

**Université Joseph FOURIER
UFR-IMA**

FIABILITÉ DES SYSTÈMES

2^{ème} partie : analyse statistique des données de fiabilité

**Olivier GAUDOIN
Marcel CHEVALIER**

Année scolaire 2005-2006

Table des matières

I	Introduction	4
II	Méthodes statistiques usuelles en fiabilité.....	5
II.1	Estimation des grandeurs de la fiabilité.....	6
II.1.1	Principes généraux de l'estimation	6
II.1.2	Estimation non paramétrique	6
II.1.2.1	Propriétés des statistiques d'ordre	6
II.1.2.2	Loi de probabilité empirique	8
II.1.3	Estimation paramétrique	11
II.1.3.1	Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	12
II.1.3.2	Estimation par la méthode des moments	14
II.1.3.3	Estimation bayésienne	15
II.1.4	Intervalle de confiance	18
II.2	Test d'hypothèses	19
II.2.1	Notions de base en théorie des tests d'hypothèses	19
II.2.2	Test sur le paramètre de la loi exponentielle	20
II.2.2.1	Test unilatéral	20
II.2.2.2	Test bilatéral	21
II.2.3	Tests d'adéquation	21
II.2.3.1	Tests d'adéquation graphique : les graphes de probabilité	22
II.2.3.2	Tests d'adéquation statistiques	23
II.3	Plans d'essais – Données censurées	25
II.3.1	Généralités	25
II.3.2	Plans d'essais sans remplacement	25
II.3.2.1	Pas de censure	25
II.3.2.2	Plan censuré de type I	26
II.3.2.3	Plan censuré de type II	27
II.3.2.4	Plans multicensurés	28
II.3.3	Plans d'essais avec remplacement	28
II.3.3.1	Plan censuré de type I	29
II.3.3.2	Plan censuré de type II	29
II.3.3.3	Plan multicensuré de type I	29
II.3.3.4	Plan multicensuré de type II	29
III	Analyse statistique des échantillons de durée de vie	30
III.1	La loi exponentielle.....	30
III.1.1	Propriétés supplémentaires de la loi exponentielle	30
III.1.2	Plan censuré de type I sans remplacement	35
III.1.3	Plan censuré de type II sans remplacement	37
III.1.4	Plan multi-censuré sans remplacement	39
III.1.5	Plan censuré de type I avec remplacement	40
III.1.6	Plan d'essai censuré de type II avec remplacement	42
III.1.7	Plan d'essai multi-censuré de type I avec remplacement	42
III.1.8	Plan d'essai multi-censuré de type II avec remplacement	43
III.1.9	Loi exponentielle décalée	43
III.1.10	Conclusion	44
III.2	La loi de Weibull	44
III.2.1	Propriétés de la loi de Weibull	44
III.2.2	Tests d'adéquation	45
III.2.3	Estimation des paramètres	46
IV	Analyse statistique des modèles de fiabilité des systèmes réparables	49

IV.1	Croissance et décroissance de fiabilité.....	49
IV.2	Estimation des paramètres et de la fiabilité.....	51
IV.2.1	Le modèle de Moranda, ou modèle proportionnel déterministe.....	51
IV.2.2	Le modèle NHPP de puissance, ou modèle de Crow.....	51

I Introduction

Dans la première partie du cours, de nombreuses méthodes ont été développées pour calculer la fiabilité, la disponibilité, le MTTF ou toute autre quantité intéressante pour un système. Ces méthodes reposent toutes sur des hypothèses probabilistes élémentaires. Par exemple, on a souvent supposé que tous les composants d'un système avaient des durées de vie indépendantes et de même loi exponentielle. Les calculs probabilistes ont alors permis de déterminer l'expression du taux de défaillance du système en fonction du paramètre λ de cette loi.

Mais pour pouvoir appliquer ces résultats théoriques au calcul du taux de défaillance d'un système réel, il faut d'une part s'assurer que les durées de vie des composants sont bien indépendantes et de même loi exponentielle, et d'autre part pouvoir calculer d'une manière ou d'une autre la valeur du paramètre λ .

Cela ne peut se faire qu'au moyen d'une analyse statistique de données expérimentales, issues du retour d'expérience, de résultats d'exploitation des systèmes en vie opérationnelle, ou d'essais de fiabilité en période de test des systèmes.

Les observations seront la plupart du temps présentées sous la forme d'une suite de n durées x_1, \dots, x_n , qu'on supposera être les réalisations de variables aléatoires X_1, \dots, X_n . Si les x_i représentent les durées de vie de n systèmes similaires et indépendants placés dans des conditions de fonctionnement identiques, il est raisonnable de supposer que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi (i.i.d., on dit alors que X_1, \dots, X_n est un échantillon). Si les x_i représentent les durées successives de bon fonctionnement d'un système réparable qui se dégrade au cours du temps, il faudra choisir un autre modèle pour les X_i , comme par exemple un processus de Poisson non homogène.

Exemple 1 : les défaillances des systèmes d'air conditionné dans les avions Boeing ; comme un appareil défectueux est remplacé par un neuf, on s'attend à ce que les temps inter défaillances dans un Boeing donné soient des variables aléatoires i.i.d. Il faut le vérifier, trouver une loi de probabilité adaptée, et estimer ses paramètres. Il est intéressant également de déterminer si cette loi de probabilité est la même pour les 13 appareils. On doit estimer la fiabilité, le taux de défaillance et le MTTF de ce système.

Exemple 2 : les défaillances d'un logiciel ; à vue d'œil, on constate que les temps inter défaillances sont de plus en plus grands, ce qui est certainement dû à la qualité des corrections apportées. Il faut tester s'il y a eu ou non croissance de fiabilité, choisir un modèle adapté (les X_i ne sont sûrement pas i.i.d.), estimer la fiabilité et le MTTF du logiciel en fin de période.

Plus généralement, passons rapidement en revue les principaux problèmes statistiques que nous allons étudier. Ce qui intéresse en premier lieu le concepteur et l'utilisateur d'un système, c'est l'estimation de sa fiabilité, de son taux de défaillance et de son MTTF. On peut effectuer ces estimations de manière non paramétrique, c'est-à-dire sans faire aucune hypothèse sur la loi de probabilité des X_i . On utilise alors la loi de probabilité empirique des observations.

La plupart du temps, on fait des hypothèses paramétriques. Par exemple, on suppose que les X_i constituent un échantillon d'une loi exponentielle ou d'une loi de Weibull. Le problème majeur est alors l'estimation des paramètres de ces lois. On peut en donner une estimation ponctuelle (une seule valeur) ou ensembliste (un intervalle de confiance). La méthode d'estimation la plus usuelle est la méthode du maximum de vraisemblance, mais on peut également utiliser la méthode des moments ou une estimation bayésienne.

Mais pour pouvoir procéder à ces estimations, il faut s'assurer que les hypothèses probabilistes préalables sont bien vérifiées : par exemple, est-il raisonnable de penser que les X_i sont i.i.d. de loi exponentielle ? C'est un problème de test d'adéquation (ou d'ajustement).

Si un test d'adéquation nous amène à adopter un modèle probabiliste donné, on peut s'intéresser à des problèmes précis sur ce modèle. Par exemple, on peut se préoccuper de savoir si le taux de défaillance d'un système est bien inférieur à une valeur critique donnée λ_0 .

Il faudra alors faire un test d'hypothèse de $H_0 : \forall t \geq 0, \lambda(t) \leq \lambda_0$ contre $H_1 : \exists t > 0, \lambda(t) > \lambda_0$ (ou encore $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda > \lambda_0$ » si on suppose le taux de défaillance constant).

Si on s'intéresse à un système dégradable ou améliorable, il est naturel de chercher à savoir si les réparations ont amélioré ou dégradé le système : il faut alors faire un test de tendance.

Enfin, la qualité croissante des systèmes et les contraintes économiques fortes font que, bien souvent, on ne dispose que d'observations partielles. Par exemple, on peut faire fonctionner 10 systèmes identiques et indépendants pendant un mois dans les mêmes conditions, et n'observer que 4 défaillances dans cette période. Si on n'a pas la possibilité de poursuivre plus longtemps l'expérience, il va falloir tirer le maximum d'information de ces données dites censurées. Tous les problèmes statistiques précédemment évoqués peuvent se traiter avec des données censurées. Quand il n'y a pas de censure, on dit que les données sont complètes.

On peut également avoir recours à des tests accélérés, pour lesquels certaines conditions environnementales (température par exemple) seront modifiées pour accélérer la survenance de défaillances. Il s'agira ensuite, à partir des observations de défaillances en conditions accélérées, d'en déduire le comportement probable de l'appareil dans des conditions standard d'utilisation.

Ce cours se présente en deux parties. Dans la première, on présentera des généralités sur les problèmes statistiques que nous venons d'évoquer, en traitant essentiellement le cas où les observations sont complètes et i.i.d. La seconde partie est consacrée à l'analyse statistique des principaux modèles d'échantillons de durées de vie, et traite principalement le cas de la loi exponentielle.

Une éventuelle troisième partie sera consacrée à l'analyse statistique des principaux modèles de fiabilité des systèmes réparables dégradables ou améliorables.

Résumé

Principaux problèmes statistiques :

- 1) Estimation de la fiabilité, du taux de défaillance et du MTTF
 - Non paramétrique (loi de probabilité empirique) ;
 - Paramétrique :
 - Estimation ponctuelle, ou par intervalle de confiance ;
 - Maximum de vraisemblance, moments, bayésien.
- 2) Tests d'hypothèses
 - Tests paramétriques ;
 - Tests d'adéquation ;
 - Tests de tendance.
- 3) Données censurées.

T.P. 1 : nombre de défaillances par année d'un lot d'appareils électromécaniques (données groupées)

- estimer le nombre de défaillances à attendre en 1998 ;
- estimer le MTTF d'un appareil ;
- quelle est la loi de la durée de vie d'un appareil ? Le taux de défaillance est-il constant ? Y a-t-il une usure ?

T.P 2 : analyse des données des tableaux 1 et 2.

- analyse statistique détaillée ;
- rédaction des conclusions de l'analyse pour des non statisticiens : département Assurance Qualité de Boeing ou managers par exemple.

II Méthodes statistiques usuelles en fiabilité

Dans cette partie, nous passerons rapidement en revue les méthodes statistiques usuelles susceptibles d'être utilisées en fiabilité. On considérera, sauf mention contraire, que les observations sont une série de durées x_1, \dots, x_n considérées comme des réalisations de variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi continue, à valeur dans \mathbf{R}^+ , de fonction de répartition F et de densité f .

Soit X une variable aléatoire suivant cette loi. On rappelle les définitions suivantes :

- Fiabilité : $R(x) = P(X > x)$;
- Taux de défaillance : $\lambda(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} P(x < X \leq x + dx \mid X > x) = - \frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$;

- Taux de défaillance cumulé : $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du = -\ln R(x)$;
- MTTF = $E(X) = \int_0^{+\infty} R(x) dx$.

On va chercher dans un premier temps à estimer ces grandeurs le mieux possible.

II.1 Estimation des grandeurs de la fiabilité

II.1.1 Principes généraux de l'estimation

Estimer une grandeur inconnue θ , c'est en proposer une approximation que l'on espère la plus proche possible de la vraie valeur de cette grandeur. Cette approximation est une fonction des observations x_1, \dots, x_n , c'est-à-dire une statistique $s_n = s(x_1, \dots, x_n)$. La variable aléatoire correspondante $S_n = s(X_1, \dots, X_n)$ est appelée un estimateur de θ et sa réalisation s_n une estimation de θ . Pour être performant, un estimateur doit être :

- sans biais : $E(S_n) = \theta$;
- convergent : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$.

On parle aussi de convergence en moyenne quadratique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(S_n - \theta)^2] = 0$, qui devient, si S_n est sans biais, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(S_n) = 0$.

Un estimateur optimal est un estimateur sans biais et de variance minimale (ESBVM). On verra plus tard que pour trouver un tel estimateur, on peut :

- projeter un estimateur sans biais quelconque sur une statistique exhaustive et complète ;
- montrer que la variance d'un estimateur sans biais est égale à la borne de Cramer-Rao (BCR) : pour

$$\dim(\theta) = 1, \text{BCR} = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} E(S_n) \right]^2}{\mathfrak{I}_n(\theta)}, \text{ où } \mathfrak{I}_n(\theta) = \text{Var} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; X_1, \dots, X_n) \right] \text{ est la quantité d'information}$$

de Fisher apportée sur θ par l'échantillon x_1, \dots, x_n . $L(\theta; X_1, \dots, X_n)$ est la fonction de vraisemblance de

l'échantillon, et si les X_i sont i.i.d. de densité f , alors $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$. Ceci n'a de sens que si θ

est un paramètre de la loi des X_i ; cela n'en a pas si, par exemple, on cherche à estimer la fonction $R(x)$ dans son ensemble.

II.1.2 Estimation non paramétrique

On fait de la statistique non paramétrique lorsqu'on cherche à estimer les grandeurs de la fiabilité, sans connaître la loi de probabilité des observations. On est alors amenés à s'intéresser à l'ordre des observations.

II.1.2.1 Propriétés des statistiques d'ordre

Si l'échantillon initial est X_1, \dots, X_n , l'échantillon ordonné dans l'ordre croissant est noté $X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$ ou $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Le vecteur (X_1^*, \dots, X_n^*) est appelé statistique d'ordre de l'échantillon.

Les variables aléatoires X_i^* sont aussi parfois appelées statistiques d'ordre. En particulier, on a $X_1^* = \min_{i=1}^n X_i$

et $X_n^* = \max_{i=1}^n X_i$.

On note R_i le rang de X_i dans l'échantillon ordonné. La statistique de rang (R_1, \dots, R_n) est indépendante de la statistique d'ordre.

Propriété : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, la densité de X_k^* est :

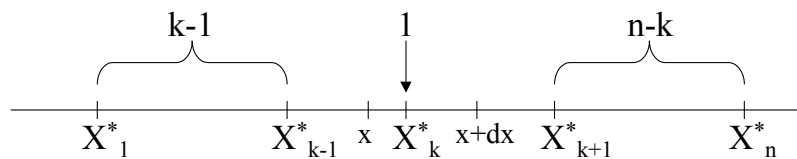
$$\forall x \in \mathbf{R}, f_{X_k^*}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k}$$

Démonstration : $f_{X_k^*}(x) = F'_{X_k^*}(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} [F_{X_k^*}(x+dx) - F_{X_k^*}(x)] = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} P(x < X_k^* \leq x+dx)$

Comme la loi est continue, on considère que pour $dx \rightarrow 0$, un seul X_i peut être compris entre x et $x+dx$.

Donc $f_{X_k^*}(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} P[(k-1) \text{ des } X_i \text{ sont } \leq x, 1 \text{ est compris entre } x \text{ et } x+dx, (n-k) \text{ sont } > x+dx]$, soit

$$\begin{aligned} f_{X_k^*}(x) &= \lim_{dx \rightarrow 0} C_n^{k-1} [F(x)]^{k-1} C_{n-k+1}^1 P(x < X \leq x+dx) [1-F(x+dx)]^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} (n-k+1) [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} \lim_{dx \rightarrow 0} P(x < X \leq x+dx) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} f(x), \text{ CQFD.} \end{aligned}$$



Cas particuliers : $f_{X_1^*}(x) = n [1-F(x)]^{n-1} f(x)$;

$$f_{X_n^*}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x).$$

Intérêt : si on dispose d'un système constitué de n composants identiques, alors :

- X_1^* est la durée de vie du système série ;
- X_n^* est la durée de vie du système parallèle ;
- X_{n-k+1}^* est la durée de vie du système en redondance active k/n .

Théorème de Gnedenko – Loi des extrêmes

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon d'une loi continue. Alors les seules lois limite possibles pour les suites

$$\frac{X_1^* - b_n}{a_n} \text{ sont :}$$

- la 1^{ère} loi de Gumbel, ou loi des valeurs extrêmes : $F_1(x) = 1 - e^{-e^x}$, $x \in \mathbf{R}$;
- la loi de Weibull : $F_2(x) = 1 - e^{-x^\beta}$, $x \geq 0, \beta > 0$;
- $F_3(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\beta}}$, $x \leq 0, \beta > 0$.

Les seules lois limites pour les suites $\frac{X_n^* - b_n}{a_n}$ sont :

- la 2^{ème} loi de Gumbel : $F_4(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbf{R}$;
- $F_5(x) = e^{-x^{-\beta}}$, $x \geq 0, \beta > 0$;
- $F_6(x) = e^{-(-x)^\beta}$, $x \leq 0, \beta > 0$.

En pratique, cela signifie que quand n est suffisamment grand, on peut approcher $F_{X_i^*}(x)$ par $F_i\left(\frac{x-b}{a}\right)$,

$i = 1, 2$ ou 3 . Dans un contexte de fiabilité, où le seul support acceptable de la loi est \mathbf{R}^+ , on constate que seule la loi de Weibull convient. Ce résultat est à l'origine de l'utilisation intensive de la loi de Weibull en fiabilité : lorsqu'on a un système très complexe, et que l'on considère que l'instant de panne du système est le minimum des instants de défaillance d'un très grand nombre de composants, le théorème de Gnedenko justifie l'utilisation de la loi de Weibull pour modéliser la durée de vie du système tout entier.

Dans le même ordre d'idée, pour une variable aléatoire à valeurs positives, la loi limite de X_k^* est la loi de densité $g(x) = \frac{\beta}{(k-1)!} e^{-x^\beta} x^{k\beta-1}$, $x > 0$, qui est à la loi gamma ce que la loi de Weibull est à la loi exponentielle.

Propriété : la densité de la statistique d'ordre est $f_{X_1^*, \dots, X_n^*}(x_1^*, \dots, x_n^*) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i^*) 1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}}$.

Démonstration : $f_{X_1^*, \dots, X_n^*}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \lim_{\substack{dx_1^* \rightarrow 0 \\ \dots \\ dx_n^* \rightarrow 0}} \frac{1}{dx_1^* \dots dx_n^*} P(x_1^* < X_1^* \leq x_1^* + dx_1^*, \dots, x_n^* < X_n^* \leq x_n^* + dx_n^*) =$

$\lim_{\substack{dx_1^* \rightarrow 0 \\ \dots \\ dx_n^* \rightarrow 0}} \frac{1}{dx_1^* \dots dx_n^*} P(\text{un des } X_i \text{ est entre } x_1^* \text{ et } x_1^* + dx_1^*, \dots, \text{un des } X_i \text{ est entre } x_n^* \text{ et } x_n^* + dx_n^*) 1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}} =$

$\lim_{\substack{dx_1^* \rightarrow 0 \\ \dots \\ dx_n^* \rightarrow 0}} \frac{1}{dx_1^* \dots dx_n^*} n! P(x_1^* < X_1 \leq x_1^* + dx_1^*) \dots P(x_n^* < X_n \leq x_n^* + dx_n^*) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i^*) 1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}} \text{ CQFD.}$

Nous verrons d'autres propriétés des statistiques d'ordre lorsque nous aborderons les données censurées.

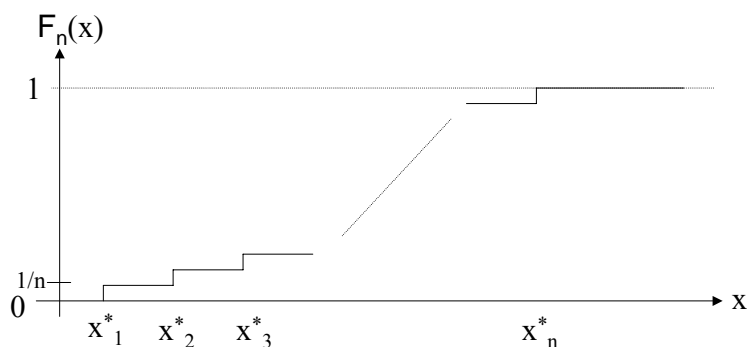
II.1.2.2 Loi de probabilité empirique

Définition : la loi de probabilité empirique P_n associée à l'échantillon x_1, \dots, x_n est la loi uniforme (discrète) sur $\{x_1, \dots, x_n\}$: si X_e est de loi P_n , alors X_e est à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P(X_e = x_i) = 1/n$.

Fonction de répartition empirique : $\forall x \in \mathbf{R}, F_n(x) = P(X_e \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X_e = x_i) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}}$.

D'où $F_n(x) = \frac{1}{n} (\text{nombre de } x_i \leq x) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} 1_{[x_i^*, x_{i+1}^*]}(x)$.

C'est une fonction en escalier, qui fait des « sauts » de hauteur $\frac{1}{n}$ en chaque point de l'échantillon :



Moyenne empirique : $\bar{x}_n = E(X_e) = \sum_{i=1}^n x_i P(X_e = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Variance empirique : $s_n^2 = \text{Var}(X_e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$.

Ces deux quantités sont des réalisations de variables aléatoires. On a :

$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}}$; $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$; $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbf{R}, n \mathbf{F}_n(x) \sim \mathbf{B}(n, F(x))$. Donc $E(\mathbf{F}_n(x)) = F(x)$ et $\text{Var}(\mathbf{F}_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$;
- $\forall x \in \mathbf{R}, \mathbf{F}_n(x) \xrightarrow[p.s.]{} F(x)$;
- $\text{Sup}\{ |\mathbf{F}_n(x) - F(x)| ; x \in \mathbf{R} \} \xrightarrow[p.s.]{} 0$.

Ces propriétés permettent d'affirmer que la fonction de répartition empirique est un estimateur sans biais et également convergent uniformément et presque sûrement de la fonction de répartition de l'échantillon. On en déduit immédiatement une estimation non paramétrique performante de la fiabilité :

Définition : la fiabilité empirique de l'échantillon x_1, \dots, x_n est la fonction :

$\mathbf{R}_n : \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto \mathbf{R}_n(x) = 1 - \mathbf{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > x\}} = \text{pourcentage d'observations supérieures à } x.$$

La variable aléatoire correspondante $\mathbf{R}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > x\}}$ est un excellent estimateur de $R(x)$, la fiabilité à l'instant x . On peut également montrer que la fiabilité empirique est un estimateur de la fiabilité sans biais et également convergent uniformément et presque sûrement.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbf{R}^+, n \mathbf{R}_n(x) \sim \mathbf{B}(n, R(x))$;
- $\forall x \in \mathbf{R}^+, E(\mathbf{R}_n(x)) = R(x)$ et $\text{Var}(\mathbf{R}_n(x)) = \frac{R(x)(1-R(x))}{n}$;
- $\forall x \in \mathbf{R}^+, \mathbf{R}_n(x) \xrightarrow[p.s.]{} R(x)$;
- $\text{Sup}\{ |\mathbf{R}_n(x) - R(x)| ; x \in \mathbf{R}^+ \} = \text{Sup}\{ |\mathbf{F}_n(x) - F(x)| ; x \in \mathbf{R}^+ \} \xrightarrow[p.s.]{} 0$ (théorème de Glivenko-Cantelli).

Démonstration : $n \mathbf{R}_n(x)$ = nombre d'observations parmi n supérieures à x = nombre de succès en n expériences identiques et indépendantes, où la probabilité de succès est $P(X_i > x) = R(x)$.

Comme $n \mathbf{R}_n(x)$ est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, on a aussi $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(n \mathbf{R}_n(x) = k) = P(k \text{ parmi les } X_i \text{ sont } > x, \text{ et } n-k \text{ sont } \leq x) = C_n^k [R(x)]^k [1-R(x)]^{n-k}$.

Donc $n \mathbf{R}_n(x) \sim \mathbf{B}(n, R(x))$. En conséquence, son espérance et sa variance sont connues, et valent respectivement $R(x)$ et $\frac{R(x)(1-R(x))}{n}$. On remarque que $\frac{R(x)(1-R(x))}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui montre que $\mathbf{R}_n(x)$ est un estimateur sans biais convergent de $R(x)$.

Par application de la loi forte des grands nombres, on sait que si $Y \sim \mathbf{B}(n, p)$, alors $\frac{Y}{n} \xrightarrow[p.s.]{} p$. Donc

$\frac{n \mathbf{R}_n(x)}{n} \xrightarrow[p.s.]{} R(x)$. C'est la convergence d'un pourcentage vers une probabilité.

Intervalle de confiance pour la fiabilité

Les résultats usuels sur les intervalles de confiance pour une proportion, permettent de proposer un intervalle de confiance asymptotique pour la fiabilité à un instant donné.

Propriété : l'intervalle de confiance de la fiabilité $R(x)$ au niveau de signification α est :

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{1 + n(1 - \mathbf{R}_n(x))}{n \mathbf{R}_n(x)} f_{2 + 2n(1 - \mathbf{R}_n(x)), 2n \mathbf{R}_n(x), \frac{\alpha}{2}}}, \frac{1}{1 + \frac{n(1 - \mathbf{R}_n(x))}{1 + n \mathbf{R}_n(x)} f_{2n(1 - \mathbf{R}_n(x)), 2(n \mathbf{R}_n(x) + 1), 1 - \frac{\alpha}{2}}} \right].$$

Mais cet intervalle est parfois difficile à calculer. On va en proposer une estimation, basée sur l'approximation normale que nous fournit le théorème central-limite.

Propriété : $\forall x \in \mathbf{R}^+$, un intervalle de confiance asymptotique non paramétrique de seuil α pour $R(x)$ est :

$$\left[\mathbf{R}_n(x) - u_\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{R}_n(x)[1 - \mathbf{R}_n(x)]}{n}} ; \mathbf{R}_n(x) + u_\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{R}_n(x)[1 - \mathbf{R}_n(x)]}{n}} \right]$$
, où u_α est le réel tel que $P(|U| \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$
 quand U est de loi $\mathbf{N}(0,1)$. $[u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$

Démonstration : on doit ici trouver un intervalle aléatoire I tel que, lorsque n est grand, $P(R(x) \in I) \approx 1 - \alpha$. Pour cela, il faut trouver une fonction pivotale, c'est à dire une fonction de $R(x)$ et des observations, dont la loi de probabilité ne dépend pas de $R(x)$. Or, on sait que $n \mathbf{R}_n(x) \sim \mathbf{B}(n, R(x))$ et que, pour n suffisamment grand, on peut assimiler la loi binomiale $\mathbf{B}(n, p)$ à la loi normale $\mathbf{N}(np, np(1-p))$.

Donc, ici, $n \mathbf{R}_n(x) \sim \mathbf{N}(n R(x), n R(x) [1 - R(x)])$. Après centrage et normalisation, on obtient :

$\frac{n \mathbf{R}_n(x) - n R(x)}{\sqrt{n R(x) [1 - R(x)]}} \sim \mathbf{N}(0,1)$ (c'est une convergence en loi). La fonction $\frac{n \mathbf{R}_n(x) - n R(x)}{\sqrt{n R(x) [1 - R(x)]}}$ est pivotale, mais pas pratique, car on ne peut pas isoler facilement $R(x)$. Mais d'après le théorème de Slutsky, étant donné que $\mathbf{R}_n(x) \xrightarrow{p.s.} R(x)$, on a aussi $\sqrt{n} \frac{\mathbf{R}_n(x) - R(x)}{\sqrt{\mathbf{R}_n(x) [1 - \mathbf{R}_n(x)]}} \sim \mathbf{N}(0,1)$. Cette dernière fonction est également pivotale, mais plus pratique pour trouver un intervalle de confiance de $R(x)$. En effet, pour n suffisamment grand, on a maintenant $P(\sqrt{n} \frac{|\mathbf{R}_n(x) - R(x)|}{\sqrt{\mathbf{R}_n(x) [1 - \mathbf{R}_n(x)]}} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$, où u_α est le réel tel que $P(|U| \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque

$U \sim \mathbf{N}(0,1)$. Donc :

$$P(R(x) \in \left[\mathbf{R}_n(x) - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{\mathbf{R}_n(x) [1 - \mathbf{R}_n(x)]} ; \mathbf{R}_n(x) + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{\mathbf{R}_n(x) [1 - \mathbf{R}_n(x)]} \right]) \approx 1 - \alpha \text{ CQFD.}$$

Pour pouvoir utiliser efficacement cet intervalle de confiance, il faut disposer d'un très grand nombre d'observations, car la vitesse de convergence du théorème central-limite est très faible. D'autre part, cet intervalle est non paramétrique, ce qui est un avantage car on n'a besoin d'aucune hypothèse sur la loi de probabilité des observations pour le construire. Mais c'est aussi un inconvénient, car ce manque d'hypothèses fait que l'intervalle de confiance est assez large. On verra qu'un intervalle de confiance utilisant des hypothèses paramétriques sera plus étroit.

Remarque : la fiabilité empirique en x peut également s'écrire :

$$\mathbf{R}_n(x) = \prod_{i/x_i^* \leq x} \left(1 - \frac{1}{n - i + 1} \right).$$

Sous cette forme, $\mathbf{R}_n(x)$ s'appelle l'estimation de Kaplan-Meier. Il est intéressant de l'utiliser sous une autre forme dans certains cas, par exemple lorsque les données sont multi-censurées.

Justification :
$$\prod_{i/x_i^* \leq x} \left(1 - \frac{1}{n - i + 1} \right) = \prod_{i/x_i^* \leq x} \frac{n - i}{n - i + 1} = \frac{n - 1}{n} \frac{n - 2}{n - 1} \dots \frac{n - j}{n - j + 1} \text{ si } x \in [x_j^* ; x_{j+1}^* [;$$

$$= \frac{n - j}{n} \text{ si } x \in [x_j^* ; x_{j+1}^* [= \mathbf{R}_n(x).$$

Au lieu d'estimer la fiabilité, on estime parfois la fonction de hasard cumulé $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du = - \ln R(x)$. A

priori, on peut penser utiliser $\Lambda_n(x) = - \ln \mathbf{R}_n(x)$, mais on montre que cet estimateur est biaisé. Il est préférable d'utiliser l'estimateur de Nelson-Aalen :

$$\hat{\Lambda}_n(x) = \sum_{i/X_i^* \leq x} \frac{1}{n - i + 1}.$$

Remarque : on peut aussi justifier cet estimateur lorsque n et $n-i$ sont grands, en remarquant qu'alors, pour $x \in [x_j^*; x_{j+1}^*]$, $-\ln R_n(x) = -\ln \frac{n-j}{n} = \ln(n) - \ln(n-j) \approx (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-j} - \gamma)$.

$$\text{Donc } -\ln R_n(x) \approx \frac{1}{n-j+1} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{x_i^* \leq x} \frac{1}{n-i+1}.$$

Ce résultat peut être aussi montré en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier : $\Lambda_n(x) = -\ln R_n(x)$, qui s'écrit :

$$\Lambda_n(x) = -\ln \prod_{i/x_i^* \leq x} \left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right) = -\sum_{i/x_i^* \leq x} \ln\left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right) \approx \sum_{i/x_i^* \leq x} \frac{1}{n-i+1} \text{ car } \ln(1+x) \approx x \text{ lorsque } x \text{ est petit devant } 1.$$

Il est tentant de chercher à estimer directement le taux de défaillance par une méthode non paramétrique. Le problème est identique à celui de l'estimation non paramétrique d'une densité : les estimateurs $F_n(x)$ et $\Lambda_n(x)$ de $F(x)$ et $\Lambda(x)$ ne sont pas dérivables. On peut alors utiliser des méthodes d'estimation fonctionnelle : histogramme, méthode de noyau. Mais ces méthodes ne sont efficaces que si on dispose d'un nombre important de données (typiquement, au moins 200), ce qui est rarement le cas en fiabilité. C'est pourquoi les méthodes d'estimation non paramétrique sont rarement appliquées pour le taux de défaillance en fiabilité.

Propriétés : on a

- $E(\bar{X}_n) = E(X) = \text{MTTF}$;
- $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$;
- $\bar{X}_n \xrightarrow[p.s.]{} \text{MTTF}$ (loi des grands nombres) ;
- $\frac{\bar{X}_n - \text{MTTF}}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \sqrt{n} \xrightarrow[L]{} \mathcal{N}(0,1)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (théorème central-limite) ;
- sous certaines conditions, $S_n^2 \xrightarrow[p.s.]{} \text{Var}(X)$, d'où $\frac{\bar{X}_n - \text{MTTF}}{S_n} \sqrt{n} \xrightarrow[L]{} \mathcal{N}(0,1)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ces propriétés permettent d'affirmer que la moyenne empirique \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent du MTTF, et que $[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + u_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance non paramétrique asymptotique de seuil α pour le MTTF.

Conclusion : on sait maintenant estimer la fiabilité et le MTTF, même sans faire d'hypothèses sur la loi de probabilité des observations.

II.1.3 Estimation paramétrique

On considère maintenant que l'on sait que la loi de probabilité des X_i appartient à une famille de lois de probabilité dépendant d'un paramètre $\theta \in \mathbf{R}^p$. La fonction de répartition des X_i sera alors notée $F(x; \theta)$ et la densité

Exemples : 1) loi exponentielle $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. $F(x; \lambda) = (1 - e^{-\lambda x}) 1_{R_+}(x)$ et $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{R_+}(x)$.

2) Loi de Weibull $W(\eta, \beta)$, $\eta > 0$, $\beta > 0$. On a :

$$F(x; \eta, \beta) = \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}\right) 1_{R_+}(x) \text{ et } f(x; \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} 1_{R_+}(x).$$

Puisqu'on travaille sur des durées, on considère comme acquis que les variables aléatoires sont positives, et on omettra par la suite la fonction indicatrice $1_{R_+}(x)$.

La densité du vecteur (X_1, \dots, X_n) sera notée $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$. Lorsqu'on considère cette fonction comme une fonction de θ dépendant des observations x_1, \dots, x_n , on l'appelle vraisemblance de θ et on la note

$$\mathbf{L}(\theta; x_1, \dots, x_n). \text{ Quand les } X_i \text{ sont i.i.d., on obtient } \mathbf{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Toutes les grandeurs de la fiabilité sont entièrement déterminées par le paramètre θ . Par exemple, pour la loi exponentielle, $F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$, $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $R(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda(x) = \lambda$, $\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$.

Estimer les grandeurs de la fiabilité revient ainsi à estimer une fonction de θ , donc à estimer θ . Notons aussi que ça n'est pas parce que S_n est un bon estimateur de θ que $\varphi(S_n)$ sera un bon estimateur de $\varphi(\theta)$. Par exemple, S_n peut être un estimateur sans biais de θ et $\varphi(S_n)$ un estimateur biaisé de $\varphi(\theta)$. On rappelle que la borne de Cramer-Rao pour un estimateur dans biais est $\frac{1}{\mathfrak{I}_n(\theta)}$, où $\mathfrak{I}_n(\theta) = \text{Var} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathbf{L}(\theta; X_1, \dots, X_n) \right]$.

Rappelons aussi qu'il est préférable d'avoir des estimateurs sans biais et convergents, et que l'idéal est d'obtenir des ESBVM. La borne de Cramer-Rao est une borne inférieure pour la variance de n'importe quel estimateur de θ . Un estimateur dont la variance est égale à cette borne est dit efficace, et c'est forcément un ESBVM. Mais il n'existe pas forcément d'estimateur efficace.

Il reste maintenant à déterminer comment trouver un estimateur d'un paramètre θ . Nous nous intéresserons ici à trois méthodes : la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments, et la méthode bayésienne.

II.1.3.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

- L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ est la valeur $\hat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $\mathbf{L}(\theta; x_1, \dots, x_n)$.
- Lorsque $\theta \in \mathbf{R}$, on calcule généralement $\hat{\theta}_n$ en résolvant l'équation $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathbf{L}(\theta; X_1, \dots, X_n) = 0$, appelée équation du maximum de vraisemblance.
- Lorsque $\theta \in \mathbf{R}^p$, $p > 1$, on résout alors le système d'équations $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln \mathbf{L}(\theta; X_1, \dots, X_n) = 0$, pour $i = 1, \dots, p$.
- Intuitivement, cette méthode consiste à estimer θ par la valeur pour laquelle la probabilité a priori d'avoir observé x_1, \dots, x_n est maximale.
- L'estimateur obtenu $\hat{\theta}_n$ n'est pas forcément sans biais, ni de variance minimale, ni efficace, ni même unique.
- S'il existe un estimateur efficace, c'est l'EMV.
- Si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ , alors $\varphi(\hat{\theta}_n)$ est l'EMV de $\varphi(\theta)$.
- Sous quelques conditions simples de régularité, on montre que $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta$.
- Lorsque $\theta \in \mathbf{R}$, on montre que $\sqrt{\mathfrak{I}_n(\theta)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$. Donc, quand n est suffisamment grand, $\hat{\theta}_n$ est approximativement de loi $\mathcal{N}(\theta, \frac{1}{\mathfrak{I}_n(\theta)})$, ce qui prouve que $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement sans biais, convergent, et asymptotiquement efficace.
- Lorsque $\theta \in \mathbf{R}^p$, $p > 0$, le vecteur $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ est asymptotiquement de loi $\mathcal{N}(\theta, \mathfrak{I}_n(\theta)^{-1})$, où $\mathfrak{I}_n(\theta)$ est la matrice d'information. Les $\hat{\theta}_i$ sont des estimateurs asymptotiquement efficaces des θ_i .

Exemple : estimation du paramètre de la loi exponentielle $\text{Exp}(\lambda)$.

On a $\mathbf{L}(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$. Donc $\ln \mathbf{L}(\lambda; x_1, \dots, x_n) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$, et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathbf{L}(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i. \text{ L'équation } \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ nous conduit à } \hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

Déterminons les propriétés de cet estimateur. Pour savoir si $\hat{\lambda}_n$ est sans biais, il nous faut calculer $E(\hat{\lambda}_n)$. On a $E(\hat{\lambda}_n) = E\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)$. Or on sait que si X_1, \dots, X_n sont indépendants et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ est de

loi $G(n, \lambda)$. Donc $E(\hat{\lambda}_n) = n E\left(\frac{1}{Y}\right)$, lorsque $Y \sim G(n, \lambda)$.

$$E(\hat{\lambda}_n) = n E\left(\frac{1}{Y}\right) = n \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} f_{G(n, \lambda)}(y) dy = n \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda y} y^{n-1} dy = n \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} dy$$

$$E(\hat{\lambda}_n) = n \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-2} dy = \frac{n \lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} y^{n-2} dy = \frac{n \lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} f_{G(n-1, \lambda)}(y) dy = \frac{n \lambda}{n-1}.$$

$E(\hat{\lambda}_n) \neq \lambda$, donc $\hat{\lambda}_n$ est un estimateur biaisé de λ . En revanche, il est clair que $\hat{\lambda}'_n = \frac{n-1}{n} \hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ est un

estimateur sans biais de λ . Déterminons sa variance.

$$\text{Var}(\hat{\lambda}'_n) = E(\hat{\lambda}'_n{}^2) - [E(\hat{\lambda}'_n)]^2 = E\left[\left(\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^2\right] - \lambda^2 = (n-1)^2 E\left(\frac{1}{Y^2}\right) - \lambda^2 = (n-1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2} f_{G(n, \lambda)}(y) dy - \lambda^2$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}'_n) = (n-1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} dy - \lambda^2 = (n-1)^2 \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-3)!} e^{-\lambda y} y^{n-3} dy - \lambda^2$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}'_n) = \frac{(n-1)}{(n-2)} \lambda^2 \int_0^{+\infty} f_{G(n-2, \lambda)}(y) dy - \lambda^2 = \lambda^2 \left[\frac{(n-1)}{(n-2)} - 1 \right] = \lambda^2 \frac{n-1-n+2}{n-2} = \frac{\lambda^2}{n-2}.$$

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\hat{\lambda}'_n) = 0$. En fait, on le savait déjà, car $\hat{\lambda}_n$ est un EMV, donc il est convergent, et la convergence de $\hat{\lambda}_n$ implique celle de $\hat{\lambda}'_n$. Déterminons l'efficacité de $\hat{\lambda}'_n$.

$$\text{Eff}(\hat{\lambda}'_n) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} E(\hat{\lambda}'_n) \right]^2}{\mathfrak{I}_n(\lambda) \text{Var}(\hat{\lambda}'_n)} = \frac{1}{\mathfrak{I}_n(\lambda) \frac{\lambda^2}{n-2}} = \frac{n-2}{\lambda^2 \mathfrak{I}_n(\lambda)}, \text{ car } \hat{\lambda}'_n \text{ est sans biais.}$$

$$\mathfrak{I}_n(\lambda) = \text{Var} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \mathbf{L}(\lambda; X_1, \dots, X_n) \right] = \text{Var} \left[\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i \right] = \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = n \text{Var}(X) \text{ car les } X_i \text{ sont i.i.d.}$$

$$\text{On a donc } \mathfrak{I}_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}, \text{ et donc } \text{Eff}(\hat{\lambda}'_n) = \frac{n-2}{n}.$$

$\text{Eff}(\hat{\lambda}'_n) < 1$, donc $\hat{\lambda}'_n$ n'est pas un estimateur efficace de λ . Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Eff}(\hat{\lambda}'_n) = 1$, donc $\hat{\lambda}'_n$ est asymptotiquement efficace.

En fait, on montre qu'il n'existe pas d'estimateur efficace de λ et que, parce que $\sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive et complète, et donc :

$$\hat{\lambda}'_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \text{ est l'ESBVM de } \lambda.$$

II.1.3.2 Estimation par la méthode des moments

L'idée initiale de cette méthode est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc.

Ainsi, si $E(X) = \theta$, l'estimateur de θ par la méthode des moments (EMM) sera $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$. On sait déjà que cet estimateur est sans biais car $E(\bar{X}_n) = E(X)$, et convergent ($\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X)$).

On peut montrer en fait que si $E(X) = \varphi(\theta)$, alors on ne peut estimer θ par la méthode des moments que si φ est inversible. L'EMM sera alors $\tilde{\theta}_n = \varphi^{-1}(\bar{X}_n)$. Plus généralement encore, si $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ est de dimension 2, et que $(E(X), \text{Var}(X)) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$ avec φ inversible, alors l'EMM de θ est $\tilde{\theta}_n = (\theta_{1,n}, \theta_{2,n}) = \varphi^{-1}(\bar{X}_n, S_n^2)$.

Ce qui nous amène à la définition générale de l'estimation par la méthode des moments. Pour cela, on note :

- $m_k^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$: moment empirique d'ordre k de l'échantillon ;
- $\mu_k^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^k$: moment empirique centré d'ordre k de l'échantillon.

Définition : si $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p$, et s'il existe une fonction φ bijective telle que :
 $(E(X), E(X^2), \dots, E(X^p)) = \varphi(\theta_1, \dots, \theta_p)$ [resp. $(E(X), E[(X-E(X))^2], \dots, E[(X-E(X))^p]) = \varphi(\theta_1, \dots, \theta_p)$],
alors l'estimateur de θ par la méthode des moments (EMM) est :
 $\tilde{\theta}_n = \varphi^{-1}(m_1^e, \dots, m_p^e)$ [resp. $\tilde{\theta}_n = \varphi^{-1}(\mu_1^e, \mu_2^e, \dots, \mu_p^e)$].

L'avantage de cette méthode est qu'elle est naturelle, et qu'elle permet d'obtenir des estimateurs ayant une forme explicite, alors que les estimateurs de maximum de vraisemblance sont souvent obtenus comme solutions d'équations ou de système d'équations. D'autre part, on montre que :

- $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta$;
- $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \Sigma)$, où Σ est une matrice qui dépend des moments choisis pour la détermination de θ .

Exemple 1 : loi exponentielle. On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, donc $\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$. Ici, EMM et EMV sont confondus. Ce n'est pas toujours le cas : pour la loi uniforme sur $[0, \theta]$, l'EMV est X_n^* , alors que l'EMM est $2\bar{X}_n$.

Exemple 2 : loi Gamma. On considère X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $G(a, \lambda)$.

- EMV : $L(a, \lambda; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x_i} x_i^{a-1} = \frac{\lambda^{na}}{\Gamma(a)^n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1}$.

$$\ln L = n a \ln(\lambda) - n \ln(\Gamma(a)) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i).$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = \frac{n a}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i, \text{ donc } \hat{\lambda}_n = \frac{n \hat{a}_n}{\sum_{i=1}^n X_i};$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L = n \ln(\lambda) - n \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \text{ donc } \hat{a}_n \text{ est solution de } n \ln \left[\frac{n a}{\sum_{i=1}^n x_i} \right] - n \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0.$$

- EMM : $E(X) = \frac{a}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} E(X)$. Donc $\lambda = \frac{E(X)}{\text{Var}(X)}$ et $a = \lambda E(X) = \frac{(E(X))^2}{\text{Var}(X)}$.

$$\text{Donc } \tilde{\lambda}_n = \frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \text{ et } \tilde{a}_n = \frac{(\bar{X}_n)^2}{S_n^2}.$$

II.1.3.3 Estimation bayésienne

Les procédures d'estimation décrites précédemment sont basées sur le seul retour d'expérience, c'est-à-dire sur l'observation des variables X_1, \dots, X_n . On peut y apporter deux critiques :

- Les propriétés des EMV et EMM (absence de biais, convergence, efficacité) ne sont qu'asymptotiques. Lorsqu'on dispose de très peu de données, ce qui est souvent le cas en fiabilité, ces estimateurs peuvent être de mauvaise qualité ;
- Le retour d'expériences n'est pas en général la seule source d'information dont on dispose sur le phénomène étudié : on a souvent procédé à des essais sur des matériels similaires auparavant, et des experts peuvent aussi donner leur opinion sur la fiabilité des systèmes. Il est dommage de se priver de ces informations.

La démarche bayésienne consiste à utiliser à la fois les observations et la connaissance a priori sur le phénomène, pour estimer les paramètres. Moins on aura d'observations disponibles, plus la connaissance a priori sera déterminante.

Mathématiquement, cela revient à faire comme si le paramètre θ était aléatoire, en intégrant dans sa loi de probabilité toutes les informations a priori dont on dispose. Cette loi de probabilité est appelée loi a priori, et on notera $f_\theta(\theta)$ sa densité.

Les observations x_1, \dots, x_n sont alors considérées comme issues de la loi conditionnelle de X sachant $\Theta = \theta$. La vraisemblance de l'échantillon s'écrit donc maintenant $f_{X_1, \dots, X_n | \Theta = \theta}(x_1, \dots, x_n)$.

On appelle loi a posteriori la loi de probabilité de Θ conditionnellement aux observations. Cette loi s'obtient grâce à la formule de Bayes :

$$f_{\Theta | X_1, \dots, X_n}(\theta) = \frac{f_{\Theta, X_1, \dots, X_n}(\theta, x_1, \dots, x_n)}{f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f_{X_1, \dots, X_n | \Theta = \theta}(x_1, \dots, x_n) f_\Theta(\theta)}{\int f_{X_1, \dots, X_n | \Theta = y}(x_1, \dots, x_n) f_\Theta(y) dy}.$$

On constate que cette loi prend en compte à la fois les observations, via $f_{X_1, \dots, X_n | \Theta = \theta}(x_1, \dots, x_n)$, ainsi que la connaissance a priori, via $f_\Theta(\theta)$.

Définition : l'estimateur bayésien de θ (EB) est l'espérance de la loi a posteriori : $\hat{\theta}_B = E(\Theta | X_1, \dots, X_n)$

Remarque : on peut aussi prendre comme estimateur la médiane ou le mode de cette loi.

Le problème essentiel ici est le choix d'une loi a priori qui reflète bien toute l'information a priori dont on dispose sur le phénomène, tout en permettant de calculer la loi a posteriori.

Exemple : loi exponentielle. On considère que le taux de défaillance est constant, et que l'on dispose d'informations a priori sur ce taux. On a donc :

$$f_{X_1 | \Lambda = \lambda}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ d'où } f_{X_1, \dots, X_n | \Lambda = \lambda}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \text{ (on retrouve bien la vraisemblance de l'échantillon).}$$

Il reste maintenant à trouver une loi a priori pour Λ . Plusieurs cas de figure sont possibles ; traitons-en deux.

1. Les experts affirment que le taux de défaillance est compris entre deux valeurs λ_1 et λ_2 , sans plus. Une loi

a priori naturelle est alors la loi uniforme sur $[\lambda_1, \lambda_2]$: $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} 1_{[\lambda_1, \lambda_2]}(\lambda)$;

2. Les experts pensent que λ est de l'ordre de λ_0 . Il faut alors choisir une loi a priori dont l'espérance vaut

λ_0 , par exemple la loi $\text{Exp}(\frac{1}{\lambda_0})$: $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0} e^{-\frac{\lambda}{\lambda_0}} 1_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$.

Déterminons l'estimateur bayésien dans les deux cas.

1. $f_{\Lambda, X_1, \dots, X_n}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} 1_{[\lambda_1, \lambda_2]}(\lambda)$. D'où :

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} 1_{[\lambda_1, \lambda_2]}(y) dy = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)y} y^n dy * \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}}{n!} \frac{n!}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}}.$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}}{n!} e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)y} y^{n+1-1} dy$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(y) dy = \frac{n!}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_1)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}}.$$

La loi a posteriori admet donc pour densité :

$$f_{\Lambda|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(\lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} 1_{[\lambda_1, \lambda_2]}(\lambda)}{\frac{n!}{(\lambda_2 - \lambda_1)} * \frac{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_1)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1}}}, \text{ soit}$$

$$f_{\Lambda|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(\lambda) = \frac{1}{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_1)} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1} 1_{[\lambda_1, \lambda_2]}(\lambda).$$

L'estimateur bayésien de λ est l'espérance de cette loi :

$$\hat{\lambda}_{B1} = \frac{1}{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_1)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+1} d\lambda$$

$$\hat{\lambda}_{B1} = \frac{1}{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(\lambda_1)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n+2}}{(n+1)!} e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)y} y^{n+2-1} dy \frac{n+1}{\sum_{i=1}^n x_i}. \text{ D'où}$$

$$\hat{\lambda}_{B1} = \frac{n+1}{\sum_{i=1}^n X_i} \frac{F_{G(n+2, \sum_{i=1}^n X_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+2, \sum_{i=1}^n X_i)}(\lambda_1)}{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n X_i)}(\lambda_2) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n X_i)}(\lambda_1)}.$$

Le calcul effectif de $\hat{\lambda}_{B1}$ n'est donc pas simple.

$$2. \quad f_{\Lambda, X_1, \dots, X_n}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\lambda_0} e^{-\frac{\lambda}{\lambda_0}} = \frac{\lambda^n}{\lambda_0} e^{-\lambda \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]}. \text{ D'où :}$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]} dy = \frac{1}{\lambda_0} \frac{n!}{\left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}}{n!} e^{-y \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]} y^{n+1-1} dy$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\lambda_0} \frac{n!}{\left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}} \int_0^{+\infty} f_{G(n+1, \frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i)}(y) dy = \frac{n!}{\lambda_0 \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}}.$$

La loi a posteriori admet donc pour densité :

$$f_{\Lambda|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(\lambda) = \frac{\frac{\lambda^n}{\lambda_0} e^{-\lambda \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]}}{\frac{n!}{\lambda_0 \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}}} = \frac{\left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]^{n+1}}{n!} e^{-\lambda \left[\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i \right]} \lambda^n.$$

La loi a posteriori est donc la loi $G(n+1, \frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n x_i)$. Donc l'estimateur bayésien de λ est :

$$\hat{\lambda}_{B2} = \frac{n+1}{\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Si on ne dispose d'aucune observation, on trouve $\hat{\lambda}_{B2} = \lambda_0$, ce qui est logique : on n'utilise que la connaissance a priori pour estimer λ . A contrario, lorsqu'on dispose de nombreuses observations, $\hat{\lambda}_{B2}$ est équivalent à $\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$,

qui n'est autre que l'EMM ou l'EMV. La démarche bayésienne ne présente donc d'intérêt que lorsqu'on dispose de peu de données, en pratique 4 ou 5.

Remarque 1 : l'absence totale d'information a priori sur λ voudrait se traduire par une loi uniforme sur $[0, +\infty[$. Cette loi n'existe pas, bien sûr, mais on peut quand même calculer la densité a posteriori en posant $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = +\infty$ dans le cas 1. On obtient alors :

$$f_{\Lambda|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(\lambda) = \frac{1}{F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(+\infty) - F_{G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)}(0)} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{n+1} 1_{[0, +\infty]}(\lambda)$$

$$f_{\Lambda|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(\lambda) = \frac{1}{1-0} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{n+1}}{(n+1-1)!} e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \lambda} \lambda^{n+1-1} 1_{R^+}(\lambda).$$

C'est la densité de la loi $G(n+1, \sum_{i=1}^n x_i)$, et l'estimateur bayésien est donc l'espérance de cette loi, soit $\frac{n+1}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

Cet estimateur est équivalent aux EMV et EMM. On parle alors de loi non informative, ce qui signifie qu'on n'a aucune information sur λ . On constate que même si la loi uniforme sur $[0, +\infty[$ n'existe pas, la procédure donne des résultats cohérents. Il se trouve que c'est souvent le cas en estimation bayésienne : on est amenés à choisir des lois a priori qui ne sont pas exactement des lois de probabilité, pour arriver à de bons résultats...

II.1.4 Intervalles de confiance

Plutôt que d'estimer θ par une unique valeur (on parle alors d'estimation ponctuelle) $\hat{\theta}_n$, il est intéressant de fournir une plage de valeurs vraisemblables, c'est-à-dire un intervalle ayant une forte probabilité de contenir la vraie valeur de θ .

Un intervalle de confiance de seuil α pour θ est un intervalle aléatoire I tel que $P(\theta \in I) = 1 - \alpha$. Pour le déterminer, il est conseillé de trouver une fonction pivotale, c'est-à-dire une fonction de θ et des observations X_1, \dots, X_n (en général grâce à un estimateur de θ) dont la loi de probabilité est indépendante de θ .

Exemple : loi exponentielle. Soient X_1, \dots, X_n n v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(\lambda)$. On sait que l'ESBVM de λ est

$\hat{\lambda}'_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$, que $\sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, \lambda)$ et que si $X \sim G(a, p)$ alors $\alpha X \sim G(a, \frac{p}{\alpha})$. Donc, ici $\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, 1)$.

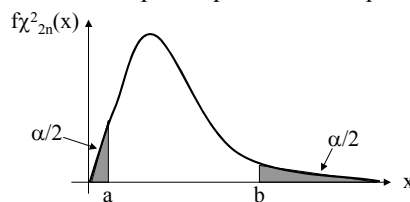
$\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ est donc bien une fonction pivotale. En pratique, on considère la fonction pivotale $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$, car celle-

ci est de loi $G(n, \frac{1}{2}) = G(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2n}$, car la loi du khi-deux est plus facile à utiliser que la loi $G(n, 1)$.

On a donc, $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^{+2}$, $a < b$, $P(a \leq 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \leq b) = F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a)$.

Or, on a également $P(a \leq 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \leq b) = P(\frac{a}{2\sum_{i=1}^n X_i} \leq \lambda \leq \frac{b}{2\sum_{i=1}^n X_i})$. Il suffit donc maintenant de trouver des

valeurs de a et b telles que $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1 - \alpha$ pour obtenir un intervalle de confiance sur λ . Il y a une infinité de couples possibles, mais on choisit classiquement l'intervalle qui « équilibre les risques », c'est-à-dire



le couple (a, b) tel que $F_{\chi^2_{2n}}(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et $F_{\chi^2_{2n}}(a) = \frac{\alpha}{2}$.

Avec la notation $z_{n, \alpha} = F_{\chi^2_n}^{-1}(1 - \alpha)$ de la table du χ^2 , on obtient $a = z_{2n, 1-\alpha/2}$ et $b = z_{2n, \alpha/2}$, d'où :

Propriété : un intervalle de confiance bilatéral de seuil α pour le paramètre λ de la loi exponentielle est :

$$\left[\frac{F_{\chi^2_{2n}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sum_{i=1}^n X_i} ; \frac{F_{\chi^2_{2n}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sum_{i=1}^n X_i} \right] = \left[\frac{z_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2 n \bar{X}_n} ; \frac{z_{2n, \frac{\alpha}{2}}}{2 n \bar{X}_n} \right]$$

Remarques : la largeur de l'intervalle de confiance est $\frac{1}{2n\bar{X}_n} [z_{2n,\alpha/2} - z_{2n,1-\alpha/2}]$.

1. Plus n est important, plus l'intervalle de confiance est étroit. C'est logique, car plus on dispose d'observations, plus on a d'information sur le phénomène, donc meilleure est la précision des estimateurs. Ainsi, en supposant \bar{X}_n constant, on constate sur les tables de la loi du χ^2_n que n croît plus vite que $z_{2n,\alpha/2} - z_{2n,1-\alpha/2}$, donc l'intervalle de confiance rétrécit avec n ;
2. Par contre, plus α diminue, plus l'intervalle de confiance est large. A la limite, l'intervalle de confiance est tout \mathbf{R}^+ pour $\alpha = 0$. C'est encore logique : moins on accepte de prendre de risque sur l'estimation de λ , plus on donnera de valeurs vraisemblables pour lui. Si on dit que toutes les valeurs sont vraisemblables, on est ainsi sûr de ne pas se tromper, mais cela n'a aucun intérêt. En guise d'application numérique, on calcule pour $n = 15$ ($2n=30$) : $\alpha = 10\%$, $z_{2n,\alpha/2} - z_{2n,1-\alpha/2} = z_{30,0.05} - z_{30,0.95} = 43,77 - 18,49 = 25,28$, et pour $\alpha = 5\%$, $z_{30,0.025} - z_{30,0.975} = 46,98 - 16,79 = 30,19$; plus α diminue, plus l'intervalle de confiance grandit ;
3. De la même manière, on peut donner des intervalles de confiance unilatéraux, c'est-à-dire du type $[0, b]$ ou $[a, +\infty[$. L'intérêt est que cela produit des bornes inférieures ou supérieures pour l'estimation de λ : j'ai une confiance égale à $1-\alpha$ dans le fait que λ est inférieur à b . L'intervalle de confiance unilatéral borné par 0 est $[0, \frac{z_{2n,\alpha}}{2n\bar{X}_n}]$.

Intervalles de confiance asymptotiques

On se sert du résultat sur la convergence de l'information de Fisher : $\sqrt{n} (\mathfrak{I}_1(\theta))^{-1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} \mathbf{N}(0, \text{Id})$. On

montre également que $\sqrt{n} (\mathfrak{I}_1(\hat{\theta}_n))^{-1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} \mathbf{N}(0, \text{Id})$, ce qui permet de trouver des intervalles de confiance asymptotiques pour les composants de θ .

Par exemple, si $\theta \in \mathbf{R}$, $\sqrt{n} \mathfrak{I}_1(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} \mathbf{N}(0, \text{Id})$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\sqrt{n} \mathfrak{I}_1(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)| \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Comme $\sqrt{n} \mathfrak{I}_1(\hat{\theta}_n) = \sqrt{\mathfrak{I}_n(\hat{\theta}_n)}$, un intervalle de confiance asymptotique pour θ est :

$$\left[\hat{\theta}_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I}_n(\hat{\theta}_n)}} ; \hat{\theta}_n + \frac{u_\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I}_n(\hat{\theta}_n)}} \right].$$

Pour la loi exponentielle, $\mathfrak{I}_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}$, donc l'intervalle cherché est $[\hat{\lambda}_n (1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}) ; \hat{\lambda}_n (1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}})]$. Pour obtenir des intervalles de confiance sur la fiabilité, le MTTF, etc., on utilise la méthode Delta :

$$\sqrt{n} \left[\Delta(\hat{\theta}_n) \mathfrak{I}_1(\hat{\theta}_n)^{-1} \Delta(\hat{\theta}_n) \right]^{1/2} [\varphi(\hat{\theta}_n) - \varphi(\theta)] \xrightarrow{L} \mathbf{N}(0, \text{Id}).$$

II.2 Test d'hypothèses

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux deux principaux types de tests d'hypothèses utilisés en fiabilité : ceux sur la valeur d'un paramètre, et les tests d'adéquation. On commencera par rappeler quelques notions de base sur les tests d'hypothèses.

II.2.1 Notions de base en théorie des tests d'hypothèses

On rappelle qu'un test d'hypothèses est une méthode qui permet de trancher entre une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1 au vu des observations x_1, \dots, x_n .

L'erreur de 1^{ère} espèce consiste à rejeter à tort H_0 , c'est-à-dire décider H_1 alors que H_0 est vraie. L'erreur de 2^{ème} espèce consiste à ne pas rejeter H_0 , à tort (il est préférable de parler de « ne pas rejeter H_0 » plutôt que « accepter H_0 »), c'est-à-dire à décider H_0 alors que H_1 est vraie.

Étant donné qu'on ne peut pas indéfiniment limiter les deux risques d'erreur en même temps, on choisit de privilégier l'erreur de 1^{ère} espèce. En pratique, cela signifie qu'on se fixe la probabilité d'erreur de 1^{ère} espèce, notée α et appelée seuil ou niveau de signification du test.

Pour α fixé, le meilleur test est celui pour lequel la probabilité d'erreur de 2^{ème} espèce est la plus faible. Un tel test est dit être le plus puissant.

Construire un test, c'est trouver sa région critique W , c'est-à-dire l'ensemble des observations pour lesquelles on rejettera H_0 . La probabilité maximale de rejeter à tort H_0 est alors $\alpha = \sup_{H_0} P((X_1, \dots, X_n) \in W)$.

W est donc entièrement déterminée par la valeur de α et la loi de probabilité de (X_1, \dots, X_n) sous H_0 . Pour déterminer W , on peut utiliser des méthodes spécifiques, comme le lemme de Neyman-Pearson. Mais le plus souvent, on construit un test à l'aide du simple bon sens.

En général, la région critique d'un test est de la forme $W = \{ (x_1, \dots, x_n) ; S(x_1, \dots, x_n) > k_\alpha \}$. On a alors $\alpha = \sup_{H_0} P(S(X_1, \dots, X_n) > k_\alpha)$. Pour calculer cette probabilité, il faut que la loi de $S(X_1, \dots, X_n)$ sous H_0 ne dépende pas du paramètre inconnu θ . On retrouve ici la notion de fonction pivotale déjà utilisée pour les intervalles de confiance. En fait, intervalles de confiance et tests d'hypothèses sont des notions duales.

II.2.2 Test sur le paramètre de la loi exponentielle

II.2.2.1 Test unilatéral

Admettons que l'on considère comme acquis le fait que les X_i sont bien de loi exponentielle, c'est-à-dire que le taux de défaillance des systèmes étudiés est constant, égal à λ . Les normes exigent en général que le taux de défaillance des systèmes ne dépasse pas une valeur limite. Il faut donc s'assurer que l'on a bien $\lambda < \lambda_0$, ce qui se fait à l'aide d'un test de $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

Étant donné que l'EMV de λ est $\frac{1}{\bar{X}_n}$, il est logique de rejeter H_0 si et seulement si $\frac{1}{\bar{X}_n}$ est « trop petit », c'est-à-dire si \bar{X}_n est « trop grand ». On proposera donc naturellement une région critique du type $W = \{ (x_1, \dots, x_n) ; \bar{X}_n > k_\alpha \}$.

k_α est déterminé en écrivant que $\alpha = \sup_{H_0} P((X_1, \dots, X_n) \in W) = \sup_{H_0} P(\bar{X}_n > k_\alpha)$. On sait que

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, \lambda), \text{ donc } \bar{X}_n \sim G(n, n\lambda), \text{ mais aussi que } 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i = 2\lambda n \bar{X}_n \sim \chi_{2n}^2.$$

$$\text{D'où } \alpha = \sup_{H_0} P(2\lambda n \bar{X}_n > 2\lambda n k_\alpha) = \sup_{\lambda \geq \lambda_0} P(1 - F_{\chi_{2n}^2}(2\lambda n k_\alpha)).$$

Comme $F_{\chi_{2n}^2}$ est une fonction croissante, $1 - F_{\chi_{2n}^2}$ est décroissante, donc la borne supérieure est atteinte pour

$$\lambda = \lambda_0 \text{ et on obtient } \alpha = 1 - F_{\chi_{2n}^2}(2\lambda_0 n k_\alpha), \text{ soit } k_\alpha = \frac{1}{2n\lambda_0} F_{\chi_{2n}^2}^{-1}(1-\alpha) = \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\lambda_0}.$$

Un test de seuil α de $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda < \lambda_0$ a donc pour région critique

$$W = \{ (x_1, \dots, x_n) ; \bar{X}_n > \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\lambda_0} \} = \{ (x_1, \dots, x_n) ; 2n\lambda_0 \bar{X}_n > Z_{2n,\alpha} \}.$$

On peut montrer que ce test est uniformément le plus puissant.

Remarque : on rejette « $\lambda \geq \lambda_0$ » si et seulement si $2n\lambda_0 \bar{X}_n > Z_{2n,\alpha}$, c'est-à-dire si $\lambda_0 > \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\bar{X}_n}$, ou encore

$\lambda_0 \notin [0, \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\bar{X}_n}]$ (intervalle de confiance unilatéral de seuil α pour λ). C'est logique : on a une confiance de

$1-\alpha$ dans le fait que $\lambda < \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\bar{X}_n}$. Si $\lambda_0 > \frac{Z_{2n,\alpha}}{2n\bar{X}_n}$, on a donc une confiance $1-\alpha$ dans le fait que $\lambda < \lambda_0$.

II.2.2.2 Test bilatéral

On s'intéresse maintenant au problème de savoir si le taux de défaillance peut être considéré comme étant égal à une valeur connue λ_0 . Il s'agit donc d'un test de $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

De même que pour le test unilatéral, il est raisonnable de rejeter l'hypothèse « $\lambda = \lambda_0$ » si et seulement si $\frac{1}{\bar{x}_n}$ est « trop éloigné » de λ_0 ou bien si \bar{x}_n est « trop éloigné » de $\frac{1}{\lambda_0}$. On peut donc penser à une région

critique du type $W = \{ (x_1, \dots, x_n) ; |\bar{x}_n - \frac{1}{\lambda_0}| > k_\alpha \}$, ou $W = \{ \bar{x}_n < k_{1,\alpha} \text{ ou } \bar{x}_n > k_{2,\alpha} \}$. Pour simplifier

l'écriture, on omettra par la suite d'écrire « $(x_1, \dots, x_n) ; |$ ».

Alors $\alpha = \sup_{H_0} P(\bar{X}_n < k_{1,\alpha} \text{ ou } \bar{X}_n > k_{2,\alpha}) = P_{\lambda_0} P(2n\lambda_0\bar{X}_n < 2n\lambda_0 k_{1,\alpha} \text{ ou } 2n\lambda_0\bar{X}_n > 2n\lambda_0 k_{2,\alpha})$
 $\alpha = F_{\chi^2_{2n}}(2n\lambda_0 k_{1,\alpha}) + 1 - F_{\chi^2_{2n}}(2n\lambda_0 k_{2,\alpha})$, car $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque A et B sont disjoints.

Pour que cette somme soit bien égale à α , on peut choisir d'équilibrer les risques, ce qui donne :

$$F_{\chi^2_{2n}}(2n\lambda_0 k_{1,\alpha}) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } F_{\chi^2_{2n}}(2n\lambda_0 k_{2,\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \text{ soit } k_{1,\alpha} = \frac{Z_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\lambda_0} \text{ et } k_{2,\alpha} = \frac{Z_{2n, \frac{\alpha}{2}}}{2n\lambda_0}.$$

D'où $W = \{ \bar{x}_n < \frac{Z_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\lambda_0} \text{ ou } \bar{x}_n > \frac{Z_{2n, \frac{\alpha}{2}}}{2n\lambda_0} \}$. On remarque que l'on rejettera l'hypothèse « $\lambda = \lambda_0$ » au seuil α si

et seulement si $\lambda_0 > \frac{Z_{2n, \frac{\alpha}{2}}}{2n\bar{x}_n}$ ou $\lambda_0 < \frac{Z_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\bar{x}_n}$, c'est-à-dire si et seulement si λ_0 n'appartient pas à l'intervalle de

confiance pour de seuil α pour λ . C'est logique : si λ_0 n'appartient pas à l'intervalle de confiance de seuil α pour λ , il est très peu vraisemblable que λ soit égal à λ_0 , donc il vaut mieux rejeter cette hypothèse.

II.2.3 Tests d'adéquation

Dans tout le chapitre consacré à l'estimation paramétrique, on a supposé que la loi de probabilité des observations appartenait à une famille paramétrique connue, par exemple l'ensemble des lois exponentielles. Tous les résultats obtenus alors n'ont de sens que si cette hypothèse est vérifiée. Il est donc fondamental de tester sa véracité. Un tel test s'appelle test d'adéquation ou test d'ajustement.

Tester l'adéquation de l'échantillon x_1, \dots, x_n à une loi de probabilité donnée, c'est étudier à quel point cet échantillon est conforme à cette loi, ou dit autrement, déterminer s'il est vraisemblable que cet échantillon soit issu de cette loi.

On distinguera deux cas, suivant que l'on souhaite tester l'adéquation de l'échantillon à une loi de probabilité entièrement spécifiée, ou à une famille de lois de probabilité. On peut faire porter les hypothèses sur la fonction de répartition des X_i , et ainsi, avec le formalisme des test d'hypothèses, il s'agit de faire un test de H_0 contre H_1 , où :

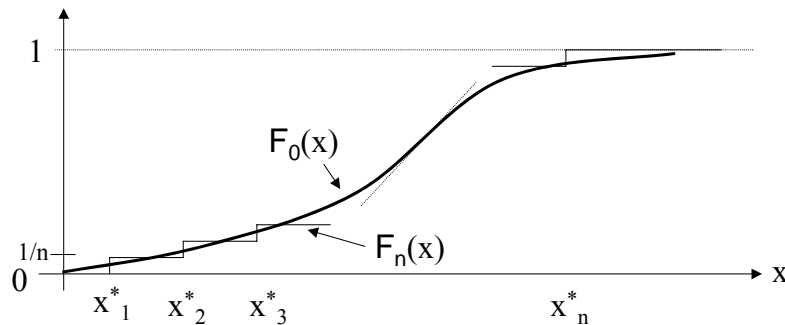
- Cas 1 : test d'adéquation à une loi entièrement spécifiée. On teste $H_0 : F = F_0$ contre $H_1 : F \neq F_0$;
- Cas 2 : test d'adéquation à une famille de lois de probabilité. On teste alors l'hypothèse $H_0 : F \in \mathbf{F}$ contre $H_1 : F \notin \mathbf{F}$, où \mathbf{F} est une famille de fonctions de répartition. Le plus souvent, c'est une famille paramétrée : $F = \{ F(., \theta) ; \theta \in \Theta \}$.

Exemple :

- Cas 1 : on cherche à déterminer si les observations sont issues d'une loi Exp(2) ;
- Cas 2 : on cherche à déterminer si les observations sont issues d'une loi Exponentielle (paramètre non précisé ; c'est le cas en pratique.

II.2.3.1 Tests d'adéquation graphique : les graphes de probabilité

On a vu que la fonction de répartition empirique F_n est un excellent estimateur de F . Si on test l'hypothèse « $F = F_0$ », il est donc naturel de tracer les graphes de F_n et F_0 , et de juger visuellement si les deux courbes sont proches.



Cependant, il est difficile de juger si les deux courbes sont « significativement proches », surtout si l'on dispose de peu de données. De plus, on note que toutes les fonctions de répartition ont des formes ressemblantes.

De la même façon, on peut comparer l'histogramme de l'échantillon et la densité f_0 . Cela peut permettre d'écarter certaines hypothèses, par exemple si l'histogramme est en forme de cloche, il est peu probable que la loi des X_i soit exponentielle. Mais l'expérience montre qu'il est difficile d'admettre qu'un échantillon provient d'une loi exponentielle au seul vu de l'histogramme.

La technique graphique la plus efficace est celle des graphes de probabilité (Probability Plot). Le principe consiste à trouver une relation linéaire sur la fonction de répartition de la loi à tester, du type (cas 2) : $h(F(x, \theta)) = \alpha(\theta)g(x) + \beta(\theta)$, où h et g sont des fonctions qui ne dépendent pas de θ . Ainsi, si la vraie fonction de répartition est F , $h(F_n(x))$ sera très proche de $\alpha(\theta)g(x) + \beta(\theta)$.

Pour $x = x_i^*$, on a $h(F_n(x_i^*)) = h(\frac{i}{n})$. Donc, si la vraie fonction de répartition est F , les points $(g(x_i^*), h(\frac{i}{n}))$ seront approximativement alignés. La pente et l'ordonnée à l'origine de cette droite fourniront des estimations de $\alpha(\theta)$ et $\beta(\theta)$. Le nuage de points tracé s'appelle le graphe de probabilité.

Lorsque la loi à tester est la loi normale, la droite en question s'appelle la droite de Henry. Pour dessiner ces graphes, on peut aussi utiliser des papiers fonctionnels spéciaux sur lesquels les axes sont gradués selon g en abscisses et selon h en ordonnées. Ces types de papier portent divers noms : papier d'Alan-Plait, papier Weibull, papier gaussio-arithmétique, etc.

Exemple de la loi exponentielle

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, donc $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$, et $\ln[1 - F(x)] = -\lambda x$, qui est de la forme demandée, avec $h(x) = \ln(1 - x)$, $g(x) = x$, $\alpha(\lambda) = -\lambda$ et $\beta(\lambda) = 0$.

Le graphe de probabilité pour la loi exponentielle est donc le nuage de points $(x_i^*, \ln(1 - \frac{i}{n}))_{i=1, \dots, n-1}$ (on omet le point $i = n$ pour éviter $\ln(0)$). Si ces points sont approximativement alignés sur une droite de pente négative et passant par l'origine, alors on peut admettre que les observations proviennent bien d'une loi exponentielle. De plus, la pente de la droite fournit un estimateur de λ . Si les points ne sont pas du tout alignés, on rejettera le modèle de la loi exponentielle.

Exemple : pour le cas Boeing N° 3, le graphe de probabilité est donné sur la fiche jointe. Les points sont bien approximativement alignés sur une droite de pente négative passant par l'origine, donc on peut considérer que la loi exponentielle modélise bien le phénomène observé.

La droite des moindres carrés a pour équation $y = -0.0147x + 0.1633$; cette dernière valeur est effectivement proche de 0, et donc une estimation graphique de λ est $\lambda_g = 0.0147$.

Le problème de cette méthode est qu'on ne dispose pas de critère objectif pour décider à partir de quand les points peuvent être considérés comme étant raisonnablement alignés. Il est donc nécessaire de compléter cette méthode empirique par des méthodes statistiques plus précises.

II.2.3.2 Tests d'adéquation statistiques

Il s'agit maintenant de construire des tests statistiques de H_0 contre H_1 , dans les cas 1 et 2. Le test d'adéquation le plus répandu est le test du χ^2 , car il est facile à implémenter et que la loi du χ^2 est très connue. Cependant, il a été prouvé que ce test est peu puissant ; de plus, il nécessite beaucoup de données, ce qui est rarement disponible en fiabilité. Nous nous contenterons donc ici d'étudier les tests d'adéquation basés sur la fonction de répartition empirique.

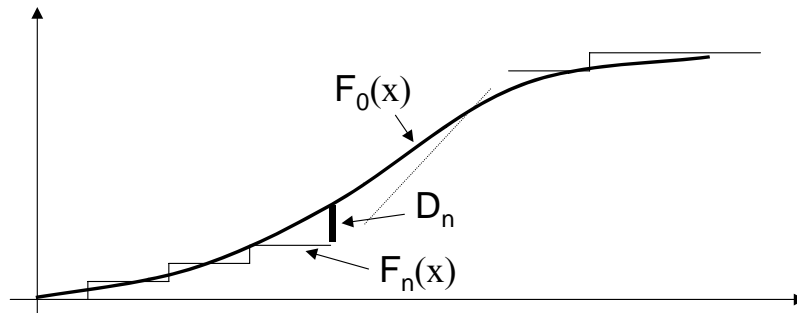
A) Cas 1 : loi entièrement spécifiée

On teste ici $H_0 : \langle F = F_0 \rangle$ contre $H_1 : \langle F \neq F_0 \rangle$. On a vu qu'il est logique de rejeter l'hypothèse $\langle F = F_0 \rangle$ si F_n et F_0 sont « significativement éloignées ». Il s'agit maintenant de définir des distances entre F_n et F_0 .

La distance la plus simple est celle de la convergence uniforme, appelée

$$\text{Distance de Kolmogorov : } D_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - F_0(x)|$$

Le théorème de Glivenko-Cantelli nous assure que sous $H_0 (F=F_0)$, $D_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$.



Théorème de Kolmogorov-Smirnov : sous $H_0 (F=F_0)$, et si F est continue, alors $\sqrt{n} D_n$ converge en loi vers la loi de probabilité dite de Kolmogorov-Smirnov, à valeurs dans \mathbf{R}^+ , de fonction de répartition :

$$F_{KS}(z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 z^2}.$$

Le côté remarquable de ce théorème, c'est que la loi limite est la même quelle que soit la loi de départ (pourvu qu'elle soit continue). C'est ce qui permet de construire un test.

Pour n grand, on va donc rejeter H_0 au seuil α si et seulement si $\sqrt{n} D_n > k_\alpha$, tel que $P_{H_0}(\sqrt{n} D_n > k_\alpha) = \alpha$, et en utilisant le théorème ci-dessus, on choisit donc de poser :

$$P_{H_0}(\sqrt{n} D_n > k_\alpha) \approx 1 - F_{KS}(k_\alpha), \text{ d'où } k_\alpha = F_{KS}^{-1}(1-\alpha).$$

La région critique correspondante pour le test est donc $W = \{ \sqrt{n} D_n > F_{KS}^{-1}(1-\alpha) \}$.

Le problème est qu'on ne peut utiliser ce test que lorsqu'on a suffisamment de données (en pratique au moins 80). Lorsqu'on dispose de peu de données, on peut utiliser une propriété de Stephens, qui a montré que, sous H_0 ,

$\forall n$ (même petit), la variable aléatoire $D_n \left(\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right)$ est approximativement de loi de Kolmogorov-Smirnov. Donc :

Théorème : la région critique du test de Kolmogorov-Smirnov est $W = \{ D_n \left(\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right) > F_{KS}^{-1}(1-\alpha) \}$.

On peut utiliser d'autres statistiques pour mesurer l'écart entre F_n et F_0 (on ne les appelle pas « distances », car ce n'en sont pas au sens mathématique du terme). Les plus usuelles sont les suivantes :

- Statistique de Cramer-von Mises : $W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x)$;
- Statistique d'Anderson-Darling : $A_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[F_n(x) - F_0(x)]^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x)$.

La fiche fournie résume la façon optimale d'utiliser ces statistiques : modifications pour de petits échantillons, formules simples pour le calcul, tables de quantiles.

Cependant, dans la pratique, il est rare que l'on s'intéresse à une loi entièrement spécifiée. On est plus souvent dans le second cas.

B) Cas 2 : famille de lois

On teste ici $H_0 : \langle F \in \mathbf{F} \rangle$ contre $H_1 : \langle F \notin \mathbf{F} \rangle$, où $\mathbf{F} = \{ F(\cdot, \theta) ; \theta \in \Theta \}$. Puisque θ est maintenant un paramètre inconnu, il est naturel d'essayer d'en déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$, et de calculer les statistiques D_n , W_n^2 et A_n^2 , en remplaçant $F_0(x)$ par $F(x; \hat{\theta}_n)$; on notera \hat{D}_n , \hat{W}_n^2 et \hat{A}_n^2 les statistiques correspondantes. Par exemple, $\hat{D}_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n)|$.

Malheureusement, le fait d'estimer θ entraîne que les lois limites de \hat{D}_n , \hat{W}_n^2 et \hat{A}_n^2 ne sont pas les mêmes que dans le cas 1. En général, ces lois dépendent de la famille de lois testée, de la procédure d'estimation, et de la valeur du paramètre θ . Or, on ne peut pas construire un test si la loi de la statistique de test dépend d'un paramètre inconnu. On montre que ce n'est pas le cas si et seulement si les paramètres sont de position et d'échelle, c'est-à-dire si et seulement si la densité des observations est de la forme $f(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$.

Pour la loi exponentielle, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est de la forme requise, donc on pourra construire un test d'adéquation à l'aide de \hat{D}_n , \hat{W}_n^2 et \hat{A}_n^2 . Pour la loi de Weibull, on a $f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$, ce qui ne répond pas à la forme demandée, donc on ne pourra pas tester l'adéquation d'un échantillon à une loi de Weibull par cette méthode.

Comme dans le cas 1, on dispose de modifications permettant d'utiliser les tests même pour de petits échantillons, ainsi que de tables de quantiles.

Exemple : on veut tester l'adéquation d'un échantillon à la loi exponentielle. L'EMV de λ est $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$. On

pose donc $\hat{U}_i = F(X_i, \hat{\lambda}_n) = 1 - e^{-\frac{X_i}{\bar{X}_n}}$, $i = 1, \dots, n$.

On calcule ensuite, par exemple, la statistique $\hat{W}_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(\hat{U}_i^* - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}$.

Pour le cas Boeing N° 3, on trouve $\hat{W}_n^2 \left(1 + \frac{0.16}{n}\right) = 0.122$. La table 2 de la fiche donne les quantiles du test de Cramer-von Mises correspondant. Au seuil $\alpha = 10\%$, ce quantile est égal à 0.175. Étant donné que 0.122 est plus petit que 0.175, on en conclut que, au seuil de 10%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que les observations proviennent d'une loi exponentielle, ce qui est cohérent avec le graphe de probabilité.

On montre que, des trois tests cités, le plus puissant est celui d'Anderson-Darling, et le moins puissant celui de Kolmogorov-Smirnov. Il est donc recommandé d'utiliser le test d'Anderson-Darling lorsqu'on souhaite déterminer si un échantillon provient bien d'une loi exponentielle.

II.3 Plans d'essais – Données censurées

II.3.1 Généralités

Les échantillons que l'on traite en fiabilité sont généralement issus d'essais de fiabilité. Les conditions expérimentales de l'essai sont déterminées par un plan d'essai. Un plan d'essai va fixer à l'avance le nombre d'appareils à tester, le critère d'arrêt du test, déterminer si les appareils défaillants sont remplacés au fur et à mesure, etc.

Lorsque le plan d'essai nous amène à stopper l'expérience avant que tous les systèmes testés soient tombés en panne, on dit que les données obtenues sont censurées. Si les critères d'arrêt sont les mêmes pour tous les éléments, on dit que l'on a affaire à une censure simple. Dans le cas contraire, on parle de censure multiple ou multicensure.

Par exemple, lorsqu'on traite de données provenant de retours d'expériences (REX), la censure provient du fait qu'on ne sait pas forcément quand les appareils ont commencé à fonctionner, et beaucoup restent encore en fonctionnement lorsqu'on fait les mesures.

Si les paramètres de fiabilité dépendent de systèmes externes (température, vibrations, etc.), les conditions de fonctionnement doivent être identiques pour tous les éléments en essai. En recommençant l'essai sous diverses contraintes, on pourra alors déterminer l'influence de l'environnement.

Pour des éléments très fiables, on risque d'attendre longtemps les défaillances, ce qui coûte très cher. On utilise donc parfois des plans d'essais accélérés. Ceux-ci consistent à « durcir » les conditions d'environnement (ce qu'on appelle le stress), de façon à « user » le système plus vite qu'en conditions normales, et faire en sorte que les pannes se produisent plus rapidement. Il reste alors à extrapoler les résultats au cas d'un niveau de stress normal ; cela nécessite de bien connaître la manière dont l'environnement influe sur la fiabilité d'un système, via les lois d'accélération.

Dans ce qui suit, on déterminera la fonction de vraisemblance de l'échantillon dans divers cas de censure. On suppose que l'on teste n systèmes de durées de vie respectives X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi, de fonction de répartition $F(\cdot; \theta)$ et de densité $f(\cdot; \theta)$.

II.3.2 Plans d'essais sans remplacement

Le plan d'essai est sans remplacement si et seulement si on ne remplace aucun des éléments tombés en panne.

II.3.2.1 Pas de censure

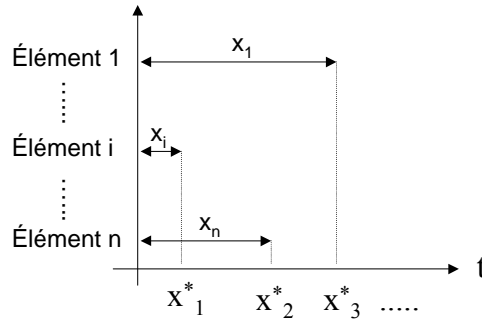
Lorsqu'il n'y a pas de censure, on observe les durées de vie x_1, \dots, x_n des n éléments. La fonction de

vraisemblance est alors $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$.

Dans la pratique, on se contente de relever au fur et à mesure les durées de bon fonctionnement des n systèmes, sans chercher à savoir quel élément a provoqué la $i^{\text{ème}}$ défaillance. Par conséquent, les observations sont en fait les statistiques d'ordre x_1^*, \dots, x_n^* . D'où :

$$L(\theta; x_1^*, \dots, x_n^*) = f_{(X_1^*, \dots, X_n^*)}(x_1^*, \dots, x_n^*; \theta) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i^*; \theta)$$

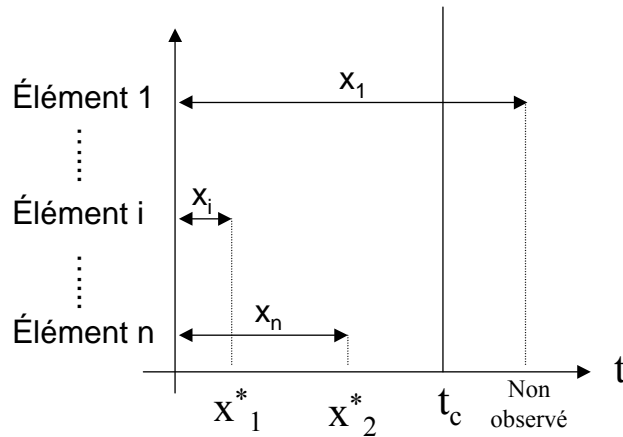
Remarque : dans cette expression, on omet l'indicatrice $1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}}$, car il va de soi qu'on ne l'emploiera que quand les x_i^* sont rangés dans cet ordre-là.



Étant donné que les deux fonctions de vraisemblance proposées ne diffèrent que par le facteur $n!$, il est clair que les estimateurs de maximum de vraisemblance correspondants seront identiques.

II.3.2.2 Plan censuré de type I

Le plan d'essais est censuré de type I lorsqu'on décide de stopper les essais au bout d'une durée t_c fixée à l'avance. Le nombre d'éléments tombés en panne à l'instant t_c est une variable aléatoire R de loi binomiale $\mathbf{B}(n, F(t_c, \theta))$. En effet, chaque élément a une probabilité $P(X \leq t_c) = F(t_c, \theta)$ de tomber en panne entre 0 et t_c et les durées de vie des composants sont indépendants.



Démonstration : en effet, R est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, et :

$$\begin{aligned} P(R=k) &= P(k \text{ appareils parmi } n \text{ sont tombés en panne avant } t_c, \text{ et les autres marchent encore à cette date}) \\ &= C_n^k P(X_1 \leq t_c, \dots, X_k \leq t_c, X_{k+1} > t_c, \dots, X_n > t_c) = C_n^k [P(X \leq t_c)]^k [P(X > t_c)]^{n-k} \\ &= C_n^k [F(t_c, \theta)]^k [1 - F(t_c, \theta)]^{n-k} \end{aligned}$$

Donc, $R \sim \mathbf{B}(n, F(t_c, \theta))$.

Propriété : $L(\theta; r, x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta) \right] [1 - F(t_c, \theta)]^{n-r}$

Préliminaire : Qu'est-ce que la fonction de vraisemblance lorsque l'échantillon est en partie discret et en partie continu ? On a

$$\begin{aligned} L(\theta; r, x_1^*, \dots, x_r^*) &= \lim_{\substack{dx_1^* \rightarrow 0 \\ \dots \\ dx_r^* \rightarrow 0}} \frac{1}{dx_1^* \dots dx_r^*} P(R=r, x_1^* < X_1^* \leq x_1^* + dx_1^*, \dots, x_r^* < X_r^* \leq x_r^* + dx_r^*) \\ &= \lim_{\substack{dx_1^* \rightarrow 0 \\ \dots \\ dx_r^* \rightarrow 0}} \frac{1}{dx_1^* \dots dx_r^*} P(x_1^* < X_1^* \leq x_1^* + dx_1^*, \dots, x_r^* < X_r^* \leq x_r^* + dx_r^* | R=r) P(R=r) \\ &= f_{(X_1^*, \dots, X_r^*) | R=r}(x_1^*, \dots, x_r^*; \theta) P(R=r) \end{aligned}$$

Démonstration : donc $L(\theta; r, x_1^*, \dots, x_r^*) = f_{(X_1^*, \dots, X_r^*)|R=r}(x_1^*, \dots, x_r^*; \theta) P(R=r)$.

Sachant $[R = r]$, (X_1^*, \dots, X_r^*) a la même loi que la statistique d'ordre de la loi de X sachant $[X \leq t_c]$.

Or $P(X \leq x | X \leq t_c) = \frac{P(X \leq x \cap X \leq t_c)}{P(X \leq t_c)} = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq t_c)}$ pour $x \leq t_c$, et 1 pour $x > t_c$.

Donc $P(X \leq x | X \leq t_c) = \frac{F(x; \theta)}{F(t_c; \theta)}$ pour $x \leq t_c$, et 1 pour $x > t_c$.

On en déduit $f_{X|X \leq t_c}(x) = \frac{f(x; \theta)}{F(t_c; \theta)} 1_{[0, t_c[}(x)$. Par la suite, on omettra l'indicatrice.

Donc $f_{(X_1^*, \dots, X_r^*)|R=r}(x_1^*, \dots, x_r^*; \theta) = r! \prod_{i=1}^r \frac{f(x_i^*; \theta)}{F(t_c; \theta)} = \frac{r!}{[F(t_c; \theta)]^r} \prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta)$.

D'où $L(\theta; r, x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{r!}{[F(t_c; \theta)]^r} \prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta) C_n^r [F(t_c; \theta)]^r [1 - F(t_c; \theta)]^{n-r}$
 $= \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta) \right] [1 - F(t_c; \theta)]^{n-r}$ CQFD

Une autre façon de faire est de remarquer que, parmi les n éléments, r sont tombés en panne aux instants

x_1^*, \dots, x_r^* (d'où $\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta)$), les $n-r$ autres ayant une durée de bon fonctionnement supérieure à t_c , (d'où

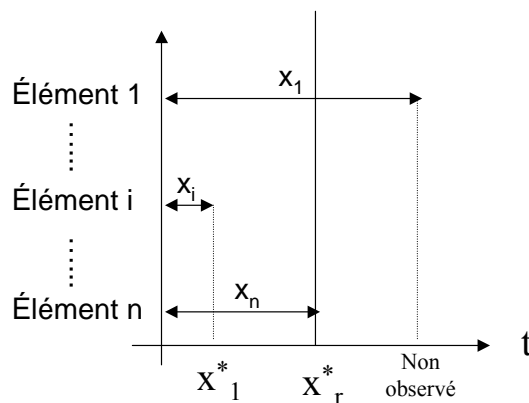
$[1 - F(t_c; \theta)]^{n-r}$), et il y a $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ façons possibles d'obtenir les r éléments qui tomberont en panne dans un ordre donné parmi n .

Remarque : il est possible qu'à la fin de l'essai on ait $r = 0$. Dans ce cas, on prend par convention

$\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta) = 1$, d'où $L(\theta; 0) = [1 - F(t_c; \theta)]^n$.

II.3.2.3 Plan censuré de type II

Le plan d'essais est censuré de type II lorsqu'on décide que l'on stoppera les essais au moment où surviendra la $r^{\text{ème}}$ défaillance. Cette fois-ci, c'est la durée des essais qui est aléatoire ; elle vaut X_r^* , dont on connaît la loi de probabilité.



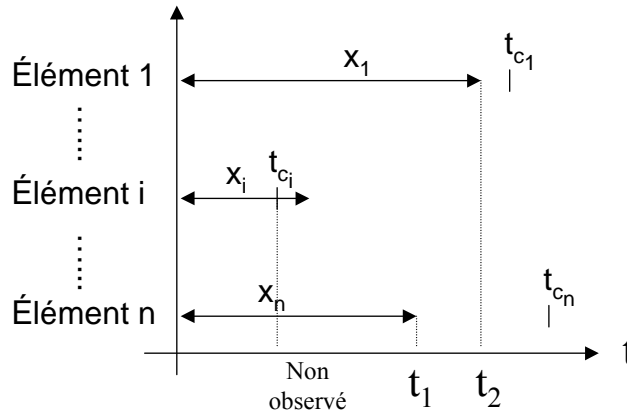
Les r premières défaillances ont lieu aux instants x_1^*, \dots, x_r^* , et les $n-r$ autres éléments ont une durée de vie supérieure à x_r^* . D'où :

$$L(\theta; x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \theta) \right] [1 - F(x_r^*; \theta)]^{n-r}$$

Remarque : on omet encore l'indicatrice sur les x_i^* , et on note que pour $r = n$, on retrouve l'absence de censure.

II.3.2.4 Plans multicensurés

Le plan d'essais est multicensuré lorsque les critères de censure sont différents suivant les éléments. Quand les éléments défaillants ne sont pas remplacés, une multicensure ne peut être que de type I : le système i est observé jusqu'à l'instant t_{c_i} .



Lors d'essais de fiabilité, on n'a pas de raison d'imposer des dates de censure différentes pour chaque élément. En revanche, la multicensure correspond plus à l'observation de systèmes en exploitation, pour lesquels les t_{c_i} sont les instants où l'on procède aux contrôles (inspections).

Parmi les n éléments, un nombre aléatoire R d'entre eux vont tomber en panne avant leurs instants de censure, aux instants $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$. Notons que la multicensure entraîne que t_i n'est pas forcément égal à x_i^* (voir figure ci-dessus). Soient i_1, \dots, i_r les indices de ces r éléments tombés en panne. Les $n-r$ autres, i_{r+1}, \dots, i_n vont tomber en panne après leurs instants de censure : l'élément i_j tombe en panne après $t_{c_{i_j}}$ pour $j \geq r+1$. Il n'y a pas de choix de r éléments parmi n à faire, car chaque élément est caractérisé par son instant de censure. Mais il y a $r!$ possibilités de ranger les r éléments tombés en panne. D'où :

$$L(\theta; r, t_1, \dots, t_r) = r! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \right] \left[\prod_{j=r+1}^n (1 - F(t_{c_{i_j}}; \theta)) \right] 1_{\{t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r\}}$$

Une autre façon de présenter ce calcul consiste à considérer qu'on observe n couples (Y_i, δ_i) avec :

- $\delta_i = 1$ si la durée de vie est observée, et 0 si la durée de vie est censurée (c'est $1_{\{X_i \leq t_{c_i}\}}$) et
- $Y_i = \text{durée observée} = \min(X_i, t_{c_i})$.

Alors la fonction de vraisemblance est $L(\theta; y_1, \delta_1, \dots, y_n, \delta_n) = \prod_{i=1}^n [f(y_i; \theta)]^{\delta_i} [1 - F(y_i; \theta)]^{1-\delta_i}$

On n'a plus de terme en $r!$ car toutes les observations y_i sont associées à un système bien identifié.

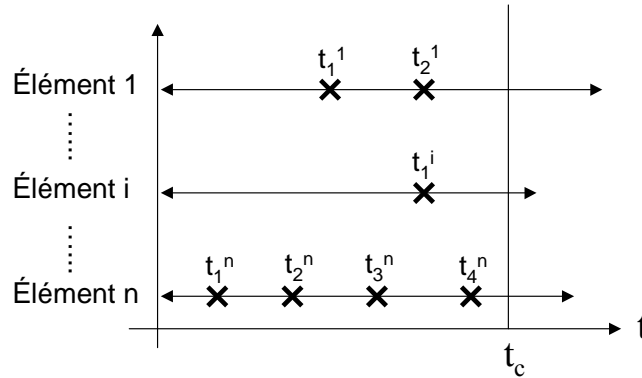
Remarque : jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des censures à droite. Il est possible d'avoir des censures à gauche, ce qui correspond au cas où les éléments sont déjà en train de fonctionner au moment où on commence leur observation, et où on ignore les dates de début de ces fonctionnements.

II.3.3 Plans d'essais avec remplacement

Un plan d'essais est avec remplacement si chaque élément qui tombe en panne est instantanément remplacé par un neuf, identique. Par abus, on considère que c'est le même élément qui est remis complètement remis à neuf. Dans ce cas, chacun des n éléments peut tomber en panne plusieurs fois. De tels plans d'essais sont forcément censurés.

II.3.3.1 Plan censuré de type I

On stoppe les essais à une date fixée à l'avance t_c .



Entre 0 et t_c , l'élément i tombe en panne k_i fois, aux instants $t_1^i < t_2^i < \dots < t_{k_i}^i \leq t_c$. On pose par convention $t_0^i = 0$. D'où :

$$L(\theta; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\left[\prod_{j=1}^{k_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \theta) \right] [1 - F(t_c - t_{k_i}^i; \theta)] \right]$$

II.3.3.2 Plan censuré de type II

On décide d'observer les r premières défaillances. Cette fois, r peut être supérieur à n , puisqu'on répare ou remplace les éléments défaillants. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, et en notant t_r l'instant de la $r^{\text{ème}}$ défaillance, on a :

$$L(\theta; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\left[\prod_{j=1}^{k_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \theta) \right] [1 - F(t_r - t_{k_i}^i; \theta)] \right]$$

II.3.3.3 Plan multicensuré de type I

L'élément i est ici observé jusqu'à l'instant t_{c_i} . On obtient :

$$L(\theta; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\left[\prod_{j=1}^{k_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \theta) \right] [1 - F(t_{c_i} - t_{k_i}^i; \theta)] \right]$$

II.3.3.4 Plan multicensuré de type II

Cette fois, on peut envisager une multicensure de type II : on observe les r_i premières défaillances de l'élément i . On obtient :

$$L(\theta; t_1^1, \dots, t_{r_n}^n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{r_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \theta)$$

Conclusion : pour tous ces plans d'essais, on peut déterminer une fonction de vraisemblance, donc on peut calculer un estimateur de maximum de vraisemblance de θ .

III Analyse statistique des échantillons de durée de vie

Dans cette partie, nous allons appliquer les méthodes étudiées au chapitre précédent, dans les cas particuliers de la loi exponentielle et de la loi de Weibull.

III.1 La loi exponentielle

On suppose que les observations sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

III.1.1 Propriétés supplémentaires de la loi exponentielle

On rappelle que pour $x \geq 0$, $F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$, $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $R(x; \lambda) = e^{-\lambda x}$, $\lambda(x; \lambda) = \lambda$, $E(X) = \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$,

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La caractéristique essentielle de la loi exponentielle est que son taux de défaillance est constant. On dit aussi que la loi exponentielle est sans mémoire : $\forall x \geq 0, \forall y > 0, P(X > x+y | X > x) = P(X > y)$. Cela signifie qu'un appareil dont la durée de vie est de loi exponentielle est un appareil qui ne s'use pas. Cette hypothèse peut paraître irréaliste, mais on a constaté que :

- Dans la période de vie utile de la courbe en baignoire, le taux de défaillance est constant ;
- Très souvent, le taux de défaillance $\lambda(x)$ converge rapidement vers une constante.

Pour ces deux raisons, la loi exponentielle peut être un modèle acceptable pour un système qui fonctionne déjà depuis un certain temps. De plus, la loi exponentielle intervient dans les systèmes markoviens, car c'est la loi du temps de séjour dans un état donné pour un tel système. Enfin, c'est aussi la loi des durées inter-événements dans un processus de Poisson homogène.

Il ne faut pas perdre de vue que la loi exponentielle est aussi beaucoup utilisée car c'est souvent la seule qui permet de faire des calculs ! Elle est donc très souvent utilisée à tort, ce qui montre la nécessité de faire des tests d'adéquation préalablement à tout calcul.

- On rappelle également que si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi

$$\text{Exp}(\lambda), \text{ alors } \sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, \lambda), \text{ et que } 2n\lambda \bar{X}_n = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2n}.$$

- On montre aussi, en appliquant la formule générale, que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, f_{X_k^*}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \lambda e^{-(n-k+1)\lambda x} [1 - e^{-\lambda x}]^{k-1}.$$

- Également, $f_{X_1^*}(x) = n\lambda e^{-n\lambda x}$; donc $X_1^* \sim \text{Exp}(n\lambda)$.

Propriété : en notant par convention $X_0^* = 0$, les variables aléatoires $Y_i = X_i^* - X_{i-1}^*$ sont indépendantes, de lois de probabilité respectives $\text{Exp}((n-i+1)\lambda)$.

Démonstration : la densité du vecteur (X_1^*, \dots, X_n^*) est :

$$f_{(X_1^*, \dots, X_n^*)}(x_1^*, \dots, x_n^*) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i^*; \lambda) 1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}} = n! \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i^*} 1_{\{x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*\}}.$$

On opère le changement de variables suivant : $Y_1 = X_1^*$, $Y_2 = X_2^* - X_1^*$, ..., $Y_n = X_n^* - X_{n-1}^*$, qui correspond à $X_1^* = Y_1$, $X_2^* = Y_1 + Y_2$, ..., $X_n^* = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

On rappelle la formule de changement de variable : si $(Y_1, \dots, Y_n) = \varphi(X_1, \dots, X_n)$, alors en appelant $J_{\varphi^{-1}}$ la matrice $(\frac{\partial x_i}{\partial y_j})_{i,j}$, on a $f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) = |\det J_{\varphi^{-1}}| f_{(X_1, \dots, X_n)}(\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n))$.

Ici, on a $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = 1_{\{i \leq j\}}$, et $J(y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$, et donc $|\det J| = 1$. On en déduit :

$$f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) = n! \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^n y_j} 1_{\{y_1 \leq y_1 + y_2 \leq \dots \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n\}} = n! \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=j}^n 1} 1_{\{y_1 \leq y_1 + y_2 \leq \dots \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n\}}$$

$$f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) = \lambda n \lambda (n-1) \dots 2 \lambda \lambda e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (n-i+1)y_i} 1_{\{\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, y_i \geq 0\}} = \prod_{i=1}^n \lambda (n-i+1) e^{-\lambda (n-i+1)y_i} 1_{\{y_i \geq 0\}}.$$

Donc $f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f_{\text{Exp}(\lambda(n-i+1))}(y_i)$, ce qui prouve la propriété.

Corollaire 1 : $E(X_k^*) = E(\sum_{i=1}^k Y_i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}$, et $\text{Var}(X_k^*) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}$.

Ce corollaire est utilisé pour prévoir la durée moyenne des essais pour un plan censuré de type II sans remplacement. On note aussi qu'il est plus facile de calculer $E(X_k^*)$ à l'aide de cette formule, qu'avec la densité de X_k^* .

Corollaire 2 : les variables aléatoires $Z_i = (n-i+1)(X_i^* - X_{i-1}^*)$ sont indépendantes et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, pour $i = 1, \dots, n$.

Ceci provient du résultat selon lequel si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, alors $\alpha X \sim \text{Exp}(\frac{\lambda}{\alpha})$. On montre en fait que les variables $(n-i+1)(X_i^* - X_{i-1}^*)$ et X_i ont la même loi de probabilité si et seulement si les X_i sont de loi exponentielle (ceci, grâce à la transformée de Durbin).

Remarque : on a aussi indépendance entre $X_i^* - X_{i-2}^*$ et X_{i-1}^* (par la sommation des Y_j).

Données complètes

Rappelons les résultats déjà obtenus lorsqu'on observe les n durées de vie des n appareils testés.

- On sait faire un graphe de probabilité pour tester graphiquement l'adéquation de l'échantillon à la loi exponentielle ;
- On sait conduire des tests d'adéquation à la loi exponentielle avec paramètre estimé : Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Anderson-Darling, ainsi que le test du χ^2 , moins puissant que les précédents.

D'autres tests existent pour la loi exponentielle.

Test du MIL-HDBK 189

Ce test est une variante logarithmique du test de Laplace.

Si on note $V_n = -2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{\sum_{j=1}^n X_j}$, on montre que $V_n \sim \chi^2_{2(n-1)}$.

La région critique correspondante est $W = \{ V_n < z_{2(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } V_n > z_{2(n-1), \frac{\alpha}{2}} \}$.

Test de Laplace avec transformée de Durbin

On note $Z_i = (n-i+1) (X_i^* - X_{i-1}^*)$, et $T_i = \sum_{j=1}^i Z_j = \sum_{j=1}^i X_j^* + (n-i) X_i^*$, on montre que $T_i \sim G(i, \lambda)$.

Le théorème central-limite nous indique alors que
$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} T_i - \frac{n-1}{2} T_n}{\sqrt{\frac{n-1}{12} T_n}} \xrightarrow{L} \mathbf{N}(0,1).$$

On peut aussi utiliser le fait que $-2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{T_i}{T_n} \sim \chi^2_{2(n-1)}$.

Si toutes ces méthodes ne nous ont pas conduits à rejeter l'hypothèse de la loi exponentielle, on peut utiliser les résultats suivants :

- L'estimateur du maximum de vraisemblance et celui des moments sont confondus : $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

Mais cet estimateur est biaisé ;

- $\frac{(n-1)}{n} \hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i} = \hat{\lambda}'_n$ est sans biais. Comme $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive et complète, $\hat{\lambda}'_n$ est

l'estimateur sans biais de variance minimum de λ ;

- $\hat{\lambda}'_n$ n'est pas un estimateur efficace (il n'en existe d'ailleurs pas), mais il est asymptotiquement efficace :

$$\text{Eff}(\hat{\lambda}'_n) = \frac{n-2}{n} ;$$

- Un intervalle de confiance de seuil α pour λ est :
$$\left[\frac{F_{\chi^2_{2n}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sum_{i=1}^n X_i} ; \frac{F_{\chi^2_{2n}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sum_{i=1}^n X_i} \right].$$

Avec la notation usuelle $z_{n,\alpha} = F_{\chi^2_n}^{-1}(1-\alpha)$, l'intervalle de confiance s'écrit $\left[\frac{z_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n \bar{X}_n} ; \frac{z_{2n, \frac{\alpha}{2}}}{2n \bar{X}_n} \right]$. Les tables

donnent des valeurs de $z_{n,\alpha}$ pour $n \leq 30$. On peut donc calculer des intervalles de confiance pour $n \leq 15$. Pour $n > 30$, on montre que $z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2} (\sqrt{2n-1} + u_{2\alpha})^2$ si $\alpha < \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} (\sqrt{2n-1} - u_{2(1-\alpha)})^2$ si $\alpha > \frac{1}{2}$. Par conséquent, pour plus de 15 données, un intervalle de confiance de seuil α pour λ est :

$$\left[\frac{(\sqrt{4n-1} - u_\alpha)^2}{4 \sum_{i=1}^n X_i} ; \frac{(\sqrt{4n-1} + u_\alpha)^2}{4 \sum_{i=1}^n X_i} \right].$$

En général, on s'intéresse en pratique plus à un intervalle de confiance pour le MTTF. Si on s'intéresse plutôt à la fiabilité du système à un instant x donné, on considère $R(x) = e^{-\lambda x}$, et on sait que l'estimateur de maximum

de vraisemblance de $R(x)$ est $\hat{R}_x = e^{-\hat{\lambda}_n x} = e^{-\frac{x}{\bar{X}_n}}$. Il n'est pas facile de calculer le biais de \hat{R}_x :

$$E(\hat{R}_x) = E\left(e^{-\frac{x}{\bar{X}_n}}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} f_{\bar{X}_n}(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} \frac{(\lambda n)^n}{(n-1)!} e^{-n\lambda y} y^{n-1} dy, \text{ car } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim G(n, n\lambda).$$

On montre que \hat{R}_x est biaisé. Après l'avoir débiaisé, on trouve l'ESBVM en projetant cet estimateur sans biais sur la statistique exhaustive et complète $\sum_{i=1}^n X_i$. On obtient :

Propriété : $\tilde{R}_x = \left(1 - \frac{x}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{n-1}$ si $x < \sum_{i=1}^n X_i$, et 0 si $x \geq \sum_{i=1}^n X_i$, est l'estimateur sans biais de variance minimum de $R(x)$.

Remarque : étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$, on retrouve pour n grand

$$\tilde{R}_x = \left(1 - \frac{x}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{(n-1)x}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_n' x}{n-1}\right)^{n-1} \approx e^{-\hat{\lambda}_n' x}.$$

Lorsque $P(a \leq \lambda \leq b) = \alpha$, on a aussi $P(e^{-bx} \leq e^{-\lambda x} \leq e^{-ax}) = \alpha$. On en déduit un intervalle de confiance de seuil

$$\alpha \text{ pour } R(x) : \left[e^{-\frac{x}{2 \sum_{i=1}^n X_i} F_{2n}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}, e^{-\frac{x}{2 \sum_{i=1}^n X_i} F_{2n}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right].$$

Dans les problèmes de fiabilité, il est intéressant de donner une borne supérieure pour le taux de défaillance et une borne inférieure pour la fiabilité, c'est-à-dire des intervalles de confiance du type $[0, \lambda_{\text{sup}}]$ pour λ , et $[R_{\text{inf}}, 1]$ pour la fiabilité $R(x)$.

$$\text{Or } P(\lambda \leq \lambda_{\text{sup}}) = P(2n\lambda \bar{X}_n \leq 2n\lambda_{\text{sup}} \bar{X}_n) = F_{\chi_n^2}^{-1}(2n\lambda_{\text{sup}} \bar{X}_n), \text{ qui vaut } 1-\alpha \text{ pour } \lambda_{\text{sup}} = \frac{1}{2n\bar{X}_n} F_{\chi_n^2}^{-1}(1-\alpha).$$

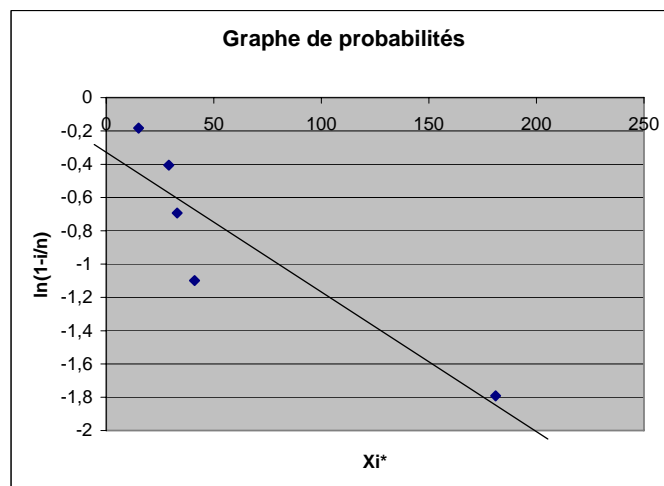
On en déduit évidemment $R_{\text{inf}} = e^{-\lambda_{\text{sup}} x} = e^{-\frac{x}{2n\bar{X}_n} F_{\chi_n^2}^{-1}(1-\alpha)}$. On peut naturellement associer à ces intervalles de confiance des tests du type « $\lambda \leq \lambda_0$ » contre « $\lambda > \lambda_0$ ».

Exemple : prenons les temps inter-défaillances des appareils d'air conditionné du premier Boeing. On a : $n = 6$ données

$x_i :$ 194, 15, 41, 29, 33, 181
 $x_i^* :$ 15, 29, 33, 41, 181, 194

Le test d'adéquation graphique consiste à juger si les points $(x_i^*, \ln(1 - \frac{i}{n}))_{i=1, \dots, n-1}$ sont alignés.

$\ln(1 - \frac{i}{n}) :$ -0.182, -0.405, -0.693, -1.099, -1.792



Sur ce graphe, il semble que les quatre premiers points sont bien alignés, mais que le dernier n'est pas du tout dans le même alignement. Pourtant, le coefficient de corrélation linéaire vaut -0.904 , ce qui est plutôt correct.

La droite des moindres carrés a pour équation $y = -0,00840x - 0,332$. Sur le graphe, elle n'a pas l'air de passer par l'origine.

En fait, tout est une question d'échelle : si on prend la même échelle pour l'axe des abscisses et celui des ordonnées, on constate que les quatre premiers points sont pratiquement confondus, donc ils sont bien alignés avec le dernier ! Et la droite des moindres carrés passe alors très près de l'origine ($b = -0,332$ est négligeable devant 181). Ceci prouve qu'il faut se méfier des conclusions trop hâtives tirées des graphiques, et qu'il vaut mieux compléter ses informations par des tests statistiques.

Pour effectuer des tests d'adéquation à la loi exponentielle de paramètre inconnu, on calcule tout d'abord les

$\hat{u}_i = F(x_i, \hat{\lambda}(x_1, \dots, x_n)) = 1 - e^{-\frac{x_i}{\hat{\lambda}_n}}$, puis on calcule \hat{d}_n , \hat{w}_n^2 et \hat{a}_n^2 grâce à leurs expressions en fonction des \hat{u}_i . Enfin, on applique les modifications appropriées sur ces statistiques pour les effectifs faibles, et on compare les valeurs trouvées au tableau adéquat. On trouve ici :

- $ks_n = (\hat{d}_n - \frac{0.2}{n})(\sqrt{n} + 0.26 + \frac{0.5}{\sqrt{n}}) = 0,701$;
- $cvm_n = \hat{w}_n^2 (1 + \frac{0.16}{n}) = 0,089$;
- $ad_n = \hat{a}_n^2 (1 + \frac{0.6}{n}) = 0,569$.

Ces valeurs sont très nettement inférieures aux bornes que l'on trouve dans les tables, même pour des seuils très faibles. Par conséquent, on ne rejettera certainement pas H_0 . Tous nos calculs nous poussent à considérer que ces données forment bien un échantillon d'une loi exponentielle.

Une première estimation de λ est obtenue grâce à la pente de la droite de régression : $\tilde{\lambda} = 0,00840 = 0,84 \cdot 10^{-2}$, ce qui nous fournit une première estimation de MTTF égale à $\frac{1}{\tilde{\lambda}} = 119$ h. L'estimation du maximum de

vraisemblance est $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_n} = 0,0122 = 1,22 \cdot 10^{-2}$, et l'ESBVM est $\hat{\lambda}'_n = \frac{n-1}{n} \hat{\lambda}_n = 1,01 \cdot 10^{-2}$.

On constate que l'ESBVM et l'estimation graphique ne sont pas très éloignées l'une de l'autre, et fournissent des estimateurs voisins pour le MTTF : $\frac{1}{\hat{\lambda}'_n} = 98,6$ h et $\frac{1}{\tilde{\lambda}} = 82,2$ h (c'est en fait lui l'ESBVM du MTTF).

Pour $\alpha = 5\%$ et $n = 6$ (donc $\frac{\alpha}{2} = 0,025$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$; $1 - \alpha = 0,95$; $2n = 12$), les tables du χ^2 donnent les

valeurs suivantes : $F_{\chi^2_{2n}}^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = 4,40$; $F_{\chi^2_{2n}}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = 23,34$; $F_{\chi^2_{2n}}^{-1}(1 - \alpha) = 21,03$.

On obtient donc $[0,45 \cdot 10^{-2} ; 2,37 \cdot 10^{-2}]$ comme intervalle de confiance pour λ , et une borne supérieure λ_{sup} pour λ égale à $2,13 \cdot 10^{-2}$. On peut donc dire qu'il y a 95% de chances que le taux de défaillance des appareils d'air conditionné dans le Boeing 1 soit inférieur à $2,13 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1}$, ce qui nous donne une borne inférieure du MTTF de l'ordre de 47 h.

Choisissons par exemple d'évaluer la fiabilité de ces appareils sur une période de $x = 100$ h.

On obtient $\hat{R}_{100} = 0.322$, ce qui signifie qu'on estime à 32% les chances qu'un appareil d'air conditionné du type de ceux du Boeing 1 fonctionne correctement pendant au moins 100 heures.

Pour un seuil $\alpha = 5\%$, on obtient $[0,094 ; 0,640]$ comme intervalle de confiance pour cette fiabilité, soit $[9,4\% ; 64\%]$, et comme borne inférieure $0,119 = 11,9\%$. Cet intervalle de confiance est tellement large qu'il n'est en fait d'aucune utilité. C'est toujours le cas lorsqu'on dispose de très peu d'observations. Pour le Boeing 3, avec 29 défaillances observées, les intervalles de confiance seront beaucoup plus resserrés, donc plus exploitables.

III.1.2 Plan censuré de type I sans remplacement

On décide de stopper les essais au bout d'une durée t_c fixée à l'avance. Les observations sont le nombre r d'appareils tombés en panne parmi les n , et les dates ordonnées de ces pannes x_1^*, \dots, x_r^* .

Par exemple, si on avait censuré les données du Boeing 1 à $t_c = 100$ h, les observations seraient $r = 4$ et $x_i^* = 15, 29, 33, 41$. On saurait de plus que 2 de ces appareils ne sont pas encore tombés en panne au bout des 100 heures (information capitale, qu'il faut absolument prendre en compte dans les calculs).

Tests d'adéquation

La fonction de répartition empirique n'est déterminée que jusqu'à t_c . On peut donc tracer les r premiers points du graphe de probabilité $(x_i^*, \ln(1 - \frac{i}{n}))_{i=1, \dots, r}$. Mais il est possible que ces premiers points soient alignés, sans que l'ensemble des n points du nuage complet le soient. De plus, en considérant le graphe partiel, on ne prend pas du tout en compte l'instant de censure. Les enseignements à tirer de ce graphe ne peuvent donc être qu'indicatifs.

Étant donné qu'on ne connaît pas $F_n(x)$ au-delà de t_c , il est impossible de calculer les statistiques D_n , W_n^2 et A_n^2 (cas 1) ou \hat{D}_n , \hat{W}_n^2 et \hat{A}_n^2 (cas 2). En revanche, on peut calculer des statistiques de ce type, mais censurées. Par exemple, lorsqu'on procède à un test d'adéquation à une loi entièrement spécifiée, on peut calculer :

$$D_{tc,n}^I = \sup_{x \in [0, t_c]} |F_n(x) - F_0(x)| = \max(\max\{\frac{i}{n} - U_i^*; i=1, \dots, r\}, \max\{U_i^* - \frac{i-1}{n}; i=1, \dots, r\}, F_0(t_c) - \frac{r}{n}).$$

La loi asymptotique de $D_{tc,n}^I$ dépend de t_c . Lorsqu'on fait un test d'adéquation à une famille de lois, la loi asymptotique de $D_{tc,n}^I$ dépend en plus du type de loi testé. On peut donc bien faire des tests d'adéquation avec des échantillons censurés en utilisant les statistiques usuelles, mais cela nécessite l'utilisation de nombreuses tables, ce qui se révèle peu pratique à l'usage. Aussi préfère-t-on utiliser des tests plus faciles à mettre en œuvre.

D'après le corollaire 2, lorsque X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, alors les variables aléatoires $Z_i = (n-i+1)(X_i^* - X_{i-1}^*)$ sont indépendantes et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$. Par conséquent, Z_1, \dots, Z_n forment un échantillon de taille r de la loi $\text{Exp}(\lambda)$, ce que l'on sait parfaitement tester, que λ soit connu ou pas, même si on ne prend toujours pas en compte t_c .

Estimation

On a déjà vu que :

- Le nombre R de défaillances entre 0 et t_c est de loi $\mathbf{B}(n, F(t_c; \lambda)) = \mathbf{B}(n, 1 - e^{-\lambda t_c})$;
- La fonction de vraisemblance est :

$$L(\lambda; r, x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \lambda) \right] [1 - F(t_c; \lambda)]^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r [\lambda e^{-\lambda x_i^*}] (e^{-\lambda t_c})^{n-r}$$

$$L(\lambda; r, x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \lambda^r e^{-\lambda \left[\sum_{i=1}^r x_i^* + (n-r)t_c \right]}.$$

Cette écriture montre que $(R, \sum_{i=1}^R X_i^*)$ est une statistique exhaustive. Mais parce que cette statistique est de

dimension 2 alors que le paramètre n'a qu'une dimension, que le calcul de $\sum_{i=1}^R X_i^*$ nécessite de connaître R , et par suite d'autres difficultés, on ne peut appliquer les théorèmes usuels, donc on ne peut pas trouver dans ce cas l'ESBVM de λ .

L'estimateur du maximum de vraisemblance, lui, se calcule facilement et vaut :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{R}{\sum_{i=1}^R X_i^* + (n-R)t_c}$$

Le fait que R soit aléatoire rend la loi de probabilité de $\hat{\lambda}_n$ très complexe. Même la détermination de son biais est ardue. Aussi préfère-t-on souvent utiliser un autre estimateur. R est de loi $B(n, 1 - e^{-\lambda t_c})$; au vu de la seule observation de r (i.e. en constatant qu'il est advenu r défaillances entre 0 et t_c , mais sans avoir relevé les instants de défaillance), la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\lambda; r) = P(R = r) = C_n^r (1 - e^{-\lambda t_c})^r (e^{-\lambda t_c})^{n-r}$$

$$\text{Donc } \ln L(\lambda; r) = \ln C_n^r + r \ln(1 - e^{-\lambda t_c}) - \lambda (n-r) t_c. \text{ On en déduit } \frac{\partial \ln L(\lambda; r)}{\partial \lambda} = \frac{r t_c e^{-\lambda t_c}}{1 - e^{-\lambda t_c}} - (n-r) t_c.$$

$$\text{Cette dernière expression vaut } 0 \text{ pour } r e^{-\lambda t_c} = (n-r) (1 - e^{-\lambda t_c}) = n - r + r e^{-\lambda t_c} - n e^{-\lambda t_c}, \text{ soit } e^{-\lambda t_c} = \frac{n-r}{n}.$$

Finalement, on obtient un nouvel estimateur de λ :

$$\tilde{\lambda}_n = -\frac{1}{t_c} \ln\left(1 - \frac{R}{n}\right)$$

C'est aussi l'estimateur des moments, puisque $E(R) = n(1 - e^{-\lambda t_c})$ et donc $e^{-\tilde{\lambda}_n t_c} = 1 - \frac{R}{n}$. On montre que les deux estimateurs $\hat{\lambda}_n$ et $\tilde{\lambda}_n$ sont équivalents (en termes de variance) quand $p = 1 - e^{-\lambda t_c}$ est petit (ce qui correspond à une forte censure, cas où peu d'appareils sont tombés en panne à l'instant t_c), mais que $\hat{\lambda}_n$ est meilleur que $\tilde{\lambda}_n$ lorsque p est grand. L'avantage de $\tilde{\lambda}_n$ par rapport à $\hat{\lambda}_n$ est que la loi de probabilité de R est très simple, ce qui permet de construire des tests et des intervalles de confiance plus facilement qu'avec $\hat{\lambda}_n$.

En effet, un intervalle de confiance asymptotique classique pour le paramètre p d'une loi binomiale est :

$$\left[\frac{R}{n} - u_\alpha \sqrt{\frac{R(n-R)}{n^3}} ; \frac{R}{n} + u_\alpha \sqrt{\frac{R(n-R)}{n^3}} \right], \text{ où } u_\alpha \text{ est tel que } P(|U| > u_\alpha) = \alpha \text{ lorsque } U \sim N(0;1).$$

On en déduit donc un intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour λ :

$$\left[-\frac{1}{t_c} \ln\left(1 - \frac{R}{n} + u_\alpha \sqrt{\frac{R(n-R)}{n^3}}\right) ; -\frac{1}{t_c} \ln\left(1 - \frac{R}{n} - u_\alpha \sqrt{\frac{R(n-R)}{n^3}}\right) \right].$$

Exemple : avec les données du Boeing N° 1 censurées à $t_c = 100$ h, on a :

$$n = 6, r = 4, x_i^* : 15, 29, 33, 41 ;$$

$$x_i^* - x_{i-1}^* : 15, 14, 4, 8 ;$$

$$z_i = (n-i+1)(x_i^* - x_{i-1}^*) : 90, 70, 16, 24.$$

Les quatre premiers points du graphe de probabilité sont bien alignés, comme on l'a déjà vu. Lorsqu'on fait un test d'adéquation à la loi exponentielle à partir des z_i , on trouve un coefficient de corrélation linéaire du graphe de probabilité égal à $-0,972$; les statistiques de tests valent $ks_n = 0,562$; $cvm_n = 0,636$; $ad_n = 0,434$.

Tout cela nous conduit à ne pas rejeter l'hypothèse de la loi exponentielle. Les deux estimations de λ valent

$$\hat{\lambda}_n = \frac{4}{15 + 29 + 33 + 41 + 2 \cdot 100} \approx 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ et } \tilde{\lambda}_n = -\frac{1}{100} \ln\left(1 - \frac{4}{6}\right) \approx 1,10 \cdot 10^{-2}. \text{ Ces valeurs sont tout-à-fait cohérentes avec les valeurs trouvées pour les données complètes.}$$

On peut également utiliser l'intervalle de confiance exact pour le paramètre p de la loi binomiale :

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{n-r+1}{r} F_{F(2(n-r+1), 2r)}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})} ; \frac{1}{1 + \frac{n-r}{r+1} F_{F(2(r+1), 2(n-r))}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \right] = [a ; b].$$

On sait que $P(a \leq 1 - e^{-\lambda t_c} \leq b) = 1 - \alpha$, donc $P(1-b \leq e^{-\lambda t_c} \leq 1-a) = 1 - \alpha$, et $P(\ln(1-b) \leq -\lambda t_c \leq \ln(1-a)) = 1 - \alpha$.

Donc $P(-\frac{1}{t_c} \ln(1-a) \leq \lambda \leq -\frac{1}{t_c} \ln(1-b)) = 1 - \alpha$, et l'intervalle de confiance correspondant pour λ est :

$$[-\frac{1}{t_c} \ln(1-a) ; -\frac{1}{t_c} \ln(1-b)].$$

III.1.3 Plan censuré de type II sans remplacement

On décide ici de stopper les essais au bout de r défaillances. r est cette fois connu, donc les observations sont simplement x_1, \dots, x_r . Les tests d'adéquation proposés pour la censure de type I sont toujours valables ici, puisqu'ils ne prenaient pas en compte l'instant de censure t_c . La fonction de vraisemblance est :

$$L(\lambda; x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \lambda) \right] [1 - F(x_r^*; \lambda)]^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \lambda^r e^{-\lambda \left[\sum_{i=1}^r x_i^* + (n-r)x_r^* \right]},$$

ce qui permet de calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour λ :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{r}{\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r)X_r^*}$$

$\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*$ est une statistique exhaustive. On montre qu'elle est complète. $\hat{\lambda}_n$ n'est pas sans biais, mais

$\hat{\lambda}'_n = \frac{r-1}{r} \hat{\lambda}_n$ l'est. Par conséquent :

$$\text{Propriété : } \hat{\lambda}'_n = \frac{r-1}{\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r)X_r^*} \text{ est l'estimateur sans biais de variance minimum de } \lambda.$$

De même, $\frac{1}{\hat{\lambda}'_n}$ est l'ESBVM du MTTF.

$$\text{Propriété : } 2\lambda \left(\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right) \sim \chi^2_{2r}$$

Démonstration : elle est similaire à celle pour un échantillon non censuré de loi $\text{Exp}(\lambda)$.

Les $Z_i = (n-i+1)(X_i^* - X_{i-1}^*)$ sont indépendantes et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, avec la convention $X_0^* = 0$. Donc

$$\sum_{i=1}^r Z_i \text{ est de loi } G(r; \lambda) \text{ et } 2\lambda \sum_{i=1}^r Z_i \sim G\left(r; \frac{\lambda}{2\lambda}\right) = G\left(\frac{2r}{2}; \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2r}.$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^r Z_i = \sum_{i=1}^r (n-i+1)(X_i^* - X_{i-1}^*) = nX_1^* + (n-1)(X_2^* - X_1^*) + (n-2)(X_3^* - X_2^*) + \dots + (n-r+1)(X_r^* - X_{r-1}^*).$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^r Z_i = X_1^* + X_2^* + \dots + X_{r-1}^* + (n-r+1)X_r^* = \sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r)X_r^*.$$

On en déduit que $2\lambda \left(\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right) \sim G\left(r; \frac{\lambda}{2\lambda}\right) = G\left(\frac{2r}{2}; \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2r}$. CQFD

Conséquence immédiate :

Propriété : un intervalle de confiance de seuil α pour λ est :

$$\left[\frac{F_{\chi^2_{2r}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \left[\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right]}, \frac{F_{\chi^2_{2r}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \left[\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right]} \right] = \left[\frac{Z_{2r, 1 - \frac{\alpha}{2}}}{2 \left[\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right]}, \frac{Z_{2r, \frac{\alpha}{2}}}{2 \left[\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^* \right]} \right]$$

On a également un résultat optimal pour la fiabilité :

Propriété : $\hat{R}_x = \left(1 - \frac{x}{\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*} \right)^{n-1}$ si $x < \sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*$, et 0 si $x \geq \sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*$, est

l'estimateur sans biais de variance minimum de $R(x)$, $\forall x > 0$.

Démonstration : l'estimateur de maximum de vraisemblance de $R(x) = e^{-\lambda x}$ est $e^{-\hat{\lambda}_n x} = e^{-\frac{r x}{\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*}}$, qui est biaisé. Il est facile de trouver un estimateur sans biais lorsqu'on remarque que $Z_1 = n X_1^* \sim \text{Exp}(\lambda)$. La variable aléatoire $1_{\{n X_1^* > x\}}$ est telle que :

$E(1_{\{n X_1^* > x\}}) = P(n X_1^* > x) = R(x)$, donc c'est un estimateur sans biais de $R(x)$. Par conséquent, et puisque

$\sum_{i=1}^r Z_i = \sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r) X_r^*$ est une statistique exhaustive et complète, le théorème de Lehmann-Schaffé nous

permet d'affirmer que l'ESBVM de $R(x)$ est $\hat{R}_x = E[1_{\{n X_1^* > x\}} | \sum_{i=1}^r Z_i]$.

$$\text{On a } E[1_{\{Z_1 > x\}} | \sum_{i=1}^r Z_i = u] = P(Z_1 > x | \sum_{i=1}^r Z_i = u) = \int_x^{+\infty} f_{Z_1 | \sum_{i=1}^r Z_i = u}(z) dz = \int_x^{+\infty} \frac{f_{(Z_1, \sum_{i=1}^r Z_i)}(z, u)}{f_{\sum_{i=1}^r Z_i}(u)} dz$$

$$E[1_{\{Z_1 > x\}} | \sum_{i=1}^r Z_i = u] = \int_x^{+\infty} \frac{f_{(Z_1, \sum_{i=2}^r Z_i)}(z, u-z)}{f_{\sum_{i=1}^r Z_i}(u)} dz = \int_x^{+\infty} \frac{f_{Z_1}(z) f_{\sum_{i=2}^r Z_i}(u-z)}{f_{\sum_{i=1}^r Z_i}(u)} dz.$$

Comme $Z_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\sum_{i=2}^r Z_i \sim G(r-1, \lambda)$ et $\sum_{i=1}^r Z_i \sim G(r, \lambda)$, on peut écrire :

$$E[1_{\{Z_1 > x\}} | \sum_{i=1}^r Z_i = u] = \int_x^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-2)!} e^{-\lambda(u-z)} (u-z)^{r-2}}{\frac{\lambda^r}{(r-1)!} e^{-\lambda u} u^{r-1}} 1_{\{u \geq z \geq 0\}} dz.$$

Cette intégrale est nulle pour $u < x$, et pour $u \geq x$, on a :

$$E[1_{\{Z_1 > x\}} | \sum_{i=1}^r Z_i = u] = \int_x^u (r-1) \frac{(u-z)^{r-2}}{u^{r-1}} dz = \frac{1}{u^{r-1}} [- (u-z)^{r-1}]_x^u = \frac{(u-x)^{r-1}}{u^{r-1}} = \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{r-1}.$$

Donc $\hat{R}_x = 0$ si $\sum_{i=1}^r Z_i < x$, et $(1 - \frac{x}{\sum_{i=1}^r Z_i})^{r-1}$ sinon. CQFD

Et pour $r = n$, on retrouve bien l'indicateur optimal de la fiabilité pour des données complètes.

La durée des essais est X_r^* . Elle est donc aléatoire. La durée moyenne des essais est $E(X_r^*) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}$. On ne peut pas l'évaluer à l'avance, car elle dépend de λ , qui est inconnu. Par contre, si on ne faisait pas de censure, la durée des essais serait X_n^* . Donc, le pourcentage de temps gagné en faisant la censure est $\frac{X_n^* - X_k^*}{X_n^*} = 1 - \frac{X_k^*}{X_n^*}$. À défaut de pouvoir calculer exactement la valeur moyenne de ce

pourcentage, on peut en donner une approximation : $1 - \frac{E(X_k^*)}{E(X_n^*)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}} = \frac{\sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}}$.

Ainsi, lorsqu'on dispose de 6 appareils et qu'on décide de censurer au bout de 4 défaillances, on peut espérer

un pourcentage de temps gagné de l'ordre de $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{1}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}} = 61,2\%$. Dans la pratique, et dans le cas du

Boeing N° 1, on a gagné $\frac{194 - 41}{194} = 78,9\%$ du temps.

Remarque 1 : ce gain de temps est de toutes façons compensé par une perte de précision des estimateurs.

Remarque 2 : on montre que $E(X_{k+1}^* | X_1^*, \dots, X_k^*) = X_k^* + \frac{1}{\lambda(n-k)}$, ce qui permet de prédire l'instant de la prochaine défaillance.

Remarque 3 : le cas de la censure de type II possède toutes les bonnes propriétés statistiques du cas où les données sont complètes. En fait, on peut considérer le cas des données complètes comme un cas particulier de données censurées de type II pour lequel $r = n$. La censure de type I est, elle, de nature complètement différente.

III.1.4 Plan multi-censuré sans remplacement

L'élément i est censuré à l'instant t_{c_i} . Les éléments i_1, \dots, i_r sont tombés en panne aux instants $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$.

La fonction de vraisemblance est $L(\lambda; r, t_1, \dots, t_r) = r! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i; \lambda) \right] \left[\prod_{j=r+1}^n (1 - F(t_{c_j}; \lambda)) \right] 1_{\{t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r\}}$.

$L(\lambda; r, t_1, \dots, t_r) = r! \lambda^r e^{-\lambda \left[\sum_{i=1}^r t_i + \sum_{j=r+1}^n t_{c_{i_j}} \right]}$, et après calculs, l'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{R}{\sum_{i=1}^R T_i + \sum_{j=R+1}^n t_{c_{i_j}}}$$

Démonstration alternative :

Considérons $\delta_i = 1_{\{x_i \leq t_{c_i}\}}$ et $y_i = \min(x_i, t_{c_i})$. Alors $L(\lambda; y_1, \delta_1, \dots, y_n, \delta_n) = \prod_{i=1}^n [f(y_i)]^{\delta_i} [1 - F(y_i)]^{1-\delta_i}$.

$L(\lambda; y_1, \delta_1, \dots, y_n, \delta_n) = \lambda^{\sum_{i=1}^n \delta_i} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i}$. On a $\sum_{i=1}^n \delta_i = r$, et comme $\delta_i \sim \mathbf{B}(F(t_{c_i}))$, R est donc une somme de variables

aléatoires de Bernoulli, indépendantes mais pas de même paramètre. On montre que $\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$.

$(R, \sum_{i=1}^R T_i)$ est une statistique exhaustive, mais cela ne permet pas de déterminer les propriétés de $\hat{\lambda}_n$, ni de trouver un ESBVM. On montre qu'un intervalle de confiance approché de seuil α pour λ est :

$$\left[\frac{F_{\chi^2_{2R}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \left[\sum_{i=1}^R T_i + \sum_{j=R+1}^n t_{c_{ij}} \right]}, \frac{F_{\chi^2_{2R}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \left[\sum_{i=1}^R T_i + \sum_{j=R+1}^n t_{c_{ij}} \right]} \right] = \left[\frac{Z_{2R, 1 - \frac{\alpha}{2}}}{2 \left[\sum_{i=1}^R T_i + \sum_{j=R+1}^n t_{c_{ij}} \right]}, \frac{Z_{2R, \frac{\alpha}{2}}}{2 \left[\sum_{i=1}^R T_i + \sum_{j=R+1}^n t_{c_{ij}} \right]} \right]$$

(attention au fait que R reste une variable aléatoire).

III.1.5 Plan censuré de type I avec remplacement

Dans ce cas, on stoppe les essais à la date t_c fixée à l'avance. Entre 0 et t_c , l'élément i est tombé en panne k_i fois, aux instants $t_1^i < t_2^i < \dots < t_{k_i}^i \leq t_c$. En posant par convention $t_0^i = 0$, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\lambda; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\left[\prod_{j=1}^{k_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \lambda) \right] \left[1 - F(t_c - t_{k_i}^i; \lambda) \right] \right]$$

$$L(\lambda; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\lambda^{k_i} e^{-\lambda \sum_{j=1}^{k_i} (t_j^i - t_{j-1}^i)} e^{-\lambda(t_c - t_{k_i}^i)} \right] = \prod_{i=1}^n \lambda^{k_i} e^{-\lambda t_c} = \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i} e^{-n \lambda t_c} = \lambda^r e^{-n \lambda t_c},$$

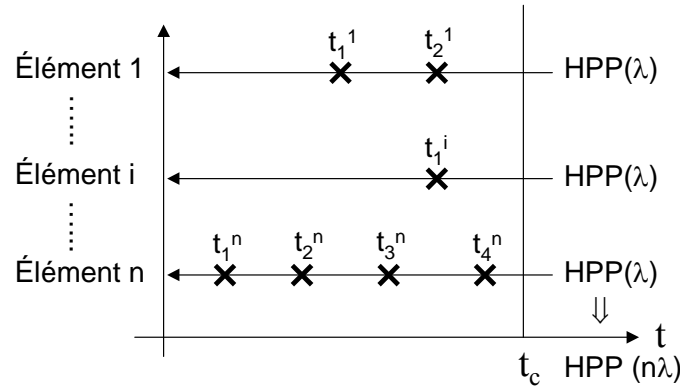
Où $r = \sum_{i=1}^n k_i$ est le nombre total de défaillances observées.

Donc, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{R}{n t_c}$$

Propriété : R est de loi de Poisson $\mathbf{P}(n \lambda t_c)$

Démonstration : pour un élément donné, on a vu que les temps inter-défaillances sont indépendants et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, donc le processus des défaillances est un processus de Poisson homogène de paramètre λ . Les processus des défaillances des n éléments, somme de n processus de Poisson homogènes indépendants, est alors un processus de Poisson homogène de paramètre $n \lambda$. Par conséquent, le nombre total R de défaillances observées entre 0 et t_c est de loi $\mathbf{P}(n \lambda t_c)$. CQFD



Conséquence : $\hat{\lambda}_n$ est l'estimateur sans biais de λ (il est aussi de variance minimum).

Démonstration : $R \sim P(n \lambda t_c)$, donc $E(R) = n \lambda t_c$, et par suite $E(\hat{\lambda}_n) = \lambda$.

R est une statistique exhaustive. Montrons qu'elle est complète.

$$\forall \lambda > 0, E(h(R)) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) e^{-n \lambda t_c} \frac{(n \lambda t_c)^k}{k!} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n \lambda t_c} \frac{h(k) (n t_c)^k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} = 0 \Leftrightarrow \forall k \geq 0, \frac{h(k) (n t_c)^k}{k!} = 0 \Leftrightarrow h = 0.$$

$\hat{\lambda}_n$ est un estimateur sans biais de λ , fonction d'une statistique exhaustive et complète, donc c'est l'ESBVM de λ .

Estimation bayésienne avec a priori impropre : $f_\lambda(\lambda) = 1_{R^+}(\lambda)$. On a donc :

$$F_{\lambda|R=r}(\lambda) = \frac{P(R=r)}{\int_0^{+\infty} P(R=r) d\lambda} = \frac{e^{-n \lambda t_c} \frac{(n \lambda t_c)^r}{r!}}{\int_0^{+\infty} e^{-n u t_c} \frac{(n u t_c)^r}{r!} du * \frac{n t_c}{n t_c}} = \frac{e^{-n \lambda t_c} \frac{(n t_c)^{r+1}}{r!} \lambda^r}{\int_0^{+\infty} f_{G(r, n t_c)}(u) du} = \frac{(n t_c)^{r+1}}{r!} e^{-(n t_c) \lambda} \lambda^r.$$

C'est la loi $G(r+1, n t_c)$, donc un estimateur bayésien de λ est $\frac{R+1}{n t_c}$.

Pour construire un intervalle de confiance pour λ , on ne peut pas trouver directement de fonction pivotale à partir de R . En revanche, on peut rappeler qu'un intervalle de confiance pour λ sera l'ensemble des valeurs λ_0 et λ pour lesquelles on n'est pas amené à rejeter l'hypothèse « $\lambda = \lambda_0$ » au vu de r , dans un test de « $\lambda = \lambda_0$ » contre « $\lambda \neq \lambda_0$ ».

La région critique d'un tel test est du type $W = \{ R \leq r_1 \text{ ou } R \geq r_2 \}$, avec $r_1 < r_2$.

Le seuil du test est $\alpha = P_{H_0}(R \leq r_1) + P_{H_0}(R \geq r_2)$.

Or, les propriétés des processus de comptage font que $P_{H_0}(R \geq r_2) = P_{H_0}(T_{r_2} \leq t_c)$, où T_{r_2} est l'instant de la $r_2^{\text{ème}}$ défaillance dans un processus de Poisson de paramètre $n \lambda$.

On a donc $T_{r_2} \sim G(r_2, n \lambda)$, d'où $2 n \lambda T_{r_2} \sim \chi_{2r_2}^2$, et $P_{H_0}(R \geq r_2) = P_{H_0}(2 n \lambda_0 T_{r_2} \leq 2 n \lambda_0 t_c)$.

Donc $P_{H_0}(R \geq r_2) = F_{\chi_{2r_2}^2}(2 n \lambda_0 t_c)$.

Par un calcul analogue, on montre que $P_{H_0}(R \leq r_1) = P_{H_0}(T_{r_1+1} > t_c) = 1 - F_{\chi_{2(r_1+1)}^2}(2 n \lambda_0 t_c)$. Comme la loi de R est discrète, on ne trouvera pas forcément de valeurs r_1 et r_2 telles que $P_{H_0}(R \leq r_1) + P_{H_0}(R \geq r_2)$ soit exactement égal à α .

Par contre, on peut trouver r_1 et r_2 tels que $P_{H_0}(R \leq r_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P_{H_0}(R \geq r_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, de sorte que le seuil du test soit inférieur à α .

Au vu de r , on ne rejettera pas « $\lambda = \lambda_0$ » si et seulement si $r_1 \leq r \leq r_2$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$F_{\chi^2_{2r}}(2n\lambda_0 t_c) > \frac{\alpha}{2} \text{ et } 1 - F_{\chi^2_{2(r+1)}}(2n\lambda_0 t_c) > \frac{\alpha}{2}, \text{ d'où } \lambda_0 > \frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2r}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } \lambda_0 < \frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2(r+1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

D'où le résultat :

Propriété : un intervalle de confiance de seuil approximativement égal à α pour λ est :

$$\left[\frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2R}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right); \frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2(R+1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] = \left[\frac{Z_{2R, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n t_c}; \frac{Z_{2(R+1), \frac{\alpha}{2}}}{2n t_c} \right]$$

en n'oubliant pas que R reste aléatoire.

Remarque 1 : le fait que R soit exhaustive montre qu'il est inutile de relever les instants de défaillance des éléments, ce qui permet de se dispenser d'une tâche longue et fastidieuse.

Vérification : on sait que $F_R(R) \sim U_{[0,1]}$. Or $F_R(R) = 1 - F_{\chi^2_{2(R+1)}}(2n\lambda_0 t_c)$. Donc :

$$P(\lambda_0 < \frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2(R+1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)) = P(2n\lambda_0 t_c \leq F_{\chi^2_{2(R+1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)) = P(F_{\chi^2_{2(R+1)}}(2n\lambda_0 t_c) < 1 - \frac{\alpha}{2}).$$

$$P(\lambda_0 < \frac{1}{2n t_c} F_{\chi^2_{2(R+1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)) = F_{U_{[0,1]}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

III.1.6 Plan d'essai censuré de type II avec remplacement

On décide ici de stopper les essais au bout de r défaillances. On note T_r l'instant de la $r^{\text{ème}}$ défaillance. Compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, T_r est de loi $G(r, n\lambda)$. La fonction de vraisemblance est la même qu'au paragraphe précédent, à condition de remplacer t_c par t_r . L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{r}{n T_r}$$

Il est facile de montrer que $\hat{\lambda}_n$ est biaisé, et que $\hat{\lambda}'_n = \frac{r-1}{n T_r}$ est sans biais. T_r est une statistique exhaustive, et

l'on peut montrer de plus qu'elle est complète. D'où :

Propriété : $\hat{\lambda}'_n = \frac{r-1}{n T_r}$ est l'estimateur sans biais de variance minimum de λ .

Étant donné que $2n\lambda T_r \sim \chi^2_{2n}$, on obtient :

$$\text{Propriété : un intervalle de confiance de seuil } \alpha \text{ pour } \lambda \text{ est } \left[\frac{F_{\chi^2_{2r}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n T_r}; \frac{F_{\chi^2_{2r}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2n T_r} \right].$$

III.1.7 Plan d'essai multi-censuré de type I avec remplacement

L'élément i est ici observé jusqu'à l'instant t_{ci} . La fonction de vraisemblance est :

$$L(\lambda; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^{k_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \lambda) \right] \left[1 - F(t_{k_i}^i - t_{k_i}^i; \lambda) \right]$$

$$L(\lambda; k_1, \dots, k_n, t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\lambda^{k_i} e^{-\lambda \sum_{j=1}^{k_i} (t_j^i - t_{j-1}^i)} e^{-\lambda (t_{k_i}^i - t_{k_i}^i)} \right] = \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_{ci}} = \lambda^r e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_{ci}}, \text{ où } r = \sum_{i=1}^n k_i \text{ est le}$$

nombre total de défaillances observées.

L'estimateur de maximum de vraisemblance de λ est donc :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{R}{\sum_{i=1}^n t_{c_i}}$$

Cette fois, R n'est pas de loi simple, car les instants de censure sont différents pour chacun des éléments. On en peut donc pas déterminer simplement les propriétés de $\hat{\lambda}_n$.

III.1.8 Plan d'essai multi-censuré de type II avec remplacement

On observe ici les r_i premières défaillances de l'élément i . La fonction de vraisemblance est :

$$L(\lambda; t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^{r_i} f(t_j^i - t_{j-1}^i; \lambda) \right] = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{r_i} \lambda e^{-\lambda(t_j^i - t_{j-1}^i)} = \prod_{i=1}^n \lambda^{r_i} e^{-\lambda \sum_{j=1}^{r_i} (t_j^i - t_{j-1}^i)}$$

$$L(\lambda; t_1^1, \dots, t_{k_n}^n) = \prod_{i=1}^n \lambda^{r_i} e^{-\lambda t_i^{r_i}} = \lambda^{\sum_{i=1}^n r_i} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i^{r_i}}.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est donc :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{\sum_{i=1}^n T_i^{r_i}}$$

Les $T_i^{r_i}$ sont indépendants, et de lois respectives $G(r_i, \lambda)$. Donc $\sum_{i=1}^n T_i^{r_i}$ est de loi $G(\sum_{i=1}^n r_i, \lambda)$ et $2\lambda \sum_{i=1}^n T_i^{r_i}$ est de loi $\chi_{2\sum_{i=1}^n r_i}^2$. En utilisant les mêmes calculs que précédemment, on obtient :

Propriété : $\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^n r_i - 1}{\sum_{i=1}^n T_i^{r_i}}$ est l'estimateur sans biais de variance minimum pour λ . Un intervalle de confiance de seuil α pour λ est $\left[\frac{1}{2 \sum_{i=1}^n T_i^{r_i}} F_{\chi_{2\sum_{i=1}^n r_i}^2}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right); \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n T_i^{r_i}} F_{\chi_{2\sum_{i=1}^n r_i}^2}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$

III.1.9 Loi exponentielle décalée

Dans certaines applications, il se peut que les appareils testés ne puissent pas tomber en panne avant une date minimum μ , qui peut être inconnue. Une façon de modéliser ce phénomène consiste à considérer que la durée de vie de ces éléments est de loi exponentielle décalée, dont la densité est :

$$f(x; \lambda, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \mu \\ \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} & \text{si } x \geq \mu, \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore $f(x; \lambda, \mu) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} 1_{[\mu, +\infty[}(x)$.

Une estimation naturelle de μ est x_1^* , instant de la première défaillance. Cette estimation est naturellement biaisée, puisqu'on sait que x_1^* est forcément supérieur ou égal à μ . La façon de débiaiser cet estimateur dépend

des plans d'essais adoptés. Par exemple, pour un plan censuré de type II sans remplacement, les estimateurs sans biais de variance minimum de λ et μ sont :

- $\hat{\mu} = X_1^* - \frac{1}{(n-1)\hat{\lambda}}$;
- $\hat{\lambda} = \frac{r-2}{\sum_{i=1}^r X_i^* + (n-r)X_r^* - nX_1^*}$.

III.1.10 Conclusion

Le point le plus important à noter à propos de la loi exponentielle est le suivant.

Dans tous les cas de censure, l'estimateur de maximum de vraisemblance de λ est égal au rapport du nombre de défaillances observées, sur la durée cumulée de bon fonctionnement de tous les éléments sur la période d'observation (ou Temps Total en Test : TTT).

Ce n'est pas étonnant, dans la mesure où $\lambda = \frac{1}{\text{MTTF}}$, et qu'un estimateur naturel du MTTF est l'estimateur des moments, égal à la durée totale de bon fonctionnement des n appareils, divisée par le nombre de défaillances observées.

L'autre phénomène notable est que la censure de type II possède des propriétés mathématiques remarquables par rapport à la censure de type I. En particulier, le cas des données complètes est un cas particulier de la censure de type II.

Si on a le choix, il est recommandé d'utiliser plutôt une censure de type II, et de déterminer le nombre r de défaillances à observer, en fonction par exemple de la durée moyenne des essais dans ce cas.

III.2 La loi de Weibull

On suppose ici que les observations sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi $W(\eta, \beta)$, $\eta > 0$, $\beta > 0$.

III.2.1 Propriétés de la loi de Weibull

On rappelle que pour $x \geq 0$, $F(x; \eta, \beta) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$, $f(x; \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$, $R(x; \eta, \beta) = e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$, et

$$\lambda(x; \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

- $\beta < 1$: $\lambda(x)$ est alors décroissant, donc le système s'améliore ;
- $\beta > 1$: $\lambda(x)$ est alors croissant, donc le système s'use.
- $\beta = 1$: $\lambda(x)$ est alors constant $= \frac{1}{\eta}$; c'est la loi exponentielle.

$$\text{MTTF} = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad \text{Var}(X) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right].$$

La forme du taux de défaillance fait que la loi de Weibull peut modéliser de nombreux cas de figures. Elle s'est avérée être expérimentalement un bon modèle dans des domaines aussi divers que :

- l'analyse des pannes de composants électroniques ;
- l'analyse de survie pour les organismes biologiques ;

- les tests de rupture et d'usure de textiles ;
- l'analyse de la résistance à la corrosion ;
- l'étude des pannes de batteries par fuites.

La loi de Weibull est plus adaptée que la loi exponentielle en période de jeunesse ou de vieillissement. C'est une des trois lois des valeurs extrêmes : si on considère un système constitué d'un grand nombre de composants, et si la panne du système survient dès qu'un des composants tombe en panne, la loi de Weibull peut être un bon modèle pour la durée du vie du système. On dit aussi que la loi de Weibull est la loi du « maillon le plus faible » (Weakest link).

Propriété : si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité $W(\eta, \beta)$,

$$\text{alors } X_1^* = \min_{i=1}^n X_i \sim W\left(\frac{\eta}{n^{1/\beta}}, \beta\right).$$

Démonstration : $F_{X_1^*}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - \left[e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} \right]^n = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta/n^{1/\beta}}\right)^\beta}$. CQFD

Par conséquent, un système série dont les composants ont leur durée de bon fonctionnement de même loi de Weibull, aura une durée de bon fonctionnement de loi de Weibull. Cette propriété reste vraie si les X_i ont des paramètres η différents, mais avec le même paramètre β pour tous.

Propriété : si $X \sim W(\eta, \beta)$, alors $X^\beta \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\eta}\right)$.

Démonstration : $F_{X^\beta}(x) = P(X^\beta \leq t) = P(X \leq t^{1/\beta}) = 1 - e^{-\left(\frac{t^{1/\beta}}{\eta}\right)^\beta} = 1 - e^{-\frac{1}{\eta} t}$. CQFD.

Propriété : si $X \sim W(\eta, \beta)$, alors $\ln(X) \sim \text{EV}\left(\ln \eta, \frac{1}{\beta}\right)$.

Démonstration : la loi $\text{EV}(a, b)$ est la loi des valeurs extrêmes (Extreme Value) ou loi de Gumbel. Comme son nom l'indique, c'est une des trois lois des valeurs extrêmes. Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}, \quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+.$$

On a alors :

$$F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leq t) = P(X \leq e^x) = 1 - e^{-\left(\frac{e^x}{\eta}\right)^\beta} = 1 - e^{-e^{(x - \ln \eta)\beta}} = e^{-e^{-\frac{x - \ln \eta}{1/\beta}}}$$
 CQFD.

III.2.2 Tests d'adéquation

Graphes de probabilité

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}, \text{ donc } \ln(1 - F(x)) = -\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta.$$

Mise sous la forme $\ln[-\ln(1 - F(x))] = \beta \ln x - \beta \ln \eta$, on constate que cette équation permet de construire un graphe de probabilité en dessinant le nuage de points $(\ln x_i^*, \ln[-\ln(1 - \frac{i}{n})])_{i=1, \dots, n-1} = (\ln x_i^*, \ln \ln \frac{n}{n-i})$.

Tests basés sur la fonction de répartition empirique

Ces tests ne sont pas applicables directement, car le paramètre β n'est ni un paramètre de position, ni à vraiment dire un paramètre d'échelle, donc les lois limites des statistiques KS, CVM et AD dépendent de β , ce qui empêche de les tabuler. En revanche, les paramètres de la loi de Gumbel sont des vrais paramètres de position et d'échelle. On va donc pouvoir tester l'adéquation des $Y_i = \ln(X_i)$ à la loi de Gumbel. Les lois limites des statistiques de test sont tabulées (voir D'agostino-Stephens, pp. 146-148). On obtient donc bien finalement des tests d'adéquation à la loi de Weibull.

Test de Mann, Scheuer et Fertig

Soit $Y_i = \ln X_i$ et $Z_i = \frac{Y_{i+1}^* - Y_i^*}{\ln \ln \left[\frac{4n+1}{4(n-i-1)+3} \right] - \ln \ln \left[\frac{4n+1}{4(n-i)+3} \right]}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Si les X_i sont indépendantes et de loi de Weibull, alors la variable aléatoire $U = \frac{\sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} Z_i}{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} Z_i}$ est

approximativement de loi de Fisher $F\left(2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. En pratique, cette approximation est valable pour

$n \geq 20$. Ce résultat permet de faire un test d'adéquation. C'est ce test que l'on recommande en général pour tester l'adéquation d'un échantillon à la loi de Weibull. La région critique est :

$$W = \left\{ U < F_{F\left(2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ ou } U > F_{F\left(2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \right\} = \left\{ U < f_{2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1-\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } U > f_{2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

III.2.3 Estimation des paramètres

On ne traitera ici que le cas des données censurées de type II à la $r^{\text{ème}}$ défaillance. Le cas des données complètes correspond à $r = n$. La fonction de vraisemblance est :

$$L(\eta, \beta; x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i^*; \eta, \beta) \right] [1 - F(x_r^*; \eta, \beta)]^{n-r}$$

$$L(\eta, \beta; x_1^*, \dots, x_r^*) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{\beta^r}{\eta^{\beta r}} \left[\prod_{i=1}^r (x_i^*)^{\beta-1} \right] e^{-\frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^r x_i^{*\beta}} \left[e^{-\left(\frac{x_r^*}{\eta}\right)^\beta} \right]^{n-r}.$$

$$\text{Donc } \ln L(\eta, \beta; x_1^*, \dots, x_r^*) = K + r \ln \beta - \beta r \ln \eta + (\beta-1) \sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) - \frac{1}{\eta^\beta} \left[\sum_{i=1}^r (x_i^*)^\beta + (n-r) x_r^{*\beta} \right].$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{\beta r}{\eta} - \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \left[\sum_{i=1}^r (x_i^*)^\beta + (n-r) x_r^{*\beta} \right]. \text{ D'où :}$$

$$\hat{\eta} = \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r x_i^{*\beta} + (n-r) x_r^{*\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \frac{r}{\beta} - r \ln(\eta) + \sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) \\ &\quad - \frac{1}{\eta^\beta} \left[\sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) (x_i^*)^\beta + (n-r) \ln(x_r^*) x_r^{*\beta} \right] - \ln(\eta) \eta^\beta \left[\sum_{i=1}^r (x_i^*)^\beta + (n-r) x_r^{*\beta} \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} - r \ln(\eta) + \sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) - \frac{1}{\eta^\beta} \left[\sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) (x_i^*)^\beta + (n-r) \ln(x_r^*) x_r^{*\beta} - \ln(\eta) \left[\sum_{i=1}^r (x_i^*)^\beta + (n-r) x_r^{*\beta} \right] \right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) - \frac{1}{\eta^\beta} \left[\sum_{i=1}^r \ln(x_i^*) (x_i^*)^\beta + (n-r) \ln(x_r^*) x_r^{*\beta} \right]$$

$$- \ln(\eta) \left[r - \frac{1}{\eta^\beta} \left(\sum_{i=1}^r (x_i^*)^\beta + (n-r) x_r^{*\beta} \right) \right], \text{ ce dernier terme dont on remarque que l'intérieur du crochet}$$

est nul pour $\eta = \hat{\eta}$.

Donc, en remplaçant η par son estimateur $\hat{\eta}$, on conclut que $\hat{\beta}$ est solution de l'équation implicite :

$$\frac{r}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^r \ln(X_i^*) - r \frac{\sum_{i=1}^r (\ln X_i) X_i^{*\hat{\beta}} + (n-r) (\ln X_r^*) X_r^{*\hat{\beta}}}{\sum_{i=1}^r X_i^{*\hat{\beta}} + (n-r) X_r^{*\hat{\beta}}} = 0$$

Cette équation ne peut se résoudre que par des méthodes numériques. Le fait que $\hat{\beta}$ n'ait pas d'expression explicite rend difficile la détermination de ses propriétés. En particulier, on ne peut pas calculer simplement son biais.

Pour y arriver, on montre que les lois de probabilité de $\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^\beta$, $\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^{\hat{\beta}}$ et $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ ne dépendent ni de η ni de β (ce sont

donc des fonctions pivotales). Les quantiles de ces lois sont déterminés par simulation. Les tables de la loi de $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$

permettent d'établir que $B_n \hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β (B_n se lit dans les tables – Bain et Engelhardt, p. 221).

Par exemple, $B_{10} = 0,859$ et $B_{30} = 0,955$. On a évidemment $B_\infty = 1$.

Ces fonctions pivotales permettent de construire des intervalles de confiance pour η et β , qui nécessitent encore le recours à des tables.

Puisque les résultats exacts sont complexes, on peut parfois se contenter de résultats approchés. On montre ainsi que, en cas de forte censure ($r \ll n$), $\frac{2r\beta}{\hat{\beta}}$ est approximativement de loi $\chi^2_{2(r-1)}$.

On montre que l'estimateur de maximum de vraisemblance de la fiabilité, $\hat{R}_x = e^{-\left(\frac{x}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{\beta}}}$ est « presque » un ESBVM de $R(x)$. Ce terme « presque » signifie que $E[\hat{R}_x - R(x)]$ est très petit, et que $\text{Var}(\hat{R}_x)$ est très proche de la borne de Cramer-Rao.

Une autre possibilité consiste à se ramener à la loi de Gumbel. Les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Gumbel posent les mêmes problèmes que pour la loi de Weibull (c'est normal), mais on peut cette fois trouver des estimateurs linéaires sans biais. En revenant à la loi de Weibull, cela permet de proposer des estimateurs ayant une forme explicite :

- $\tilde{\eta}_n = X_r^* e^{-\frac{c_{r,n}}{\tilde{\beta}_n}}$;
- $\tilde{\beta}_n = \frac{n k_{r,n}}{r X_r^* - \sum_{i=1}^r X_i^*}$,

où $c_{r,n}$ et $k_{r,n}$ sont des constantes tabulées (Bain et Engelhardt, pp. 255-256).

Ces estimateurs sont équivalents aux EMV en cas de forte censure. Ils sont biaisés, mais leur variance est raisonnablement faible. On peut en tirer des intervalles de confiance approchés pour η et β .

Intervalles de confiance asymptotiques

On utilise le fait que $\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_n - \eta \\ \hat{\beta}_n - \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N(0, J^{-1}(\eta, \beta))$, où $J^{-1}(\eta, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\eta^2}{\beta^2} \left(1 + \frac{6(1-\gamma)^2}{\pi^2} \right) & \eta \frac{6(1-\gamma)}{\pi} \\ \eta \frac{6(1-\gamma)}{\pi} & \beta^2 \frac{6}{\pi^2} \end{pmatrix}$, avec

$\gamma = 0,5772156$ (constante d'Euler).

On en déduit des intervalles de confiance asymptotiques de seuil α pour des données complètes :

- Pour η : $\left[\hat{\eta}_n \pm \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\hat{\eta}_n}{\hat{\beta}_n} \sqrt{1 + \frac{6(1-\gamma)^2}{\pi^2}} \right]$;
- Pour β : $\left[\hat{\beta}_n \pm \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \hat{\beta}_n \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right]$.

Il existe également un autre estimateur explicite simple pour des données complètes :

$\hat{\beta}_n = \frac{n \ln(n)}{\sum_{i=1}^n (\ln(X_i^*) - \ln(X_1^*))}$. Il se trouve que $\frac{1}{\hat{\beta}_n}$ est un ESB de $\frac{1}{\beta}$.

Loi de Weibull à trois paramètres

Comme pour la loi exponentielle, on peut rajouter un paramètre de localisation μ . On a alors $X \sim W(\mu, \eta, \beta)$ si et

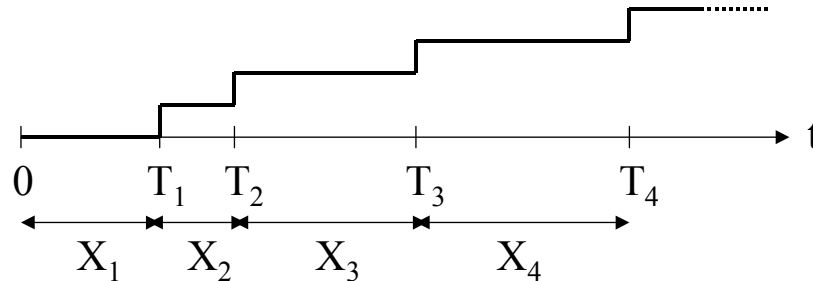
seulement si $F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\eta}\right)^\beta}$, $x \geq \mu$.

Il est clair que l'on va estimer μ par $\hat{\mu} = X_1^*$ et que les estimateurs de η et β seront obtenus à l'aide des formules du cas $\mu = 0$ en décalant toutes les données de X_1^* .

On montre que l'introduction du troisième paramètre pose de nombreux problèmes, en particulier d'identifiabilité : 2 jeux de paramètres (μ_0, η_0, β_0) et (μ_1, η_1, β_1) très différents peuvent produire des réalisations très semblables. Il vaut donc mieux éviter cette loi.

IV Analyse statistique des modèles de fiabilité des systèmes réparables

On se place maintenant dans le cas où les observations ne sont plus un échantillon, mais les temps inter-défaillances successifs dans un processus ponctuel auto-excité.



Quand on opte pour un modèle de ce type, la première chose à faire est de déterminer si la fiabilité du système croît, décroît, ou reste stable au cours du temps.

IV.1 Croissance et décroissance de fiabilité

Certains modèles de fiabilité des systèmes réparables supposent une croissance ou une décroissance de fiabilité, voire une décroissance suivie d'une croissance (modèle en S), ou autre. Avant de les appliquer à des données, il est nécessaire de vérifier que ces hypothèses sont vérifiées. On procède alors à ce qu'on appelle un test de tendance. C'est un test d'hypothèse de H_0 « il n'y a pas de tendance de fiabilité » contre, suivant les cas :

- H_1 : « il y a croissance de fiabilité » ;
- H_2 : « il y a décroissance de fiabilité ».

Pour traduire ces hypothèses en termes statistiques, il faut définir précisément ce qu'est la croissance de fiabilité. Intuitivement, on dit qu'il y a croissance de fiabilité lorsque les temps inter-défaillances sont (stochastiquement) de plus en plus grands. D'un point de vue statistique, cela signifie que les fonctions de répartition des variables aléatoires X_i forment une suite décroissante de fonctions.

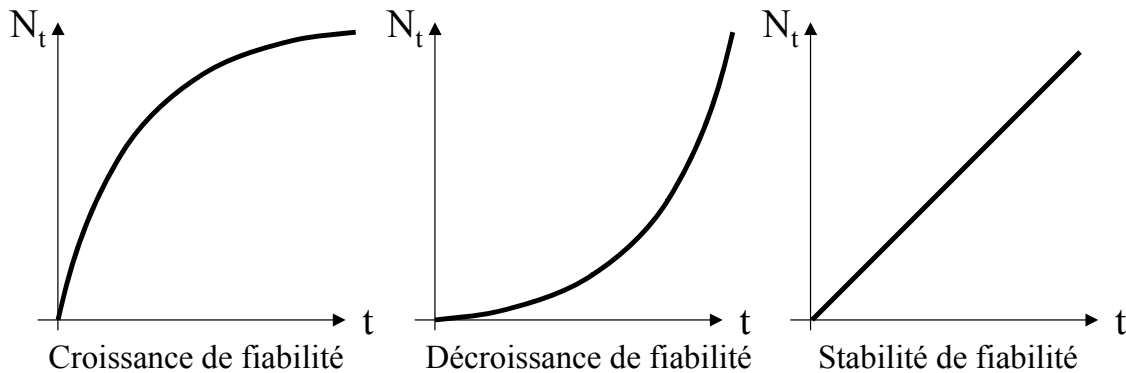
Définition : il y a croissance de fiabilité si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i < j \Rightarrow F_{X_i}(x) \geq F_{X_j}(x)$
 Il y a décroissance de fiabilité si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i < j \Rightarrow F_{X_i}(x) \leq F_{X_j}(x)$.

La propriété de croissance de fiabilité est bien vérifiée dans les modèles de Jelinski-Moranda et Moranda (lois exponentielles), Schick-Wolverton (lois de Weibull) et Littlewood-Verral (loi de Pareto).

Dans la pratique, la plupart des systèmes matériels présenteront une décroissance de fiabilité, alors que les systèmes logiciels et certains systèmes électroniques montreront une croissance de fiabilité.

On peut pour commencer essayer de repérer visuellement la tendance de la fiabilité. On peut tout simplement dessiner la courbe des temps intermédiaires successifs, et regarder s'ils sont de plus en plus grands ou de plus en plus petits. Mais cette courbe est très bruitée, et n'est pas toujours facile à interpréter.

En revanche, il est plus lisible de représenter la courbe du nombre de défaillances survenues en fonction du temps : $N_t = f(t)$.



Si la courbe est concave, c'est qu'il se produit de moins en moins de défaillances au cours du temps, donc la fiabilité est croissante. Réciproquement, si la courbe est convexe, la fiabilité est décroissante. Si la courbe est rectiligne, c'est que le nombre de défaillances par unité de temps est un peu près constant, donc la fiabilité est stable.

Ces techniques graphiques donnent une idée de la tendance de la fiabilité, mais il est préférable d'avoir un test statistique permettant d'opter pour une tendance particulière, à un niveau de signification donné. Plusieurs tests existent, mais le plus connu est le test de Laplace.

On observe le système sur un intervalle de temps $[0, T]$. S'il y a croissance de fiabilité, alors les temps inter-défaillances x_i sont de plus en plus grands, donc les instants de défaillance t_i sont plutôt plus proche de 0 que de T . Par conséquent, la moyenne des t_i est inférieure au milieu de la période d'observation $\frac{T}{2}$. Le test de

Laplace est ainsi basé sur la différence entre $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ et $\frac{T}{2}$.

L'hypothèse H_0 de non tendance signifie que les réparations n'ont pas d'influence sur la fiabilité, et donc l'intensité de défaillance est à peu près constante. Par conséquent, sous H_0 , $\{X_i\}_{i \geq 1}$ est un processus de Poisson homogène (HPP). Or, une propriété classique des HPP indique que si on observe n événements aux dates t_1, \dots, t_n entre 0 et T , les T_i sont distribués comme des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, T]$, rangées dans l'ordre croissant. Par application du théorème de la limite centrale, on en déduit que :

$$U = \frac{\sum_{i=1}^n T_i - n \frac{T}{2}}{\sqrt{\frac{n T^2}{12}}}$$
 converge en loi vers la loi normale centrée réduite. De plus, la convergence est très rapide.

Le test de Laplace consiste donc à calculer la statistique $u = \frac{\sum_{i=1}^n t_i - n \frac{T}{2}}{\sqrt{\frac{n T^2}{12}}}$, puis à décider, au niveau de

signification α , qu'il y a :

- Croissance de fiabilité si et seulement si $u < \lambda_\alpha$;
- Décroissance de fiabilité si et seulement si $u > \mu_\alpha$;
- Stabilité de fiabilité si et seulement si $|u| > \nu_\alpha$.

λ_α , μ_α et ν_α sont des quantiles de la loi normale centrée réduite. Par exemple, pour $\alpha = 5\%$, $\lambda_\alpha = -1.645$, $\mu_\alpha = 1.645$ et $\nu_\alpha = 1.96$.

Le test de Laplace va permettre de choisir des modèles ayant des tendances de fiabilité correspondant aux données. Il restera alors à estimer les paramètres de ces modèles, de façon à évaluer la fiabilité du système.

IV.2 Estimation des paramètres et de la fiabilité

Nous nous contenterons ici d'étudier deux modèles : le modèle de Moranda et le modèle NHPP de puissance.

IV.2.1 Le modèle de Moranda, ou modèle proportionnel déterministe

On suppose ici $\lambda_t = \lambda c^{N_t}$: les X_i sont indépendants de loi exponentielle $\text{Exp}(\lambda c^{i-1})$. La fonction de vraisemblance est donc :

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\lambda, c) = \prod_{i=1}^n \lambda c^{i-1} e^{-\lambda c^{i-1} x_i} = \lambda^n c^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i}$$

$$\ln L_{x_1, \dots, x_n}(\lambda, c) = n \ln \lambda + \frac{n(n-1)}{2} \ln c - \lambda \sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i, \text{ et donc}$$

$$\hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = \frac{n(n-1)}{2c} - \lambda \sum_{i=1}^n (i-1) c^{i-2} x_i, \text{ et donc } \hat{c}_n \text{ est solution de :}$$

$$\frac{n(n-1)}{2c} - n \frac{\sum_{i=1}^n (i-1) c^{i-2} x_i}{\sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i} = 0, \text{ soit encore } (n-1) \sum_{i=1}^n c^{i-1} x_i - 2c \sum_{i=1}^n (i-1) c^{i-2} x_i = 0, \text{ ou encore :}$$

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1) c^{i-1} x_i = 0$$

\hat{c}_n est à déterminer numériquement, par exemple par la méthode de Newton-Raphson. Sa loi de probabilité n'est pas explicite, mais a été tabulée, ce qui permet d'obtenir des intervalles de confiance.

A l'instant t_n , on estime la fiabilité par $\hat{R}_{t_n}(\tau) = e^{-\hat{\lambda} \hat{c}^n \tau}$, et le MTTF par $\frac{1}{\hat{\lambda} \hat{c}^n}$.

IV.2.2 Le modèle NHPP de puissance, ou modèle de Crow

On suppose ici $\lambda_t = \alpha \beta t^{\beta-1}$. La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L_{t_1, \dots, t_n}(\alpha, \beta) = \left[\prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\beta-1} \right] e^{-\int_0^{t_n} \alpha \beta u^{\beta-1} du} = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_n^\beta}.$$

$$\text{Donc } \ln L_{t_1, \dots, t_n}(\alpha, \beta) = n \ln \alpha + n \ln \beta + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha t_n^\beta.$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - t_n^\beta, \text{ et donc :}$$

$$\hat{\alpha}_n = \frac{n}{t_n^\beta}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha (\ln t_n) t_n^\beta, \text{ donc } \hat{\beta}_n \text{ est solution de :}$$

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{n}{t_n^\beta} (\ln t_n) t_n^\beta = 0, \text{ ou encore :}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{t_n}{t_i}}}$$

La loi de probabilité des estimateurs est complexe, mais on peut montrer que $\frac{1}{\hat{\beta}_n}$ suit une loi du χ^2 . La fiabilité

estimée est $\hat{R}_{t_n}(\tau) = e^{-\hat{\alpha}((t_n + \tau)^{\hat{\beta}} - t_n^{\hat{\beta}})} = e^{-n(1 + \frac{\tau}{t_n})^{\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{t_n}{t_i}}}}$. Quant au MTTF, il n'a pas d'expression simple.

Remarque : parmi tous les modèles NHPP classiques, le modèle de Crow est le seul pour lequel on dispose d'une expression explicite des estimateurs. En général, il faut calculer numériquement la racine d'une équation.

