Unscharfe Mengen

I. **Unscharfe Mengen**
II. **Unscharfe Arithmetik**
III. **Unscharfe Logik**
IV. **Unscharfe Relationen**
V. **Unscharfes Schließen**

I. 1. Unscharfe Mengen

- Ungewissheit → Unsicherheit / Unschärfe
- Scharfe Mengen: charakteristische Funktion / Indikatorfunktion
- Unscharfe Mengen: scharfe Menge ist Spezialfall von unscharfen Mengen
- (scharfe) / unscharfe Potenzmenge
- α - Schnitt (scharfe Menge), strenger α - Schnitt
- Trägermenge / Support, supp (A)
- Wiederholung: Halbordnung, Verband, Totalordnung
- L-Fuzzy Menge
- Typ k, Stufe k, intervallartig Stufe 2

II. 2. Unscharfe Zahlen und Größen

- Unscharfe Größen (unscharfe Menge über |R)
- Wiederholung: Konvexität, konkave Menge, konkave Funktion
- konvexe unscharfe Größe
- unscharfe Zahlen, unscharfe Intervalle
- Kern (1 – Schnitt)
- positive / negative unscharfe Zahlen
- konstante / scharfes Singleton
- LR- Funktion, LR Darstellung für unscharfe Zahl und unscharfes Intervall
- Dreieckszahl / Trapezintervall

II. 3. Erweiterungsprinzip

- Wiederholung: Bijektivität (surjektiv und injektiv)
- Erweiterung unäre Abbildung
  - bijektiver und nicht-bijektiver Fall
  - scharfer und unscharfer Fall
- Erweiterung mehrstelliges Abbildungen
  - scharfer und unscharfer Fall
- Allgemeines Erweiterungsprinzip

II. 4. Unscharfe Arithmetik

- Überladen der Operatoren
- Eigenschaften der erweiterten Operatoren
  - Assoziativität
  - Kommutativität
  - Distributivität im Allgemeinen nicht
- Monotonie binärer Operationen
- Abgeschlossenheit unscharfer Zahlen
- Arithmetische Grundoperationen und Eigenschaften
- Berechnung

        - Abtastung (Diskretisierung des Definitionsbereichs)
        - α - Schnitte, Wiederholung: Intervallarithmetik (Diskretisierung des Wertebereichs)
        - LR Arithmetik: LR Addition, LR Subtraktion, LR Multiplikation, LR Division

III. 5. Unscharfe Logik

- Aussagen & Prädikate für scharfe Mengen
- Unscharfe Prädikate, unscharfe Logik: Ziel möglichst viele Eigenschaften der scharfen Logik sinnvoll zu einer unscharfen Logik zu erweitern.

III. 6. Unscharfe Konjunktion

- scharfe Konjunktion – Schnitt zweier Mengen
- t-Normen (unscharfe Verallgemeinerung der Konjunktion)
    - Kommutativität (T1)
    - Assoziativität (T2)
    - Monotonie (T3)
    - Einselement (T4)

    Optional:
    - Stetigkeit (T5)
    - Idempotenz (T6)
- 4 wichtigsten t-Normen:
    - Minimumsnorm T_M
    - Produktnorm T_P
    - Lukasiewicz'sche t-Norm T_L
    - Drastisches Produkt T_P
- weitere Eigenschaften der t-Normen
    - Idempotenz
    - stärker / schwächere t-Normen
    - Ordnung der t-Normen: $T_D < T_L < T_P < T_M$
    - Charakterisierung von t-Normen durch
        - Archimedizität
        - Strikte Monotonie, Striktheit
        - Nilpotenz
        - Nullteiler
    - Übersicht der Eigenschaften der 4 wichtigsten t-Normen
    - t-Normen Familien (Hamacher / Yager t-Norm)
    - Generatoren für t-Normen
        - Ordnungsisomorphismus
        - P-Generator
        - L-Generator

III. 7. Unscharfe Negation

- scharfe Negation (Mengenkomplement)
- unscharfe Negation
    - Randbedingungen (N1)
    - monotones Fallen (N2)

    Optional:
    - Stetigkeit (N3)
    - Involution (N4) $N(N(x))=x$
- Fixpunkt Satz: höchstens einen Fixpunkt und genau einen im offenen Intervall (0,1)

- Wiederholung: Kontradiktionsprinzip, tertium non datur
- Natürliche Negation N_T zu einer t-Norm gemäß Kontradiktionsprinzip
- Spezielle Negationen zu den 4 wichtigsten t-Normen
  - Gödel Negation N_γ für T_M, T_P
  - Standardnegation N_{TL} für T_L
- Parametrische Negationen
  - Sugeno-Negation
  - Yager-Negation

III. 8. Unscharfe Disjunktion

- Scharfe Disjunktion (Vereinigung zweier Mengen)
  - Kommutativität
  - Assoziativität
  - Monoton steigend
  - Nullelement $x \vee 0 = x$
- s-Norm (unscharfe Disjunktion)
  - Kommutativität (S1)
  - Assoziativität (S2)
  - Monotonie (S3)
  - Nullelement (S4)

  Optional:
  - Stetigkeit (S5)
  - Idempotenz (S6)
- Wiederholung: deMorgan'sche Gesetze
- Dualität $N(S(x,y)) = T(N(x), N(y))$
$N(T(x,y)) = S(N(x), N(y))$
- deMorgan'sches Tripel (S und T dual bez. N)
- Archimedizität, Striktheit, Nilpotenz (über Dualität zu t-Normen)
- Natürliche Dualität
- Spzielle s-Normen (dual zu den wichtigsten t-Normen)
  - Maximumsnorm S_M (T_M, $N(x) = 1-x$)
  - Probabilistische Summe (T_P, $N(x) = 1-x$)
  - Lukasiewicz'sche s-Norm (T_L, nat. Negation $N_{TL}(x) = 1-x$)
  - Unverträglichkeitssätze 1+2 (Kontradiktionspr. und tertium non datur nicht gleichzeitig)

III. 9. Implikation

- Wiederholung: scharfe Implikation
- Axiome für unscharfe Implikation
  - Randbedingungen (I1)
  - Monotonie (I2)
  - Umkehrschluss (I3)
  - Prämissenvertauschung (I4)

  Optional:
  - Stetigkeit (I5)
  - Selbstimplikation (I6)

  (nicht kommutativ)

- S-Implikationen (nicht-oder) S(N(x), y)
  hängt nicht von t-Norm ab
  erfüllt I1, I2, I4.
  Falls N involution gilt auch I3.
  Sind S und N stetig gilt I5.
  - mit Maximumsnorm: I1 – I5
  - mit Probabilistischer Summe: I1 – I5
  - mit Lukasiewicz'scher s-Norm: I1 – I6
- unscharfe Q-Implikation (nicht-oder-und) S(N(x), T(x,y))
  (i.A. Keine Axiomatische Implikation)
  - mit Minimumsnorm
  - mit Produktnorm
  - mit Lukasiewicz'sche t-Norm
- R-Implikation (Residuierung) passende Implikation zu einer t-Norm
  I^R heißt Residuum von T
  hängt allein von der gegebenen t-Norm ab
  - Minimumsnorm
  - Gödel Implikation: I1, I2, I4, I6
  - Produktnorm: I1, I2, I4, I6
  - Lukasiewicz'sche t-Norm: I1 – I6
- weiter Implikationsoperatoren: Mandani Operator, Produkt-Operator

IV. 10. Unscharfe Relationen

- scharfe / unscharfe Relationen
- Projektion einer unscharfen Relation
- Zylinderbildung einer unscharfen Relation
- Verkettung von Projektion und Zylinderbildung
- Durchschnitt, Vereinigung, Komplement unscharfer Relationen durch t-Normen, s-Normen sowie unscharfe Negation.

IV. 11. Komposition

Neue Operation, die nicht auf Durchschnitt, Vereinigung oder Negation zurückzuführen ist

- Wiederholung: scharfe Komposition
  - Assoziativität
  - Distributivität von links bez. $\cup$
  - Distributivität von rechts bez. $\cup$
  - schwache Distributivität von links bez. $\cap$
  - schwache Distributivität von rechts bez. $\cap$
  - links-Monotonie bez. $\subseteq$
  - rechts-Monotonie bez. $\subseteq$
- Unscharfe Standardkomposition ($\wedge$ wird min., $\vee$ wird sup) sup-min-Komposition
  - Assoziativität
  - Distributivität von links bez. $\cup$
  - Distributivität von rechts bez. $\cup$
  - schwache Distributivität von links bez. $\cap$
  - schwache Distributivität von rechts bez. $\cap$
  - links-Monotonie bez. $\subseteq$
  - rechts-Monotonie bez. $\subseteq$

- sup-t Komposition (Erweiterung auf beliebige t-Normen)
- sup Operator entspricht im scharfen Fall Existenz Quantor, oder auch $\vee$ über alle möglichen Werte $\rightarrow$ d.h. Er wird durch s-Norm ersetzt
- vorab: Verallgemeinerung t- und s-Normen auf beliebig aber endliche Stelligkeit
  - Kommutativität (T1 / S1)
  - Assoziativität (T2 / S2)
  - Monotonie (T3 / S3)
  - Einselement (T4), Nullelement (S4)
- n-stellige t-Normen rekursiv als Verallgemeinerung einer zweistelligen t-Norm (T1 – T4)
- n-stellige s-Normen rekursiv als Verallgemeinerung einer zweistelligen t-Norm (S1 – S4)
- Verallgemeinerung auf unendliche Stelligkeit
- s-t-Komposition

IV. 12. Relationengleichungen

- grundsätzlich 3 Ausprägungen
- Lösbarkeit von Relationengleichungen: keine, eine oder mehrere Lösungen
  bei mehreren: Menge aller Lösungen gesucht, beschrieben durch obere/untere Schranken
- Maximale Lösung: eindeutig bestimmte größte Lösung
  (muss bei beliebigen Kompositionen nicht unbedingt existieren)
- Größte Lösung bei max-P-Kompositionen
- Minimale Lösungen und Algorithmus zu deren Bestimmung (nichtdeterministisch)
- Alle Lösungen (folgen aus: lösbar + größte + minimale)
- Gleichungssysteme: wieder über Menge maximalen und minimalen Lösungen. Nicht allgemein lösbar => $\cup$ wird zu max. Operator, $\cap$ wird zu min. Operator
- Maximale Lösungen: Kombination von minimalen Lösungen der Einzelgleichungen so dass wieder eine Lösung des Gleichungssystems entsteht.
  Zulässige Auswahlfunktion S sowie Algorithmus der genau diese Auswahlfunktionen findet, die zu einer minimalen Lösungen führen
- Alle Lösungen: Menge der Relationen, die zwischen max. und min. Lösungen liegen

V. 13. Approximatives Schließen

- Definitionen lingustische Modellierung
- Modus Ponens
- s-t-Inferenz, min-max-Inferenz
- Implizit angegebene Regeln – Gültigkeit des Schlusses
- Mehrstellige Prämissen
- Abarbeitung mehrerer Regeln
- Freiheitsgrade beim approximativen Schließen

V. 14. Possibilistisches Schließen

- negative Verwertung der Information
- Possibilitätsverteilung / Grad der Möglichkeit
- Prinzip der minimalen Spezifität
- Komposition
- Possibilistisches Schließen

V. 15. Evidenzgestütztes Schließen

- positive Verwertung der Information
- Evidenzverteilungen
- Prinzip der minimalen Komplettierung

- Komposition
- Evidenzgestütztes Schließen

V. 16. Unscharfe Regelung

- Regelkreis
- Unscharfe Regler
- Fuzzifizierung / Defuzifizierung
- Possibilistische Regler
- Mamdani-Regler