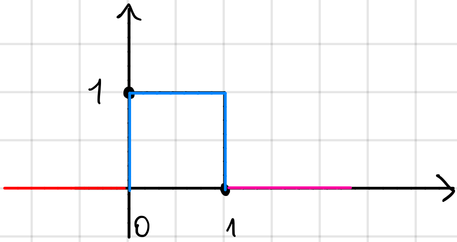
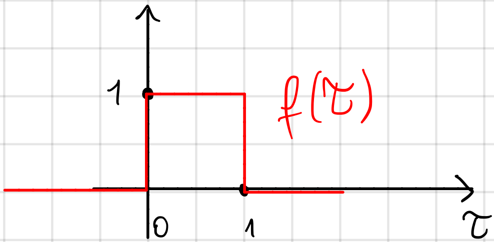
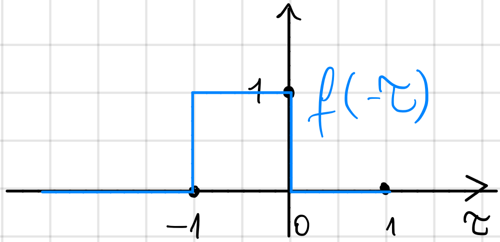
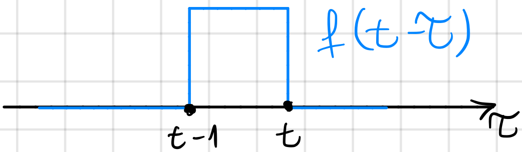
(A1) a)



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 1 \\ 1, & 0 \geq x \leq 1 \end{cases}$$





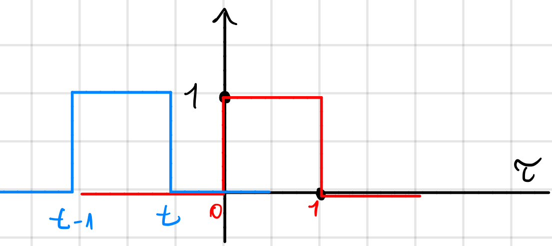


$$z(x) = f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau)\, d\overset{\tau}{\cancel{t}}$$

Fall 1:

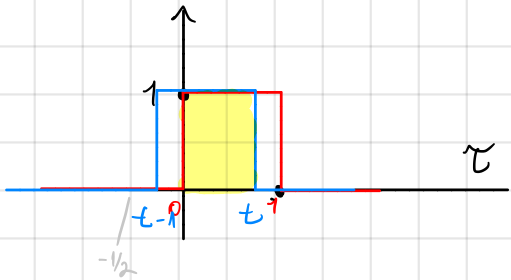
$t < 0$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$



$$\int_{t}^{0} f(t-\tau) f(\tau)\, dt = \int_{t}^{0} 0\, d\tau = 0$$

Fall 2:



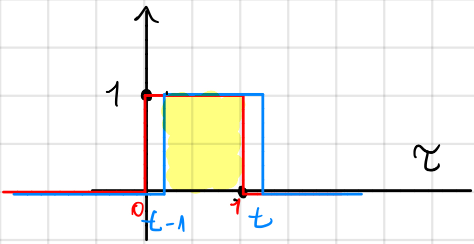
$t \geq 0 \;;\; t \leq 1$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$\int_0^t 1 \cdot 1\, dt = x \Big|_t^0 =$$

$$= t - 0 = t$$

Fall 3:



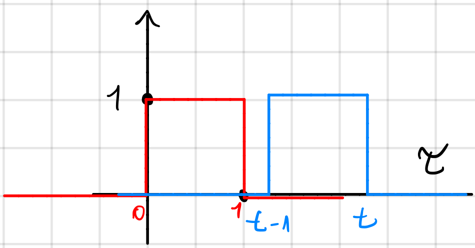
$t > 1 \;;\; \underbrace{t-1 \leq 1}_{t \leq 2}$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$\int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = x \Big|_1^{t-1} =$$

$$1 - (t-1) = 2 - t$$

Fall 4:

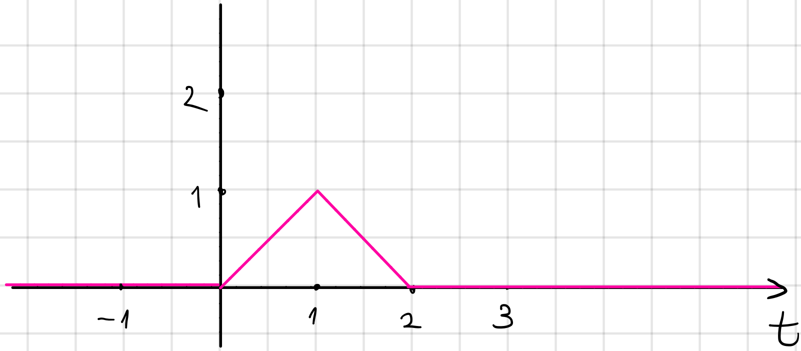


$t - 1 > 1 \Rightarrow t > 2$

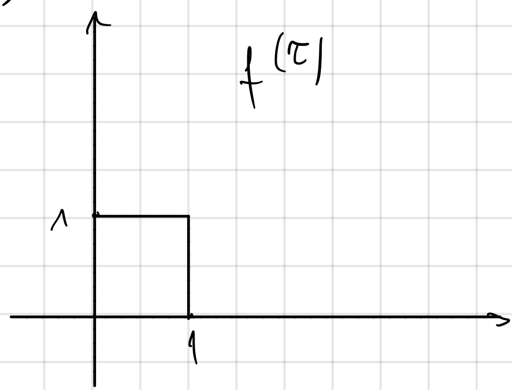
Analog zu Fall 1:

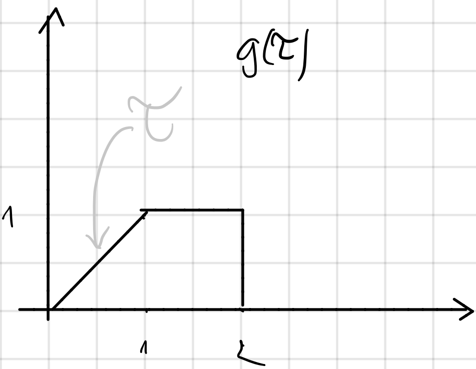
$z(t) = 0$

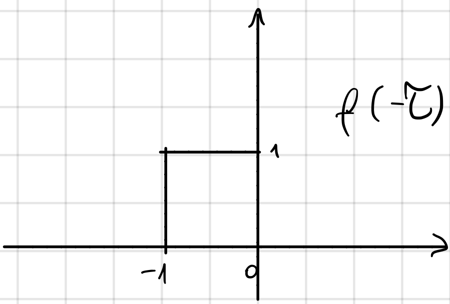
$$\Rightarrow z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

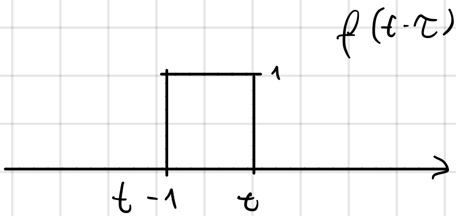


b)



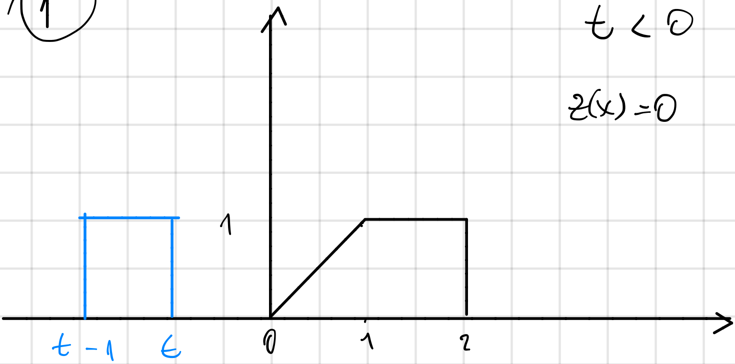






① $t < 0$

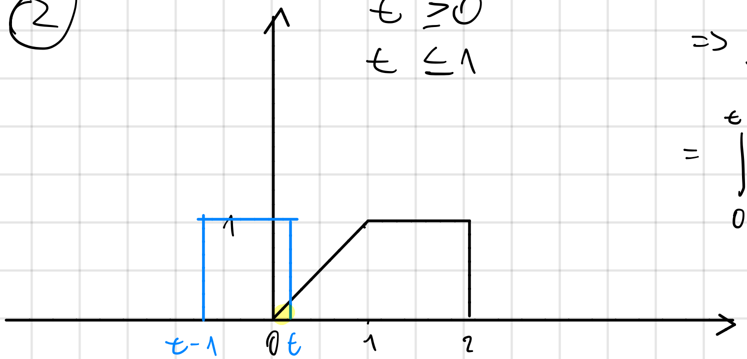
$z(x) = 0$



② $t \geq 0$, $t \leq 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t 1\cdot\tau\,d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$



③ $t > 1$, $t \leq 2$

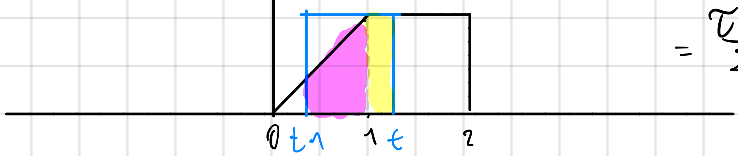
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t-1}^{1} 1\cdot\tau\,d\tau + \int_1^t 1\cdot 1\cdot d\tau =$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{1} + \tau\Big|_1^t =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} + t - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{t^2-2t+1}{2} + t =$$



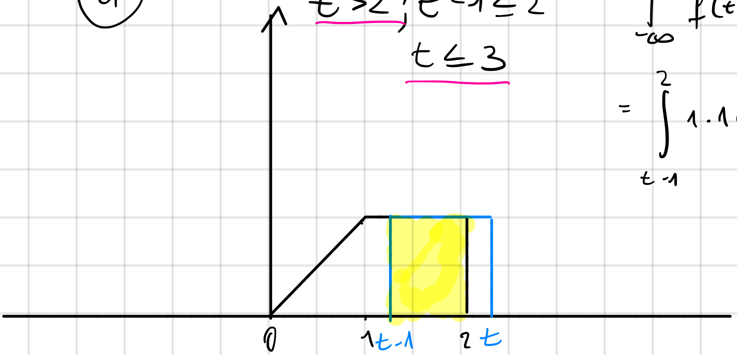
$$= \frac{-1 - t^2 + 2t - 1}{2} + t =$$

$$= \frac{-t^2 + 2t - 2}{2} + t = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$$

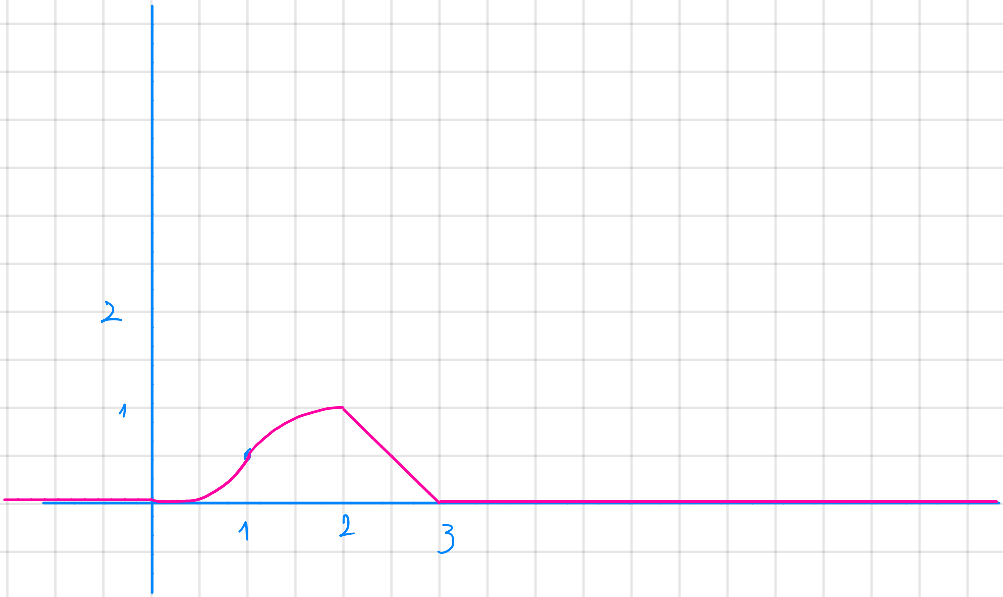
4

$t > 2 \; ; \; t-1 \leq 2$

$t \leq 3$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) = \int_{t-1}^{2} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{t-1}^{2} = 2-t+1 = 3-t$$



1.c

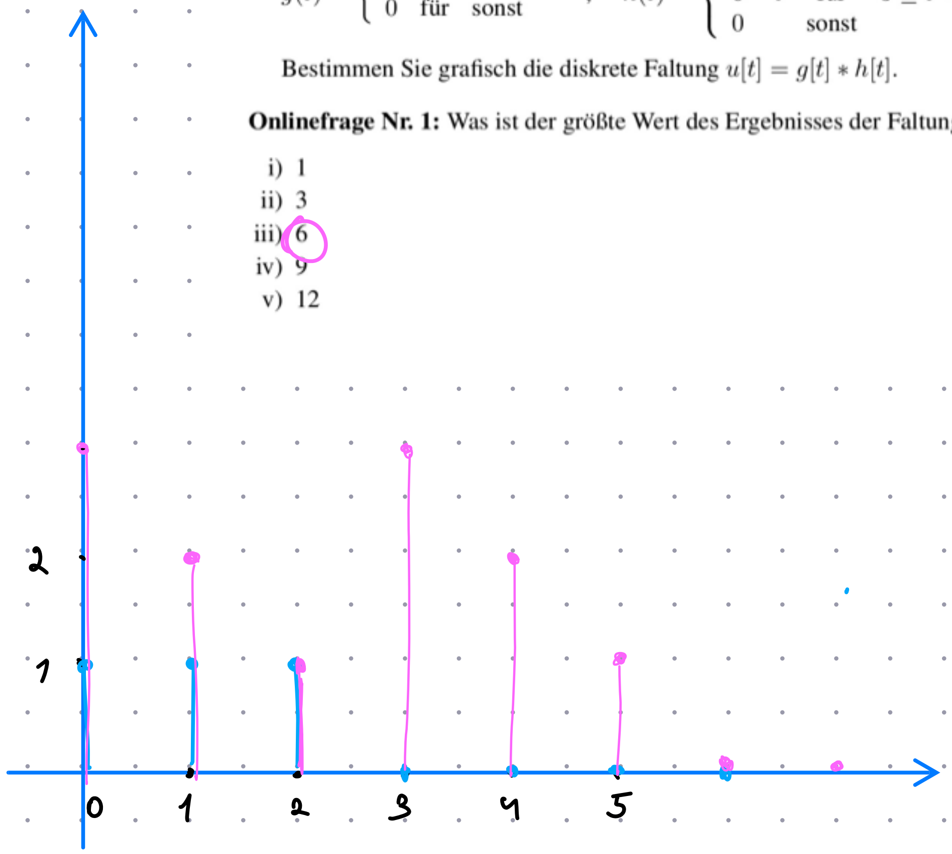
c) Gegeben seien die beiden Funktionen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 3-t & \text{für} \quad 0 \leq t < 3 \\ 6-t & \text{für} \quad 3 \leq t < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie grafisch die diskrete Faltung $u[t] = g[t] * h[t]$.

Onlinefrage Nr. 1: Was ist der größte Wert des Ergebnisses der Faltung $g[x] * h[x]$ aus Aufgabe c?

i) 1
ii) 3
iii) 6
iv) 9
v) 12



→ nä. Seite

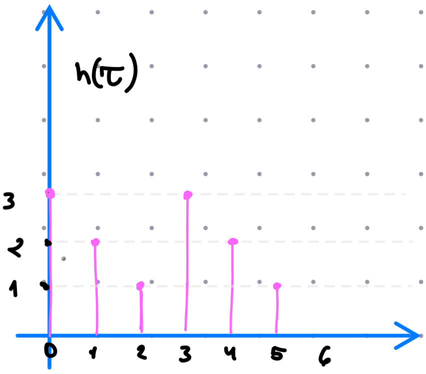
c) Gegeben seien die beiden Funktionen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$:

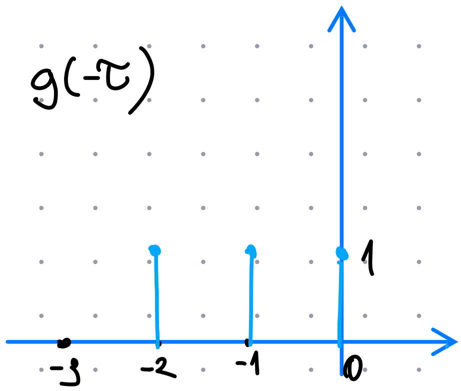
$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases}, \qquad h(t) = \begin{cases} 3 - t & \text{für} \quad 0 \leq t < 3 \\ 6 - t & \text{für} \quad 3 \leq t < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

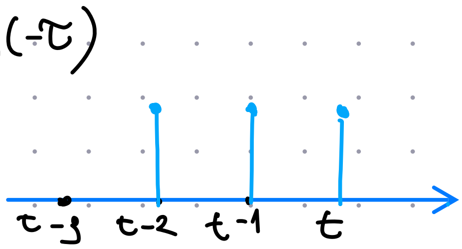
Bestimmen Sie grafisch die diskrete Faltung $u[t] = g[t] * h[t]$.

Onlinefrage Nr. 1: Was ist der größte Wert des Ergebnisses der Faltung $g[x] * h[x]$ aus Aufgabe c?

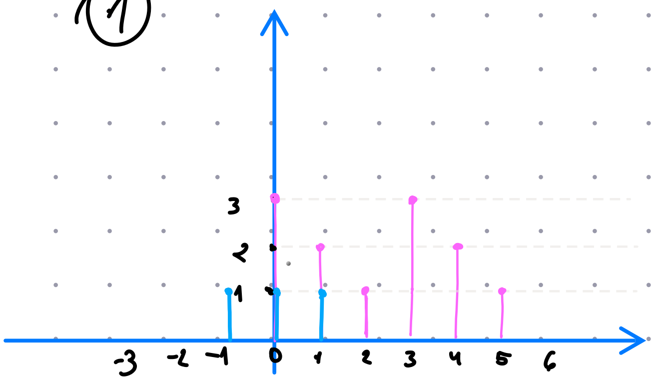
i) 1
ii) 3
iii) 6
iv) 9
v) 12



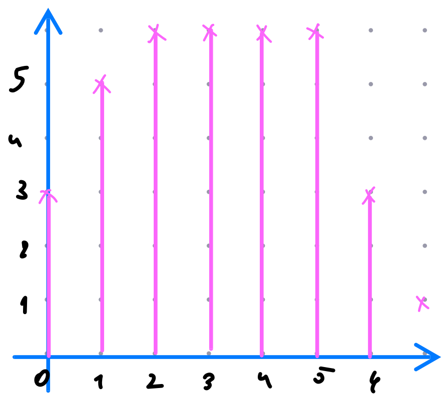




1



$z(0) = 3$
$z(1) = 5$
$z(2) = 6$
$z(3) = 6$
$z(4) = 6$
$z(5) = 6$
$z(6) = 3$
$z(7) = 1$



Aufgabe 2: *Digitalisierung von Signalen*

Gegeben sei das Signal $f(t) = \sin(2\pi 40t) + \cos(2\pi 20t)$. $\Rightarrow F(t) = F(\sin(2\pi 40t)) + F(\cos(2\pi 20t)) = \frac{i}{2}(\delta(h(x)+40) - \delta(h(x)-40)) + \frac{1}{2}(\delta(m(x)+20) - \delta(m(x)-20))$

h(x) m(x) f_0 f_0

0,025 0,16667

Hinweise:

- Zur Vereinfachung sei in der Zeichnung die Höhe von $\delta = 1$ param
- Zur Fouriertransformation existieren diverse Konventionen! Lassen Sie sich davon nicht verwirren und verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe die folgenden Informationen:

Funktion	Fouriertransformierte
$\sin(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{i}{2}(\delta(f_{(t)}+f_0) - \delta(f_{(t)}-f_0))$ $=\frac{i}{2}(\delta(f_{(t)}-(-f_0))$
$\cos(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f_{(t)}+f_0) + \delta(f_{(t)}-f_0))$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f_{(t)}-k/T)$ ← Impulszug

T=0,006

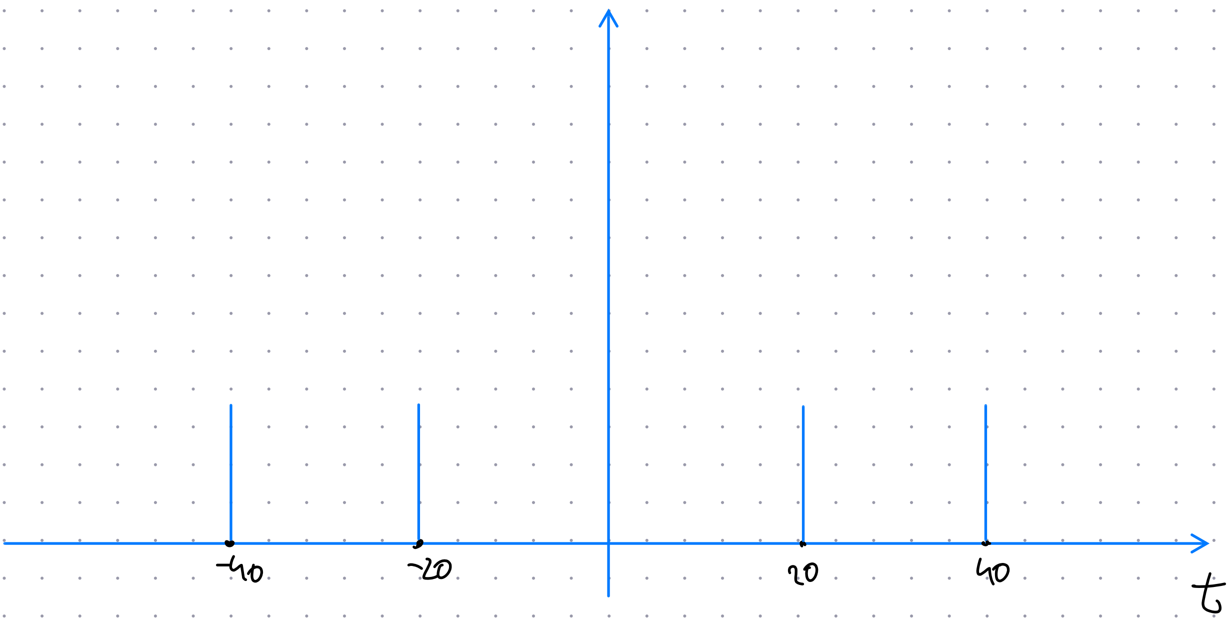
a) Das Signal wird mit 60 Hz abgetastet. Zeichnen Sie das komplexe Spektrum des abgetasteten Signals $f(t)$, t in Sekunden. Berechnen Sie hierfür zunächst die Fouriertransformation, und tasten Sie anschließend durch Multiplikation mit dem Impulszug ab.

$f(t) = \sin(2\pi 40t) + \cos(2\pi 20t)$

1) abgetastetes Signal mit 60Hz.
2) komplexes Spektrum zeichnen

→ 1. Fouriertransformation
2. abtasten

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$



$\Rightarrow F(t) = F(\sin(2\pi 40t)) + F(\cos(2\pi 20t)) = \frac{i}{2}(\delta(h(x)\overbrace{+40}^{-(-40)}) - \delta(h(x)-40)) + \frac{1}{2}(\delta(m(x)+20) - \delta(m(x)-20))$

$= \frac{i}{2} \cdot \delta_{-40} - \frac{i}{2}\delta_{40} + \frac{1}{2}\delta_{-20} - \frac{1}{2}\delta_{20}$

→ ? → multipliziert man die Fkt. mit dem Dirac-Kamm, kommt doch ∅ raus?

Onlinefrage Nr. 2: Tritt das in Teilaufgabe b) beschriebene Phänomen in Teilaufgabe c) immernoch auf? Wenn ja, wie äußert es sich?

i) tritt auf, führt zu sich auslöschenden Frequenzen
ii) tritt auf, führt zu neu auftretenden Frequenzen
iii) tritt auf, führt zu sich anderweitig überlagernden Frequenzen
? iv) tritt nicht auf

Abtasttheorem?

Aufgabe 3: *Filtern*

a) Gegeben sei die Funktion $v(t) = \pi \cdot \delta(t) - \frac{\sin(3\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{t}$ mit der Zeitvariablen t und $\omega_0 > 0$. Die Multiplikation ihrer Fouriertransformierten $V(\omega)$ mit der Fouriertransformierten eines Signals stellt einen Filter dar. Um welchen Filter handelt es sich dabei? Berechnen Sie für diese Aufgabe $V(\omega)$ und vereinfachen Sie in geeigneter Weise.

Hinweis:
Die Funktion $f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ entspricht der Funktion $f(t) = \mathrm{sinc}(t)$. Benutzen Sie als Fouriertransformierte von $g(t) = \mathrm{sinc}(at)$ folgende Funktion: $G(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi a})$ mit $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

param

$$v(t) = \pi \cdot \delta(t) - \frac{\sin(3\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{t} = \pi\delta(t) - \frac{\sin(3\omega_0 t)}{t} - \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$$

$$\underbrace{\pi\delta(t)}_{z(t)} - \underbrace{3 \cdot \omega_0 \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3\omega_0 t}}_{m(t)} - \underbrace{\omega_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}}_{h(t)}$$

$$F(m(t)) = 3\omega_0 F\left(\frac{\sin(3\omega_0 t)}{3\omega_0 t}\right) = 3\omega_0 F\left(\mathrm{sinc}(3\omega_0 t)\right) =$$

$$= 3\omega_0 \cdot \frac{1}{|3\omega_0|} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi 3\omega_0}\right)$$

$$F(h(t)) = \omega_0 F\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}\right) = \omega_0 \frac{1}{|\omega_0|} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi\omega_0}\right)$$

$$F(z(t)) = \pi \cdot F(\delta(t)) = \pi \cdot 1 \quad // \ t_0 = 0$$

$$F(v) = -\frac{\cancel{3\omega_0}}{\underbrace{|\cancel{3\omega_0}|}_{>0}} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi 3\omega_0}\right) - \frac{\cancel{\omega_0}}{\underbrace{|\cancel{\omega_0}|}_{>0}} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi\omega_0}\right) =$$

$$= -\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi 3\omega_0}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi\omega_0}\right) =$$

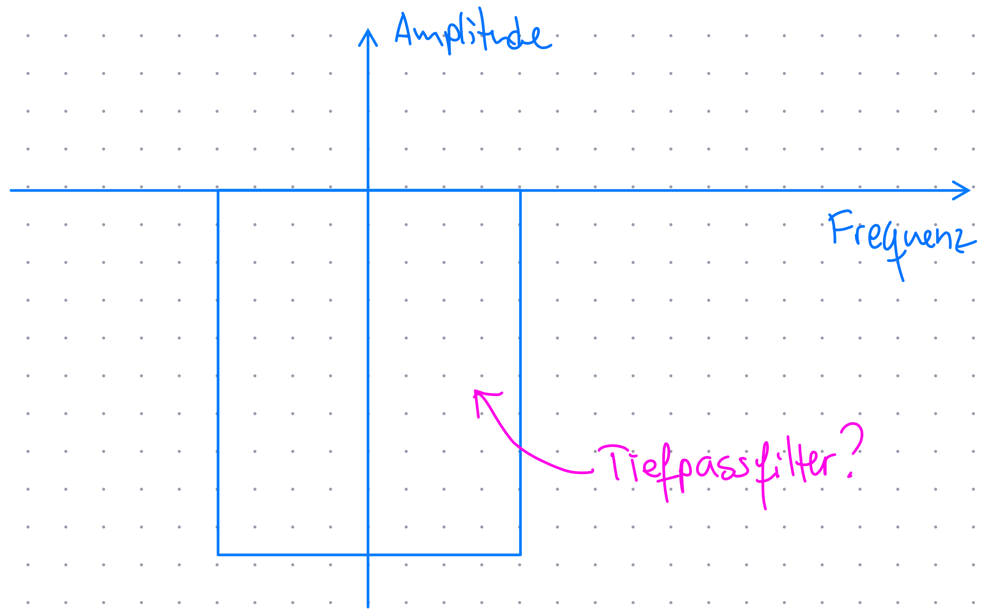
$$= -\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi 3\omega_0} - \frac{\omega}{2\pi\omega_0}\right) =$$

$$= -\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi\omega_0}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right) =$$

$$= -\mathrm{rect}\left(-\frac{2\omega}{3 \cdot 2\pi\omega_0}\right) =$$

$$= -\mathrm{rect}\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\omega}{\underset{3}{\cancel{6}}\pi\omega_0}\right) =$$

$$F(v) = -\mathrm{rect}\left(-\frac{\omega}{3\pi\underbrace{\omega_0}_{>0}}\right)$$



Aufgabe 4: *Diskrete Fouriertransformation, Sampling*

Die Frequenzauflösung der DFT hängt von der zeitlichen Auflösung ab. Je feiner die zeitliche Auflösung ist, desto gröber ist die Frequenzauflösung und umgekehrt. Berechnet man beispielsweise die DFT über einem gesamten Musikstück, so erhält man detaillierte Informationen über die auftretenden Frequenzen, dies jedoch nur kumuliert über das gesamte Musikstück hinweg. Berechnet man die DFT auf Basis von beispielsweise 100 Werten, so erhält man als Ergebnis ebenfalls 100 Werte. Da das Resultat der DFT symmetrisch ist, trägt nur die Hälfte der Werte Informationen. Somit verteilt sich die Frequenzinformation auf 50 Werte. Betrachten wir zur Verdeutlichung ein Beispiel mit unterschiedlichen Samplingraten, berechnen dabei die DFT aber stets auf Basis von 100 Samples:

Samples	Samplingrate	~~Grenzfrequenz~~	Frequenzauflösung	Zeitauflösung
100	1000 Hz	~~500 Hz~~	10 Hz	0.1 s
	100 Hz	~~50 Hz~~	1 Hz ↔	1 s
	10 Hz	~~5 Hz~~	0.1 Hz	10 s
2200	22kHz		10Hz	100 ms

Es wird deutlich, dass die Frequenzauflösung in einem reziproken Verhältnis zur zeitlichen Auflösung steht.

a) Berechnen Sie die Anzahl N der Samples, die benötigt werden, damit eine DFT eine Frequenzauflösung von $10Hz$ erreichen kann, wenn ein Signal mit $22kHz$ abgetastet wurde.

Onlinefrage Nr. 4: Welche zeitliche Auflösung wird benötigt, damit eine DFT eine Frequenzauflösung von $10Hz$ erreichen kann, wenn ein Signal mit $22kHz$ abgetastet wurde? → Samples ÷ S/Rate

i) $0.22ms$
ii) $2.2ms$
iii) $100ms$
iv) $1s$

x 10

100 Samples

→ 1s / f

1000x → 1/10 s

100 Samples

100x

↳ 1 Hz

2200 Samples

→ 1s

22 000x → 22000/10

= 2200 Samples