经典随机矩阵理论 2022秋

Wigner 半圆律和Stieltjes transform

周博文 *bowen_zz@sjtu.edu.cn*

1 准备工作

定义 1 (Wigner 矩阵). 随机的对称矩阵$H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^n$若满足对任意$i \le j$, 有$\mathbb{E}h_{ij} = 0$和$Var(h_{ij}) = 1/n$, 且$h_{ij}, 1 \le i \le j \le n$都独立，则称$H$为*Wigner*矩阵。

定义 2 (经验谱分布). 记$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$为随机矩阵$H$的特征值，则$H$的经验谱分布定义为

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\lambda_i \le x).$$

定义 3 (Wigner 半圆律). 下面分布称为*Wigner* 半圆律分布μ_{sc}:

$$\mu_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}I(-2 \le x \le 2)dx.$$

定义 4 (测度的弱收敛). 假设一列概率测度μ_n, 以及概率测度μ, 如果对任意连续有界函数f，有

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu,$$

则称μ_n弱收敛到μ, 记为$\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$。若$\mu_n$带有随机性，则需加上几乎处处收敛或者依概率收敛，即

$$\int f d\mu_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{a.s.} \int f d\mu.$$

本文最终的结论会证明Wigner矩阵H_n的经验谱分布μ_n几乎处处弱收敛到Wigner半圆律μ_{sc}，证明用到的核心工具为Stieltjes transform。

定义 5 (Stieltjes transform). 一个测度μ的*Stieltjes transform*定义为

$$m_\mu(z) = \int \frac{1}{x-z} d\mu(x),$$

其中$z \in \mathbb{C}$且在μ的支撑集之外。

下面的讨论中我们总是记m_n, m_{sc}分别为μ_n, μ_{sc}的Stieltjes transform。

引理 6. 假设μ_n为一列随机的概率测度，μ为确定性的概率测度。则μ_n几乎处处弱收敛到μ当且仅当对任意$z \in \mathbb{C}_+ = \{a+bi, b>0\}$, m_{μ_n}几乎处处收敛到m_μ.

通过引理 6，我们可以通过分析Stieltjes transform来研究Wigner矩阵经验谱分布的收敛性。下面的讨论中，没,有特殊说明我们总是考虑复数z在正半平面$\mathbb{C}_+$中。

2 Stieltjes transform的性质

命题 7. *Wigner* 矩阵H_n的经验谱分布μ_n的*stieltjes transform* 为

$$m_n(z) = \int \frac{1}{x-z} d\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - z} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(H_n - zI_n)^{-1}.$$

评论. 矩阵$Q(z) = (H_n - zI_n)^{-1}$称为H_n的预解式(resolvent)，有的领域也称为格林函数。

引理 8. 令 $z \neq 0$ 为一个复数，不限制z只在$\mathbb{C}_+$中，则

$$\sqrt{z} = \pm \frac{|z| + z}{\sqrt{2(|z| + \Re(z))}}.$$

证明. 假设$z = a + bi = r\exp(i(\theta + 2k\pi))$, 其中$r = \sqrt{a^2+b^2}, \theta = \arctan(b/a), k = 0, 1, \cdots$. 从而

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

对z开根号可得$\sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i(\theta/2 + k\pi)) = \pm\sqrt{r}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2))$. 现在我们计算$\cos(\theta/2)$和$\sin(\theta/2)$的值。由于其满足

$$\begin{cases} \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1, \\ \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = a/(\sqrt{a^2+b^2}). \end{cases}$$

联立可得

$$\begin{cases} \cos(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{a+r}{\sqrt{2(a+r)}}, \\ \sin(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{b}{\sqrt{2(a+r)}}. \end{cases}$$

所以

$$\sqrt{z} = \pm\left[\frac{a+r}{\sqrt{2(a+r)}} + i\frac{b}{\sqrt{2(a+r)}}\right] = \pm\left[\frac{|z|+z}{\sqrt{2(|z| + \Re(z))}}\right].$$

□

评论. 若限制z在正半平面$\mathbb{C}_+$, 且$\sqrt{z}$也选择落在正半平面的根，则有

$$\sqrt{z} = \operatorname{sign}(\Im(z))\frac{|z|+z}{\sqrt{2(|z| + \Re(z))}},$$

且有

$$\Re(\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sign}(\Im(z))\sqrt{|z| + \Re(z)} = \frac{\Im(z)}{\sqrt{2(|z| - \Re(z))}}.$$

定理 9. *Wigner* 半圆律$\mu_{sc} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}I(-2 \le x \le 2)dx$的*stieltjes transform* 为

$$m_{sc}(z) = -\frac{z - \sqrt{z^2-4}}{2}.$$

证明. 根据定义，我们有

$$m_{sc}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{1}{x-z}\sqrt{4-x^2}dx,$$

令$x = 2\cos y$, 则

$$\begin{aligned} m_{sc}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0}\frac{2\sin y}{(2\cos y - z)}(-2\sin y)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2\sin^2 y}{(2\cos y - z)}dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2 y}{(2\cos y - z)}dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(e^{iy}+e^{-iy}-z)}\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)^2 dy, \end{aligned}$$

令$\xi = e^{iy}$得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(e^{iy}+e^{-iy}-z)}\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)^2 dy = -\frac{1}{4\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{(\xi^2-1)^2}{\xi^2(\xi^2-z\xi+1)}d\xi.$$

这里积分函数有三个极点：$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2},\ \xi_2 = \frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}$. 为了使用留数定理，我们需要考虑哪些极点在单位圆内。根据引理 8下面的评论，我们有

$$\Re(\sqrt{z^2-4}) = \frac{\Im(z^2-4)}{\sqrt{2(|z^2-4|-\Re(z^2-4))}} = \frac{\Re(z)\Im(z)}{\sqrt{2(|z^2-4|-\Re(z^2-4))}}.$$

因为$\Im(z) > 0$，所以z与$\sqrt{z^2-4}$的实部同号，从而$|\xi_1| > |\xi_2|$，又根据$\xi_1\xi_2 = 1$，可得$|\xi_1| > 1, |\xi_2| < 1$，因此我们需要计算ξ_0与ξ_2对应的留数。对于ξ_0,

$$\mathrm{Res}(\xi_0) = \frac{4\xi_0(\xi_0^2-1)(\xi_0^2-z\xi_0+1)-(2\xi_0-z)(\xi_0^2-1)^2}{(\xi_0^2-z\xi_0+1)^2} = z.$$

对于ξ_2,

$$\mathrm{Res}(\xi_2) = \frac{(\xi_2^2-1)^2}{\xi_2^2(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi_2^2-\xi_1\xi_2)^2}{\xi_2^2(\xi_2-\xi_1)} = \xi_2-\xi_1 = -\sqrt{z^2-4}.$$

最后应用留数定理得到

$$m_{sc}(z) = -\frac{2\pi i}{4\pi i}(z-\sqrt{z^2-4}) = -\frac{1}{2}(z-\sqrt{z^2-4}).$$

□

3 Wigner 半圆律

定理 10. *H_n为$n\times n$的Wigner矩阵，记μ_n为H_n的经验谱分布，μ_{sc}为Wigner半圆律分布，则μ_n几乎处处弱收敛到μ_{sc}。*

3.1 Bai-Silverstein 证明

我们将分为几个步骤证明定理 10。

第一步: 对任意$z \in \mathbb{C}_+$，$m_n(z)$几乎处处收敛到$\mathbb{E}m_n(z)$。在证明第一步之前需要分析H_n的每一列对其stieltjes transform的影响。

定义 11 (Resolvent minors)**.** *(a)* 对任意$1 \le i \le n$，令$H_n^{(i)}$为H_n去掉第i行,第i列后的$(n-1) \times (n-1)$维矩阵。注意这里我们保持指标集不变。例如，$H_n^{(1)}$的行和列标记为$2, 3, \cdots, n$而不是$1, 2, \cdots, n-1$。

(b) *Resolvent minors*定义为 $Q^{(i)}(z) = (H_n^{(i)} - zI)^{-1}$, 对应的*stieltjes transform*记为$m_n^{(i)}(z) = \frac{1}{n}\operatorname{tr} Q^{(i)}(z)$.

记$w^{(i)}$为H_n的第i列向量去掉第i个元素剩下的$(n-1)$维列向量。下面是一些重要的恒等式。

命题 12. *(a)* 若$i \neq j$, 则

$$[Q(z)]_{ij} = -[Q(z)]_{ii} \sum_{k \neq i} h_{ik} [Q^{(i)}(z)]_{kj};$$

(b) 若$k \notin \{i, j\}$，则

$$[Q(z)]_{ij} = [Q^{(k)}(z)]_{ij} + \frac{[Q(z)]_{ik}[Q(z)]_{kj}}{[Q(z)]_{kk}};$$

(c) *[Ward identity]*

$$\sum_j |[Q(z)]_{ij}|^2 = \sum_j |[Q(z)]_{ji}|^2 = \frac{\Im [Q(z)]_{ii}}{\Im z}.$$

证明.

(a) 利用分块矩阵求逆可得。

(b) 令$\tilde{H}_n^{(k)}$为H_n的第k行，k列元素换成0后得到的$n \times n$维矩阵(也即$H_n^{(k)}$对应的第k行，k列加上0得到的$n \times n$维矩阵)。

(c)

□

基于命题12, 我们就可以控制$\left|m_n(z)-m_n^{(i)}(z)\right|$：

$$\begin{aligned}
\left|m_n(z)-m_n^{(i)}(z)\right| &= \left|\frac{1}{n}\operatorname{tr}Q(z)-\frac{1}{n}\operatorname{tr}Q^{(i)}(z)\right| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|[Q(z)]_{jj}-[Q^{(i)}(z)]_{jj}\right| && \left([Q^{(i)}(z)]_{ii}=0\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{[Q(z)]_{ji}[Q(z)]_{ij}}{[Q(z)]_{ii}}\right| && \text{命题12}(b) \\
&\le \frac{1}{n|[Q(z)]_{ii}|}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|[Q(z)]_{ji}|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|[Q(z)]_{ij}|^2} && (\text{Cauchy 不等式}) \\
&= \frac{1}{n|[Q(z)]_{ii}|}\frac{\Im[Q(z)]_{ii}}{\Im z} && \text{命题12}(c) \\
&\le \frac{1}{n\Im z}.
\end{aligned}$$

注意到这个控制是非随机的。这个控制告诉我们H_n的每一列元素对$m_n(z)$的影响不超过$\frac{1}{n\Im z}$，因此McDiarmid不等式(命题14)可以用来构造$m_n(z)-\mathbb{E}m_n(z)$的集中不等式。令$X_1=h_{11},X_2=(h_{21},h_{22}),\cdots,X_n=(h_{n1},\cdots,h_{nn})$，即$X_i$表示$H_n$的第$i$列上三角的元素。对任意固定的$z$，令$F_z(X_1,\cdots,X_n)=m_n(z)$，则

$$\begin{aligned}
&|F_z(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-F_z(x_1,\cdots,x_i',\cdots,x_n)| \\
\le&\left|F_z(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-m_n^{(i)}(z)\right|+\left|F_z(x_1,\cdots,x_i',\cdots,x_n)-m_n^{(i)}(z)\right| \\
\le&\frac{1}{n\Im z}+\frac{1}{n\Im z} \\
=&\frac{2}{n\Im z}.
\end{aligned}$$

根据命题14，我们有

$$\mathbb{P}\{|m_n(z)-\mathbb{E}m_n(z)|>K\}\le C\exp\left(-\frac{cK^2\Im^2 zn}{4}\right),$$

根据Borel-Cantelli 引理可得$m_n(z)\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}m_n(z)$.

3.2 Gaussian 证明

A 补充引理

引理 13. 对于可逆矩阵A和B，我们有

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

B 集中不等式

命题 14 (McDiarmid's inequality)**.** 假设$X_1, \cdots, X_n$为独立随机变量，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$且满足下面的性质：

$$|F(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - F(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n)| \le \sigma_i$$

对任意的$x_i, x_i', x_j, j \neq i$都成立。则对任意$\kappa > 0$, 有

$$\mathbb{P}\{|F(X) - \mathbb{E}[F(X)]| \ge \kappa\sigma\} \le C\exp(-c\kappa^2),$$

其中C, c是一些常数，$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

评论. 命题14中的随机变量$X_1, \cdots, X_n$可以扩展成随机向量，并且维数可以不相等，因为在证明过程中没有用到X_i是标量这一点。

命题 15 (Talagrand's inequality)**.** 记$K > 0$, 假设$X_1, \cdots, X_n$为独立的随机变量满足$|X_i| \le K, 1 \le i \le n$。假设$F$为*1-Lipschitz* 凸函数，则对任意$\epsilon$, 我们有

$$\mathbb{P}(|F(X) - \mathbb{M}[F(X)]| \ge \epsilon K) \le Ce^{-c\epsilon^2},$$
$$\mathbb{P}(|F(X) - \mathbb{E}[F(X)]| \ge \epsilon K) \le Ce^{-c\epsilon^2},$$

其中$C, c > 0$为常数，$\mathbb{M}$表示中位数。