2)$ le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X_2. Pour quelle(s) valeur(s) de u a-t-on $|\rho(X_1, X_2)| \leq 1$?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de u le vecteur X admet-il une densité ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de u les variables $Z = X_1$ et $T = X_1 + 2X_2$ sont-elles indépendantes ?
4. On suppose que $u \in]-1, 1[$.
   (a) Calculer la densité conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$ et en déduire la loi de $X_2|X_1 = x_1$.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_2|X_1]$ et en déduire la loi de $\mathbf{E}[X_2|X_1]$.
   (c) Quelle est la loi du couple aléatoire $(U, V)' = (X_1, X_2 - \mathbf{E}[X_2|X_1])'$? Pour quelle(s) valeur(s) de u les variables X_1 et $X_2 - \mathbf{E}[X_2|X_1]$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 23

Soit X une variable aléatoire de densité f_θ définie par :

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$$

où θ est un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer que

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\theta}{\theta+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[X] = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad U_n = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}.$$

   (a) Montrer que $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$, où g est une fonction que vous préciserez.

   (b) En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers θ.

   (c) On pose

$$T_n = \frac{1}{1+U_n}\sqrt{\frac{U_n}{U_n+2}}.$$

   La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en probabilité ? Si oui, déterminer sa limite.

   (d) Déterminer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et un nombre réel m (fonction de θ) tels que la suite de variables aléatoires

$$\left(a_n \frac{\bar{X}_n - m}{T_n}\right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une limite à préciser.

Exercice 24

1. Donner un exemple de lois discrète, absolument continu et mixte. Tracer les fonctions de répartition de ces 3 lois.
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $]-1, 1/2[\cup[3, 8[$. Quelle est la densité de X ?
3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. On pose $Y = aX + b$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de F_X, a et b.
4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Calculer la densité de $Y = X^2$.
5. Etant donné $\alpha \in]0, 1[$ on désigne par q_α le quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit Y une variable aléatoire de loi normale d'espérance 2 et de variance 9. Exprimer le quantile d'ordre α de Y en fonction de q_α. Justifier votre réponse.
6. Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur gaussien centré réduit. On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

   Quelle est la loi du vecteur $Y = PX + u$?
7. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note $Y = 1 - X$.

   (a) Quelle est la loi du vecteur $(X, Y)'$?

   (b) En déduire $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 25

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le triangle

$$\mathcal{T} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 < x_2 < x_1 < 1\}.$$

1. Représenter le support de X sur un graphique.
2. Quelle est la densité de X ?
3. Calculer les densités marginales.
4. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Calculer l'espérance X_1.
6. Calculer la médiane de X_1.

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité

$$f(x) = c\exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $c = 1/2$.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbf{E}[X]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle I_n l'intégrale définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)\, \mathrm{d}x.$$

   (a) Combien vaut I_0 ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $I_n = nI_{n-1}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.
5. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}[X^{2n}]$. En déduire $\mathbf{V}[X]$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbf{E}[X^{2n+1}]$?

Exercice 27

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{]0,1/2]}(x),$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. Quelles conditions doit vérifier θ pour que f_θ soit bien une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer l'espérance de X.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité f_θ. Soient U_n et V_n les variables aléatoires définies par

$$U_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(X_i) \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(X_i).$$

   (a) Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales dont on précisera les valeurs des paramètres.
   (b) Calculer $\mathbf{E}[U_n]$, $\mathbf{E}[V_n]$ et en déduire $\mathbf{E}[(V_n - U_n)/n]$.
   (c) Calculer $\mathbf{E}[U_nV_n]$ et $\mathbf{Cov}(U_n, V_n)$.
   (d) Montrer que

$$\mathbf{V}\left[\frac{V_n - U_n}{n}\right]$$

   tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour les exercices 28 à 30 suivants, bien vouloir tenir compte du rappel suivant :

Rappels :

— La densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

On a de plus $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbf{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

— Si elle existe, la densité d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ d'espérance m_X et de matrice de variance-covariance Σ_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{\det(\Sigma_X)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_X)'\Sigma_X^{-1}(x - m_X)\right).$$

Exercice 28

Les réponses aux questions de cet exercice ne necéssitent pas de longs développements mathématiques (si elles sont bien abordées...). Les réponses données devront être courtes et précises.

1. Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire suivant une loi multinomiale $\mathcal{M}(1, 1/4, 3/4)$. Calculer $\mathbf{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1)$. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_1 suit une loi uniforme sur $]1, 4[$ et X_2 suit une loi normale de moyenne -2 et de variance 1. On considère le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)'$. Donner l'espérance de X ainsi que sa matrice de variance-covariance.
3. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note $Y = 1 - X$.
   (a) Quelle est la loi du vecteur $(X, Y)'$?
   (b) En déduire $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
   (a) Quelle est la densité de X ?
   (b) Rappeler la définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y.
   (c) Calculer la fonction caractéristique de X.
   (d) Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. Que vaut la fonction caractéristique de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$?
5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Sans utiliser la loi des grands nombres, montrer que $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers p (on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé Chebychev).

(b) A l'aide du théorème central limite, donner une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ et une fonction φ telles que la suite

$$a_n \frac{\bar{X}_n - p}{\varphi(p)}$$

converge en loi vers une limite à préciser.

(c) Déduire des questions précédentes une suite réelle $(b_n)_{n\geq 1}$ et une suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$b_n \frac{\bar{X}_n - p}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

6. Soit $(X, Y)'$ un couple aléatoire dont la loi jointe est donnée dans le tableau C.1

X \ Y	0	1
0	3/9	2/9
1	1/9	3/9

TABLE C.1 – Loi jointe de $(X, Y)'$.

On lit par exemple $\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = 2/9$.

(a) Calculer $\mathbf{E}[Y]$.

(b) Calculer $\mathbf{E}[Y|X = 0]$ et $\mathbf{E}[Y|X = 1]$.

(c) En déduire la loi de $\mathbf{E}[Y|X]$ (on pourra donner son support et sa fonction de masse).

(d) Retrouver le valeur de $\mathbf{E}[Y]$ à partir de la question précédente.

Exercice 29

Partie 1

Partie 1

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur gaussien d'espérance $\mu_X = (1, 0)'$ et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathbf{V}[X_1]$, $\mathbf{V}[X_2]$ et $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X_2
3. On pose $U = 3X_1 + 1$ et $V = X_1 - 2X_2$.
   (a) Le vecteur $(U, V)'$ est-il gaussien ?
   (b) Calculer l'espérance et la matrice de variance covariance de $(U, V)'$.
   (c) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la densité conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$ et en déduire la loi de $X_2|X_1 = x_1$.
5. En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_2|X_1]$ ainsi que la loi de $\mathbf{E}[X_2|X_1]$.

Partie 2

On se place maintenant dans le cas général où $Z = (X, Y)'$ est un vecteur gaussien d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^2$ et de matrice de variance-covariance Σ (on suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 finis et que $\mathbf{V}[X] > 0$). Le but de cette partie est de montrer que

$$\mathbf{E}[Y|X] = \mathbf{E}[Y] + \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{V}[X]}(X - \mathbf{E}[X]). \tag{C.1}$$

Pour alléger les notations, on désigne par $u(X)$ la variable aléatoire $\mathbf{E}[Y] + \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}[X]}(X - \mathbf{E}[X])$.

1. Montrer que le couple aléatoire $(X, Y - u(X))'$ est un vecteur gaussien.
2. Montrer que les variables aléatoires X et $Y - u(X)$ sont indépendantes.
3. On désigne par $L_2(X)$ l'ensemble des variables aléatoires qui s'expriment en fonction de X et de carré intégrable :

$$L_2(X) = \{f(X) \text{ avec } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ borélienne telle que } \mathbf{E}[f(X)^2] < +\infty\}.$$

   (a) Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[Y|X]$ pour des variables aléatoires de carré intégrable (on utilisera la définition vue en cours qui fait intervenir les projecteurs).

(b) Soit $T \in L_2(X)$. Les variables aléatoires T et $Y - u(X)$ sont-elles indépendantes ? Justifier.

(c) En déduire (C.1).

4. **Application :** Retrouver le résultat de la question 5 de la partie 1.

Exercice 30

Soit $\theta > 0$ un nombre réel fixé et $Z = (X, Y)'$ un vecteur aléatoire dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = C \exp(-\theta y) \mathbf{1}_{0<x<y}.$$

1. Montrer que $C = \theta^2$.
2. Déterminer les lois marginales de Z ainsi que $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}[X]$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la densité conditionnelle de $Y|X = x$.
4. En déduire $\mathbf{E}[Y|X]$ puis $\mathbf{E}[Y]$.
5. Calculer $\mathbf{P}(Y > 2X)$.
6. On pose $U = X$ et $V = Y - X$.
   (a) Déterminer la loi du couple $(U, V)'$.
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
7. A l'aide de la question précédente calculer $\mathbf{Cov}[X, Y]$. En déduire que $\mathbf{V}[Y] = \frac{2}{\theta^2}$.
8. Soit $(X_i, Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de couples aléatoires indépendants et de même loi de densité f. Pour $n \geq 1$, on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   (a) Montrer que, pour une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ à préciser, $a_n(\bar{Y}_n - \bar{X}_n - 1/\theta)$ converge en loi vers une loi à déterminer.
   (b) Montrer que, pour une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ à préciser, $\frac{b_n}{\bar{X}_n}(\bar{Y}_n - \bar{X}_n - 1/\theta)$ converge en loi vers une loi à déterminer.

Pour les exercices 28 à 30 suivants, bien vouloir tenir compte du rappel suivant :

Rappel : si elle existe, la densité d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ d'espérance m_X et de matrice de variance-covariance Σ_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{\det(\Sigma_X)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_X)'\Sigma_X^{-1}(x - m_X)\right).$$

Exercice 31

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle ainsi que de sa loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
   (a) Quelle est la densité de X ?
   (b) Rappeler la définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.
   (c) Calculer la fonction caractéristique de X.
   (d) Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. Que vaut la fonction caractéristique de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$?
3. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note $Y = 1 - X$.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Quelle est la loi du vecteur $(X, Y)'$?
   (c) En déduire $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

4. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré réduit. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Donner l'espérance et la matrice de variance-covariance de X.
   (b) Calculer $\mathbf{P}((X_1, X_2) = (0, 0))$.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (d) Quelle est la loi du vecteur $Y = AX + b$?

5. (a) Rappeler la définition de la loi du χ^2 à n degrés de liberté.
   (b) Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\chi^2(n)$ et Y une variable aléatoire réelle de loi $\chi^2(m)$. X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? Justifier votre réponse.

Exercice 32

Soit $\theta > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = 2\theta x \exp(-\theta x^2)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Montrer que f_θ est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \theta X^2$.
   (a) Calculer la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire la densité de Y ainsi que $\mathbf{E}[X^2]$.

Exercice 33

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de densité f définie par

$$f(z) = \exp(-z)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(z).$$

1. Quelle est la densité du vecteur aléatoire (X, Y) ?
2. Calculer $\mathbf{P}((X, Y) \in [0, 1]^2)$.
3. On pose $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$.
   (a) Déterminer la loi du vecteur (U, V).
   (b) En déduire les lois des variables aléatoires U et V.
   (c) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 34

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$ définie par :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - xy + y^2\right)\right).$$

1. Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien, puis déterminer son espérance et sa matrice de variance covariance.
2. Déterminer les lois des marginales X et Y.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $U = Y - aX$. Quelle est la loi du vecteur (U, X) ?
4. En déduire que U et X sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si $a = 1/2$.